Sumário de Expressões Matemáticas

1. Desigualdades

a) Jensen (Proposição 4.9)

Seja X uma variável aleatória com esperança finita e g uma função convexa. Então:

$$E(g(X)) \geq g(E(X)).$$

Observação: Uma condição suficiente para que g seja convexa no intervalo I é que g tenha derivada contínua e não decrescente neste intervalo I (outras condições são mencionadas no texto).

b) Básica de Chebyshev (Proposição 4.10)

Seja X uma variável aleatória não negativa e considere $a > 0$. Então

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

c) Clássica de Chebyshev (Proposição 5.3)

Seja X uma variável aleatória com variância finita. Então, para qualquer $t > 0$, temos

$$P(|X - \mu_X| \geq t) \leq \frac{Var(X)}{t^2}.$$

d) Cauchy-Schwarz (Teorema 5.7)

Sejam X e Y variáveis aleatórias com esperanças finitas. Então:

$$E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}\,;$$

com a igualdade valendo se, e só se, $Y = aX$, para alguma constante a.

e) Kolmogorov (Lema 6.11)

Seja $\{X_n : n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com média zero e variância finita. Então, para todo $\lambda > 0$ e com $S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ temos:

$$P(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \lambda) \leq \frac{Var\, S_n}{\lambda^2}.$$

f) Markov (Proposição 5.4)

Seja X uma variável aleatória qualquer. Então, para quaisquer $t, k > 0$, temos

$$P(|X| \geq t) \leq \frac{E(|X|^k)}{t^k}.$$

g) Hölder

Sejam X e Y variáveis aleatórias não negativas e suponha que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$, $q > 1$. Então,

$$E(|XY|) \leq E^{\frac{1}{p}}(|X|^p)E^{\frac{1}{q}}(|Y|^q).$$

h) Minkowski

Sejam X e Y variáveis aleatórias não negativas e $p \geq 1$. Então:

$$E^{\frac{1}{p}}\left(|X+Y|^{p}\right) \leq E^{\frac{1}{p}}\left(|X|^{p}\right) + E^{\frac{1}{p}}\left(|Y|^{p}\right).$$

i) Liapunov

Seja X uma variável aleatória não negativa e $0 \leq \alpha \leq \beta$. Então:

$$E^{\frac{1}{\alpha}}\left[|X|^{\alpha}\right] \leq E^{\frac{1}{\beta}}\left[|X|^{\beta}\right].$$

2. Fórmulas Matemáticas Úteis

a) Somas

(1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

(2) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(3) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

(4) $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}$.

Observação: podem ser provadas usando indução matemática.

b) Fatorial, Combinatória e Teorema Binomial

(1) $\binom{n}{k} = 0$ se $k < 0$ ou $k > n$.

(2) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ para $n = 1, 2, \ldots$ e $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

(3) $\binom{-a}{n} = (-1)^n \binom{a+n-1}{n}$.

(4) $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ para n inteiro e positivo.

(4a) $(1+t)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i$.

(4b) $(1-t)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i t^i$.

(4c) $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.

(5) $\binom{a+b}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{a}{i} \binom{b}{n-i}$ (expandir $(1+x)^a (1+x)^b = (1+x)^{a+b}$)

(6) $\binom{n+k}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{i+k-1}{i}$ (use (2) e indução finita).

(7) $\sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} = n 2^{n-1}$.

(8) $\sum_{i=1}^{n} i^2 \binom{n}{i} = n(n+1) 2^{n-2}$.

(9) $\sum_{i=1}^{n} i^3 \binom{n}{i} = n^2 (n+3) 2^{n-3}$.

(10) $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

(11) $\sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j} \binom{j}{i} = \binom{n}{i} 2^{n-i}, i \leq n$.

(12) $i \binom{n}{i} = n \binom{n-1}{i-1}$.

c) Conjuntos

(1) $\{X < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq c - \frac{1}{n}\}$.

(2) $\{X \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X < c + \frac{1}{n}\}$.

(3) $\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

(4) $\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

d) Limites e Cálculo

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} = 1$. (Stirling).

(2) $\lim_{x\to 0} (1+\lambda x)^{1/x} = e^{\lambda}$, λ constante qualquer.

(3) Série de Taylor para $f(x)$ em torno de $x = a$:

$$f(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n.$$

$$\text{com } f^{(i)}(a) = \left.\frac{d^i f(x)}{dx^i}\right|_{x=a} \text{ e } R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \, a \leq c \leq x.$$

e) Função Gama e Função Beta

A função Gama, denotada por $\Gamma(.)$ é definida por

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \text{ para } t > 0.$$

Através de integração por partes mostra-se que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. Se $t = n$ (inteiro), então $\Gamma(n+1) = n!$ Em particular, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

A função Beta, denotada por $\beta(a,b)$ é definida por

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx \text{ para } a, b > 0.$$

Vale, também, $\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.