MULTIPLICADORES DE LAGRANGE (1736-1813)

No que se segue, será apresentado o Método denominado "Multiplicadores de Lagrange" útil para encontrar extremos, máximos ou mínimos, de uma função $F(x,y,z)$, sujeitos à uma restrição $g(x,y,z)=k$.

Veremos que se (x_0,y_0,z_0) é um ponto que fornece um valor máximo, ou um valor mínimo, de $F(x,y,z)$ e (x_0,y_0,z_0) é um ponto da superfície $g(x,y,z)=k$, isto é: $g(x_0,y_0,z_0)=k$, então (x_0,y_0,z_0) é solução do seguinte sistema: $\begin{cases} \nabla F(x,y,z)=\lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z)=k \end{cases}$;

Para este efeito, suponhamos que:
(i) $F(x,y,z)$ é diferenciável; (ii) as derivadas parciais $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial z}$ de $g(x,y,z)$ são contínuas; (iii) $\nabla g(x,y,z)\neq 0$ em todos os pontos da superfície $g(x,y,z)=k$; (iv) $r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ é qualquer curva diferenciável, contida na superfície $g(x,y,z)=k$, isto é: $\boxed{g(x(t),y(t),z(t))=k}$, passando por (x_0,y_0,z_0), isto é: $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $r(t_0)=(x_0,y_0,z_0)$, e com $r'(t_0)\neq 0$;

Então, por um lado, se definimos $u(t)=F(x(t),y(t),z(t))$ e se (x_0,y_0,z_0) for um extremo, máximo ou mínimo, de $F(x,y,z)$, t_0 será um extremo de $u(t)$. Logo pelo Teorema de Fermat (1601-1665) $u'(t_0)=0$. Mas pela Regra da Cadeia $u'(t)=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\left[\frac{\partial F}{\partial x}i+\frac{\partial F}{\partial y}j+\frac{\partial F}{\partial z}k\right]\cdot\left[\frac{dx}{dt}i+\frac{dy}{dt}j+\frac{dz}{dt}\right]=\nabla F(x,y,z)\cdot r'(t)$.

Logo $u'(t_0)=0$, acarretará: $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot r'(t_0)=0$; (I)

Por outro lado, se derivamos os dois membros de $g(x(t),y(t),z(t))=k$, com relação à t, e também usamos a Regra da Cadeia, obtemos:

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0 \therefore \left[\frac{\partial g}{\partial x}i+\frac{\partial g}{\partial y}j+\frac{\partial g}{\partial z}k\right]\cdot\left[\frac{dx}{dt}i+\frac{dy}{dt}j+\frac{dz}{dt}k\right]=0 \therefore \nabla g(x,y,z)\cdot r'(t)=0;$$

Logo em particular, para (x_0,y_0,z_0) e $t=t_0$, obtemos: $\nabla g(x_0,y_0,z_0)\cdot r'(t_0)=0$; (II)

Como $\nabla g(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ e $r'(t_0)\neq 0$, (I) e (II) nos dizem que os vetores $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ e $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$ têm a mesma direção. Ou seja: $\exists\,\lambda\in\mathbb{R}$ tal que: $\nabla F(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0,z_0)$. Então, (x_0,y_0,z_0) é solução de: $\begin{cases} \nabla F(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z) \\ \text{e} \\ g(x,y,z)=k \end{cases}$;

Por fim, como $\nabla F(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)$ é o mesmo que:
$\frac{\partial F}{\partial x}i+\frac{\partial F}{\partial y}j+\frac{\partial F}{\partial z}k=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}i+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}j+\lambda\frac{\partial g}{\partial z}k$, o sistema pode ser escrito, mais detalhadamente, assim:

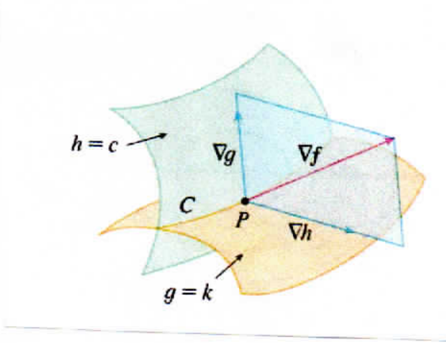
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z); \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z); \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=\lambda\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z); \\ \text{e} \\ g(x,y,z)=k; \end{cases}$$

Tudo que fizemos para uma função diferenciável $F(x,y,z)$ e para uma superfície $g(x,y,z)=k$, nas condições dadas na página anterior, vale também para uma função diferenciável $F(x,y)$ e uma curva $g(x,y)=k$

Temos então:

O sistema em sua forma sintética: $\begin{cases} \nabla F(x,y)=\lambda \nabla g(x,y) \\ \text{e} \\ g(x,y)=k \end{cases}$; E em sua forma detalhada: $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = k \end{cases}$;

O método dos Multiplicadores de Lagrange também pode ser aplicado para o caso de duas restrições, conforme figura ao lado.



Se (x_0,y_0,z_0) é um máximo, ou um mínimo, de $F(x,y,z)$, e (x_0,y_0,z_0) pertence à curva C que é a interseção das superfícies $g(x,y,z)=k$ e $h(x,y,z)=c$, com $\nabla g \times \nabla h \neq 0$ para todos pontos da curva C, então (x_0,y_0,z_0) é solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \nabla F(x,y,z)=\lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z) \\ g(x,y,z)=k \\ h(x,y,z)=c \end{cases} ;$$

Olhando mais detalhadamente para 1ª equação vemos que:

$\nabla F(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z)$, equivale a:

$$\frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k = \left[\lambda \frac{\partial g}{\partial x} i + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} j + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} k \right] + \left[\mu \frac{\partial h}{\partial x} i + \mu \frac{\partial h}{\partial y} j + \mu \frac{\partial h}{\partial z} k \right];$$

Ou seja:

$$\frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k = \left(\lambda \frac{\partial g}{\partial x} + \mu \frac{\partial h}{\partial x} \right) i + \left(\lambda \frac{\partial g}{\partial y} + \mu \frac{\partial h}{\partial y} \right) j + \left(\lambda \frac{\partial g}{\partial z} + \mu \frac{\partial h}{\partial z} \right) k;$$

O que nos possibilita reescrever, mais detalhadamente, o sistema acima assim:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial h}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z} + \mu \dfrac{\partial h}{\partial z} \\ g(x,y,z) = k \\ h(x,y,z) = c \end{cases} ;$$