Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Fortaleza, 11 de novembro de 2022

- Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional com f.d.p conjunta definida por

$$f(x,y) = \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) \underset{[0,1]}{I}(x) \underset{[0,2]}{I}(y)$$

(a) Demostre que $f(x, y)$ é de fato uma f.d.p conjunta.
(b) Determine a probabilidade do evento $B = \{X + Y \geq 1\}$.

Distribuições Marginais

Definição:

- Seja (X, Y) um vetor aleatório bidimensional com f.d.p conjunta $f(x, y)$ as funções densidade de probabilidade marginais de X e Y são dados por

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy; \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

- No caso multidimensional para determinar a distribuição marginal da k-ésima componente, é necessário integrar $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ para todas as variáveis, exceto x_i. Ou seja

$$f_{X_k}(x) = \int_B \cdots \int f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \cdots dx_n \text{ para todo } i \neq k.$$

- Seja (X, Y, Z) um vetor aleatório com densidade conjunta definida por

$$f(x,y,z) = kxy^2z\, \underset{(0,1)}{I}(x)\; \underset{(0,1)}{I}(y)\; \underset{(0,\sqrt{2})}{I}(z)$$

(a) Determine o valor de k.
(b) Determine as distribuições marginais de X, Y e Z.

Função de Distribuição Conjunta

Definição:

- A função de distribuição de um vetor aleatório $\mathbf{X}$, denominada *função de distribuição conjunta* (f.d.c) é definida por

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1; \ldots; X_n \leq x_n)$$

  para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

- Assim como no caso unidimensional, a função de distribuição conjunta caracteriza de maneira única um vetor aleatório.

Função de Distribuição Conjunta

Propriedades:

A função de distribuição conjunta possui as seguintes propriedades:

(1) $F(\mathbf{x})$ é não decrescente em cada uma das suas componentes.

(2) Se $x_i \to -\infty$ para algum i, então $F(\mathbf{x}) \to 0$, e se $x_i \to \infty$ para todo i, então $F(\mathbf{x}) \to 1$.

(3) $F(\mathbf{x})$ é contínua à direita em cada uma das suas componentes.

(4) Dados $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, tais que $a_i < b_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, então

$$\mathbb{P}(a_1 \leq X_1 \leq b_1; \ldots; a_n \leq X_1 \leq b_n) \geq 0.$$

Função de Distribuição Conjunta

Outras definições:

- A função de distribuição marginal da k-ésima componente de um vetor aleatório $\mathbf{X}$ é dada por

$$F_{X_k}(x) = \lim_{x_i \to \infty} F(\mathbf{x})$$

para todo $i \neq k$.

- Seja $\mathbf{X}$ um vetor aleatório contínuo com função densidade conjunta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, tal que

$$F(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(\mathbf{u}) du_1 du_2 \cdots du_n \, \forall \, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

- Considere a seguinte função

$$F(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \text{ e } x + y \geq 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- É possível mostrar que esta função satisfaz as propriedades (1)-(3), mas não satisfaz a propriedade (4).

- Seja (X, Y) um vetor aleatório com função de distribuição conjunta dada por:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } y < 0; \\ \frac{x}{5}(1 - e^{-y}), & \text{se } 0 \leq x < 5 \text{ e } y \geq 0; \\ 1 - e^{-y}, & \text{se } x \geq 5 \text{ e } y \geq 0. \end{cases}$$

  (a) Determine as funções de distribuição marginais de X e Y.
  (b) Determine a densidade conjunta do vetor (X, Y).
  (c) Determine as densidades marginais de X e Y.

- Seja (X, Y) um vetor aleatório com função mista de probabilidade

$$f(x, y) = \frac{xy^{x-1}}{3} \underset{\{1,2,3\}}{I}(x) \underset{[0,1]}{I}(y)$$

(a) Determine as distribuições marginais de X e Y.

(b) Calcule $\mathbb{P}(X \geq 2; Y \geq 1/2)$.