LISTA DE EXERCÍCIOS - EXTREMOS RELATIVOS

01 Em cada caso, encontre, se existirem, pontos críticos (x_0, y_0) nos quais $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$, para em seguida usar o Teste das derivadas parciais de 2ª ordem e, se possível, classificá-los como pontos de máximos locais, mínimos locais ou de sela:

ⓐ $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$; ⓑ $f(x,y) = x^3 + y^3 - 18xy + 1$; ⓒ $f(x,y) = x^3 - 15x + y^3 - 15y + 3xy^2$;
ⓓ $f(x,y) = e^{xy}$; ⓔ $f(x,y) = x^4 + y^3 - 2x^2 - 3y + 3$; ⓕ $f(x,y) = xy + 2x - \ln(x^2 y)$; $x \neq 0$ e $y > 0$;
ⓖ $f(x,y) = 2\ln x + \ln y - 4x - y$; $x > 0$ e $y > 0$; ⓗ $f(x,y) = 2 + xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; $x \neq 0$ e $y \neq 0$;
ⓘ $f(x,y) = e^x \cos y$; ⓙ $f(x,y) = x^2 + \frac{2}{xy} + y^2$; $x \neq 0$ e $y \neq 0$; ⓚ $f(x,y) = e^{x^2 + y^2 - 4x}$;
ⓛ $f(x,y) = e^{x+y} - x e^{2y}$; ⓜ $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$; $0 \leq x \leq 2\pi$; $0 \leq y \leq 2\pi$; ⓝ $f(x,y) = y \cos x$; $0 \leq x \leq 2\pi$;

02 Verifique que $f(x,y) = 2 + x^2 + 4y^2 - 4xy$ possui infinitos pontos críticos, nos quais $D = 0$, tornando o Teste das derivadas parciais de 2ª ordem, inconclusivo. Mostre que $f(x,y)$ assume seu valor mínimo absoluto, neles;

03 Proceda como na Questão anterior, para mostrar que a função real $f(x,y) = 6xy + 4 - 9y^2 - x^2$, assume seu valor máximo absoluto nos seus infini-tos pontos críticos, nos quais o Teste das derivadas parciais de 2ª ordem é inconclusivo;

04 Verifique que $(0,0)$ é o único ponto crítico de $f(x,y) = 3x^2y - y^3$, e que nele temos $D = 0$. Após, confira que $(0,0)$ é um ponto de sela de $f(x,y)$;

05 Mostre que $f(x,y) = e^{4y} + 2x^4 - 4x^2 e^y$ possui apenas dois pontos críticos nos quais $f_x = 0$ e $f_y = 0$, e que ambos são pontos de mínimos locais;

06 Mostre que $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ possui apenas um ponto crítico no qual $f_x = 0$ e $f_y = 0$, que é um ponto de máximo local, mas que $f(x,y)$ não assume um valor máximo absoluto;

07 Mostre que $f(x,y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2 y - x - 1)^2$ possui apenas dois pontos críticos nos quais $f_x = 0$ e $f_y = 0$, e que ambos são pontos de máximos locais;

08 Use a desigualdade $|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$, válida para todos vetores u e v em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, devida à Cauchy (1789-1857); Bunyakovski (1804-1899); e Schwarz (1843-1921), para mostrar que $f(x,y) = \dfrac{(ax + by + c)^2}{x^2 + y^2 + 1}$, $c \neq 0$, tem como valor máximo absoluto: $a^2 + b^2 + c^2$;

09 Dada a função $f(x,y) = (x^2 + y^2) e^{-x^2 - y^2}$, mostre que: ⓐ ela possui um ponto crítico no qual assume seu valor mínimo absoluto; ⓑ ela possui uma infinidade de pontos críticos nos quais $D = 0$; ⓒ mediante a mudança de variáveis $t = x^2 + y^2$, é possível concluir que ela assume seu valor máximo absoluto nos infinitos pontos críticos de ⓑ.