LISTA RESOLVIDA. EXTREMOS RELATIVOS

(01) Em cada caso encontre, se existirem, pontos críticos (x_0, y_0) nos quais $F_x(x_0,y_0) = F_y(x_0,y_0) = 0$, para em seguida usar o Teste das derivadas parciais de 2ª ordem e, se possível, classificá-los como pontos de máximos locais, mínimos locais ou de sela:

(a) $F(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$;

Solução: Temos, $F_x = -2 - 2x$ e $F_y = 4 - 8y$; Vamos então procurar pontos (x_0,y_0) tais que $F_x = F_y = 0$:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} -2-2x = 0 \therefore -2x = 2 \therefore x = -1; \\ 4 - 8y = 0 \therefore 8y = 4 \therefore y = 1/2; \end{cases}$$

Portanto $(-1, 1/2)$ é o único ponto no qual $F_x = F_y = 0$;

Agora, vamos encontrar $D = F_{xx} \cdot F_{yy} - [F_{xy}]^2$; Temos:

$F_{xx} = -2$; $F_{yy} = -8$; e $F_{xy} = F_{yx} = 0$;

Logo $D(-1, 1/2) = F_{xx}(-1,1/2) . F_{yy}(-1,1/2) - [F_{xy}(-1,1/2)]^2 = (-2).(-8) - 0^2 = 16 > 0$;

E como $F_{xx}(-1,1/2) = -2 < 0$, o ponto $(-1, 1/2)$ é de máximo local;

(b) $F(x,y) = x^3 + y^3 - 18xy + 1$;

Solução: Temos, $F_x = 3x^2 - 18y$ e $F_y = 3y^2 - 18x$; Vamos então resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} 3x^2 - 18y = 0 \therefore 3(x^2 - 6y) = 0 \therefore y = x^2/6; \\ 3y^2 - 18x = 0 \therefore \text{Logo, } 3\left(\frac{x^2}{6}\right)^2 - 18x = 0 \therefore \frac{x^4}{12} - 18x = 0 \therefore x^4 - 216x = 0; \end{cases}$$

E $x^4 - 216x = 0$, tem como solução: $x = 0$ ou $x^3 = 216$; ou seja:

$x = 0$ e nesse caso como $y = \frac{x^2}{6}$, teremos $y = 0$; e o ponto $(0,0)$;

$x = 6$ e nesse caso como $y = \frac{x^2}{6}$, teremos $y = 6$; e o ponto $(6,6)$;

Ou seja, há dois pontos: $(0,0)$ e $(6,6)$; nos quais $F_x = F_y = 0$;

Agora vamos encontrar $D = F_{xx} \cdot F_{yy} - [F_{xy}]^2$; Temos:

$F_{xx} = 6x$; $F_{yy} = 6y$; e $F_{xy} = F_{yx} = -18$;

Logo:

$D(0,0) = F_{xx}(0,0).F_{yy}(0,0) - [F_{xy}(0,0)]^2 = 0.0 - [-18]^2 = -324 < 0$;

Portanto, $(0,0)$ é um ponto de sela, ou seja: não é um ponto de máximo relativo e nem é um ponto de mínimo relativo;

$D(6,6) = F_{xx}(6,6).F_{yy}(6,6) - [F_{xy}(6,6)]^2 = 36.36 - 324 = 972 > 0$;

E como $F_{xx}(6,6) = 36 > 0$, o ponto $(6,6)$ é de mínimo local;

ⓒ $f(x,y) = x^3 - 15x + y^3 - 15y + 3xy^2$;

Solução: Temos, $f_x = 3x^2 - 15 + 3y^2$ e $f_y = 3y^2 - 15 + 6xy$; Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} 3x^2 - 15 + 3y^2 = 0 \\ 3y^2 - 15 + 6xy = 0 \end{cases} > 3x^2 - 15 + 3y^2 = 3y^2 - 15 + 6xy$;

Ou seja: $3x^2 = 6xy \therefore x^2 = 2xy \therefore \begin{cases} x = 0; \\ x \neq 0 \text{ e } x = 2y; \end{cases}$

Se substituímos $x = 0$, em $3x^2 - 15 + 3y^2 = 0$, obtemos: $y^2 = 5 \therefore y = \pm\sqrt{5}$;

Ou seja, temos dois pontos: $(0, \sqrt{5})$ e $(0, -\sqrt{5})$;

Agora se $x \neq 0$ e substituímos $x = 2y$ em $3x^2 - 15 + 3y^2 = 0$, obtemos:

$3(2y)^2 - 15 + 3y^2 = 0 \therefore 15y^2 = 15 \therefore y^2 = 1 \therefore y = \pm 1$;

Se $y = 1$, como $x = 2y$, temos o ponto $(2,1)$; E se $y = -1$ temos: $(-2,-1)$;

Portanto, há quatro pontos: $(0,\sqrt{5})$; $(0,-\sqrt{5})$; $(2,1)$; e $(-2,-1)$; nos quais $f_x = f_y = 0$; Agora, vamos encontrar $D = f_{xx} \cdot f_{yy} - [f_{xy}]^2$; Temos:

$f_{xx} = 6x$; $f_{yy} = 6y + 6x$; e $f_{xy} = f_{yx} = 6y$; Logo:

$D(0,\sqrt{5}) = f_{xx}(0,\sqrt{5}) . f_{yy}(0,\sqrt{5}) - [f_{xy}(0,\sqrt{5})]^2 = 0 . 6\sqrt{5} - [6\sqrt{5}]^2 = -180 < 0$;

Portanto, $(0,\sqrt{5})$ é um ponto de sela;

$D(0,-\sqrt{5}) = f_{xx}(0,-\sqrt{5}) . f_{yy}(0,-\sqrt{5}) - [f_{xy}(0,-\sqrt{5})]^2 = 0 . (-6\sqrt{5}) - [-6\sqrt{5}]^2 = -180 < 0$;

Ou seja, $(0,-\sqrt{5})$ também é um ponto de sela;

$D(2,1) = f_{xx}(2,1) . f_{yy}(2,1) - [f_{xy}(2,1)]^2 = (12).(18) - [6]^2 = 180 > 0$;

E como $f_{xx}(2,1) = 12 > 0$, o ponto $(2,1)$ é de mínimo local;

$D(-2,-1) = f_{xx}(-2,-1) . f_{yy}(-2,-1) - [f_{xy}(-2,-1)]^2 = (-12).(-18) - [-6]^2 = 180 > 0$;

E como $f_{xx}(-2,-1) = -12 < 0$, o ponto $(-2,-1)$ é de máximo local;

ⓓ $f(x,y) = e^{xy}$;

Solução: Temos, $f_x = e^{xy} . y$ e $f_y = e^{xy} . x$; Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \therefore$

$\therefore \begin{cases} y . e^{xy} = 0 \\ x . e^{xy} = 0 \end{cases}$; e como $e^{xy} > 0$, temos apenas: $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$; ou seja o ponto $(0,0)$;

Agora, vamos encontrar $D = f_{xx} \cdot f_{yy} - [f_{xy}]^2$; Temos:

$f_{xx} = y e^{xy} . y = y^2 e^{xy}$; $f_{yy} = x e^{xy} . x = x^2 e^{xy}$; e $f_{xy} = f_{yx} = [e^{xy} + e^{xy} . x . y]$;

Ou seja, $f_{xy} = f_{yx} = e^{xy} . (1 + xy)$;

Logo, $D(0,0) = f_{xx}(0,0) . f_{yy}(0,0) - [f_{xy}(0,0)]^2 = 0 . 0 - [1]^2 = -1 < 0$;

Portanto, $(0,0)$ é um ponto de sela;

(e) $f(x,y) = x^4 + y^3 - 2x^2 - 3y + 3$;

Solução: Temos, $f_x = 4x^3 - 4x$ e $f_y = 3y^2 - 3$; Vamos resolver o sistema

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x^3 - x = 0 \therefore x = 0;\ x = 1 \text{ ou } x = -1; \\ y^2 - 1 = 0 \therefore y = 1 \text{ ou } y = -1; \end{cases}$$

Portanto, há 6 pontos: $(0,1)$; $(0,-1)$; $(1,1)$; $(1,-1)$; $(-1,1)$; e $(-1,-1)$ nos quais $f_x = f_y = 0$; Vamos encontrar $D = f_{xx} \cdot f_{yy} - [f_{xy}]^2$; Temos:

$f_{xx} = 12x^2 - 4$; $f_{yy} = 6y$; e $f_{xy} = f_{yx} = 0$; Logo:

$D(0,1) = f_{xx}(0,1) \cdot f_{yy}(0,1) = (-4) \cdot 6 = -24 < 0$; Então, $(0,1)$ é ponto de sela;

$D(0,-1) = f_{xx}(0,-1) \cdot f_{yy}(0,-1) = (-4) \cdot (-6) = 24 > 0$; E como $f_{xx}(0,-1) = -4 < 0$, o ponto $(0,-1)$ é de máximo local;

$D(1,1) = f_{xx}(1,1) \cdot f_{yy}(1,1) = 8 \cdot 6 = 48 > 0$; E como $f_{xx}(1,1) = 8 > 0$, o ponto $(1,1)$ é de mínimo local;

$D(1,-1) = f_{xx}(1,-1) \cdot f_{yy}(1,-1) = 8 \cdot (-6) = -48 < 0$; Então $(1,-1)$ é ponto de sela;

$D(-1,1) = f_{xx}(-1,1) \cdot f_{yy}(-1,1) = 8 \cdot 6 = 48 > 0$; E como $f_{xx}(-1,1) = 8 > 0$, o ponto $(-1,1)$ é de mínimo local;

$D(-1,-1) = f_{xx}(-1,-1) \cdot f_{yy}(-1,-1) = 8 \cdot (-6) = -48 < 0$; Então $(-1,-1)$ é ponto de sela;

(f) $f(x,y) = xy + 2x - \ln(x^2 y)$; $x \neq 0$ e $y > 0$;

Solução: Temos, $f_x = y + 2 - \frac{1}{x^2 y} \cdot 2xy = y + 2 - \frac{2}{x}$ e $f_y = x - \frac{1}{x^2 y} \cdot x^2 = x - \frac{1}{y}$;

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} y + 2 - 2 \cdot \frac{1}{x} = 0 \\ x - \frac{1}{y} = 0 \therefore x = \frac{1}{y} \therefore y = \frac{1}{x} \end{cases} \therefore y + 2 - 2y = 0 \therefore y = 2 \text{ e } x = \frac{1}{2};$$

Ou seja, há um único ponto $(\frac{1}{2}, 2)$ no qual $f_x = f_y = 0$;

Agora, encontremos $D = f_{xx} \cdot f_{yy} - [f_{xy}]^2$;

$f_{xx} = \frac{2}{x^2}$; $f_{yy} = \frac{1}{y^2}$; e $f_{xy} = f_{yx} = 1$;

Logo, $D(\frac{1}{2}, 2) = f_{xx}(\frac{1}{2}, 2) \cdot f_{yy}(\frac{1}{2}, 2) - [f_{xy}(\frac{1}{2}, 2)]^2 = 8 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 1 > 0$;

E como $f_{xx}(\frac{1}{2}, 2) = 8 > 0$, o ponto $(\frac{1}{2}, 2)$ é de mínimo local;

(g) $f(x,y) = 2\ln x + \ln y - 4x - y$; $x>0$ e $y>0$;

Solução: Temos, $f_x = \frac{2}{x} - 4$ e $f_y = \frac{1}{y} - 1$; Logo, de $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$, concluímos:

$\begin{cases} \frac{2}{x} - 4 = 0 \therefore x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} - 1 = 0 \therefore y = 1 \end{cases}$ ∴ Ou seja, $(\frac{1}{2}, 1)$ é o único ponto no qual $f_x = f_y = 0$;

Agora, encontremos $D = f_{xx} \cdot f_{yy} - [f_{xy}]^2$; $f_{xx} = -\frac{2}{x^2}$; $f_{yy} = -\frac{1}{y^2}$; $f_{xy} = f_{yx} = 0$;

Então, $D(\frac{1}{2}, 1) = f_{xx}(\frac{1}{2}, 1) \cdot f_{yy}(\frac{1}{2}, 1) = \frac{(-2)}{1/4} \cdot (-1) = 8 > 0$;

E como $f_{xx}(\frac{1}{2}, 1) = -8 < 0$, $(\frac{1}{2}, 1)$ é um ponto de máximo local;

(h) $f(x,y) = 2 + xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; $x \neq 0$ e $y \neq 0$;

Solução: Temos, $f_x = y - \frac{1}{x^2}$ e $f_y = x - \frac{1}{y^2}$; Logo, de $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$, concluímos:

$\begin{cases} y - \frac{1}{x^2} = 0 \therefore y = \frac{1}{x^2} \therefore x^2 y = 1 \\ x - \frac{1}{y^2} = 0 \therefore x = \frac{1}{y^2} \therefore x y^2 = 1 \end{cases}$ $> x^2 y = x y^2 \ (x \neq 0 \text{ e } y \neq 0) \therefore x = y$;

E $x = y$ em $x^2 y = 1$ nos dá: $y^3 = 1 \therefore y = 1$. Logo como $x = y$, teremos também $x = 1$;

Ou seja $(1,1)$ é o único ponto no qual $f_x = f_y = 0$; Encontremos D:

$f_{xx} = \frac{2}{x^3}$; $f_{yy} = \frac{2}{y^3}$; e $f_{xy} = f_{yx} = 1$;

Então, $D(1,1) = f_{xx}(1,1) \cdot f_{yy}(1,1) - [f_{xy}(1,1)]^2 = (2) \cdot (2) - [1]^2 = 3 > 0$. E como $f_{xx}(1,1) = 2 > 0$, o ponto $(1,1)$ é de mínimo local;

(i) $f(x,y) = e^x \cos y$;

Solução: Temos, $f_x = e^x \cos y$ e $f_y = e^x(-\operatorname{sen} y) = -e^x \operatorname{sen} y$; Então, de $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$,

concluímos: $\begin{cases} e^x \cos y = 0 \therefore (e^x \neq 0) \therefore \cos y = 0 \\ -e^x \operatorname{sen} y = 0 \therefore (e^x \neq 0) \therefore \operatorname{sen} y = 0 \end{cases}$;

Contudo a identidade Fundamental da Trigonometria circular nos informa que: $\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Logo $\nexists\, y \in \mathbb{R}$ tal que $\cos y = 0$ e $\operatorname{sen} y = 0$.

Ou seja, $\nexists\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f_x(x,y) = 0$ e $f_y(x,y) = 0$;

(j) $f(x,y) = x^2 + \frac{2}{xy} + y^2$; $x \neq 0$ e $y \neq 0$;

Solução: Temos $f_x = 2x - \frac{2}{yx^2}$ e $f_y = \frac{-2}{xy^2} + 2y$; Logo, de $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$, obtemos:

$$\begin{cases} 2\left(x - \frac{1}{yx^2}\right) = 0 \\ 2\left(\frac{-1}{xy^2} + y\right) = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x - \frac{1}{yx^2} = 0 \therefore yx^3 = 1 \\ -\frac{1}{xy^2} + y = 0 \therefore xy^3 = 1 \end{cases} > yx^3 = xy^3 \; (x \neq 0 \text{ e } y \neq 0) \therefore x^2 = y^2;$$

- Se $x = y$, então em $yx^3 = 1$ ficamos com $y^4 = 1 \therefore \begin{cases} y = 1 \text{ e } x = 1; \; (1,1); \\ y = -1 \text{ e } x = -1; \; (-1,-1); \end{cases}$

- Se $x = -y$, então em $yx^3 = 1$ ficamos com $-y^4 = 1$, que não tem solução em $\mathbb{R}$;

Logo, apenas para os pontos $(1,1)$ e $(-1,-1)$ temos $f_x = 0$ e $f_y = 0$;

Calculando D, obtemos: $f_{xx} = 2 + \frac{4}{yx^3}$; $f_{yy} = \frac{4}{xy^3} + 2$; e $f_{xy} = f_{yx} = \frac{2}{x^2y^2}$;

Logo:

$D(1,1) = 6.6 - [2]^2 = 32 > 0$; Como $f_{xx}(1,1) = 6$, $(1,1)$ é ponto de mínimo local;

$D(-1,-1) = 6.6 - [2]^2 = 32 > 0$; Como $f_{xx}(-1,-1) = 6$, $(-1,-1)$ é ponto de mínimo local;

(k) $f(x,y) = e^{x^2+y^2-4x}$;

Solução: Temos $f_x = e^{x^2+y^2-4x}.(2x-4)$ e $f_y = e^{x^2+y^2-4x}.(2y)$; Logo, do sistema

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}, \text{ concluímos: } \begin{cases} e^{x^2+y^2-4x}.(2x-4) = 0 \\ e^{x^2+y^2-4x}.2y = 0 \end{cases} \therefore (e^{x^2+y^2-4x} > 0) \therefore \begin{cases} 2x - 4 = 0 \therefore x = 2; \\ 2y = 0 \therefore y = 0; \end{cases}$$

Logo, apenas para o ponto $(2,0)$ temos $f_x = 0$ e $f_y = 0$;

Calculando D, obtemos:

$f_{xx} = [e^{x^2+y^2-4x}.(2x-4).(2x-4) + 2e^{x^2+y^2-4x}] = e^{x^2+y^2-4x}.[(2x-4)^2 + 2]$;

$f_{yy} = [e^{x^2+y^2-4x}.2y.2y + 2e^{x^2+y^2-4x}] = e^{x^2+y^2-4x}.2.(2y^2+1)$;

$f_{xy} = f_{yx} = e^{x^2+y^2-4x}.2y.(2x-4)$;

Portanto, $D(2,0) = f_{xx}(2,0).f_{yy}(2,0) - [f_{xy}(2,0)]^2$

$= (2e^{-4}).(2e^{-4}).-[0]^2 = \frac{2}{e^4} \cdot \frac{2}{e^4} = \frac{4}{e^8} > 0$;

E como $f_{xx}(2,0) = \frac{2}{e^4} > 0$, $(2,0)$ é um ponto de mínimo local;

(l) $f(x,y) = e^{x+y} - xe^{2y}$;

Solução: Temos, $f_x = e^{x+y} - e^{2y}$ e $f_y = e^{x+y} - 2xe^{2y}$; Logo do sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$, podemos concluir: $\begin{cases} e^{x+y} - e^{2y} = 0 \\ e^{x+y} - 2xe^{2y} = 0 \end{cases} > e^{x+y} - e^{2y} = e^{x+y} - 2xe^{2y} \therefore 2xe^{2y} = e^{2y}$;

Ou seja que $x = \frac{1}{2}$; E este valor de x em $e^{x+y} - e^{2y} = 0$, nos dá:

$e^{\frac{1}{2}+y} - e^{2y} = 0 \therefore e^{\frac{1}{2}+y} = e^{2y} \therefore \frac{1}{2} + y = 2y \therefore y = \frac{1}{2}$; Logo, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é o ponto para o qual se tem $f_x = 0$ e $f_y = 0$.

Calculemos D: $f_{xx} = e^{x+y}$; $f_{yy} = e^{x+y} - 4xe^{2y}$; e $f_{xy} = f_{yx} = e^{x+y} - 2e^{2y}$;

Logo, $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = f_{xx}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cdot f_{yy}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - [f_{xy}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]^2 = e \cdot (-e) - [-e]^2 = -2e^2 < 0$;

Ou seja, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é ponto de sela;

(m) $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$; $0 \le x \le 2\pi$; $0 \le y \le 2\pi$;

Solução: Temos, $f_x = \cos x$ e $f_y = \cos y$; Então de $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$, concluímos:

$\begin{cases} \cos x = 0 \ (0 \le x \le 2\pi) \therefore x = \pi/2 \text{ ou } x = 3\pi/2; \\ \cos y = 0 \ (0 \le y \le 2\pi) \therefore y = \pi/2 \text{ ou } y = \frac{3\pi}{2}; \end{cases}$

Então, nos quatro pontos: $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$; $(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$; $f_x = f_y = 0$; Portanto:

Calculemos D: $f_{xx} = -\operatorname{sen} x$; $f_{yy} = -\operatorname{sen} y$; e $f_{xy} = f_{yx} = 0$; E como $f_{xx}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = -1 < 0$,

$D(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = f_{xx}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cdot f_{yy}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (-1) \cdot (-1) = 1 > 0$; o ponto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ é de um máximo local;

$D(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) = f_{xx}(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \cdot f_{yy}(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) = (-1) \cdot (-(-1)) = -1 < 0$; $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ é ponto de sela;

$D(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = f_{xx}(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cdot f_{yy}(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (-(-1)) \cdot (-1) = -1 < 0$; $(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ é ponto de sela;

$D(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) = f_{xx}(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \cdot f_{yy}(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) = (-(-1)) \cdot (-(-1)) = 1 > 0$; E como $f_{xx}(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) = 1 > 0$, o ponto $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ é de um mínimo local;

(n) $f(x,y) = y\cos x$; $0 \le x \le 2\pi$;

Solução: Temos, $f_x = -y\operatorname{sen} x$ e $f_y = \cos x$; Então, de $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$, concluímos:

$\begin{cases} -y\operatorname{sen} x = 0 \therefore < \begin{matrix} y = 0 \\ \operatorname{sen} x = 0 \end{matrix} \\ \cos x = 0 \therefore \cos x = 0 \end{cases}$; Como não podemos ter $\operatorname{sen} x = 0$ e $\cos x = 0$, já que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, só nos resta a possibilidade $y = 0$ e $\cos x = 0$. E como $0 \le x \le 2\pi$, $\cos x = 0$ nos diz que $x = \pi/2$ ou $x = 3\pi/2$.

Temos então os pontos $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ nos quais $f_x = 0$ e $f_y = 0$;

Calculemos D: $f_{xx} = -y\cos x$; $f_{yy} = 0$; e $f_{xy} = f_{yx} = -\operatorname{sen} x$; Logo:

$D(\frac{\pi}{2}, 0) = 0.0 - [-1]^2 = -1 < 0$; $(\frac{\pi}{2}, 0)$ é um ponto de sela;

$D(\frac{3\pi}{2}, 0) = 0.0 - [1]^2 = -1 < 0$; $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ também é um ponto de sela;

(02) Verifique que $F(x,y) = 2 + x^2 + 4y^2 - 4xy$ possui infinitos pontos críticos, nos quais $D = 0$, tornando o Teste das derivadas parciais de 2ª ordem inconclusivo. Mostre que $F(x,y)$ assume seu valor mínimo absoluto, neles;

Solução: Temos $F_x = 2x - 4y$ e $F_y = 8y - 4x$; Logo, o sistema $\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases}$, nos dá:

$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \therefore x = 2y; \\ 8y - 4x = 0 \therefore x = 2y; \end{cases}$ Ou seja, os infinitos pontos na forma $(2y, y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, são os pontos tais que $F_x = 0$ e $F_y = 0$;

Encontremos D: $F_{xx} = 2$; $F_{yy} = 8$ e $F_{xy} = F_{yx} = -4$; Logo:

$D(2y,y) = (2).(8) - [-4]^2 = 16 - 16 = 0$;

Contudo, $F(x,y) = 2 + x^2 - 4xy + 4y^2 = 2 + (x - 2y)^2$; E como $(x-2y)^2 \geq 0$ o valor mínimo absoluto ocorre quando $x - 2y = 0$; ou seja: os infinitos pontos críticos $(2y, y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, são todos pontos de mínimo e $F(2y,y) = 2$ é o seu valor mínimo absoluto;

(03) Proceda como na Questão anterior, para mostrar que a função real $F(x,y) = 6xy + 4 - 9y^2 - x^2$, assume seu valor máximo absoluto nos seus infinitos pontos críticos, nos quais o Teste das derivadas parciais de 2ª ordem é inconclusivo;

Solução: Temos, $F_x = 6y - 2x$ e $F_y = 6x - 18y$; Logo, o sistema $\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases}$, nos dá: $\begin{cases} 6y - 2x = 0 \therefore x = 3y; \\ 6x - 18y = 0 \therefore x = 3y; \end{cases}$ Ou seja, os infinitos pontos críticos $(3y, y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, são os pontos tais que $F_x = F_y = 0$;

Encontremos D: $F_{xx} = -2$; $F_{yy} = -18$; e $F_{xy} = F_{yx} = 6$; Logo:

$D(3y,y) = (-2).(-8) - [6]^2 = 36 - 36 = 0$;

Contudo, $F(x,y) = 4 - x^2 - 9y^2 + 6xy = 4 - (x^2 - 6xy + 9y^2) = 4 - (x - 3y)^2$; E como $(x-3y)^2 \geq 0$ o valor máximo absoluto ocorre quando $x - 3y = 0$; ou seja: os infinitos pontos críticos $(3y, y)$ $\forall y \in \mathbb{R}$, são todos pontos de máximo e $F(3y, y) = 4$ é o seu valor máximo absoluto;

(04) Verifique que $(0,0)$ é o único ponto crítico de $F(x,y) = 3x^2y - y^3$, e que nele temos $D = 0$. Após, confira que $(0,0)$ é um ponto de sela de $F(x,y)$;

Solução: $F_x = 6xy$ e $F_y = 3x^2 - 3y^2$, logo:

$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} 6xy = 0 & \therefore xy = 0 \\ 3x^2 - 3y^2 = 0 & \therefore x^2 = y^2 \end{cases} > x = 0$ e $y = 0$; Ou seja, $(0,0)$ é o único ponto crítico de F no qual $F_x = F_y = 0$;

E como, $F_{xx} = 6y$; $F_{yy} = -6y$; e $F_{xy} = F_{yx} = 6x$; $D(0,0) = 0.0 - [0]^2 = 0$;

Contudo, para $\varepsilon > 0$, tão próximo de zero quanto se queira, considere: o ponto $(0, \varepsilon/2)$; $F(0, \varepsilon/2) = -\varepsilon^3/8 < 0 = F(0,0)$; Ou seja, $(0,0)$ não é ponto de mínimo local. Em seguida considere o ponto $(0, -\varepsilon/2)$; $F(0, -\varepsilon/2) = \frac{\varepsilon^3}{8}$; Ou seja, $F(0, -\varepsilon/2) = \varepsilon^3/8 > 0 = F(0,0)$; Isto é: $(0,0)$ não é ponto de máximo local. Em suma: $(0,0)$ é ponto de sela de $F(x,y)$;

(05) Mostre que $f(x,y)=e^{4y}+2x^4-4x^2e^y$ possui apenas dois pontos críticos nos quais $f_x=0$ e $f_y=0$, e que ambos são pontos de mínimos locais;

Solução: Temos, $f_x=8x^3-8xe^y$ e $f_y=4e^{4y}-4x^2e^y$; Logo, o sistema $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ nos dá: $\begin{cases} 8x^3-8xe^y=0 \\ 4e^{4y}-4x^2e^y=0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x^3-xe^y=0 \\ e^{4y}-x^2e^y=0 \end{cases}$;

Observemos que $x\neq 0$. Pois caso $x=0$ a segunda equação ficaria apenas $e^{4y}=0$, o que é impossível pois $e^{4y}>0, \forall y \in \mathbb{R}$.

E como $x\neq 0$, podemos colocar x em evidência na primeira equação: $x(x^2-e^y)=0 \therefore x^2=e^y$. E substituindo este valor de x^2 na 2ª equação obtemos: $e^{4y}-e^y.e^y=0 \therefore e^{4y}=e^{2y} \therefore e^{2y}=1 \therefore y=0$;

E este valor de y em $x^2=e^y$ nos dá: $x^2=e^0=1 \therefore x=\pm 1$;

Temos portanto apenas dois pontos críticos: $(1,0)$ e $(-1,0)$; nos quais $f_x=0$ e $f_y=0$;

Encontremos D: $f_{xx}=24x^2-8e^y$; $f_{yy}=16e^{4y}-4x^2e^y$; $f_{xy}=f_{yx}=-8xe^y$;

$D(1,0)=(16).(12)-[-8]^2=192-64=128>0$; E como $f_{xx}(1,0)=16>0$, $(1,0)$ é ponto de mínimo local;

$D(-1,0)=(16).(12)-[-8]^2=128>0$; E como $f_{xx}(-1,0)=16>0$; $(-1,0)$ também é ponto de mínimo local;

(06) Mostre que $f(x,y)=3xe^y-x^3-e^{3y}$ possui apenas um ponto crítico no qual $f_x=0$ e $f_y=0$, que é um ponto de máximo local, mas que $f(x,y)$ não assume um valor máximo absoluto;

Solução: $f_x=3e^y-3x^2$ e $f_y=3xe^y-3e^{3y}$; Logo, o sistema $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ nos dá:

$\begin{cases} 3e^y-3x^2=0 \\ 3xe^y-3e^{3y}=0 \end{cases} \therefore \begin{cases} e^y=x^2; \\ xe^y-e^{3y}=0 \end{cases} > x.x^2-x^6=0$ ($x\neq 0$ pois $e^y=x^2$) $\therefore x^3=1 \therefore x=1$;
E se $x=1$, $e^y=1 \therefore y=0$;

Logo, $(1,0)$ é o único ponto crítico de $f(x,y)$ no qual $f_x=0$ e $f_y=0$;

Encontremos D: $f_{xx}=-6x$; $f_{yy}=3e^y-9e^{3y}$; $f_{xy}=f_{yx}=3e^y$; Logo:

$D(1,0)=(-6).(-6)-[3]^2=27>0$; E como $f_{xx}(1,0)=-6<0$, $(1,0)$ é um ponto de máximo local de $f(x,y)$;

Agora, se interceptamos a superfície $f(x,y)=3xe^y-x^3-e^{3y}$ pelo plano $y=0$ (ou seja o plano-xz), encontramos a curva que é o gráfico de $f(x)=3x-x^3-1$, no plano-xz;

E claramente, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-x^3-1)=+\infty$. Logo $f(x,y)=3xe^y-x^3-e^{3y}$ nunca assume um valor máximo absoluto!

(07) Mostre que $F(x,y) = -(x^2-1)^2-(x^2y-x-1)^2$ possui apenas dois pontos críticos nos quais $F_x=0$ e $F_y=0$, e que ambos são pontos de máximos locais;

Solução: Temos, $F_x = -2(x^2-1).2x - 2(x^2y-x-1).(2xy-1)$;
e $F_y = -2(x^2y-x-1).x^2$; Logo, o sistema $\begin{cases} F_x=0 \\ F_y=0 \end{cases}$ nos dá:

$$\begin{cases} -2(x^2-1).2x - 2(x^2y-x-1).(2xy-1) = 0 \\ -2(x^2y-x-1).x^2 = 0 \end{cases};$$

Observemos que $x \neq 0$. Pois caso tivéssemos $x=0$ a primeira equação restaria apenas: $-2=0$, o que é um absurdo!

Agora $x \neq 0$ deixa a 2ª equação apenas $x^2y-x-1=0$; E substituindo esta conclusão na 1ª equação, obtemos: $-2(x^2-1).2x=0$; E como $x\neq 0$ só nos resta: $x=1$ e $x=-1$; Agora:

$x=1$ em $x^2y-x-1=0$ nos dá $y=2$ e o ponto $(1,2)$;

$x=-1$ em $x^2y-x-1=0$ nos dá $y=0$ e o ponto $(-1,0)$; Encontremos D:

$F_{xx} = 2+4y+12x(y-xy^2-x)$; $F_{yy}=-2x^4$; $F_{xy}=F_{yx}=2x(2+3x-4x^2y)$; Logo:

$D(1,2) = (-26).(-2)-[-6]^2 = 16>0$; E $F_{xx}(1,2)=-26$ nos dizem que $(1,2)$ é ponto de máximo local;

$D(-1,0) = (-10).(-2)-[2]^2 = 16>0$; E $F_{xx}(-1,0)=-10$ nos dizem que $(-1,0)$ também é ponto de máximo local;

(08) Use a desigualdade $|u.v| \leq \|u\|\,\|v\|$, válida para todos vetores u e v em R^n, $n \geq 2$, devida à Cauchy (1789-1857); Bunyakovski (1804-1899); e Schwarz (1843-1921), para mostrar que $F(x,y) = \dfrac{(ax+by+c)^2}{x^2+y^2+1}$, $c\neq 0$, tem como valor máximo absoluto: $a^2+b^2+c^2$;

Solução: como $|u.v| \leq \|u\|\|v\|$, temos $(u.v)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$; Agora, tome u e v em R^3, $u = ai+bj+ck$ e $v = xi+yj+k$; De $(u.v)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$, obtemos: $[(ai+bj+ck).(xi+yj+k)]^2 \leq (a^2+b^2+c^2).(x^2+y^2+1)$;

ou seja: $(ax+by+c)^2 \leq (a^2+b^2+c^2).(x^2+y^2+1)$;

Logo: $F(x,y) = \dfrac{(ax+by+c)^2}{x^2+y^2+1} \leq a^2+b^2+c^2$;

E para vermos que este valor é realmente atingido considere o ponto: $\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)$; $F\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right) = \dfrac{\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}+c\right)^2}{\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1} = \dfrac{\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{c^2}}{\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}} = a^2+b^2+c^2$;

09 Dada a função $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$, mostre que: (a) ela possui um ponto crítico no qual assume seu valor mínimo absoluto; (b) ela possui uma infinidade de outros pontos críticos nos quais $D=0$; (c) mediante a mudança de variável $t=x^2+y^2$, é possível concluir que ela assume seu valor máximo absoluto nos infinitos pontos críticos de (b);

Solução: temos; $f_x = 2e^{-x^2-y^2}.[x-x(x^2+y^2)]$ e $f_y = 2e^{-x^2-y^2}.[y-y(x^2+y^2)]$;

Agora, como $e^{-x^2-y^2}>0$, sempre, o sistema $f_x=0$ e $f_y=0$ pode ser simplificado apenas para:

$$\begin{cases} x-(x^2+y^2).x=0 & \begin{cases} x=0 \\ x\neq 0 \text{ e } x^2+y^2=1; \end{cases} \\ y-(x^2+y^2).y=0 & \begin{cases} y=0 \\ y\neq 0 \text{ e } x^2+y^2=1; \end{cases} \end{cases}$$

E cruzando as quatro possibilidades, obtemos os seguintes pontos nos quais $f_x=0$ e $f_y=0$: $(0,0)$; $(0,1)$ e $(0,-1)$; $(1,0)$ e $(-1,0)$; e os infinitos pontos nos quais $x\neq 0$, $y\neq 0$ e $x^2+y^2=1$.

E esta resposta pode ser expressa de uma forma mais simples, assim: $(0,0)$ e os infinitos pontos (x,y) tais que $x^2+y^2=1$;

Agora, para calcularmos $D(x,y)$, obtemos:

$f_{xx}=2e^{-x^2-y^2}[-2x(x-x(x^2+y^2))+(1-3x^2-y^2)]$; $f_{yy}=2e^{-x^2-y^2}.[-2y(y-y(x^2+y^2))+(1-x^2-3y^2)]$;

e $f_{xy}=f_{yx}=2e^{-x^2+y^2}.[-4xy+2x^3y+2xy^3]$; De tal forma que:

$D(0,0)=f_{xx}(0,0).f_{yy}(0,0)-[f_{xy}(0,0)]^2=2.2-0^2=4>0$; E como $f_{xx}(0,0)=2>0$, temos que $(0,0)$ é um mínimo local; Mas, em adendo, como $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{e^{x^2+y^2}}$, temos sempre $f(x,y)\geq 0$. E como $f(0,0)=0$, $(0,0)$ é também o ponto de mínimo absoluto de $f(x,y)$;

$$E,\ \underset{[x^2+y^2=1]}{D(x,y)}=f_{xx}(x,y).f_{yy}(x,y)-[f_{xy}(x,y)]^2=\left[\frac{-4x^2}{e}\right].\left[\frac{-4y^2}{e}\right]-\left[\frac{-4xy}{e}\right]^2=\frac{16x^2y^2}{e^2}-\frac{16x^2y^2}{e^2}=0;$$

Logo, em todos os pontos (x,y), tais que $x^2+y^2=1$, o teste é inconclusivo!

Sigamos então a sugestão dada na alínea (c), ou seja: façamos a mudança de variáveis $t=x^2+y^2$; Assim sendo, temos agora, $f(t)=te^{-t}$, com o cuidado de como $x^2+y^2\geq 0$, o domínio de $f(t)=te^{-t}$ é apenas para $t\geq 0$.

Sua derivada fica em: $f'(t)=e^{-t}+e^{-t}.(-1).t=e^{-t}(1-t)$; Vejamos como é fácil analisarmos o sinal de $f'(t)$ para todo $t\geq 0$:

Como $e^{-t}>0$, o sinal de $f'(t)=e^{-t}(1-t)$, para $t\geq 0$, é o mesmo de $1-t$ para $t\geq 0$, ou seja:

$$\begin{array}{ccc} - - - - & & + + + + + \\ 0 \quad f'(t)<0 & 1 & f'(t)>0 \end{array}$$

; Ou seja $t=1$ é o valor máximo absoluto de $f(t)=e^{-t}.t$, para $t\geq 0$; Logo os pontos $(x,y)\,/\,x^2+y^2=1$ são aqueles onde $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-x^2+y^2}$, assume seu valor máximo absoluto!