FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

Seja $y=f(x): U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, uma função real de uma variável real.

Começamos, recordando duas definições relacionadas à $y=f(x)$:

DEFINIÇÃO.1. Diz-se que $y=f(x)$ é derivável em $x_0 \in U$, quando existe o seguinte limite: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

DEFINIÇÃO.2. Diz-se que $y=f(x)$ é diferenciável em $x_0 \in U$, quando $y=f(x)$ é derivável em x_0 e: $f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$, com $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$;

Decorre, claramente, da DEFINIÇÃO.2. que se $y=f(x)$ é diferenciável em x_0 é também derivável em x_0.

Contudo, embora seja bem menos óbvio, se $y=f(x)$ for derivável em x_0 então, também, será diferenciável em x_0.

Para vermos porque isto ocorre, definamos a seguinte função:

$\varepsilon(\Delta x) = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$; Desta definição podemos concluir que:

$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)+\varepsilon(\Delta x) \therefore f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$;

$$\text{E, } \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} f'(x_0) =$$

$$= f'(x_0) - f'(x_0) = 0;$$

Agora, nosso objetivo é generalizarmos a definição.2. para uma função real de duas variáveis reais, $u=f(x,y): U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, onde U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$:

DEFINIÇÃO.3. Diz-se que $u=f(x,y)$ é diferenciável em $(x_0,y_0) \in U$, quando existem as duas derivadas parciais em (x_0,y_0), $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, e:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y;$$

com $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y) = 0$ e $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y) = 0$;

Na sequência de nosso curso veremos, em várias ocasiões, como é relevante o fato de que $u=f(x,y)$ seja diferenciável em (x_0,y_0). Por isto mesmo, na grande maioria das vezes só trabalharemos com funções diferenciáveis, dispensando a necessidade de vocês verificarem se uma função é, ou não, diferenciável.

Logo, este é o momento apropriado para tratarmos, mesmo que brevemente este tema.

Embora, a definição de diferenciabilidade seja matematicamente perfeita, a sua natural complexidade dificulta sabermos, por meio dela, se uma dada função $u=f(x,y)$ é ou não é diferenciável em um seu ponto (x_0,y_0).

Contudo, os dois próximos resultados são muito úteis, um em cada caso:

<u>TEOREMA.1</u>. Se $u=f(x,y)$ é diferenciável em (x_0,y_0), então é contínua em (x_0,y_0);

<u>Prova:</u> no anexo-3;

A utilidade deste teorema é que se $u=f(x,y)$ não for contínua em (x_0,y_0), então ela não poderá ser diferenciável em (x_0,y_0). Vejamos um exemplo:

ⓐ Mostre que $u=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$; não é diferenciável em $(0,0)$;

<u>Solução:</u> vamos mostrar que esta função não é contínua em $(0,0)$. Vamos provar que sua descontinuidade em $(0,0)$ é essencial, pois reside no fato de que $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Para este efeito, calculemos:

(i) O limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende à $(0,0)$ ao longo do eixo-x;

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(\text{pelo eixo-}x)}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=0)}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0;$$

(ii) O limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende à $(0,0)$ ao longo da reta $y=x$;

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(\text{pela reta } y=x)}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=x)}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

Portanto, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ o que conduz ao fato de que $f(x,y)$ não é contínua em $(0,0)$. E logo, pelo <u>TEOREMA.1</u>. $f(x,y)$ não é diferenciável em $(0,0)$;

Já o próximo teorema será útil para verificarmos que uma dada função é diferenciável:

TEOREMA.2. Se f_x e f_y forem contínuas em (x_0, y_0) então $f(x,y)$ será diferenciável em (x_0, y_0);

Demonstração. No Anexo-3;

Vejamos alguns exemplos:

(b) Mostre que $f(x,y) = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4$ é uma função diferenciável em cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

Solução: Temos; $f_x = y^2 + 2xy^3 + 3x^2y^4$ e $f_y = 2xy + 3x^2y^2 + 4x^3y^3$.

Como ambas são funções polinomiais em x e y, ambas são contínuas em cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Logo pelo TEOREMA.2. $f(x,y) = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4$ é diferenciável em cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(c) Mostre que $f(x,y) = x\,\mathrm{sen}\,y + y\cos x + xy$ é uma função diferenciável em cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

Solução: Temos; $f_x = \mathrm{sen}\,y - y\,\mathrm{sen}\,x + y$; E como f_x é uma soma de funções contínuas ela é também uma função contínua. De modo semelhante, vemos que $f_y = x\cos y + \cos x + x$ também é uma função contínua, por ser uma soma de funções contínuas. Então, pelo TEOREMA.2., a função $f(x,y) = x\,\mathrm{sen}\,y + y\cos x + xy$ é diferenciável em cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(d) Mostre que $f(x,y) = ye^x + x\ln y + x^2 - y^3$ é uma função diferenciável em cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $y > 0$;

Solução: Temos;

$$f_x = ye^x + \ln y + 2x \quad \text{e} \quad f_y = e^x + \frac{x}{y} - 3y^2;$$

Vemos que f_x é contínua, por ser uma soma de funções contínuas, em cada (x,y) tal que $y>0$. Análogamente, também, f_y é contínua, por ser uma soma de funções contínuas, em cada (x,y) tal que $y \neq 0$, logo também em particular em cada (x,y) tal que $y>0$.

Então, pelo TEOREMA.2. a função $f(x,y) = ye^x + x\ln y + x^2 - y^3$ é diferenciável em cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $y>0$;

Vejamos agora, a definição de diferenciabilidade para uma função real, de três variáveis reais, $u = f(x,y,z): U \subseteq R^3 \to R$, onde U é um sub--conjunto aberto de R^3:

DEFINIÇÃO.4. Diz-se que $u = f(x,y,z)$ é diferenciável em $(x_0,y_0,z_0) \in U$, quando existem as três derivadas parciais: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)$; $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)$; e:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\Delta z +$$
$$+ \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta y + \varepsilon_3(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta z;$$

onde $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)} \varepsilon_i(\Delta x,\Delta y,\Delta z) = 0$, para $i = 1, 2$ e 3;

Felizmente, temos também dois teoremas análogos aos teoremas 2 e 3, para funções reais de duas variáveis reais, cujas provas diferem apenas em pequenas modificações, de duas para três variáveis, daquelas que faremos no anexo-3.

TEOREMA.3. Se $u = f(x,y,z)$ é diferenciável em (x_0,y_0,z_0) então é contínua em (x_0,y_0,z_0).

Sua utilidade é a mesma do TEOREMA.1. se $u = f(x,y,z)$ não for contínua em (x_0,y_0,z_0), então ela não poderá ser diferenciável em (x_0,y_0,z_0).

Vejamos exemplos:

ⓐ Mostre que $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$; não é diferenciável em $(0,0,0)$;

Solução: se calculamos o limite de $f(x,y,z)$ quando (x,y,z) tende à $(0,0,0)$, pelo eixo-z, obtemos:

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\(\text{pelo eixo-}z)}} f(x,y,z) = \lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\(x=0 \text{ e } y=0)}} \frac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4} = \lim_{z\to 0} \frac{0}{z^4} = \lim_{z\to 0} 0 = 0;$$

E, se calculamos o limite de $f(x,y,z)$ quando (x,y,z) tende à $(0,0,0)$, ao longo da reta $x=y=z$, obtemos:

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\(\text{pela reta } x=y=z)}} f(x,y,z) = \lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\(x=y=z)}} \frac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4} = \lim_{z\to 0} \frac{z^4}{3z^4} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3};$$

Portanto, $\nexists \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ o que conduz ao fato de $f(x,y,z)$ não ser contínua em $(0,0,0)$. E logo, pelo TEOREMA.3. $f(x,y,z)$ não é diferenciável em $(0,0,0)$;

(f) Mostre que $f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{e^{-1/x^2}\cdot(y+z)}{e^{-2/x^2}+y^2+z^2} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$; não é diferenciável em $(0,0,0)$;

Solução: se calculamos o limite de $f(x,y,z)$ quando (x,y,z) tende à $(0,0,0)$, ao longo do eixo-x, obtemos:

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ (\text{pelo eixo-x})}} f(x,y,z) = \lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ (y=0 \text{ e } z=0)}} \frac{e^{-1/x^2}\cdot(y+z)}{e^{-2/x^2}+y^2+z^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{e^{-2/x^2}} = \lim_{x\to 0} 0 = 0;$$

Já, se calculamos o limite de $f(x,y,z)$ quando (x,y,z) tende à $(0,0,0)$, ao longo da curva $y=e^{-1/x^2}$, localizada no plano $z=0$, obtemos:

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ (\text{ao longo de } y=e^{-1/x^2}\\ \text{no plano } z=0)}} f(x,y,z) = \lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ (y=e^{-1/x^2} \text{ e } z=0)}} \frac{e^{-1/x^2}\cdot(y+z)}{e^{-2/x^2}+y^2+z^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}\cdot e^{-1/x^2}}{2e^{-2/x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

Portanto, $\nexists \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$. O que acarreta o fato de $f(x,y,z)$ não ser contínua em $(0,0,0)$, e logo pelo TEOREMA.3. não ser diferenciável em $(0,0,0)$;

TEOREMA.4. Se f_x, f_y e f_z forem contínuas em (x_0,y_0,z_0) então $f(x,y,z)$ será diferenciável em (x_0,y_0,z_0).

Vejamos

(g) Mostre que $f(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$ é uma função diferenciável para cada $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$;

Solução: Temos; $f_x(x,y,z)=2xy+z^2$; $f_y(x,y,z)=x^2+2yz$; e $f_z(x,y,z)=y^2+2xz$;

Todas são funções polinomiais, logo contínuas em cada $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Logo, pelo TEOREMA.4. $f(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$ é diferenciável em cada $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$;

(h) Mostre que $f(x,y,z)=\operatorname{arctg}(xyz)$ é uma função diferenciável em cada $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$;

Solução: Temos; $f_x(x,y,z)=\dfrac{yz}{1+x^2y^2z^2}$; $f_y(x,y,z)=\dfrac{xz}{1+x^2y^2z^2}$; e $f_z(x,y,z)=\dfrac{xy}{1+x^2y^2z^2}$;

Cada uma delas é uma função racional em (x,y,z), ou seja: um quociente de duas funções polinomiais, que são contínuas; e todas com o mesmo denominador, $1+x^2y^2z^2$, que nunca se anula. Portanto, f_x, f_y e f_z são contínuas em todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Logo, pelo TEOREMA.4. $f(x,y,z)=\operatorname{arctg}(xyz)$ é diferenciável em cada $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.