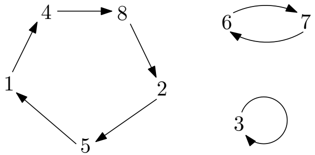
Nowe struktury kombinatoryczne w kilku problemach algorytmicznych

Grzegorz Guśpiel

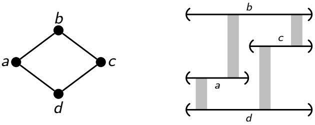
Publiczna obrona rozprawy doktorskiej

promotor: prof. dr hab. Paweł Idziak
promotor pomocniczy: dr Grzegorz Gutowski

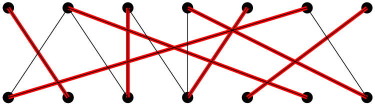
Kraków, 2 lipca 2020



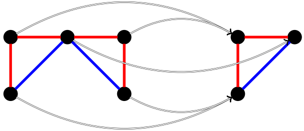
odwracanie permutacji
w miejscu



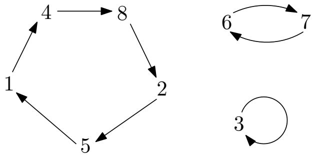
rozszerzanie częściowej
reprezentacji widocznościowej



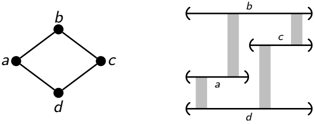
szukanie skojarzenia doskonałego
minimalizującego liczbę przecięć



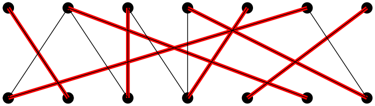
małe grafy docelowe
dla homomorfizmów
kolorowań krawędziowych



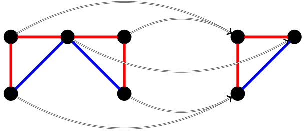
odwracanie permutacji
w miejscu



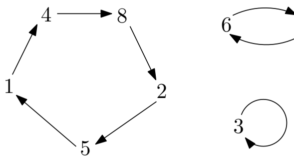
rozszerzanie częściowej
reprezentacji widocznościowej



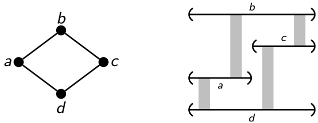
szukanie skojarzenia doskonałego
minimalizującego liczbę przecięć



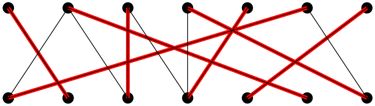
małe grafy docelowe
dla homomorfizmów
kolorowań krawędziowych



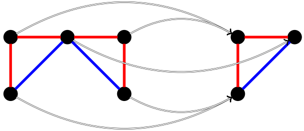
odwracanie permutacji
w miejscu



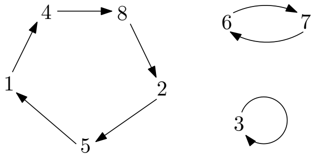
rozszerzanie częściowej
reprezentacji widocznościowej



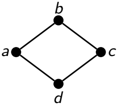
szukanie skojarzenia doskonałego
minimalizującego liczbę przecięć

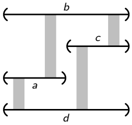


małe grafy docelowe
dla homomorfizmów
kolorowań krawędziowych

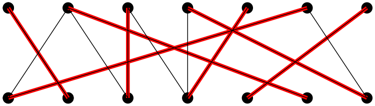


odwracanie permutacji
w miejscu

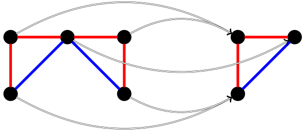




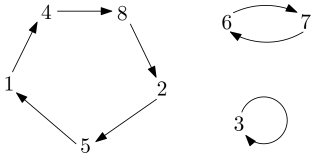
rozszerzanie częściowej
reprezentacji widocznościowej



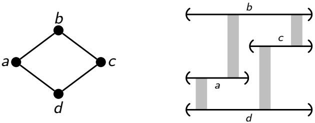
szukanie skojarzenia doskonałego
minimalizującego liczbę przecięć



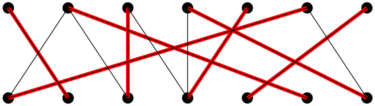
małe grafy docelowe
dla homomorfizmów
kolorowań krawędziowych



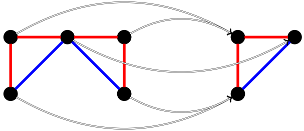
odwracanie permutacji
w miejscu



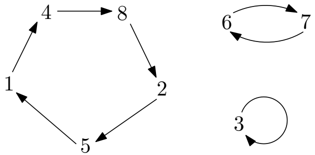
rozszerzanie częściowej
reprezentacji widocznościowej



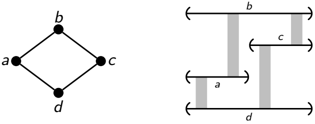
szukanie skojarzenia doskonałego
minimalizującego liczbę przecięć



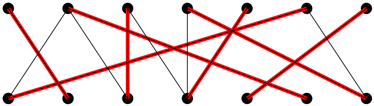
małe grafy docelowe
dla homomorfizmów
kolorowań krawędziowych



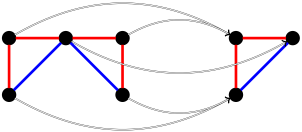
odwracanie permutacji
w miejscu



rozszerzanie częściowej
reprezentacji widocznościowej



szukanie skojarzenia doskonałego
minimalizującego liczbę przecięć



małe grafy docelowe
dla homomorfizmów
kolorowań krawędziowych

Odwracanie permutacji w miejscu

Tablica $t[1..n]$

początkowo zawierająca permutację π zbioru $\{1, \ldots, n\}$ $(t[i] = \pi(i))$

i	1	2	3	4	5
$t[i]$	4	5	1	3	2

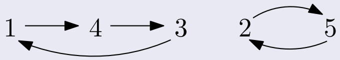
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 3 \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend left] & 5 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Odwracanie permutacji w miejscu

Tablica $t[1..n]$

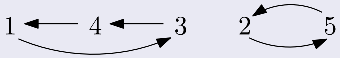
początkowo zawierająca permutację π zbioru $\{1, ..., n\}$
$(t[i] = \pi(i))$

i	1	2	3	4	5
$t[i]$	4	5	1	3	2



Cel: $t[i] = \pi^{-1}(i)$

i	1	2	3	4	5
$t[i]$	3	5	4	1	2

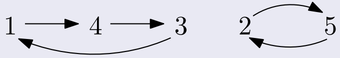


Odwracanie permutacji w miejscu

Tablica $t[1..n]$

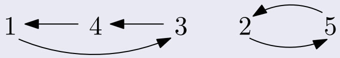
początkowo zawierająca permutację π zbioru $\{1, \ldots, n\}$ $(t[i] = \pi(i))$

i	1	2	3	4	5
$t[i]$	4	5	1	3	2



Cel: $t[i] = \pi^{-1}(i)$

i	1	2	3	4	5
$t[i]$	3	5	4	1	2



Działanie w miejscu

– jedynie $O(\log n)$ dodatkowych bitów pamięci

Oszukiwane $O(n)$

```
for i = 1 to n
    if t[i] > 0
        REVERSE-CYCLE(i)
        ustaw t[j] = −t[j] dla każdego j ∈ {i, t[i], t[t[i]], ...}
for i = 1 to n
    t[i] = −t[i]
```

Oszukiwane $O(n)$

for $i = 1$ **to** n
    if $t[i] > 0$
        $\textsc{Reverse-Cycle}(i)$
        ustaw $t[j] = -t[j]$ dla każdego $j \in \{i, t[i], t[t[i]], \ldots\}$
for $i = 1$ **to** n
    $t[i] = -t[i]$

$t[i] \in \{1, \ldots, n\}$

Theoretical Computer Science
Jagiellonian University

Dodatkowa pamięć $O(\log^2 n)$

czas: $O(n \log n)$

El-Zein, Munro, Robertson, ISAAC '16

Dodatkowa pamięć $O(\log n)$

Dodatkowa pamięć $O(\log n)$

Algorytm $O(n^2)$

```
for i = 1 to n
    if i == min{i, t[i], t[t[i]], ...}
        Reverse-Cycle(i)
```

Dodatkowa pamięć $O(\log n)$

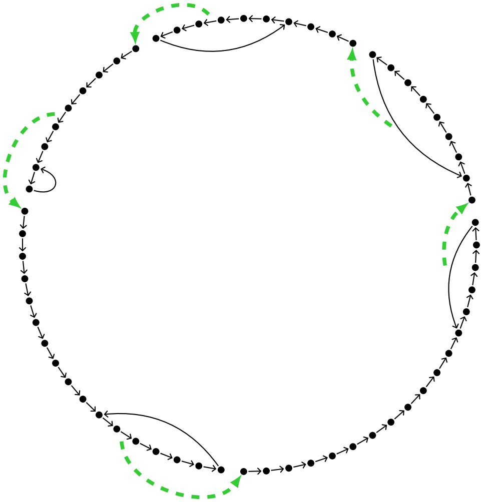
Algorytm $O(n^2)$

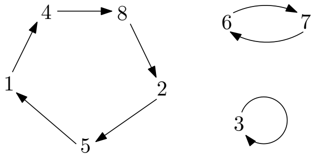
```
for i = 1 to n
    if i == min{i, t[i], t[t[i]], ...}
        Reverse-Cycle(i)
```

Algorytm randomizowany [Impagliazzo]

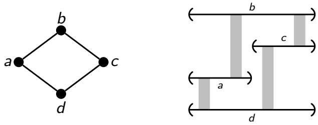
oczekiwany czas $O(n \log n)$, pesymistyczny $O(n^2)$

Rozwiązanie $O(n\sqrt{n})$

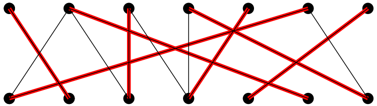




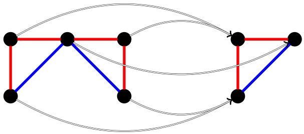
odwracanie permutacji
w miejscu



rozszerzanie częściowej
reprezentacji widocznościowej



szukanie skojarzenia doskonałego
minimalizującego liczbę przecięć



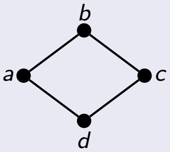
małe grafy docelowe
dla homomorfizmów
kolorowań krawędziowych

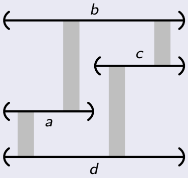
The Partial Visibility Representation Extension Problem
[Chaplick, G., Gutowski, Krawczyk, Liotta '16]

Reprezentacje widocznościowe

The Partial Visibility Representation Extension Problem
[Chaplick, G., Gutowski, Krawczyk, Liotta '16]

Grafy nieskierowane

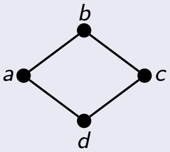


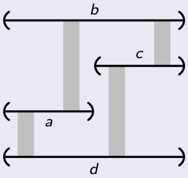


Reprezentacje widocznościowe

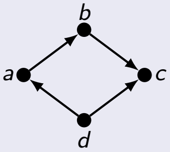
The Partial Visibility Representation Extension Problem
[Chaplick, G., Gutowski, Krawczyk, Liotta '16]

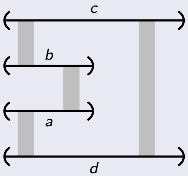
Grafy nieskierowane





Grafy skierowane

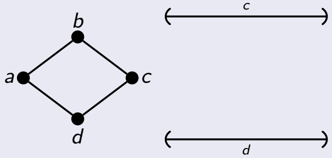




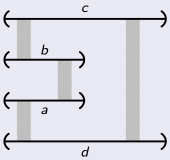
Rozszerzanie częściowej reprezentacji widocznościowej

Wariant nieskierowany

IN:



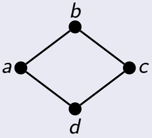
OUT:

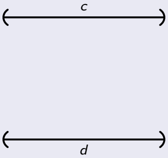


Rozszerzanie częściowej reprezentacji widocznościowej

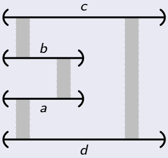
Wariant nieskierowany

IN:





OUT:



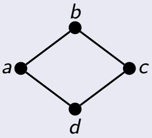
Wariant skierowany

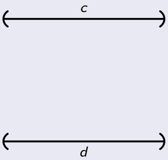
analogicznie

Rozszerzanie częściowej reprezentacji widocznościowej

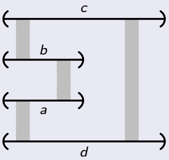
Wariant nieskierowany

IN:





OUT:



Wariant skierowany

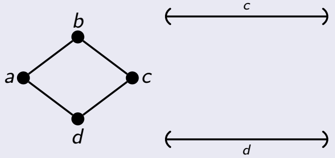
analogicznie

rysowanie grafów

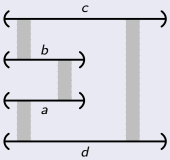
Rozszerzanie częściowej reprezentacji widocznościowej

Wariant nieskierowany

IN:



OUT:



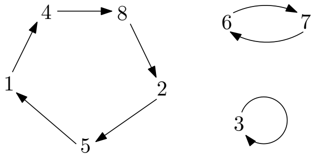
Wariant skierowany

analogicznie

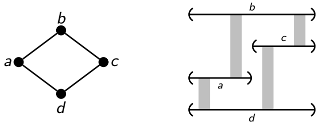
rysowanie grafów

Twierdzenie (Chaplick, G., Gutowski, Krawczyk, Liotta '16)

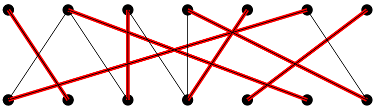
- wariant nieskierowany: NP-trudny
- wariant skierowany:
  $O(n \log^2 n)$ dla planarnych *st*-grafów i reprezentacji prostokątnych



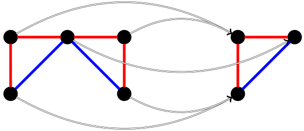
odwracanie permutacji
w miejscu



rozszerzanie częściowej
reprezentacji widocznościowej



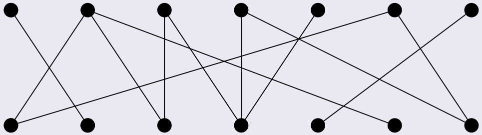
szukanie skojarzenia doskonałego
minimalizującego liczbę przecięć



małe grafy docelowe
dla homomorfizmów
kolorowań krawędziowych

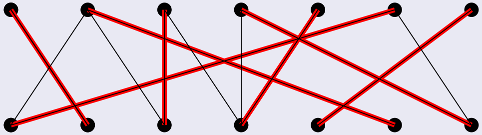
Doskonałe skojarzenie minimalizujące liczbę przecięć

IN:



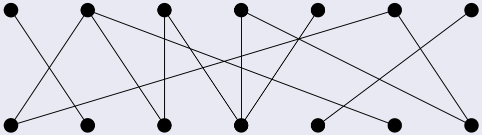
($\geqslant$ 1 skojarzenie doskonałe)

OUT:



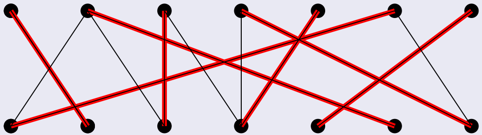
Doskonałe skojarzenie minimalizujące liczbę przecięć

IN:



($\geqslant 1$ skojarzenie doskonałe)

OUT:

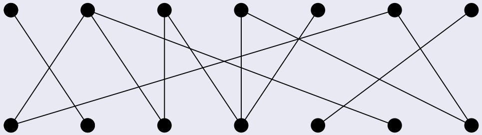


- pochodzi z: *Complexity of Token Swapping and Its Variants* – Bonnet, Miltzow, Rzążewski

Theoretical Computer Science Jagiellonian University

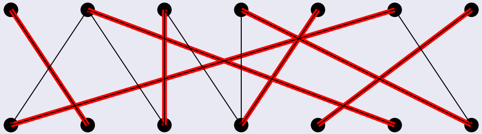
Doskonałe skojarzenie minimalizujące liczbę przecięć

IN:

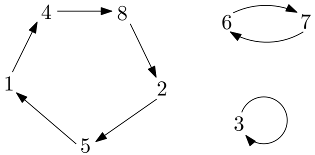


(⩾ 1 skojarzenie doskonałe)

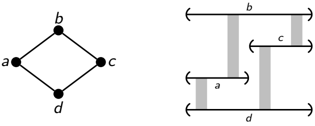
OUT:



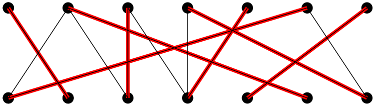
- pochodzi z: *Complexity of Token Swapping and Its Variants* – Bonnet, Miltzow, Rzążewski
- NP-trudność w: *Connecting the Dots (with Minimum Crossings)* – Agrawal, G., Madathil, Saurabh, Zehavi



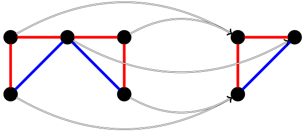
odwracanie permutacji
w miejscu



rozszerzanie częściowej
reprezentacji widocznościowej



szukanie skojarzenia doskonałego
minimalizującego liczbę przecięć

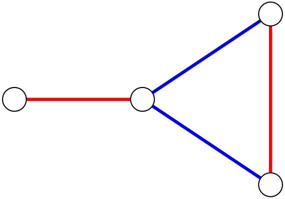


małe grafy docelowe
dla homomorfizmów
kolorowań krawędziowych

Graf k-kolorowy

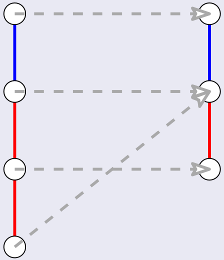
$\mathbb{G} = (G, c)$, gdzie:

- G jest grafem,
- c jest funkcją z $E(G)$ w $\{1, ..., k\}$



Wynik Alona i Marshalla

Homomorfizm



to funkcja $h : V(\mathbb{G}) \to V(\mathbb{H})$,
taka że dla $uv \in E(\mathbb{G})$:

- $h(u)h(v) \in E(\mathbb{H})$,
- $c_{\mathbb{H}}(h(u)h(v)) = c_{\mathbb{G}}(uv)$

Graf k-uniwersalny dla klasy grafów $\mathcal{F}$

to graf k-kolorowy, w który da się odzworować homomorficznie każde k-kolorowanie krawędziowe każdego grafu z $\mathcal{F}$

Twierdzenie (Alon, Marshall '98)

Klasa grafów planarnych ma graf k-uniwersalny wielkości $5k^4$.

Asymptotyka $\lambda_{\mathcal{F}}(k)$

$\lambda_{\mathcal{F}}(k)$ – wielkość najmniejszego grafu k-uniwersalnego dla $\mathcal{F}$

Twierdzenie (Alon, Marshall '98)

$k^3 + 3 \leqslant \lambda_{\text{PLANAR}}(k) \leqslant 5k^4$

Asymptotyka $\lambda_{\mathcal{F}}(k)$

$\lambda_{\mathcal{F}}(k)$ – wielkość najmniejszego grafu k-uniwersalnego dla $\mathcal{F}$

Twierdzenie (Alon, Marshall '98)

$k^3 + 3 \leqslant \lambda_{\mathrm{PLANAR}}(k) \leqslant 5k^4$

Twierdzenie (G., Gutowski '15)

$\lambda_{\mathrm{PLANAR}}(k) \leqslant 8\,435\,812\,575\,000\,000 \cdot k^3$

Asymptotyka $\lambda_{\mathcal{F}}(k)$

$\lambda_{\mathcal{F}}(k)$ – wielkość najmniejszego grafu k-uniwersalnego dla $\mathcal{F}$

Twierdzenie (Alon, Marshall '98)

$k^3 + 3 \leqslant \lambda_{\mathrm{PLANAR}}(k) \leqslant 5k^4$

Twierdzenie (G., Gutowski '15)

$\lambda_{\mathrm{PLANAR}}(k) \leqslant 8\,435\,812\,575\,000\,000 \cdot k^3$

$$D(G) = \max\left\{\frac{|E(G')|}{|V(G')|} \;:\; G' \subseteq G\right\}, \qquad D(\mathcal{F}) = \sup\{D(G) : G \in \mathcal{F}\}$$

Dla $\mathcal{F}$, które mają grafy k-uniwersalne:

Twierdzenie (G., Gutowski '15)

$k^{D(\mathcal{F})} \leqslant \lambda_{\mathcal{F}}(k) \leqslant Ck^{\lceil D(\mathcal{F})\rceil}$

THEORETICAL COMPUTER SCIENCE Jagiellonian University

Asymptotyka $\lambda_{\mathcal{F}}(k)$

$\lambda_{\mathcal{F}}(k)$ – wielkość najmniejszego grafu k-uniwersalnego dla $\mathcal{F}$

Twierdzenie (Alon, Marshall '98)

$k^3 + 3 \leqslant \lambda_{\mathrm{PLANAR}}(k) \leqslant 5k^4$

Twierdzenie (G., Gutowski '15)

$\lambda_{\mathrm{PLANAR}}(k) \leqslant 8\,435\,812\,575\,000\,000 \cdot k^3$

$$D(G) = \max\left\{\frac{|E(G')|}{|V(G')|} \;:\; G' \subseteq G\right\}, \qquad D(\mathcal{F}) = \sup\left\{D(G) : G \in \mathcal{F}\right\}$$

Dla $\mathcal{F}$, które mają grafy k-uniwersalne:

Twierdzenie (G., Gutowski '15)

$k^{D(\mathcal{F})} \leqslant \lambda_{\mathcal{F}}(k) \leqslant Ck^{\lceil D(\mathcal{F}) \rceil}$

Twierdzenie

$\lambda_{\mathcal{F}}(k) = \Theta(k^{D(\mathcal{F})})$, jeżeli $D(\mathcal{F})$ jest liczbą wymierną.