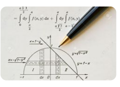


Cálculo II-2

Síntese

▼

Derivadas das funções trigonométricas inversas

> **Fonte:** Aula “28/03/2022”, Slide “5-Derivadas das Fun...”

▼ **Arco Seno**

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Prova:

$1)\, y = arcsen\ x$

Vamos calcular $\frac{dy}{dx}$

$y = arcsen\ x$ equivale a $x = sen\ y$, com y pertencendo ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Derivando, em relação a y, ambos os membros da igualdade $x = sen\ y$ obtemos $\frac{dx}{dy} = cos\ y$, com y no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Substituindo $sen\ y$ por x em $sen^2 y + cos^2 y = 1$, obtemos $cos^2 y = 1 - x^2$

Como y está em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $cos\ y$ é não negativo e então $cos\ y = \sqrt{1-x^2}$.

Então $\frac{dx}{dy} = \sqrt{1-x^2}$

Logo $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, isto é, $D_x(arcsen\ x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Se u é uma função de x, derivável, então usando regra da cadeia, temos:

$$D_x(arcsen\ u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

Exemplo

Se $y = arcsen\ x^4$, então $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^8}}(4x^3) = \frac{4x^3}{\sqrt{1-x^8}}$

▼ Arco Cosseno

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Prova:

2) $y = arccos\ x$

Vamos calcular $\frac{dy}{dx}$

$y = arccos\ x$ equivale a $x = cos\ y$, com y pertencendo ao intervalo $[0, \pi]$

Derivando, em relação a y, ambos os membros da igualdade $x = cos\ y$ obtemos $\frac{dx}{dy} = -sen\ y$, com y no intervalo $[0, \pi]$.

Substituindo $cos\ y$ por x em $sen^2 y + cos^2 y = 1$, obtemos $sen^2 y = 1 - x^2$

Como y está em $[0, \pi]$, $sen\ y$ é não negativo e então $sen\ y = \sqrt{1-x^2}$.

Então $\frac{dx}{dy} = -\sqrt{1-x^2}$

Logo $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, isto é, $D_x(arccos\ x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

▼ Arco Tangente

$$\frac{d}{dx}(\text{tg}^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Prova:

3) $y = arctg\ x$

Vamos calcular $\frac{dy}{dx}$

$y = arctg\ x$ equivale a $x = tg\ y$, com y pertencendo ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Derivando, em relação a y, ambos os membros da igualdade $x = tg\ y$ obtemos $\frac{dx}{dy} = sec^2\ y$, com y no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Substituindo $tg\ y$ por x em $sec^2 y = 1 + tg^2 y$, obtemos $sec^2 y = 1 + x^2$

Então $\frac{dx}{dy} = 1 + x^2$

Logo $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$, isto é,

$$D_x(arctg\ x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Se u é uma função de x, derivável, então usando regra da cadeia, temos:

$$D_x(arctg\ u) = \frac{1}{1 + u^2} D_x u$$

Exemplo

Se $y = arctg\ \frac{4}{x+3}$, então $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\frac{16}{(x+3)^2}} \cdot \frac{-4}{(x+3)^2} = \frac{-4}{(x+3)^2+16} = \frac{-4}{x^2+6x+2}$

▼ **Arco Cotangente**

$$\frac{d}{dx}(\text{cotg}^{-1} x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Prova:

4) $y = arccotg\ x$

Para calcular $\frac{dy}{dx}$ vamos usar o fato de que $arccotg\ x = \frac{\pi}{2} - arctg\ x$

Derivando em relação a x, obtemos

$$D_x arccotg\ x = -\frac{1}{1+x^2}$$

Como consequência da regra da cadeia, temos o seguinte

Teorema:

Se u é uma função de x, derivável, então $D_x(arccotg\ u) = -\frac{1}{1+u^2} D_x u$

Exemplo

Se $y = arccotg\ \frac{4}{x+3}$, então $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+\frac{16}{(x+3)^2}} \cdot \frac{(-4)}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2+16} = \frac{4}{x^2+6x+2}$

▼ **Arco Secante**

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Prova:

5) $y = arcsec\ x$

Vamos calcular $\frac{dy}{dx}$

$y = arcsec\ x$ equivale a $x = sec\ y$, com y pertencendo ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

Derivando, em relação a y, ambos os membros da igualdade $x = sec\ y$ obtemos $\frac{dx}{dy} = \sec y\ tg\ y$, com y no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Substituindo $sec\ y$ por x em $tg^2 y = sec^2 y - 1$, obtemos $tg^2 y = x^2 - 1$

Como, em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, a tangente é não negativa, temos $\frac{dx}{dy} = x\sqrt{x^2-1}$

Logo $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, isto é,

$$D_x(arcsec\ x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Se u é uma função de x, derivável, então usando regra da cadeia, temos:

$$D_x(arcsec\ u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

Exemplo

Se $y = arcsec\ e^{2x}$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{2x}\sqrt{e^{4x}-1}} \cdot 2e^{2x} = \frac{2}{\sqrt{e^{4x}-1}}$$

▼ **Arco Cossecante**

$$\frac{d}{dx}(\text{cossec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Prova:

6) $y = arccossec\ x$

Para calcular $\frac{dy}{dx}$ vamos usar o fato de que $arccossec\ x = \frac{\pi}{2} - arcsec\ x$

Derivando em relação a x, obtemos

$$D_x arccossec\ x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Como consequência da regra da cadeia, temos o seguinte

Teorema:

Se u é uma função de x, derivável, então

$$D_x arccossec\ u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

Exemplo

Se $y = arccossec\ e^{2x}$, então $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{e^{2x}\sqrt{e^{4x}-1}} . 2e^{2x} = -\frac{2}{\sqrt{e^{4x}-1}}$

Derivadas das Funções hiperbólicas

> **Fonte:** Aula “30/03/2022”, Slide “6-Funções hiperbólicas”

Definição das Funções Hiperbólicas

$$\text{senh}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{cossech}\ x = \frac{1}{\text{senh}\ x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{sech}\ x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\text{tgh}\ x = \frac{\text{senh}\ x}{\cosh x} \qquad \text{cotgh}\ x = \frac{\cosh x}{\text{senh}\ x}$$

▼ **Seno Hiperbólico**

$$D_x(senh\ x) = D_x\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh\ x$$

- Se u é uma função de x, derivável, então usando regra da cadeia, temos:

$$D_x(senh\ u) = cosh\ u\ D_x u$$

▼ **Cosseno Hiperbólico**

$$D_x(cosh\ x) = D_x\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = senh\ x$$

- Se u é uma função de x, derivável, então usando regra da cadeia, temos:

$$D_x(cosh\ u) = senh\ u\ D_x u$$

▼ **Tangente Hiperbólico**

$$D_x tgh\, x = sech^2 x$$

Demonstração de (i)

$$tgh\, x = \frac{senh\, x}{\cosh x} \Rightarrow D_x tgh\, x = D_x \frac{senh\, x}{\cosh x} = \frac{cosh^2\, x - se\quad ^2\, x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = sech^2 x.$$

▼ **Cotangente Hiperbólico**

$$D_x cotgh\, x = -cosech^2 x$$

▼ **Secante Hiperbólico**

$$D_x sech\, x = -sech\, x\; tgh\, x$$

Demonstração de (iii)

$$sechx = \frac{1}{\cosh x} \Rightarrow D_x sech\, x = D_x \frac{1}{\cosh x} = \frac{-senh\, x}{\cosh^2 x} = -\frac{1}{co} \cdot \frac{sen\quad x}{\cosh x} = -sech\, x\; tgh\, x$$

▼ **Cossecante Hiperbólico**

$$D_x cossech\, x = -cossech\, x\; cotgh\, x$$

- Como consequência da regra da cadeia, temos o seguinte Teorema:

Teorema:

Se u é uma função de x, derivável, então:

$$D_x tgh\, u = sech^2 u\; D_x u$$
$$D_x cotgh\, u = -cosech^2 u\; D_x u$$
$$D_x sech\, u = -sech\, u\; tgh\, u\; D_x u$$
$$D_x cossech\, u = -cossech\, u\; cotgh\, u\; D_x u$$

Identidade Trigonométrica

> **Fonte:** Aula “28/03/2022”, Slide “5-Derivadas das Fun...”

$$sen^2 y + cos^2 y = 1$$

$$sec^2 y = 1 + tg^2 y$$

$$arccotg\, x = \frac{\pi}{2} - arctg\, x$$

$$tg^2 y = sec^2 y - 1$$

$$arccossec\, x = \frac{\pi}{2} - arcsec\, x$$

> **Fonte:** Aula “30/03/2022”, Slide “6-Funções hiperbólicas”

$$senh(-x) = -\,senh\,x$$

$$cosh(-x) = cosh\,x$$

$$tgh\,x = \frac{1}{cotgh\,x}$$

$$cosh^2 x - senh^2 x = 1$$

$$sech^2 x = 1 - tgh^2 x$$

$$cossech^2 x = cotgh^2 x - 1$$

i) $tgh\,x = \frac{1}{cotgh\,x}$

ii) $cosh^2 x - senh^2 x = 1$

iv) $cossech^2 x = cotgh^2 x - 1$

> **Fonte:** Aula “01/04/2022”, Slide “8 - Integral de potencia de...”

$$cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Integrais Trigonométricas

- **Seno**

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

- **Cosseno**

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

- **Tangente**

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \ln|\sec x| + C$$

- **Cotangente**

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \ln|\sec x| + C$$

- **Secante**

$$\int \sec\ x\ dx = \ln|\sec\ x + \text{tg}\ x| + k$$

- **Outras**

$$\int \sec^2 x\, dx = \text{tg}\ x + C$$

$$\int \text{cossec}^2 x\, dx = -\text{cotg}\ x + C$$

Integrais que resultam das derivadas das funções trigonométricas inversas

> **Fonte:** Aula “28/03/2022”, Slide “5-Derivadas das Fun...”

$$1)\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsen\ x + c$$

$$2)\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg\ x + c$$

$$3)\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = arcsec\ x + c$$

- **Obs:** Se no lugar do 1 do denominador de qualquer integral acima houver uma constante a (e $a > 0$) elevada ao quadrado podemos generalizar as integrais acima para:

$$4)\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + c$$
$$5)\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right) + c$$
$$6)\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{1}{a}arcsec\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

- **Exemplo** das integrais acima:

$$1)\int \frac{1}{\sqrt{17-x^2}}dx = arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{17}}\right) + c$$
$$2)\int \frac{1}{12+3x^2}dx = \int \frac{1}{3(4+x^2)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(4+x^2)}dx = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right) + c = \frac{1}{6}arctg\left(\frac{x}{2}\right) + c$$
$$3)\int \frac{4}{x\sqrt{x^2-25}}dx = 4\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-25}}dx = 4.\frac{1}{5}arcsec\left(\frac{x}{5}\right) + c = \frac{4}{5}arcsec\left(\frac{x}{5}\right) + c$$

Integrais que resultam das derivadas das funções hiperbólicas

> **Fonte:** Aula “30/03/2022”, Slide “6-Funções hiperbólicas”

$$
\begin{aligned}
&1. \int \cosh x \, dx = senh\, x + c \\
&2. \int \operatorname{senh} x \, dx = cosh\, x + c \\
&3. \int \operatorname{sech}^2 x \, dx = tgh\, x + c \\
&4. \int \operatorname{cosech}^2 x \, dx = -\, cotgh\, x + c \\
&5. \int \operatorname{sech} x \; tgh\, x \, dx = -\, sech\, x + c \\
&6. \int \operatorname{cossech} x \; cotgh\, x \, dx = -\, cossech\, x + c
\end{aligned}
$$

Integração por Partes

- Esse método deve ser usado quando temos uma integral que não sabemos integrar, mais dentro dessa integral, tem uma função que eu sei deriva e outra função que eu sei integrar.
  - **Formula:**

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

- Antes de usamos essa formula precisamos encontra os 4 valores que serão usados nessa formula, são: $u,\ v,\ du,\ dv$.

$$\int u\ dv = u \cdot v - \int v\ du$$

  O u geralmente vai ser o termo que eu sei derivar.

  O dv geralmente vai ser o termo que eu sei integrar.

- **Dica:** Chame de dv a função mais difícil, pois ao integral o problema ficara mais fácil.

▼ **Exemplo 1**: Calcule $\int x \sec^2 x\, dx$

Solução:

Fazendo $u = x$ e $dv = sec^2 x\ dx$, obtemos

$du = dx$ e $v = tg\ x$. Assim

$\int x\ sec^2 x\ dx = xtgx - \int tgx\ dx$

$xtg\ x + ln|\cos x| + c$

▼ **Exemplo 2**: Calcule $\int x^2 e^x dx$

Solução:

Fazendo $u = x^2$ e $dv = e^x\ dx$, obtemos

$du = 2xdx$ e $v = e^x$. Assim

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx$

Para calcular $\int xe^x dx$, aplicamos mais uma vez a integração por partes.

Fazendo $u = x$ e $dv = e^x\, dx$, obtemos

$du = dx$ e $v = e^x$. Assim

$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c_1$

Portanto

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + c =$

$x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

Integração de Potências de seno e cosseno

> **Fonte:** Aula "01/04/2022", Slide "8 - Integral de potencia de..."

▼ **Caso 1: Potências de Seno e Cosseno**

$$\int sen^m(x).cos^n(x)dx$$

▼ **Quando o n for ímpar**

Se o n for ímpar, vamos separar um **cosseno** á parte e usar $\cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$, depois fazemos a substituição $u = sen(x)$:

$$\int sen^2(x)\cdot\cos^3(x)dx = \int sen^2(x)\cdot\cos(x)\cdot\cos^2(x)dx$$

Pronto separamos o cosseno, e agora vamos substituir o $\cos^2(x)$ por $1 - sen^2(x)$:

$$\int sen^2(x)\cdot\cos^2(x)\cdot\cos(x)dx =$$

$$\int sen^2(x)\cdot\cos(x)\cdot\Big(1 - sen^2(x)\Big)dx$$

Agora vamos usar o método da substituição. O $u = sen(x)$, então o $du = \cos(x)dx$:

$$\int sen^2(x)\cdot\cos(x)\cdot\Big(1 - sen^2(x)\Big)dx =$$

$$\int u^2\cdot(1 - u^2)du = \int u^2 - u^4\ du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} =$$

$$\frac{sen^3(x)}{3} - \frac{sen^5(x)}{5} + C$$

▼ **Quando o m for ímpar**

Sabemos que o $sen^3(x) = sen^2(x)\cdot sen(x)$, então vamos começa fazendo essa substituição:

$$\int sen^3(x)\cdot\cos^2(x)dx = \int sen^2(x)\cdot sen(x)\cdot\cos^2(x)dx$$

Agora vamos usar a identidade $\sin^2(x) = (1 - \cos^2(x))$ no $sen^2(x)$:

$$\int sen^2(x) \cdot sen(x) \cdot \cos^2(x)dx = \int \left(1 - \cos^2(x)\right) \cdot sen(x) \cdot \cos^2(x)dx$$

Agora podemos usar o método da substituição, então o $u = \cos(x)$, logo o $du = -sen(x)dx$.

Perceba que nos não temos o $-sen(x)$, para isso vamos colocar um sinal de $-$ na frente do $sen(x)$, e vamos colocar outro sinal de $-$ na frente da integral para que o resultado final não seja alterado:

$$\int \left(1 - \cos^2(x)\right) \cdot sen(x) \cdot \cos^2(x)dx =$$

$$-\int \left(1 - \cos^2(x)\right) \cdot \cos^2(x) \cdot -sen(x)dx =$$

$$-\int (1 - u^2) \cdot u^2 du = -\int u^2 - u^4 du = -\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right) =$$

$$-\left(\frac{\cos^3(x)}{3} - \frac{\cos^5(x)}{5}\right) + c$$

- **Quando o m e o n for ímpar**
  - Nesse casso você escolhe qual dos dois métodos apresentados acima você deseja usar.
  - Obs: Não precisa usar os dois métodos citados acima, basta escolher um.
- **Quando o m e o n for par**

  Nesse caso usaremos as formulas

$$cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$sen^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

- **Exemplo $\int sen^2(x) \cdot \cos^2(x)dx$**

$$\int sen^2(x) \cdot \cos^2(x)dx =$$

$$\int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right) \cdot \left(frac1 + \cos(2x)2\right)dx$$

Efetuando essa multiplicação teremos:

$$\int \frac{1 + \cos(2x) - \cos(2x) - \cos^2(2x)}{4}dx =$$

$$\int \frac{1 - \cos^2(2x)}{4}dx$$

Agora usaremos a identidade trigonométrica 7 para substituir o $1 - \cos^2(2x)$ por $sen^2(2x)$:

$$\int \frac{1-\cos^2(2x)}{4}dx = \int \frac{sen^2(2x)}{4}dx$$

Agora vamos usar a identidade trigonométrica 17b:

$$\int \frac{sen^2(2x)}{4}dx = \int \frac{\frac{1-\cos(2\cdot 2x)}{2}}{4}dx = \int \frac{1-\cos(4x)}{8}dx$$

Agora sim podemos resolver essa integral. Vamos usar o método da substituição, $u = 4x$, logo $du = 4dx$ então o $dx = \frac{du}{4}$.

$$\int \frac{1-\cos(4x)}{8}dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos(u)}{4}du =$$

$$\frac{1}{8}\int \frac{1}{4}du - \int \frac{\cos(u)}{4}du = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{u}{4} - \frac{sen(u)}{4}\right) =$$

$$\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{4x}{4} - \frac{sen(4x)}{4}\right) = \frac{1}{8}\cdot\left(x - \frac{sen(4x)}{4}\right) + C$$

▼ **Caso 2: Potências de Tangente e Secante**

$$\int \tan^m(x)\,.\,\sec^n(x)\,dx$$

▼ **Quando o n for par ou o m for ímpar**

Se o n for par ou o m for ímpar, se algum desses dois acontecer, devemos separar um **secante** á parte e usar $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$, depois fazemos a substituição $u = \tan(x)$, logo $du = \sec^2(x)dx$:

$$\int tan^3(x).sec^4(x)\,dx = \int \tan^3(x).\sec^2(x).\sec^2(x)\,dx = \int \tan^3(x).(1+\tan^2(x)).\sec^2(x)dx =$$

$$= \int u^3.(1+u^2)\,du = \int u^3 + u^5\,du = \frac{u^4}{4} + \frac{u^6}{6}$$

$$= \frac{\tan^4(x)}{4} + \frac{\tan^6(x)}{6} + C$$

▼ **Quando o m for par e o n for ímpar**

$$\int \tan^m(x)\,.\,\sec^n(x)\,dx$$

Se o n for ímpar e o m for par, se isso acontecer, vamos usar $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$,

▼ Caso 3: Produto de Seno e Cosseno

$$\int sen(a.x).cos(b.x)dx$$

$$\int sen(a.x).sen(b.x)dx$$

$$\int cos(a.x).cos(b.x)dx$$

Para os produtos acima usaremos uma das seguintes formulas:

$$sen(a).sen(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$cos(a).cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$sen(a).cos(b) = \frac{\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)}{2}$$

▼ Exemplo

$$\int sen(3x).sen(2x)dx$$

$$\int \frac{\cos(3x-2x) - \cos(3x+2x)}{2}dx = \int \frac{\cos(x) - \cos(5x)}{2}dx = \frac{1}{2}.\int \cos(x) - \cos(5x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}.\left(\int \cos(x)dx - \int \cos(5x)dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}.\left(sen(x) - \int \frac{\cos(u)}{5}du\right) =$$

$$= \frac{1}{2}.\left(sen(x) - \frac{sen(u)}{5}\right) = \frac{1}{2}.\left(sen(x) - \frac{sen(5x)}{5}\right) + C$$

Coordenadas Polares

▼ Definição

- Um sistema de coordenadas representa um ponto no plano por um par ordenado de números chamados coordenadas.
- Até agora usamos as coordenadas cartesianas (x, y), que são distâncias orientadas a partir de dois eixos perpendiculares.
- Nesta seção descreveremos um sistema de coordenadas introduzido por Newton, denominado **Sistema de Coordenadas Polares**, que é mais conveniente para muitos propósitos.
- Escolhemos um ponto no plano chamado **polo** (ou **origem**) e está rotulado de O. Então desenhamos uma meia linha começando em O, chamada **eixo polar**. Esse eixo é geralmente desenhado horizontalmente para a direita e corresponde ao eixo x positivo nas coordenadas cartesianas.
- Se P for qualquer outro ponto no plano, seja r a distância de O até P e seja θ o ângulo (geralmente medido em radianos) entre o eixo polar e a reta OP, como na Figura 1.

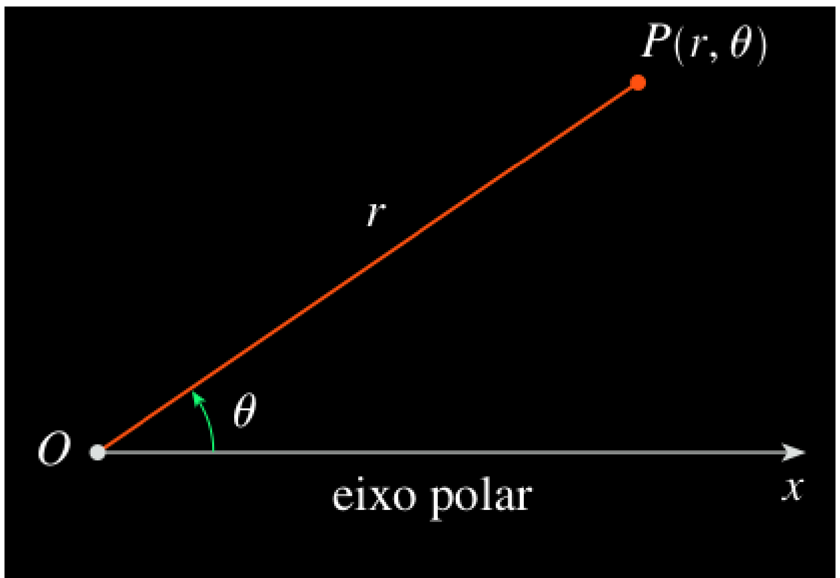
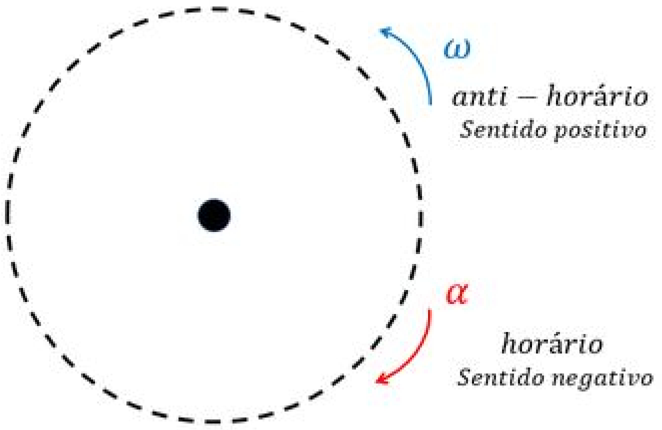


FIGURA 1

- Assim, o ponto P é representado pelo par ordenado (r, θ) e r, θ são chamados coordenadas polares P.
- Usamos a convenção de que um ângulo é positivo se for medido no sentido **anti-horário** a partir do eixo polar e negativo se for medido no sentido horário. Se $P = O$, então $r = 0$, e convencionamos que $(0, \theta)$ representa o polo para qualquer valor de θ.



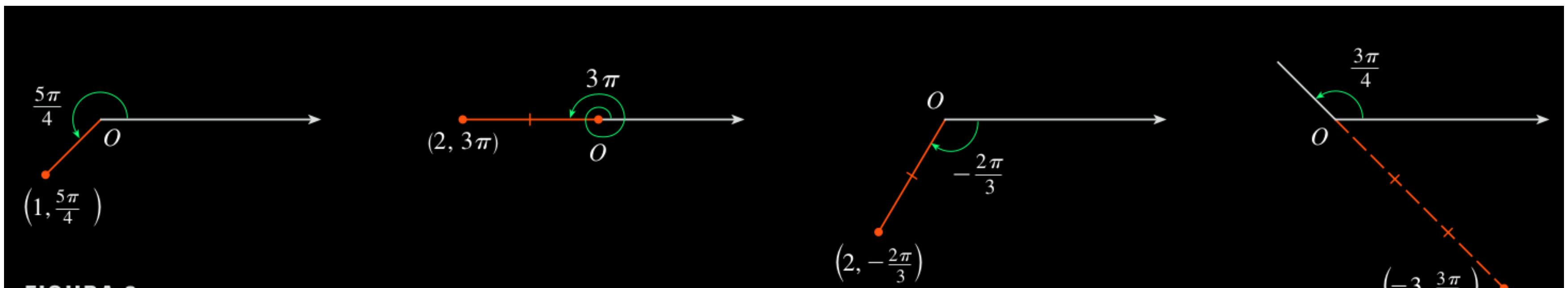


FIGURA 3

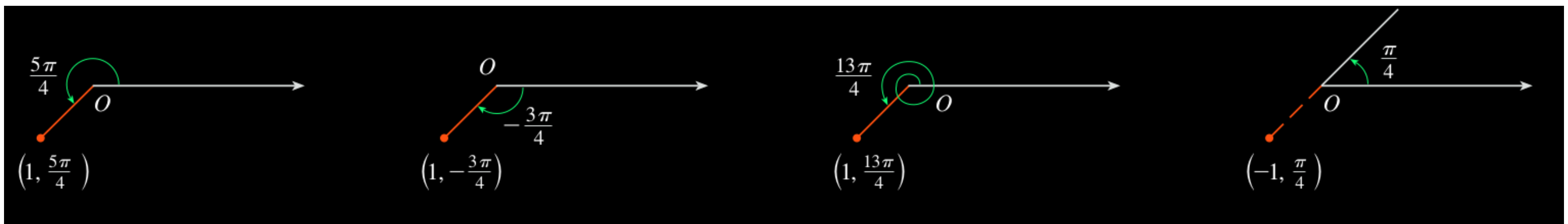
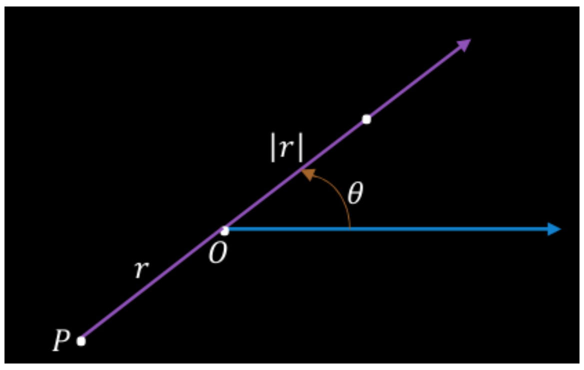


FIGURA 4

- **Obs:** Em um sistema de coordenadas cartesianas, um ponto qualquer, só pode ser representado por uma única formula. Já no sistema de coordenadas polares um ponto pode ser representado de várias formulas. **Ex**: $(r, \theta) = (r, \theta + 2k\pi)$ onde k é um inteiro qualquer.

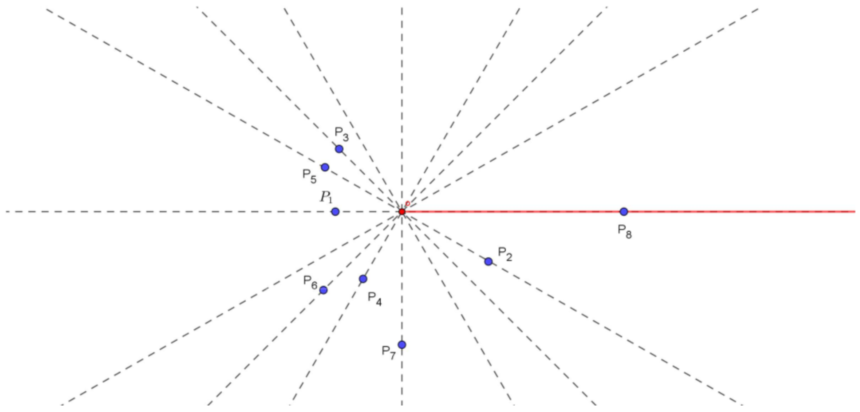
Coordenadas Polares com r negativo

- Podemos considerar também coordenadas polares com r negativo.
- Quando o r for negativo, para encontra onde é sua localização, basta encontra a coordenada do $|r|$, ao encontra essa coordenada, o simétrico dessa coordenada vai ser igual a coordenada do r negativo.



Exemplo: Represente geometricamente os pontos

$P_1 = (6, \pi), P_2 = \left(9, -\frac{\pi}{6}\right), P_3 = \left(8, \frac{3\pi}{4}\right), P_4 = \left(-7, \frac{\pi}{3}\right), P_5 = \left(-8, -\frac{\pi}{6}\right),$
$P_6 = \left(-10, \frac{\pi}{4}\right), P_7 = \left(-12, \frac{\pi}{2}\right)$ e $P_8 = (20,0)$



Relação entre as Coordenadas Polares e Cartesianas (Convenções)

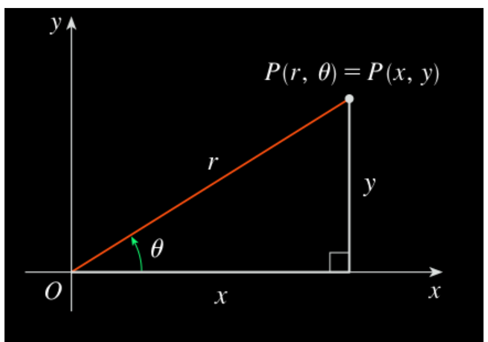


FIGURA 5

- A relação entre as coordenadas polares e cartesianas pode ser vista a partir da Figura 5, na qual o **polo**(é o O) corresponde à **origem** e o **eixo polar** coincide com o **eixo** x positivo. Se o ponto P tiver coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, u), então, a partir da figura, temos

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

- Logo temos as formulas para converter de coordenadas polares para coordenadas cartesianas:

1 $$x = r\cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta$$

Embora as Equações 1 tenham sido deduzidas a partir da Figura 5, que ilustra o caso onde $r > 0$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, essas equações são válidas para todos os valores de r e θ.

- As Equações 1 nos permitem encontrar as coordenadas cartesianas de um ponto quando as coordenadas polares são conhecidas. Para encontra o inverso usamos as formulas a seguir, ou seja para encontrarmos r e θ quando x e y são conhecidos, usamos as equações:

2 $$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

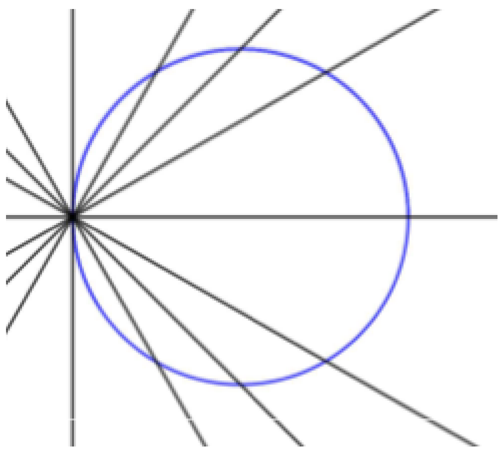
Essa formula para encontrar o θ que foi apresentada acima, ainda pode ser simplificada para:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \qquad \rightarrow \qquad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

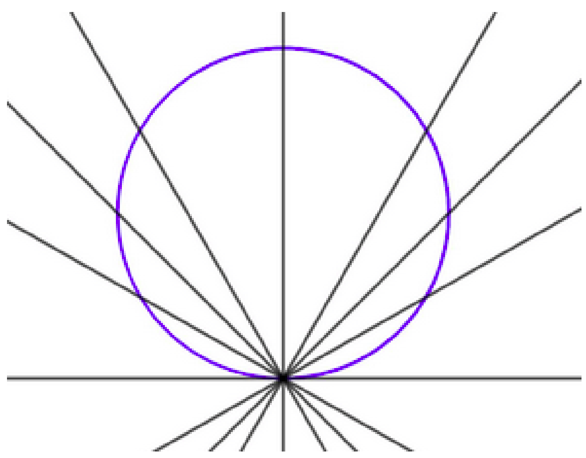
- **Obs:** É importante conhecer essas convenções, pois vai aparecer problemas que você conhece as coordenadas polares mais vai ser mais fácil resolver por coordenadas cartesianas, e o inverso também. Por isso a importância de saber realizar essas convenções.

▼ **Identidades**

- $r = k\cos\theta$: Quando aparecer isso, deduzimos que o gráfico desse problema vai ser uma circunferência com o **centro** na coordenada $(\frac{K}{2}, 0)$ e raio igual a $r = \frac{K}{2}$.
  - **Ex:** $r = 18\cos\theta$



- $r = k\sin\theta$: Quando aparecer isso, deduzimos que o gráfico desse problema vai ser uma circunferência com o **centro** na coordenada $(0, \frac{K}{2})$ e raio igual a $r = \frac{K}{2}$.
  - **Ex:** $r = 18\sin\theta$



▼ **Exemplos**

▼ **Ex 1:** $r = 18\cos\theta$

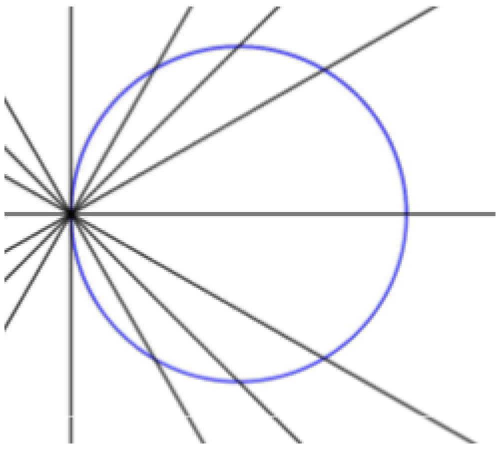
Para encontramos o gráfico desse problema vamos começar encontrando alguns pontos.

$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad r = 18\cos\frac{\pi}{2} \rightarrow r = 18 \cdot 0 \rightarrow r = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \qquad r = 18\cos\frac{\pi}{3} \rightarrow r = 18 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow r = 9$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \qquad r = 18\cos\frac{\pi}{6} \rightarrow r = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow r = 9 \cdot \sqrt{3}$$

Perceba que o lado da circunferência acima do eixo x é simétrica ao lado da circunferência abaixo do eixo x. Logo só precisamos saber um dos lados para saber ela por um todo.

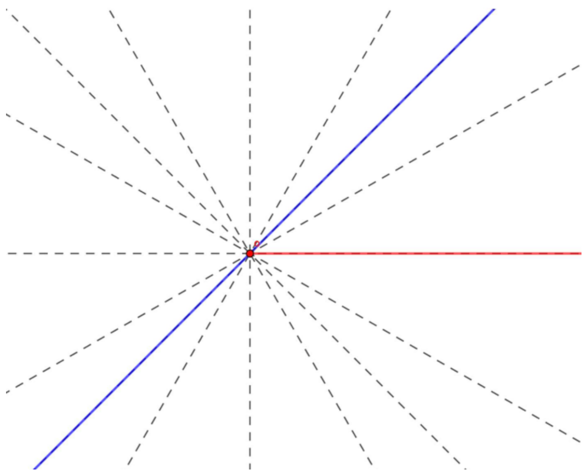


▼ **Ex 2:** $r = 18\cos\theta$

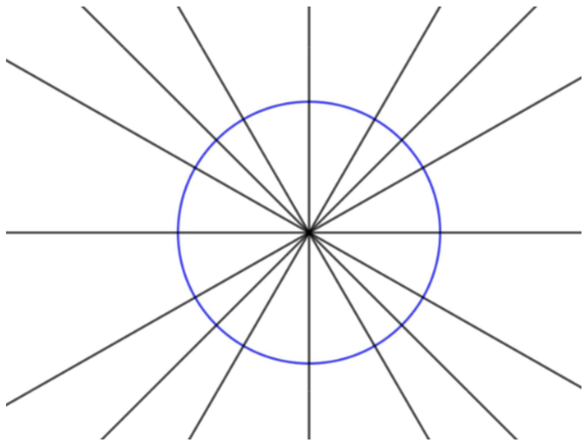
Formulas de Coordenadas Polares

▼ Formulas Básicas

- $\theta = C$: Quando o theta for igual a uma constante, isso vai significa que a reta vai ser uma reta passando pela origem.



- $r = C$: Quando o raio for igual a uma constante, o gráfico vai ser uma circunferência de **centro na origem** e de **raio** 'C'.



- $y = r\sin\theta$: Podemos usar essa formula para encontrar o gráfico quando o problema der o valor de y. Então vamos começar criando uma tabela, ou seja, vamos atribuir vários valores para o θ, e vamos verifica quanto que vale o r para cada valor de θ.

- **Ex:** $r\sin\theta = 3$

  Vamos começar atribuindo $\theta = 0$, teremos $r\sin 0 = 3$, como o $\sin 0 = 0$ a formula vai ficar $r \cdot 0 = 3 \rightarrow 0 = 3$, logo o θ tem que ser $\theta \neq 0$.

  Atribuindo outros valores para θ:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad r\sin\frac{\pi}{2} = 3 \rightarrow r \cdot 1 = 3 \rightarrow r = 3$$

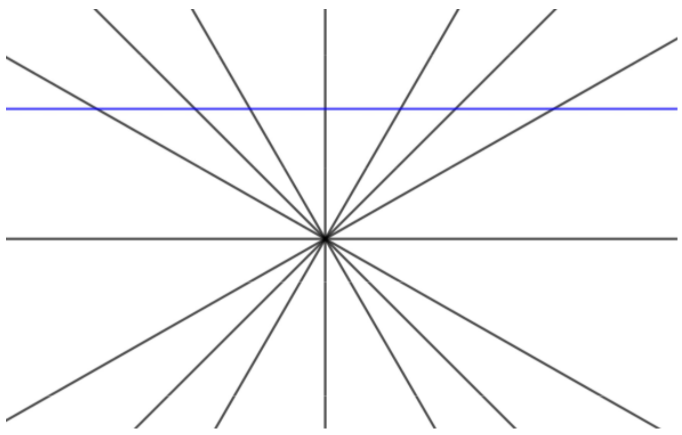
$$\theta = \frac{\pi}{6} \qquad r\sin\frac{\pi}{6} = 3 \rightarrow r \cdot \frac{1}{2} = 3 \rightarrow r = 3 \cdot \frac{2}{1} \rightarrow r = 6$$

  Agora que já entendemos essa parte vamos criar uma tabela com esses valores de θ e r:

θ	$r\ \sin\theta = 3$
$\frac{\pi}{6}$	$r = 6$
$\frac{\pi}{4}$	$r = \frac{6}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3}$	$r = \frac{6}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	$r = 3$
$\frac{2\pi}{3}$	$r = \frac{6}{\sqrt{3}}$
$\frac{3\pi}{4}$	$r = \frac{6}{\sqrt{2}}$

  Atenção essa tabela acima não está com todos os pontos, na realidade isso seria impossível de se fazer.

  Logo o gráfico seria:



  Perceba que encontra todos os ponto da muito trabalho. Outra solução para esse problema seria considerar pela formula que o $r\sin\theta = y$, e como o problema diz que o $r\sin\theta = 3$ temos então que $y = 3$, pronto o gráfico vai ser uma reta na horizontal que interceptar o y quando ele for igual a 3.

▼ Formula de Limaçon e Cardioide

$$r = a \pm b\cos\theta \qquad or \qquad r = a \pm b\sin\theta$$

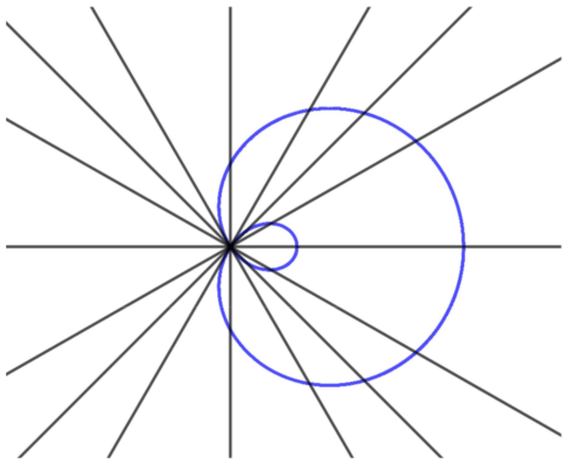
- Quando o problema for do tipo $r = a \pm b\cos\theta$ ou $r = a \pm b\sin\theta$ com $a, b > 0$, podemos usar algumas propriedades para saber qual é o formato do gráfico.

$r = a \pm b\cos\theta$	ou $r = a \pm b\sin\theta$
$a < b$	**Limaçon de um Laço**
$b < a < 2a$	**Limaçon com um Dente**
$\frac{a}{b} \geq 2$	**Limaçon Convexa**
$a = b$	**Cardióide**

▼ Limaçon de um Laço

- Se na formula $r = a \pm b\cos\theta$ os valores a e b forem $0 < \frac{a}{b} < 1$, ou seja quando o $a < b$, então o gráfico da formula tera um formato de Limaçon de um laço.

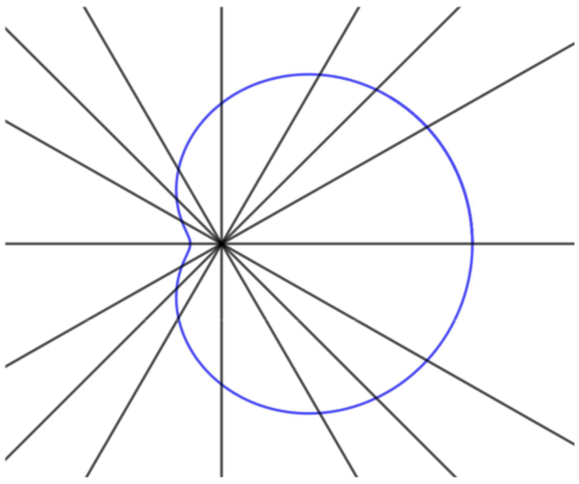
i) $r = 5 + 9\cos\theta$ (Limaçon com um laço)



▼ Limaçon com um Dente

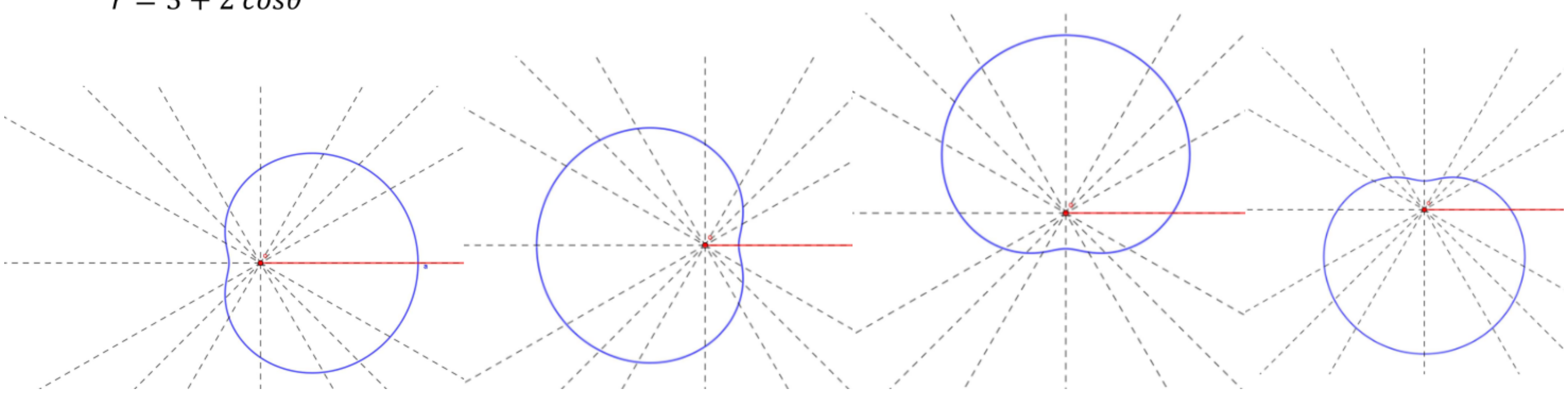
- Se na formula $r = a \pm b\cos\theta$ os valores a e b forem $1 < \frac{a}{b} < 2$, então o gráfico da formula tera um formato de Limaçon com um Dente.

$iii)$ $r = 9 + 8\cos\theta$ (Limaçon com um dente)



Limaçons com 1 dente

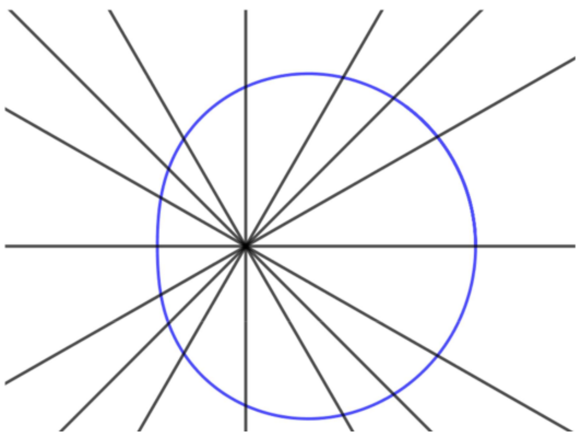
$r = 3 + 2\ cos\theta$ $\quad$ $r = 3 - 2\ cos\theta$ $\quad$ $r = 3 + 2\ sen\theta$ $\quad$ $r = 3 - 2\ sen\theta$



▼ Limaçon Convexa

- Se na formula $r = a \pm b\cos\theta$ os valores a e b forem $2 \leq \frac{a}{b}$, então o gráfico da formula tera um formato de Limaçon de um laço.

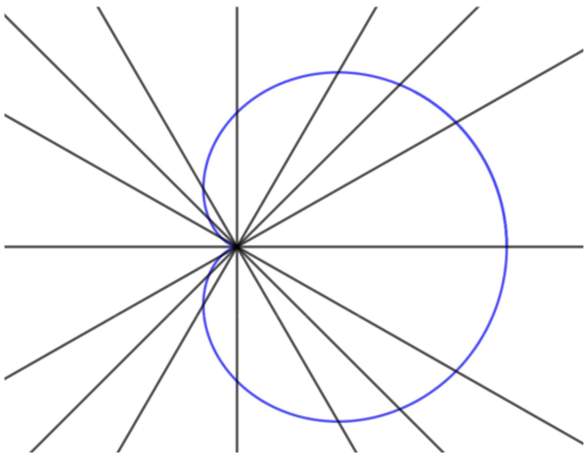
$iv)$ $r = 9 + 4\cos\theta$ (Limaçon convexa – sem dente)

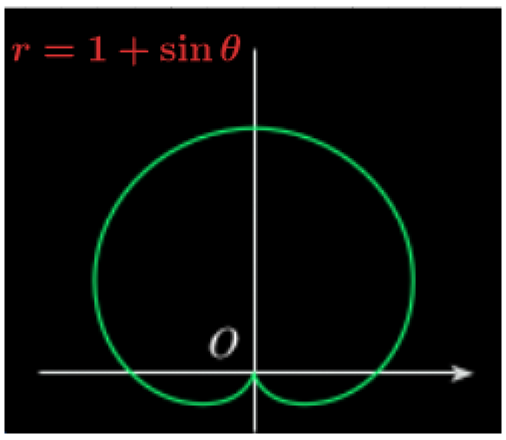


▼ Cardióide

- Ela é chamada cardioide, porque tem o formato parecido com o de um coração.
- Se na formula $r = a \pm b\cos\theta$ os valores a e b forem $\frac{a}{b} = 1$, ou seja $a = b$, então o gráfico da formula tera um formato de Cardióide.

ii) $r = 9 + 9\cos\theta$ (Cardióide)





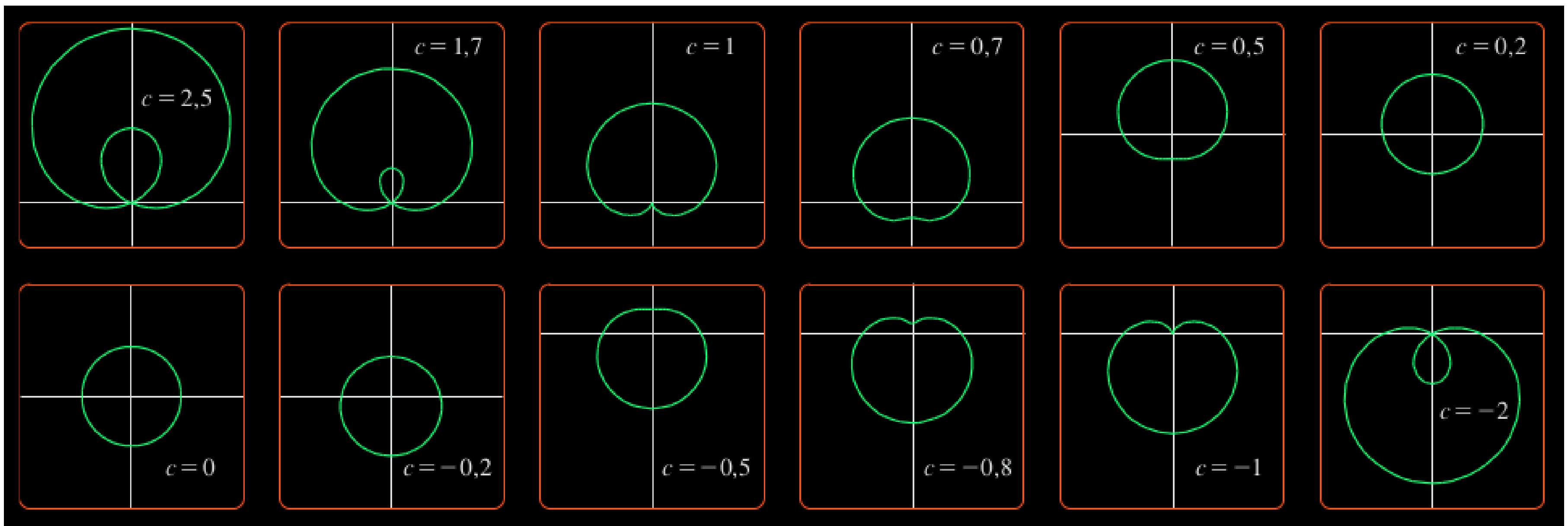


FIGURA 19
Membros da família de limaçons $r = 1 + c \text{ sen } \theta$

▼ **Rosáceas**

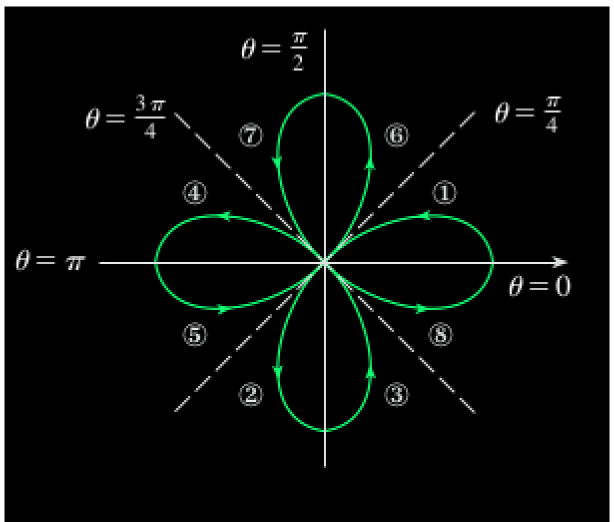
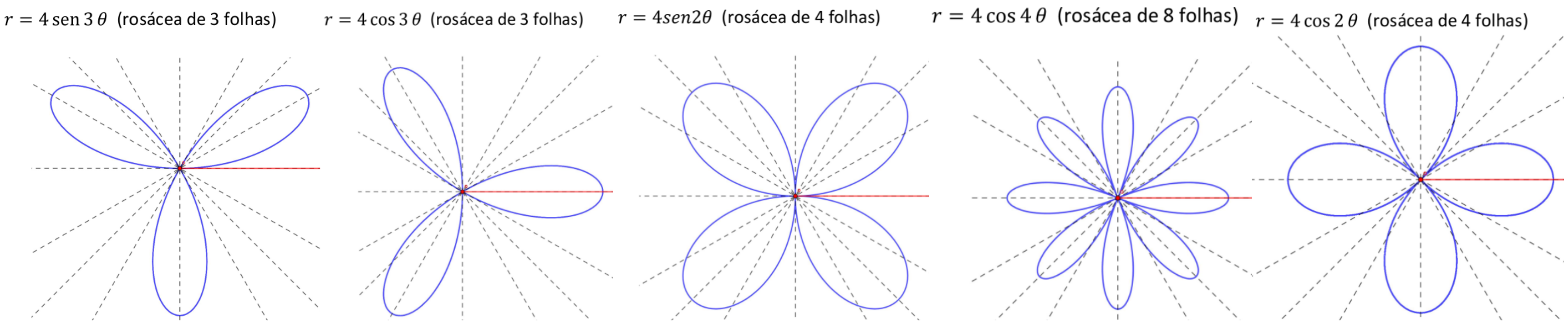


FIGURA 13
Rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$

- O gráfico vai ter o formato de uma rosáceas quando a formula for do tipo $r = a\cos n\,\theta$ ou $r = a\sin n\,\theta$.
- Para o gráfico ter o formato de uma rosácea, o problema precisa está na forma de:

$$r = a\cos n\,\theta \qquad or \qquad r = a\sin n\,\theta$$

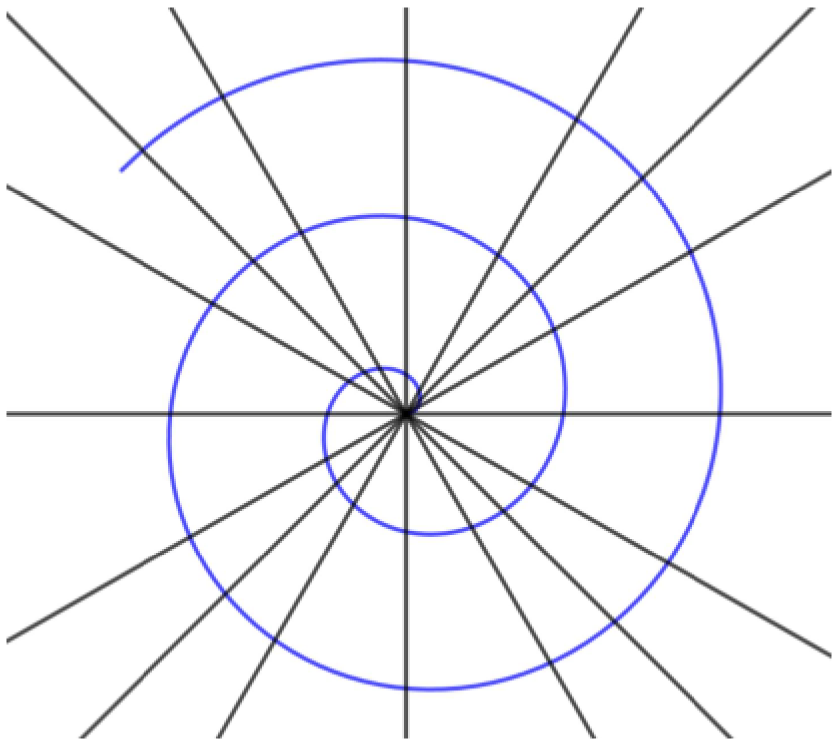
- O número de folhas vai depender do valor de n, se o n for **ímpar** a rosáceas vai ter n folhas, se o n for **par** a rosáceas vai ter $2n$ folhas.



▼ **Espiral**

- A espiral vai acontecer quando:

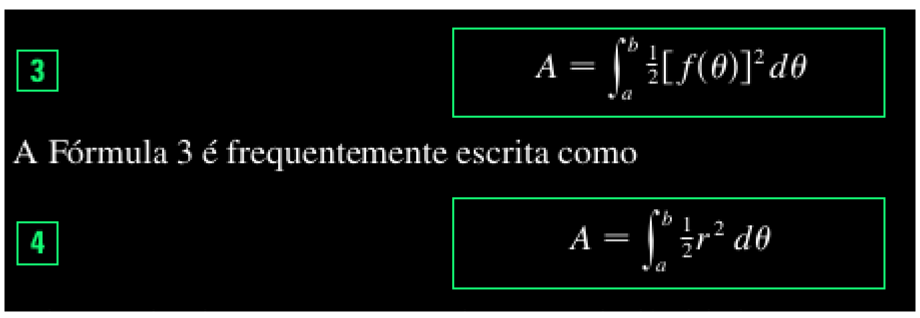
$$r = \theta$$



▼ **Propriedades**

- $r\sin\theta = K \rightarrow y = K$ Reta horizontal
- $r\cos\theta = K \rightarrow x = K$ Reta vertical

Cálculo de Área em Coordenadas Polares



3 $$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta$$

A Fórmula 3 é frequentemente escrita como

4 $$A = \int_a^b \tfrac{1}{2} r^2\,d\theta$$

A formula acima é igual a formula a seguir.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta$$

O α é o menor ângulo do gráfico e o β é o maior angulo do gráfico, na imagem a seguir fica mais claro o que eles são:

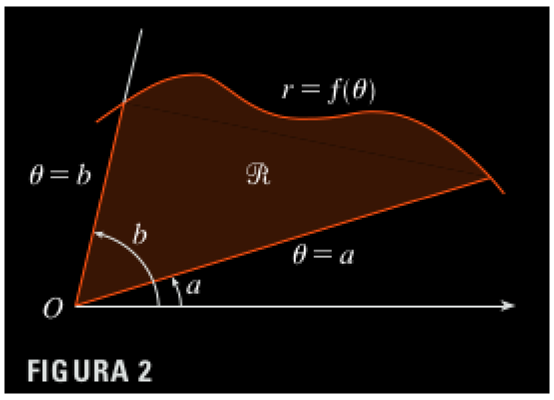
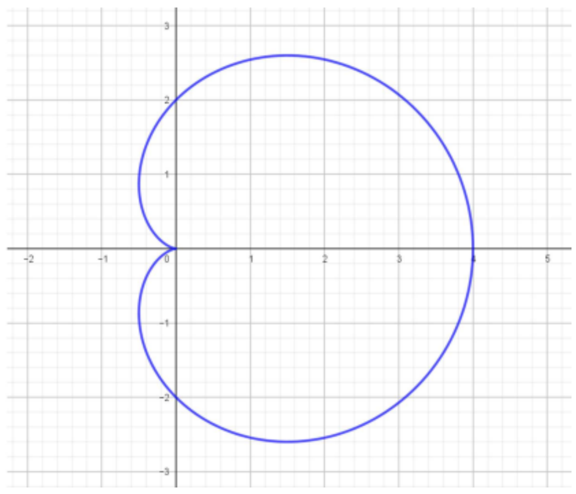


FIGURA 2

▼ **Ex 1:** Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $r = 2 + 2\cos\theta$.

- Primeiro precisamos saber qual é o formato do gráfico, para isso vamos começar atribuindo valores ao θ da função $r = 2 + 2\cos\theta$ e vamos marcando os pontos que ele retornar:



- O gráfico tem o formato de uma cardioide. Como a parte do gráfico acima do eixo x é simétrica a outra parte inferior ao eixo x, podemos calcular só uma parte e depois multiplicar o resultado por 2 para encontra a área total.
- Então vamos pegar a parte de cima do gráfico para calcular a área, pois ela é mais fácil.
- Logo o intervalo vai ser de 0 até π.
- Então a formula vai ficar:

$$A = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}[2 + 2\cos\theta]^2 d\theta = \int_0^{\pi} (4 + 8\cos\theta + 4\,cos^2\theta) d\theta =$$
$$4\int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + cos^2\theta) d\theta =$$
$$4\int_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1 + cos\,2\theta}{2}\right) d\theta =$$
$$4\int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{cos\,2\theta}{2}\right) d\theta =$$
$$4\left(\frac{3}{2}\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{sen\,2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = 6\pi$$

Integrais Impróprias

▼ **Integrais com Intervalo de Integração Infinito**

As integrais podem ter três tipos de intervalos infinitos, esses três tipos são $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ e $(-\infty, +\infty)$, vamos explicar cada um deles a seguir:

1. $(a, +\infty)$: Se f for contínua para todo $x \geq a$, então:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

desde que o limite exista.

- **Ex:**

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b\to+\infty} \left(-e^{-b} + 1\right) = 1$$

---

2. $(-\infty, b)$: Se f for contínua para todo $x \le b$, então:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

desde que o limite exista.

- **Ex:**

$$\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(x+2)^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^2 \frac{dx}{(x+2)^2} = \lim_{a\to-\infty} \left[-\frac{1}{x+2}\right]_a^2 = \lim_{a\to-\infty} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{a+2}\right) = -\frac{1}{4}$$

---

3. $(-\infty, +\infty)$: Nesse caso vamos dividir o intervalo em duas partes: $(-\infty, c) + (c, +\infty)$. Se f for contínua para todo x, e c for um número real qualquer (Preferência para um número que deixe a conta fácil), então:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)dx$$

desde que o limite exista.

- **Ex:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} =$$
$$\lim_{a\to-\infty} [arc\ tg\ x]_a^0 + \lim_{b\to+\infty} [arc\ tg\ x]_0^b =$$
$$\lim_{a\to-\infty} (arc\ tg\ 0 - arc\ tg\ a) + \lim_{b\to+\infty} (arc\ tg\ b - arc\ tg\ 0) =$$
$$\lim_{a\to-\infty} (-arc\ tg\ a) + \lim_{b\to+\infty} (arc\ tg\ b) =$$
$$-\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

▼ **Integrais de Funções com Descontinuidade no Integrando**

1. Se f for contínua em $[a, b)$, e descontínua em b então:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

desde que o limite exista.

- **Ex:**

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t \to 0^-} \left[\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_{-1}^{t} = \lim_{t \to 0^-} \left(\frac{3t^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

---

2. Se f for contínua em $(a, b]$, e descontínua em a então:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

desde que o limite exista.

- **Ex:**

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t \to 0^-} \left[\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_{-1}^{t} = \lim_{t \to 0^-} \left(\frac{3t^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

---

3. Se f for contínua em $[a, b]$, exceto em c, onde c é um valor qualquer entre a e b, $a < c < b$ então:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{s \to c^+} \int_s^b f(x)dx,$$

desde que o limite exista.

- **Ex:**

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{s \to 0^+} \int_{s}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t \to 0^-} \left[\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_{-1}^{t} + \lim_{s \to 0^+} \left[\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_{s}^{1} =$$
$$\lim_{t \to 0^-} \left(\frac{3t^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3}{2}\right) + \lim_{s \to 0^+} \left(\frac{3}{2} - \frac{3s^{\frac{2}{3}}}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

▼ **Convergente**

- A integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ é chamada convergente se o limite correspondente **EXISTIR**, ou seja quando resultar em um valor.

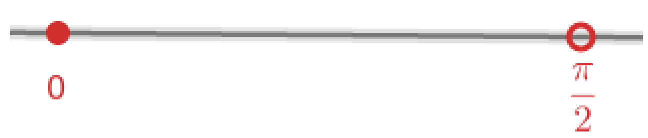
▼ **Divergente**

- A integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ é chamada divergente se o limite correspondente **NÃO EXISTIR**.

▼ **Exemplos**

▼ **Ex 1:** Verifique se a integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x \; dx$ é convergente ou divergente.

- Primeiro precisamos calcular a integral.
- Vamos usar um dos métodos de descontinuidade, não usaremos integração infinita pois o intervalo dessa integral não tem nenhum valor infinito.
- Para poder usar o método de descontinuidade precisamos saber onde ela é descontinua.
- A $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, logo quando o intervalo for 0, ela vai ser continua pois $\frac{1}{\cos 0} = 1$, mais quando o intervalo for $\frac{\pi}{2}$, ela vai ser descontinua pois $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, logo $\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}} = 0$.



- Agora que sabemos onde ela é descontinua vamos calcular a integral:

$$\int_0^{\pi/2} secx\ dx = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^t secx\ dx = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} ln|\sec x + tgx| \Big|_0^t =$$
$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} (ln|\sec t + tgt| - ln|\sec 0 + tg0|) =$$
$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} (ln|\sec t + tgt| - ln1) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} (ln|\sec t + tgt|) = +\infty$$

- Concluímos que a integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x\ dx$ é **DIVERGENTE** pois o resultado da integral não da um único valor mais sim um valor infinito.

A fórmula de Taylor

- Quando queremos fazer uma aproximação de uma função podemos usar a formula de taylor, que é a soma do Polinômio de Taylor com o Resto de Lagrange.

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + f^2(a)\cdot\frac{(x-a)^2}{2!} + ... + f^{(n)}(a)\cdot\frac{(x-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$f(x) = \left(\sum_{n-0}^{n}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right) + f^{(n+1)}(c)\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$a = 0,\ [0,x] \qquad f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + f^2(0)\cdot\frac{x^2}{2!} + ... + f^{(n)}(0)\cdot\frac{x^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + f^2(a)\cdot\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\cdot\frac{(x-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$f(x) = \left(\sum_{n-0}^{n}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right) + f^{(n+1)}(c)\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$a = 0,\ [0,x] \qquad f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + f^2(0)\cdot\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(0)\cdot\frac{x^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

▼ **Definição**

- Serve para aproximar uma função qualquer por um polinômio, em torno de um ponto.
- Mais tem uma **condição**, essa função complicada que se deseja encontrar um resultado aproximado, precisa ser derivada n vezes.
- Fazemos isso, pois as vezes, calcular o valor exato é muito difícil, então a gente aproxima
- **Obs:** Quando maior for o grau do polinômio mais aproximado vai ser o resultado.
- Fórmula e Polinômio de Taylor é a mesma coisa.

▼ **Polinômio de Taylor**

- Considere uma função f num determinado intervalo $I \to \mathbb{R}$, derivável em um valor $c \in I$ até uma ordem n. O polinômio de taylor, de ordem n da função f no ponto c, é:

$$P_n(c) = f(c) + f'(c) \cdot (x-c) + f^2(c) \cdot \frac{(x-c)^2}{2!} + f^{(3)}(c) \cdot \frac{(x-c)^3}{3!} + ... + f^{(n)}(c) \cdot \frac{(x-c)^n}{n!}$$

Quando esse n for para o **infinito**, chamamos esse polinômio de **SERIE DE TAYLOR**, e representamos com uma somatória:

$$P_n(c) = \sum_{n-0}^{n} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

- Na maioria dos casos representamos o polinômio de Taylor por $P(x)$, logo a formula ficaria:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + f^2(a) \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + f^{(3)}(a) \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + ... + f^{(n)}(a) \cdot \frac{(x-a)^n}{n!}$$

onde o a é o ponto que se deseja se aproximar.

▼ **Polinômio de Mac-Laurim**

- O polinômio de Mac-Laurim é aplicado quando o polinômio de Taylor tem ponto igual a 0.
- Então quando o polinômio de Taylor for em torno do ponto 0, chamamos isso de polinômio de Mac-Laurim
- A formula é:

$$P(0) = f(0) \ + f'(0) \cdot x \ + f^2(0) \cdot \frac{x^2}{2!} \ + f^{(3)}(0) \cdot \frac{x^3}{3!} \ + ... \ + f^{(n)}(0) \cdot \frac{x^n}{n!}$$

▼ **Ex:** Obtenha o polinômio de Taylor de ordem 4, ao redor de $a = 0$ da função $f(x) = e^x$.

- Vamos começar fazendo a derivada de primeira ordem até a derivada de quarta ordem, e depois de encontrar as derivadas vamos substituir o x pelo valo do ponto a:

$$\begin{gathered} f(x) = e^x \to f(0) = e^0 = 1 \\ f'(x) = e^x \to f'(0) = e^0 = 1 \\ f''(x) = e^x \to f''(0) = e^0 = 1 \\ f^{(3)}(x) = e^x \to f^{(3)}(0) = e^0 = 1 \end{gathered}$$

- Agora vamos pegar esses valores que encontramos e colocá-los na formula de Taylor:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x-0) + f^2(0) \cdot \frac{(x-0)^2}{2!} + f^{(3)}(0) \cdot \frac{(x-0)^3}{3!} + f^{(4)}(0) \cdot \frac{(x-0)^4}{4!} =$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

Pronto ele polinômio que encontramos é igual ao resultado da função e^x com aproximação de 4 casas decimais.

▼ **Resto de Lagrange**

- Quando estamos calculando uma aproximação de uma função por polinômio de taylor, sempre vai ter um pequeno erro, que ao somar o erro com resultado do polinômio de taylor vamos resultar na função.
- Então o Resto de Lagrange é esse erro que falta no polinômio de taylor. E é representada por $R_n(x)$.
- A formula vai ser:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

O $f(x)$ é a função e o $P_n(x)$ é o polinômio de taylor de ordem n.

- Mais existe outra formula mais fácil. Pra isso vamos usar um teorema
- **Teorema:** Seja uma função real, de variável real, com as n primeiras derivadas contínuas no intervalo fechado $[a, x]$ e tal que $f^{(n+1)}(x)$ existe para todo x no intervalo aberto **(a,x)**. Então existe $c \in (a, b)$.
- Ou seja, esse teorema está dizendo que existe um ponto c dentro do intervalo do polinômio de taylor que podemos calcular uma aproximação. Logo a formula para o Resto De Lagrange é:

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(c) \cdot \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$$

▼ **Integral do Resto de Lagrange**

- Essa é uma outra maneira de calcular o Resto de Lagrange.

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$