Variáveis Aleatórias Discretas

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Depto. de Estatística e Matemática Aplicada - UFC

Fortaleza, 13 de maio de 2022

Sumário

Função de distribuição acumulada

Definição

A função de distribuição acumulada (f.d.a) de uma variável aleatória (discreta ou contínua) X é definida como

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \text{ para todo } x$$

Propriedades

A função de distribuição acumulada satisfaz as seguintes condições:

(F1) *Monotonicidade.* Se $x \leq y$, então $F(x) \leq F(y)$.

(F2) *Continuidade à direita.* Se $x_n \downarrow x$, então $F(x_n) \downarrow F(x)$.

(F3) $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Função de distribuição acumulada

Teorema

- Se X for uma variável aleatória discreta

$$F(x) = \sum_{\{j : x_j \leq x\}} p(x_j).$$

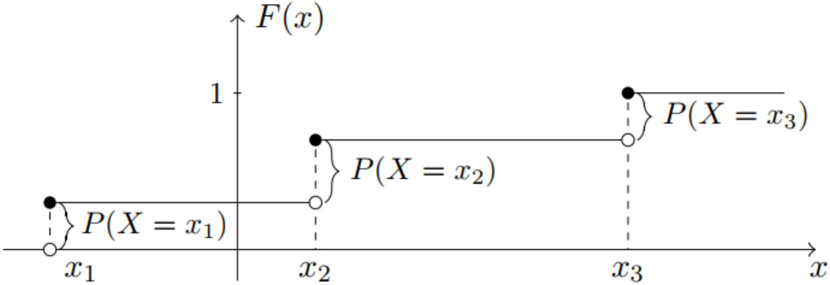
- Por outro lado,

$$p(x_i) = F(x_i) - F(x_i^-)$$

em que $F(x_i^-)$ é o limite de $F(x)$ com x tendendo a x_i pela esquerda (isto é, por valores inferiores à x_i).

Função de distribuição acumulada

Caso discreto



Função de Distribuição Acumulada
Exemplo 1

- Um grupo de 1000 crianças foi analisado para determinar a efetividade de uma vacina contra um tipo de alergia. As crianças recebiam uma dose de vacina e após um mês passavam por um novo teste. Caso ainda tivessem tido alguma reação alérgica, recebiam outra dose. Ao fim de 5 doses, foram consideradas imunizadas.
- Variável de interesse: X = número de doses

Doses (X)	1	2	3	4	5
Freq.	245	288	256	145	66

- Uma criança é sorteada ao acaso, qual será a probabilidade dela ter recebido 2 doses?
  $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{288}{1000} = 0,288$

Doses (X)	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,245	0,288	0,256	0,145	0,066

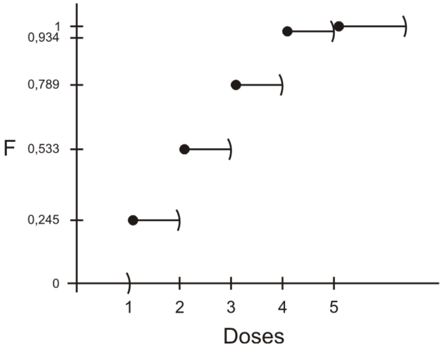
- Qual a probabilidade da criança ter recebido até duas doses?
  $F(2) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 0,245 + 0,288 = 0,533$

- Notemos que a f.d.a. de $X =$ número de doses é definido para qualquer valor real, logo:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < 1 \\ 0,245; & 1 \leq x < 2 \\ 0,533; & 2 \leq x < 3 \\ 0,789; & 3 \leq x < 4 \\ 0,934; & 4 \leq x < 5 \\ 1; & x \geq 5 \end{cases}$$

Função de Distribuição Acumulada
Exemplo 1

- f.d.a. de X = número de doses:



Sumário

1. Função de Distribuição Acumulada

2. Esperança e Variância de Variáveis Aleatórias
   - Esperança (ou valor esperado) de uma v.a
   - Variância de uma v.a

Sumário

1. Função de Distribuição Acumulada

2. Esperança e Variância de Variáveis Aleatórias
   - Esperança (ou valor esperado) de uma v.a
   - Variância de uma v.a

Definição (caso discreto)

Seja X uma variável aleatória discreta, com função de probabilidade $p(x) = \mathbb{P}(X = x), \quad x = 1, 2, \ldots, n, \ldots$. Então, *a esperança* (ou valor esperado ou média) de X, denotada por $\mathbb{E}(X)$ é definida como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xp(x)$$

Desde que, $\sum_{x=1}^{\infty} |x|p(x) < \infty$.

Esperança de funções de variáveis aleatórias

Teorema

Seja X uma variável aleatória e seja g uma função qualquer que toma valores no espaço amostral de X. Então temos:

- No caso discreto

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x=1}^{\infty} g(x)p(x)$$

Algumas propriedades do valor esperado

Nas seguintes propriedades, X é uma variável aleatória e a, b são constantes.

- $\mathbb{E}(a) = a$
- $\mathbb{E}(a + X) = a + \mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{E}(bX) = b\mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{E}(a + bX) = a + b\mathbb{E}(X)$
- Para $r \geq 1$, o r-ésimo momento de uma variável aleatória é definido por $\mathbb{E}(X^r)$ (se existe).

Sumário

1. Função de Distribuição Acumulada

2. Esperança e Variância de Variáveis Aleatórias
   - Esperança (ou valor esperado) de uma v.a
   - Variância de uma v.a

Variância de uma v.a

Definição

Seja X uma variável aleatória com valor esperado $\mathbb{E}(X)$. Definimos a *variância* de X, denotada por $\text{Var}(X)$ como,

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2].$$

A raiz quadrada positiva de $\text{Var}(X)$ é denominada *desvio-padrão* de X, e será denotado por $\text{DP}(X)$.

Algumas propriedades da variância

Nas seguintes propriedades, X é uma variável aleatória e a, b são constantes.

- $\text{Var}(a) = 0$
- $\text{Var}(a + X) = \text{Var}(X)$
- $\text{Var}(bX) = b^2\text{Var}(X)$
- $\text{Var}(a + bX) = b^2\text{Var}(X)$
- $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$

Exemplo 2

- Considere novamente a v.a N= número de filhos, com distribuição dada por

N	0	1	2	3	4	5
$p(n) = \mathbb{P}(N = n)$	0,20	0,30	0,35	0,05	0,05	0,05

- Vamos determinar $\mathbb{E}(N)$, $\text{Var}(N)$ e $\text{DP}(N)$. Temos que,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N) &= \sum_{n=0}^{5} n\mathbb{P}(N = n)\\ &= 0 \times 0,20 + 0,30 + 2 \times 0,35 + 3 \times 0,05 + 4 \times 0,05 + 5 \times 0,05\\ &= 1,6.\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(N^2) &= \sum_{n=0}^{5} n^2 \mathbb{P}(N = n) \\
&= 0 \times 0,20 + 0,30 + 4 \times 0,35 + 9 \times 0,05 + 16 \times 0,05 + 25 \times 0,05 \\
&= 4,2.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(N) &= \mathbb{E}(N^2) - [\mathbb{E}(N)]^2 \\
&= 4,2 - 1,6^2 = 1,64.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\mathrm{DP}(N) = \sqrt{\mathrm{Var}(N)} \approx 1,28.
$$

Exemplo 3

Três bolas são retiradas aleatoriamente de uma urna contendo 3 bolas brancas, 3 bolas vermelhas e 5 bolas pretas. Suponha que, para cada bola branca selecionada ganha-se R$ 1,00 e para cada bola vermelha selecionada perde-se R$ 1,00. Defina a variável aleatória X cobrindo os possíveis valores no experimento.

(a) Encontre a distribuição de probabilidade de X.

(b) Qual a probabilidade de ganhar? e a de perder?

(c) Quanto ganharíamos em média? e com qual desvio-padrão?

Exemplo 4

A seguir temos a função de distribuição acumulada (f.d.a) da v.a X que representa o número de trabalhadores por domicílio, em uma determinada população.

$$F(x) = \begin{cases} 0,00 & ; x < 0 \\ 0,20 & ; 0 \leq x < 1 \\ 0,55 & ; 1 \leq x < 2 \\ 0,80 & ; 2 \leq x < 3 \\ 0,95 & ; 3 \leq x < 4 \\ 1,00 & x \geq 4 \end{cases} \tag{1}$$

(a) Qual o número esperado de trabalhadores por domicílio?

(b) Qual o desvio-padrão do número de trabalhadores?