

# Introdução à Teoria de Probabilidades

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Depto. de Estatística e Matemática Aplicada - UFC

Fortaleza, 18 de março de 2022

## 1 Modelo probabilístico

- Ideias Empíricas
- Espaço amostral
- Eventos

## 1 Modelo probabilístico

- Ideias Empíricas
- Espaço amostral
- Eventos

Diariamente, tomamos decisões com relação a eventos incertos:

- Devo investir na bolsa?
- Vale a pena fazer um plano odontológico?
- Devo contratar um seguro para o meu carro?
- Devo me matricular numa disciplina com baixa taxa de aprovação?
- Devo levar um guarda-chuva?

- **Probabilidade:** medida de incerteza relacionada a ocorrência de eventos, em geral, associados a experimentos aleatórios.
- Chamaremos **experimento aleatório** aqueles que, quando repetidos sob as mesmas condições, produzem resultados diferentes.
- Além disso, os experimentos aleatórios possuem os seguintes traços:
  - (a) Cada experimento poderá ser repetido indefinidamente sob condições essencialmente inalteradas.
  - (b) Muito embora não sejamos capazes de afirmar que resultado particular ocorrerá, seremos capazes de descrever o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento.
  - (c) Quando o experimento for repetido um grande número de vezes, uma configuração definida ou regularidade surgirá. É esta regularidade que torna possível construir um modelo probabilístico.

- Alguns exemplos de experimentos aleatórios.

$E_1$ : Jogar um dado e observar o número mostrado na face de cima.

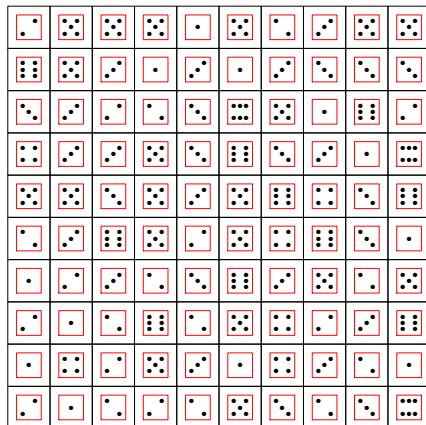
$E_2$ : Jogar uma moeda quatro vezes e observar o número de caras obtido.

$E_3$ : Jogar uma moeda quatro vezes e observar a sequência de caras e coroas obtida.

$E_4$ : Em uma linha de produção, fabricar peças em série e contar o número de peças defeituosas produzidas em um período de 24 horas.

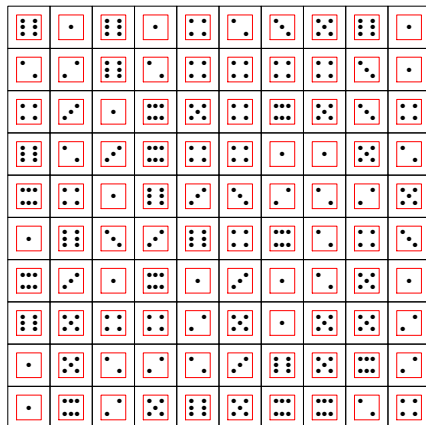
$E_5$ : Uma lâmpada é fabricada. Em seguida é ensaiada quanto à sua duração, e anotado o tempo decorrido (em horas) até queimar.

# Simulação 1: lançamento de um dado 100 vezes



1	2	3	4	5	6
12	21	28	6	20	13

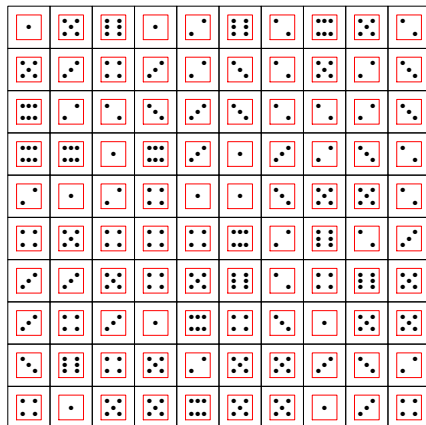
## Simulação 2: lançamento de um dado 100 vezes



1	2	3	4	5	6
16	19	13	16	14	22



# Simulação 3: lançamento de um dado 100 vezes

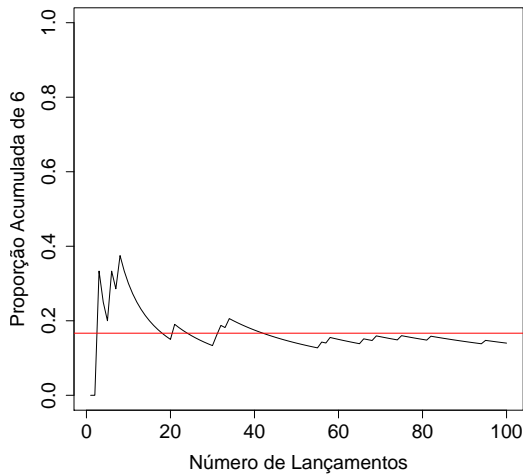


1	2	3	4	5	6
11	21	22	13	19	14

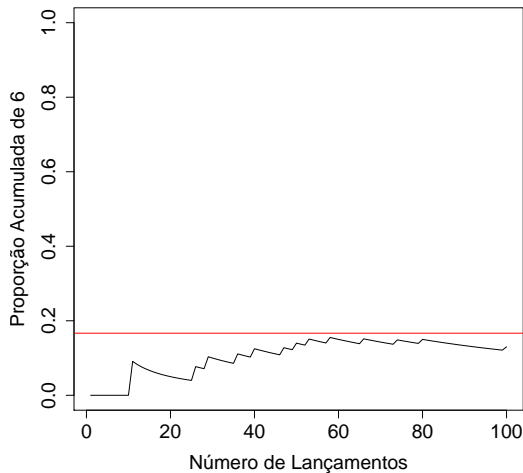
## Simulação 3: lançamento do dado 100 vezes

Lançamento	6 ocorre?	Proporção acumulada de 6
1	não	0
2	não	0
3	sim	0,333
4	não	0,25
5	não	0,20
6	sim	0,333
⋮	⋮	⋮
99	não	0,141
100	não	0,140

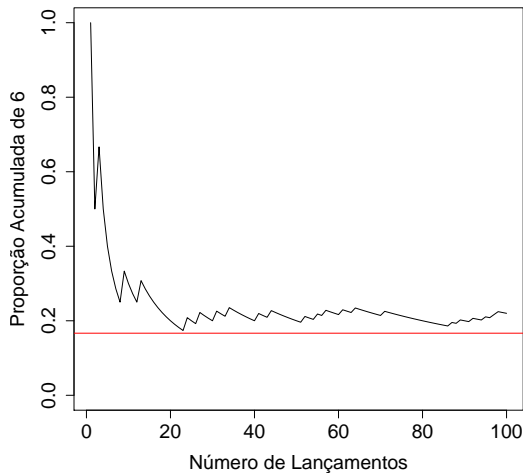
# Simulação 3: lançamento do dado 100 vezes



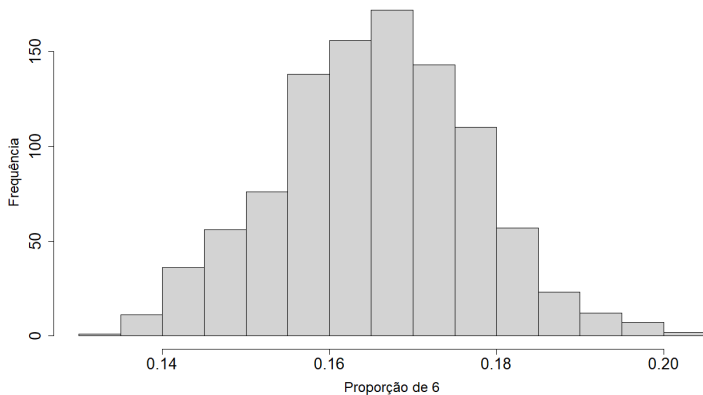
# Simulação 1: lançamento do dado 100 vezes



## Simulação 2: lançamento do dado 100 vezes



- Cada simulação: 100 lançamentos e proporção de 6 é anotada.
- Repetindo a simulação 1000 vezes, temos a distribuição de frequências da proporção de 6.

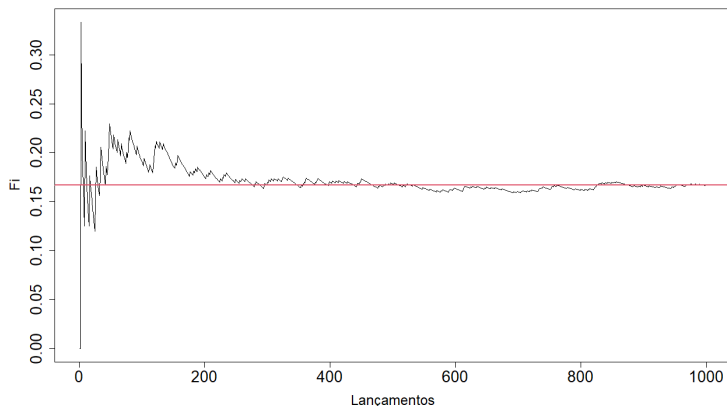


# Simulando o lançamento de um dado 100 vezes

Tabela: Medidas descritivas para a proporção de 6

Mínimo	0,060
1º Quartil	0,140
Mediana	0,170
Média	0,167
3º Quartil	0,190
Máximo	0,290
Desvio Padrão	0,037

## Simulação 4: lançamento do dado 1000 vezes



- Com poucos lançamentos, a proporção de 6 pode variar bastante.
- Com o aumento do número de lançamentos, a proporção acumulada de 6 estabiliza em  $1/6$ .



# Ideias Empíricas

## Definição Frequentista

- Quando dizemos que a probabilidade do 6 sair no dado é  $1/6$ , estamos dizendo que a proporção esperada de 6 em **vários lançamentos** (observações) do dado é  $1/6$ .
- Quando a previsão do tempo diz que a chance de chuva para hoje é 70%, quer dizer que para **vários dias** observados no passado com condições atmosféricas equivalentes ao dia de hoje a proporção observada de dias de chuva foi 0,7.

- Em resumo:

*Em um fenômeno (ou experimento) aleatório, a **probabilidade** de um determinado resultado está associada à sua frequência relativa, tomada para um número arbitrariamente grande de repetições.*

- Esta definição não é de caráter geral.
- Quando a NASA lançou o primeiro ônibus espacial, como os cientistas sabiam a probabilidade de sucesso? Não havia nenhum dado sobre lançamentos no passado para que se determinasse a frequência relativa.

# Ideias Empíricas

Como determinar probabilidades?

- **Procedimento empírico:** Se baseia na frequência relativa. Nesse sentido, é necessário que o experimento possa ser repetido indefinidamente.
- **Procedimento teórico:** Se baseia em suposições associadas as características e resultados do experimento (fenômeno) de interesse. Por exemplo, ao lançar um dado podemos assumir que cada valor de 1 a 6 tenha a mesma chance de ocorrer:  $1/6$ . Ao lançar uma moeda, podemos assumir que ela pode cair de um lado ou de outro com a mesma chance:  $1/2$ .

## 1 Modelo probabilístico

- Ideias Empíricas
- Espaço amostral
- Eventos

- Para cada experimento aleatório  $\epsilon$  definimos o **espaço amostral** como sendo o conjunto que contém todos os resultados possíveis.
- Geralmente representamos esse conjunto por  $\Omega$ .
- Qual seria o espaço amostral do experimento aleatório que consiste em lançar um dado e anotar a face superior.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- No caso acima o espaço amostral é o conjunto composto por exatamente todos os resultados possíveis do referido experimento.

- Em alguns casos não conseguimos construir com precisão o espaço amostral de um experimento.
- Considere o experimento aleatório que consiste em selecionar ao acaso um aluno da UFC e medir sua altura em metros. Poderíamos ter:
  - $\Omega = (0, \infty)$  se não considerarmos um limitante superior para a altura;
  - $\Omega = (0, 3)$  no caso de considerarmos um limitante superior;
  - ou por exemplo  $\Omega = (0, 5; 3)$ .
- O importante é que o espaço amostral contenha todos os resultados possíveis.

- Se o fenômeno considerado é observar o sexo de uma criança ao nascer:

$$\Omega = \{M, F\}$$

- Se o experimento consiste em observar os resultados ao lançar uma moeda duas vezes:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

$$\omega_1 = (C, C); \omega_2 = (C, K); \omega_3 = (K, C); \omega_4 = (K, K)$$

$C = cara$

$K = coroa$

- Experimento é lançar dois dados e anotar o resultado das faces:

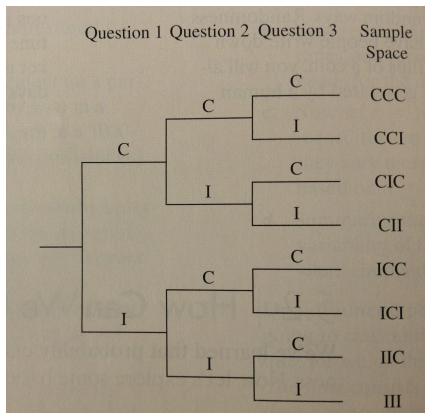
$$\begin{aligned}\Omega = \{ & (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), \\ & (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), \\ & (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ & (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), \\ & (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \}\end{aligned}$$



# Espaço amostral

- Teste surpresa com três questões de múltipla escolha.
- Em cada questão há 5 alternativas, apenas 1 é correta.
- Experimento: anotar o resultado do aluno no teste.

Ex: *CCI* significa que o aluno acertou as duas primeiras questões e errou a última.



## 1 Modelo probabilístico

- Ideias Empíricas
- Espaço amostral
- Eventos

- Um evento  $A$  (relativo a um particular espaço amostral  $\Omega$ , associado a um experimento aleatório  $\epsilon$ ) é simplesmente um conjunto de resultados possíveis.
- Experimento é lançar dois dados e anotar o resultado das faces:

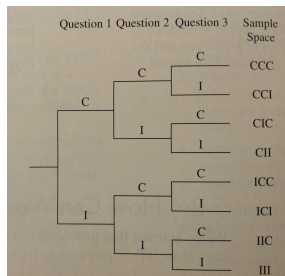
$$\begin{aligned}\Omega = \{ & (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), \\ & (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), \\ & (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ & (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), \\ & (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \}\end{aligned}$$

Evento: soma dos valores é igual a 3.

$$A = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

- Experimento: anotar o resultado do aluno no teste.

Ex: *CCI* significa que o aluno acertou as duas primeiras questões e errou a última.



$$\Omega = \{CCC, CCI, CIC, CII, ICC, ICI, IIC, III\}$$

Evento: o aluno acertou pelo menos duas questões e foi aprovado.

$$A = \{CCC, CCI, CIC, ICC\}$$