Introdução à Teoria de Probabilidades

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Depto. de Estatística e Matemática Aplicada - UFC

Fortaleza, 04 de abril de 2022

Sumário

Propriedades

- Dado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espeço de probabilidade então vale:

- *Subaditividade:* para quaisquer eventos $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ temos

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right)$$

- *Continuidade Monótona:* Seja $\{A_n\} \in \mathcal{F}$ então
  (i) Se $A_n \uparrow A$ então $\mathbb{P}(A_n) \uparrow \mathbb{P}(A)$.

  (ii) Se $A_n \downarrow A$ então $\mathbb{P}(A_n) \downarrow \mathbb{P}(A)$.

Propriedades

- *Lema de Fatou:*

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right).$$

- Se $A_n \to A$, então $\mathbb{P}\left(A_n\right) \to \mathbb{P}(A)$

Exemplos

- Dados $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$ determine os valores máximo e mínimo de $\mathbb{P}(A \cap B)$.

- Demonstre as seguintes propriedades:
  (a) Se $\mathbb{P}(A_n) = 0$ para todo $n \geq 1$, então $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n) = 0$

  (b) Se $\mathbb{P}(A_n) = 1$ para todo $n \geq 1$, então $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_n) = 1$

  (c) Sejam $\{A_n, n \geq 1\}$ e $\{B_n, n \geq 1\}$ eventos de um mesmo espaço de probabilidade tais que $\mathbb{P}(A_n) \to 1$ e $\mathbb{P}(B_n) \to p$. Mostre que $\mathbb{P}(A_n \cap B_n) \to p$, em que $p \in [0, 1]$.

  (d) Sejam $\{A_n, n \geq 1\}$ eventos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ com $\mathbb{P}(A_n) \geq c > 0$, para todo $n \geq 1$. Mostre que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq c$.