LISTA · PLANOS TANGENTES E RETAS NORMAIS À SUPERFÍCIES

(01) Em cada caso, encontre equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada em seu ponto indicado:

(a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4$; $(4,1,1)$; (b) $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=14$; $(-8,27,1)$; (c) $z=e^{3x}\operatorname{sen}3y$; $(0,\frac{\pi}{6},1)$;

(02) Em cada caso, mostre que uma equação do plano tangente à superfície dada em um seu ponto genérico (x_0,y_0,z_0), pode ser colocada na forma indicada ao lado da equação da superfície:

(a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z=1$; (b) $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$; $z+z_0=\frac{2x_0}{a^2}x+\frac{2y_0}{b^2}y$;

(03) Mostre que qualquer reta normal à esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, em um seu ponto genérico (x_0,y_0,z_0), passa sempre pela origem $(0,0,0)$;

(04) Mostre que qualquer plano tangente ao cone de duas folhas $z^2=x^2+y^2$, em um seu ponto genérico (x_0,y_0,z_0), passa sempre pela origem $(0,0,0)$;

(05) Determine, se existir, outro ponto no parabolóide $z=x^2+y^2$ onde a reta normal, à este parabolóide, em seu ponto $(1,1,2)$, volta a interceptá-lo;

(06) Determine, se existirem, pontos na esfera $x^2+y^2+z^2=102$, nos quais a reta normal ao elipsóide $4x^2+y^2+4z^2=12$ em seu ponto $(1,2,1)$, a intercepta;

(07) Mostre que a soma das interseções com os eixos coordenados de qualquer plano tangente à superfície $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{c}$, $c>0$, em um seu ponto genérico (x_0,y_0,z_0), com $x_0>0$, $y_0>0$ e $z_0>0$, é uma constante;

(08) Mostre que a soma dos quadrados das coordenadas dos pontos de corte, com os eixos coordenados, de qualquer plano tangente à esfera astroidal $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}$, $a>0$, em um seu ponto genérico (x_0,y_0,z_0), com $x_0\neq0$, $y_0\neq0$ e $z_0\neq0$, é sempre igual à: a^2;

(09) Mostre que o volume de qualquer pirâmide determinada pelos planos coordenados e por qualquer plano tangente à superfície $xyz=c$, $c>0$, em um seu ponto genérico (x_0,y_0,z_0), com $x_0>0$, $y_0>0$ e $z_0>0$, é constante;

(10) Mostre que a reta normal à superfície $xy+z=2$ em seu ponto $(1,1,1)$ passa pela origem;

(11) Seja F uma função diferenciável. Utilize a regra da cadeia para mostrar que todos planos tangentes à superfície $xF(\frac{y}{x})-z=0$, $x\neq0$, passam pela origem;

⑫ Dadas duas superfícies $F(x,y,z)=k$ e $G(x,y,z)=l$, k e l reais, com um ponto comum (x_0,y_0,z_0), no qual $\nabla F \neq 0$ e $\nabla G \neq 0$, diz-se que elas são tangentes, nesse ponto, quando existe $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ tal que $\nabla F = \lambda \nabla G$, nesse mesmo ponto. Neste caso, $F(x,y,z)=k$ e $G(x,y,z)=l$ possuem o mesmo plano tangente em (x_0,y_0,z_0). Mostre, que as esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$ e $(x-b)^2+y^2+z^2=(b-a)^2$, $0<a<b$, são tangentes em $(a,0,0)$;

⑬ Dadas duas superfícies $F(x,y,z)=k$ e $G(x,y,z)=l$, k e l reais, com um ponto comum (x_0,y_0,z_0), no qual $\nabla F \neq 0$ e $\nabla G \neq 0$, diz-se que elas são ortogonais, nesse ponto, quando $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \cdot \nabla G(x_0,y_0,z_0)=0$. Mostre que a superfície $x^2-2yz+y^3=4$ é ortogonal a cada membro da família de superfícies: $x^2+(4c-2)y^2-cz^2+1=0$, $\forall c \in \mathbb{R}$, em seu ponto comum $(1,-1,2)$;

⑭ Uma curva $r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ é dita ser normal à uma superfície $F(x,y,z)=k$, $k \in \mathbb{R}$, em um ponto comum (x_0,y_0,z_0), no qual $r' \neq 0$ e $\nabla F \neq 0$, quando existe $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ tal que $r'(t_0)=\lambda \nabla F(x_0,y_0,z_0)$, onde t_0 é tal que $r(t_0)=(x_0,y_0,z_0)$. Mostre que a curva $r(t)=\sqrt{t}\,i+\sqrt{t}\,j-\frac{1}{4}(t+3)k$ é normal à superfície $x^2+y^2-z=3$, quando $t_0=1$;

⑮ Uma curva $r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ é dita ser tangente à uma superfície $F(x,y,z)=k$, $k \in \mathbb{R}$, em um ponto comum (x_0,y_0,z_0), no qual $r' \neq 0$ e $\nabla F \neq 0$, quando $r'(t_0) \cdot \nabla F(x_0,y_0,z_0)=0$. Mostre que a curva $r(t)=\sqrt{t}\,i+\sqrt{t}\,j+(2t-1)k$ é tangente à superfície $x^2+y^2-z=1$, quando $t_0=1$;

⑯ Em cada caso, as duas superfícies dadas se interceptam ao longo de uma curva. Então, encontre equações da reta tangente à esta curva em seu ponto especificado:

ⓐ o parabolóide $z=x^2+y^2$ e o elipsóide $x^2+4y^2+z^2=9$, em $(1,-1,2)$;

ⓑ os cilindros $x^2+z^2=25$ e $y^2+z^2=25$, em $(3,3,4)$;

⑰ Em cada caso, encontre, se existirem, pontos nas superfícies dadas satisfazendo às condições indicadas:

ⓐ em $x^2-y^2-z^2=1$, com plano tangente paralelo ao plano $z=x+y$;

ⓑ em $z=8-3x^2-2y^2$, com plano tangente ortogonal à reta: $x=2-3t$; $y=7+8t$; $z=5-t$;

ⓒ em $(y+z)^2+(z-x)^2=16$, com reta normal paralela ao plano yz;

ⓓ em $xy+yz+zx-x-z^2=0$, com plano tangente paralelo ao plano xy;

⑱ Encontre os três pontos na superfície $xy+z=2$, nos quais as respectivas retas normais, à esta superfície, passam pela origem;