Variáveis Aleatórias Discretas

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Depto. de Estatística e Matemática Aplicada - UFC

Fortaleza, 30 de maio de 2022

Sumário

Binomial Negativa (Pascal)

- Considere que ensaios de Bernoulli independentes são realizados até a ocorrência de r sucessos. Seja X a v.a que conta o número de ensaios até a ocorrência do r-ésimo sucesso. Então X é dita ter distribuição binomial negativa de parâmetros re p e sua função de probabilidade é dada por:

$$p(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} \text{ para todo } x = r, r+1, \ldots$$

- Notação: $X \sim BN(r,p)$.

Binomial Negativa (Pascal)

- A distribuição binomial negativa pode, também, ser definida em termos da v.a Y que conta o número de fracassos antes do r-ésimo sucesso. Esta formulação é equivalente a definição anterior, uma vez que, $Y = X - r$.
- Utilizando a relação entre Y e X é possível ver que

$$\mathbb{P}(Y = y) = \binom{r+y-1}{y} p^r (1-p)^y,\ y = 0, 1, \ldots$$

- **Observação:** Jain (1991) faz uma distinção entre Pascal e binomial negativa. A distribuição de Pascal seria definida em termos do número de ensaios até o r-ésimo sucesso e a distribuição binomial negativa em termos do número de fracassos antes do r-ésimo ensaio.

- Considere que a probabilidade de um bem sucedido lançamento de foguete é igual a 0,8.
  (a) Qual a probabilidade de que sejam necessárias exatamente 6 tentativas até o terceiro lançamento bem sucedido?
  (b) Qual o número esperado de tentativas até o terceiro lançamento bem sucedido?
  (c) Suponha que cada tentativa custe R$ 5000. Além disso, um lançamento falho acarrete um custo adicional de R$ 500. Nessas condições, qual o custo esperado?

Sumário

Distribuição Poisson

- A distribuição de Poisson (em homenagem ao matemático Francês *Siméon Denis Poisson*) é um modelo discreto que expressa a probabilidade de um dado número de eventos ocorrer em um intervalo contínuo (que pode ser tempo ou espaço) se esses eventos ocorrem com uma *taxa média conhecida* e independentemente do tempo decorrido desde o último evento.

- Seja X a v.a aleatória que conta a ocorrência de uma determinado evento em um intervalo contínuo. Então X tem distribuição de Poisson com parâmetro λ e sua distribuição de probabilidade é dada por

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad \forall \quad x = 0, 1, 2, ...$$

em que,

- e é a base do logaritmo natural $(e = 2,71828\ldots)$
- λ é um número real, igual ao número esperado de ocorrências num dado intervalo de tempo.
- temos, também que: $\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = \lambda$.
- **Notação**: $X \sim P(\lambda)$.

Distribuição Poisson

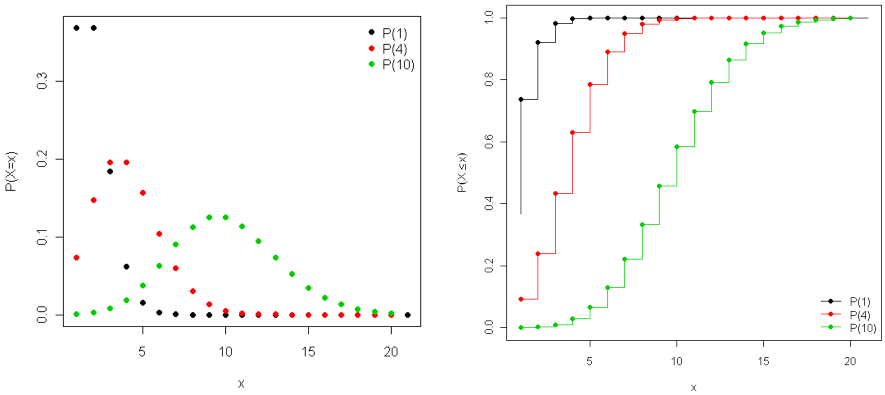

Figura: Representação gráfica da distribuição Poisson

Alguns exemplos de variáveis aleatórias que geralmente obedecem à lei de probabilidades de Poisson:

- O número de erros de impressão em uma página (ou em um grupo de páginas de um livro).
- O número de pessoas em uma comunidade que vivem mais do que 100 anos.
- O número de pacotes de biscoitos caninos vendidos em uma determinada loja em um dia.
- O número de clientes que entram em uma agência dos correios em um dia.
- O número de partículas α descarregadas por um material radioativo em um período de tempo fixo.

- Supondo que o número de partículas α emitidas por minuto é uma variável aleatória Poisson com parâmetro $\lambda = 5$, ou seja, a taxa de ocorrência é de 5 emissões a cada minuto, podemos estar interessados em calcular a probabilidade de haver mais de duas emissões por minuto.

Exemplo

- $X \sim P(5)$
- $\mathbb{P}(X > 2) = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{e^{-5}5^x}{x!} = 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-5}5^x}{x!} \approx 0,875$
- $\mathbb{E}(X) = \lambda = 5$
- $\mathrm{Var}(X) = \lambda = 5$

Aproximação da Binomial pela Poisson

- Considerando a distribuição $B(n, p)$, quando temos grandes valores para n e p pequeno (mantendo-se o produto np constante), podemos usar a seguinte aproximação para a probabilidade:

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{e^{-np}(np)^x}{x!} \quad \forall \ x = 0, 1, 2, ...$$

- Geralmente considera-se o critério $np \leq 7$ para usar essa aproximação

Alguns Resultados

Teorema:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}=1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{(n)_x}{n^x}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}=e^{-\lambda}.$$

em que $(n)_x = n(n-1)\cdots(n-x+1)$.

Aproximação da Binomial pela Poisson

- Exemplo: $X \sim B(100; 0,065)$, deseja-se obter $\mathbb{P}(X = 10)$
    - $\lambda = np = 100 \times 0,065 = 6,5 \leq 7$
    - no modelo Binomial:

$$\mathbb{P}(X = 10) = \binom{100}{10}(0,065)^{10}(0,935)^{100-10} = 0,055$$

    - no modelo Poisson:

$$\mathbb{P}(X = 10) = \frac{e^{-6,5}(6,5)^{10}}{10!} \approx 0,056$$

Tabela: Valores de $p(3)$ para diferentes valores de n e p sob os modelos binomial e Poisson

(n, p)	np	$B(n, p)$	$P(np)$
$(100; 0,090)$	9,0	0,013	0,015
$(100; 0,085)$	8,5	0,018	0,021
$(100; 0,070)$	7,0	0,049	0,052
$(100; 0,060)$	6,0	0,086	0,089
$(100; 0,065)$	6,5	0,065	0,069
$(100; 0,055)$	5,5	0,111	0,113
$(100; 0,030)$	3,0	0,227	0,224
$(100; 0,020)$	2,0	0,182	0,180
$(100; 0,010)$	1,0	0,061	0,061

Exemplo

- Suponha que um livro de 585 páginas contenha 43 erros tipográficos. Se esses erros estiverem aleatoriamente distribuídos pelo livro, qual a probabilidade de que 10 páginas, escolhidas ao acaso, estejam livres de erros?

Exemplo

- Uma impressora está apresentando uma média de 2 erros por página impressa. Sabe-se que não há razão para supor que exista qualquer relação entre os erros (ou acertos) de uma página para outra.
  (a) Qual a probabilidade de uma página não apresente erros?
  (b) Entre 10 páginas escolhidas ao acaso, qual a probabilidade de observarmos duas ou mais páginas sem erro?
  (c) Qual a probabilidade de que a primeira página sem erro apareça na décima impressão?
  (d) Suponha que páginas são impressas até que ocorram 3 sem erro. Qual a probabilidade de que seja necessário imprimir 5 páginas até que isso aconteça?

Exemplo

- Seja X_t o número de partículas emitidas por uma fonte radioativa, durante um intervalo de tempo de duração t. Admita-se que X_t possua distribuição de Poisson com parâmetro αt. Um dispositivo contador é colocado para registrar o número de partículas emitidas. Suponha-se que exista uma probabilidade constante p de que qualquer partícula emitida não seja contada. Se R_t for o número de partículas contadas durante o interavlo especificado, qual será a distribuição de probabilidade de R_t?