Introdução à Teoria de Probabilidades

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Depto. de Estatística e Matemática Aplicada - UFC

Fortaleza, 30 de março de 2022

Sumário

Definição:

Dados um conjunto qualquer A, pode-se definir outro conjunto, conhecido como *conjunto das partes* de A, e denotado por $\mathcal{P}(A)$, cujos elementos são subconjuntos de A. Por exemplo, seja $A = \{1, 2, 3\}$, então

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

Pode-se provar que a cardinalidade do conjunto das partes é sempre maior do que a cardinalidade de A.

- A medida de probabilidade é restrita a uma coleção especial $\mathcal{A}$ de subconjuntos do espaço amostral.
- Os elementos de $\mathcal{A}$ também são conjuntos, que são eventos de interesse no que se refere ao experimento aleatório.
- $\mathcal{A}$ é denominada σ-álgebra de eventos. O domínio de uma medida de probabilidade é uma σ-álgebra.

Álgebra e σ-álgebra

Definição:

Uma álgebra de eventos é uma coleção não vazia de subconjuntos de Ω fechada em relação a união finita, intersecção finita e complementos. Em outras palavras, para que $\mathcal{A}$ seja álgebra devemos ter

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A}$ implica $A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $A, B \in \mathcal{A}$ implica $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Álgebra e σ-álgebra

Definição:

Uma σ-Álgebra $\mathcal{F}$ é uma coleção não vazia de subconjuntos de Ω fechada em relação a união enumerável, intersecção enumerável e complementos. O menor conjunto de postulados para que $\mathcal{F}$ seja dita uma σ-álgebra é

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F}$ implica $A^c \in \mathcal{F}$

(iii) $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \geq 1$ implica $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Dado um espaço amostra Ω, a maior σ-álgebra é o conjunto das partes de Ω, e a menor é $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega\}$.

Álgebra e σ-álgebra

- Seja $A \subset \Omega$. A menor σ-álgebra contendo A é dada por

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, A, A^c, \Omega\}.$$

- σ-álgebra de Borel: pode ser gerada por intervalos da reta real do tipo $(-\infty, x]$ com $x \in \mathbb{R}$. Notação: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

- Se o resultado de um experimento é um número real, ou seja $\Omega = \mathbb{R}$, então todas as perguntas práticas de interesse se referem a um elemento de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

- Considere $\Omega = \{1, 2, 3\}$, verifique se as seguintes coleções de subconjuntos são σ-álgebras:

$$\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\varnothing, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

- Seja $\Omega = \mathbb{N}$ e considere $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} \,|\, \#A < \infty \text{ ou } \#A^c < \infty\}$. Verifique se $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

Sumário

Frequência Relativa

- O terceiro elemento de um modelo probabilístico, constitui-se em uma medida numérica que quantifica a probabilidade de ocorrência de um determinado evento.
- Tal medida é motivada em grande parte pelas propriedades da frequência relativa, que nada mais é do que a fração de vezes que um dado evento ocorreu em n repetições de um experimento.
- **Definição:** A frequência relativa de um evento A determinada por n repetições de um experimento ϵ é dada por

$$f_A = \frac{\#A}{n},$$

em que $\#A$ é o número de vezes que o evento A ocorreu nas n repeticões.

Frequência Relativa

- A frequência relativa apresenta as seguintes propriedades de fácil verificação:
  1. $0 \leq f_A \leq 1$.
  2. $f_A = 1$ se, e somente se, A ocorrer em todas as repetições
  3. $f_A = 0$ se, e somente se, A nunca ocorrer nas n repetições.
  4. Se A e B forem eventos mutuamente excludentes, e se $f_{A \cup B}$ for a frequência relativa associada ao evento $A \cup B$, então, $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.
  5. f_A, com base em n repetições do experimento e considerada como uma função de n, "converge" em um certo sentido probabilístico para uma constante quando $n \to \infty$.

Probabilidade (Axiomas de Kolmogorov)

- Finalmente podemos definir com mais rigor o que é uma probabilidade.
- Uma função $\mathbb{P}$, definida na σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω e com valores em $[0,1]$, é uma *probabilidade* se satisfaz os seguintes axiomas:
  (1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
  (2) Para todo subconjunto $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$;
  (3) Para toda sequência $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ dois a dois disjuntos, temos

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

- A trinca $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é denominada *espaço de probabilidade*. Os subconjuntos de $\mathcal{F}$ são denominados *eventos* e é somente a eles que se atribui probabilidade.

Propriedades

- É possível demostrar, através do Teorema da Extensão de Caratheodory, que uma medida de probabilidade definida em uma álgebra pode ser estendida para uma σ-álgebra conveniente.
- A partir dos axiomas apresentados, podemos deduzir várias propriedades, que acabam fazendo sentido intuitivo e podem ser facilmente demonstradas a partir das propriedades de operações de conjuntos que foram anteriormente enumeradas.
  (1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
  (2) $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$.
  (3) Se A e B forem dois eventos quaisquer, então $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
  (4) Se A, B e C forem três eventos quaisquer, então $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.
  (5) Se $A \subset B$, então $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Propriedades (cont.)

(6) **Princípio da Inclusão-Exclusão**: Sejam $A_1, \ldots, A_n$, eventos quaisquer então

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1}\, \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Espaços amostrais finitos

- Assumindo que Ω é finito e que os resultados do experimento são equiprováveis, para todo $A \in \mathcal{F}$, define-se

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \text{ em que,}$$

  $\#A$ é o número de casos favoráveis (número de elementos) ao evento A.
  $\#\Omega$ número de casos possíveis (ou número de elementos de Ω)

- A expressão acima não serve como definição geral de probabilidade. Ela é somente uma consequência do fato de que todos os resultados do evento são equiprováveis, e só deve ser usada quando isto acontecer.

- Lançar uma moeda duas vezes.
  $C = cara$
  $K = coroa$
  - $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$
    $\omega_1 = (C, C)$; $\omega_2 = (C, K)$; $\omega_3 = (K, C)$; $\omega_4 = (K, K)$
  - considerando que a moeda é honesta: $\mathbb{P}(\omega_i) = \frac{1}{4}, \forall\ i = 1, 2, 3, 4$
  - Qual a probabilidade de obter duas faces iguais?

- Da linha de produção de uma fábrica são retirados três artigos, e cada um é classificado como *bom* (B) ou *defeituoso* (D).
  (a) Descreva o espaço amostral associado a este experimento.
  (b) Qual a probabilidade de obter exatamente dois artigos defeituosos?
  (c) Qual a probabilidade de obter pelo menos um defeituoso?
  (d) Qual a probabilidade de que nenhum seja defeituoso?
  (e) Qual a probabilidade de que no máximo 2 sejam defeituosos?

- De um lote de 18 bovinos cinco são machos e com mais de dois anos de idade, quatro são machos e com menos de dois anos, seis são fêmeas com mais de dois anos e três são fêmeas com menos de dois anos de idade. Definem-se os seguintes eventos:
$A = \{\text{o bovino tem mais de dois anos}\}$,
$B = \{\text{o bovino tem menos de dois anos}\}$, $C = \{\text{o bovino é macho}\}$ e $D = \{\text{o bovino é fêmea}\}$. Nestas condições, determine a probabilidade dos seguintes eventos:
  (a) $A^c \cap C^c$.
  (b) $B \cup D$.

- Peças que saem de uma linha de produção são marcadas defeituosa (D) ou não defeituosa (N). As peças são inspeciondas e sua condição registrada, até que duas peças defeituosas consecutivas sejam fabricadas ou que quatro peças tenham sido inspecionadas, aquilo que ocorra em primeiro lugar.
  (a) Descreva o espaço amostral associado a este experimento.
  (b) Qual a probabilidade de serem observadas exatamente duas peças defeituosas.
  (c) Qual a probabilidade de serem observadas pelo menos duas peças defeituosas.
  (d) Qual a probabilidade de serem observadas no máximo duas peças defeituosas.
  (e) Qual a probabilidade de que nenhuma peça defeituosa seja observada.