Elementos de Análise Combinatória

franciscogustaavo

May 2021

Contents

Conteudo para estudar

- Indução
- Teorema Finito de Ramsey
- Problema de monty hall
- Curso de ferias da UFC prof caminha (Introdução a análice real matematica)
- Teoria analitica dos números
- Como os números primos são regidos.
- Site de ajuda wolframalpha.com
-

1 Conseitos

1.1 Axiomar

- Um axioma ou postulado é uma sentença ou proposição que não é provada ou demonstrada e é considerada como óbvia ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria. Por essa razão, é aceito como verdade e serve como ponto inicial para dedução de outras verdades um axioma ou postulado é uma sentença ou proposição que não é provada ou demonstrada e é considerada como óbvia ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria. Por essa razão, é aceito como verdade e serve como ponto inicial para dedução de outras verdades
- **Melhor dizendo:** É algo que é aceito como verdade, por ser muito óbvio.
- **Obs:** Não é porque um axioma é verdadeiro em um determinado ambiente matemático, que ele vai ser verdadeiro no ambiente real.
- **Exemplo:** Uma caixa não vazia, ao colocar a sua mão dentro dessa caixa, você pode escolher ao acaso um elemento dela (para qualquer conjunto não vazio).

1.2 Teorema

- Na matemática, um teorema é uma afirmação que pode ser provada como verdadeira, por meio de outras afirmações já demonstradas, como outros teoremas, juntamente com afirmações anteriormente aceitas, como axiomas.

1.3 Prova Formal

- Em matemática, uma prova é uma demonstração de que, dados certos axiomas, algum enunciado de interesse é necessariamente verdadeiro. Utiliza como base premissas intrínsecas a um modelo conceitual e um silogismo que, a partir de uma série de operações, chega ao resultado.
- **Melhor dizendo:** É parte de um conjunto de conhecimentos, tomados como verdades, desenvolvendo por meio de raciocínio lógico de inferência básica a sua demonstração até chegar em um resultado desejado.
- **Obs:** Tenho uma proposição: A soma dos **n** primeiros números naturais $> \mathbf{0}$ é igual a $(\frac{n(n+1)}{2})$. Se eu sair testando essa proposição até o valor de um milhão, e não encontrar nenhum valor que contradiz essa preposição, isso ainda não é uma prova, mesmo que eu tenha plena certeza que a proposição é verdadeira.
- **Exemplo 1:**
  - **Prove que** $(A - B) \subset A$
  - Se $x \in (A - B)$, então $x \in A \; e \; x \notin B$.
  - Logo $x \in (A - B) \Rightarrow x \in A \; e \; (A - B) \subset A$
- **Exemplo 2:**
  - **Prove que** $(A - B) \cup (B - A) \;=\; (A \cup B) - (A \cap B)$
  - $x \in (A - B) \cup (B - A) \quad \Leftrightarrow \quad x \in (A - B)$ **ou** $x \in (B - A)$**.** $x \in (A - B) \quad \Leftrightarrow \quad x \in A$ **e** $x \notin B \quad \Rightarrow \quad x \in A \cup B$ **e** $x \notin B \cap A \quad \Rightarrow \quad x \in (A \cup B) - (B \cap A)$ **. Se** $x \in (B - A)$ **, da mesma forma** $x \in (A \cup B) - (B \cap A)$ **. Logo,** $(A - B) \cup (B - A) \subset (A \cup B) - (B \cap A)$ **. Tome** $x \in (A \cup B) - (B \cap A)$ **, então** $x \in A \cup B$ **e** $x \notin A \cap B$ **. Logo** $x \notin A$ **ou** $x \notin B$, **mais** $x \in A$ **ou** $x \in B$ **. De toda forma** $x \in (A - B)$ **ou** $x \in (B - A)$ **. Logo** $x \in (A - B) \in (B - A)$.
- **Exemplo 3:**
  A soma de todos os alunos de três turmas diferente: A=Matemática, B=Cálculo, C=Combinatoria, $\#(A \cup B \cup C)$ é?
  - $\#A + \#B + \#C$
  - Retirando os alunos que estudam em mais de uma turma $A\,B\,C$: $-\#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C)$
  - Acabei retiram todos os alunos que se repetem, colocando de volta o aluno, idependente se ele estuda em mais de uma turma: $+\#(A \cap B \cap C)$
  - A formula final é: $(\#A + \#B + \#C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$
- **Exemplo 4:**
  415 alunos, 221 estudam inglês, 163 estudam francês, 52 estudam inglês e francês. Quantos alunos não estudam nenhum idioma?

- O número de alunos que estudam inglês: $\#I = 221$; Francês: $\#F = 163$; Inglês e Francês: $\#(I \cap F)$; Todos os alunos: $\#\Omega = 415$; Valor desejado: $\#(I \cup F)^c = ?$.
- $\#(I \cup F) = \#I + \#F - \#I \cap F \Rightarrow 221 + 163 - 52 = 332$
- $\#(I \cup F) + \#(I \cup F)^c = \#\Omega \Rightarrow 332 + \#(I \cup F)^c = 415 \Rightarrow \#(I \cup F)^c = 83$

1.4 Prova por contradição

- Prova por contradição (ou redução ao absurdo) é um método de prova matemática indireta, não-construtiva. Este tipo de prova é feito assumindo-se como verdade o contrário do que queremos provar e então chegando-se a uma contradição.
- **Melhor dizendo:** Quero prova que **p** é verdade, então eu pego $\sim$ **p** e faço de conta que ele verdade, chego em um absurdo (algo que não pode acontecer), então $\sim$ **p** é falso, sendo assim **p** é verdadeiro.
- **Exemplo 1:**
  - Existe uma quantidade infinita de números primos.
  - **Prova:** Por absurdo, suponha $p_1 + p_2 + p_3 \dots p_n$ são os **únicos** primos. Tal $p = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$. Nenhum primo entre $p_1 \dots p_n$ divide **p**. Então **p** é primo e é maior que todos os outros. Contradição.
  - Ou seja, o absurdo foi supor que existia uma quantidade finita de números primos, portando essa suposição é falsa, e existem infinitos números primos.
- **Exemplo 2:**
  - Não existe menor número real positivo.
  - **Prova:** Por contradição. Suponha que existe o menor número real positivo. Seja x esse número. Veja que $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} > \mathbf{0}$ e $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} \in \mathbb{R}$ e $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} < \mathbf{x}$. Contradição!
  - Ou seja, o absurdo foi supor que existia um menor número real positivo, portando essa suposição é falsa, e não existem um menor número real positivo.

1.5 Prova por indução

- É uma prova usado para demonstrar a verdade de um número infinito de proposições. Esse método funciona provando que o enunciado é verdadeiro para um valor inicial, e então provando que o processo usado para ir de um valor para o próximo é valido.
- **Ou seja:** A prova por indução é formada por uma sequência de três passos.
  - **1º Base de indução (Também chamado de caso inicial):**
    É provar que uma equação (ideia) qualquer é válida para um valor inicial $P(1)$. Dependendo da definição utilizada de $\mathbb{N}$, esse valor pode ser 0 ou 1.
  - **2º Hipótese de indução**
    É mostrar que, a equação é válida para um determinado **n**, $P(n)$.
  - **3º Passo indutivo**
    É mostrar que a equação é válida para o $\mathbf{n+1}$, $P(n+1)$.
  - **Obs:**
    Se eu conseguir provar o **Passo indutivo**, então eu consigo provar que a equação é válida para qualquer **n**.
- **Exemplo 1:**
  A soma dos **n** primeiros números naturais vai ser igual a **n** multiplicado por **n** mais **1**, tudo isso dividido por dois. $(\frac{n(n+1)}{2})$.
  - **Prova, por indução:**
    Base de indução, para $n = 1$, temos: $(1 = \frac{1(1+1)}{2})$. A partir dessa premissa, vamos para o segundo passo.

    Hipótese de indução, suponha que: $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ é verdadeiro, para um certo $k \in \mathbb{N}$. Dessa premissa vamos para o último passo.

    Passo indutivo, $1 + 2 + 3 + \dots + k + k + 1$, a soma de 1 até k podemos subistituir pelo resultado da Hipótese de indução, ficando: $\frac{k(k+1)}{2} + k + 1$, o MMC desse valor é 2, dividir esse MMC pelo denominador e multiplicar o resultado pelo numerador vai ficar: $\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$, colocando $k + 1$ em evidência fica: $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Finalizamos provando que essa fórmula vale para todos os números naturais.

- **Exemplo 2:**
A soma dos **n** primeiros números naturais ao quadrado: $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

  - **Prova, por indução:**
    Base de indução, para $n = 1$, temos: $(1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6})$.
    Hipótese de indução, suponha que a formula é verdadeira para $p(n)$.
    Passo indutivo, $1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, a formula depois da igualdade é o resultado que eu pretendo chegar, eu cheguei a esse resultado pegando a formula $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ colocando onde tinha n por $n+1$.
      * Fazendo o passo indutivo, fica, $1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$.
      * Fazendo o MMC fica: $\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$.
      * Deixando o $n+1$ em evidência: $\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1)}{6}$
      * Abrindo os parêntes: $\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$.
      * Colocando o $2n$ e o 3 em evidência, fica: $\frac{(n+1)(2n^2+4n+3n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n(n+2)+3(n+2)}{6}$.
      * Colocando o $n+2$ em evidência: $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

- **Exemplo 3:**
A soma dos **n** primeiros números ímpares naturais: $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$

  - **Prova, por indução:**
    Base de indução, para $n = 1$, temos: $(1^2 = 1)$.
    Hipótese de indução, suponha que a formula é verdadeira para $p(n)$.
    Passo indutivo, $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$.
      * Fazendo o passo indutivo, fica, $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1)$.
      * O resultado $n^2 + (2n+1)$ é um Trinômio do quadrado perfeito, que fica: $(n+1)^2$
      * Então provamos que a formula $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$ é valida para 1, para n e para $n+1$.

- **Exemplo 4:**
A soma dos **n** primeiros números de Fibonacci: $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$

  - **Prova, por indução:**
    Base de indução, para $n = 1$, temos: $(F_{1+2} - 1 = F_3 - 1 = 2 - 1 = 1)$.
    Hipótese de indução, suponha que a formula é verdadeira para $p(n)$.
    Passo indutivo, $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + ... + F_n + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$.
      * Fazendo o passo indutivo, fica, $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + ... + F_n + F_{n+1} = (F_{n+2} - 1) + (F_{n+1})$.
      * Com o próprio resultado $(F_{n+2} - 1) + (F_{n+1})$ podemos aplica a formula de Fibonacci, somando os dois antecessores: $(F_{n+2} - 1) + (F_{n+1}) = F_{n+3} - 1$
      * Então provamos que a formula $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$ é valida para 1, para n e para $n+1$.

- **Exemplo 5:**
A soma dos **n** primeiros números: $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

  - **Prova, por indução:**
    Base de indução, para $n = 1$, temos: $(\frac{1}{1+1} = 0,5)$.
    Hipótese de indução, suponha que a formula é verdadeira para $p(n)$.
    Passo indutivo, $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.
      * Fazendo o passo indutivo, fica, $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
      * Colocando o $\frac{1}{n+1}$ em evidência, fica: $\frac{1}{n+1}\{\frac{n}{1} + \frac{1}{n+2}\}$
      * Fazendo o mínimo de $\{\frac{n}{1} + \frac{1}{n+2}\}$ fica: $\frac{1}{n+1}\{\frac{n(n+2)+1}{n+2}\}$
      * Tirando os parênteses: $\frac{1}{n+1}\{\frac{n^2+2n+1}{n+2}\}$
      * O resultado acima é um Trinômio do quadrado perfeito, resolvendo fica: $\frac{1}{n+1}\{\frac{(n+1)^2}{n+2}\}$
      * Retirando as chaves: $\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$, isso é a mesma coisa de $\frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$, cortando o $(n+1)$, fica: $\frac{n+1}{n+2}$
      * Então provamos que a formula $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ é valida para 1, para n e para $n+1$.

- **Exemplo 6:**
Provar que $\mathbf{3^n - 1}$ é par para todo $n \in \mathbb{N}$.

- **Prova, por indução:**
  Base de indução, para $n = 0$, temos: $(3^0 - 1 = 0)$.
  Hipótese de indução, $3^n + 1 = 2k$, para um certo **n**.
  Passo indutivo, $3^{n+1} - 1$.
  - O valor anterior também pode ser escrito, como $3 \cdot 3^n - 1$, substituindo o 3^n, fica: $3(2k + 1) - 1$.
  - Multiplicando, fica: $6k + 3 - 1 = 6k + 2$
  - $6k + 2 = 2(3k + 1) = 2q$

1.6 Cojectura

- Uma conjectura é uma ideia, fórmula ou frase, a qual não foi provada ser verdadeira, baseada em suposições ou ideias com fundamento não verificado. As conjecturas utilizadas como prova de resultados matemáticos recebem o nome de hipóteses.

2 Lógica Proposicional

2.1 Proposição

- É uma senteça ou oração que pode ser classificada em verdadeiro ou falso.
- **Exemplo:**
  - $(9 \neq 5)$ Nove é diferente de cinco. Verdadeira
  - $(7 > 3)$ Sete é maior que três. Verdadeira
  - $(2 \in \mathbb{Z})$ Dois é um número inteiro. Verdadeira
  - $(3 \mid 11)$ Três é divisor de onze. False
  - $(4 \cdot 5 = 20)$ Quatro vezes cinco é igual a vinte.Verdadeira

2.2 Negação de Proposição

- A partir de uma proposição p qualquer, sempre podemos construir outra, denominada negação de p e indicada com o símbolo $\sim p$.
- **Exemplo:**
  - $p: (9 \neq 5), \sim p: (9 = 5)$
  - $p: (7 > 3), \sim p: (7 \leq 3)$
  - $p: (2 \in \mathbb{Z}), \sim p: (2 \notin \mathbb{Z})$
  - $p: (3 \mid 11), \sim p: (3 \nmid 11)$
  - $p: (4 \cdot 5 = 20), \sim p: (4 \cdot 5 \neq 20)$
  - $p: (\forall\, x), \sim p: (\exists\, x)$
  - $p: (\forall\, x)(x^2 - 4x + 1 \neq (x-2)^2), \sim p: (\exists\, x)(x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2)$

2.3 Conectivos $\wedge$(e) e $\vee$(ou)

- **Conjunção $\wedge$**
  - Colocando o conectivo $\wedge$ entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição, p $\wedge$ q, denominada conjunção das sentenças p e q.
  - A conjunção p $\wedge$ q é verdadeira se p e q são ambas verdadeiras;
  - Se ao menos uma delas for falsa então p $\wedge$ q é falsa.

p	q	p $\wedge$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

  - **Exemplo:**
    - $p: 2 > 0$ (V)
      $q: 2 \neq 1$ (V)
      então:
      $p \wedge q: \; 2 > 0 \quad e \quad 2 \neq 1$ (V)

    - $p: \; -2 < -1$ (V)
      $q: (-2)^2 < (-1)^2$ (F)
      então:
      $p \wedge q: \; -2 < -1 \quad e \quad (-2)^2 < (-1)^2$ (F)

- **Disjunção $\vee$**
  - Colocando o conectivo $\vee$ entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição, p $\vee$ q, denominada disjunção das sentenças p e q.

- A disjunção p ∨ q é verdadeira se ao menos uma das proposições p ou q é verdadeira; se p e q são ambas falsas, então p ∨ q é falsa.

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- **Exemplo:**
  - $p : 5 > 0$ (V)
    $q : 5 > 1$ (V)
    então:
    $p \vee q : \ 5 > 0 \quad ou \quad 5 > 1$ (V)

  - $p : 3 = 3$ (V)
    $q : 3 < 3$ (F)
    então:
    $p \vee q : \ 3 \leq 3$ (F)

2.4 Condicionais →(se.. então..) e ↔(se e somente se)

- **Condicional →**
  - Colocando o condicional → entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição, p → q, que se lê: 'se p, então q', 'p é condição necessária para q', 'q é condição suficiente para p'.
  - O condicional p → q é falso somente quando p é verdadeiro e q é falsa; caso contrári, p → q é verdadeiro.

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

  - **Exemplo:**
    - $p : (2 \mid 4)$ (V)
      $q : (4 \mid 20)$ (V)
      $p \rightarrow q :$ se dois é divisor de quatro, então quatro é divisor de vinte $(2 \mid 4 \rightarrow 4 \mid 20)$ (V)

    - $p : (2 \cdot 5 = 10)$ (V)
      $q : (3 \mid 10)$ (F)
      $p \rightarrow q :$ se dois vezes cinco é igual a dez, então três é divisor de dez $(2 \cdot 5 = 10 \rightarrow 3 \mid 10)(F)$

    - $p : (5 < 2)$ (F)
      $q : (2 \in \mathbb{Z})$ (V)
      $p \rightarrow q :$ se cinco é menor que dois, então dois é número inteiro $(5 < 2 \rightarrow 2 \in \mathbb{Z})(V)$
  - **Exemplo em portugues:**
    - "Se eu for eleito, reduzirei o valor do RU"
      p: "Se eu for eleito"
      q: "reduzirei o valor do RU"
      $p \rightarrow q :$ Se eu for eleito → reduzirei o valor do RU

Se eu for eleito	reduzirei o valor do RU	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- **Condicional ↔**
  - Colocando o condicional ↔ entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição, p ↔ q, que se lê: 'p se, e somente se, q', 'p é condição necessária e suficiente para q', 'q é condição necessária e suficiente para p' ou 'se p, então q e reciprocamente'.

– O condicional $\leftrightarrow$ é verdadeiro somente quando p e q são ambas verdadeiro ou ambas falsas; se isso não acontecer, o condicional $\leftrightarrow$ é falso.

p	q	p $\leftrightarrow$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

– **Exemplo:**

* $p : (2 \mid 12)$ (V)
  $q : (2 \cdot 7 \mid 12 \cdot 7)$ (V)
  $p \leftrightarrow q :\ \ (2 \mid 12 \leftrightarrow 2 \cdot 7 \mid 12 \cdot 7)$ (V)

* $p : (\frac{3}{2} = \frac{6}{4})$ (V)
  $q : (3 \cdot 4 \neq 6 \cdot 2)$ (F)
  $p \leftrightarrow q :\ \ (\frac{3}{2} = \frac{6}{4} \leftrightarrow 3 \cdot 4 \neq 6 \cdot 2)(F)$

* $p : (6 = 12 : 3)$ (F)
  $q : (3 \cdot 6 = 18)$ (V)
  $p \leftrightarrow q :\ \ (6 = 12 : 3 \leftrightarrow 3 \cdot 6 = 18)(F)$

2.5 Tautologia

- É uma proposição formada por outras proposições e conectivos, que é sempre verdadeira idependente dos valores de suas variáveis.

- **Exemplo 1:** $(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$q \vee p$	$(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

- **Exemplo 2:** $(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

- **Exemplo prático:** $\sim (p \wedge q)$
  – p : "Olhei para a direita"
  – q : "Olhei para a esquerda"

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
V	F	F	V
F	V	F	V

2.6 Relação de Implicação $\Rightarrow$

- $p \Rightarrow q$ (p implica q), se $p \rightarrow q$ é verdade.
- Esse símbolo $\Rightarrow$ é usado em linguagens natural; demostrações; afirmações. Já no modelo de lógica usamos o $\rightarrow$.

2.7 Relação de Equivalência $\Leftrightarrow$

- $p \Leftrightarrow q$ (p equivale a q), se, e somente se, $p \leftrightarrow q$ é verdade.
- Esse símbolo $\Leftrightarrow$ é usado em linguagens natural; demostrações; afirmações. Já no modelo de lógica usamos o $\leftrightarrow$.

2.8 Setenças abertas, Quantificadores ($\forall$ $\exists$ $\exists!$)

- **Setenças abertas**
  - Orações que contêm variáveis são chamadas funções proporcionais ou sentenças abertas. Tais orações não são proposições pois seu valor lógico (V ou F) é discutível, dependem do valor dado as variáveis.
  - Há, entretanto, duas maneiras de transformar senteças abertas em proposições:
    1. Atribuir valor ás variáveis.
    2. Utilizar quantificadores.
  - **Exemplos:**
    * $x + 1 = 7$ é verdadeira se trocarmos x por 6 e é falsa para qualquer outro valor dado a x;
    * $x^3 = 2x^2$ é verdadeira se trocarmos x por 0 ($0^3 = 2 \cdot 0^2$) ou 2 ($2^3 = 2 \cdot 2^2$) e é falsa para qualquer outro valor dado a x.

- **Quantificadores**
  1. **Quantificador universal** $\forall$
     - O quantificador universal, usado para transformar sentenças abertas em proposições, é indicado pelo símbolo $\forall$, que se lê: "qualquer que seja", "para todo", "para cada".
     - **Exemplos:**
       * $(\forall x)(x + 1 = 7)$ que se lê: "qualquer que seja o número x, temos $x + 1 = 7$" F
       * $(\forall x)(x^3 = 2x^2)$ que se lê: "para todo número x, $x^3 = 2x^2$" F
       * $(\forall a)((a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1)$ que se lê: "qualquer que seja o número a, temos $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$" V
       * $(\forall y)(y^2 + 1 > 0)$ que se lê: "para todo número y, temos $y^2 + 1$ positivo" V
  2. **Quantificador existencial** $\exists$
     - O quantificador existencial é indicado pelo símbolo $\exists$, que se lê: "existe", "existe pelo menos um ", "existe um".
     - **Exemplos:**
       * $(\exists x)(x + 1 = 7)$, que se lê: "Existe um número x tal que $x + 1 = 7$".V
       * $(\exists x)(x^3 = 2x^2)$, que se lê: "Existe um número x tal que $x^3 = 2x^2$".V
       * $(\exists a)(a^2 + 1 \leq 0)$, que se lê: "Existe um número a tal que $a^2 + 1$ é não positivo".F
       * $(\exists! m)(m(m + 1) \neq m^2 + m)$, que se lê: "Existe pelo menos um número m tal que $m(m + 1) \neq m^2 + m$".F
  3. **Quantificador para unicidade** $\exists!$
     - Algumas vezes utilizamos também outro quantificador: $\exists!$, que se lê: "existe um único", "existe um e um só", "existe só um".
     - **Exemplos:**
       * $(\exists! x)(x + 1 = 7)$, que se lê: "existe um só número x tal que $x + 1 = 7$".V
       * $(\exists! x)(x^3 = 2x^2)$, que se lê: "existe um só número x tal que $x^3 = 2x^2$".F
       * $(\exists! x)(x + 2 > 3)$, que se lê: "existe um só número x tal que $x + 2 > 3$".F

2.9 Conjuntos

- Um conjunto é uma lista de elementos que não se repetem.
- A ordem não importa: $1, 2, 3 = 2, 3, 1$
- Os conjuntos são representados por chaves: $\{\}$
- **Operações entre Cojuntos**
  - **Pertence $\in$:** $x \in A$, x só pertence a A, se x é elemento de A.
  - **Não Pertence $\notin$:** $x \notin A$, x não pertence a A, se x não for elemento de A.
  - **Contido $\subset$:** Um conjunto (A) só esta contido em um outro conjunto (B) se todos os elementos de (A) estive em (B). O contido só pode ser usado em relações de conjunto com conjunto.
  - **Não Contido $\not\subset$:** Um conjunto (A) não esta contido em um outro conjunto (B) se os elementos de (A) não estiverem em (B).
  - **União $\cup$:** União de dois conjuntos: $A = \{1, 2, 3\}$ $\quad B = \{2, 7, 9\}$ $\quad A \cup B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$

- **Interseção $\cap$:** Interseção de dois conjuntos, é quando um elemento pertence aos dois conjuntos: $A = \{1,2,3\} \quad B = \{2,7,9\} \quad A \cap B = \{2\}$
- **Obs:** A rigor, o certo é esse: $(A \cup B) \cup C$ ou $(A \cap B) \cap C$, mas se fizer desse modo $A \cup B \cup C$ ou $A \cap B \cap C$, da o mesmo resultado.
- **Todos os elementos $\#$:** Quando esse símbolo vem antes de uma variável $\#A$, ele está se referindo a todos os elementos, ou seja, se lê $\#A$ como "Todos os elementos de A".
- **Omega Ω:** Usado para denotar um conjunto universo, isso vai depender do contexto, se estiver falando de números, o conjunto universo pode ser o os números reais, se estiver falando de alunos, o conjunto universo pode ser o conjunto de todos os alunos. Ex: $A = \{0,2,4,6,...\} \quad B = \{1,3,5,7,...\} \quad A \cup B = \Omega$
  Obs:Dizemos que $\{A, b\}$ são **partições** de $\Omega, se \quad A \cap B = \varnothing$.
  Obs:Dizemos que algo é complementa, representado pelo espoente ^{c}, se o valor pertence a Ω, e não pertence ao A. O $(A^c)^c$ é mesmo que A. Ex: $\Omega = \{1,2,3,4\} \quad A = \{1,4\} \quad A^c = \{2,3\}$
- **Pertence $\in$:**
- **Pertence $\in$:**
- **Exemplo:** $A = \{1,2,3\}$ $B = \{\{1,2\}1,2,3\}$ $C = \{1,2\}$
  * $1 \in A$ (V)
  * $7 \in A$ (F)
  * $4 \notin A$ (V)
  * $\{1,2\} \in B$ (V)
  * $\{1,2\} \in A$ (F) O conjunto $\{1,2\}$ não é elemento de A.
  * $A \subset B$ (V)
  * $B \subset A$ (F)
  * $C \subset B$ (F)
  * $C \not\subset B$ (V)
  * $A \subset A$ (V)
  * $\#(A \cup C) = \#A + \#B$ (F) O $\#(A \cup C) = \{1,2,3\} = 3 \quad$ e $\quad \#A + \#B = \{1,2,3,1,2\} = 5$
  * $\#(A \cup C) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$ (V)

- **Igualdade entre conjuntos:** Um conjunto é igual a outro conjunto $A = B$, se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$. $A = \{1,2,3\} \quad B = \{3,2,1\} \quad A = B \quad V$

- **Vazio:** O conjunto vazio pode ser representado por $\varnothing \quad ou \quad \{\}$. Atenção: Isso $\{\varnothing\}$ não é um conjunto vazio, isso é um conjunto cuja o único elemento é o vazio. O vazio esta contido em todos os conjuntos.

- **Leis de De Morgan:**
  - **1ª:** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
    Para provar isso, precisamos primeiro provar que $(A \cup B)^c$ esta contido em $A^c \cap B^c$ e depois, provar que $A^c \cap B^c$ esta contido em $(A \cup B)^c$.

1) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})^\mathbf{c} \quad \subset \quad \mathbf{A^c} \cap \mathbf{B^c}$	**2) $\mathbf{A^c} \cup \mathbf{B^c} \quad \subset \quad (A \cap B)^c$**
Se $x \in (A \cup B)^c$ $x \notin A \cup B$. Então, $x \notin A \quad e \quad x \notin B$. Daí $x \in A^c \quad e \quad x \in B^c d$. Logo, $x \in A^c \cap B^c \quad e \quad (A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$	Se $x \in A^c \cap B^c$, então $x \in A^c \quad e \quad x \in B^c$. Logo, $x \notin A \quad e \quad x \notin B$. Certamente, $x \notin (A \cup B)$. Por fim, $x \in (A \cup B)^c \quad e \quad A^c \cap B^c \quad \subset \quad (A \cup B)^c$

  - **2ª:** $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

1) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})^\mathbf{c} \quad \subset \quad \mathbf{A^c} \cup \mathbf{B^c}$	**2) $\mathbf{A^c} \cup \mathbf{B^c} \quad \subset \quad (A \cap B)^c$**
Se $x \in (A \cap B)^c$. Então $x \notin A \cap B$. Então $x \notin A$ ou $x \notin B$. Se $x \notin A$, então $x \in A^c \quad e \quad x \in A^c \cup B^c$. Se $x \notin B$, então $x \in B^c \quad e \quad x \in A^c \cup B^c$. Em todo caso, $x \in (A \cap B)^c \Rightarrow$ $x \in A^C \cup B^c$. Logo $(A \cap B)^c \quad \subset \quad A^c \cup B^c$	Se $x \in A^c \cup B^c$, ocorre $x \in A^c \quad ou \quad x \in B^c$. Se $x \in A^c, x \notin A$. Se $x \notin A$, $x \notin A \cap B$, logo $x \in (A \cap B)^c$ Se $x \in B^c$, então $x \notin B$ e $x \notin A \cap B$. Logo, $x \in (A \cap B)^c$. Em todo caso, $x \in A^c \cup B^c \Rightarrow x \in (A \cap B)^c$. Logo, $A^c \cup B^c \quad \subset \quad (A \cap B)^c$.

- **Propriedades Distributivas:**
  - $(A \cup B) \cap C \; = \; (A \cap C) \cup (B)$
  - $(A \cap B) \cup C \; = \; (A \cup C) \cap (B)$

3 Indução Matemática

3.1 Princípio da Inclusão e Exclusão

- $\#(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) \; = \; \#A_1 + \ldots \#A_n - \#(A_1 \cap A_2) - \ldots - \#(A_{n-1} \cap A_n) + \ldots + (-1)^{n+1} \#(A_1 \cap A_2 \cap A_n)$

3.2 Tautologia

-

4 Análise Combinatória e Probabilidade

4.1 Princípio fundamental da contagem

- O princípio fundamental da contagem é um princípio da combinatória. É, basicamente, a ideia de que o número de possibilidades de fazer n ações distintas e independentes é a multiplicação da quantidade de modos possíveis que cada uma pode ser feita. **Ex:** 3 blusas, 2 calças e 2 sapatos, quantas maneiras diferentes uma pessoa pode sair de casa: 12 possibilidades.

4.2 Fatorial

- Essa operação é bastante comum na análise combinatória, facilitando o cálculo de arranjos, permutações, combinações e demais problemas envolvendo contagem. O fatorial é representado pelo símbolo "!". Definimos como n! (n fatorial) a multiplicação de n por todos os seus antecessores até chegar em 1. $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.
- $0! = 1$
- **Ex 1:** Tenho 3 alunos (A, B, C), quantas filas diferentes eu posso organizar com 10 alunos: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- **Ex 2:** Quantas permutações podemos fazer com o nome "CAIO": $4! = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 24$ ("CAIO", "COIA","CIOA",. . ., "OIAC").
- **Ex 3:** Quantas permutações podemos fazer com o nome "CASA": $4! = \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2} = 24$. É dividido por dois pois o A se repete duas vezes.
- **Ex 4:** Quantas permutações podemos fazer com o nome "PARAGUAIO": $\frac{9!}{3!}$. É dividido por 3! pois o A se repete três vezes.
- **Ex 5:** Quantas permutações podemos fazer com o nome "ARARA": $\frac{5!}{3!\cdot2!}$.

4.3 Combinações

- A Combinação (C_{np}) é um tipo de agrupamento da análise combinatória que calcula quantos subconjunto de "p" elementos podemos formar partindo de um conjunto inicial com "n" elementos. Nesse caso, a ordem das combinações não importa, pois trocá-la gera o mesmo resultado. Há 2 tipos de Combinações que possuem suas próprias fórmulas.
- **Ex 1:** Tenho 45 alunos, quero formar um comiter com 3 alunos, de quantas maneiras diferente eu posso forma esse comiter? $\frac{45\cdot44\cdot43}{3!}$, O 45, pois existe 45 alunos para a primeira posição, o 44 pois existe 44 alunos para a segunda posição, o 43 pois existe 43 alunos para a terceira posição, sabendo que a ordem não importa, então temos que retira os valores que se repetem (3!).

5 Proplemas Matemáticos

5.1 Pro1

- Eu tenho dois filhos. Um deles é um menino e nasceu numa terça-feira. Qual a probabilidade de que eu tenha dois meninos?

Resposta: $\frac{13}{27}$
Solução: Observe que se o filho maior é um menino que nasceu numa terça-feira, então existem 14 possibilidades para a segunda criança: pode ser um menino, nascido em qualquer um dos sete dias da semana, ou bem ser uma menina, que tenha nascido em qualquer um dos sete dias. Suponhamos agora que o filho menor seja o nascido numa terça-feira. Então, como antes, existem 14 possibilidades para quem nasceu primeiro. No entanto, há um caso que está sendo considerado duplicado, que é quando os dois filhos são meninos e nasceram em uma terça-feira. Assim que, ao invés de considerarmos 28 casos distintos (14 se o primeiro filho foi o citado e 14 se o segundo filho foi o citado), na verdade temos 27 casos possíveis como espaço amostral. Desse total, repare que são 13 os que nos interessam: 7 casos em que o filho mais velho é um menino nascido em uma terça-feira (e o segundo, neste caso, em qualquer dia da semana) e 6 casos em que o filho mais novo é um menino nascido em um terça feira e o mais velho, neste caso, teria nascido em qualquer um dos outros dias da semana (o caso em que os dois nasceram em uma terça-feira já foi considerado na contagem anterior). Logo, a probabilidade é de 13271327. Observação: Se os dois filhos forem gêmeos, considere como "maior" o filho que nasceu primeiro. O raciocínio continua válido.

$((x \vee y) \to z) \leftrightarrow ((x \to y) \to z)$

x	y	$(x \vee y)$	z	$(x \vee y) \to z$	x	y	$(x \to y)$	$((x \to y) \to z)$	$((x \vee y) \to z) \leftrightarrow ((x \to y) \to z)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	F	V	V	V