Universidade Federal do Ceará
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada
Prof. José Roberto Silva dos Santos
CC0285 - Probabilidade II.
Primeira lista de exercícios - 2022.2

1. Considere a função
   $$f(x) = \begin{cases} C(2x - x^3), & 0 < x < 5/2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
   Poderia f ser uma função densidade de probabilidade? Caso positivo, determine o valor de C. Repita considerando que $f(x)$ seja dada por
   $$f(x) = \begin{cases} C(2x - x^2), & 0 < x < 5/2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2. Verifique se as funções a seguir são densidades de probabilidade (assuma que as funções se anulam fora dos intervalos especificados).

   (a) $f(x) = 3x;\ 0 \leq x \leq 1.$

   (b) $f(x) = \frac{x^2}{2};\ x \geq 0.$

   (c) $f(x) = (x - 3)/2;\ 3 \leq x \leq 5.$

   (d) $f(x) = 2;\ 0 \leq x \leq 2.$

   (e) $f(x) = \begin{cases} (2 + x)/4, & -2 \leq x < 0; \\ (2 - x)/4, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$

   (f) $f(x) = -\pi;\ -\pi < x < 0.$

   (g) $f(x) = (1 - |1 - x|);\ 0 < x < 2.$

3. Obtenha o valor (ou valores) de c, para que as expressões abaixo sejam funções densidade de probabilidade.

   (a) $f(x) = \cos(x)\, \underset{(0,c)}{I}(x)\,.$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ -cx, & -1 < x \leq 0; \\ ce^{-6x}, & x > 0. \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} c, & -1 \leq x < 0; \\ 2/3x, & 0 \leq x < 1; \\ 2c, & 1 \leq x < 3/2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(d) $f(x) = cx^2 \underset{(-c,c)}{I}(x)$.

(e) $f(x) = cx^2 e^{-x^3} \underset{(0,\infty)}{I}(x)$

(f) $f(x) = (c+1)f_1(x) - cf_2(x), x \in \mathbb{R}$ com f_1 e f_2 densidades de probabilidade.

4. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2; \\ \frac{1}{4} + \frac{x+2}{8}, & -2 \leq x < 0; \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(1 - e^{-x}), & x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Classifique X e faça um gráfico de F.

(b) Determine $\mathbb{P}(X > -1)$ e $\mathbb{P}(X \leq 4 | X > 0)$.

(c) Se X for do tipo mista, decomponha F nas partes discreta e absulutamente contínua.

5. Uma variável X possui função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^2/2, & 0 \leq x < 1; \\ 3/4, & 1 \leq x < 2; \\ (1/4)(x+1), & 2 \leq x < 3; \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

(a) Determine o seguinte:

$$\mathbb{P}(X = 1/2),\ \mathbb{P}(X = 1),\ \mathbb{P}(X < 1),\ \mathbb{P}(X \leq 1),\ \mathbb{P}(X > 2) \text{ e } \mathbb{P}(1/2 < X < 5/2)$$

(b) Apresente o gráfico de F.

6. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \ln x, & 1 \leq x < e; \\ 1, & x \geq e. \end{cases}$$

(a) Verifique se F satisfaz, de fato, as propriedades de uma f.d.a

(b) Explique por que X é contínua e obtenha a sua densidade.

7. Considere uma variável aleatória X com densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & -2 \leq x < 0; \\ \frac{1}{10} + \frac{3x}{125}, & 0 \leq x < 5; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Obtenha a função de distribuição de X.

   (b) Expresse $\mathbb{P}(X \geq 0)$ e $\mathbb{P}(-1 < X < 2)$ em termos da função de distribuição e determine seus valores.

8. Para X com densidade $f(x) = |1 - x| \underset{(0,2)}{I}(x)$, obtenha:

   (a) A função de distribuição de X.

   (b) $\mathbb{P}(X > 1/2)$.

   (c) $\mathbb{P}(X < 2/3 | X > 1/2)$.

9. Obtenha a função de distribuição referente às funções densidade de probabilidade abaixo:

   (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{9}, & 0 \leq x < 3; \\ \frac{1}{9}(6 - x), & 3 \leq x < 6; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & -1 \leq x \leq 0; \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 1; \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

10. Seja X uma variável aleatória contínua e considere

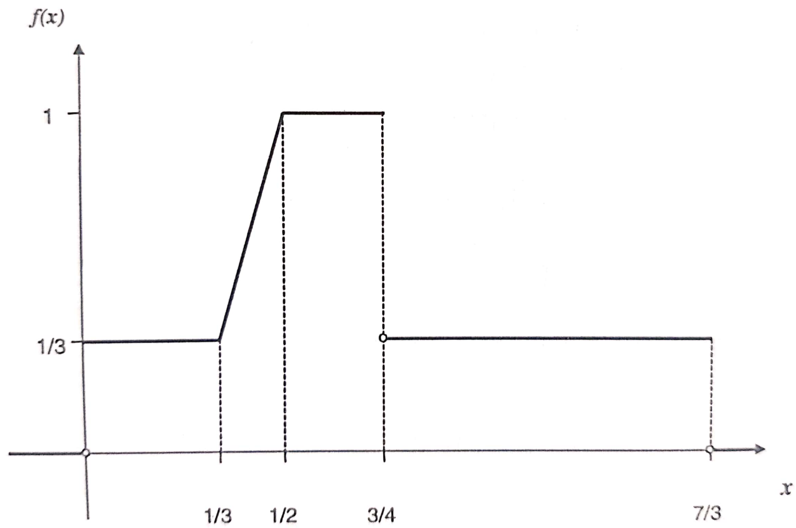
$$f(x) = \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{|x - \alpha|}{\beta}\right) \underset{(\alpha-\beta,\alpha+\beta)}{I}(x) \quad ;$$

com $-\infty < \alpha < \beta$ e $\beta > 0$.

   (a) Verifique que $f(x)$ satisfaz as propriedades de uma função densidade de probabilidade.

   (b) Determine a esperança e variância de X.

11. O gráfico a seguir, representa a densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X.



(a) Demonstre que $f(x)$ é uma f.d.p.

(b) Escreva a expressão de $f(x)$.

(c) Determine a mediana de X.

12. Uma variável aleatória X possui densidade $f(.)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \leq x < 0,5; \\ \alpha(1-x), & 0,5 \leq x < 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante α.

(b) Sejam os eventos $A = \{X < 0,5\}$, $B = \{X > 0,5\}$ e $C = \{0,25 < X < 0,75\}$.

i. Calcule $\mathbb{P}(A|B)$.

ii. Verifique se A, B e C são mutuamente independentes.

13. O tempo adequado de troca de um amortecedor de certa marca em automóveis, sujeitos a uso contínuo e severo, pode ser considerado uma variável contínua, medida em anos. Suponha que a f.d.p de X é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x/4, & 0 \leq x \leq 2; \\ 1/8, & 2 < x \leq 6; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Demonstre que f é, de fato, uma densidade de probabilidade.

(b) Qual a probabilidade de um automóvel, sujeito às condições descritas acima, necessitar de troca de amortecedores antes de 1 ano de uso? e entre 1 e 3 anos?

(c) Supondo que um automóvel está há 3 anos com o mesmo amortecedor, qual a probabilidade de que seja necessário fazer a troca antes de completar 4 anos de uso?

(d) Qual o tempo médio adequado para a troca do amortecedor desses automóveis?

14. Suponha que o tempo, em meses, para a recuperação de pacientes submetidos a um certo tipo de cirurgia do aparelho digestivo pode ser modelado por uma variável aleatória contínua X, cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/3, & 0 \leq x \leq 1; \\ -x/12 + 5/12, & 1 < x \leq 5; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine a média e a mediana do tempo de recuperação.

(b) Calcule o desvio padrão do tempo de recuperação.

15. O diâmetro X de um cabo elétrico supõe-se ser uma variável aleatória contínua X, com f.d.p $f(x) = 6x(1-x) \underset{(0,1)}{I}(x)$.

(a) Verifique se f é, de fato, uma f.d.p e esboce o seu gráfico.

(b) Obtenha uma expressão para a f.d.a de X e esboce o seu gráfico.

(c) Determine um número b tal que $\mathbb{P}(X < b) = 2\mathbb{P}(X > b)$.

(d) Calcule $\mathbb{P}(X \leq 1/2 | 1/3 < X < 2/3)$.

16. A trava de segurança de um aparelho industrial deve ser trocada com frequência, de modo a evitar a quebra devido ao fim de sua vida útil. Estudos anteriores admitem que essa vida útil pode ser representada por uma variável aleatória, assumindo valores entre 0 e 1 ano. Sua densidade de probabilidade é a seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2), & 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Calcule a probabilidade da vida útil ser superior a 6 meses.

(b) Determine a vida útil média.

17. Suponha que o comprimento de fósseis encontrados em uma certa região, dado em centímetros, pode ser representado por uma variável aleatória X com f.d.p dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}, & 0 \leq x \leq 12; \\ \frac{1}{192}(x-4), & 12 < x \leq 20; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Calcule a média e a variância de X.

   (b) Se um museu decide comprar os fósseis encontrados pagando R$ 100,00 para aqueles de comprimento até 10 centímetros e R$ 200,00 para os demais, quanto paga em média por exemplar?

18. A função densidade de probabilidade de X, que representa a vida útil de certo tipo de equipamento eletrônico, é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 10/x^2, & x > 10; \\ 0, & x \leq 10. \end{cases}$$

   (a) Determine $\mathbb{P}(X > 20)$.

   (b) Qual a função de distribuição acumulada de X?

   (c) Qual a probabilidade de que, de 6 componentes como esse, pelo menos 3 funcionem por pelo menos 15 horas? Que suposições foram feitas para determinar essa probabilidade?

19. Suponha que a duração de vida, T, de um dispositivo eletrônico, medida em horas, seja uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade

$$f(t) = 0,01e^{-0,01t} \underset{(0,\infty)}{I}(x)$$

   (a) Qual a probabilidade de que um deles escolhido ao acaso dure menos de 50 horas?

   (b) Qual a probabilidade de que pelo menos um de 10 dispositivos, escolhidos aleatoriamente, dure menos de 50 horas?

20. O tempo de vida útil em anos de um eletrodoméstico é uma variável aleatória com densidade dada por

$$f(x) = \frac{xe^{-x/2}}{4} \underset{(0,\infty)}{I}(x)$$

(a) Mostre que de fato f é uma densidade.

(b) Se o fabricante dá um tempo de garantia de seis meses para o produto, qual a proporção de aparelhos que devem usar essa garantia?

(c) Dado que um aparelho está funcionando após um ano, qual a probabilidade de dure pelo menos dois anos?

21. Uma loja de comércio eletrônico envia e-mails com ofertas especiais a seus clientes cadastrados. Suponha que, após o recebimento de uma mensagem, a proporção de clientes que efetivam uma compra é uma variável aleatória com densidade dada por

$$f(x) = cx(1-x)^5 \underset{(0,1)}{I}(x)\,.$$

(a) Encontre o valor de c.

(b) Calcule a probabilidade de que um e-mail resulte em alguma compra para mais de 50% dos seus destinatários.

22. Determine a densidade de probabilidade de $Y = (b-a)X + a$, em que $f(x) = 1$, se $0 < x < 1$ e zero para quaisquer outros valores.

23. Se X possui densidade de probabildade $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, qual a densidade de $Y = |X|$?

24. Uma variável aleatória X possui densidade de probabilidade $f_X(x)$. Determine a f.d.p da variável aleatória $Y = aX + b$, em que a e b são constantes.

25. Uma variável aleatória X possui densidade de probabilidade $f_X(x)$. Determine a f.d.p da variável aleatória $Y = |1 - X|$.

26. Seja X uma variável aleatória contínua com densidade de probabilidade $f_X(x)$. Determine a f.d.p de $Y = |X|$.

27. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F_X(x)$, e defina $Y = 2 - 3X$. Determine a f.d.a de Y.

28. Seja X uma v.a com f.d.p $f_X(x) = \frac{1}{3} \underset{(-1,2)}{I}(x)$. Determine a f.d.p da variável aleatória $Y = X^2$.

29. Seja X uma v.a com f.d.p $f_X(x) = x^2/9 \underset{(0,3)}{I}(x)$. Determine a f.d.p de $Y = X^3$.

30. Seja X uma v.a com f.d.p $f_X(x) = 2xe^{-x^2} \underset{(0,\infty)}{I}(x)$. Determine a f.d.p de $Y = X^2$.