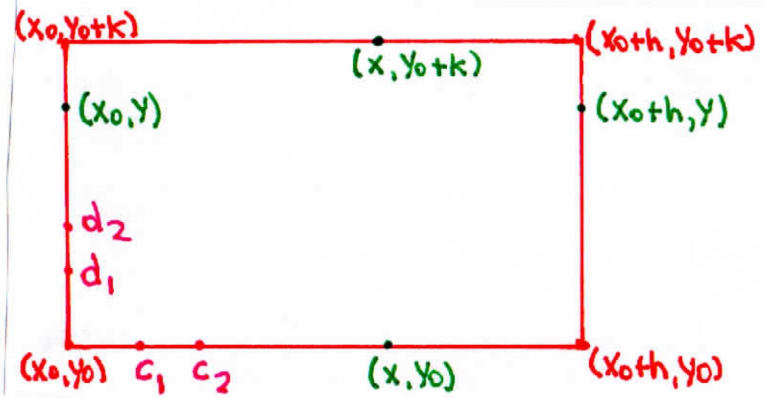
• ANEXO-II • PROVA DO TEOREMA DE CLAIRAUT (1713-1765) E EXEMPLO •

TEOREMA. Seja $u = f(x,y): U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, U aberto em $\mathbb{R}^2$. Então, se f, f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} forem contínuas em U, sempre teremos $f_{xy} = f_{yx}$ para cada $(x_0, y_0) \in U$;



Prova: como U é aberto em $\mathbb{R}^2$ é sempre possível encontrarmos para cada $(x_0, y_0) \in U$, h e k suficientemente pequenos tais que o retângulo ao lado ao lado sempre esteja totalmente contido em U;

Clairaut definiu as seguintes funções, de uma variável cada, em termos de f:
$$\begin{cases} G(x) = f(x, y_0+k) - f(x, y_0) \text{ em } [x_0, x_0+h]; \\ H(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y) \text{ em } [y_0, y_0+k]; \end{cases}$$

LEMA. $G(x_0+h) - G(x_0) = H(y_0+k) - H(y_0)$;

Prova:
$$\left.\begin{array}{l} G(x_0+h) - G(x_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0) \\ H(y_0+k) - H(y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0) \end{array}\right\rangle G(x_0+h) - G(x_0) = H(y_0+k) - H(y_0);$$

Em seguida, Clairaut aplicou o Teorema do Valor médio, de Lagrange (1736-1813) à: G_x, f_x, H_y e f_y:

$$G(x_0+h) - G(x_0) = G'(c_1)h = [f_x(c_1, y_0+k) - f_x(c_1, y_0)]h = [f_{xy}(c_1, d_1)k]h = f_{xy}(c_1, d_1)kh;$$
$$H(y_0+k) - H(y_0) = H'(d_2)k = [f_y(x_0+h, d_2) - f_y(x_0, d_2)]k = [f_{yx}(c_2, d_2)k]h = f_{yx}(c_2, d_2)kh;$$

Logo pelo LEMA: $$f_{xy}(c_1, d_1)\cancel{kh} = f_{yx}(c_2, d_2)\cancel{kh}$$

e $$\underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{xy}(c_1, d_1)}_{f_{xy}(x_0, y_0)} = \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{yx}(c_2, d_2)}_{f_{yx}(x_0, y_0)};$$ E como f_{xy} e f_{yx} são contínuas em U:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0);$$

EXEMPLO.

A seguir daremos um exemplo de uma função real $u = f(x,y)$ tal que sua derivada parcial de 2ª ordem f_{xy} não é contínua em $(0,0)$. Portanto esta função não satisfará à todas as hipóteses do Teorema de Clairaut em $(0,0)$. Logo não poderemos garantir que $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$.

Vejamos:

Seja $u = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

Vamos encontrar: f_x, f_y, $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ e f_{xy} para vermos que ela não é contínua em $(0,0)$;

para $(x,y) \neq (0,0)$: $f_x = \dfrac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$;

para $(x,y) = (0,0)$: $f_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$;

para $(x,y) \neq (0,0)$: $f_y = \dfrac{(x^3 - 3xy^2)(x^2+y^2) - 2y(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$;

para $(x,y) = (0,0)$: $f_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{0}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} 0 = 0$;

Portanto, $f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$; e $f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

Logo, $f_{xy}(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f_x(0, 0+\Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\frac{-\Delta y^5}{\Delta y^4}}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{-\Delta y^5}{\Delta y^5} = -1$;

Já, $f_{yx}(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f_y(0+\Delta x, 0) - f_y(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\frac{\Delta x^5}{\Delta x^4}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x^5}{\Delta x^5} = 1$;

Ou seja $f_{xy}(0,0) = -1 \neq 1 = f_{yx}(0,0)$.

Contudo este resultado não contradiz o Teorema de Clairaut, e nem poderia! Ocorre, que f_{xy} não é contínua em $(0,0)$:

para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f_{xy} = \frac{(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4)(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)2y(x^4y + 4x^2y^3 - y^5)}{(x^2+y^2)^4};$$

Se calcularmos $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (y=0)}} f_{xy}(x,y) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^8}{x^8} = 1$; e $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x=0)}} f_{xy}(x,y) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{-y^8}{y^8} = -1$;

Logo, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y)$ não existe. Ou seja, $f_{xy}(x,y)$ é descontínua em $(0,0)$;