Análise Combinatória

Síntese

- Símbolos
- Conceitos
  - Axioma
  - Teorema
  - Conjectura
- Teorema
- Logica Proposicional
  - Proposição
  - Negação de Proposição
  - Conectivos $\wedge$(e) e $\vee$(ou)
  - Condicionais $\rightarrow$(se.. então..) e $\leftrightarrow$(se e somente se)
  - Tautologia
  - Sentenças abertas, Quantificadores
- Prova Formal
- Prova por Contradição
- Prova por Indução
- Conjuntos
  - Operações entre Conjuntos
    - $\in$ Pertence
    - $\notin$ Não Pertence
    - $\subset$ Contido
    - $\not\subset$ Não Contido
    - $\cup$ União
    - $\cap$ Interseção
    - $\#$ Todos os elementos
    - Ω Omega
    - ^{c} Complementar
    - $\varnothing$ Vazio
    - Leis de De Morgan

- **Independência de três ou mais eventos**
- **Lei binomial da probabilidade**
  - **Jacques Bernoulli**
- **Distribuição binomial**

Símbolos

▼

- $\in$: Pertence
- $\notin$: Não Pertence
- $\subset$: Contido
- $\not\subset$: Não Contido
- $\cup$: União
- $\cap$: Interseção
- $\#$: Todos os elementos
- Ω: Omega
- $\sim p$: Negação de uma proposição
- $\rightarrow$: Condicionais se.. então..
- $\leftrightarrow$: Condicional se e somente se
-

Conceitos

▼

- **Axioma**: Um axioma ou postulado é uma sentença ou proposição que não é provada ou demonstrada e é considerada como óbvia ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria. Por essa razão, é aceito como verdade e serve como ponto inicial para dedução de outras verdades. Ou seja, é algo que é aceito como verdade, por ser muito óbvio.

  Obs: Não é porque um axioma é verdadeiro em um determinado ambiente matemático, que ele vai ser verdadeiro no ambiente real.
- **Teorema**: Na matemática, um teorema é uma afirmação que pode ser provada como verdadeira, por meio de outras afirmações já demonstradas, como outros teoremas, juntamente com afirmações anteriormente aceitas, como axiomas.
- **Conjectura**: Uma conjectura é uma ideia, fórmula ou frase, a qual não foi provada ser verdadeira, baseada em suposições ou ideias com fundamentos não verificados. As conjecturas utilizadas como prova de resultados matemáticos recebem o nome de
  hipóteses.

Teorema

▼

- $2k =$ Par

- $2k + 2q = 2(k + q)$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
- $m \cdot m! = (m + 1)! - m!$

Logica Proposicional

Proposição

É uma sentença ou oração que pode ser classificada em verdadeiro ou falso.

Exemplo:

- $(9 \neq 5)$ Nove é diferente de cinco. Verdadeira
- $(7 > 3)$ Sete é maior que três. Verdadeira
- $(2 \in \mathbb{Z})$ Dois é um número inteiro. Verdadeira
- $(3 \mid 11)$ Três é divisor de onze. False
- $(4 \cdot 5 = 20)$ Quatro vezes cinco é igual a vinte. Verdadeira

Negação de Proposição

A partir de uma proposição p qualquer, sempre podemos construir outra, denominada negação de p e indicada com o símbolo $\sim p$.

Exemplo:

- p :$(9 \neq 5)$, $\sim p : (9 = 5)$
- p :$(7 > 3)$, $\sim p$:$(7 \leq 3)$
- p :$(2 \in \mathbb{Z})$, $\sim p$:$(2 \notin \mathbb{Z})$
- p :$(3 \mid 11)$, $\sim p$:$(3 \nmid 11)$
- p :$(4 \cdot 5 = 20)$, $\sim p$:$(4 \cdot 5 \neq 20)$
- p :$(\forall\, x)$, $\sim p$:$(\exists\, x)$
- p :$(\forall\, x)(x^2 - 4x + 1 \neq (x - 2)^2)$, $\sim p$:$(\exists\, x)(x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2)$

Conectivos $\wedge$(e) e $\vee$(ou)

Conjunção $\wedge$:

Colocando o conectivo $\wedge$ entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição, $p \wedge q$, denominada conjunção das sentenças p e q. A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira se p e q são ambas verdadeiras.

p	q	p $\wedge$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplo:

* $p: 2 > 0$ (V)
  $q: 2 \neq 1$ (V)
  então:
  $p \wedge q: \; 2 > 0 \quad e \quad 2 \neq 1$ (V)

* $p: \; -2 < -1$ (V)
  $q: (-2)^2 < (-1)^2$ (F)
  então:
  $p \wedge q: \; -2 < -1 \quad e \quad (-2)^2 < (-1)^2$ (F)

Disjunção $\vee$

Colocando o conectivo $\vee$ entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição, $p \vee q$, denominada disjunção das sentenças p e q. A disjunção $p \vee q$ é verdadeira se ao menos uma das proposições p ou q é verdadeira; se p e q são ambas falsas, então $p \vee q$ é falsa.

p	q	p $\vee$ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo:

* $p: 5 > 0$ (V)
  $q: 5 > 1$ (V)
  então:
  $p \vee q: \; 5 > 0 \quad ou \quad 5 > 1$ (V)

* $p: 3 = 3$ (V)
  $q: 3 < 3$ (F)
  então:
  $p \vee q: \; 3 \leq 3$ (F)

▼ Condicionais $\rightarrow$(se.. então..) e $\leftrightarrow$(se e somente se)

Condicional $\rightarrow$

Colocando o condicional $\rightarrow$ entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição, $p \rightarrow q$, que se lê: 'se p, então q', 'p é condição necessária para q', 'q é condição suficiente para p'.

p	q	p $\rightarrow$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Esse condicional só vai ser falso, quando $p = V$ e $q = F$.

Exemplo:

* $p: (2 \mid 4)$ (V)
  $q: (4 \mid 20)$ (V)
  $p \to q:$ se dois é divisor de quatro, então quatro é divisor de vinte $(2 \mid 4 \to 4 \mid 20)$ (V)

* $p: (2 \cdot 5 = 10)$ (V)
  $q: (3 \mid 10)$ (F)
  $p \to q:$ se dois vezes cinco é igual a dez, então três é divisor de dez $(2 \cdot 5 = 10 \to 3 \mid 10)(F)$

* $p: (5 < 2)$ (F)
  $q: (2 \in \mathbb{Z})$ (V)
  $p \to q:$ se cinco é menor que dois, então dois é número inteiro $(5 < 2 \to 2 \in \mathbb{Z})(V)$

Exemplo em portugues:

* "Se eu for eleito, reduzirei o valor do RU"
  p: "Se eu for eleito"
  q: "reduzirei o valor do RU"
  $p \to q:$ Se eu for eleito $\to$ reduzirei o valor do RU

Se eu for eleito	reduzirei o valor do RU	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Condicional $\leftrightarrow$

Colocando o condicional $\leftrightarrow$ entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição, $p \leftrightarrow q$, que se lê: 'p se, e somente se, q', 'p é condição necessária e suficiente para q'.

O condicional $\leftrightarrow$ é verdadeiro somente quando p e q são ambas verdadeiro ou ambas falsas; se isso não acontecer, o condicional $\leftrightarrow$ é falso.

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplo:

* $p: (2 \mid 12)$ (V)
  $q: (2 \cdot 7 \mid 12 \cdot 7)$ (V)
  $p \leftrightarrow q:$ $(2 \mid 12 \leftrightarrow 2 \cdot 7 \mid 12 \cdot 7)$ (V)

* $p: (\frac{3}{2} = \frac{6}{4})$ (V)
  $q: (3 \cdot 4 \neq 6 \cdot 2)$ (F)
  $p \leftrightarrow q:$ $(\frac{3}{2} = \frac{6}{4} \leftrightarrow 3 \cdot 4 \neq 6 \cdot 2)(F)$

* $p: (6 = 12 : 3)$ (F)
  $q: (3 \cdot 6 = 18)$ (V)
  $p \leftrightarrow q:$ $(6 = 12 : 3 \leftrightarrow 3 \cdot 6 = 18)(F)$

▼ Tautologia

É uma proposição formada por outras proposições e conectivos, que é sempre verdadeira independente dos valores de suas variáveis.

Exemplo 1: $(p \wedge \sim p) \to (q \vee p)$

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$q \vee p$	$(p \wedge \sim p) \to (q \vee p)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

Exemplo 2: $(p \wedge \sim p) \to (q \vee p)$

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Exemplo prático: $\sim (p \wedge q)$

– p : "Olhei para a direita"
– q : "Olhei para a esquerda"

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
V	F	F	V
F	V	F	V

▼ Sentenças abertas, Quantificadores

Setenças abertas

– Orações que contêm variáveis são chamadas funções proporcionais ou sentenças abertas. Tais orações não são proposições pois seu valor lógico (V ou F) é discutível, dependem do valor dado as variáveis.
– Há, entretanto, duas maneiras de transformar senteças abertas em proposições:
  1. Atribuir valor ás variáveis.
  2. Utilizar quantificadores.
– **Exemplos:**
  * $x + 1 = 7$ é verdadeira se trocarmos x por 6 e é falsa para qualquer outro valor dado a x;
  * $x^3 = 2x^2$ é verdadeira se trocarmos x por 0 ($0^3 = 2 \cdot 0^2$) ou 2 ($2^3 = 2 \cdot 2^2$) e é falsa para qualquer outro valor dado a x.

Quantificador universal $\forall$

O quantificador universal, usado para transformar sentenças abertas em proposições, é indicado pelo símbolo $\forall$, que se lê: "qualquer que seja", "para todo", "para cada".

Exemplos:
* $(\forall x)(x + 1 = 7)$ que se lê: "qualquer que seja o número x, temos $x + 1 = 7$" F
* $(\forall x)(x^3 = 2x^2)$ que se lê: "para todo número x, $x^3 = 2x^2$" F
* $(\forall a)((a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1)$ que se lê: "qualquer que seja o número a, temos $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$" V
* $(\forall y)(y^2 + 1 > 0)$ que se lê: "para todo número y, temos $y^2 + 1$ positivo" V

Quantificador existencial $\exists$

O quantificador existencial é indicado pelo símbolo $\exists$, que se lê: "existe", "existe pelo menos um ", "existe um".

Exemplos:

* $(\exists x)(x+1=7)$, que se lê: "Existe um número x tal que $x+1=7$".V
* $(\exists x)(x^3=2x^2)$, que se lê: "Existe um número x tal que $x^3=2x^2$".V
* $(\exists a)(a^2+1\leq 0)$, que se lê: "Existe um número a tal que a^2+1 é não positivo".F
* $(\exists! m)(m(m+1)\neq m^2+m)$, que se lê: "Existe pelo menos um número m tal que $m(m+1)\neq m^2+m$".F

Quantificador para unicidade $\exists!$

Algumas vezes utilizamos também outro quantificador: $\exists!$, que se lê: "existe um único", "existe um e um só", "existe só um"

Exemplos:

* $(\exists! x)(x+1=7)$, que se lê: "existe um só número x tal que $x+1=7$".V
* $(\exists! x)(x^3=2x^2)$, que se lê: "existe um só número x tal que $x^3=2x^2$".F
* $(\exists! x)(x+2>3)$, que se lê: "existe um só número x tal que $x+2>3$".F

- d
- d
- d

Prova Formal

▼

- Em matemática, uma prova é uma demonstração de que, dados certos axiomas, algum enunciado de interesse é necessariamente verdadeiro. Utiliza como base premissas intrínsecas a um modelo conceitual e um silogismo que, a partir de uma série de operações, chega ao resultado.
  Melhor dizendo: É parte de um conjunto de conhecimentos, tomados como verdades, desenvolvendo por meio de raciocínio lógico de inferência básica a sua demonstração até chegar em um resultado desejado.
- **Obs:** Tenho uma proposição: A soma dos n primeiros números naturais >0 é igual a $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ essa proposição até o valor de um milhão, e não encontrar nenhum valor que contradiz essa preposição, isso ainda não é uma prova, mesmo que eu tenha plena certeza que a proposição é verdadeira.

Exemplo 1:

- **Prove que** $(A - B) \subset A$
- Se $x \in (A - B)$, então $x \in A$ e $x \notin B$.
- Logo $x \in (A - B) \Rightarrow x \in A$ e $(A - B) \subset A$

Exemplo 2:

- **Prove que** $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
- $x \in (A - B) \cup (B - A) \Leftrightarrow x \in (A - B)$ **ou** $x \in (B - A)$. $x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A$ **e** $x \notin B \Rightarrow x \in A \cup B$ **e** $x \notin B \cap A \Rightarrow x \in (A \cup B) - (B \cap A)$ **. Se** $x \in (B - A)$ **, da mesma forma** $x \in (A \cup B) - (B \cap A)$ **. Logo,** $(A - B) \cup (B - A) \subset (A \cup B) - (B \cap A)$ **. Tome** $x \in (A \cup B) - (B \cap A)$ **, então** $x \in A \cup B$ **e** $x \notin A \cap B$ **. Logo** $x \notin A$ **ou** $x \notin B$, **mais** $x \in A$ **ou** $x \in B$ **. De toda forma** $x \in (A - B)$ **ou** $x \in (B - A)$ **. Logo** $x \in (A - B) \in (B - A)$.

Exemplo 3:
A soma de todos os alunos de três turmas diferente: A=Matemática, B=Cálculo, C=Combinatoria, $\#(A \cup B \cup C)$ é?

- $\#A + \#B + \#C$
- Retirando os alunos que estudam em mais de uma turma $A\,B\,C$: $-\#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C)$
- Acabei retiram todos os alunos que se repetem, colocando de volta o aluno, idependente se ele estuda em mais de uma turma: $+\#(A \cap B \cap C)$
- A formula final é: $(\#A + \#B + \#C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$

Exemplo 4:
415 alunos, 221 estudam inglês, 163 estudam francês, 52 estudam inglês e francês. Quantos alunos não estudam nenhum idioma?

- O número de alunos que estudam inglês: $\#I = 221$; Francês: $\#F = 163$; Inglês e Francês: $\#(I \cap F)$; Todos os alunos: $\#\Omega = 415$; Valor desejado: $\#(I \cup F)^c = ?$.
- $\#(I \cup F) = \#I + \#F - \#I \cap F \Rightarrow 221 + 163 - 52 = 332$
- $\#(I \cup F) + \#(I \cup F)^c = \#\Omega \Rightarrow 332 + \#(I \cup F)^c = 415 \Rightarrow \#(I \cup F)^c = 83$

Prova por Contradição

▼

- Prova por contradição (ou redução ao absurdo) é um método de prova matemática indireta, não-construtiva. Este tipo de prova é feito assumindo-se como verdade o contrário do que queremos provar e então chegando-se a uma contradição.
- **Melhor dizendo**: Quero prova que p é verdade, então eu pego $\sim p$ e faço de conta que ele é verdade, chego em um absurdo (algo que não pode acontecer), então $\sim p$ é falso, sendo assim p é verdadeiro.

Exemplo 1:

- Existe uma quantidade infinita de números primos.
- **Prova:** Por absurdo, suponha $p_1 + p_2 + p_3 \ldots p_n$ são os **únicos** primos. Tal $p = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n + 1$. Nenhum primo entre $p_1 \ldots p_n$ divide $\mathbf{p}$. Então $\mathbf{p}$ é primo e é maior que todos os outros. Contradição.
- Ou seja, o absurdo foi supor que existia uma quantidade finita de números primos, portando essa suposição é falsa, e existem infinitos números primos.

Exemplo 2:

- Não existe menor número real positivo.
- **Prova:** Por contradição. Suponha que existe o menor número real positivo. Seja x esse número. Veja que $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} > \mathbf{0}$ e $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} \in \mathbb{R}$ e $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} < \mathbf{x}$. Contradição!
- Ou seja, o absurdo foi supor que existia um menor número real positivo, portando essa suposição é falsa, e não existem um menor número real positivo.

Prova por Indução

- É uma prova usado para demonstrar que se um valor é verdadeiro, o seu sucessor também vai ser verdadeiro.
- Esse método funciona provando que o enunciado é verdadeiro para um valor inicial $P(1)$, depois eu suponho que $P(1)$ é verdadeiro e por último eu mostro que $P(1)$ implica $P(n+1)$, ou seja, se $P(1)$ é verdade, então obrigatoriamente $P(n+1)$ é verdade também.
- A prova por indução é formada por uma sequência de três passos:
  - **1º Base de indução (Também chamado de caso inicial):**

    É provar que uma equação (ideia) qualquer é válida para um valor inicial $P(1)$. Dependendo da definição utilizada de N, esse valor pode ser 0 ou 1.
  - **2º Hipótese de indução**

    É mostrar que, a equação é válida para um determinado n, que é o mesmo que $P(n)$.
  - **3º Passo indutivo**

    É mostrar que a equação é válida para o $n+1$, que é o mesmo que $P(n+1)$.
  - **Obs:** Se eu conseguir provar o Passo indutivo, então eu consigo provar que a equação é válida para qualquer n.

Exemplo 1:
A soma dos **n** primeiros números naturais vai ser igual a **n** multiplicado por **n** mais **1**, tudo isso dividido por dois. $(\frac{n(n+1)}{2})$.

- **Prova, por indução:**
  Base de indução, para $n = 1$, temos: $(1 = \frac{1(1+1)}{2})$. A partir dessa premissa, vamos para o segundo passo.

  Hipótese de indução, suponha que: $1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$ é verdadeiro, para um certo $k \in \mathbb{N}$. Dessa premissa vamos para o último passo.

  Passo indutivo, $1 + 2 + 3 + ... + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$, a soma de 1 até k podemos subistituir pelo resultado da Hipótese de indução, ficando: $\frac{k(k+1)}{2} + k + 1$, o MMC desse valor é 2, dividir esse MMC pelo denominador e multiplicar o resultado pelo numerador vai ficar: $\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$, colocando $k + 1$ em evidência fica: $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Finalizamos provando que essa fórmula vale para todos os números naturais.

Exemplo 2:
A soma dos **n** primeiros números naturais ao quadrado: $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- **Prova, por indução:**
  Base de indução, para $n = 1$, temos: $(1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6})$.
  Hipótese de indução, suponha que a formula é verdadeira para $p(n)$.
  Passo indutivo, $1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, a formula depois da igualdade é o resultado que eu pretendo chegar, eu cheguei a esse resultado pegando a formula $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ colocando onde tinha n por $n + 1$.
  * Fazendo o passo indutivo, fica, $1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$.
  * Fazendo o MMC fica: $\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$.
  * Deixando o $n + 1$ em evidência: $\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1)}{6}$
  * Abrindo os parêntes: $\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$.
  * Colocando o $2n$ e o 3 em evidência, fica: $\frac{(n+1)(2n^2+4n+3n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n(n+2)+3(n+2)}{6}$.
  * Colocando o $n + 2$ em evidência: $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

Exemplo 3:
A soma dos **n** primeiros números ímpares naturais: $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$

- **Prova, por indução:**
  Base de indução, para $n = 1$, temos: $(1^2 = 1)$.
  Hipótese de indução, suponha que a formula é verdadeira para $p(n)$.
  Passo indutivo, $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$.
  - Fazendo o passo indutivo, fica, $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1)$.
  - O resultado $n^2 + (2n+1)$ é um Trinômio do quadrado perfeito, que fica: $(n+1)^2$
  - Então provamos que a formula $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$ é valida para 1, para n e para $n+1$.

Exemplo 4:
A soma dos **n** primeiros números de Fibonacci: $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$

- **Prova, por indução:**
  Base de indução, para $n = 1$, temos: $(F_{1+2} - 1 = F_3 - 1 = 2 - 1 = 1)$.
  Hipótese de indução, suponha que a formula é verdadeira para $p(n)$.
  Passo indutivo, $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + ... + F_n + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$.
  - Fazendo o passo indutivo, fica, $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + ... + F_n + F_{n+1} = (F_{n+2} - 1) + (F_{n+1})$.
  - Com o próprio resultado $(F_{n+2} - 1) + (F_{n+1})$ podemos aplica a formula de Fibonacci, somando os dois antecessores: $(F_{n+2} - 1) + (F_{n+1}) = F_{n+3} - 1$
  - Então provamos que a formula $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$ é valida para 1, para n e para $n+1$.

Exemplo 5:
A soma dos **n** primeiros números: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

- **Prova, por indução:**
  Base de indução, para $n = 1$, temos: $(\frac{1}{1+1} = 0,5)$.
  Hipótese de indução, suponha que a formula é verdadeira para $p(n)$.
  Passo indutivo, $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.
  - Fazendo o passo indutivo, fica, $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
  - Colocando o $\frac{1}{n+1}$ em evidência, fica: $\frac{1}{n+1}\{\frac{n}{1} + \frac{1}{n+2}\}$
  - Fazendo o mínimo de $\{\frac{n}{1} + \frac{1}{n+2}\}$ fica: $\frac{1}{n+1}\{\frac{n(n+2)+1}{n+2}\}$
  - Tirando os parênteses: $\frac{1}{n+1}\{\frac{n^2+2n+1}{n+2}\}$
  - O resultado acima é um Trinômio do quadrado perfeito, resolvendo fica: $\frac{1}{n+1}\{\frac{(n+1)^2}{n+2}\}$
  - Retirando as chaves: $\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$, isso é a mesma coisa de $\frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$, cortando o $(n+1)$, fica: $\frac{n+1}{n+2}$
  - Então provamos que a formula $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ é valida para 1, para n e para $n+1$.

Exemplo 6:
Provar que $\mathbf{3^n - 1}$ é par para todo $n \in \mathbb{N}$.

- **Prova, por indução:**
  Base de indução, para $n = 0$, temos: $(3^0 - 1 = 0)$.
  Hipótese de indução, $3^n + 1 = 2k$, para um certo **n**.
  Passo indutivo, $3^{n+1} - 1$.
  - O valor anterior também pode ser escrito, como $3 \cdot 3^n - 1$, substituindo o 3^n, fica: $3(2k+1) - 1$.
  - Multiplicando, fica: $6k + 3 - 1 = 6k + 2$
  - $6k + 2 = 2(3k+1) = 2q$

Conjuntos

▼

- Um conjunto é uma lista de elementos que não se repetem.
- A ordem não importa: $\{1, 2, 3 = 2, 3, 1\}$.
- Os conjuntos são representados por chaves: $\{\}$.
- Um conjunto pode ter vários elementos de tipos diferentes: $\{1, "a", 1.4\}$.

▼ **Operações entre Conjuntos**

- $\in$ **Pertence:** $x \in A$, x só pertence a A, se x é elemento de A.
- $\notin$ **Não Pertence:** $x \notin A$, x não pertence a A, se x não for elemento de A.
- $\subset$ **Contido:** Um conjunto (A) só esta contido em um outro conjunto (B)se todos os elementos de (A) estive em(B). O contido só pode ser usado em relações de conjunto com conjunto.
- $\not\subset$ **Não Contido:** Um conjunto (A) não esta contido em um outro conjunto (B) se os elementos de (A) não estiverem em (B).
- $\cup$ **União:** União de dois conjuntos: $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 7, 9\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$.
- $\cap$ **Interseção:** Interseção de dois conjuntos,é quando um elemento pertence aos dois conjuntos: $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 7, 9\}$, $A \cap B = \{2\}$.
- **Obs:** A rigor, o certo é esse: $(A \cup B) \cup C$ ou $(A \cap B) \cap C$, mas se fizer desse modo $A \cup B \cup C$ ou $A \cap B \cap C$, da o mesmo resultado.
- $\#$ **Todos os elementos:** Quando esse símbolo vem antes de uma variável $\#A$, ele está se referindo a todos os elementos, se lé $\#A$ como "Todos os elementos de A".

  Exemplo: Contar o número de elementos de $\#(A \cup B \cup C)$
  * $\#A + \#B + \#C$, é a maneira de contar o número de elementos do enunciado.
  * Mais essa maneira tem um problema, ela conta os elementos que estão na $A \cap B$; $A \cap C$; $B \cap C$ duas vezes.
  * $\#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C)$, retirando os valores que foram contados duas vezes.
  * Mais os elementos que estavam na $A \cap B \cap C$ foram retirados.
  * $\#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$, colocando de volta os valores que estavam na $A \cap B \cap C$.

- Ω **Omega:** Usado para denotar um conjunto universo, isso vai depender do contexto, se estiver falando de números, o conjunto universo pode ser o os números reais, se estiver falando de alunos, o conjunto universo pode ser o conjunto de todos os alunos. $A = \{0, 2, 4, 6, ...\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, ...\}$, $A \cup B = \Omega$.
- **Obs:** Dizemos que $\{A, b\}$ são partições de Ω, se $A \cap B = \emptyset$.
- ^{c} **Complementar:** Dizemos que algo é complementa, representado pelo expoente ^{c}, se o valor pertence a Ω, então pertence ao A. O $(A^c)^c$ é mesmo que A. Ex: $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 4\}$, $Ac = \{2, 3\}$.
- $\varnothing$ **Vazio:** O conjunto vazio pode ser representado $\varnothing$ por ou $\{\}$. Atenção: Isso $\{\varnothing\}$ não é um conjunto vazio, isso é um conjunto cuja o único elemento é o vazio. O vazio esta contido em todos os conjuntos.
- **Leis de De Morgan:**

  1ª: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ Para provar isso, precisamos primeiro provar que $(A \cup B)^c$ esta contido em $A^c \cap B^c$ e depois, provar que $A^c \cap B^c$ esta contido em $(A \cup B)^c$.

$\mathbf{1)}\ (\mathbf{A}\cup\mathbf{B})^{\mathbf{c}} \quad \subset \quad \mathbf{A^c}\cap\mathbf{B^c}$	$\mathbf{2)}\ \mathbf{A^c}\cup\mathbf{B^c} \quad \subset \quad (A\cap B)^c$
Se $x \in (A\cup B)^c$ $x \notin A\cup B$. Então, $x \notin A \quad e \quad x \notin B$. Daí $x \in A^c \quad e \quad x \in B^c d$. Logo, $x \in A^c \cap B^c \quad e \quad (A\cup B)^c \subset A^c\cap B^c$	Se $x \in A^c \cap B^c$, então $x \in A^c \quad e \quad x \in B^c$. Logo, $x \notin A \quad e \quad x \notin B$. Certamente, $x \notin (A\cup B)$. Por fim, $x \in (A\cup B)^c \quad e \quad A^c\cap B^c \quad \subset \quad (A\cup B)^c$

2ª: $(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$

$\mathbf{1)}\ (\mathbf{A}\cap\mathbf{B})^{\mathbf{c}} \quad \subset \quad \mathbf{A^c}\cup\mathbf{B^c}$	$\mathbf{2)}\ \mathbf{A^c}\cup\mathbf{B^c} \quad \subset \quad (A\cap B)^c$
Se $x \in (A\cap B)^c$. Então $x \notin A\cap B$. Então $x \notin A$ ou $x \notin B$. Se $x \notin A$, então $x \in A^c \quad e \quad x \in A^c \cup B^c$. Se $x \notin B$, então $x \in B^c \quad e \quad x \in A^c\cup B^c$. Em todo caso, $x \in (A\cap B)^c \Rightarrow$ $x \in A^C \cup B^c$. Logo $(A\cap B)^c \quad \subset \quad A^c\cup B^c$	Se $x \in A^c \cup B^c$, ocorre $x \in A^c \quad ou \quad x \in B^c$. Se $x \in A^c, x \notin A$. Se $x \notin A$, $x \notin A\cap B$, logo $x \in (A\cap B)^c$ Se $x \in B^c$, então $x \notin B$ e $x \notin A\cap B$. Logo, $x \in (A\cap B)^c$. Em todo caso, $x \in A^c \cup B^c \Rightarrow x \in (A\cap B)^c$. Logo, $A^c\cup B^c \quad \subset \quad (A\cap B)^c$.

- **Propriedades distributiva:**

  $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$

  $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$

- **Princípio da Inclusão e Exclusão:**

  $\#(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n) \;=\; \#A_1+\ldots\#A_n - \#(A_1\cap A_2)-\cdots-\#(A_{n-1}\cap A_n)+\cdots+(-1)^{n+1}\#(A_1\cap A_2\cap A_n)$

Exemplo: $A=\{1,2,3\}\ B=\{\{1,2\}1,2,3\}\ C=\{1,2\}$

$*\ 1\in A$ (V)

$*\ 7\in A$ (F)

$*\ 4\notin A$ (V)

$*\ \{1,2\}\in B$ (V)

$*\ \{1,2\}\in A$ (F) O conjunto $\{1,2\}$ não é elemento de A.

$*\ A\subset B$ (V)

$*\ B\subset A$ (F)

$*\ C\subset B$ (F)

$*\ C\not\subset B$ (V)

$*\ A\subset A$ (V)

$*\ \#(A\cup C) \;=\; \#A+\#B$ (F) O $\#(A\cup C)=\{1,2,3\}=3$ e $\#A+\#B=\{1,2,3,1,2\}=5$

$*\ \#(A\cup C) \;=\; \#A+\#B-\#(A\cap B)$ (V)

Princípio fundamental da contagem

▼

- O princípio fundamental da contagem nos fornece o instrumento básico para a Análise Combinatória; entretanto, sua aplicação direta na resolução de problemas pode às vezes tornar-se trabalhosa.

- Iremos então definir os vários modos de formar agrupamentos e, usando símbolos simplificativos, deduzir fórmulas que permitam a contagem dos mesmos, em cada caso particular a ser estudado.

Arranjos com repetição

- Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Chamamos arranjo com repetição dos m elementos, tomados r a r, toda r-upla ordenada (sequência de tamanho r) formada com elementos de M não necessariamente distintos.
- Ou seja os valores podem se repeti.
- **Ex:** Uma urna contém uma bola vermelha (V), uma branca (B) e uma azul (A). Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. Em seguida outra bola é extraída e observada sua cor. Quantas são as possíveis sequências de cores observadas?

  Cada sequência é um par ordenado de cores (x, y) em que $x, y \in M = \{V, B, A\}$. Logo, pelo princípio fundamental da contagem, o número de pares é: $3 \cdot 3 = 9$
- **Formula:**

$$(AR)_{m,\,r} = \underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{r \text{ vezes}} = m^r$$

- **Obs:** Se $r = 1$, o $(AR)_{m,1}$ vai ser igual a m.

Arranjos

- Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Chamamos de arranjo dos m elementos tomados r a r $(1 \leqslant r \leqslant m)$ a qualquer r-upla (sequência de r elementos) formada com elementos de M, todos distintos.
- A diferença desse arranjo para o arranjo com repetição, é que esse arranjo os elementos não podem se repeti.
- **Ex:** O arranjo do conjunto $M = \{a, b, c, d\}$, tomados 2 a 2 é: $4 \cdot 3 = 12$.
- Formula:

$$A_{m,\,r} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)]}_{r \text{ fatores}}$$

  A fórmula do número de arranjos também pode ser simplificada com a notação fatorial.

$$A_{m,\,r} = \frac{m!}{(m-r)!}$$

- **Obs:** Se $r = 1$, o $A_{m,1}$ vai ser igual a m.

- **Ex_1:** De um baralho de 52 cartas, 3 cartas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas sequências de cartas é possível obter?

  Notemos que cada resultado é uma tripla ordenada de cartas (x, y, z). Observemos que x, y, z são todas distintas, visto que a extração é feita sem reposição.

  Logo, o número que queremos é $A_{52,3}$, isto é:

$$A_{52,3} = 52 \cdot 51 \cdot 50 = 132\,600$$

Permutações

- Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Chamamos de permutação dos m elementos a todo arranjo em que $r = m$.
- Ou seja, permutação é quando usamos todos os elementos de um conjunto.
- **Ex:** Quais são as permutações de $M = \{a, b, c\}$? São eles:

$$(a, b, c)(b, a, c)(c, a, b)(a, c, b)(b, c, a)(c, b, a)$$

- Formula:

$$\boxed{P_m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

  A fórmula do número de permutações também pode ser simplificada com a notação fatorial.

  $P_m = m!$

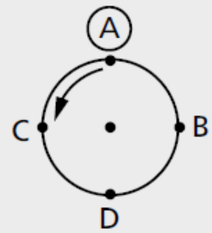
- **Obs:** Em particular, se $m = 1$, é fácil perceber que $P_1 = 1$.
- **Ex_1:** De quantas formas podem 5 pessoas ficar em fila indiana?

  Notemos que cada forma de ficar em fila indiana é uma permutação das 5 pessoas. 0 número de permutações será: $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

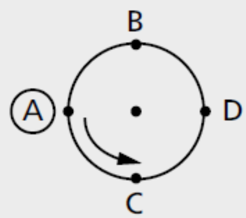
Permutação Circular:

- Quando elementos são dispostos ao redor de um círculo, a cada disposição possível chamamos permutação circular.
- Duas permutações circulares são consideradas idênticas, quando:

1) Tomando o elemento A, a sequência encontrada é (A,C, D, B).



2) Tomando o elemento A, a sequência encontrada é (A, C, D, B).



- Notemos que a cada permutação circular de A, B, C, D correspondem 4 permutações iguais de A, B, C, D.
- Logo cada sequência encontrada de um conjunto de elementos, vai existir n sequências iguais, onde n é o número de elementos do conjunto.
- A formula é:

$$\boxed{x = \frac{n!}{n} = (n-1)!}$$

- **Ex:** De quantas formas 12 crianças podem formar uma roda?

$$x = \frac{12!}{12} = (12-1)! = 11!$$

▼ **Permutações com Elementos Repetidos**

- Consideremos a palavra **ANA** e procuremos seus anagramas. Vamos indicar por **A*** o segundo **A**. Teremos, então:

ANA*, AA*N, NAA*, NA*A, A*NA, A*AN
(1) (2) (3) (4) (5) (6)

- Notemos que as permutações:

(1) e (5) são iguais;
(2) e (6) são iguais;
(3) e (4) são iguais.

- Na verdade, não temos $3! = 6$ permutações distintas, mas apenas 3, que são:

ANA, AAN, NAA.

- A formula para permutações circulares é:

$$\boxed{P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}}$$

- **Ex:** Quantos anagramas existem da palavra **ANALITICA**?

$$P_9^{3,2} = \frac{9!}{3!\,2!} = 30\,240$$

▼ Fatorial

- A fim de simplificar as fórmulas do número de arranjos e do número de permutações, bem como outras.
- Essa operação é bastante comum na análise combinatória, facilitando o cálculo de arranjos, permutações, combinações e demais problemas envolvendo contagem.
- O fatorial é representado pelo símbolo $!$. Definimos como $n!$ (n fatorial) a multiplicação de n por todos os seus antecessores até chegar em 1. $n! = n \cdot (n–1) \cdot (n–2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

– $0! = 1$
– **Ex 1:** Tenho 3 alunos (A, B, C), quantas filas diferentes eu posso organizar com 10 alunos: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
– **Ex 2:** Quantas permutações podemos fazer com o nome "CAIO": $4! = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 24$ ("CAIO", "COIA","CIOA",. . . , "OIAC").
– **Ex 3:** Quantas permutações podemos fazer com o nome "CASA": $4! = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 24$. É dividido por dois pois o A se repete duas vezes.
– **Ex 4:** Quantas permutações podemos fazer com o nome "PARAGUAIO": $\frac{9!}{3!}$. É dividido por $3!$ pois o A se repete três vezes.
– **Ex 5:** Quantas permutações podemos fazer com o nome "ARARA": $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$.

▼ Combinações

- A Combinação $(C_{n,p})$ é um tipo de agrupamento da análise combinatória que calcula quantos subconjunto de p elementos podemos formar partindo de um conjunto inicial com n elementos.

- **Exemplo:**

  Tomando o conjunto $M = \{a, b, c, d\}$. As combinações dos 4 elementos, tomados dois a dois, são os subconjuntos:

$$\{a, b\}\ \{b, c\}\ \{c, d\}$$
$$\{a, c\}\ \{b, d\}$$
$$\{a, d\}$$

- **Fórmula número de combinações:**

$$\boxed{C_{m,\,r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!\,(m-r)!}} \quad \forall m, r \in \mathbb{N}^*, r < m$$

- **Casos particulares:**

$$1^{\underline{o}} \text{ caso: } m, r \in \mathbb{N}^* \text{ e } r = m$$
$$\begin{cases} C_{m,\,m} = 1 \\ \dfrac{m!}{m!(m-m)!} = 1 \end{cases}$$

$$2^{\underline{o}} \text{ caso: } m \in \mathbb{N}^* \text{ e } r = 0$$
$$\begin{cases} C_{m,\,0} = 1 \text{ (o único subconjunto com 0 elemento é o vazio)} \\ \dfrac{m!}{0!\,(m-0)!} = 1 \end{cases}$$

$$3^{\underline{o}} \text{ caso: } m = 0 \text{ e } r = 0$$
$$\begin{cases} C_{0,\,0} = 1 \text{ (o único subconjunto do conjunto vazio é o próprio vazio)} \\ \dfrac{0!}{0!\,(0-0)!} = 1 \end{cases}$$

- **Exemplo 1:** Deseja-se formar uma comissão de três membros e dispõe-se de dez funcionários. Quantas comissões podem ser formadas?

$$\binom{10}{3} = C_{10,3} = \frac{10!}{3!\,7!} = 120$$

- **Exemplo 2:** Temos 7 cadeiras numeradas de 1 a 7 e desejamos escolher 4 lugares entre os existentes. De quantas formas isso pode ser feito?

  Cada escolha de 4 lugares corresponde a uma combinação dos 7 elementos, tomados 4 a 4, pois a ordem dos números escolhidos não interessa (escolher os lugares 1, 2, 4, 7 é o mesmo que escolher os lugares 7, 2, 4, 1).

$$C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,3!} = 35$$

- **Exemplo 3:** De quantas formas podemos escolher 4 cartas de um baralho de 52 cartas, sem levar em conta a ordem delas, de modo que em cada escolha haja pelo menos um rei?

  Solução

  Como não levamos em conta a ordem das cartas, cada escolha é uma combinação. O número total de combinações é $\binom{52}{4}$. O número de combinações em que não comparece o rei é $\binom{48}{4}$. Logo, a diferença $\binom{52}{4} - \binom{48}{4}$ é o número de combinações em que comparece ao menos um rei.

- **Exemplo 4:** Temos 10 homens e 10 mulheres. Quantas comissões de 5 pessoas podemos formar se em cada uma deve haver 3 homens e 2 mulheres?

  Solução

  Podemos escolher 3 homens entre 10 de $\binom{10}{3} = 120$ formas e podemos escolher 2 mulheres entre 10 de $\binom{10}{2} = 45$ formas.

  Cada grupo de 3 homens pode se juntar com um dos 45 grupos de mulheres, formando uma comissão. Como existem 120 grupos de homens, teremos ao todo $120 \cdot 45 = 5\,400$ comissões.

Sistema Traço Bola

- Quando temos uma equação linear $x + y = 7$, e queremos encontra os possíveis valores para x e y, que ao somá-los resultem no número 7. Por tentativas podemos encontrar os valores:

$$(0, 7); (1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1); (7, 0)$$

Ao todo temos 8 soluções inteiras não negativas.

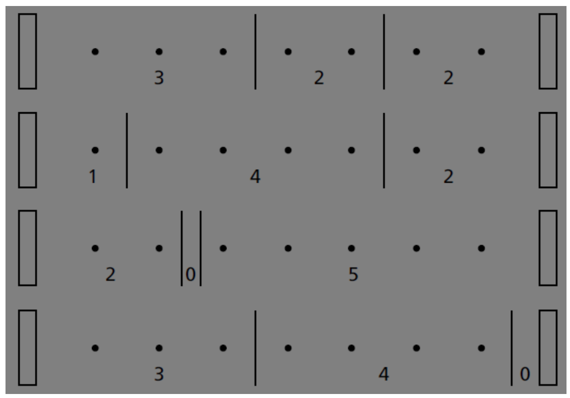
- Agora, se tivermos uma equação $x + y + z = 7$, resolvendo por tentativas, o trabalho será muito grande, e corremos o risco de "esquecer" alguma solução.

  Um raciocínio alternativo para esse problema seria o seguinte:

  Temos que dividir 7 unidades em 3 partes ordenadas, de modo que fique em cada parte um número maior ou igual a zero.

  Indiquemos cada unidade por um ponto. E 2 barras pois queremos dividir as 7 unidades em 3 partes.

  Cada modo de dispormos os pontos e as barras dará origem a uma solução. Por exemplo:



  Como temos 9 símbolos (7 bolas e 2 barras), o número de permutações desses símbolos será:

$$P_9^{7,\,2} = \frac{9!}{7!\,2!} = 36$$

  Logo o valor 36 é o número de soluções inteiras não negativas da equação $x + y + z = 7$.

▼ **Teorema**

O número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$:

$$\frac{(n + r - 1)!}{r!\,(n-1)!}$$

Ex1: Um bar vende 3 tipos de refrigerantes: guaraná, soda e tônica. De quantas formas uma pessoa pode comprar 5 garrafas de refrigerantes?

Seja:

x o número de garrafas de guaraná

y o número de garrafas de soda

z o número de garrafas de tônica

É claro que $x, y, z \in \mathbb{N}$ e $x + y + z = 5$.

Trata-se então de achar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x + y + z = 5$.

A solução é:

$$\frac{(5+3-1)!}{5!(3-1)!} = \frac{7!}{5!2!} = 21$$

Binômio de Newton

- Já nos são familiares os casos particulares:

$$\begin{aligned}(x + a)^0 &= 1 \\ (x + a)^1 &= x + a \\ (x + a)^2 &= x^2 + 2xa + a^2 \\ (x + a)^3 &= x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3\end{aligned}$$

- Para todo n inteiro, positivo, podemos calcular:

$$(x + a)^n = \underbrace{(x + a) \cdot (x + a) \cdot \ldots \cdot (x + a)}_{n \text{ fatores}}$$

- **Teorema binomial:**

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot a^1 + \ldots + \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot a^p + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^n$$

Obs: O teorema também é valido para $(x - a)^n$, pois basta escrevermos $(x - a)^n$ como $[x + (-a)]^n$ e aplicarmos o teorema.

$$(x-2y)^4 = [x+(-2y)]^4 =$$
$$= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3(-2y)^1 + \binom{4}{2}x^2(-2y)^2 + \binom{4}{3}x^1 \cdot (-2y)^3 + \binom{4}{4}(-2y)^4 =$$
$$= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$$

- **Exemplo:** Desenvolva $(3x^2 + a)^4$:

$$(3x^2 + a)^4 = \binom{4}{0} \cdot (3x^2)^4 + \binom{4}{1} \cdot (3x^2)^3 \cdot a^1 + \binom{4}{2} \cdot (3x^2)^2 \cdot a^2 + \binom{4}{3} \cdot (3x^2) \cdot a^3 +$$
$$+ \binom{4}{4} \cdot a^4$$

$$(3x^2 + a)^4 = 81x^8 + 108x^6a + 54x^4a^2 + 12x^2a^3 + a^4$$

- **Coeficientes Binomiais:**

Os números:

$$\binom{n}{0}; \binom{n}{1}; \binom{n}{2}; \ldots; \binom{n}{p}; \ldots; \binom{n}{n}$$

são chamados **coeficientes binomiais**. No coeficiente binomial $\binom{n}{p}$, n é chamado numerador e p, denominador.

- **Termo Geral:**

  - Já vimos que:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} \cdot a^1 + \ldots + \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot a^p + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^n,$$

  - O termo:

$$\binom{n}{p}x^{n-p}a^p$$

é chamado geral, pois fazendo $p = 0, 1, 2, \cdots, n$ obtemos todos os termos do desenvolvimento.

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p}\, b^p$$

- **Propriedades:**
  - Notemos ainda que, $\forall p$, a soma dos expoentes de x e a é sempre n.

    $$\binom{n}{p} x^{n-p} a^p$$

  - O expoente de x é igual à diferença entre o numerador e o denominador do coeficiente binomial correspondente $n-p$.
  - **Exemplos:** No desenvolvimento de $(x^2+1)^6$, qual o coeficiente de x^8?

    O termo geral do desenvolvimento é:

    $$\binom{6}{p} (x^2)^{6-p} \cdot 1^p = \binom{6}{p} x^{12-2p}$$

    Como queremos o termo que possua x^8, devemos impor que $12–2p = 8$, isto é, $p = 2$.

    Logo, o termo que possui x^8 é:

    $$\binom{6}{2} \cdot (x^2)^4 = \binom{6}{2} \cdot x^8$$

    Seu coeficiente é:

    $$\binom{6}{2} = 15$$

  - O **Termo independente** é o coeficiente de x, quando x tiver o expoente igual a 0.
  - **Exemplos:** Qual o termo independente de x no desenvolvimento de $(x - \frac{1}{x})^8$?

    O termo geral é:

    $$\binom{6}{2} x^{8-p} \left(\frac{-1}{x}\right)^p = \binom{8}{p} x^{8-p} \cdot (-1)^p \cdot x^{-p} = \binom{8}{p} (-1)^p\, x^{8-2p}$$

Para que ele independa de x, devemos ter $8 – 2p = 0$, isto é, $p = 4$.
Logo, o termo procurado é:

$$\binom{8}{4}(-1)^4 \cdot x^{8-2\cdot 4} = \binom{8}{4} = 70$$

- **Exemplos:** Desenvolvendo $(x + y)^{10}$ em potências de expoentes decrescentes de x. Qual é o 6º termo?

  Notemos que:

  $$\begin{array}{l} \text{o 1º termo conterá } x^{10} \\ \text{o 2º termo conterá } x^{9} \\ \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \\ \text{o 6º termo conterá } x^{5} \end{array}$$

  Portanto, o termo procurado é:

  $$\binom{10}{5} x^5 \cdot y^5 = 252\, x^5 y^5$$

  Um outro modo de encontrarmos o termo desejado seria notar que, desenvolvendo o binômio em potências de expoentes decrescentes de x, os coeficientes seriam:

  $$\begin{array}{ccccc} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots\cdots & \binom{n}{p} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \text{1º termo} & \text{2º termo} & \text{3º termo} & & (p+1) \text{ termo} \end{array}$$

- A somatória dos coeficientes pode ser representada por 2^n:

  $$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{i} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

- **Triângulo aritmético de Pascal:**

  É uma tabela onde podemos dispor ordenadamente os coeficientes binomiais: $\binom{n}{p}$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\binom{k}{0} & & \binom{k}{1} & & & & & & \binom{k}{k} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

Podemos também escrever o triângulo de Pascal substituindo cada coeficiente binomial pelo seu valor, isto é:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

Cada linha contém os coeficientes do desenvolvimento:

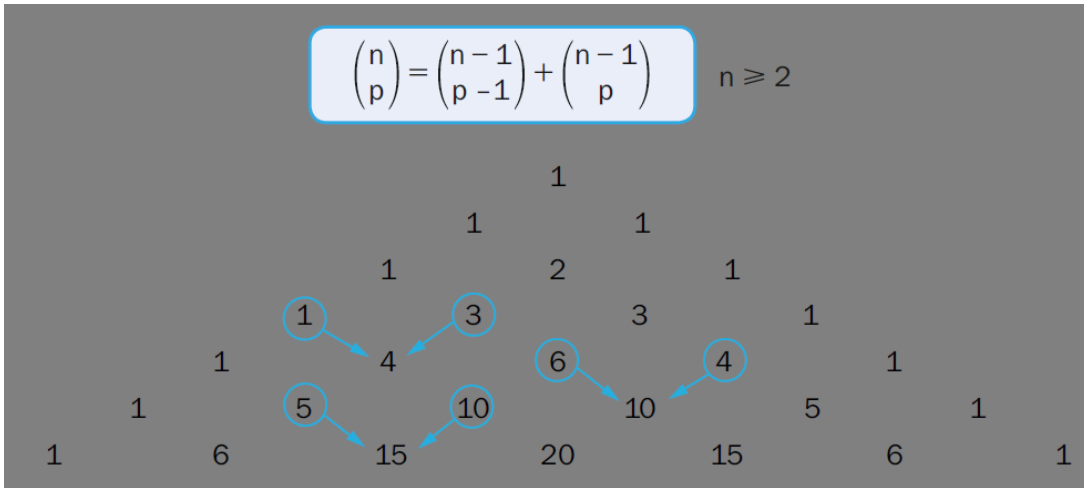
$$
\begin{array}{lcl}
\binom{0}{0} & \longrightarrow & (x+a)^0 \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} & \longrightarrow & (x+a)^1 \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} & \longrightarrow & (x+a)^2 \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} & \longrightarrow & (x+a)^3
\end{array}
$$

Obs: Na construção do triângulo de Pascal, não e necessária calcular os coeficientes binomiais um a um. Basta usarmos algumas de suas propriedades.

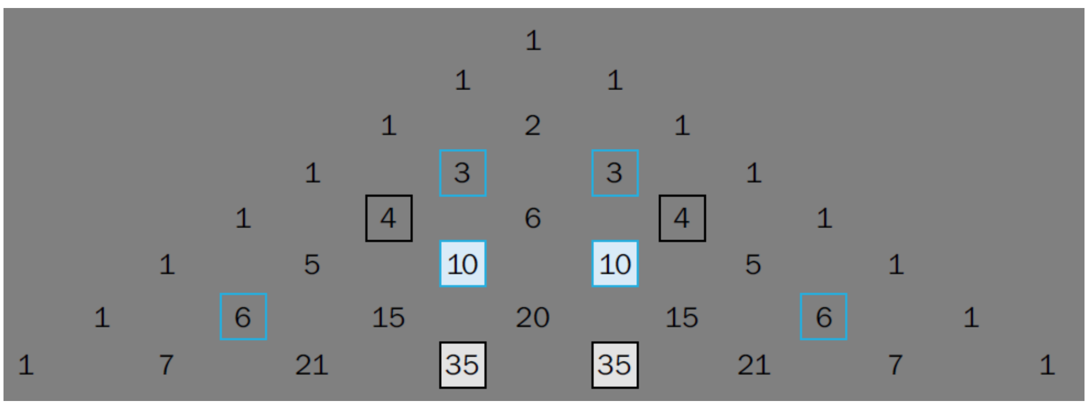
▼ **Propriedades:**

1. Em cada linha do triângulo, a primeiro elemento vale 1, pois, qualquer que seja a linha, o primeiro elemento é $\binom{n}{0} = 1$.
2. Em cada linha do triângulo, o último elemento vale 1, pois, qualquer que seja a linha, o último elemento é $\binom{n}{n} = 1$.
3. A partir da 3ª linha, cada elemento (com exceção do primeira e do último elemento) é a soma dos dois elementos da linha anterior, imediatamente acima dele.

Esta propriedade é conhecida como relação de Stifel e afirma que:



4. Numa linha, dois coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais. Isto equivale a demonstrar que: $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.



Probabilidade

Experimentos aleatórios

- Chamamos de experimentos aleatórios aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados que não podem ser previstos com certeza.
- Embora não saibamos qual o resultado que irá ocorrer num experimento, em geral conseguimos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis que podem ocorrer.
- As variações de resultados, de experimento para experimento, são devidas a uma multiplicidade de causas que não podemos controlar, as quais denominamos acaso.

Exemplos de experimentos aleatórios

a. Lançar uma moeda e observar a face de cima.

b. Lançar um dado e observar o número da face de cima.

c. Lançar duas moedas e observar as sequências de caras e coroas obtidas.

d. Lançar duas moedas e observar o número de caras obtidas.

e. De um lote de 80 peças boas e 20 defeituosas, selecionar 10 peças e observar o número de peças defeituosas.

f. De uma urna contendo 3 bolas vermelhas e 2 bolas brancas, selecionar uma bola e observar sua cor.

g. De um baralho de 52 cartas, selecionar uma carta e observar seu naipe.

h.

Espaço amostral

- Chamamos de espaço amostral, e indicamos por Ω, um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplo:

a. Lançar uma moeda e observar a face de cima.

$\Omega = \{K, C\}$

b. Lançar um dado e observar o número da face de cima.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c. De uma urna contendo 3 bolas vermelhas (V), 2 bolas brancas (B) e 5 bolas azuis (A), extrair uma bola e observar sua cor.

$\Omega = \{V, B, A\}$

d. Lançar uma moeda duas vezes e observar a sequência de caras e coroas.

$\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$

Evento

- Consideremos um experimento aleatório, cujo espaço amostral é Ω.
- Chamaremos de **evento** todo **subconjunto** de Ω.
- Em geral indicamos um evento por uma letra maiúscula do alfabeto: $A, B, C, \cdots, X, Y, Z$.
- Diremos que um evento A ocorre se, realizado o experimento, o resultado obtido for pertencente a A.
- Os eventos que possuem um único elemento $\#A = 1$ serão chamados **eventos elementares**.

Exemplo:

a. Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eis alguns eventos:

A: ocorrência de número ímpar. A = {1, 3, 5}.

B: ocorrência de número primo. B = {2, 3, 5}.

C: ocorrência de número menor que 4. C = {1, 2, 3}.

D: ocorrência de número menor que 7. D = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = Ω.

E: ocorrência de número maior ou igual a 7. E = $\varnothing$.

Combinações de eventos

- Se usarmos certas operações entre conjuntos (eventos), poderemos combinar conjuntos (eventos) para formar novos conjuntos (eventos).

União de dois eventos

Sejam A e B dois eventos; então $A \cup B$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrerem. Dizemos que $A \cup B$ é a união entre o vento A e o evento B.

Interseção de dois eventos

Sejam A e B dois eventos; então $A \cap B$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrerem simultaneamente. Dizemos que $A \cap B$ é a interseção entre o evento A e o evento B.

Em particular, se $A \cap B = \emptyset$, A e B são chamados mutuamente exclusivos.

Complementar de um evento

Seja A um evento; então A^C será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A não ocorrer.

Dizemos que A^C é o evento complementar de A.

Frequência relativa

- Num experimento aleatório, embora não saibamos qual o evento que irá ocorrer, sabemos que alguns eventos ocorrem frequentemente e outros, raramente.
- Desejamos, então, associar aos eventos números que nos deem uma indicação quantitativa da sua ocorrência, quando o experimento é repetido muitas vezes, nas mesmas condições.
- Para isso, vamos definir frequência relativa de um evento.
- Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral Ω, finito, isto é, $\Omega = \{a1, a2, \cdots, ak\}$. Suponhamos que o experimento seja repetido N vezes, nas mesmas condições. Seja n_i o número de vezes que ocorre o evento elementar a_i. Definimos frequência relativa do evento $\{a_i\}$ como sendo o número f_i, tal que:

$$f_i = \frac{n_i}{N} \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$$

Por exemplo, se lançarmos um dado 100 vezes ($N = 100$) e observarmos o número 2 (evento 2) 18 vezes, então a frequência relativa desse evento elementar será:

$$f_2 = \frac{18}{100} = 0{,}18$$

Propriedades:

a. $0 \leqslant fi \leqslant 1, \forall i$, pois $0 \leqslant \frac{n_i}{N} \leqslant 1$.

b. $f_1 + f_2 + ... + f_k = 1$, pois

$$\frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + ... + \frac{n_k}{N} = \frac{n_1 + n_2 + ... + n_k}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

c. Se A é um evento de Ω ($A \neq \emptyset$), a frequência relativa do evento A (f_A) é o número de vezes que ocorre A, dividido por N. É claro que:

$$f_A = \sum_{a_i \in A} \frac{n_i}{N} = \sum_{a_i \in A} f_i.$$

Por exemplo, se $A = \{a1, a3, a5\}$, então:

$$f_A = \frac{n_1 + n_3 + n_5}{N} = f_1 + f_3 + f_5$$

Definição de probabilidade

- Já vimos que a frequência relativa nos dá uma informação quantitativa da ocorrência de um evento, quando o experimento é realizado um grande número de vezes.
- O que iremos fazer é definir um número associado a cada evento, de modo que ele tenha as mesmas características da frequência relativa.
- É claro que desejamos que a frequência relativa do evento esteja "próxima" desse número, quando o experimento é repetido muitas vezes. A esse número daremos o nome de **probabilidade do evento considerado**.
- Consideremos então um espaço amostral finito $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. A cada evento elementar $\{a_i\}$ vamos associar um número real, indicado por $p(\{a_i\})$ ou p_i, chamado probabilidade do evento $\{a_i\}$, satisfazendo as seguintes condições:

$$(1)\ \ 0 \leqslant p_i \leqslant 1 \quad \forall i \in \{1, 2, ..., k\}$$

$$(2)\ \ \sum_{i=1}^{k} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$$

Dizemos que os números $p_1, p_2, ..., p_k$ definem uma **distribuição de probabilidades** sobre Ω.

Em seguida, seja A um evento qualquer de Ω. Definimos **probabilidade do evento** A (e indicamos por $P(A)$) da seguinte forma:

$$\text{a)} \quad \text{Se } A = \varnothing,\ P(A) = 0$$

$$\text{b)} \quad \text{Se } A \neq \varnothing,\ P(A) = \sum_{a_i \in A} p_i$$

Isto é, a probabilidade de um evento constituído por um certo número de elementos é a soma das probabilidades dos resultados individuais que constituem o evento A.

- **Ex:** Dado um conjunto $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Considerando a distribuição de probabilidades:

$$p_1 = 0{,}1 \qquad p_2 = 0{,}3 \qquad p_3 = 0{,}2 \qquad p_4 = 0{,}4$$

Seja o evento $A = \{a_1, a_2, a_4\}$ então, por definição:

$$P(A) = p_1 + p_2 + p_4 = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}8$$

▼ **Teorema**

- **Teorema 1**

  "A probabilidade do evento certo é 1"

- **Teorema 2**

  “Se $A \subset B$, então $P(A) \leqslant P(B)$.”

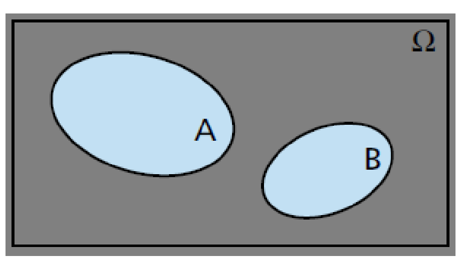
- **Teorema 3**

  “Se A é um evento, então $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.”

- **Teorema 4**

  "Se A e B são eventos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$.”

  Obs: Em particular, se A e B são mutuamente exclusivos $(A \cap B = \emptyset)$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(\emptyset) = P(A) + P(B)$.



O resultado acima pode ser generalizado para n eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ mutuamente exclusivos dois a dois, da seguinte forma: $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$

- **Teorema 5**

  “Se A é um evento, então $P(A^C) = 1 – P(A)$.”

- **Ex:** Uma urna contém 100 bolinhas numeradas, de 1 a 100. Uma bolinha é escolhida e observado seu número. Admitindo probabilidades iguais a $\frac{1}{100}$ para todos os eventos elementares, qual a probabilidade de:

  a. Observarmos um múltiplo de 6 e de 8 simultaneamente?

     Um múltiplo de 6 e 8 simultaneamente terá que ser múltiplo de 24; portanto, o evento que nos interessa é: $A = \{24, 48, 72, 96\}$.

     $P(A) = \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

  b. Observarmos um múltiplo de 6 ou de 8?

     Sejam os eventos:

     B: o número é múltiplo de 6. C: o número é múltiplo de 8.

     O evento que nos interessa é $B \cup C$, então:

     $B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\}$

     $$P(B) = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}.$$

     $C = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96\}$

     $$P(C) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}.$$

     Portanto: $P(B \cup C) = P(B) + P(C) – P(B \cap C)$.

     Segue-se então que:

     $$P(B \cup C) = \frac{4}{25} + \frac{3}{25} - \frac{1}{25} = \frac{6}{25}.$$

  c. Observarmos um número não múltiplo de 5?

     Seja D o evento, o número é múltiplo de 5.

     D = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100}

$$P(D) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

O evento que nos interessa é D^C. Logo, $P(D^C) = 1 - P(D) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

▼ Espaços amostrais equiprováveis

- Seja $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Diremos que uma distribuição de probabilidades sobre Ω é **equiprovável**, se $p_1 = p_2 = ... = p_k$, isto é, se todos os eventos elementares de Ω tiverem a mesma probabilidade. Em geral, as características do experimento é que nos levam a supor uma distribuição equiprovável.
- **Probabilidade de um evento num espaço equiprovável**

  Seja $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ é uma distribuição equiprovável $p_i = \frac{1}{K}, \forall i \in \{1, 2, ..., K\}$.
  Seja A um evento, tal que:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$$

$$P(A) = p_1 + p_2 + ... + p_r = \underbrace{\frac{1}{K} + \frac{1}{K} + ... + \frac{1}{K}}_{r \text{ vezes}}$$

$P(A) = \frac{r}{K}$, isto é, num espaço Ω, com distribuição equiprovável

$$\boxed{P(A) = \frac{r}{K} = \frac{\#A}{\#\Omega}}$$

Obs: Dado um conjunto com N elementos, escolher ao acaso n elementos desse conjunto significa que cada subconjunto (ordenado ou não) de n elementos tem a mesma probabilidade de ser escolhido.

▼ **Ex:** De um baralho de 52 cartas, duas são extraídas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de ambas serem de copas?

Cada par de cartas possíveis de serem extraídas pode ser considerado como uma combinação das 52 cartas tomadas duas a duas. Isto é,

$$\Omega = \{(2_c, 2_e), (2_c, 2_p), ..., (5_c, 7_e), ..., (A_e, A_p)\}$$

e nesse caso $\#\Omega = \binom{52}{2} = \frac{52 \cdot 51}{2} = 1326$

A é o evento (subconjunto) formado pelas combinações de cartas de copas, isto é:

$$A = \{(2_c, 3_c), (2_c, 4_c), ..., (K_c, A_c)\}$$

e nesse caso $\#A = \binom{13}{2} = \frac{13 \cdot 12}{2} = 72$

Logo, $P(A) = \frac{78}{1326} = \frac{39}{663} = \frac{1}{17}$.

▼ Probabilidade condicional

- Seja Ω um espaço amostral e consideremos dois eventos, A e B. Com o símbolo $P(A|B)$ indicamos a probabilidade do evento A, dado que o evento B ocorreu, isto é, $P(A|B)$ é a probabilidade condicional do evento A, uma vez que B tenha ocorrido.
- Quando calculamos $P(A|B)$, tudo se passa como se B fosse o novo espaço amostral “reduzido” dentro do qual queremos calcular a probabilidade de A.

▼ Exemplo:

Consideremos o lançamento de um dado e observando a face de cima.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sejam os eventos:

A: Ocorre um número ímpar

B: ocorre um número maior ou igual a 2

$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(A|B)$ será então a probabilidade de ocorrer número ímpar no novo espaço amostral reduzido.

$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Atribuindo $\frac{1}{5}$ para a probabilidade de cada evento elementar de B, a probabilidade de ocorrer o evento A (número ímpar) no espaço amostral de B será $\{3, 5\}$ e portanto:

$$P(A \mid B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \quad P(B) > 0$$

- A formula acima de probabilidade condicional pode ser simplificada para:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}}$$

▼ Exemplo:

Um dado é lançado e o número da face de cima é observado. Se o resultado obtido for par, qual a probabilidade de ele ser maior ou igual a 5?

Resolução:

$B =$"O valor é par"$= \{2, 4, 6\}$

$A =$"Maior ou igual a 5"$= \{5, 6\}$

$$P(A|B) = \frac{\frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

▼ Teorema da multiplicação

Uma consequência importante da definição formal de probabilidade condicional é a seguinte:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)}$$

Isto é, a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos $(P(A \cap B))$ é o produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, dado o primeiro.

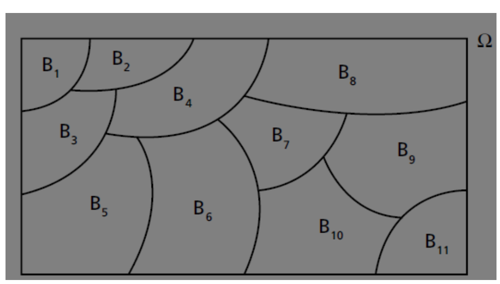
Chegamos a essa conclusão passando o $P(A)$ ou $P(B)$ para o outro lado da igualdade multiplicando.

▼ Teorema da probabilidade total

- Inicialmente, consideremos n eventos $B_1, B_2, ..., B_n$. Diremos que eles formam uma partição do espaço amostral Ω, quando:

$$\begin{aligned} &(1) \quad P(B_k) > 0 \quad \forall k \\ &(2) \quad B_i \cap B_j = \varnothing \text{ para } i \neq j \\ &(3) \quad \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega \end{aligned}$$

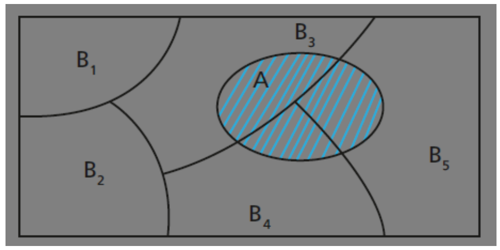
- Isto é, os eventos $B_1, B_2, ..., B_n$ são dois a dois mutuamente exclusivos e exaustivos (sua união é Ω).
- Ilustração para n = 11:



- Seja Ω um espaço amostral, A um evento qualquer de Ω e $B_1, B_2, ..., B_n$ uma partição de Ω.
- É válida a seguinte relação:

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A) \cup \ldots \cup (B_n \cap A)$$

- A figura abaixo ilustra o fato para $n = 5$.



Nesse caso:

$$A = \underbrace{(B_1 \cap A)}_{\varnothing} \cup \underbrace{(B_2 \cap A)}_{\varnothing} \cup (B_3 \cap A) \cup (B_4 \cap A) \cup (B_5 \cap A)$$

Notemos que $(B_1 \cap A)$; $(B_2 \cap A)$; $\cdots$; $(B_n \cap A)$ são dois a dois mutuamente exclusivos, portanto:

$$\boxed{P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \ldots + P(B_n \cap A).}$$

Este resultado é conhecido como **teorema da probabilidade total**. Ele é utilizado quando $P(A)$ é difícil de ser calculada diretamente, porém simples se for usada a relação acima.

▼ **Exemplo:**

Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lance, o juiz retira, ao acaso, um cartão do bolso e o mostra a um jogador. Determine a probabilidade de a face que o juiz vê ser vermelha e de a outra face, mostrada ao jogador, ser amarela.

Resolução:

Vamos considerar os seguintes eventos: A_1 para quando o cartão escolhido foi o todo amarelo, A_2 quando o cartão for todo vermelho e A_3 quando o cartão tiver um lado amarelo e o outro lado vermelho.

E vamos chamar de evento B quando o juiz vê a face vermelha do cartão e o jogador ver a face amarela.

O que queremos saber é a $P(B)$.

Vamos usar o **teorema da probabilidade total** para calcular a $P(B)$, pois calcular a $P(B)$ sem esse teorema é muito difícil.

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$$

Como a $P(B \cap A_1)$ e $P(B \cap A_2)$ são iguais a 0, só vai resta o $P(B \cap A_3)$.

$$P(B) = P(B \cap A_3)$$

Agora vamos usar o teorema da multiplicação:

$$P(B) = P(B|A_3) \cdot P(A_3)$$

Logo temos:

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

▼ **Exemplo:**

Uma urna I tem 3 bolas vermelhas e 4 pretas. Outra urna II tem 6 bolas vermelhas e 2 pretas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela é escolhida uma bola também ao acaso. Qual a probabilidade de observarmos:

a. urna I e bola vermelha?

$$P(V \cap A_1) = P(V|A_1) \cdot P(A_1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{14}$$

b. urna II e bola preta?

$$P(P \cap A_2) = P(P|A_2) \cdot P(A_2) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

▼ **Exemplo:**

Uma urna I tem 3 bolas vermelhas e 4 brancas, a urna II tem 6 bolas vermelhas e 2 brancas. Uma urna é escolhida ao acaso e nela é escolhida uma bola, também ao acaso.

a. Qual a probabilidade de observarmos urna I e bola vermelha?

$$\text{a)} \quad P(U_I \cap V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$$

b. Qual a probabilidade de observarmos bola vermelha?

$$\text{b)} \quad P(V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8} = \frac{33}{56}$$

c. Se a bola observada foi vermelha, qual a probabilidade que tenha vindo da urna I?

Estamos interessados em $P(U_I|V)$. Por definição

$$P(U_I|V) = \frac{P(U_I \cap V)}{P(V)}.$$

Usando os resultados dos itens a e b,

$$P(U_I | V) = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{33}{56}} = \frac{4}{11}.$$

▼ **Independência de dois eventos**

- Dois eventos A e B de um espaço amostral Ω, são chamados **independentes** se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- Explicação:
  - Se $P(A|B) = P(A)$, isto é, A **independe** de B se a ocorrência de B não afeta a probabilidade de A.
  - Observemos que, se A **independe** de B ($P(A) > 0$), então B **independe** de A, pois:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B)$$

Na terceira igualdade temos $P(B) \cdot P(A|B)$, esse valor é devido ao **Teorema da multiplicação** $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$.

Na quarta igualdade temos $P(A)$ no lugar de $P(A|B)$, pois um pouco mais acima temos a definição $P(A|B) = P(A)$.

Agora é só cotar o $P(A)$ com o $P(A)$, restando agora só o $P(B)$.

  - Em resumo, se A **independe** de B, então B **independe** de A e além disso:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot \underbrace{P(B \mid A)}_{P(B)} = P(A) \cdot P(B)$$

▼ **Exemplo:**

Uma moeda é lançada 3 vezes. Sejam os eventos:

A: ocorrem pelo menos duas caras.

B: ocorrem resultados iguais nos três lançamentos.

Temos:

$$\Omega = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (K, C, C), (C, K, K), (C, K, C), (C, C, K), (C, C, C)\}$$

$$A = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (C, K, K)\}, P(A) = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(K, K, K), (C, C, C)\}, P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$A \cap B = \{(K, K, K)\}, P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

$$\text{Logo, } \underset{\frac{1}{8}}{\underset{\uparrow}{P(A \cap B)}} = \underset{\frac{1}{2}}{\underset{\uparrow}{P(A)}} \cdot \underset{\frac{1}{4}}{\underset{\uparrow}{P(B)}}$$

Portanto A e B são independentes.

- **Obs:** Se A e B não são independentes, eles são chamados **dependentes**.
- **Obs:** Prova-se que, se A e B são independentes, então:

A e B^C são independentes.
A^C e B são independentes.
A^C e B^C são independentes.

▼ **Exemplo:**

Duas pessoas praticam tiro ao alvo. A probabilidade de a 1ª atingir o alvo é $P(A) = \frac{1}{3}$ e a probabilidade de a 2ª atingir o alvo é $P(B) = \frac{2}{3}$.

Admitindo A e B independentes, se os dois atiram, qual a probabilidade de:

a. ambos atingirem o alvo?

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

b. ao menos um atingir o alvo?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

▼ **Independência de três ou mais eventos**

- Consideremos 3 eventos A, B e C do mesmo espaço amostral Ω. Diremos que A, B e C são independentes, se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

- Generalizando, diremos que n eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ são independentes se:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad \forall i, j \quad i \neq j$$
$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k) \; \forall i, j, k, i \neq j, i \neq k, j \neq k$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

▼ **Exemplo:**

A probabilidade de que um aluno A resolva certo problema é $P(A) = \frac{1}{2}$, a de que outro aluno B o resolva é $P(B) = \frac{1}{3}$ e a de que um terceiro aluno C o resolva é $P(C) = \frac{1}{4}$. Qual a probabilidade de que:

a. os três resolvam o problema?

Assumindo que A, B e C são eventos independentes, temos:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

b. ao menos um resolva o problema?

Queremos calcular $P(A \cup B \cup C)$. Temos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) – P(A \cap B) – P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

▼ **Lei binomial da probabilidade**

▼ **Jacques Bernoulli**

Consideremos um experimento que consiste em uma sequência de ensaios ou tentativas independentes, isto é, ensaios nos quais a probabilidade de um resultado em cada ensaio não depende dos resultados ocorridos nos ensaios anteriores, nem dos resultados nos ensaios posteriores. Em cada ensaio, podem ocorrer apenas dois resultados, um deles que chamaremos de sucesso (S) e outro que chamaremos de fracasso (F). A probabilidade de ocorrer sucesso em cada ensaio é sempre p, e consequentemente, a de fracasso é $q = 1 – p$. Tal tipo de experimento recebe o nome de ensaio de Bernoulli (pois os primeiros estudos a esse respeito devem-se a Jacques Bernoulli, matemático do século XVII).

▼ **Exemplos de ensaio de Bernoulli**

1. Uma moeda é lançada 5 vezes. Cada lançamento é um ensaio, em que dois resultados podem ocorrer: cara ou coroa. Chamemos de sucesso o resultado cara e de fracasso o resultado coroa. Em cada ensaio, $p = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$.
2. Uma urna contém 4 bolas vermelhas e 6 brancas. Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna; este procedimento é repetido 8 vezes. Cada extração é um ensaio, em que dois resultados podem ocorrer: bola vermelha ou bola branca. Chamemos de sucesso o resultado bola vermelha e fracasso o resultado bola branca. Em cada caso, $p = \frac{4}{10}$ e $q = \frac{6}{10}$.

Distribuição binomial

- Consideremos então uma sequência de n ensaios de Bernoulli.
- Seja p a probabilidade de sucesso em cada ensaio e q a probabilidade de fracasso.
- Queremos calcular a **probabilidade** P_k, **da ocorrência de exatamente** K **sucessos**, **nos** n **ensaios**. É evidente que $K \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.
- Sejam os eventos:

A_i : ocorre sucesso no i-ésimo ensaio, $P(A_i) = p$.
A_i^C: ocorre fracasso no i-ésimo ensaio, $P(A_i^C) = q$.

- O evento "ocorrem exatamente K sucessos nos n ensaios" é formado por todas as ênuplas ordenadas em que existem K sucessos (S) e $n–K$ fracassos (F). O número de ênuplas ordenadas nessas condições é:

$$P_n^{K,\, n-K} = \frac{n!}{K!\,(n-K)!} = \binom{n}{K}$$

- A probabilidade de cada ênupla ordenada de K sucessos (S) e ($n–K$) fracassos (F) é dada por:

$$\underbrace{p \cdot p \cdot ... \cdot p}_{K \text{ vezes}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot ... \cdot q}_{(n-K) \text{ vezes}} = p^K \cdot q^{n-K}$$

- Logo, se cada ênupla ordenada com exatamente K sucessos tem probabilidade $p^K \cdot q^{n-K}$ e existem $\binom{n}{K}$ ênuplas desse tipo, a probabilidade P_k de exatamente K sucessos nos n ensaios será:

$$\boxed{P_K = \binom{n}{K} \cdot p^K \cdot q^{n-K}}$$

Exemplo:

Uma urna tem 4 bolas vermelhas (V) e 6 brancas (B). Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. O experimento é repetido 5 vezes. Qual a probabilidade de observarmos exatamente 3 vezes bola vermelha?

Em cada ensaio, consideremos como sucesso o resultado "bola vermelha", e
fracasso "bola branca". Então:

$$P = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$
$$q = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$
$$n = 5$$

Estamos interessados na probabilidade P_3. Temos:

$$P_3 = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{8}{125} \cdot \frac{9}{25} = \frac{720}{3\,125}$$