Introdução à Teoria de Probabilidades

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Depto. de Estatística e Matemática Aplicada - UFC

Fortaleza, 21 de março de 2022

Sumário

Sumário

1. Modelo probabilístico
   - Espaço amostral
   - Eventos

Espaço Amostral

- Para cada experimento aleatório ϵ definimos o **espaço amostral** como sendo o conjunto que contém todos os resultados possíveis.
- Geralmente representamos esse conjunto por Ω.
- Qual seria o espaço amostral do experimento aleatório que consiste em lançar um dado e anotar a face superior.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- No caso acima o espaço amostral é o conjunto composto por exatamente todos os resultados possíveis do referido experimento.

Espaço Amostral

- Em alguns casos não conseguimos construir com precisão o espaço amostral de um experimento.
- Considere o experimento aleatório que consiste em selecionar ao acaso um aluno da UFC e medir sua altura em metros. Poderíamos ter:
  - $\Omega = (0, \infty)$ se não considerarmos um limitante superior para a altura;
  - $\Omega = (0, 3)$ no caso de considerarmos um limitante superior;
  - ou por exemplo $\Omega = (0,5; 3)$.
- O importante é que o espaço amostral contenha todos os resultados possíveis.

Espaço amostral

- Se o fenômeno considerado é observar o sexo de uma criança ao nascer:

$$\Omega = \{M, F\}$$

- Se o experimento consiste em observar os resultados ao lançar uma moeda duas vezes:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

$\omega_1 = (C, C)$; $\omega_2 = (C, K)$; $\omega_3 = (K, C)$; $\omega_4 = (K, K)$
$C = cara$
$K = coroa$

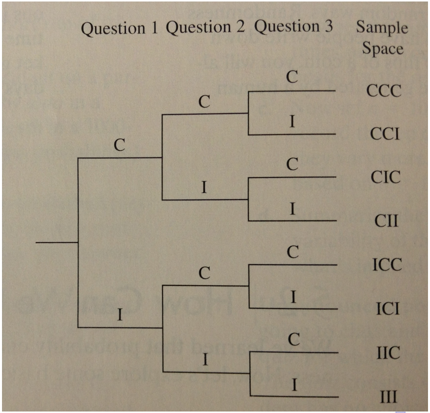
Espaço amostral

- Experimento é lançar dois dados e anotar o resultado das faces:

$$
\begin{aligned}
\Omega \quad = \quad & \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),\\
& (2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),\\
& (3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\
& (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),\\
& (6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}
\end{aligned}
$$

Espaço amostral

- Teste surpresa com três questões de múltipla escolha.
- Em cada questão há 5 alternativas, apenas 1 é correta.
- Experimento: anotar o resultado do aluno no teste.
  Ex: CCI significa que o aluno acertou as duas primeiras questões e errou a última.



Sumário

Eventos

- Um evento A (relativo a um particular espaço amostral Ω, associado a um experimento aleatório ϵ) é simplesmente um conjunto de resultados possíveis.
- Experimento é lançar dois dados e anotar o resultado das faces:

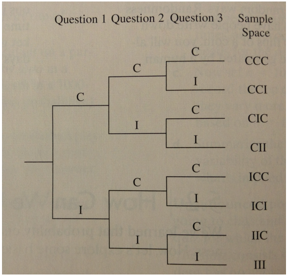
$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),\\ &(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),\\ &(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),\\ &(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\end{aligned}$$

Evento: soma dos valores é igual a 3.

$$A = \{(1,2),(2,1)\}$$

Eventos

- Experimento: anotar o resultado do aluno no teste.
  Ex: CCI significa que o aluno acertou as duas primeiras questões e errou a última.



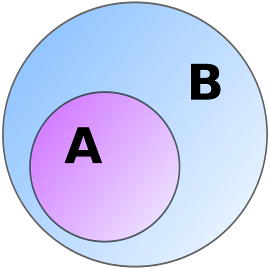
$$\Omega = \{CCC, CCI, CIC, CII, ICC, ICI, IIC, III\}$$

Evento: o aluno acertou pelo menos duas questões e foi aprovado.

$$A = \{CCC, CCI, CIC, ICC\}$$

Álgebra de Eventos

- Temos que Ω e $\varnothing$ (conjunto vazio) são também eventos, denominados evento certo e evento impossível.
- Dizemos que um evento A está contido em um evento B ($A \subset B$), se e somente se $a \in A \Longrightarrow a \in B$.



$A \subset B$

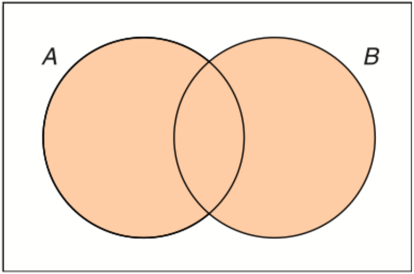
Álgebra de Eventos

- Portanto para qualquer evento A temos que $\varnothing \subset A$.
- O eventos A e B são iguais $(A = B)$ se e somente se $(A \subset B)$ e $(B \subset A)$.

Álgebra de Eventos

Evento União

- Definiremos o *evento união* por $A \cup B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$. Significa que este é o evento formado por qualquer elemento de Ω que pertence a A ou B (ou ambos). Em outras palavras, qualquer ponto amostral que pertença a *pelo menos um* dos eventos.



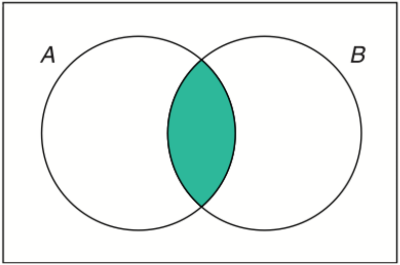
$A \cup B$

- A união de três eventos A, B, C será representada por $A \cup B \cup C$.
  $A \cup B \cup C = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ ou } \omega \in B \text{ ou } \omega \in C\}$.

- Mais geralmente, a união de n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é definida analogamente e representada por

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

- Definiremos o *evento intersecção* por $A \cap B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$. Ou seja, este é o evento formado por todos os pontos amostrais que estão simultaneamente em A e B.



$A \cap B$

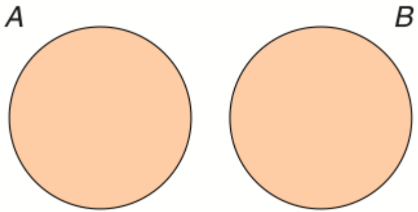
- No caso de termos por exemplo três eventos, A, B e C, a intersecção é representada por $A \cap B \cap C$:

$$A \cap B \cap C = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ e } \omega \in B \text{ e } \omega \in C\}$$

- A intersecção de n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é representada por

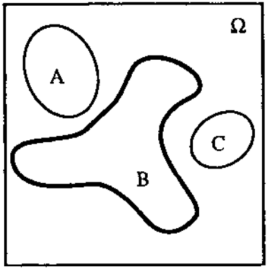
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

- Dois eventos A e B são denominados **mutualmente excludentes** se eles não podem ocorrer juntos. Exprimiremos isso escrevendo $A \cap B = \varnothing$.

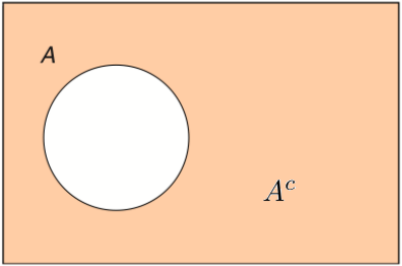


$$A \cap B = \varnothing$$

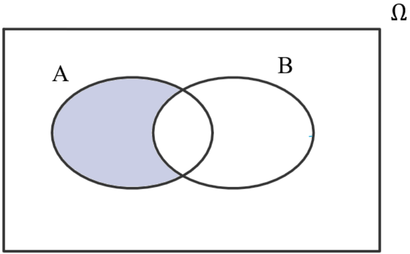
- Quando há mais de dois eventos, dizemos que eles são disjuntos quando foram disjuntos para cada par de eventos (disjuntos 2 a 2).



- Definiremos o *complemento (complementar)* de A por $A^c = \bar{A} = \{\omega \in \Omega | \omega \notin A\}$. Ou seja, A^c ocorre se A não ocorre. Naturalmente, $(A^c)^c = A$.

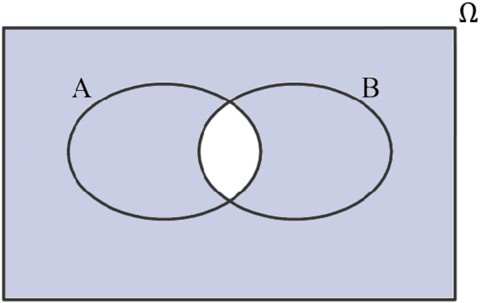


- O evento diferença, denotado por $A - B$ ou $A \backslash B$, ocorrerá se ocorrer A, mas não ocorrer B. Assim podemos definir $A \backslash B = A \cap B^c$.



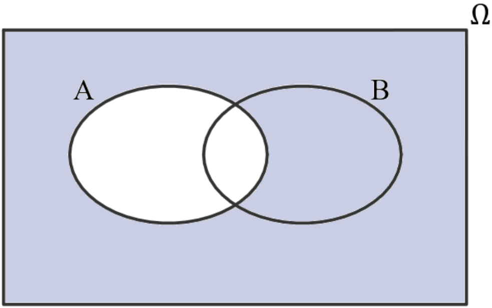
$A \backslash B$

- É possível mostrar que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$



$$(A \cap B)^c$$

- É possível mostrar que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

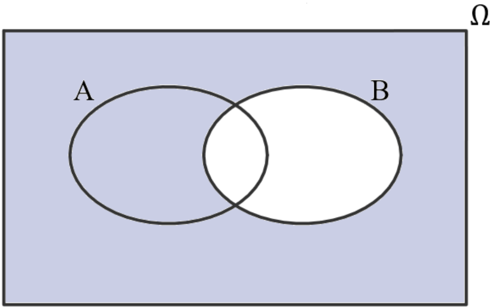


A^c

Álgebra de Eventos

Leis de De Morgan

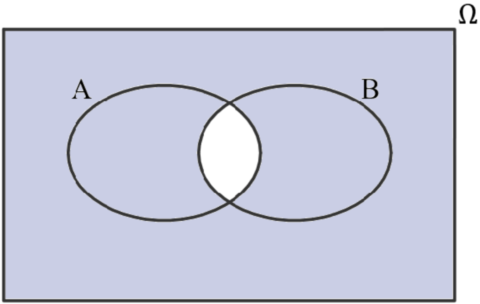
- É possível mostrar que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$



B^c

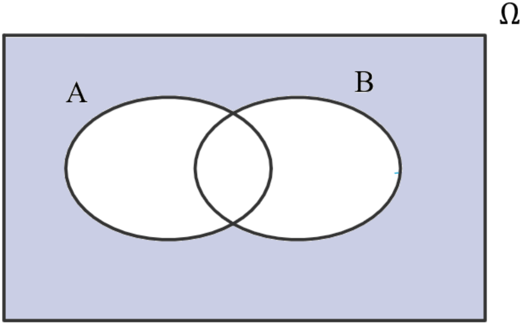
Álgebra de Eventos
Leis de De Morgan

- É possível mostrar que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$



$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

- É possível mostrar que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

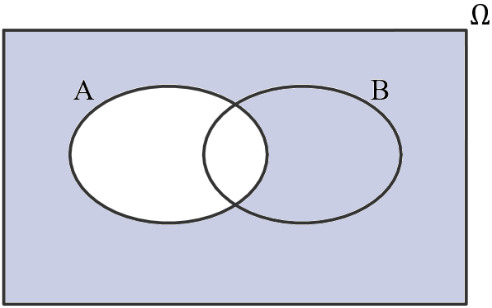


$(A \cup B)^c$

Álgebra de Eventos

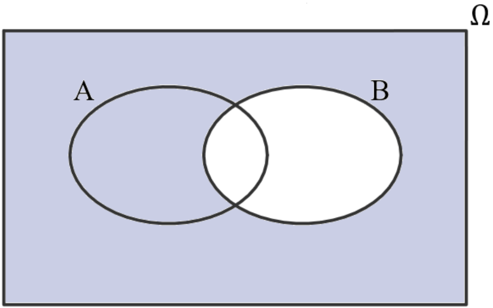
Leis de De Morgan

- É possível mostrar que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$



A^c

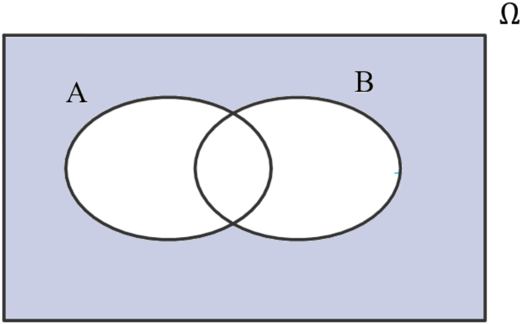
- É possível mostrar que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$



B^c

Álgebra de Eventos
Leis de De Morgan

- É possível mostrar que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$



$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

- De maneira geral, seja $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Omega$ eventos quaisquer, então

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$$

e

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$$

- Definiremos o *Produto cartesiano* entre os eventos A e B por $A \times B = \{(a, b) \in \Omega | a \in A \text{ e } b \in B\}$. Ou seja, este é o conjunto dos pares ordenados formados pelos elementos de A e B. Esta operação pode ser generalizada para mais de dois eventos.
  - **Exemplo:** Considere o experimento lançar dois dados e anotar o valor das faces:

$$
\begin{aligned}
\Omega &= \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \\
&= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2), \\
&\quad (2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4), \\
&\quad (3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), \\
&\quad (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2), \\
&\quad (6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}
\end{aligned}
$$

Principais Identidades

- Para todo evento $A \subset \Omega, A \cup \phi = A, A \cap \phi = \phi$.
- $A \subset B$ se e somente se $A \cup B = B$.
- $A \subset B$ se e somente se $A \cap B = A$.
- $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$ (Comutatividade);
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Associatividade);
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;