RESOLUÇÃO

LISTA · DERIVADAS PARCIAIS DE ORDENS SUPERIORES

(01) Em cada caso, confirme a igualdade entre as derivadas parciais mistas:

(a) $f(x,y) = x^4y^3 - y^3 + x^2$;

Solução: $f_x = 4x^3y^3 + 2x$; $f_{xy} = 12x^3y^2$;
$f_y = 3x^4y^2 - 3y^2$; $f_{yx} = 12x^3y^2$; $\Big\rangle f_{xy} = f_{yx}$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;

Solução: $f(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2}$, então:

$f_x = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}.2x = x.(x^2+y^2)^{-1/2} \therefore f_{xy} = x.\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-3/2}.2y = \dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$;

$f_y = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}.2y = y.(x^2+y^2)^{-1/2} \therefore f_{yx} = y.\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-3/2}.2x = \dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; $\Big\rangle f_{xy} = f_{yx}$;

(c) $f(x,y) = \cos(x^2y)$;

Solução:

$f_x = -\text{sen}(x^2y).2xy = -2x(y\,\text{sen}(x^2y)) \therefore f_{xy} = -2x[\text{sen}(x^2y) + \cos(x^2y).x^2.y]$

Ou seja: $f_{xy} = -2x\,\text{sen}(x^2y) - 2x^3y\cos(x^2y)$;

$f_y = -\text{sen}(x^2y).x^2 \therefore f_{yx} = -[\cos(x^2y).2xy.x^2 + 2x\,\text{sen}(x^2y)]$

Ou seja: $f_{yx} = -2x^3y\cos(x^2y) - 2x\,\text{sen}(x^2y)$;

Portanto, $f_{xy} = f_{yx}$;

(d) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$; Solução:

$f_x = \dfrac{1}{x^2+y^2}.2x = 2x.(x^2+y^2)^{-1} \therefore f_{xy} = 2x.(-1)(x^2+y^2)^{-2}.2y = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$;

$f_y = \dfrac{1}{x^2+y^2}.2y = 2y.(x^2+y^2)^{-1} \therefore f_{yx} = 2y.(-1)(x^2+y^2)^{-2}.2x = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$; $\Big\rangle f_{xy} = f_{yx}$;

(e) $f(x,y) = e^x\text{sen}\,y$; Solução:

$f_x = e^x\text{sen}\,y \therefore f_{xy} = e^x\cos y$;
$f_y = e^x\cos y \therefore f_{yx} = e^x\cos y$; $\Big\rangle f_{xy} = f_{yx}$;

(f) $f(x,y) = e^x + x\ln y + y\ln x$; Solução:

$f_x = e^x + \ln y + \dfrac{y}{x} \therefore f_{xy} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}$;

$f_y = \dfrac{x}{y} + \ln x \therefore f_{yx} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}$; $\Big\rangle f_{xy} = f_{yx}$;

02 Em cada caso, calcule a derivada parcial de ordem superior, indicada, para a função apresentada:

a) f_{xyx} para $f(x,y)=x^4y^2-x^3y$;

Solução: $f_x=4x^3y^2-3x^2y \therefore f_{xy}=8x^3y-3x^2 \therefore f_{xyx}=24x^2y-6x$;

b) f_{yxyx} para $f(x,y)=\text{sen}(2x+5y)$;

Solução: $f_y=\cos(2x+5y).5 \therefore f_{yx}=5.(-\text{sen}(2x+5y).2)=-10\,\text{sen}(2x+5y)$;

$f_{yxy}=-10.\cos(2x+5y).5=-50(\cos(2x+5y))$;

$f_{yxyx}=-50.(-\text{sen}(2x+5y).2)=100\,\text{sen}(2x+5y)$;

c) f_{xyz} para $f(x,y,z)=e^x\cos(yz)$;

Solução:

$f_x=e^x\cos(yz) \therefore f_{xy}=e^x(-\text{sen}(yz).z)=-e^x.z\,\text{sen}(yz)$;

$f_{xyz}=-e^x[1.\text{sen}(yz)+\cos(yz).y.z]=-e^x(\text{sen}(yz)+yz\cos(yz))$;

d) f_{yxzz} para $f(x,y,z)=xy^2z^3+\text{senh}(x\sqrt{z})$;

Solução: $f_y=\dfrac{\partial[xy^2z^3+\text{senh}(x\sqrt{z})]}{\partial y}=2xyz^3+0=2xyz^3$;

$f_{yx}=2yz^3 \therefore f_{yxz}=6yz^2 \therefore f_{yxzz}=12yz$;

03 Em cada caso, decida se existe uma função real $f(x,y)$ satisfazendo às condições dadas. Se não, justifique. Se sim, apresente uma função:

a) com $f_x=xy$ e $f_y=x^2$;

Solução: vamos supor que existisse tal $f(x,y)$. Então, $f_{xy}=x$ e $f_{yx}=2x$. Agora, f, f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} são todas contínuas, então pelo Teorema de Clairaut, temos obrigatóriamente que: $f_{xy}=f_{yx}$. Contudo vimos que $f_{xy}=x\neq 2x=f_{yx}$. Logo, tal $f(x,y)$, nestas condições, não existe!

b) Com $f_x=2xy$ e $f_y=x^2$;

Solução: Neste caso, temos $f_{xy}=2x$; $f_{yx}=2x$ e $f_{xy}=f_{yx}$. Não havendo portanto qualquer contradição com as hipóteses e a Tese do Teorema de Clairaut. Logo um tal função, nestas condições existe.

Para apresentar uma delas basta vermos que $\int f_y\,dy=\int x^2dy=x^2y+k$.

E neste caso, se tomarmos $k=0$, $f(x,y)=x^2y$ é um exemplo, tal que $f_x=2xy$ e $f_y=x^2$. Ou seja, para cada $k\in\mathbb{R}$, temos uma $f(x,y)$;

(04) Suponha que as hipóteses do Teorema de Clairaut são sempre satisfeitas para todas as funções envolvidas. Então, mostre que:

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

Solução:

Como, em particular, f_y satisfaz às hipóteses do Teorema de Clairaut, temos: $(f_y)_{xy} = (f_y)_{yx}$; Ou seja: $f_{yxy} = f_{yyx}$; (I)

E, como também, f satisfaz às hipóteses do Teorema de Clairaut, temos: $f_{xy} = f_{yx}$. Logo, derivando os dois lados desta igualdade com relação à y, obtemos: $(f_{xy})_y = (f_{yx})_y$; Ou seja: $f_{xyy} = f_{yxy}$; (II)

E, finalmente, reunindo (I) e (II), obtemos: $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$;

(05) Lembrando que você pode, pelo Teorema de Clairaut, escolher uma ordem adequada para cada parcela, indique, em cada caso, um caminho mais curto para mostrar que a derivada parcial de ordem superior solicitada, para a função dada, é igual a zero:

(a) f_{xyz}, para $f(x,y,z) = \sqrt{1+xz} + \sqrt{1-xy}$;

Solução: Pela regra da adição, temos:

$$f_{xyz} = (\sqrt{1+xz})_{xyz} + (\sqrt{1-xy})_{xyz};$$

Ocorre que $(\sqrt{1+xz})_y = 0$ e também $(\sqrt{1-xy})_z = 0$;

E como pelo Teorema de Clairaut: $(\sqrt{1+xz})_{xyz} = (\sqrt{1+xz})_{yxz}$ e $(\sqrt{1-xy})_{xyz} = (\sqrt{1-xy})_{zxy}$,

devemos calcular assim: $f_{xyz} = (\sqrt{1+xz})_{yxz} + (\sqrt{1-xy})_{zxy} = 0 + 0 = 0$;

(b) f_{zwxywz}, para $f(x,y,z,w) = \dfrac{x^2 + e^y w}{3y^2 + \ln(1+z^2)}$;

Solução: vejamos que $f(x,y,z,w) = \dfrac{x^2}{3y^2+\ln(1+z^2)} + \dfrac{e^y w}{3y^2+\ln(1+z^2)}$;

$$\text{Então, } f_{zwxywz} = \left(\frac{x^2}{3y^2+\ln(1+z^2)}\right)_{zwxywz} + \left(\frac{e^y w}{3y^2+\ln(1+z^2)}\right)_{zwxywz}$$

$$= \left(\frac{x^2}{3y^2+\ln(1+z^2)}\right)_{wzxywz} + \left(\frac{e^y w}{3y^2+\ln(1+z^2)}\right)_{xzwywz} = 0 + 0 = 0;$$

Sendo este o caminho mais curto!

(06) Em cada caso, verifique se a função real $u(x,t)$ dada, satisfaz à equação unidimensional da onda: $u_{tt} = a^2 u_{xx}, a>0$; devida ao matemático D'Alembert (1717-1783):

(a) $u(x,t) = (x-at)^6 + (x+at)^6$;

Solução: vamos, em primeiro lugar, encontrar u_{xx}:

$u_x = 6(x-at)^5.1 + 6(x+at)^5.1 = 6(x-at)^5 + 6(x+at)^5$;

$u_{xx} = 30(x-at)^4.1 + 30(x+at)^4.1 = 30(x-at)^4 + 30(x+at)^4$;

Agora, encontremos u_{tt}:

$u_t = 6(x-at)^5.(-a) + 6(x+at)^5.a = -6a(x-at)^5 + 6a(x+at)^5$;

$u_{tt} = -6a.5(x-at)^4.(-a) + 6a.5(x+at)^4.a$

$= 30a^2(x-at)^4 + 30a^2(x+at)^4 = a^2[30(x-at)^4 + 30(x+at)^4] = a^2.u_{xx}$;

Sim! $u(x,t) = (x-at)^6 + (x+at)^6$ satisfaz à equação de D'Alembert;

(b) $u(x,t) = sen(awt)sen(wx), w \in \mathbb{R}$;

Solução: novamente vamos, em primeiro lugar, encontrar u_{xx}:

$u_x = sen(awt).cos(wx).w = w\,sen(awt).cos(wx)$;

$u_{xx} = w\,sen(awt).(-sen(wx).w) = -w^2 sen(awt)sen(wx)$;

Agora, encontremos u_{tt}:

$u_t = cos(awt)aw\,sen(wx) = aw\,cos(awt)sen(wx)$;

$u_{tt} = aw(-sen(awt)aw)sen\,wx = -a^2w^2 sen(awt)\,sen\,wx = a^2(-w^2 sen(awt)\,sen\,wx)$

Ou seja: $u_{tt} = a^2.u_{xx}$. Logo, $u(x,t) = sen(awt)sen(wx)$ também satisfaz à equação de D'Alembert;

(07) Em cada caso, verifique se a função real $u(x,t)$ dada, satisfaz à equação unidimensional do calor: $u_t = a^2 u_{xx}, a>0$; devida ao matemático Fourier (1768-1830):

(a) $u(x,t) = e^{-a^2k^2t}.cos(kx), k \in \mathbb{R}$;

Solução: novamente vamos, em primeiro lugar, encontrar u_{xx}:

$u_x = e^{-a^2k^2t}.(-sen(kx)).k = -ke^{-a^2k^2t}.sen(kx)$;

$u_{xx} = -ke^{-a^2k^2t}.(cos(kx).k) = -k^2e^{-a^2k^2t}.cos(kx)$;

Agora, encontramos u_t:

$u_t = e^{-a^2k^2t}.(-a^2k^2).cos(kx) = a^2(-k^2e^{-a^2k^2t}.cos(kx)) = a^2.u_{xx}$;

Sim! $u(x,t) = e^{-a^2k^2t}.cos(kx)$ satisfaz à equação de Fourier;

07 (b) $u(x,t) = sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t}$;

Solução: calculemos u_{xx}:

$$u_x = cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \frac{n\pi}{L} \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t} = \frac{n\pi}{L} cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t};$$

$$u_{xx} = \frac{n\pi}{L} \cdot \left(-sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \frac{n\pi}{L}\right) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t} = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \cdot sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t};$$

Agora, calculemos u_t:

$$u_t = sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t} \cdot \left(-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}\right) = a^2\left[-\frac{n^2\pi^2}{L^2} \cdot sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t}\right] = a^2 \cdot u_{xx};$$

Sim! A função $u(x,t)$ dada, satisfaz à equação de Fourier;

08 Em cada caso, verifique se a função real $u(x,y)$ dada, satisfaz à equação bidimensional de Laplace (1749-1827): $u_{xx} + u_{yy} = 0$;

(a) $u(x,y) = e^x cos y + e^y sen x$;

Solução: $u_x = e^x cos y + e^y cos x \therefore u_{xx} = e^x \cancel{cos y} - e^y \cancel{sen x}$;

$u_y = -e^x sen y + e^y sen x \therefore \underline{u_{yy} = -e^x \cancel{cos y} + e^y \cancel{sen x}}$;

$u_{xx} + u_{yy} = 0$;

Sim! A função $u(x,y) = e^x cos y + e^y sen x$ satisfaz à equação de Laplace;

(b) $u(x,y) = ln(x^2+y^2) + 2arctg\left(\frac{y}{x}\right)$;

Solução: $u_x = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x + \frac{2.1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = 2\frac{(x-y)}{x^2+y^2}$;

$$u_{xx} = 2\left[\frac{1.(x^2+y^2) - 2x(x-y)}{(x^2+y^2)^2}\right] = 2\left[\frac{x^2+y^2-2x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{2(y^2-x^2+2xy)}{(x^2+y^2)^2};$$

$$u_y = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y + \frac{2.1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2(y+x)}{x^2+y^2};$$

$$u_{yy} = 2\left[\frac{1.(x^2+y^2) - 2y(y+x)}{(x^2+y^2)^2}\right] = 2\left[\frac{x^2+y^2-2y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right] = -2\frac{(y^2-x^2+2xy)}{(x^2+y^2)^2};$$

Logo, $u_{xx} + u_{yy} = 2\frac{(y^2-x^2+2xy)}{(x^2+y^2)^2} + (-2)\frac{(y^2-x^2+2xy)}{(x^2+y^2)^2} = 0$;

Sim! a função $u(x,y) = ln(x^2+y^2) + 2arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, também, satisfaz à equação bidimensional de Laplace;

(09) Verifique se a função real $u(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ satisfaz à equação tridimensional de Laplace: $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$;

Solução:

$u_x = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot 2x = -x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$;

$u_{xx} = -\left[1 \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + \left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \cdot 2x \cdot x\right]$;

$u_{xx} = -\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right] = -\left[\frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right] = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$;

$u_y = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot 2y = -y \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$;

$u_{yy} = -\left[1 \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + \left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \cdot 2y \cdot y\right]$;

$u_{yy} = -\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right] = -\left[\frac{x^2+y^2+z^2-3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right] = \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$;

Não repetiremos, mas calculando u_z e u_{zz}, encontraremos:

$u_z = -z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$ e $u_{zz} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$;

Logo, $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{2x^2-y^2-z^2+2y^2-x^2-z^2+2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0$;

Ou seja, $u(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ satisfaz à equação tridimensional de Laplace;

(10) Mostre que se $c^2 = a^2 + b^2$ então a função real $u(x,y,z) = e^{ax+by} \cdot \operatorname{sen}(cz)$, satisfaz a equação tridimensional de Laplace;

Solução: $u_x = e^{ax+by} \cdot a \cdot \operatorname{sen}(cz) \therefore u_{xx} = a^2 e^{ax+by} \cdot \operatorname{sen}(cz)$;

$u_y = e^{ax+by} \cdot b \cdot \operatorname{sen}(cz) \therefore u_{yy} = b^2 e^{ax+by} \cdot \operatorname{sen}(cz)$;

$u_z = e^{ax+by} \cdot \cos(cz) \cdot c \therefore u_{zz} = c\, e^{ax+by} \cdot (-\operatorname{sen}(cz) \cdot c)$;

$u_{zz} = -c^2 \cdot e^{ax+by} \cdot \operatorname{sen}(cz)$;

Logo, $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = a^2 e^{ax+by} \cdot \operatorname{sen}(cz) + b^2 e^{ax+by} \cdot \operatorname{sen}(cz) + (-c^2) e^{ax+by} \cdot \operatorname{sen}(cz)$

$= e^{ax+by} \cdot \operatorname{sen}(cz) \cdot \underbrace{(a^2+b^2-c^2)}_{= 0\text{, por hipótese;}}$

$= 0$;

⑪ Mostre que se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem à equação bidimensional de Laplace, então a função real $w(x,y) = u(x,y) + v(x,y)$ também satisfaz à mesma equação;

Solução:

Como $u(x,y)$ satisfaz à equação de Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$;

Como $v(x,y)$ satisfaz à equação de Laplace: $v_{xx} + v_{yy} = 0$;

Ocorre que: $w_x = u_x + v_x$ e $w_{xx} = u_{xx} + v_{xx}$;

$w_y = u_y + v_y$ e $w_{yy} = u_{yy} + v_{yy}$;

$$w_{xx} + w_{yy} = u_{xx} + v_{xx} + u_{yy} + v_{yy} = \underbrace{u_{xx} + u_{yy}}_{=0} + \underbrace{v_{xx} + v_{yy}}_{=0} = 0;$$

⑫ Enuncie e demonstre um resultado análogo ao da questão anterior para duas funções reais, de três variáveis reais;

Solução:

Enunciado: Mostre que se $u(x,y,z)$ e $v(x,y,z)$ satisfazem à equação tridimensional de Laplace, então a função real:

$w(x,y,z) = u(x,y,z) + v(x,y,z)$, também satisfaz à mesma equação;

Demonstração:

Como $u(x,y,z)$ satisfaz à equação de Laplace: $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$;

Como $v(x,y,z)$ satisfaz à equação de Laplace: $v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} = 0$;

Ocorre que: $w_x = u_x + v_x$ e $w_{xx} = u_{xx} + v_{xx}$;

$w_y = u_y + v_y$ e $w_{yy} = u_{yy} + v_{yy}$;

$w_z = u_z + v_z$ e $w_{zz} = u_{zz} + v_{zz}$;

$$w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = u_{xx} + v_{xx} + u_{yy} + v_{yy} + u_{zz} + v_{zz} = \underbrace{u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}}_{=0} + \underbrace{v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}}_{=0} = 0;$$

(13) Diz-se que $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem às equações de Cauchy(1789-1857)-Riemann(1826-1866), quando $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Então, em cada caso, verifique se $u(x,y)$ e $v(x,y)$, dados, satisfazem às equações de Cauchy-Riemann:

(a) $u(x,y) = e^x \cos y$; $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$;

Solução:

Temos; $\left.\begin{array}{l} u_x = e^x \cos y \\ v_y = e^x \cos y \end{array}\right\rangle$ Logo, $u_x = v_y$;

E $v_x = e^x \operatorname{sen} y$. Como $u_y = -e^x \operatorname{sen} y$, temos $u_y = -v_x$;

Sim! As funções reais $u(x,y) = e^x \cos y$ e $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$, satisfazem às equações de Cauchy-Riemann;

(b) $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$; $v(x,y) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$;

Solução: Temos; $\left.\begin{array}{l} u_x = \dfrac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}; \\ v_y = 2 \cdot \dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2}; \end{array}\right\rangle$ Logo, $u_x = v_y$;

E $v_x = 2 \cdot \dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\dfrac{-y}{x^2}\right) = \dfrac{-2y}{x^2+y^2}$; Como $u_y = \dfrac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$, temos:

$u_y = -v_x$;

Sim! As funções reais $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ e $v(x,y) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$, satisfazem às equações de Cauchy-Riemann;

(16) Mostre que se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem às equações de Cauchy-Riemann, bem como as hipóteses do Teorema de Clairaut, então $u(x,y)$ e $v(x,y)$ também satisfazem a equação bidimensional de Laplace;

Prova: como $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem à Cauchy-Riemann, temos:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \therefore \begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} \overset{\text{Clairaut!}}{=} v_{xy} - v_{xy} = 0;$$

$$\begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases} \therefore \begin{cases} v_{xx} = -u_{yx} \\ v_{yy} = u_{xy} \end{cases} \Rightarrow v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} \overset{\text{Clairaut!}}{=} -u_{xy} + u_{xy} = 0;$$

Ou seja, ambas, ~~[illegible]~~ $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem a equação bidimensional de Laplace.

(14) Sejam $f(x)$ e $g(t)$ funções reais satisfazendo, respectivamente, às equações diferenciais $f''(x)+\lambda^2 f(x)=0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e $g''(t)+a^2\lambda^2 g(t)=0$, $a>0$. Então, verifique se a função real $u(x,t)=f(x)g(t)$ satisfaz à equação de D'Alembert;

Solução: tal como sempre fizemos, encontremos primeiro u_{xx}:

$u_x = f'(x)g(t) \therefore u_{xx} = f''(x)g(t)$;

Ocorre que de $f''(x)+\lambda^2 f(x)=0$, concluímos que: $f''(x) = -\lambda^2 f(x)$;

Então, podemos reescrever u_{xx}, assim: $u_{xx} = -\lambda^2 f(x)g(t)$;

Agora, encontremos u_{tt}:

$u_t = f(x)g'(t) \therefore u_{tt} = f(x)g''(t)$;

Ocorre que de $g''(t)+a^2\lambda^2 g(t)=0$, concluímos que: $g''(t) = -a^2\lambda^2 g(t)$;

Então, podemos reescrever u_{tt}, assim:

$u_{tt} = f(x)[-a^2\lambda^2 g(t)] = a^2[-\lambda^2 f(x)g(t)] = a^2 . u_{xx}$;

Sim! a função real $u(x,t)=f(x)g(t)$, onde f e g satisfazem às equações diferenciais, $f''(x)+\lambda^2 f(x)=0$ e $g''(t)+a^2\lambda^2 g(t)=0$, satisfaz à D'Alembert;

(15) Sejam $f(x)$ e $g(t)$ funções reais satisfazendo, respectivamente, às equações diferenciais $f''(x)+\lambda^2 f(x)=0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e $g'(t)+a^2\lambda^2 g(t)=0$, $a>0$. Então, verifique se a função real $u(x,t)=f(x)g(t)$ satisfaz à equação de Fourier;

Solução: calculemos primeiro u_{xx}: $u_x = f'(x)g(t)$ e $u_{xx} = f''(x)g(t)$;

Ou seja, $u_{xx} = -\lambda^2 f(x)g(t)$;

Agora, calculemos u_t: $u_t = f(x)g'(t) = f(x).(-a^2\lambda^2 g(t)) =$
$= a^2(-\lambda^2 f(x)g(t)) = a^2 u_{xx}$.

Sim, a função real $u(x,t)=f(x)g(t)$, onde f e g satisfazem as equações diferenciais $f''(x)+\lambda^2 f(x)=0$ e $g'(t)+a^2\lambda^2 g(t)=0$, satisfaz à equação de Fourier;