# Probabilidade New

## Limites de Conjuntos

- A definição de conceitos de convergência para variáveis aleatórias baseia-se em manipulações de sequências de eventos que requerem limites de conjuntos. Seja $A_n \subset \Omega$ definimos

$$\inf_{k\geq n} A_k := \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \sup_{k\geq n} A_k := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

- O limite de uma sequência de conjuntos é definido da seguinte forma: Se para alguma sequência $\{B_n\}$ de subconjuntos

$$\limsup_{n\to\infty} B_n = \liminf_{n\to\infty} B_n = B,$$

então $B$ é chamado de limite de $B_n$ e escrevemos $\lim_{n\to\infty} B_n = B$ ou $B_n \to B$ será demonstrado em breve que

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} A_k\right)$$

and

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} A_k\right).$$

- **Exemplo:**

$$\liminf_{n\to\infty}[0, n/(n+1)) = \limsup_{n\to\infty}[0, n/(n+1)) = [0, 1). \qquad \square$$

Podemos agora dar uma interpretação de $\liminf_{n\to\infty} A_n$ e $\limsup_n \to \infty A_n$.

**LEMA**: Seja $\{A_n\}$ uma sequência de subconjuntos de $\Omega$.

a. Para $\limsup$ temos a interpretação

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \left\{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}(\omega) = \infty\right\}$$
$$= \{\omega : \omega \in A_{n_k}, k = 1, 2 \ldots\}$$

para alguma subsequência $n_k$ dependendo de $\omega$. Consequentemente, escrevemos

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = [A_n\ i.o.\ ]$$

onde $i.o.$ significa infinitamente frequentemente.

b. Para $\liminf$ temos a interpretação

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} A_n =& \{\omega : \omega \in A_n \text{ for all } n \text{ except a finite number }\}\\ =& \{\omega : \sum_n 1_{A_n^c}(\omega) < \infty\}\\ =& \{\omega : \omega \in A_n, \forall n \geq n_0(\omega)\}.\end{aligned}$$

**Prova (a)**: Se

$$\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

então para todo $n$, $\omega \in \cup_{k\geq n} A_k$ e assim para todo $n$, existe algum $k_n \geq n$ tal que $\omega \in A_{k_n}$, e portanto

$$\sum_{j=1}^{\infty} 1_{A_j}(\omega) \geq \sum_n 1_{A_{k_n}}(\omega) = \infty,$$

que implica

$$\omega \in \left\{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}(\omega) = \infty\right\};$$

portanto

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset \{\omega : \sum_{j=1}^{\infty} 1_{A_j}(\omega) = \infty\}.$$

Inversamente, se

$$\omega \in \{\omega : \sum_{j=1}^{\infty} 1_{A_j}(\omega) = \infty\},$$

então existe $k_n \to \infty$ tal que $\omega \in A_{k_n}$, e portanto para todo $n$, $\omega \in \cup_{j\geq n} A_j$ tal que $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$. Por definição

$$\{\omega : \sum_{j=1}^{\infty} 1_{A_j}(\omega) = \infty\} \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Isso prova a inclusão do conjunto em ambas as direções e mostra a igualdade.

**Prova (b)**: A prova de (b) é análoga.

## Leis de De Morgan

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

## Propriedades distributiva

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

## Arranjos

$$A_{m,\,r} = \frac{m!}{(m-r)!}$$

- Seja $M$ um conjunto com $m$ elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Chamamos de arranjo dos $m$ elementos tomados $r$ a $r$ $(1 \leqslant r \leqslant m)$ a qualquer r-upla (sequência de $r$ elementos) formada com elementos de $M$, todos distintos.

## Arranjos com repetição

$$(AR)_{m,\,r} = \underbrace{m \cdot m \cdot ... \cdot m}_{r \text{ vezes}} = m^r$$

- Seja $M$ um conjunto com $m$ elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Chamamos arranjo com repetição dos $m$ elementos, tomados $r$ a $r$, toda r-upla ordenada (sequência de tamanho $r$) formada com elementos de $M$ não necessariamente distintos.

## Permutações

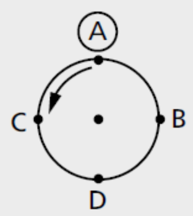
$$P_m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

- Seja $M$ um conjunto com $m$ elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Chamamos de permutação dos $m$ elementos a todo arranjo em que $r = m$.

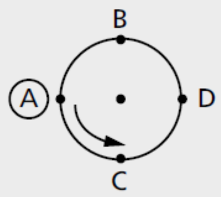
## Permutações Circular

- Quando elementos são dispostos ao redor de um círculo, a cada disposição possível chamamos permutação circular.
- Duas permutações circulares são consideradas idênticas, quando:

1) Tomando o elemento A, a sequência encontrada é (A,C, D, B).




2) Tomando o elemento A, a sequência encontrada é (A, C, D, B).




- 

$$x = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

## Permutações Com Repetição

$$P_n^{n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \ldots\, n_r!}$$

## Combinações

$$C_{m,\, r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!\,(m-r)!} \qquad \forall m, r \in \mathbb{N}^*,\ r < m$$

- **Casos particulares:**

1º caso: $m, r \in \mathbb{N}^*$ e $r = m$

$$\begin{cases} C_{m,\, m} = 1 \\ \dfrac{m!}{m!(m-m)!} = 1 \end{cases}$$

2º caso: $m \in \mathbb{N}^*$ e $r = 0$

$$\begin{cases} C_{m,\, 0} = 1 \text{ (o único subconjunto com 0 elemento é o vazio)} \\ \dfrac{m!}{0!\,(m-0)!} = 1 \end{cases}$$

3º caso: $m = 0$ e $r = 0$

$$\begin{cases} C_{0,\, 0} = 1 \text{ (o único subconjunto do conjunto vazio é o próprio vazio)} \\ \dfrac{0!}{0!\,(0-0)!} = 1 \end{cases}$$

## Teorema Conjuntos

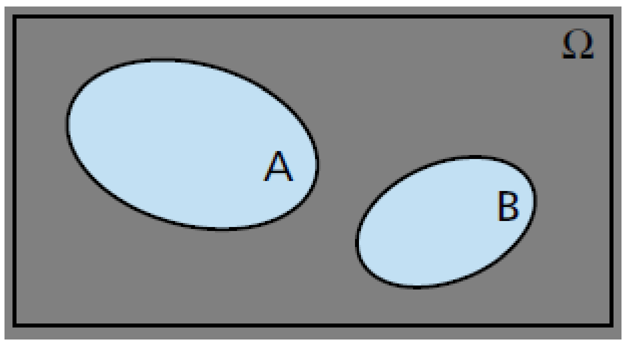
- Se $A \subset B$, então $P(A) \leqslant P(B)$.
- Se $A$ é um evento, então $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- $P(A) = 1 - P(A^c)$
- Sendo $A$ e $B$ dois eventos quaisquer, vale $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$.
- Regra da Adição de Probabilidades. Se $A$ e $B$ são eventos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$
- Para eventos quaisquer $A_1, A_2, \ldots$

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- Se os eventos $A_1, A_2, \ldots$ são mutuamente exclusivos, então:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- Se $A$ e $B$ são mutuamente exclusivos $(A \cap B = \emptyset)$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(\emptyset) = P(A) + P(B)$.




- Se $A$ é um evento, então $P(A^C) = 1 – P(A)$
- **Continuidade da Probabilidade:** Se $A_n \uparrow A$ então $P(A_n) \uparrow P(A)$. De forma similar, se $A_n \downarrow A$ então $P(A_n) \downarrow P(A)$. A notação $A_n \uparrow A$ indica que temos uma sequência monótona não decrescente ($n \leq n+1$) de eventos $A_i, A_2, ...$ tais que $\lim_{i \to \infty} A_i = A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

## Probabilidade condicional

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \quad P(B) > 0$$

## Teorema da multiplicação

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)}$$

## Independência de dois eventos

- Dois eventos $A$ e $B$ de um espaço amostral $\Omega$, são chamados **independentes** se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Ou seja, se os eventos são independentes a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B)$$

Dois eventos $A$ e $B$ são independentes se, e somente se a definição é verdadeira:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- **Obs:** Sejam $A$ e $B$ eventos de um espaço amostral $\Omega$ tais que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$. Se $A$ e $B$ são **INDEPENDENTES**, então $A$ e $B$ não podem ser **MUTUAMENTE EXCLUDENTES**.

## Variáveis Aleatórias (v.a)

▼ **Definição**

- A variável aleatória vai associar um valor real para cada valor do espaço amostral $\Omega$.

  **Ex:** Lançar duas moedas consecutivamente

  - Notação $C = cara$, $K = coroa$.
  - $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$
  - $\omega_1 = (C, C)$; $\omega_2 = (C, K)$; $\omega_3 = (K, C)$; $\omega_4 = (K, K)$
  - Defina X: O número de coroas observadas.

$$
\begin{aligned}
\omega_1 \to X &= 0 \\
\omega_2 \,\text{ou}\, \omega_3 \to X &= 1 \\
\omega_4 \to X &= 2
\end{aligned}
$$

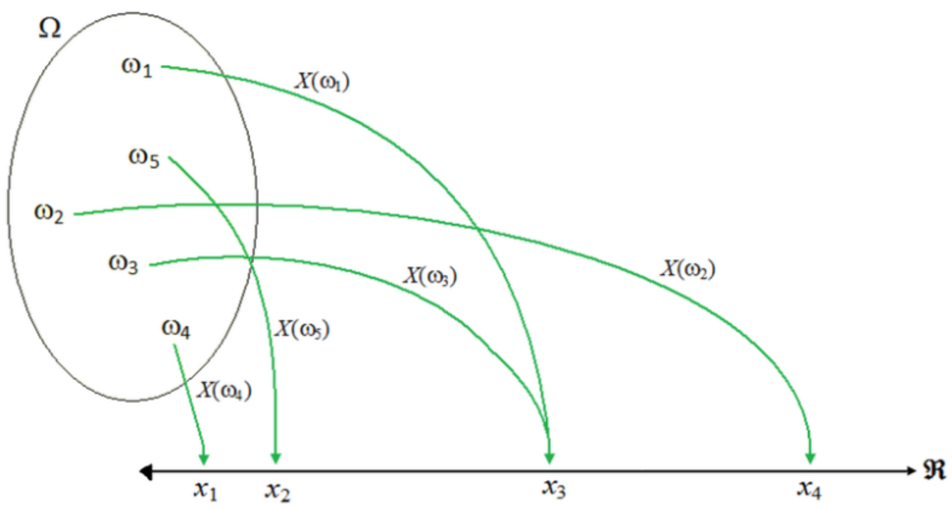
- De uma maneira mais formal: Uma variável aleatória é uma função definida num espaço amostral, que assume valores reais.
- Em outras palavras. Uma variável aleatória $X$ representa um valor real, associado a cada resultado de um experimento de probabilidade. Ou seja para cada valor do $\Omega$ vai existir um valor $x$ dentro da variável aleatória $X$.
- **Obs:** As variáveis aleatórias são representadas por letras maiúsculas $X$. E os valores assumidos pelas variáveis aleatórias são representados por letras minúsculas ($x$).

## Definição

Sejam $\varepsilon$ um experimento aleatório e $\Omega$ o espaço amostral associado a este. Uma *função* $X$, que associe a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real, $X(\omega)$, é denominada variável aleatória (v.a).

**Notação:**

- Letras maiúsculas (variável aleatória), X, Y, Z, etc.
- Letras minúsculas, (valor assumido pela variável aleatória), x, y, z etc.




**Exemplos:**

(a) Número de peças defeituosas entre $n$ peças retiradas de uma linha de produção.
$X = \{x | x \in \{0, 1, 2, \dots, D\}\}$ onde $D$ é o total de peças defeituosas

(b) Número de veículos que passam por um posto de pedágio durante uma hora.
$X = \{x | x \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$

(c) Sexo de um indivíduo selecionado ao acaso de uma população
$X = \{x | x = 0 \text{ ou } x = 1\}$

(d) Tempo de duração de um componente de um circuito.
$X = \{x | x \in [0, \infty)\}$

(e) Peso de animais sujeitos a uma dieta de engorda.
$X = \{x | x \in [0, \infty)\}$

- **Definição:** As variáveis aleatórias que assumem valores em um conjunto enumerável serão denominadas **Discretas** e aquelas que assumem valores em um intervalo da reta real serão denominadas **Contínuas**.

▼ **Variáveis Aleatórias Discreta**

- Uma variável aleatória é discreta se ela assume um **número finito** de valores ou assume um **número infinito de valores numeráveis** (contáveis).
- Ou seja, podemos dizer que uma variável é discreta quando seus valores puderem ser listados.

Por exemplo: o número de ligações recebidas por dia em um escritório pode ser um valor igual a 0, 1, 2, 3, 4, ... Assim, definimos a variável aleatória X:

X: número de ligações recebidas pelo escritório.

Os valores que essa variável pode assumir são x=0, 1, 2, 3, ... Dessa forma, se escrevermos X=3 estamos dizendo que "o número de ligações recebidas pelo escritório (X) é igual a 3 ligações (x)".

▼ **Variáveis Aleatórias Continua**

- Uma variável aleatória é contínua se ela possui um **número incontável** de possíveis resultados.
- Ou seja, uma variável é dita contínua quando os valores que ela pode assumir puderem ser representados como um **intervalo na reta dos números reais**.
- Neste caso, os valores assumidos por uma variável contínua **não podem ser listados**, visto que **são infinitos** os possíveis valores dessa variável.

Por exemplo: consideremos o tempo de duração de uma ligação recebida em minutos (incluindo frações de minutos). Neste caso, podemos definir uma variável aleatória Y da seguinte forma:

Y: tempo de duração de uma ligação em minutos.

Perceba que os valores de Y podem assumir qualquer valor em um intervalo real. Suponhamos, para facilitar, que o tempo máximo de uma ligação seja de 120 minutos. Neste caso, os valores y pertencem ao intervalo [0, 120].

## Distribuição de Probabilidade

### ▼ Função Discreta de Probabilidade

- Para cada valor $x_1, x_2, x_3...$ de uma variável aleatória discreta ($X$) pode-se determinar uma probabilidade correspondente a esse valor. Ou seja, para cada $x_i$ vai ser atribuído uma probabilidade de ocorrer.
- Representamos essa probabilidade da seguinte maneira: $P(x_i)$ que é a mesma coisa que $\mathbb{P}(X = x_i)$. Essas duas expressões são chamadas de **Função de Probabilidade** ou **Funções Discretas de Probabilidade**.

$$P(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$$

### ▼ Definição de Distribuição de Probabilidade

- A **Distribuição de probabilidade** vai ser a coleção de todas as probabilidades que foram atribuídas aos $x_i$.
- Uma distribuição de probabilidades deve satisfazer a duas condições:
  i. A probabilidade de cada valor $p(x_i)$ da variável aleatória tem que ser um número de $0$ á $1$.

$$0 \leq \mathbb{P}(X = x) \leq 1 \qquad ou \qquad 0 \leq P(x) \leq 1$$

  ii. A soma de todas as probabilidades tem que ser igual a $1$.

$$\sum_i \mathbb{P}(X = x_i) = 1 \qquad ou \qquad \sum_i p(x_i) = 1$$

**Definição**

Seja $X$ uma variável aleatória discreta. Portanto, $X$ assume no máximo um número infinito enumerável de valores $x_1, x_2, \ldots$. A cada possível resultado $x_i$ associaremos um número $p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$, denominado probabilidade de $x_i$ satisfazendo as seguintes condições:

(a) $p(x_i) \geq 0$ para todo $i$,

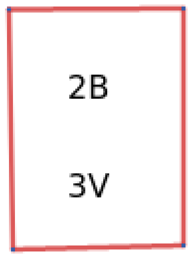
(b) $\sum_i p(x_i) = 1$.

A função $p(x_i)$ é chamada *função de probabilidade* e a coleção de pares $[x_i, p(x_i)], \quad i = 1, 2, \ldots,$ é denominada *distribuição de probabilidade* de $X$.

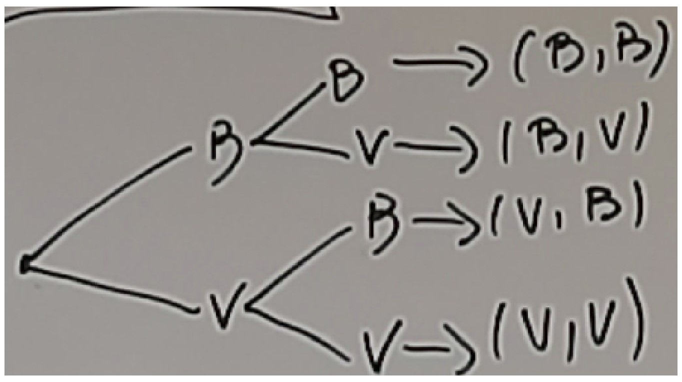
### ▼ Exemplos

#### ▼ Ex 1

- Considere uma urna com duas bolas brancas e três bolas vermelhas. Dessa urna, são extraídas, sem reposição, duas bolas. Seja $X$: “número de bolas vermelhas obtidas nas duas extrações”. Determine a distribuição de probabilidade de $X$.




- Os casos possíveis de retirar duas bolas da urna sem reposição são: $\Omega = (B, B), (B, V), (V, B), (V, V)$.




- Seja $X$: “número de bolas vermelhas obtidas nas duas extrações”. Logo os valores que a variável aleatória ($X$) pode assumir são $x = \{0, 1, 2\}$.
- Então a probabilidade de cada $x$ vai ser:

$$P(x) = P(X = x) \qquad \forall x \in \{0, 1, 2\}$$

$$P(0) = P(X = 0) = \frac{1}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$$

$$P(1) = P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$$

$$P(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

- Só para termos certeza que é realmente uma distribuição de probabilidade, vamos ver se ela satisfaz as duas condições de distribuição de probabilidade.
  1. Nitidamente percebemos que os valores são $0 \leq x_i \leq 1$.
  2. Vamos somar todos os valores para ver se resulta em $1$.

$$\sum_{x=0}^{2} P(x) = \frac{1}{10} + \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = 1$$

- Logo a distribuição de probabilidade vai ser

| x | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P(x) | 1/10 | 6/10 | 3/10 |

▼ **Ex 2**

- Número de filhos - Com dados do último censo, a assistente social de um centro de saúde constatou que para as famílias de uma determinada região:

- $20\%$ não têm filhos
- $30\%$ têm 1 filho
- $35\%$ têm 2 filhos
- $15\%$ têm igualmente 3, 4 ou 5 filhos

- Vamos definir a variável aleatória $N =$ "número de filhos por família".
- Suponha que uma família será selecionada aleatoriamente nessa região e o número de filhos averiguado, queremos estudar a v.a $N$ .

## Função de Distribuição Acumulada (f.d.a)

- O conceito de Função de Distribuição Acumulada (ou **Distribuição Cumulativa de Probabilidade** ou **Função de Distribuição**) que introduziremos aplica-se tanto a variáveis aleatórias discretas quanto a variáveis aleatórias contínuas.
- A função de distribuição acumulada nos dá uma outra maneira de descrever como as probabilidades são associadas aos valores de uma variável aleatória.

▼ **Definição**

- A função de distribuição acumulada (f.d.a) de uma variável aleatória (discreta ou contínua) $X$ é definida como

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \qquad \text{para todo } x$$

- **Propriedades:** Uma função de distribuição acumulada tem que satisfazer as seguintes condições:

$(F1)$ $0 \leq F(x) \leq 1$

$(F2)$ $F$ é **não decrescente** , isto é, $F(x) \leq F(y)$ sempre que $x \leq y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

$(F3)$ Continuidade à direita. Se $x_n \downarrow x$, então $F(x) \downarrow F(y)$.

$(F4)$ $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad e \quad F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$

▼ **Demostração das Propriedades**

- $F1$: Como $F(x)$ representa uma probabilidade segue-se que $0 \leq F(x) \leq 1$.
- $F2$: Note que $[X \leq x] \cap [X \leq y]$ sempre que $x \leq y$. Logo as probabilidades satisfazem à desigualdade:

$$F(x) = P(X \leq x) \leq P(Xy) = F(y).$$

- $F3$: Seja $x \in \mathbb{R}$ e considere uma sequência $\{x_n, n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$ tal que $x_n \downarrow x$. Isto é, os $x_n$ 's se aproximam de $x$ pela direita ou, em outras palavras, por valores superiores a $x$. Então, $[X \leq x_n] \downarrow [X \leq x]$ e, assim, $P(X \leq x_n) \downarrow P(X \leq x)$. Como o resultado vale para qualquer $x$, a propriedade está verificada.
- $F4$: Aplicamos a continuidade da probabilidade. Observe que para $X_n \downarrow -\infty$, os eventos$[X \leq x_n] = \{w \in \Omega : X(w) \leq x_n\}$ têm como limite o conjunto vazio. Logo $F(x_n) = P(X \leq x_n) \downarrow 0$. De modo análogo, tomando $X_n \uparrow \infty$, os eventos $[X \leq x_n] \uparrow \Omega$ e, portanto $F(x_n) = P(X \leq x_n) \uparrow 1$.

▼ **De Distribuição de Probabilidade para f.d.a**

- Quando quisemos encontrar a **f.d.a** de uma **v.a.**, e o problema der a Distribuição de Probabilidade, podemos encontrar a **f.d.a** a partir da Distribuição de Probabilidade por meio da expressão:

$$F(x) = \sum_{i:x_i \leq x} P[X = x_i]$$

- O inverso também é possível:

$$P[X = x_i] = F(x_i) - \lim_{x \to -x_i} F(x)$$

- **Exemplos**
  - **Ex 1:**
    - Um grupo de 1000 crianças foi analisado para determinar a efetividade de uma vacina contra um tipo de alergia. As crianças recebiam uma dose de vacina e após um mês passavam por um novo teste. Caso ainda tivessem tido alguma reação alérgica, recebiam outra dose. Ao fim de 5 doses, foram consideradas imunizadas.
    - Variável de interesse: $X = \text{"número de doses"}$

| Doses (X) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Freq. | 245 | 288 | 256 | 145 | 66 |

    - Uma criança é sorteada ao acaso, qual será a probabilidade dela ter recebido 2 doses?

$$P(X=2) = \frac{288}{1000} = 0,288$$

| Doses (X) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | 0,245 | 0,288 | 0,256 | 0,145 | 0,066 |

    - Qual a probabilidade da criança ter recebido até duas doses?

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2) = 0,245 + 0,288 = 0,533$$

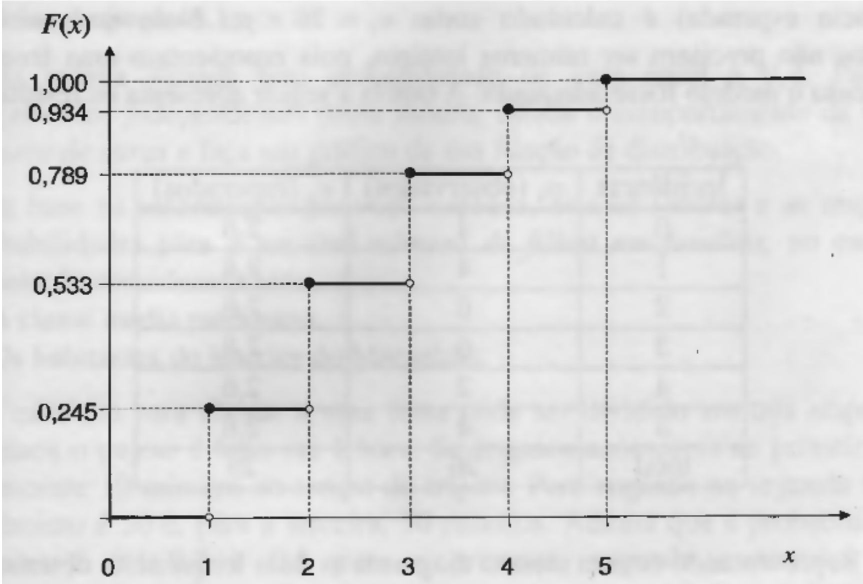
    - Note que, tendo em vista que a variável só assume valores inteiros, esse valor fica inalterado no intervalo $[2,3)$. Isto é , $F(2) = F(2,1) = F(2,45) = F(2,99)$.
    - Por essa razão escrevemos:

$$F(x) = P(X \leq x) = 0,533 \quad para \quad 2 \leq x < 3$$

    - Logo os valores completos da função de distribuição são os seguintes:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1; \\ 0{,}245 & \text{se } 1 \leq x < 2; \\ 0{,}533 & \text{se } 2 \leq x < 3; \\ 0{,}789 & \text{se } 3 \leq x < 4; \\ 0{,}934 & \text{se } 4 \leq x < 5; \\ 1 & \text{se } x \geq 5. \end{cases}$$

    - A figura a seguir apresenta um diagrama dessa função:




## Esperança de v.a. Discretas ($\mathbb{E}(X)$)

### Definição

- Seja $X$ uma variável aleatória discreta, com função de probabilidade $p(x) = P(X = x)$, $x = 1, 2, ..., n, ...$. Então, a esperança (ou valor esperado ou média) de $X$, denotada por $\mathbb{E}(X)$ é definida como:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xp(x)$$

- Colocando em palavras, o valor esperado de $X$ é uma **média ponderada** dos possíveis valores que $X$ pode receber, com cada valor sendo ponderado pela probabilidade de que $X$ seja igual a esse valor. Por exemplo, se a função de probabilidade de $X$ é dada por:

$$p(0) = \frac{1}{2} = p(1)$$

então

$$E[X] = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Nesse caso acima é somente a média ordinária dos dois valores possíveis, $0$ e $1$, que $X$ pode assumir. Por outro lado, se

$$p(0) = \frac{1}{3} \qquad p(1) = \frac{2}{3}$$

então

$$E[X] = 0\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

- Agora suponha que conheçamos uma variável aleatória discreta e sua função de probabilidade e que queiramos calcular o valor esperado de alguma função de $X$ ,
digamos, $g(X)$. Como podemos fazer isso?
- Uma maneira é a seguinte: como $g(X)$ é ela mesmo uma variável aleatória discreta, ela tem uma função de probabilidade, que pode ser determinada a partir da função de probabilidade de $X$. Uma vez que tenhamos determinado a função de probabilidade de$g(X)$, podemos calcular $E[g(x)]$ usando a definição de valor esperado.

**Exemplo:** Seja $X$ uma variável aleatória que pode receber os valores $-1, 0, 1$ com respectivas probabilidades:

$$P\{X = -1\} = 0{,}2 \quad P\{X = 0\} = 0{,}5 \quad P\{X = 1\} = 0{,}3$$

Calcule $E[X^2]$

**Solução:** Seja $Y = X^2$. Então a função de probabilidade de $Y$ é dada por

$$\begin{aligned} P\{Y = 1\} &= P\{X = -1\} + P\{X = 1\} = 0{,}5 \\ P\{Y = 0\} &= P\{X = 0\} = 0{,}5 \end{aligned}$$

Logo

$$E[X^2] = E[Y] = 1(0{,}5) + 0(0{,}5) = 0{,}5$$

Observe que

$$0{,}5 = E[X^2] \neq (E[X])^2 = 0{,}01$$

> Embora o procedimento anterior sempre nos permita calcular o valor esperado de qualquer função de $X$ a partir do conhecimento da função de probabilidade de $X$, há uma outra maneira de raciocinar sobre $E[g(X)]$ : já que $g(X)$ será igual a $g(x)$ sempre que $X$ for igual a $x$ , parece razoável que $E[g(X)]$ deva ser uma média ponderada dos valores $g(x)$, com $g(x)$ sendo ponderado pela probabilidade de que $X$ seja igual a $x$. Isto é, o resultado a seguir é bastante intuitivo:
>
> $$E[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i)$$

- O exemplo acima refeito com esse novo método:

$$\begin{aligned} E\{X^2\} &= (-1)^2(0{,}2) + 0^2(0{,}5) + 1^2(0{,}3) \\ &= 1(0{,}2 + 0{,}3) + 0(0{,}5) \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$

▼ **Propriedades**

- Nas seguintes propriedades, $X$ é uma variável aleatória e $a$, $b$ são constantes.

  - $\mathbb{E}(a) = a$
  - $\mathbb{E}(a + X) = a + \mathbb{E}(X)$
  - $\mathbb{E}(bX) = b\mathbb{E}(X)$
  - $\mathbb{E}(a + bX) = a + b\mathbb{E}(X)$
  - Para $r \geq 1$, o $r$-ésimo momento de uma variável aleatória é definido por $\mathbb{E}(X^r)$ (se existe).

## Variância de uma v.a. ($Var(X)$)

▼ **Definição**

- Dada uma variável aleatória $X$ e sua função distribuição $F$, seria extremamente útil se pudéssemos resumir as propriedades essenciais de $F$ em certas medidas convenientemente definidas.
- Uma dessas medidas seria $E[X]$ o , valor esperado de $X$.
- Entretanto, embora $E[A]$ forneça a média ponderada dos valores possíveis de $X$, ela não nos diz nada sobre a variação, ou dispersão, desses valores.
- **Por exemplo**, embora as v.a $W$, $Y$ e $Z$ com funções discretas de probabilidade determinadas por

$$W = 0 \quad \text{com probabilidade } 1$$
$$Y = \begin{cases} -1 & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \\ +1 & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$Z = \begin{cases} -100 & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \\ +100 & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \end{cases}$$

  tenham todas a mesma esperança, que é igual a $0$. Existe uma dispersão muito maior nos valores possíveis de $Y$ do que naqueles de $W$ (que é uma constante) e nos valores possíveis de $Z$ do que naqueles de $Y$.
- Como esperamos que $X$ assuma valores em torno de sua média $E[X]$ , parece razoável que uma maneira de medir a possível variação de $X$ seja ver, em média, quão distante $X$ estaria de sua média.
- Uma possível maneira de se medir essa variação seria considerar a grandeza $E[|X - \mu|]$, onde $\mu = E[X]$ . Entretanto, a manipulação dessa grandeza seria matematicamente inconveniente. Por esse motivo, uma grandeza mais tratável é usualmente considerada - esta é a esperança do quadrado da diferença entre X e sua média. Temos assim a definição a seguir.
- **Definição:** Se $X$ é uma variável aleatória com média $\mu$, então a variância de $X$, representada por $Var(X)$, é definida como:

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = E\left[(X-E(X))^2\right]$$

- Denominamos **Desvio-Padrão** de $X$ a raiz quadrada positiva de $Var(X)$, e é denotada por $DP(X)$.

$$DP(X) = +\sqrt{Var(X)}$$

▼ **Propriedades**

- Nas seguintes propriedades, $X$ é uma variável aleatória e $a$, $b$ são constantes.

- $\mathrm{Var}(a) = 0$
- $\mathrm{Var}(a + X) = \mathrm{Var}(X)$
- $\mathrm{Var}(bX) = b^2\mathrm{Var}(X)$
- $\mathrm{Var}(a + bX) = b^2\mathrm{Var}(X)$
- $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$

$(F1)$ $0 \leq F(x) \leq 1$

$(F2)$ $F$ é **não decrescente** , isto é, $F(x) \leq F(y)$ sempre que $x \leq y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

$(F3)$ Continuidade à direita. Se $x_n \downarrow x$, então $F(x) \downarrow F(y)$.

$(F4)$ $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad e \quad F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.