- RESOLUÇÃO - LISTA - DERIVADAS DIRECIONAIS E VETOR GRADIENTE -

(01) Em cada caso, calcule a derivada direcional da função dada em seu ponto especificado, na direção e sentido do vetor unitário dado:

(a) $f(x,y) = y^2 + tg^2 x$; $(\frac{\pi}{4}, 1)$; $u = -\frac{\sqrt{3}}{2} i + \frac{1}{2} j$;

Solução: encontremos logo $\nabla f(x,y)$;

$\nabla f(x,y) = f_x i + f_y j = (y^2 . 2tgx . sec^2 x) i + (2y + tg^2 x) j$;

Logo, $\nabla f(\frac{\pi}{4}, 1) = (1^2 . 2tg(\frac{\pi}{4}) . sec^2(\frac{\pi}{4})) i + (2.1 . tg^2(\frac{\pi}{4})) j = 4i + 2j$;

Portanto, $D_u f(\frac{\pi}{4}, 1) = \nabla f(\frac{\pi}{4}, 1) . u = (4i + 2j) . (-\frac{\sqrt{3}}{2} i + \frac{1}{2} j) = -2\sqrt{3} + 1$;

(b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$; $(1,1)$; $u = \frac{1}{\sqrt{10}} i + \frac{3}{\sqrt{10}} j$;

Solução: encontremos logo $\nabla f(x,y)$;

$\nabla f(x,y) = f_x i + f_y j = \frac{2x}{x^2+y^2} i + \frac{2y}{x^2+y^2} j$; Logo, $\nabla f(1,1) = i + j$;

Portanto, $D_u f(1,1) = \nabla f(1,1) . u = (i + j) . (\frac{1}{\sqrt{10}} i + \frac{3}{\sqrt{10}} j) = \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$;

(c) $f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x$; $(0,0,0)$; $u = \frac{2}{3} i - \frac{2}{3} j + \frac{1}{3} k$;

Solução: encontremos logo $\nabla f(x,y,z)$;

$\nabla f(x,y,z) = f_x i + f_y j + f_z k = (e^y + ze^x) i + (xe^y + e^z) j + (ye^z + e^x) k$;

Logo, $\nabla f(0,0,0) = i + j + k$;

Portanto, $D_u f(0,0,0) = \nabla f(0,0,0) . u = (i + j + k) . (\frac{2}{3} i - \frac{2}{3} j + \frac{1}{3} k) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$;

(d) $f(x,y,z) = sen(xyz)$; $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \pi)$; $u = \frac{1}{\sqrt{3}} i + \frac{1}{\sqrt{3}} j + \frac{1}{\sqrt{3}} k$;

Solução: $\nabla f(x,y,z) = (yz\cos(xyz)) i + (xz\cos(xyz)) j + (xy\cos(xyz)) k$;

Logo, $\nabla f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \pi) = (\frac{\pi}{3} \cos(\frac{\pi}{6})) i + (\frac{\pi}{2} \cos(\frac{\pi}{6})) j + (\frac{1}{6} \cos(\frac{\pi}{6})) k$;

Ou seja: $\nabla f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \pi) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} i + \frac{\pi\sqrt{3}}{4} j + \frac{\sqrt{3}}{12} k$;

E, $D_u f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \pi) = \nabla f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \pi) . u = [\frac{\pi\sqrt{3}}{6} i + \frac{\pi\sqrt{3}}{4} j + \frac{\sqrt{3}}{12} k] . [\frac{1}{\sqrt{3}} i + \frac{1}{\sqrt{3}} j + \frac{1}{\sqrt{3}} k]$

$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{12} = \frac{5\pi + 1}{12}$;

02 Em cada caso, o vetor v dado não é unitário. Então, encontre a derivada direcional da função dada, em seu ponto assinalado, na direção e sentido do vetor unitário u que tenha a mesma direção e o mesmo sentido de v:

a) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$; $(-2,2)$; $v = i - j$;

Solução: primeiramente encontremos u; sabemos da Geometria Analítica que $u = \frac{1}{\|v\|}v$ é o vetor unitário que tem a mesma direção e o mesmo sentido de v; como $\|v\| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$, temos:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j) = \frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}j;$$

Agora, encontremos $\nabla f(x,y)$;

$$\nabla f(x,y) = f_x i + f_y j = \left(\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{(-y)}{x^2}\right)i + \left(\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x}\right)j = \frac{-y}{x^2+y^2}i + \frac{x}{x^2+y^2}j;$$

Logo, $\nabla f(-2,2) = -\frac{2}{8}i + \frac{(-2)}{8}j = -\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}j$;

Portanto, $D_u f(-2,2) = \nabla f(-2,2).u = \left(-\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}j\right).\left(\frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}j\right) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} = 0$;

b) $f(x,y,z) = xy^2z$; $(1,1,1)$; $v = 2i+3j+6k$;

Solução: aqui, também, $u = \frac{1}{\|v\|}v = \frac{1}{\sqrt{4+9+36}}.(2i+3j+6k)$;

Ou seja: $u = \frac{2}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{6}{7}k$;

Agora, encontremos $\nabla f(x,y,z)$;

$$\nabla f(x,y,z) = f_x i + f_y j + f_z k = (y^2z)i + (2xyz)j + (xy^2)k;$$

Logo, $\nabla f(1,1,1) = i + 2j + k$;

Portanto, $D_u f(1,1,1) = \nabla f(1,1,1).u = (i+2j+k).\left(\frac{2}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{6}{7}k\right)$

$$= \frac{2}{7} + \frac{6}{7} + \frac{6}{7} = 2;$$

03 Encontre os dois vetores unitários tais que $D_u F(1,2) = 0$, sabendo que $F(x,y) = xy + y^2$;

Solução: encontremos $\nabla F(x,y)$;

$\nabla F(x,y) = F_x i + F_y j = y i + (x+2y) j$; logo, $\nabla F(1,2) = 2i + 5j$;

Como, $D_u F(1,2) = \nabla F(1,2).u$ e por hipótese $D_u F(1,2) = 0$, procuramos dois vetores unitários u, tais que $\nabla F(1,2).u = 0$;

Sabemos da Geometria Analítica que uma maneira simples de representar um vetor unitário no plano cartesiano é:

$u = \cos\theta\, i + \operatorname{sen}\theta\, j$; Então, temos:

$\nabla F.u = 0 \therefore (2i+5j).(\cos\theta\, i + \operatorname{sen}\theta\, j) = 0 \therefore 2\cos\theta + 5\operatorname{sen}\theta = 0$;

Ou seja: $\cos\theta = -\frac{5}{2}\operatorname{sen}\theta$;

Isto em $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, nos dá: $\frac{25}{4}\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$;

Ou seja: $\frac{29}{4}\operatorname{sen}^2\theta = 1 \therefore \operatorname{sen}^2\theta = \frac{4}{29} \therefore \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{2}{\sqrt{29}}$;

Quando, $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{29}}$ teremos $\cos\theta = \frac{-5}{\sqrt{29}}$ e $u = -\frac{5}{\sqrt{29}} i + \frac{2}{\sqrt{29}} j$;

E, quando $\operatorname{sen}\theta = \frac{-2}{\sqrt{29}}$ teremos $\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{29}}$ e $u = \frac{5}{\sqrt{29}} i - \frac{2}{\sqrt{29}} j$;

04 Mostre que não existe qualquer vetor unitário u tal que $D_u F(1,2)$, para $F(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2$, seja: a) maior do que $\sqrt{185}$; b) menor do que $-\sqrt{185}$;

Solução: encontremos $\nabla F(x,y)$; $\nabla F(x,y) = (2x-3y) i + (-3x+8y) j$;

Logo, $\nabla F(1,2) = (2-6) i + (-3+16) j = -4i + 13j$;

E, $\|\nabla F(1,2)\| = \sqrt{(-4)^2 + (13)^2} = \sqrt{16+169} = \sqrt{185}$;

Sabemos, que qualquer que seja o vetor unitário u, sempre teremos: $D_u F(1,2) = \nabla F(1,2).u = \|\nabla F(1,2)\|.\underbrace{\|u\|}_{1}.\cos\theta = \sqrt{185}.\cos\theta$;

E como $-1 \le \cos\theta \le 1$, sempre teremos:

$-\sqrt{185} \le D_u F(1,2) \le \sqrt{185}$; Portanto, não existe qualquer u tal que $D_u F(1,2) > \sqrt{185}$ ou $D_u F(1,2) < -\sqrt{185}$;

04 A temperatura, em graus Celsius, em um ponto (x,y) de uma placa retangular, no plano-xy, é: $T(x,y)=\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$; determine, a partir do ponto $(1,1)$, a direção e o sentido tais que a taxa de variação da temperatura alcance seu valor mínimo. Qual este valor?

Solução: sabemos que a derivada direcional alcança seu valor mínimo, quando o vetor unitário u tem a mesma direção, porém o sentido oposto ao do vetor gradiente, calculado no ponto dado. Ou seja: quando $u=\dfrac{-1}{\|\nabla T(1,1)\|}\nabla T(1,1)$;

Ora, $\nabla T(x,y)=\left[\dfrac{y(1+x^2+y^2)-2x(xy)}{(1+x^2+y^2)^2}\right]i+\left[\dfrac{x(1+x^2+y^2)-2y(xy)}{(1+x^2+y^2)^2}\right]j$;

Ou seja: $\nabla T(x,y)=\left[\dfrac{y+y^3-x^2y}{(1+x^2+y^2)^2}\right]i+\left[\dfrac{x+x^3-xy^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right]j$; Logo, $\nabla T(1,1)=\frac{1}{9}i+\frac{1}{9}j$;

E, portanto, $u=\dfrac{-1}{\sqrt{(\frac{1}{9})^2+(\frac{1}{9})^2}}\left(\frac{1}{9}i+\frac{1}{9}j\right)=\dfrac{-9}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{9}i+\frac{1}{9}j\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}i-\frac{1}{\sqrt{2}}j$;

E o valor mínimo é: $-\|\nabla T(1,1)\|=-\dfrac{\sqrt{2}}{9}$;

05 A temperatura, em graus Celsius, em um ponto (x,y,z) de um sólido tridimensional, no espaço-xyz, é: $T(x,y,z)=\dfrac{60}{x^2+y^2+z^2+3}$; determine, a partir do ponto $(3,-2,2)$, a direção e o sentido tais que a taxa de variação da temperatura alcance seu valor máximo. Qual este valor?

Solução: sabemos da teoria, que a derivada direcional alcança seu valor máximo, quando o vetor unitário u tem a mesma direção e o mesmo sentido do vetor gradiente, calculado no ponto dado: $u=\dfrac{1}{\|\nabla T(3,-2,2)\|}\nabla T(3,-2,2)$;

$$\begin{aligned}\text{Ora, } \nabla T(x,y,z)&=T_x i+T_y j+T_z k\\&=(60.(x^2+y^2+z^2+3)^{-1})_x i+(60.(x^2+y^2+z^2+3)^{-1})_y j+(60.(x^2+y^2+z^2+3)^{-1})_z k\\&=(-120x(x^2+y^2+z^2+3)^{-2})i+(-120y(x^2+y^2+z^2+3)^{-2})j+(-120z(x^2+y^2+z^2)^{-2})k;\end{aligned}$$

Logo, $\nabla T(3,-2,2)=-\dfrac{360}{400}i+\dfrac{240}{400}j-\dfrac{240}{400}k=\dfrac{-9}{10}i+\dfrac{6}{10}j-\dfrac{6}{10}k$;

Então, $\|\nabla T(3,-2,2)\|=\sqrt{\dfrac{81}{100}+\dfrac{36}{100}+\dfrac{36}{100}}=\dfrac{\sqrt{153}}{10}$;

E, portanto, $u=\dfrac{1}{\|\nabla T(3,-2,2)\|}\nabla T(3,-2,2)=\dfrac{10}{\sqrt{153}}\left(\dfrac{-9}{10}i+\dfrac{6}{10}j-\dfrac{6}{10}k\right)=\dfrac{-9}{\sqrt{153}}i+\dfrac{6}{\sqrt{153}}j-\dfrac{6}{\sqrt{153}}k$;

E o valor máximo é: $\|\nabla T(3,-2,2)\|=\dfrac{\sqrt{153}}{10}$;

(06) A equação da superfície de uma montanha é dada por $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$, onde as distâncias são medidas em metros. Suponha que o eixo-x positivo aponte para o Leste, e que o eixo-y positivo aponte para o Norte. Uma alpinista se encontra no ponto $(-10, 5, 850)$. Então, decida se a alpinista estará subindo, ou descendo, ou nem subindo e nem descendo, caso ela se mova, na direção e sentido:

(a) Leste; (b) Norte; (c) Noroeste; (d) Sudeste;

Solução: como $D_u z = \nabla z \cdot u$, calculemos logo: $\nabla z(x,y)$;

$\nabla z(x,y) = z_x i + z_y j = -6x i + (-4y) j$; Logo, $\nabla z(-10,5) = 60i - 20j$;

(a) O vetor unitário que tem a direção e o sentido Leste, é o vetor:

$u = i = 1i + 0j$;

Portanto, $D_u z(-10,5) = \nabla z(-10,5) \cdot u = (60i - 20j) \cdot (1i + 0j) = 60 > 0$;

Então, caso ela se mova na direção e sentido Leste, ela estará subindo, já que $D_u z(-10,5) = 60 > 0$;

(b) O vetor unitário que tem a direção e o sentido Norte, é o vetor:

$u = j = 0i + 1j$;

Portanto, $D_u z(-10,5) = \nabla z(-10,5) \cdot u = (60i - 20j) \cdot (0i + 1j) = -20 < 0$;

Então, caso ela se mova na direção e sentido Norte, ela estará descendo, já que $D_u z(-10,5) = -20 < 0$;

(c) O vetor unitário que tem a direção e o sentido Noroeste, é o vetor:

$u = -\frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j$;

Portanto, $D_u z(-10,5) = \nabla z(-10,5) \cdot u = (60i - 20j) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j\right) = -\frac{80}{\sqrt{2}} < 0$;

Então, caso ela se mova na direção e sentido Noroeste, ela estará descendo, já que $D_u z(-10,5) = -40\sqrt{2} < 0$;

(d) O vetor unitário que tem a direção e o sentido Sudeste, é o vetor:

$u = \frac{1}{\sqrt{2}} i - \frac{1}{\sqrt{2}} j$; Portanto, $D_u z(-10,5) = (60i - 20j) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} i - \frac{1}{\sqrt{2}} j\right) = \frac{80}{\sqrt{2}} > 0$;

Então, caso ela se mova na direção e sentido Sudeste, ela estará subindo, já que $D_u z(-10,5) = 40\sqrt{2} > 0$;