Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Fortaleza, 18 de novembro de 2022

Sumário

- Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional com f.d.p conjunta definida por

$$f(x,y) = \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) \underset{[0,1]}{I}(x) \underset{[0,2]}{I}(y)$$

(a) Determine as densidades marginais.
(b) Determine as densidades condicionais.
(c) Determine as esperanças condicionais.
(d) Determine a covariância entre X e Y.

Função Geradora de Momentos Multidimensional

Definição:

- Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ um vetor aleatório e $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)' \in \mathbb{R}^n$. Definimos a *função geradora de momentos multidimensional* por

$$M_{\mathbf{X}}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \mathbb{E}\left(e^{\mathbf{t}'\mathbf{X}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{t_1X_1+t_2X_2+\cdots+t_nX_n}\right)$$

- $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) = 1$, em que $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)'$
- Sejam $k_1, k_2, \ldots, k_n$ inteiros não negativos tais que, $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$. Então,

$$\frac{\partial^k}{\partial t_1^{k_1} \cdots \partial t_n^{k_n}} M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = \mathbb{E}(X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n})$$

- Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Então a f.g.m de $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{b}$ é dada por

$$M_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{t}'\mathbf{b}} M_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}'\mathbf{t}).$$

- A função geradora de momentos marginal da k-ésima componente é obtida da seguinte forma:

$$M_{X_k}(t) = M_{\mathbf{X}}(0, 0, \ldots, t_k, \ldots, 0)$$

em que, somente $t_k \neq 0$.

- Seja (X_1, X_2, X_3) um vetor aleatório com f.g.m conjunta dada por

$$M_{\mathbf{X}}(t_1, t_2, t_3) = (p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + p_3 e^{t_3})^n$$

em que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

(a) Determine as f.g.m's marginais.
(b) Determine a covariância entre X_1 e X_2

Função Geradora de Momentos Multidimensional

Definição:

- Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a's independentes com funções geradoras de momentos $M_{X_i}(t)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, respectivamente. A f.g.m de $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ existe e é dada por

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t).$$

- Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a's independentes com função geradora de momentos conjunta $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$. Nesse caso, é possível mostrar que

$$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t_i).$$

Soma de algumas v.a's

Teorema 2

Sejam $X_i \sim B(m_i, p)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, v.a's independentes. Então

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(\sum_{i=1}^{n} m_i, p).$$

Teorema 3

Sejam $X_i \sim P(\lambda_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, v.a's independentes. Então

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i).$$

Soma de algumas v.a's

Teorema 4

Sejam $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, v.a's independentes. Então

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2).$$

Teorema Central do Limite (TCL)

Em geral não é fácil determinar a distribuição exata da soma de v.a's independentes. O próximo resultado fornece uma distribuição *aproximada* para somas.

Teorema 5

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de v.a's independentes com variância finita. Sendo $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ a sequência de somas parciais, então para n suficientemente grande, temos que

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

Lê-se: para n grande, a distribuição da v.a $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}$ é aproximadamente uma normal padrão.

Teorema Central do Limite (TCL)

Corolário 1

Seja $X_1, X_2 \dots$ uma sequência de v.a's independentes com variância finita então o TCL estabelece que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \leq x\right) \approx \Phi(x)$$

Teorema Central do Limite (TCL)

Corolário 2

Seja $X_1, X_2 \ldots$ uma sequência de v.a's independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância $\sigma^2 < \infty$. Então, quando $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1) \text{ ou, equivalentemente } \bar{X}_n \approx N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}).$$

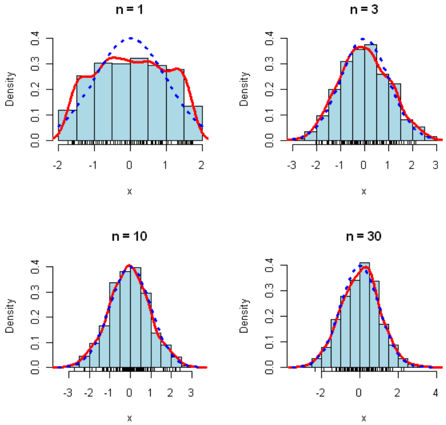

Figura 1: Ilustração do TCL para amostras provenientes de uma população uniforme com média $1/2$ e desvio-padrão $1/\sqrt{12}$

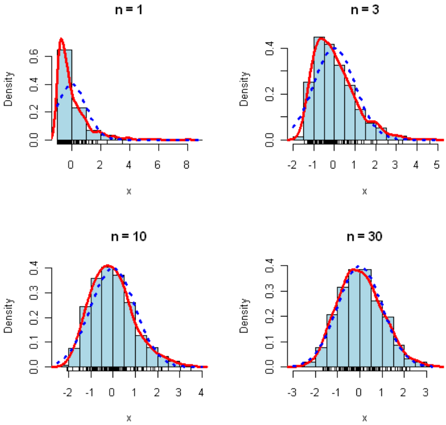

Figura 2: Ilustração do TCL para amostras provenientes de uma população exponencial com média 1 e desvio-padrão 1

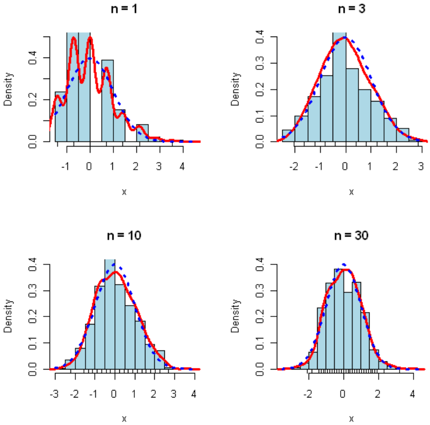

Figura 3: Ilustração do TCL para amostras provenientes de uma população Poisson com média 2 e desvio-padrão $\sqrt{2}$

- Sabe-se que 80% das peças produzidas por uma indústria passam por três testes de qualidade. Uma amostra de 200 peças é escolhida ao acaso da linha de produção. Qual a probabilidade de que o número de peças na amostra que passam pelos três testes de qualidade esteja compreendido entre 154 e 170.

- Utilizado o teorema central do limite mostre que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

- Um dado é lançado 2500 vezes. Determine a probabilidade aproximada de que soma dos pontos seja menor do que 8850.