

5ª Lista de Exercícios – Cálculo II

1. Em cada um dos itens abaixo escreva os quatro primeiros elementos da sequência e verifique se ela é convergente ou divergente. Caso seja convergente, ache seu limite:

- a) $\left\{ \frac{n+1}{2n-1} \right\}$ (resp.: $\frac{1}{2}$) b) $\left\{ \frac{3-2n^2}{n^2-1} \right\}$ (resp.: -2)
c) $\left\{ \frac{n}{n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right\}$ (resp.: divergente) d) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n} \right\}$ (resp.: divergente)

2. Dê exemplo de duas sequências distintas e divergentes $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tais que a sequência $\{a_n + b_n\}$ seja convergente.

3. Em cada um dos itens abaixo verifique se a sequência dada é crescente, decrescente ou não-monótona:

- a) $\left\{ \frac{3n-1}{4n+5} \right\}$ (resp.: crescente) b) $\left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right\}$ (resp.: não-monótona)
c) $\left\{ \frac{5^n}{1+5^{2n}} \right\}$ (resp.: decrescente)

4. Em cada um dos itens abaixo verifique se a sequência dada é limitada

- a) $\left\{ \frac{n^2+3}{n+1} \right\}$ (resp.: não limitada) b) $\left\{ 3 - (-1)^{n-1} \right\}$ (resp.: limitada)

5. Use o fato de que toda sequência monótona e limitada é convergente, para provar que as sequências abaixo são convergentes:

- a) $\left\{ \frac{1.3.5....(2n+1)}{2.4.6....(2n)} \right\}$ b) $\left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\}$ c) $\left\{ \frac{5^n}{1+5^{2n}} \right\}$
d) $\left\{ k^{1/n} \right\}, k > 1$ e) $\left\{ \frac{n}{3^{n+1}} \right\}$

6. Em cada um dos itens abaixo escreva os quatro primeiros elementos da sequência das somas parciais $\{S_n\}$ e obtenha uma fórmula para S_n em termos de n . Verifique também se a série infinita é convergente ou divergente. Caso seja convergente, ache sua soma:

- a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (resp.: $s_n = \left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}$; $1/2$)
b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Ln}\left(\frac{n}{n+1}\right)$ (resp.: $s_n = -\operatorname{Ln}(n+1)$; divergente)
c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{5^{n-1}}$ (resp.: $s_n = \frac{5}{2} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$; $5/2$)
d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$ (resp.: $s_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$; 1)

7. Em cada um dos itens abaixo encontre a série infinita que produza sequência das somas parciais dada. Verifique também se a série infinita é convergente ou divergente. Caso seja convergente, ache sua soma:

a) $\{S_n\} = \left\{ \frac{2n}{3n+1} \right\}$ (resp.: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(3n-2)(3n+1)}$; 2/3)

b) $\{S_n\} = \left\{ \frac{n^2}{n+1} \right\}$ (resp.: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + n - 1}{n(n+1)}$; divergente)

8. Em cada um dos itens abaixo escreva os quatro primeiros elementos da série infinita dada e verifique também se a série infinita é convergente ou divergente. Caso seja convergente, ache sua soma:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$ (resp.: divergente)

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} L n \left(\frac{1}{n} \right)$ (resp.: divergente)

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{2^n}$ (resp.: 1)

9. Verifique se cada uma das séries abaixo é convergente ou divergente:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{4n^3 + 1}$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

Resp.: a) conv. b) div. c) conv d) div. e) conv f) conv

10. Aplique o teste da integral para verificar se as séries abaixo são convergentes ou divergentes:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n+5)^2}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{3/2}}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2 - 4}$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-5n}$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n L n n}$

Resp.: a) div. b) conv. c) conv d) conv. e) conv f) div

11. Verifique se a série alternada abaixo é convergente ou divergente

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3}{n^2 + 1}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{3n-2}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{L n n}{n}$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n}$

Resp.: a) conv. b) conv. c) conv d) conv. e) conv f) div

12. Verifique se cada uma das séries abaixo é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n^3}$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{n^3}$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!}$$

$$e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$$

$$f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - 2\sin n}{n^3}$$

Resp.: a) abs. conv. b) div. c) cond. conv. d) abs. conv. e) abs. conv f) abs. conv

13. Resolva as equações diferenciais abaixo:

a) $y' = 3x^7 - 2x^3 + 4$

b) $y' = x^2 / y$

c) $y' = x / (1+x^2)$

d) $y' = (3x^2 - 1) / (3 + 2y)$

e) $xy' = (1+y)^{1/2}$

f) $y' = x^2 / (1+y^2)$

g) $y' - 2t y = t$

h) $x^2 y' + 5xy + 3x^5 = 0$, com $x \neq 0$.

i) $y' - 3x^2 y = x^2$

14. Resolva os problemas de valor inicial abaixo :

a) $y' = (1+3x^2)/(3y^2 - 6y)$; $y(0) = 1$

b) $y' = 3x^2 / (3y^2 - 4)$; $y(1)=0$

c) $y' = 2y^2 + xy^2$; $y(0)=1$

d) $y y' = 1$, $y(3) = -3$

e) $y'' = 2x$; $y'(0) = 1$ e $y(0) = 3$

f) $y'' = 4x^3 + 2x + 1$; $y'(1) = 5$ e $y(1) = -31/30$