Universidade Federal do Ceará
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada
Prof. José Roberto Silva dos Santos
CC0282 - Probabilidade I.
Primeira lista de exercícios - 2022.1

1. Um experimento consiste em lançar uma moeda e um dado sucessivamente e anotar o resultado obtido nos dois lançamentos. Descreva o espaço amostral associado a este experimento. (*Sugestão:* Use o produto cartesiano).

2. Descreva o espaço amostral para cada um dos seguintes experimentos aleatórios.

   (a) Lançamento de dois dados e uma moeda, anota-se a configuração obtida.
   (b) Numa linha de produção conta-se o número de peças defeituosas em um intervalo de uma hora.
   (c) Investigam-se famílias com 4 crianças, anotando-se a configuração segundo o sexo.
   (d) Um fichário de 10 nomes contém 3 nomes de mulheres. Seleciona-se ficha após ficha, até o último nome de mulher ser selecionado, e anota-se o número de fichas selecionadas.

3. Sejam A, B e C eventos em um espaço de probabilidade. Expresse em notação de conjuntos e faça os diagramas de Venn para os seguintes eventos:

   (a) Somente A ocorre.
   (b) A e B ocorrem, mas C não ocorre.
   (c) Os três ocorrem.
   (d) Pelo menos um deles ocorre.
   (e) Pelo menos dois deles ocorrem.
   (f) Exatamente um deles ocorre.
   (g) Exatamente dois deles ocorrem.
   (h) Nenhum deles ocorre.
   (i) Não mais do que dois deles ocorrem.

4. Calcule as probabilidades dos eventos do exercício 3 sabendo que

$$\mathbb{P}(A) = 0,35; \mathbb{P}(B) = 0,40; \mathbb{P}(C) = 0,15; \mathbb{P}(A \cap B) = 0,10; B \cap C = A \cap C = \varnothing$$

5. Uma moeda equilibrada é lançada 3 vezes. Descreva o espaço amostral associado a este experimento e determine a probabilidade dos seguintes eventos:

(a) exatamente duas caras ocorrem;

(b) o resultado do segundo lançamento é cara;

(c) o resultado do primeiro lançamento é igual ao do terceiro;

(d) o número de caras é igual ao de coroas.

6. Um dado equilibrado é lançado duas vezes. Descreva o espaço amostral associado a este experimento e determine a probabilidade dos seguintes eventos:

   (a) a soma dos pontos é par;

   (b) a soma dos pontos é ímpar;

   (c) primeiro lançamento menor do que o segundo;

   (d) soma igual a sete;

   (e) soma diferente de dois;

   (f) primeiro lançamento menor do que o segundo e soma par.

7. Doze cartelas numeradas de 1 a 12 são misturadas numa urna. Duas cartelas, digamos (X, Y), numeradas são extraídas da urna sucessivamente e sem reposição. Qual a probabilidade de que a soma de $X + Y$ seja um número ímpar? Qual a probabilidade de que seja um número par?

8. Numa urna estão quatro bolas numeradas de 1 a 4. Duas bolas são retiradas sem reposição. Determine a probabilidade de que a média aritmética entre os dois valores retirados seja 2 ou 3.

9. De um lote de 18 bovinos cinco são machos e com mais de dois anos de idade, quatro são machos e com menos de dois anos, seis são fêmeas com mais de dois anos e três são fêmeas com menos de dois anos de idade. Definem-se os seguintes eventos: $A = \{\text{o bovino tem mais de dois anos}\}$, $B = \{\text{o bovino tem menos de dois anos}\}$, $C = \{\text{o bovino é macho}\}$ e $D = \{\text{o bovino é fêmea}\}$. Nestas condições, determine a probabilidade dos seguintes eventos:

   (a) $A^c \cap C^c$.

   (b) $B \cup D$.

10. Um lote é formado de 12 artigos bons, 5 com pequenos defeitos e 3 com defeitos graves. Um artigo é escolhido ao acaso. Determine a probabilidade de que esse artigo:

    (a) não tenha defeitos;

    (b) não tenha defeitos graves;

    (c) seja perfeito ou tenha defeitos graves.

11. Um baralho comum consiste de 52 cartas separadas em 4 naipes com 13 cartas de cada um. Para cada naipe, os valores das cartas são 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K e A. Um baralho comum é embaralhado. Qual é a probabilidade de que as quatro cartas do topo tenham

    (a) valores diferentes?

    (b) naipes diferentes?

12. Cinco bolas são selecionadas aleatoriamente, sem reposição, de uma urna que contém 5 bolas vermelhas, 6 bolas brancas e 7 bolas azuis, todas distintas. Determine a probabilidade de que pelo menos uma bola de cada cor seja selecionada.

13. 30% dos usuários de uma biblioteca universitária são alunos da graduação, 38% são alunos da pós e 32% professores. A consulta a livros estrangeiros é de 25%, 50% e 80% nas três categorias de usuários, respectivamente.

    (a) Qual é a probabilidade de que um usuário qualquer utilize um livro em português?

    (b) Se um usuário retirou um livro em português, calcule a probabilidade de que seja aluno da graduação, da pós ou que seja professor.

14. 30% dos empregados de uma empresa são mulheres e o restante homens; 9% mulheres são fumantes e 59% dos homens são não fumantes. Determine:

    (a) A probabilidade de um empregado ser mulher e fumante.

    (b) A probabilidade de um homem ser fumante.

    (c) A probabilidade de um empregado ser homem e fumante.

    (d) A probabilidade de um fumante ser homem.

15. Uma empresa de exploração de petróleo possui dois projetos ativos, um na Ásia e outro na Europa. Sejam A o evento em que o projeto da Ásia tem sucesso e B o evento em que o projeto da Europa tem sucesso. Suponha que A e B sejam eventos independentes com $\mathbb{P}(A) = 0,4$ e $\mathbb{P}(B) = 0,7$.

    (a) Se o projeto da Ásia não obtiver sucesso, qual a probabilidade de o projeto da Europa também não obtê-lo?

    (b) Qual é a probabilidade de pelo menos um dos dois projetos ter sucesso?

    (c) Dado que pelo menos um dos dois projetos obteve sucesso, qual é a probabilidade de apenas o projeto da Ásia ter sucesso?

16. Duas lâmpadas queimadas foram acidentalmente misturadas com seis lâmpadas boas. Se vamos testando as lâmpadas, uma por uma, até encontar duas defeituosas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste?

17. Uma companhia de seguros vendeu apólices a cinco pessoas, todas da mesma idade e com boa saúde. De acordo com as tábuas atuarias, a probabilidade de que uma pessoa daquela idade esteja viva daqui a 30 anos é de $2/3$. Calcular a probabilidade de que daqui a 30 anos:

    (a) exatamente duas pessoas estejam vivas;

    (b) todas as pessoas estejam vivas; e

    (c) pelo menos três pessoas estejam vivas.

18. Num teste com duas marcas que lhe são apresentadas em ordem aleatória, um experimentador de vinhos faz três identificações corretas em três tentativas.

    (a) Qual a probabilidade de isso ocorrer, se na realidade ele não possuir habilidade alguma para distingui-los?

    (b) E se a probabilidade de distinguir corretamente é de 90% em cada tentativa?

19. Em média, 5% dos produtos vendidos por uma loja são devolvidos. Qual a probabilidade de que, das quatro próximas unidades vendidas desse produto, duas sejam devolvidas?

20. Três alarmes estão dispostos de tal maneira que qualquer um deles funcionará independentemente quando qualquer coisa indesejável ocorrer. Se cada alarme tem probabilidade $0,9$ de trabalhar eficientemente, qual é a probabilidade de se ouvir o alarme quando necessário.

21. Um grupo de 12 homens e 8 mulheres concorre a três prêmios através de um sorteio, sem reposição de seus nomes. Qual a probabilidade de:

    (a) nenhum homem ser sorteado?

    (b) um prêmio ser ganho por homem?

    (c) dois homens serem premiados?

22. Um empreiteiro apresentou orçamentos separados para a execução da parte elétrica e da parte de encanamento de um edifício. Ele acha que a probabilidade de ganhar a concorrência da parte elétrica é de $1/2$. Caso ele ganhe a parte elétrica, a chance de ganhar a parte de encanamento é de $3/4$; caso contrário, essa probabilidade é de $1/3$. Qual a probabilidade de ele:

    (a) ganhar os dois contratos?

    (b) ganhar apenas um?

    (c) não ganhar nada?

23. Em uma classe, estudam dez crianças, entre as quais os irmãos Ana e Beto. A professora decide separar ao acaso a turma em dois grupos de cinco crianças cada um; o primeiro grupo fará um trabalho sobre os planetas e o segundo sobre civilizações antigas. Qual é a probabilidade de que os irmãos Ana e Beto façam parte do mesmo grupo?

24. Extraem-se 4 cartas de um baralho com 52 cartas. Qual é a probabilidade de que 2 cartas sejam pretas e 2 vermelhas?

25. Uma pessoa possui 5 livros diferentes de Matemática, 2 livros diferentes de Química e 3 livros diferentes de Física, que serão dispostos aleatoriamente em uma prateleira. Qual a probabilidade de que

    (a) os livros de cada assunto fiquem juntos;

    (b) os livros de Matemática não fiquem todos juntos.

    (c) os livros de Física fiquem todos separados.

26. Sabe-se que os eventos B_1, B_2 e B_3 formam uma partição de um espaço amostral Ω. Estes eventos possuem as seguintes probabilidades $\mathbb{P}(B_1) = 0,2$ e $\mathbb{P}(B_2) = 0,3$. Existe outro evento A tal que $\mathbb{P}(A|B_1) = 0,3$, $\mathbb{P}(A|B_2) = 0,4$ e $\mathbb{P}(A|B_3) = 0,1$. Calcule:

    (a) $\mathbb{P}(A)$.

    (b) $\mathbb{P}(B_2|A)$.

27. Sejam A, B e C eventos de um espaço amostral Ω. Mostre que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \\ &= -\mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

(*Sugestão:* assuma que o resultado é válido para dois eventos).

28. Sejam A e B, dois eventos quaisquer:

    (a) Mostre que $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

    (b) Mostre que a probabilidade de que exatamente um dos eventos A ou B ocorra é dada por $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$.

    (c) Mostre que $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B)$.

29. Sejam A, B e C eventos independentes. Mostre que os eventos A e $B \cup C$ também são independentes.

30. Uma urna contém 40 parafusos bons e 10 defeituosos. Seleciona-se uma amostra de 5 parafusos. Calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

    (a) Nenhum parafuso na amostra é defeituoso.

    (b) Nenhum, um ou dois parafusos na amostra são defeituosos.

    (c) A amostra contém pelo menos um parafuso bom.

31. Uma secretária prepara quatro cartas com conteúdos distintos para enviar a quatro firmas distintas. Na hora de envelopá-las, bate um vento que derruba as cartas e os envelopes, e, com pressa, a secretária coloca aleatoriamente as cartas nos envelopes. Determine a probabilidade de que nenhuma carta tenha sido corretamente envelopada.

32. Em uma escola, 60% dos estudantes não usam anel nem colar; 20% usam anel e 30% colar. Se um aluno é escolhido aleatoriamente, qual a probabilidade de que esteja usando

    (a) pelo menos uma das jóias

    (b) ambas as jóias

    (c) um anel mas não um colar

33. Da população de uma cidade, 28% fumam cigarro, 7% fumam charuto e 5% ambos. Calcule o percentual da população

(a) que não fuma nem cigarro nem charuto.

(b) que fuma charuto mas não cigarro.

34. Uma escola oferece três cursos optativos de idiomas:espanhol, francês e alemão. As turmas são abertas a qualquer um dos 100 alunos matriculados. Há 28 estudantes na turma de espanhol, 26 na turma de francês e 16 na turma de alemão. Há 12 alunos cursando espanhol e francês, 4 fazendo espanhol e alemão e 6 cursando francês e alemão. Além disso, 2 estudantes acompanham os três cursos.

    (a) Se um aluno é escolhido ao acaso, qual a probabilidade de que não acompanhe nenhum dos cursos?

    (b) Se um estudante é escolhido aleatoriamente, qual a probabilidade de que esteja fazendo exatamente um dos cursos?

    (c) Se dois alunos são escolhidos ao acaso, qual a probabilidade de que pelo menos um deles esteja cursando pelo menos uma língua?

35. Em um estado, existem três jornais: I, II e III. As proporções de municípios que lêem esses jornais são as seguintes:

I: 10%	I e II: 8%	I, II e III: 1%
II: 30%	I e III: 2%	
III: 5%	II e III: 4%	

Os jornais I e II são matutinos, e o II vespertino. Obtenha a probabilidade de que um morador do estado selecionado ao acaso

    (a) leia só o jornal III

    (b) leia apenas um jornal

    (c) leia pelo menos dois jornais.

    (d) não leia qualquer dos jornais.

    (e) leia pelo menos um jornal matutino e o jornal vespertino.

    (f) leia somente um jornal matutino e o jornal vespertino.

36. Em um curso secundário, 1/3 dos estudantes são do sexo masculino e 2/3 dos estudantes são do sexo feminino. A proporção de rapazes que estudam ciências é 20% e apenas 10% das moças dedicam-se às ciências. Obtenha as probabilidades de que

    (a) um estudante escolhido ao acaso estude ciências.

    (b) um estudante de ciências selecionado ao acaso seja do sexo feminino.

37. 45. Um cliente que visita o departamento de roupas masculinas de uma loja compra um terno com probabilidade $2/5$, uma gravata com probabilidade $5/12$ e uma camisa com probabilidade $1/2$. O cliente compra um terno e uma gravata com probabilidade $2/15$, um terno e uma camisa com probabilidade $17/60$ e uma gravata e uma camisa com probabilidade $1/4$; compra os três itens com probabilidade $1/12$. Considere os eventos

$$\begin{aligned} A &: \text{ O cliente compra um terno.} \\ B &: \text{ O cliente compra uma gravata.} \\ C &: \text{ O cliente compra uma camisa.} \end{aligned}$$

(a) Os eventos A, B e C são independentes?

(b) Qual a probabilidade de que o cliente não compre nenhum dos itens?

(c) Dado que o cliente não vai comprar uma gravata, qual a probabilidade de que compre um terno?

(d) Dado que o cliente vai comprar uma camisa, qual a probabilidade de que também compre uma gravata e um terno?

38. Considere duas moedas, uma honesta e a outra que resulta cara em cada lançamento com probabilidade $0,6$. Uma moeda é escolhida ao acaso e, após lançada quatro vezes, observa-se cara três vezes. Qual a probabilidade de que a moeda escolhida tenha sido a moeda honesta?

39. Jogamos um dado honesto e em seguida lançamos tantas moedas honestas como os pontos indicados no dado.

(a) Qual a probabilidade de obter quatro caras?

(b) Dado que foram obtidas quatro caras, qual a probabilidade de que o dado tenha mostrado seis pontos?

40. A caixa I contém 4 bolas brancas e 2 pretas, a caixa II contém 3 bolas brancas e 1 preta e a caixa III contém 1 bola branca e 2 pretas.

(a) Extrai-se uma bola de cada caixa. Determine a probabilidade de que todas as bolas sejam brancas.

(b) Seleciona-se uma caixa e dela extrai-se uma bola. Determine a probabilidade de que a bola extraída seja branca.

(c) Calcule em (b) a probabilidade de que a primeira caixa tenha sido escolhida, dado que a bola extraída é branca.

41. Sendo $\Omega = \{a, b, c\}$, liste todas as σ-álgebras de subconjuntos de Ω.

42. Mostre que, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são elementos de uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ então $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ também pertence a $\mathcal{F}$.

43. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e para cada $B \in \mathcal{F}$ defina a seguinte classe de subconjuntos: $\mathcal{F}_B = \{A : A \in \mathcal{F} \text{ e } \mathbb{P}(A \cap B) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\}$. Mostre que $\mathcal{F}_B$ é uma σ-álgebra de conjuntos de Ω.

44. Seja $\{A_n, n \geq 1\}$ uma sequência de eventos quaisquer. Demonstre as seguintes propriedades:

    (a) Se $\mathbb{P}(A_n) = 0$ para todo $n \geq 1$, então $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n) = 0$

    (b) Se $\mathbb{P}(A_n) = 1$ para todo $n \geq 1$, então $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_n) = 1$

    (c) Sejam $\{A_n, n \geq 1\}$ eventos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ com $\mathbb{P}(A_n) \geq c > 0$, para todo $n \geq 1$. Mostre que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq c$.

45. Em uma sala, 10 pessoas estão usando emblemas numerados de 1 até 10. Três pessoas são escolhidas ao acaso e convidadas a saírem da sala simultaneamente. O número de seu emblema é anotado.

    (a) Qual é a probabilidade de que o menor número de emblema seja 5?

    (b) Qual é a probabilidade de que o maior número de emblema seja 5?

46. Suponha que de N objetos, n sejam escolhidos ao acaso, com reposição. Qual será a probabilidade de que nenhum objeto seja escolhido mais de uma vez? (Admita $n < N$).

47. Sejam A e B dois eventos associados a um experimento. Suponha que $\mathbb{P}(A) = 0,4$, enquanto $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,7$. Seja $\mathbb{P}(B) = p$.

    (a) Para que valor de p, A e B serão mutuamente excludentes?

    (b) Para que valor de p, A e B serão mutuamente independentes?

48. Três componentes C_1, C_2 e C_3, de um mecanismo são postos em série (em linha reta). Suponha que esses componentes sejam dispostos em ordem aleatória. Seja R o evento $\{C_2 \text{ está à direita de } C_1\}$, e seja S o evento $\{C_3 \text{ está à direita de } C_1\}$. Os eventos R e S são independentes? Por quê?

49. Cada uma de duas pessoas joga três moedas equilibradas. Qual é a probabilidade de que elas obtenham o mesmo número de caras?

50. Em um experimento genético é realizado um cruzamento com *Drosophila*, no qual é esperado que $1/4$ das progênies terão "olhos brancos" e $1/2$ terão a característica chamada "olhos vermelhos". Assuma que os dois *locus* gênicos segregam independentemente.

    (a) Qual a proporção de progênies que deveriam exibir as características simultaneamente?

    (b) Se quatro moscas são geradas aleatoriamente, qual é a probabilidade de todas serem "olhos brancos"?

    (c) Qual é a probabilidade de que nenhuma das quatro moscas tenham "olhos brancos" ou "olhos vermelhos"?

    (d) Se duas moscas são geradas, qual a probabilidade de pelo menos uma das moscas ter "olhos brancos" ou "vermelhos" ou ambas as características?

51. Uma amostra de água, retirada de um lago, é considerada contaminada se forem encontrados bacilos tipo A ou bacilos tipo B e C simultaneamente. Considere que, as probabilidades de se encontrarem bacilos tipo A, B e C são, respectivamente, 0,30; 0,20 e 0,80. Existindo bacilos tipo A não existirão bacilos tipo B. Existindo bacilos tipo B, a probabilidade de existirem bacilos tipo C é reduzida pela metade. Determine:

    (a) a probabilidade de ocorrer bacilos do tipo B ou C ou ambos;

    (b) a probabilidade de a água estar contaminada;

    (c) sabendo que a água está contaminada, determine a probabilidade de ter sido contaminada pelos bacilos dos tipos B e C.

52. Para um torneio de futebol, 24 países são divididos em seis grupos, com 4 países cada um. Suponha que a escolha do grupo de cada país é feita ao acaso. Determine a probabilidade de que dois países determinados A e B se encontrem no mesmo grupo.

Gabarito (Lista I)

1) ---;

2) ---;

3) ---;

4) (a) 0,25; (b) 0,10; (c) zero ; (d) 0,80; (e) 0,10; (f) 0,70 (g)0,10; (h) 0,20; (i) 0,80.

5) (a) 3/8; (b) 1/2; (c) 1/2; (d) zero.

6) ---

7) 6/11 e 10/11

8) 1/3

9) (a) 1/6 e 13/18;

10) (a) 3/5 (b) 17/20 (c) 3/4

11) (a) e (b)

12)

13) (a) 0,521; (b) b.1 ; b.2 ; b.3

14) (a) 0,027; (b) 0,41; (c) 0,287; (d)

15) (a) 0,300; (b) 0,820; (c) 0,146

16) 3/28

17) (a) 0,165; (b) 0,132; (c) 0,790

18) (a) 1/8; (b) 0,73

19) 0,0135

20) 0,999

21) (a) 0,049; (b) 0,295; (c) 0,463

22) (a) 0,375; (b) 0,292; (c) 0,333

23) 4/9

24) 325/833

25) (a) 1/420, (b) 41/42, (c) 7/15

30) (a) 0,310; (b) 0,952; (c) 0,999

31) 3/8

32) (a) 0,40; (b) 0,10; (c) 0,10

33) (a) 70%; (b) 2%

34) (a) 1/2; (b) 8/25; (c) 149/198

35) (a) zero; (b) 0,20; (c) 0,12; (d) 0,68; (e) 0,11; (f) 0,10

36) (a) 2/15; (b) 1/2

37) (a) Não; (b) 4/15; (c) 16/35; (d) 1/6

38) 0,42

39) (a) 29/384; (b) 15/29

40) (a) 1/6; (b) 7/12; (c) 8/21

45) (a) 1/12; (b) 1/20

49) 5/16

50) (a) 0,125; (b) 0,0039; (c) 0,0198; (d) 0,8594

52) 3/23