Distribuição normal

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Depto. de Estatística e Matemática Aplicada - UFC

Fortaleza, 17 de outubro 2022

Sumário

Distribuição normal

- A distribuição normal ocupa um lugar de destaque em probabilidade e estatística, devido as suas propriedades teóricas e, também, ao grande apelo prático que possui.
- Diversos trabalhos científicos têm apontado que diversos fenômenos naturais podem ser, satisfatoriamente, descritos através da distribuição normal.
- Alguns exemplos são: alturas, pesos e outras características físicas. Erros de medida em experimentos científicos, medidas antropométricas em fósseis, tempos de reação em experimentos psicológicos, medidas de inteligência e aptidão, numerosas medidas e indicadores econômicos.
- Além disso, a distribuição normal é *caso limite* de diversas outras distribuições de probabilidade, tanto contínuas, como discretas.

Distribuição normal

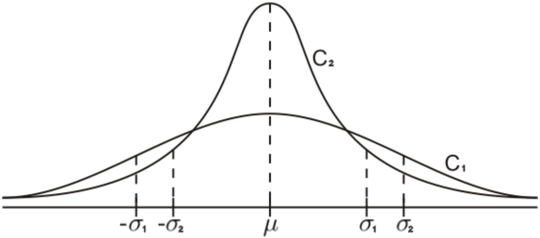
- Dizemos que uma v.a. X possui distribuição normal com parâmetros μ e σ^2, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$, se a f.d.p. f_X é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad -\infty < x < \infty$$

- Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

- A função de distribuição acumulada não possui forma analítica, e é expressa em termos de uma integral.

- Gráfico da f.d.p.



$\mathbb{E}(X) = \mu$: representa o ponto de simetria de f_X

$\text{Var}(X) = \sigma^2$: representa a dispersão de f_X

- Valor Esperado:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \mu$$

- Variância

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \sigma^2 \end{aligned}$$

Proposição: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ se, e somente se $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

- Φ denota a f.d.a. da Normal padrão:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- Temos então, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$F_X(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Modelo Normal

- Para calcular as probabilidades, é necessário integração numérica: e^{-x^2} não tem antiderivada.
- Contudo, os valores para $Z \sim N(0, 1)$ encontram-se em tabelas na maioria dos livros de estatística.
- Então, para calcular probabilidades a respeito de uma v.a com distribuição normal qualquer, basta expressá-la em termos da v.a $Z \sim N(0, 1)$.

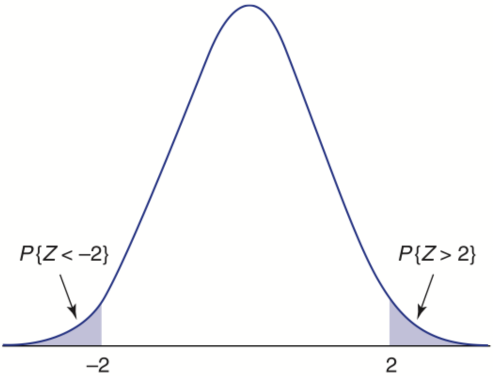
Modelo Normal

- $Z \sim \text{Normal}(0,1)$, com f.d.a. Φ:

$$\Phi(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \, .$$

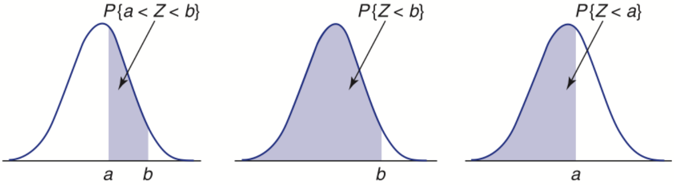
- $\Phi(0) = 0,5$
- $\Phi(-\infty) = 0$
- $\Phi(\infty) = 1$
- $\Phi(z) = \mathbb{P}(Z < z) = 1 - \mathbb{P}(Z > z) = 1 - \mathbb{P}(Z < -z) = 1 - \Phi(-z) = \mathbb{P}(Z > -z)$. (por simetria).

Modelo Normal



$$\mathbb{P}(Z < -2) = \mathbb{P}(Z > 2)$$

Modelo Normal



$$\mathbb{P}(a < Z < b) = \mathbb{P}(Z < b) - \mathbb{P}(Z < a) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Modelo Normal

- Exercitando com a tabela da Normal:
  - $\Phi(0,2) = 0,5793$
  - $\Phi(0,45) = 0,6736$
  - $\Phi(1,98) = 0,9761$
  - $\Phi(-0,45) = 1 - \Phi(0,45) = 0,3264$

Exemplos

- Seja $Z \sim N(0,1)$
- Seja $Y \sim N(4,2^2)$
  - $F_Y(6) = \mathbb{P}(Y \leq 6) = \mathbb{P}\left(\frac{Y-4}{2} \leq \frac{6-4}{2}\right) = \mathbb{P}(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0,8413$
  - $\mathbb{P}(2 < Y \leq 6) = \mathbb{P}\left(\frac{2-4}{2} < \frac{Y-4}{2} \leq \frac{6-4}{2}\right) = \mathbb{P}(-1 < Z \leq 1) =$ $\Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] = 2\Phi(1) - 1 = 2 \times 0,8413 - 1 = 0,6826$

1. Suponha que $X \sim N(10, 100)$. Calcule
   (a) $\mathbb{P}(X > 30)$;
   (b) $\mathbb{P}(10 < X < 20)$;
   (c) $\mathbb{P}(|X - 10| < 20)$.
2. Suponha que X tenha distribuição $N(3, 4)$. Encontre um número c, tal que $\mathbb{P}(X > c) = 2 \times \mathbb{P}(X \leq c)$.
3. Assumindo que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, calcule:
   (a) $\mathbb{P}(X \leq \mu + 2\sigma)$
   (b) $\mathbb{P}(|X - \mu| \leq \sigma)$