RESOLUÇÃO LISTA INTEGRAIS DUPLAS

01 Em cada caso, calcule a Integral Iterada dada:

a) $\int_1^2\int_0^{2x} xy^3\,dy\,dx$;

Solução:

$$\int_1^2\int_0^{2x} xy^3\,dy\,dx = \int_1^2 x\int_0^{2x} y^3\,dy\,dx = \int_1^2 x\cdot\frac{y^4}{4}\Big|_0^{2x}dx = \frac{1}{4}\int_1^2 x\left((2x)^4-0^4\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^2 x\cdot 16x^4\,dx = 4\int_1^2 x^5\,dx = \frac{4}{6}x^6\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(2^6-1) = \frac{2}{3}\cdot 63 =$$

$$= 42;$$

b) $\int_0^4\int_0^y dx\,dy$;

Solução: $\int_0^4\int_0^y dx\,dy = \int_0^4\int_0^y 1\,dx\,dy = \int_0^4 x\Big|_0^y dy = \int_0^4 y\,dy = \frac{1}{2}y^2\Big|_0^4 = 8$;

c) $\int_0^1\int_0^y \sqrt{9+y^2}\,dx\,dy$;

Solução:

$$\int_0^1\int_0^y \sqrt{9+y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \sqrt{9+y^2}\int_0^y 1\,dx\,dy = \int_0^1 \sqrt{9+y^2}\,x\Big|_0^y dy =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{9+y^2}\cdot y\,dy = \int_0^1 (9+y^2)^{1/2}\cdot\frac{2y}{2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (9+y^2)^{1/2}\cdot 2y\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(9+y^2)^{3/2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[10^{3/2}-9^{3/2}\right] = \frac{1}{3}\left[10\sqrt{10}-27\right];$$

(d) $\int_0^1 \int_0^x y\sqrt{x^2-y^2}\,dy\,dx$;

Solução: $\int_0^1 \int_0^x y\sqrt{x^2-y^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^x y(x^2-y^2)^{1/2}\,dy\,dx = \int_0 \int_0 (x^2-y^2)^{1/2}\cdot\frac{(-2y)}{(-2)}\,dy\,dx =$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2}{3}(x^2-y^2)^{3/2}\Big|_0^x dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^1 \left[(x^2-x^2)^{3/2}-(x^2-0^2)^{3/2}\right]dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^1 \left[0-x^3\right]dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{12}x^4\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{12}(1-0) = \frac{1}{12};$$

(e) $\int_0^\pi \int_0^{\operatorname{sen} x} y\,dy\,dx$;

Solução: $\int_0^\pi \int_0^{\operatorname{sen} x} y\,dy\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}y^2\Big|_0^{\operatorname{sen} x} dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{4}\left[\int_0^\pi 1\,dx - \int_0^\pi \cos 2x\cdot\frac{2dx}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[x\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\Big|_0^\pi\right] = \frac{1}{4}\left[\pi - \frac{1}{2}(0-0)\right] = \frac{\pi}{4};$$

(f) $\int_0^1 \int_0^{y^2} \cos(y^3)\,dx\,dy$;

Solução: $\int_0^1 \int_0^{y^2} \cos(y^3)\,dx\,dy = \int_0^1 \cos(y^3)\int_0^{y^2} 1\,dx\,dy = \int_0^1 \cos(y^3)\,x\Big|_0^{y^2} dy =$

$$= \int_0^1 \cos(y^3).y^2\,dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \cos(y^3)(3y^2dy) =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{sen}(y^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 1;$$

(g) $\int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} e^{y/\sqrt{x}}\, dy\, dx$;

Solução:

$$\int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} e^{y/\sqrt{x}}\, dy\, dx = \int_1^4 \sqrt{x} \int_0^{\sqrt{x}} e^{y/\sqrt{x}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{x}}\, dx = \int_1^4 \sqrt{x} \cdot e^{y/\sqrt{x}} \Big|_0^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_1^4 \sqrt{x} \cdot \left(e^{\sqrt{x}/\sqrt{x}} - e^0\right) dx = \int_1^4 \sqrt{x}\,(e-1)\, dx =$$

$$= (e-1) \int_1^4 x^{1/2}\, dx = (e-1) \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_1^4 = \frac{2(e-1)}{3}\left[8-1\right] =$$

$$= \frac{14}{3}(e-1);$$

(h) $\int_0^1 \int_0^{y^2} y^3 e^{xy}\, dx\, dy$;

Solução: $$\int_0^1 \int_0^{y^2} y^3 e^{xy}\, dx\, dy = \int_0^1 y^2 \int_0^{y^2} e^{xy} (y\, dx)\, dy = \int_0^1 y^2 e^{xy} \Big|_0^{y^2} dy =$$

$$= \int_0^1 y^2 \left(e^{y^3} - e^0\right) dy = \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy - \int_0^1 y^2\, dy =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 e^{y^3} (3y^2)\, dy - \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} e^{y^3} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(e-1) - \frac{1}{3} = \frac{(e-2)}{3};$$

(02) Em cada caso, esboce a região de integração R delimitada pelas retas e/ou curvas dadas, para em seguida escrever $\iint_R F(x,y)\,dA$ nas duas ordens: $dxdy$ e $dydx$;

Então, fazendo uso do Teorema de Fubini (1879 - 1943), escolha uma ordem e calcule a integral dupla iterada:

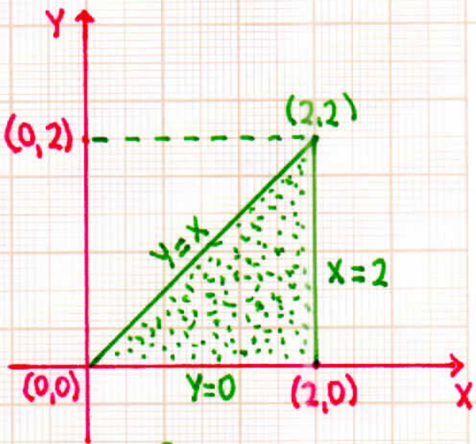
(a) $F(x,y) = x^2y$; R é a região delimitada por: $y=0$; $x=2$; e $y=x$;

Solução:

$$I_1 = \int_0^2 \int_0^x x^2y\,dy\,dx;$$

$$\Rightarrow I_1 = I_2;$$

$$I_2 = \int_0^2 \int_y^2 x^2y\,dx\,dy;$$



$$I_1 = \int_0^2\int_0^x x^2y\,dy\,dx = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^x dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^4\,dx = \frac{1}{10}x^5\Big|_0^2 = \frac{32}{10} = \frac{16}{5};$$

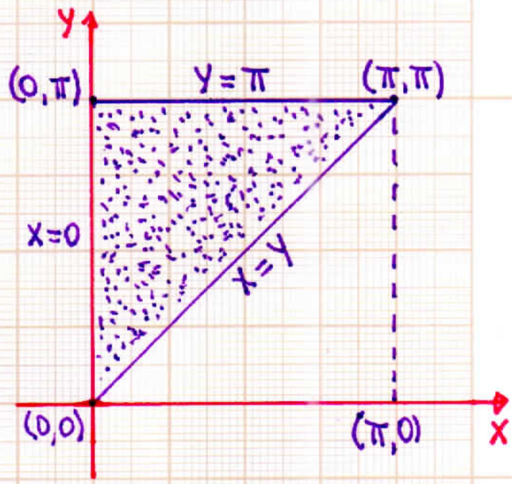
(b) $F(x,y) = x\cos y$; R é a região delimitada por $x=0$; $y=\pi$; e $x=y$;

Solução:

$$I_1 = \int_0^\pi \int_x^\pi x\cos y\,dy\,dx;$$

$$\Rightarrow I_1 = I_2;$$

$$I_2 = \int_0^\pi \int_0^y x\cos y\,dx\,dy;$$



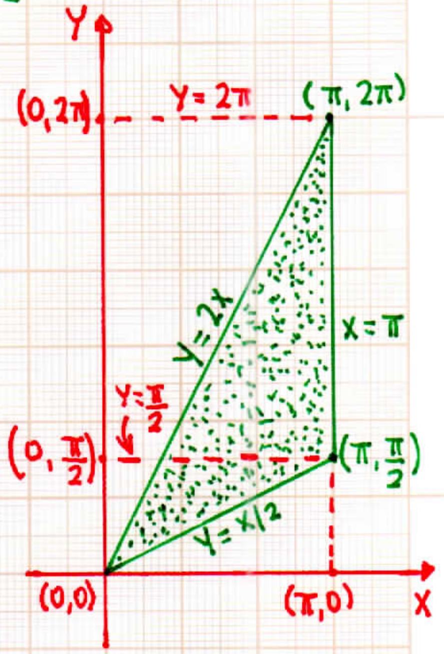
$$I_1 = \int_0^\pi x\int_x^\pi \cos y\,dy\,dx = \int_0^\pi x\,\mathrm{sen}\,y\Big|_x^\pi dx;$$

$$I_1 = \int_0^\pi x(\mathrm{sen}\,\pi - \mathrm{sen}\,x)\,dx = -\int_0^\pi x\,\mathrm{sen}\,x\,dx = -\left[-x\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi(-\cos x)\,dx\right]$$

$$= x\cos x\Big|_0^\pi - \mathrm{sen}\,x\Big|_0^\pi = (-\pi - 0) - (0 - 0) = -\pi;$$

$$\boxed{\begin{matrix} u = x;\ dv = \mathrm{sen}\,x\,dx; \\ du = dx;\ v = -\cos x; \end{matrix}}$$

ⓒ $F(x,y) = \operatorname{sen} x$; R é a região delimita por: $y = \frac{x}{2}$; $y = 2x$; e $x = \pi$;



Solução:

$$I_1 = \int_0^{\pi}\int_{x/2}^{2x} \operatorname{sen} x \, dy\, dx;$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2}\int_{y/2}^{2y} \operatorname{sen} x \, dx\, dy + \int_{\pi/2}^{2\pi}\int_{y/2}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx\, dy;$$

$$I_1 = I_2;$$

$$I_1 = \int_0^{\pi}\int_{x/2}^{2x} \operatorname{sen} x \, dy\, dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x . y\Big/_{x/2}^{2x} dx;$$

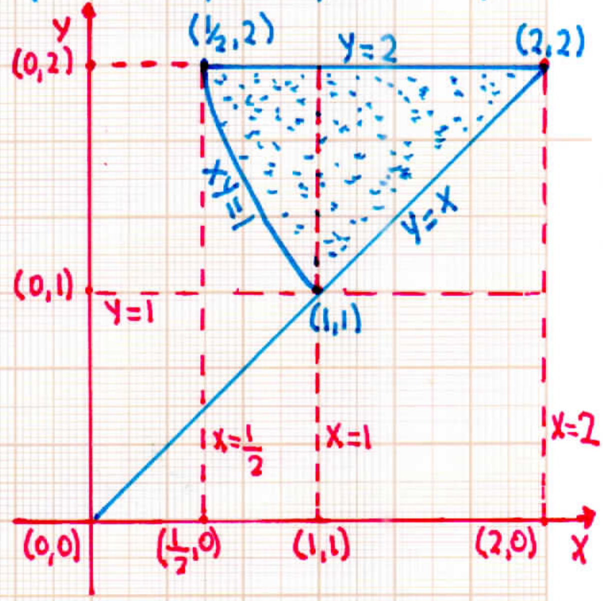
$$I_1 = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x . \left(2x - \frac{x}{2}\right) dx = \frac{3}{2}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx;$$

$u = x$; $dv = \operatorname{sen} x\, dx$;
$du = dx$; $v = -\cos x$;

$$I_1 = \frac{3}{2}\left[-x\cos x\Big/_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx\right];$$

$$I_1 = \frac{3}{2}\left[(-\pi\cos\pi - 0) + \operatorname{sen} x\Big/_0^{\pi}\right] = \frac{3}{2}\left[\pi + (0-0)\right] = \frac{3}{2}\pi;$$

ⓓ $F(x,y) = \frac{y^2}{x^2}$; R é a região delimitada por: $y = 2$; $y = x$; e $xy = 1$;



Solução:

$$I_1 = \int_{1/2}^{1}\int_{1/x}^{2} \frac{y^2}{x^2}\, dy\, dx + \int_1^2\int_x^2 \frac{y^2}{x^2}\, dy\, dx;$$

$$I_2 = \int_1^2\int_{1/y}^{y} \frac{y^2}{x^2}\, dx\, dy;$$

$$I_1 = I_2;$$

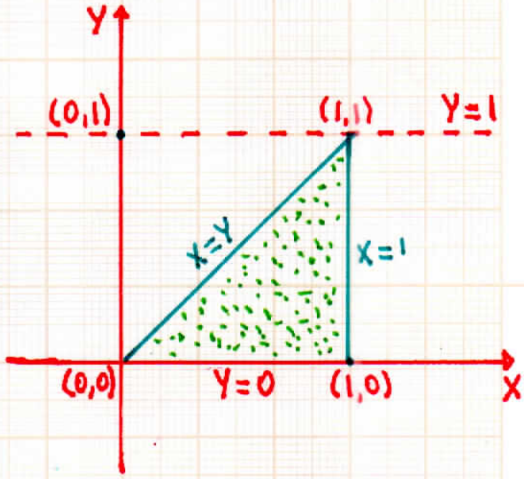
$$I_2 = \int_1^2\int_{1/y}^{y} \frac{y^2}{x^2}\, dx\, dy = \int_1^2 y^2 \int_{1/y}^{y} x^{-2}\, dx\, dy;$$

$$I_2 = \int_1^2 y^2\left(-\frac{1}{x}\right)\Big/_{1/y}^{y} dy = -\int_1^2 y^2\left(\frac{1}{y} - y\right) dy = -\int_1^2 (y - y^3)\, dy$$

$$I_2 = \left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2}\right)\Big/_1^2 = \left[(4-2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right] = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4};$$

③ Em cada caso, a integral dupla iterada dada não pode ser calculada, por meio de Funções elementares, na ordem de integração apresentada. Inverta corretamente a ordem de integração, use o teorema de Fubini e, calcule-a:

ⓐ $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx\,dy$;



Solução: a partir da leitura dos limites de integração, vamos esboçar nossa região, ao lado:

A nossa região encontra-se entre as retas horizontais $Y=0$ (eixo-x) e $Y=1$;

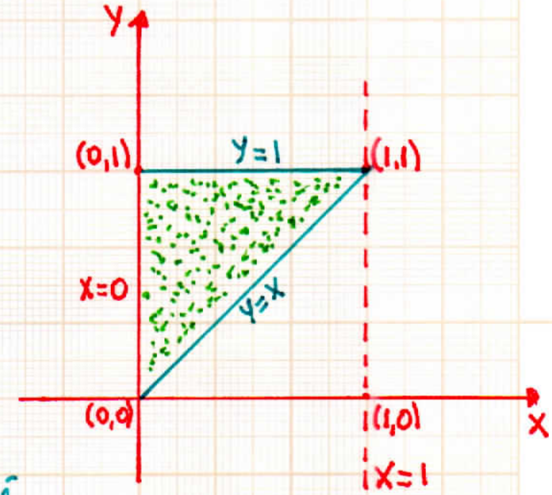
E vemos que x parte da reta $x=Y$ e cresce até a reta vertical $x=1$;

Agora, vamos descrever a mesma região na ordem inversa; pelo teorema de Fubini, teremos:

$$\int_0^1\int_Y^1 e^{x^2}dx\,dy = \int_0^1\int_0^x e^{x^2}dy\,dx = \int_0^1 e^{x^2}.Y\Big/_0^x dx = \int_0^1 e^{x^2}.(x-0)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}.(2x\,dx) = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big/_0^1 = \frac{1}{2}(e-1);$$

ⓑ $\int_0^1\int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\,dy\,dx$;



Solução: a partir da leitura dos limites de integração, esboçamos nossa região:

Inicialmente, vemos que ela se encontra entre as retas verticais $x=0$ (eixo-y) e $x=1$;

E vemos que Y parte da reta $Y=X$ e cresce até a reta horizontal $Y=1$;

Agora, vamos descrever a mesma região, na ordem inversa; pelo teorema de Fubini, teremos:

$$\int_0^1\int_x^1 sen(y^2)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^y sen(y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 sen(y^2).(y-0)\,dy =$$

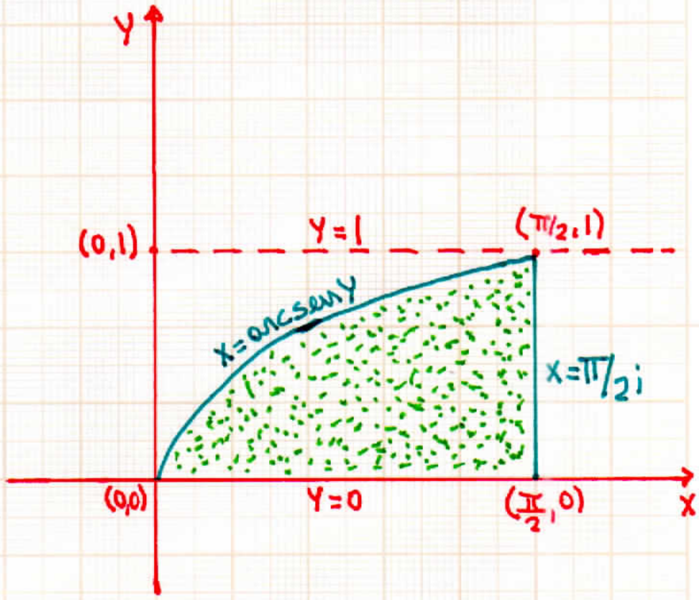
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 sen(y^2)(2y\,dy) = -\frac{1}{2}\cos(y^2)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos 1 - \cos 0) = \frac{1}{2}(1-\cos 1);$$

c) $\displaystyle\int_0^1\int_{arcsen\,y}^{\pi/2} sec^2(\cos x)\,dx\,dy;$

<u>Solução</u>:

A partir da leitura dos limites de integração, vamos esboçar nossa região, ao lado:



A nossa região, encontra-se entre as retas horizontais $y=0$ (eixo-x) e $y=1$;

E vemos que x parte de $x=arcsen\,y$ (o mesmo que $y=sen\,x$) e cresce até a reta vertical $x=\pi/2$;

Agora, vamos descrever a mesma região, na ordem inversa; pelo teorema de Fubini, teremos:

$$\int_0^1\int_{arcsen\,y}^{\pi/2} sec^2(\cos x)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^{sen\,x} sec^2(\cos x)\,dy\,dx =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\cos x \\ du=-sen\,x\,dx \end{array}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} sec^2(\cos x)\,sen\,x\,dx =$$

$$= -tg(\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = -(tg(\cos \pi/2) - tg(\cos 0)) =$$

$$= -(tg\,0 - tg\,1) = tg\,1;$$

04 Em cada caso, identifique a região de integração no plano-xy que:

ⓐ maximize $\iint\limits_R (4-2x^2-y^2)\,dA$;

Solução: a integral atingirá seu valor máximo, quando R for constituída por todos (x,y) tais que: $4-2x^2-y^2 \geq 0 \therefore \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4} \leq 1$;
Então, a região procurada é o interior da elipse: $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$;

ⓑ minimize $\iint\limits_R (x^2+y^2-6)\,dA$;

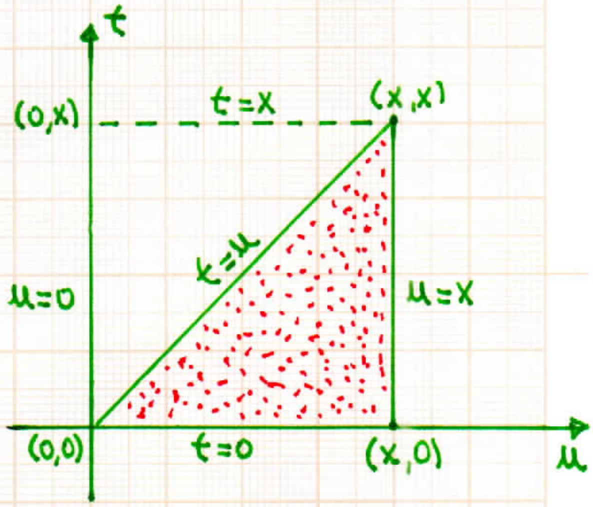
Solução: a integral atingirá seu valor mínimo, quando R for constituída por todos (x,y) tais que: $x^2+y^2-6 \leq 0 \therefore x^2+y^2 \leq 6$;
Então, a região procurada é o interior do círculo: $x^2+y^2=6$;

05 Supondo que suas hipóteses estejam satisfeitas, use o teorema de Fubini para mostrar que:

$$\int_0^x \int_0^u e^{m(x-t)}.f(t)\,dt\,du = \int_0^x (x-t).e^{m(x-t)}.f(t)\,dt;$$

Solução:

Os limites de integração nos sugerem a região ao lado:



Logo, o teorema de Fubini nos assegura que:

$$\int_0^x \int_0^u e^{m(x-t)}.f(t)\,dt\,du = \int_0^x \int_t^x e^{m(x-t)}.f(t)\,du\,dt =$$

$$= \int_0^x e^{m(x-t)}.f(t)\int_t^x du\,dt =$$

$$= \int_0^x e^{m(x-t)}.f(t).u\Big|_t^x dt =$$

$$= \int_0^x e^{m(x-t)}.f(t).(x-t)\,dt;$$