LISTA · DERIVADAS PARCIAIS DE ORDENS SUPERIORES

01) Em cada caso, confirme a igualdade entre as derivadas parciais mistas:

a) $f(x,y) = x^4y^3 - y^3 + x^2$; b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$; c) $f(x,y) = \cos(x^2y)$;

d) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$; e) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$; f) $f(x,y) = e^x + x\ln y + y\ln x$;

02) Em cada caso, calcule a derivada parcial de ordem superior, indicada, para a função apresentada:

a) f_{xyx} para $f(x,y) = x^4y^2 - x^3y$; b) f_{yxyx} para $f(x,y) = \operatorname{sen}(2x+5y)$;

c) f_{xyz} para $f(x,y,z) = e^x\cos(yz)$; d) f_{yxzz} para $f(x,y,z) = xy^2z^3 + \operatorname{senh}(x\sqrt{z})$;

03) Em cada caso, decida se existe uma função real $f(x,y)$ satisfazendo às condições dadas. Se não, justifique. Se sim, apresente uma função:

a) com $f_x = xy$ e $f_y = x^2$; b) com $f_x = 2xy$ e $f_y = x^2$;

04) Suponha que as hipóteses do Teorema de Clairaut são sempre satisfeitas para todas as funções envolvidas. Então, mostre que:

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx};$$

05) Lembrando que você pode, pelo Teorema de Clairaut, escolher uma ordem adequada para cada parcela, indique, em cada caso, um caminho mais certo para mostrar que a derivada parcial de ordem superior solicitada, para a função dada, é igual à zero:

a) f_{xyz}, para $f(x,y,z) = \sqrt{1+xz} + \sqrt{1-xy}$; b) f_{zwxywz}, para $f(x,y,z,w) = \dfrac{x^2 + e^y w}{3y^2 + \ln(1+z^2)}$;

06) Em cada caso, verifique se a função real $u(x,t)$ dada, satisfaz à equação unidimensional da onda: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $a>0$; devida ao matemático D' Alembert (1717-1783):

a) $u(x,t) = (x-at)^6 + (x+at)^6$; b) $u(x,t) = \operatorname{sen}(a\omega t)\operatorname{sen}(\omega x)$, $\omega \in \mathbb{R}$;

07) Em cada caso, verifique se a função real $u(x,t)$ dada, satisfaz à equação unidimensional do calor: $u_t = a^2 u_{xx}$, $a>0$; devida ao matemático Fourier (1768-1830):

a) $u(x,t) = e^{-a^2k^2t}\cdot\cos(kx)$, $k \in \mathbb{R}$; b) $u(x,t) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)\cdot e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t}$, $n>0$ e $L>0$;

⑧ Em cada caso, verifique se a função real $u(x,y)$ dada, satisfaz à equação bidimensional de Laplace (1749-1827): $u_{xx}+u_{yy}=0$;

ⓐ $u(x,y)=e^x\cos y+e^y\operatorname{sen} x$; ⓑ $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)+2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$;

⑨ Verifique se a função real $u(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ satisfaz à equação tridimensional de Laplace: $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$;

⑩ Mostre que se $c^2=a^2+b^2$ então a função real $u(x,y,z)=e^{ax+by}.\operatorname{sen}(cz)$, satisfaz à equação tridimensional de Laplace;

⑪ Mostre que se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem à equação bidimensional de Laplace, então a função real $w(x,y)=u(x,y)+v(x,y)$ também satisfaz à mesma equação;

⑫ Enuncie e demonstre um resultado análogo ao da questão anterior para duas funções reais, de três variáveis reais;

⑬ Diz-se que $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem às equações de Cauchy (1789-1857) - Riemann (1826-1866), quando: $u_x=v_y$ e $u_y=-v_x$. Então, em cada caso, verifique se $u(x,y)$ e $v(x,y)$, dadas, satisfazem às equações de Cauchy-Riemann:

ⓐ $u(x,y)=e^x\cos y$; $v(x,y)=e^x\operatorname{sen} y$; ⓑ $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$; $v(x,y)=2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$;

⑭ Sejam $f(x)$ e $g(t)$ funções reais satisfazendo, respectivamente, às equações diferenciais $f''(x)+\lambda^2f(x)=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, e $g''(t)+a^2\lambda^2g(t)=0$, $a>0$. Então, verifique se a função real $u(x,t)=f(x)g(t)$ satisfaz à equação de D'Alembert;

⑮ Sejam $f(x)$ e $g(t)$ funções reais satisfazendo, respectivamente, às equações diferenciais $f''(x)+\lambda^2f(x)=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, e $g'(t)+a^2\lambda^2g(t)=0$, $a>0$. Então, verifique se a função real $u(x,t)=f(x)g(t)$ satisfaz à equação de Fourier;

⑯ Mostre que se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem às equações de Cauchy-Riemann, bem como as hipóteses do Teorema de Clairaut, então $u(x,y)$ e $v(x,y)$ também satisfazem à equação bidimensional de Laplace.