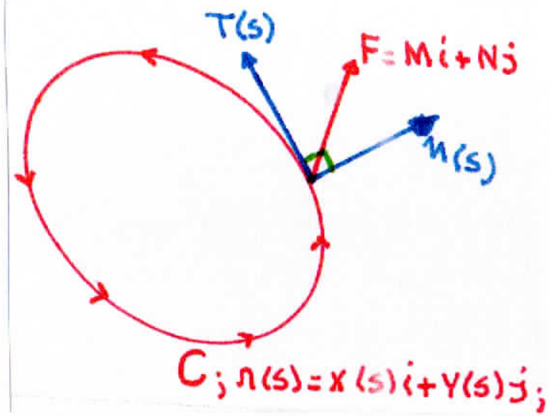
· INTEGRAIS DE LINHA: DE CIRCULAÇÃO E DE FLUXO ·

· **DEFINIÇÃO** · Sejam: C uma curva fechada, simples, lisa por partes, contínua, orientada positivamente no sentido anti-horário, parametrizada pelo comprimento do arco s, por $r(s) = x(s)i + y(s)j$, com $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$ contínuas, com vetor tangente unitário $T(s) = \frac{dx}{ds}i + \frac{dy}{ds}j$ e vetor normal unitário, exterior, $n(s) = \frac{dy}{ds}i - \frac{dx}{ds}j$; e $F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j$ um campo vetorial plano com derivadas parciais $\frac{\partial M}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ e $\frac{\partial N}{\partial y}$, contínuas, ambos: curva e campo; definidos num mesmo subconjunto aberto U de R^2; definimos:



ⓐ A Integral de Linha de Circulação do campo F ao longo da curva C, denotada por: $\oint_C F \cdot T(s)\,ds$;

como sendo:
$$\oint_C F \cdot T(s)\,ds = \underbrace{\oint_C \left[M(x(s),y(s))i + N(x(s),y(s))j\right] \cdot \left[\frac{dx}{ds}i + \frac{dy}{ds}j\right] ds}_{\text{Forma Paramétrica;}} = \underbrace{\oint_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy}_{\text{Forma Cartesiana;}}$$

ⓑ A Integral de Linha de Circulação do campo F ao longo da curva C, denotada por: $\oint_C F \cdot n(s)\,ds$;

como sendo:
$$\oint_C F \cdot n(s)\,ds = \underbrace{\oint_C \left[M(x(s),y(s))i + N(x(s),y(s))j\right] \cdot \left[\frac{dy}{ds}i - \frac{dx}{ds}j\right] ds}_{\text{Forma Paramétrica;}} = \underbrace{\oint_C -N(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy}_{\text{Forma Cartesiana;}}$$

Vejamos exemplos:

(01) Calcule a Integral de Linha de Circulação do campo $F(x,y) = 2y\,i + 3x\,j$, ao longo da curva C parametrizada por $r(s) = \cos(s)\,i + \operatorname{sen}(s)\,j$, quando s varia de $s=0$ à $s=2\pi$;

Solução:

$$\oint_C F.T(s)ds = \oint_C \left[M(x(s),y(s))i + N(x(s),y(s))j\right].\left[\frac{dx}{ds}i + \frac{dy}{ds}j\right]ds =$$

$$= \oint_C \left[2y(s)i + 3x(s)j\right].\left[\frac{dx}{ds}i + \frac{dy}{ds}j\right]ds = \int_0^{2\pi}\left[2\operatorname{sen}(s)i + 3\cos(s)j\right].\left[-\operatorname{sen}(s)i + \cos(s)j\right]ds =$$

$$= \int_0^{2\pi}(-2\operatorname{sen}^2(s) + 3\cos^2(s))ds = \int_0^{2\pi}(-2).\left(\frac{1-\cos(2s)}{2}\right)ds + \int_0^{2\pi}3.\left(\frac{1+\cos(2s)}{2}\right)ds =$$

$$= \int_0^{2\pi}(-1)ds + \int_0^{2\pi}\cos(2s)ds + \int_0^{2\pi}\frac{3}{2}ds + \int_0^{2\pi}\frac{3}{2}\cos(2s)ds = -s\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2s)\Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{2}s\Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{4}\operatorname{sen}(2s)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -(2\pi - 0) + \frac{1}{2}(\operatorname{sen}4\pi - \operatorname{sen}0) + \frac{3}{2}(2\pi - 0) + \frac{3}{4}(\operatorname{sen}4\pi - \operatorname{sen}0) = -2\pi + 0 + 3\pi + 0 = \pi;$$

02 Calcule a Integral de Linha de Fluxo do campo $F(x,y) = 4x\,i - y\,j$, ao longo da curva C parametrizada por $r(s) = (2+\cos(s))i + (3+\operatorname{sen}(s))j$, quando s varia de $s=0$ à $s=2\pi$;

Solução:

$$\oint_C F.n(s)ds = \oint_C [M(x(s),y(s))i + N(x(s),y(s))j].\left[\frac{dy}{ds}i - \frac{dx}{ds}j\right]ds =$$

$$= \oint_C [4x(s)i + (-y(s))j].\left[\frac{dy}{ds}i - \frac{dx}{ds}j\right]ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} [4(2+\cos(s))i - (3+\operatorname{sen}(s))j].[\cos(s)i - (-\operatorname{sen}(s))j]ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} (8+4\cos(s))i - (3+\operatorname{sen}(s))j].[\cos(s)i + \operatorname{sen}(s)j]ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} (8\cos(s) + 4(\cos^2(s)) - 3\operatorname{sen}(s) - \operatorname{sen}^2(s))ds$$

$$= \int_0^{2\pi} 8\cos(s)ds + 4\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2s}{2}ds - 3\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} s\,ds - \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2s}{2}ds =$$

$$= 8\operatorname{sen}(s)\Big/_0^{2\pi} + 2s\Big/_0^{2\pi} + \operatorname{sen}(2s)\Big/_0^{2\pi} + 3\cos(s)\Big/_0^{2\pi} - \frac{s}{2}\Big/_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2s)\Big/_0^{2\pi} =$$

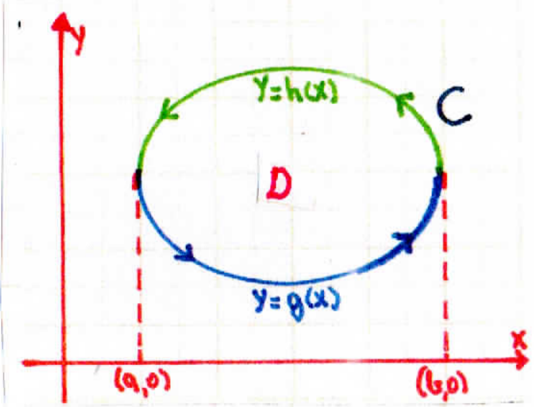
$$= 8(0-0) + 2(2\pi-0) + (0-0) + 3(1-1) - \frac{1}{2}(2\pi-0) + \frac{1}{4}(0-0) =$$

$$= 4\pi - \pi = 3\pi ;$$

• **TEOREMA DE GREEN (1793-1841)** • Sejam: C uma curva fechada, simples, lisa por partes, contínua, orientada positivamente no sentido anti-horário, e seja D a região delimitada por C, de tipo-I e de tipo-II; e $F(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)j$ um campo vetorial, tal que $P(x,y)$ e $Q(x;y)$ tenham derivadas parciais de 1ª ordem contínuas; ambos, C e F, definidos num subconjunto aberto U de R^2;

então: $$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right] dA;$$

Prova: como D é uma região de tipo-I, podemos escrever:

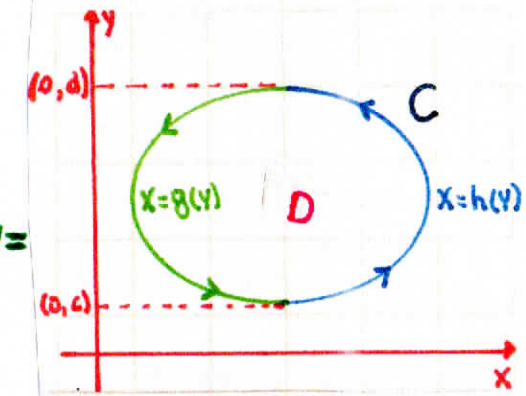


$$\iint_D -\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} -\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy dx = \int_a^b -P(x,y)\Big/_{g(x)}^{h(x)} dx =$$

$$= \int_a^b -[P(x,h(x)) - P(x,g(x))] dx = \int_a^b [P(x,g(x)) - P(x,h(x))] dx =$$

$$= \int_a^b P(x,g(x))dx + \int_b^a P(x,h(x))dx = \oint_C P(x,y)dx;$$

E como D é, também, uma região de tipo-II, podemos escrever:



$$\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dA = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dx dy = \int_c^d Q(x,y)\Big/_{g(y)}^{h(y)} dy =$$

$$= \int_c^d [Q(h(y),y) - Q(g(y),y)] dy = \int_c^d Q(h(y),y)dy + \int_d^c Q(g(y),y)dy =$$

$$= \oint_C Q(x,y)dy;$$

Logo, $$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oint_C P(x,y)dx + \oint_C Q(x,y)dy = \iint_D -\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dA + \iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dA = \iint_D \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right] dA;$$

O Teorema de Green é especialmente útil para substituir cálculos longos de Integrais de Linha, por cálculos curtos de suas correspondentes integrais duplas; como um exemplo desta aplicação, revisitaremos os exemplos ① e ②, anteriores:

① Tínhamos o campo $F(x,y) = 2y\,i + 3x\,j$, e C a circunferência $x^2+y^2=1$;

Então, $$\oint_C F.T(s)\,ds = \oint_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \overset{\text{Green}}{=} \iint_D \left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right] dA = \iint_D \left[\frac{\partial (3x)}{\partial x} - \frac{\partial (2y)}{\partial y}\right] dA$$

$$= \iint_D [3-2]\,dA = \iint_D 1\,dA = \text{área de } D = \pi \cdot 1^2 = \pi;$$

② Tínhamos o campo $F(x,y) = 4x\,i - y\,j$, e C a circunferência $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$;

Então, $$\oint_C F.n(s)\,ds = \oint_C -N(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial(-N(x,y))}{\partial y}\right] dA =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial N(x,y)}{\partial y}\right] dA = \iint_D \left[\frac{\partial (4x)}{\partial x} + \frac{\partial (-y)}{\partial y}\right] dA =$$

$$= \iint_D [4-1]\,dA = 3\iint_D 1\,dA = 3\,(\text{área de } D) = 3\pi;$$

· TEOREMA DE STOKES (1819-1903) · [no plano] ·

Sejam: $F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j$, um campo vetorial plano, e C uma curva plana, ambos satisfazendo às hipóteses do Teorema de Green; então, a Integral de Linha de Circulação do campo F ao longo da curva C, pode ser dada por:

$$\oint_C F.T(s)ds = \iint_D [\text{rot}F.k]dA$$, onde D é a região delimitada pela curva fechada C;

Prova: sabemos que:

$$\oint_C F.T(s)ds = \oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy \overset{\text{GREEN}}{=} \iint_D \left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]dA = \iint_D \left[\left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right)k.k\right]dA;$$

e como $\text{rot}F = \left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right)k$; temos: $\oint_C F.T(s)ds = \iint_D [\text{rot}F.k]dA$;

· TEOREMA DE GAUSS (1777-1855) · [no plano] ·

Sejam: $F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j$, um campo vetorial plano, e C uma curva plana, ambos satisfazendo às hipóteses do Teorema de Green; então, a Integral de Linha de Fluxo do campo F ao longo da curva C, pode ser dada por: $\oint_C F.n(s)ds = \iint_D [\text{div}F]dA$, onde D é a região delimitada pela curva fechada C;

Prova: sabemos que:

$$\oint_C F.n(s)ds = \oint_C -N(x,y)dx + M(x,y)dy \overset{\text{GREEN}}{=} \iint_D \left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial(-N(x,y))}{\partial y}\right]dA = \iint_D \left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial N(x,y)}{\partial y}\right]dA;$$

e como $\text{div}F = \frac{\partial M(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial N(x,y)}{\partial y}$; temos: $\oint_C F.n(s)ds = \iint_D [\text{div}F]dA$;