Funções de Variáveis Aleatórias

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Depto. de Estatística e Matemática Aplicada - UFC

Fortaleza, 09 de setembro 2022

- Seja X uma variável aleatória contínua com f.d.p dada por:

$$f(x) = 2x\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$$

Determine a f.d.p de $Y = 3X + 1$ e $W = e^{-X}$.

Funções de Variáveis Aleatórias

- O procedimento do exemplo anterior pode ser generalizado da seguinte forma:

Teorema (*Método do Jacobiano*):

Seja X uma variável aleatória contínua com f.d.p f, em que $f(x) > 0$ para $a < x < b$. Suponha-se que $y = H(x)$ seja uma função de x estritamente monótona (crescente ou decrescente). Admita-se que essa função seja diferenciável (e, portanto, contínua) para todo x. Então a variável aleatória $Y = H(X)$ possui f.d.p dada por

$$g(y) = f\left(H^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}H^{-1}(y)\right|.$$

Se H for crescente, então g será positiva para todo $H(a) < y < H(b)$. Se H for decrescente, então g será positiva para todo $H(b) < y < H(a)$.

Funções de Variáveis Aleatórias

- O método do Jacobiano pode, também, ser aplicado quando g não for uma função monótona.

Corolário (*Método do Jacobiano*):

Seja X uma variável aleatória contínua com f.d.p f, em que $f(x) > 0$ para $x \in I$. Defina $y = H(x)$ uma função não monótona de x. Suponha que I possa ser dividido em uma quantidade enumerável $I_1, I_2, \ldots$ de subintervalos tal que H seja monótona em cada um deles. Nesse caso, seja H_j^{-1} a função inversa de H restrita ao subintervalo I_j. Portanto,

$$g(y) = \sum_j f\left(H_j^{-1}(y)\right) \left| \frac{d}{dy} H_j^{-1}(y) \right|$$

- Seja X com densidade $f(x)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine a f.d.p de $Y = X^2$.

Funções de Variáveis Aleatórias

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Depto. de Estatística e Matemática Aplicada - UFC

Fortaleza, 12 de setembro 2022

- O método do Jacobiano pode, também, ser aplicado quando g não for uma função monótona.

Corolário (*Método do Jacobiano*):

Seja X uma variável aleatória contínua com f.d.p f, em que $f(x) > 0$ para $x \in I$. Defina $y = H(x)$ uma função não monótona de x. Suponha que I possa ser dividido em uma quantidade enumerável $I_1, I_2, \ldots$ de subintervalos tal que H seja monótona em cada um deles. Nesse caso, seja H_j^{-1} a função inversa de H restrita ao subintervalo I_j. Portanto,

$$g(y) = \sum_j f\left(H_j^{-1}(y)\right) \left| \frac{d}{dy} H_j^{-1}(y) \right|$$

- Seja X com densidade $f_X(x)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine a f.d.p de $Y = X^2$.

- Uma variável aleatória X possui densidade de probabilidade $f_X(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine a f.d.p da variável aleatória $Y = aX + b$, em que a e b são constantes.

- Seja X uma variável aleatória contínua com densidade de probabilidade $f_X(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine a f.d.p de $Y = |X|$.