DERIVADAS DIRECIONAIS E VETORES GRADIENTES

DEFINIÇÃO. Sejam $f(x,y): U \subseteq R^2 \rightarrow R$ uma função real de duas variáveis reais, U um subconjunto aberto de R^2, e $u = u_1 i + u_2 j$ um vetor unitário no plano cartesiano. Seja $(x_0, y_0) \in U$. Então a derivada direcional de $f(x,y)$ em (x_0,y_0) na direção de $u = u_1 i + u_2 j$ é o seguinte limite: $D_u f(x_0,y_0) := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0,y_0)}{h}$, quando este limite existir;

Felizmente, sempre que $f(x,y)$ for diferenciável em (x_0,y_0), não será necessário calcular $D_u f(x_0,y_0)$ por meio do limite, que a define, e sim bastará calcularmos o produto escalar de dois vetores no plano cartesiano.

LEMA. Se $f(x,y)$ for diferenciável em (x_0,y_0) e $u = u_1 i + u_2 j$ for um vetor unitário, então a derivada direcional de $f(x,y)$ em (x_0,y_0) na direção de u, $D_u f(x_0,y_0)$, existirá sempre, e:

$$D_u f(x_0,y_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) i + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) j\right] . \left[u_1 i + u_2 j\right];$$

Prova: como $f(x,y)$ é diferenciável em (x_0,y_0), temos:

$$f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) hu_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) hu_2 + \varepsilon_1(hu_1,hu_2)hu_1 + \varepsilon_2(hu_1,hu_2)hu_2$$

onde, $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_i(hu_1,hu_2) = 0$, para $i = 1$ e 2;

Logo:

$$\begin{aligned}
D_u f(x_0,y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0,y_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) hu_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) hu_2 + \varepsilon_1(hu_1,hu_2)hu_1 + \varepsilon_2(hu_1,hu_2)hu_2\right]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) u_2 + \underbrace{\varepsilon_1(hu_1,hu_2)}_{\downarrow\, 0} u_1 + \underbrace{\varepsilon_2(hu_1,hu_2)}_{\downarrow\, 0} u_2\right] \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) u_2 = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) i + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) j\right] . \left[u_1 i + u_2 j\right];
\end{aligned}$$

DEFINIÇÃO. Seja $f(x,y)$ uma função real de duas variáveis reais definida num subconjunto U aberto em R^2. Então, para cada $(x,y) \in U$ tal que existam $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, definimos o vetor Gradiente de $f(x,y)$, denotado por $\operatorname{grad} f(x,y)$ ou $\nabla f(x,y)$, como sendo o seguinte vetor no plano cartesiano: $\nabla f(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) i + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) j$;

Se reunirmos o resultado do LEMA, com a definição do vetor Gradiente e lembramos que $u = u_1 i + u_2 j$, podemos escrever que:

$$D_u f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) . u ;$$

<u>DEFINIÇÃO</u>. Sejam $f(x,y,z): U \subseteq R^3 \to R$ uma função real de três variáveis reais, U um subconjunto aberto de R^3, $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ um vetor unitário no espaço euclidiano. Seja $(x_0, y_0, z_0) \in U$. Então, a <u>derivada direcional</u> de $f(x,y,z)$ em (x_0, y_0, z_0) na direção de $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ é o seguinte limite:

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2, z_0 + hu_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

quando este limite existir;

Tal como ocorre para funções reais de duas variáveis, $f(x,y)$, se $f(x,y,z)$ for diferenciável em (x_0, y_0, z_0) é possível provar com argumentos similares que:

<u>LEMA</u>. Se $f(x,y,z)$ for diferenciável em (x_0, y_0, z_0) e $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ for um vetor unitário, então a derivada direcional de $f(x,y,z)$ em (x_0, y_0, z_0) na direção de u, $D_u f(x_0, y_0, z_0)$, existirá sempre e:

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) i + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) j + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) k \right] . \left[u_1 i + u_2 j + u_3 k \right].$$

E, agora, podemos definir o vetor Gradiente de $f(x,y,z)$ em (x_0, y_0, z_0):

<u>DEFINIÇÃO</u>. Seja $f(x,y,z)$ uma função real de três variáveis reais definida num subconjunto U aberto em R^3. Então, para cada $(x,y,z) \in U$ tal que existam $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$, definimos o vetor <u>Gradiente</u> de $f(x,y,z)$, denotado por $\text{grad} f(x,y,z)$ ou $\nabla f(x,y,z)$, como sendo o seguinte vetor no espaço euclidiano:

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) i + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) j + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) k ;$$

E se, novamente, reunirmos o LEMA, com a definição do vetor Gradiente e lembrarmos que $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$, podemos escrever que:

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) . u ;$$

Sabemos da Geometria Analítica que se A e B são dois vetores não-nulos, em R^2 ou em R^3, e se θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, é o ângulo formado por estes dois vetores, então: $A.B = \|A\| \|B\| \cos\theta$;

Então para darmos um tratamento só ao que se segue, quando estivermos no plano cartesiano a notação ∇f significará $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,i + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,j$, e a notação u significará $u_1 i + u_2 j$. Já se tivermos no espaço euclidiano a mesma notação ∇f significará $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\,i + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\,j + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\,k$, e a notação u significará $u_1 i + u_2 j + u_3 k$.

Assim sendo, que estejamos no plano cartesiano ou no espaço euclidiano, teremos, sempre que $\nabla f \neq 0$:

$$D_u f = \nabla f . u = \|\nabla f\| \underbrace{\|u\|}_{1} \cos\theta = \|\nabla f\| \cos\theta,$$ onde $0 \leq \theta \leq \pi$ é o ângulo formado por ∇f e u;

E, como $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, teremos:

$$-\|\nabla f\| \leq D_u f = \|\nabla f\| \cos\theta \leq \|\nabla f\|;$$

O que nos leva as seguintes conclusões, sempre que $\nabla f \neq 0$;

ⓐ A derivada direcional $D_u f$ atingirá seu valor máximo, $\|\nabla f\|$, quando $\theta = 0$, ou seja: quando o vetor unitário u tiver a mesma direção e o mesmo sentido do vetor gradiente ∇f;

ⓑ A derivada direcional $D_u f$ atingirá seu valor mínimo, $-\|\nabla f\|$, quando $\theta = \pi$, ou seja: quando o vetor unitário u tiver a mesma direção, porém o sentido contrário ao do vetor gradiente ∇f;

ⓒ A derivada direcional $D_u f$ será nula, indicando que não há variação, quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, ou seja: quando o vetor unitário u for ortogonal ao vetor gradiente ∇f;

LISTA · DERIVADAS DIRECIONAIS E VETORES GRADIENTES

01 Em cada caso, calcule a derivada direcional da função dada, em seu ponto assinalado, na direção e sentido do vetor unitário especificado:

(a) $f(x,y) = x^2+y^2$; $(x_0,y_0) = (1,-2)$; $u = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j$;

(b) $f(x,y) = y^2 tg^2 x$; $(x_0,y_0) = (\frac{\pi}{4},1)$; $u = -\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}j$;

(c) $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$; $(x_0,y_0) = (0,0)$; $u = \frac{1}{\sqrt{10}}i - \frac{3}{\sqrt{10}}j$;

(d) $f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x$; $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$; $u = \frac{2}{3}i - \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k$;

(e) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(xyz)$; $(x_0,y_0,z_0) = (\frac{1}{2},\frac{1}{3},\pi)$; $u = \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j - \frac{1}{\sqrt{3}}k$;

(f) $f(x,y,z) = \sqrt{x+yz}$; $(x_0,y_0,z_0) = (1,3,1)$; $u = \frac{2}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{6}{7}k$;

02 Em cada caso, calcule a derivada direcional da função dada, em seu ponto assinalado, na direção e sentido do vetor unitário, que tenha a mesma direção e o mesmo sentido do vetor, não-unitário, v especificado:

(a) $f(x,y) = \sqrt{xy}$; $(x_0,y_0) = (2,8)$; $v = -3i+4j$;

(b) $f(x,y) = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$; $(x_0,y_0) = (-2,2)$; $v = i - j$;

(c) $f(x,y,z) = \cos 2x \cos 3y \operatorname{senh} 4z$; $(x_0,y_0,z_0) = (\frac{\pi}{2},0,0)$; $v = 3i+4j+12k$;

(d) $f(x,y,z) = y - \sqrt{x^2+z^2}$; $(x_0,y_0,z_0) = (-3,1,4)$; $v = 2i-2j+k$;

03 Encontre os dois vetores unitários tais que, na direção e sentido de cada um deles, a derivada direcional de $f(x,y) = xy+y^2$ em $(1,2)$ seja nula;

04 Em cada caso, mostre que não existe um vetor unitário u tal que a derivada direcional de $f(x,y) = x^2-3xy+4y^2$ em $(x_0,y_0) = (1,2)$, seja:

(a) maior do que $\sqrt{185}$; (b) menor do que $-\sqrt{185}$;

05 Seja $f(x,y)$ tal que: sua derivada direcional em (x_0,y_0), na direção e sentido do vetor $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$ seja igual à $2\sqrt{2}$, e na direção e sentido de $-j$ seja igual à -3. Então, calcule a derivada direcional de $f(x,y)$ na direção e sentido de $u_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}i - \frac{2}{\sqrt{5}}j$;

06 Dado que a derivada direcional de $f(x,y,z)$ no ponto $(3,-2,1)$, na direção e sentido do vetor unitário $u = \frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k$ é igual à -5 e, em adendo, que $\|\nabla f(3,-2,1)\| = 5$, determine $\nabla f(-3,2,1)$;

(07) A temperatura em graus Celsius em um ponto (x,y) de uma placa retangular no plano-xy é: $T(x,y) = \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$;

(a) encontre a taxa de variação da temperatura em $(1,1)$ na direção e sentido do vetor unitário $u = \frac{2}{5}i - \frac{1}{5}j$;

(b) uma formiga em $(1,1)$ precisa andar na direção, e sentido, para a qual a temperatura baixe mais rapidamente. Encontre um vetor unitário nesta direção e neste sentido;

(08) A temperatura em graus Celsius em um ponto (x,y,z) de um sólido no espaço tridimensional é: $T(x,y,z) = \dfrac{60}{x^2+y^2+z^2+3}$. Então, encontre a direção, e sentido, para a qual a taxa de variação da temperatura, a partir do ponto $(3,-2,2)$ atinja seu valor máximo;

(09) O potencial elétrico é $V(x,y)$ volts em qualquer ponto do plano-xy, com $V(x,y) = e^{-2x}\cos y$. Então, encontre:

(a) a taxa de variação do potencial no ponto $(0,\frac{\pi}{4})$ na direção e sentido do vetor unitário $u = \cos\frac{\pi}{6}i + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}j$;

(b) a direção, o sentido e o valor da taxa máxima de variação do potencial elétrico em $(0,\frac{\pi}{4})$;

(10) Ache uma direção, e o sentido, para a qual os valores da função real $f(x,y) = e^{2y}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{3x}\right)$ não mudam, a partir do ponto $(1,3)$;

(11) A equação da superfície de uma montanha é: $z = 1200-3x^2-2y^2$, onde as distâncias são medidas em metros. Suponha que o eixo-x positivo aponta para o Leste, e o eixo-y positivo para o Norte. Uma alpinista se encontra no ponto $(-10,5,850)$. Então, em cada caso, decida se a alpinista estará subindo ou descendo, e a que taxa, caso ela se mova na direção e sentido: (a) Leste; (b) Norte; (c) Noroeste; (d) Sudeste;

Aponte também uma direção, e o sentido, para a qual ela se mova e não suba e nem desça;

(12) [GRADIENTE EM COORDENADAS POLARES]. Sejam $u = f(x,y)$; $x(r,\theta) = r\cos\theta$; $y(r,\theta) = r\operatorname{sen}\theta$. Mostre que se $v_1 = \cos\theta i + \operatorname{sen}\theta j$ e $v_2 = \cos(\theta+\frac{\pi}{2})i + \operatorname{sen}(\theta+\frac{\pi}{2})j$, então:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}j = \frac{\partial u}{\partial r}v_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}v_2;$$