Universidade Federal do Ceará
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada
Prof. José Roberto Silva dos Santos
CC0282 - Probabilidade I.
Segunda lista de exercícios - 2022.1

1. Uma empresa que fornece computadores pelo correio tem seis linhas telefônicas. Seja X o número de linhas em uso em determinado horário. Suponha que a função de probabilidade de X seja dada por:

x	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,20	0,06	0,04

   Determine a probabilidade dos seguintes eventos:

   (a) No máximo três linhas estão em uso.
   (b) Menos de três linhas estão em uso.
   (c) Pelo menos três linhas estão em uso.
   (d) Entre duas e cinco linhas, inclusive, estão em uso.
   (e) Entre duas e quatro linhas, inclusive, não estão em uso.
   (f) Pelo menos quatro linhas não estão em uso.

2. Um empreiteiro é solicitado pelo departamento de planejamento de uma cidade a enviar um, dois, três, quatro ou cinco formulários (dependendo da natureza do projeto) quando requer um alvará de construção. Seja Y a v.a que representa o número de formulários requeridos do próximo empreiteiro. Sabe-se que a probabilidade de y formulários serem exigidos é proporcional a y, isto é, $p(y) = ky$ para todo $y = 1, 2, \ldots, 5$.

   (a) Qual é o valor de k?
   (b) Qual é a probabilidade de no máximo três formulários serem exigidos?
   (c) Qual a probabilidade de serem requeridos entre dois e quatro formulários (inclusive)?
   (d) Poderia $p(y) = y^2/50$ para $y = 1, 2, \ldots, 5$ ser a função de probabilidade de alguma variável aleatória?

3. Suponha que uma moeda perfeita é lançada até que cara apareça pela primeira vez. Seja X a v.a que conta o número de lançamentos até que isso aconteça. Obtenha a distribuição de probabilidade de X.

4. Um vendedor de equipamento pesado pode visitar, num dia, um ou dois clientes, com probabilidade de $1/3$ ou $2/3$, respectivamente. De cada contato, pode resultar a venda de um equipamento por $50.000,00$ (com probabilidade $1/10$) ou nenhuma venda (com probabilidade $9/10$). Indicando por Y o valor total de vendas diárias desse vendedor, escreva a função de probabilidade de Y e calcule o valor total esperado de vendas diárias.

5. A função de probabilidade da v.a $X =$ número de defeitos graves em um eletrodoméstico selecionado aleatoriamente é dada por:

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0,08	0,15	0,45	0,27	0,05

Determine:

(a) Esperança de X.

(b) Variância de X.

(c) Desvio padrão de X.

6. Uma loja de eletrodomésticos vende três modelos diferentes de *freezers* verticais com 13,5; 15,9 e 19,1 pés cúbicos de espaço, respectivamente. Seja $X =$ volume de armazenagem comprado pelo próximo cliente a comprar um *freezers*. Suponha que a distribuição de probabilidade de X é definida por

x	13,5	15,9	19,1
$p(x)$	0,2	0,5	0,3

(a) Determine $\mathbb{E}(X)$ e $\text{Var}(X)$.

(b) Se o preço de um *freezer* com X pés cúbicos de capacidade for $25X - 8,5$, qual será o preço esperado pago pelo próximo cliente a comparar um *freezer*?

(c) Qual é a variância do preço $25X - 8,5$ pago pelo próximo cliente?

(d) Suponha que, apesar da capacidade nominal de um *freezer* ser X, a capacidade real seja $h(X) = X - 0,01X^2$. Qual é a capacidade real esperada do *freezer* comprado pelo próximo cliente?

7. Um agricultor produz batatas-sementes do tipo I com probabilidade 0,20, do tipo II com probabilidade 0,36, do tipo III com probabilidade 0,28 e do tipo IV com probabilidade 0,16. Sabendo-se que o lucro por caixa do tipo I exportada é de 10 u.m., do tipo II é de 30u.m., do tipo III é de 20 u.m. e do tipo IV é 15 u.m. Considerando X: "lucro por caixa de batata-semente exportada", responda:

(a) Qual o lucro esperado por caixa? Qual o desvio padrão do lucro por caixa?

(b) Qual seria o lucro médio por caixa e o desvio padrão, se tivesse havido um aumento de 30% no lucro que vinha sendo auferido e a taxação, pelo país importador, de 2 u.m. por cada caixa importada?

8. Seja $X \sim B(n, p)$ com $\mathbb{E}(X) = 12$ e $\text{Var}(X) = 3$, determine:

   (a) n e p.

   (b) $\mathbb{P}(X < 12)$.

   (c) $\mathbb{P}(X \geq 12)$.

   (d) $\mathbb{E}(Z)$ e $\text{Var}(Z)$, em que $Z = (X - 12)/\sqrt{3}$.

   (e) $\mathbb{P}(Y \geq 14/16)$, em que $Y = X/n$.

   (f) $\mathbb{P}(Y \geq 12/16)$, em que $Y = X/n$.

9. Uma empresa de cristais finos sabe por experiência que 10% de suas taças possuem defeitos cosméticos e devem ser classificadas como "de segunda linha".

   (a) Entre seis taças selecionadas aleatoriamente, qual é a probabilidade de uma ser de segunda linha?

   (b) Entre seis taças seleciondas aleatoriamente, qual é a probabilidade de no mínimo duas serem de segunda linha?

   (c) Entre 5 taças selecionadas aleatoriamente, qual é a probabilidade de serem encontradas no mínimo 4 que não sejam de segunda linha?

10. Vinte por cento de todos os telefones de um determinado tipo são enviados para reparo em garantia. Desses, 60% podem ser reparados, enquanto os outros 40% devem ser substituídos. Se uma empresa comprar 10 desses telefones, qual é a probabilidade de exatamente dois serem substituídos em garantia? Qual o número esperado de telefones que devem ser substituídos? Qual o desvio padrão?

11. Suponha que 90% de todas as pilhas de certo fabricante tenham voltagens aceitáveis. Um determinado tipo de lanterna necessita de duas pilhas tipo D, e ela só funciona se as duas pilhas tiverem voltagem aceitável. Entre 10 lanternas selecionadas aleatoriamente, qual é a probabilidade de pelo menos nove funcionarem? Que hipótese você fez no decorrer da resposta à pergunta proposta?

12. Uma norma que exige a instalação de um detector de fumaça em todas as casas construídas anteriormente está em vigor há um ano em certa cidade. O corpo de bombeiros está preocupado porque muitas casas continuam sem detectores. Seja p proporção real de casas que

possuem detectores e suponha que uma amostra aleatória de 25 lares seja inspecionada. Se a amostra indica fortemente que pouco menos de 80% de todas as casas possuem detector, o corpo de bombeiros fará uma campanha por um programa de inspeção obrigatória. Por causa do custo do programa, o corpo de bombeiros prefere não pedir essas inspeções a menos que a amostra renda evidências fortes que comprovem sua necessidade. Seja X o número de casas com detectores entre as 25 da amostra. Considere rejeitar a hipótese de $p \geq 0,8$ se $x \leq 15$.

(a) Qual é a probabilidade de a hipótese ser rejeitada se o valor real de p for $0,8$?

(b) Qual é a probabilidade de não rejeitar a hipótese quando $p = 0,7$? Quando $p = 0,6$?

(c) Como as "probabilidade de erro" das partes (a) e (b) mudam se o valor 15 na regra de decisão for alterado para 14?

13. Um estudante que está tentando escrever um trabalho para um curso tem a escolha de dois tópicos: A e B. Se o aluno escolher o tópico A, solicitará dois livros por empréstimo da biblioteca, e, se escolher B, serão solicitados quatro livros. O estudante acredita que, para escrever um bom trabalho, precisa receber e usar ao menos metade dos livros selecionados para cada tópico escolhido. Se a probabilidade de um livro solicitado chegar em tempo for de 0,9 e os livros chegam independentemente um do outro, que tópico o aluno deve escolher para maximizar a probabilidade de escrever um bom artigo? E se a probabilidade for de apenas 0,5 em vez de 0,9?

14. Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina seja defeituoso é de 0,2. Se dez itens produzidos por essa máquina são selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais do que um defeituoso seja encontrado?

15. Um fabricante de peças de automóveis garante que uma caixa de suas peças conterá, no máximo, duas defeituosas. Se a caixa contém 18 peças, e a experiência tem demonstrado que esse processo de fabricação produz 5% das peças defeituosas, qual a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia?

16. Um curso de treinamento aumenta a produtividade de uma certa população de funcionários em 80% dos casos. Se dez funcionários quaisquer participam desse curso, encontre a probabilidade de:

    (a) exatamente sete funcionários aumentarem a produtividade;

    (b) não mais do que oito funcionários aumentarem a produtividade; e

    (c) pelo menos três funcionários não aumentarem a produtividade.

17. Uma fábrica produz válvulas, das quais 20% são defeituosas. As válvulas são vendidas em caixas com dez peças. Se uma caixa não tiver nenhuma defeituosa, seu preço de venda é R$ 10,00; tendo uma, o preço é R$ 8,00; duas ou três, o preço é R$ 6,00; mais do que três, o preço é R$ 2,00. Qual o preço médio de uma caixa?

18. Seja X uma v.a.d., tal que $p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!\left(1-e^{\lambda}\right)}\mathbb{I}_{\{1,2,\ldots\}}(x)$:

    (a) Prove que f_x de fato é uma função de probabilidade.

    (b) Calcule $\mathbb{E}(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$ através de suas definições.

19. Seja X uma v.a com a seguinte função de probabilidade

$$p(x) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n},\ x = 1, 2, \ldots, n.$$

    (a) Mostre que $p(x)$ é de fato uma função de probabilidade.

    (b) Determine $\mathbb{E}(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

    Obs.: Tal v.a é denominada Uniforme discreta.

20. Seja $X \sim B(n, p)$. Determine e interprete a distribuição de probabilidade de $Y = n - X$.

21. Seja $X \sim \mathrm{Geo}(p)$. Determine e interprete a distribuição de $Y = X - 1$.

22. A variável aleatória Y tem densidade Poisson com parâmetro $\lambda = 2$. Obtenha:

    (a) $\mathbb{P}(Y < 2)$

    (b) $\mathbb{P}(2 \leq Y < 4)$

    (c) $\mathbb{P}(Y > 0)$

23. Seja $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$. Mostre que,

$$\mathbb{P}(X = x + 1) = \frac{\lambda}{x+1}\mathbb{P}(X = x).$$

24. Dada a função de distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ 0,1 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0,3 & \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0,7 & \text{se} \quad 3 \leq x < 4 \\ 0,8 & \text{se} \quad 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{se} \quad 5 \leq x \end{cases}$$

Calcule a função de probabilidade da variável cuja f.d.a. é $F(\cdot)$. Calcule ainda o valor esperado e a variância de X. Determine as seguintes probabilidades:

$$\mathbb{P}(1 \leq X < 2), \mathbb{P}(X = 4), \mathbb{P}(X > 3), \mathbb{P}(X \leq 4)$$

25. Seja $X \sim B(n,p)$. Mostre que $\mathbb{E}(\frac{1}{X+1}) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$. (*Dica:* note que $(x+1)! = (x+1)x!$).

26. Seja $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Mostre que $\mathbb{E}(\frac{1}{X+1}) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$. (*Dica:* lembre que $e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$).

27. Seja $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Mostre que:

    (a) $\mathbb{E}(X^k) = \lambda \mathbb{E}\left[(X+1)^{k-1}\right]$.

    (b) Usando o resultado do item anterior, mostre que $\mathbb{E}(X^3) = \lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 1)$.

28. Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$p(x) = cx, x = 1, 2, \ldots, 6$$

Determine:

    (a) o valor de c.

    (b) a probabilidade de X ser um número ímpar.

29. Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$p(x) = \frac{c}{4^x}, x = 0, 1, \ldots$$

Determine:

    (a) o valor de c.

    (b) a probabilidade de X ser um número par.

30. Quinze pessoas portadoras de determinada doença são selecionadas para se submeter a um tratamento. Sabe-se que este tratamento é eficaz na cura da doença em 80% dos casos. Suponha que os indivíduos submetidos ao tratamento curam-se (ou não) independentemente uns dos outros e considere X o número de curados dentre os 15 pacientes submetidos ao tratamento.

    (a) Qual a distribuição de X?

    (b) Qual a probabilidade de que os 15 pacientes sejam curados?

    (c) Qual a probabilidade de que pelo menos dois não sejam curados?

31. Um lote de componentes eletrônicos contém 20 itens, dos quais 5 são defeituosos. Seleciona-se ao acaso uma amostra de 5 itens. Calcule a probabilidade de que a amostra contenha no máximo um item defeituoso se

    (a) a amostragem é feita com reposição.

    (b) a amostragem é feita sem reposição.

32. Um aquário tem 3 peixes exóticos gordinhos e 7 desnutridos. O gato Félix pega ao acaso 3 peixes do aquário; os 3 são gordinhos e Félix se prepara para comê-los. Nesse momento, aparece o seu dono, um probabilista famoso, que diz: "Félix, você vai tentar repetir 3 vezes isso que acaba de fazer. Se você conseguir o feito de pegar os 3 gordinhos em pelo menos duas das três vezes, eu deixarei que você os coma. Se não conseguir, vai comer a sua ração de costume". Qual é a probabilidade de que Félix coma os peixes?

33. Em uma pizzaria com entrega em domicílio, 30% dos pedidos por telefone são de mais de uma pizza. Certo dia, o dono decide mandar um brinde ao cliente que fizer o primeiro pedido com mais de uma pizza. Seja X o número de pedidos recebidos até o ganhador do brinde.

    (a) Qual a distribuição de X?

    (b) Determine o menor número de pedidos necessário para garantir que o brinde saia com probabilidade maior que 0,9.

34. Setenta por cento da população de uma cidade têm computador em casa. Se um pesquisador para munícipes ao acaso na rua até encontrar uma pessoa que tenha computador em casa, qual a probabilidade de que ele precise

    (a) de exatamente quatro tentativas?

    (b) de pelo menos quatro tentativas?

35. Um vendedor de porta em porta consegue realizar a venda em 40% das visitas que faz. Ele planeja efetuar no mínimo duas vendas por dia. Seja X o número de visitas feitas até que a segunda venda seja efetivada.

   (a) Qual a distribuição de X?

   (b) Calcule a probabilidade de que o vendedor faça no máximo seis visitas para concluir as duas vendas.

36. O número de erros tipográficos numa página de determinado livro é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro 1/2. Encontre a probabilidade de que haja três ou mais erros tipográficos nesta página. Calcule esta probabilidade dado que há pelo menos um erro nesta página.

37. Um contador Geiger registra o número de partículas emitidas por um material radioativo. Suponha que o número de partículas que o material emite por segundo é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro 3. Obtenha a probabilidade de que, em um segundo, sejam registradas

   (a) no máximo duas partículas.

   (b) no mínimo duas partículas.

38. A liga de futebol de um país tem quatro times: time 1 , time 2 , time 3 e time 4 . Um time estrangeiro em excursão pelo país vai jogar um amistoso contra cada um dos times 1,2 e 3. Suponha que contra o time 1 este time tem probabilidade 1/4 de conquistar a vitória, enquanto que essa probabilidade vale 1/2 quando o adversário é o time 2 e vale 2/5 quando o adversário é o time 3 . Assuma também que os resultados dos três amistosos são independentes. Seja X o número de vitórias conquistadas pelo time estrangeiro nos três amistosos.

   (a) Obtenha a função de probabilidade de X.

   (b) Qual a probabilidade de que o time estrangeiro obtenha pelo menos uma vitória.

   Suponha agora que, dependendo do seu desempenho nos três amistosos, o time estrangeiro decidirá fazer um quarto jogo, contra o time 4. caso conquiste três vitórias nos três amistosos, jogará contra o time 4; caso obtenha exatamente duas vitórias, fará o quarto jogo com probabilidade 4/5 e não realizará o quarto jogo caso obtenha apenas uma vitória ou não vença nenhum dos três amistosos.

   (c) Determine a probabilidade de que o quarto jogo seja realizado.

   (d) Dado que o quarto jogo se realizou, qual a probabilidade de que o time estrangeiro tenha vencido os três amistosos iniciais?

39. Quatro casais convidados para um jantar comparecem independentemente, com probabilidades $0,9, 0,8, 0,75$ e 0,64 . Encontre a função de probabilidade do número de casais presentes ao jantar.

40. Um revendedor de componentes elétricos os compra em lotes de 10 peças. Seu controle de qualidade consiste em inspecionar 3 componentes selecionados aleatoriamente de um lote e aceitar o lote somente se os 3 componentes não são defeituosos. Sabe-se que 30% dos lotes têm 4 componentes defeituosos e 70% têm apenas 1 componente defeituoso. Dos 3 componentes selecionados de um lote, seja X o número de componentes defeituosos.

    (a) Obtenha a função de probabilidade de X.

    (b) Qual a probabilidade de que um lote seja aceito?

41. Uma urna contém cinco bolas numeradas de 1 a 5 . Duas bolas são retiradas simultaneamente. Obtenha a função de probabilidade e faça o gráfico da função de distribuição das seguintes variáveis aleatórias:

    (a) o maior número sorteado.

    (b) a soma dos números retirados.

42. Quatro bombons iguais são distribuídos aleatoriamente a quatro crianças. Determine a distribuição de probabilidade da v.a X igual ao número de crianças que não ganharam bombom.

Gabarito

1) (a) 0,70 (b) 0,45 (c) 0,55 (d) 0,71 (e) 0,65 (f) 0,45

4) $\mathbb{E}(Y) = 8.333,33$

5) (a) $\mathbb{E}(X) = 2,06$ (b) $\text{Var}(X) = 0,9364$ (c) $\sigma(X) = 0,9677$

6) (a) 16,38; 3,9936 (b) 401 (c) 2496 (d) 13,66

7) (a) $\mathbb{E}(X) = 20,80$ u.m. e $\sigma(X) = 7,71$ u.m.
   (b) $\mathbb{E}(Y) = 25,04$ u.m. e $\sigma(Y) = 10,02$ u.m.

8) (a) 16 e 3/4 (b) 0,3698 (c) 0,1971 (d) 0 e 1 (e) 0,1971 (f) 0,6302

9) (a) 0,354 (b) 0,115 (c) 0,918

10) 0,1478; 0,8; 0,8579

11) 0,407

12) (a) 0,017 (b) 0,811; 0,425 (c) 0,006; 0,902; 0,586

13) Quando $p = 0,9$, a probabilidade é 0,99 para A e 0,9963 para B. Se $p = 0,5$, estas probabilidades são 0,75 e 0,6875, respectivamente.

14) 0,3758

15) 0,9418

16) (a) 0,2013 (b) 0,6242 (c) 0,3222

17) R$ 6,48

28) (a) 1/21 (b) 3/7

29) (a) 3/4 (b) 4/5

30) (b) 0,035 (c) 0,830

31) (a) 81/128 (b) 819/1292

32) $358/120^3 \approx 0,000207$

33) (b) 7

34) (a) 0,0189 (b) 0,027

35) (b) 0,7667

36) 0,014; 0,036

37) (a) 0,4232 (b) 0,8009

38) (b) 31/40 (c) 0,27 (d) 5/27

39) $p(0) = 0,0018; p(1) = 0,032; p(2) = 0,1862; p(3) = 0,4344; p(4) = 0,3456$

40) (a) $\mathbb{P}(X = 0) = 0,54; \mathbb{P}(X = 1) = 0,36; \mathbb{P}(X = 2) = 0,09; \mathbb{P}(X = 3) = 0,01$

(b) 0,54

41) (a) $p(2) = 1/10, p(3) = 1/5, p(4) = 3/10, p(5) = 2/5$

$p(x) = 1/10$ para $x \in \{3, 4, 8, 9\}$ e $p(x) = 1/5$ para $x \in \{5, 6, 7\}$

42) $p(0) = 1/35, p(1) = 12/35, p(2) = 18/35, p(3) = 4/35$