Variáveis Aleatórias Contínuas

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Depto. de Estatística e Matemática Aplicada - UFC

Fortaleza, 26 de agosto 2022

Sumário

Definição

Seja X uma v.a com f.d.a F. A mediana (M_d) de X é por definição qualquer número $x_{0,5}$ que satisfaça a desigualdade:

$$\mathbb{P}(X \leq x_{0,5}) \geq \frac{1}{2} \text{ e } \mathbb{P}(X \geq x_{0,5}) \geq \frac{1}{2}, \tag{1}$$

em particular $x_{0,5}$ pode ser o valor médio dos valores de X que satisfazem (1).
Note que, para v.a's contínuas com densidade de probabilidade f, a mediana satisfaz

$$\mathbb{P}(X \leq x_{0,5}) = \int_{-\infty}^{x_{0,5}} f(x)dx = F(x_{0,5}) = \frac{1}{2}.$$

Definição

Para determinar qualquer quantil devemos ter

$$\mathbb{P}(X \leq x_q) = F(x_q) = q$$

para algum $q \in [0, 1]$.

Definição

A moda de uma v.a X é o valor x em que a sua função de probabilidade (no caso discreto) ou a sua densidade de probabilidade (no caso contínuo) toma o valor máximo. Simbolicamente temos,

$$Mo = \arg\ \max_x p(x) \text{ ou } Mo = \arg\ \max_x f(x)$$

- Considere a v.a X com a seguinte densidade:

$$f(x) = 2\exp(-2x) \text{ para todo } x \geq 0$$

Temos que a f.d.a de X é dada por

$$F(x) = \int_0^{\infty} 2\exp(-2u)du = -\exp(-2u)]_0^{\infty} = 1 - \exp(-2x).$$

para todo $x \geq 0$ e 0 caso contrário.

- Assim a mediana de X é o valor $x_{0,5}$ que satisfaz a equação

$$F(x_{0,5}) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - \exp\left(-2x_{0,5}\right) = 0,5 \Leftrightarrow x_{0,5} = 0,5\ln\left(2\right).$$

Portanto,

$$M_d(X) = 0,5\ln\left(2\right).$$

Não é difícil ver que,

$$Mo(X) = \arg\,\max_x f(x) = 0.$$

Mais exemplos

- Seja uma X v.a contínua e considere:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2), & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine a mediana de X.

(b) Determine a moda de X.

Mais exemplos

- Seja uma X v.a contínua e considere:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine a mediana de X.

(b) Determine a moda de X.