Principais Distribuições Contínuas

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Fortaleza, 10 de outubro de 2022

Sumário

Modelo Uniforme

- Dizemos que a v.a. X tem distribuição Uniforme no intervalo $[a, b]$, $a < b$ se a f.d.p. f_X é dada por:

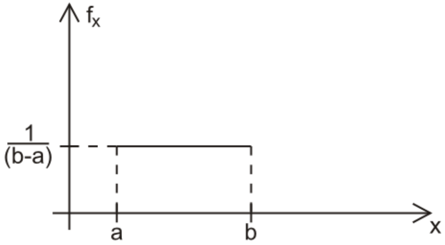
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

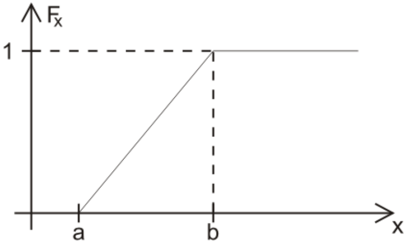
- Notação: $X \sim \mathcal{U}[a, b]$ ou $X \sim \mathcal{U}(a, b)$
- Cálculo da f.d.a.:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Modelo Uniforme

- Gráficos da f.d.p. e f.d.a.





Modelo Uniforme

- Cálculo da $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{(b+a)}{2}$$

- Cálculo da $\mathrm{Var}(X)$:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{(a^2+ab+b^2)}{3}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{(a^2+ab+b^2)}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- A temperatura T de destilação do petróleo é crucial na determinação da qualidade final do produto. T é considerada uma v.a. com distribuição $U[150°, 300°]$.
  (a) Qual a temperatura de destilação média?. Qual o desvio-padrão?
  (b) Qual a probabilidade da temperatura de destilação ser no máximo $200°$?

- Ônibus chegam a uma determinada parada em intervalos de 15 minutos começando às 7h00. Isto é, eles chegam às 7h00, 7h15, 7h30, 7h45, e assim por diante. Se um passageiro chega na parada em instante de tempo que é uniformemente distribuído entre 7h00 e 7h30, determine a probabilidade de que ele espere
  (a) menos do que 5 minutos por um ônibus;
  (b) mais do que 10 minutos por um ônibus.

Modelo Exponencial

- Dizemos que uma v.a. X possui distribuição exponencial com parâmetro λ ($\lambda > 0$) se a f.d.p. f_X é dada por:

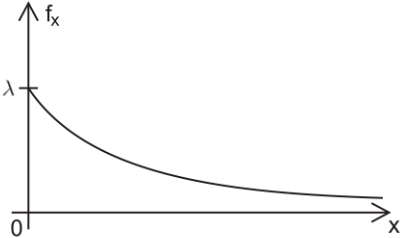
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Notação: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$
- Cálculo da f.d.a.:

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Modelo Exponencial

- Gráfico da f.d.p.



Modelo Exponencial

- Introduzindo a função gamma:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du, \;\; \alpha > 0$$

- Propriedades:
  - $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$
  - $\Gamma(n) = (n-1)! \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$
  - $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

- Essa função tem um papel importante na modelagem estatística e auxilia nos cálculo de esperança e variância da distribuição exponencial.

Modelo Exponencial

- Cálculo da $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

- Cálculo da $\text{Var}(X)$:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Modelo Exponencial

- Exemplo: O tempo de vida (em horas) de um transistor é uma v.a. T com distribuição $\exp(\lambda)$ em que $\lambda = \frac{1}{500}$
  - $\mathbb{E}(T) = 500$ horas
  - $\mathbb{P}(T \geq 500) = \int_{500}^{\infty} f_T(t)dt = 0,3678$

Modelo Exponencial

- Considere a seguinte f.d.p.

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

representando a distribuição do índice de acidez (X) de um determinado produto alimentício. O produto é consumível se este índice for menor do que 2. O setor de fiscalização apreendeu 30 unidades do produto. Qual a probabilidade de que pelo menos 10% da amostra seja imprópria para consumo?

- A distribuição exponencial possui a propriedade de falta de memória, ou seja, para quaisquer $s \geq 0$ e $t \geq 0$, tem-se que

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

- Para verificar, note que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > s + t | X > s) &= \frac{\mathbb{P}(X > s + t; X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} \\ &= \mathbb{P}(X > t) \end{aligned}$$