EXTREMOS RELATIVOS DE FUNÇÕES REAIS DE DUAS VARIÁVEIS REAIS

No que se segue estudaremos como encontrar máximos locais ou mínimos locais de funções $u = f(x,y): U \subseteq R^2 \longrightarrow R$, onde U é um subconjunto aberto de R^2. Começamos com as seguintes definições:

DEFINIÇÃO.1. [mínimo relativo, ou local]

Diz-se que $u = f(x,y): U \subseteq R^2 \longrightarrow R$ tem em $(x_0, y_0) \in U$ um ponto de <u>mínimo relativo</u>, ou <u>mínimo local</u>, quando existir um disco aberto B, centrado em (x_0, y_0), contido em U, tal que $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$ $\forall (x,y) \in B$. Nesse caso, $f(x_0, y_0)$ será dito um valor mínimo relativo, ou um valor mínimo local, de $u = f(x,y)$;

DEFINIÇÃO.2. [máximo relativo, ou local]

Diz-se que $u = f(x,y): U \subseteq R^2 \longrightarrow R$ tem em $(x_0, y_0) \in U$ um ponto de <u>máximo relativo</u>, ou <u>máximo local</u>, quando existir um disco aberto B, centrado em (x_0, y_0), contido em U, tal que $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$ $\forall (x,y) \in B$. Nesse caso, $f(x_0, y_0)$ será dito um valor máximo relativo, ou um valor máximo local, de $u = f(x,y)$;

DEFINIÇÃO.3. [ponto de sela]

Diz-se que $u = f(x,y): U \subseteq R^2 \longrightarrow R$ tem em $(x_0, y_0) \in U$ um <u>ponto de sela</u>, quando para cada (todo) disco aberto B, centrado em (x_0, y_0), contido em U, existirem pontos $(x,y) \in B$ tais que tanto $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$ quanto $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$. Ou seja, quando (x_0, y_0) não for um máximo local e, também não for um mínimo local, de $u = f(x,y)$;

O próximo resultado é uma análogo para funções reais de uma variável real $y = f(x)$:

TEOREMA.1. Se (x_0, y_0) é um ponto de máximo local, ou é um ponto de mínimo local, de $u = f(x,y): U \subseteq R^2 \longrightarrow R$, e existem $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$, então $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$;

<u>Prova</u>: leia a demonstração deste resultado no ANEXO, após a resolução da lista de exercícios;

É relevante entender exatamente o que diz o Teorema. Ou seja, que: se (x_0, y_0) é um ponto de máximo local, ou de mínimo local, então ele se encontra no conjunto solução das duas equações:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

; Como veremos nos exercícios, há soluções deste sistema de equações, ou seja pontos (x_1, y_1), tais que $f_x(x_1, y_1) = 0$ e $f_y(x_1, y_1) = 0$, e eles são <u>pontos de sela</u> de $u = f(x,y)$;

De qualquer forma, a literatura sobre o tema reserva uma denominação especial para os pontos (x_0,y_0) tais que $f_x(x_0,y_0)=0$ e $f_y(x_0,y_0)=0$;

DEFINIÇÃO.4.[PONTOS CRÍTICOS]

Diz-se que $u=f(x,y): U\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tem em $(x_0,y_0)\in U$ um <u>ponto crítico</u>, quando $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$;

Como comentamos anteriormente, ocorre de (x_0,y_0) ser um ponto crítico de $u=f(x,y)$ e ele ser: um ponto de máximo local, ou um ponto de mínimo local ou mesmo um ponto de sela.

O próximo resultado estabelece um teste, bastante eficiente, para podermos decidir se um ponto crítico (x_0,y_0) de $u=f(x,y)$ é um máximo local, um mínimo local ou um ponto de sela:

TEOREMA.2.[Teste das derivadas parciais de 2ª ordem para extremos relativos]

Seja $u=f(x,y): U\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0,y_0)\in U$ um ponto crítico (ou seja: $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$). Suponha que exista um disco aberto B, contido em U, centrado em (x_0,y_0), no qual f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} e f_{yx} sejam todas contínuas. E, seja $D(x_0,y_0)=f_{xx}(x_0,y_0).f_{yy}(x_0,y_0)-[f_{xy}(x_0,y_0)]^2$; Então:

(i) se $D(x_0,y_0)>0$ e $f_{xx}(x_0,y_0)>0$, (x_0,y_0) será um ponto de mínimo local;

(ii) se $D(x_0,y_0)>0$ e $f_{xx}(x_0,y_0)<0$, (x_0,y_0) será um ponto de máximo local;

(iii) se $D(x_0,y_0)<0$, (x_0,y_0) será um ponto de sela;

<u>Prova</u>: leia uma demonstração deste resultado no ANEXO, após a resolução da lista de exercícios

As seguintes observações, adicionais, merecem ser feitas:

(a) Como veremos, por meio de exemplos, na Lista de Exercícios, quando $D(x_0,y_0)=0$, o teste é totalmente inconclusivo. Veremos casos em que (x_0,y_0) é máximo local, ou que (x_0,y_0) é mínimo local, e em que (x_0,y_0) é um ponto de sela;

(b) As alíneas (i) e (ii) podem, também, ser enunciadas com $f_{yy}(x_0,y_0)$ no lugar de $f_{xx}(x_0,y_0)$; Com efeito, como nas duas alíneas $D(x_0,y_0)>0$, e $f_{xx}(x_0,y_0).f_{yy}(x_0,y_0)=D(x_0,y_0)+[f_{xy}(x_0,y_0)]^2>0$. Logo $f_{xx}(x_0,y_0)$ e $f_{yy}(x_0,y_0)$, nesse caso, sempre terão o mesmo sinal.

LISTA DE EXERCÍCIOS - EXTREMOS RELATIVOS

01 Em cada caso, encontre, se existirem, pontos críticos (x_0, y_0) nos quais $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$, para em seguida usar o Teste das derivadas parciais de 2ª ordem e, se possível, classificá-los como pontos de máximos locais, mínimos locais ou de sela:

ⓐ $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$; ⓑ $f(x,y) = x^3 + y^3 - 18xy + 1$; ⓒ $f(x,y) = x^3 - 15x + y^3 - 15y + 3xy^2$;
ⓓ $f(x,y) = e^{xy}$; ⓔ $f(x,y) = x^4 + y^3 - 2x^2 - 3y + 3$; ⓕ $f(x,y) = xy + 2x - \ln(x^2 y)$; $x \neq 0$ e $y > 0$;
ⓖ $f(x,y) = 2\ln x + \ln y - 4x - y$; $x > 0$ e $y > 0$; ⓗ $f(x,y) = 2 + xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; $x \neq 0$ e $y \neq 0$;
ⓘ $f(x,y) = e^x \cos y$; ⓙ $f(x,y) = x^2 + \frac{2}{xy} + y^2$; $x \neq 0$ e $y \neq 0$; ⓚ $f(x,y) = e^{x^2+y^2-4x}$;
ⓛ $f(x,y) = e^{x+y} - xe^{2y}$; ⓜ $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$; $0 \leq x \leq 2\pi$; $0 \leq y \leq 2\pi$; ⓝ $f(x,y) = y\cos x$; $0 \leq x \leq 2\pi$;

02 Verifique que $f(x,y) = 2 + x^2 + 4y^2 - 4xy$ possui infinitos pontos críticos, nos quais $D = 0$, tornando o Teste das derivadas parciais de 2ª ordem, inconclusivo. Mostre que $f(x,y)$ assume seu valor mínimo absoluto, neles;

03 Proceda como na Questão anterior, para mostrar que a função real $f(x,y) = 6xy + 4 - 9y^2 - x^2$, assume seu valor máximo absoluto nos seus infinitos pontos críticos, nos quais o Teste das derivadas parciais de 2ª ordem é inconclusivo;

04 Verifique que $(0,0)$ é o único ponto crítico de $f(x,y) = 3x^2y - y^3$, e que nele temos $D = 0$. Após, confira que $(0,0)$ é um ponto de sela de $f(x,y)$;

05 Mostre que $f(x,y) = e^{4y} + 2x^4 - 4x^2e^y$ possui apenas dois pontos críticos nos quais $f_x = 0$ e $f_y = 0$, e que ambos são pontos de mínimos locais;

06 Mostre que $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ possui apenas um ponto crítico no qual $f_x = 0$ e $f_y = 0$, que é um ponto de máximo local, mas que $f(x,y)$ não assume um valor máximo absoluto;

07 Mostre que $f(x,y) = -(x^2-1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ possui apenas dois pontos críticos nos quais $f_x = 0$ e $f_y = 0$, e que ambos são pontos de máximos locais;

08 Use a desigualdade $|u.v| \leq \|u\|\,\|v\|$, válida para todos vetores u e v em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, devida à Cauchy (1789-1857); Bunyakovski (1804-1899); e Schwarz (1843-1921), para mostrar que $f(x,y) = \frac{(ax+by+c)^2}{x^2+y^2+1}$, $c \neq 0$, tem como valor máximo absoluto: $a^2+b^2+c^2$;

09 Dada a função $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$, mostre que: ⓐ ela possui um ponto crítico no qual assume seu valor mínimo absoluto; ⓑ ela possui uma infinidade de pontos críticos nos quais $D = 0$; ⓒ mediante a mudança de variáveis $t = x^2+y^2$, é possível concluir que ela assume seu valor máximo absoluto nos infinitos pontos críticos de ⓑ.