DERIVADAS PARCIAIS DE ORDENS SUPERIORES

Seja $u = f(x,y): U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais. Então, suas duas derivadas parciais $u_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $u_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ são, também, funções reais nas duas variáveis x e y.

Logo, podemos pensar nas funções derivadas parciais de $u_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, com relação à x e com relação à y, definidas por:

$$u_{xx} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad e \quad u_{xy} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x};$$

Bem como, podemos pensar nas funções derivadas parciais de $u_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, com relação à x e com relação à y, definidas por:

$$u_{yx} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad e \quad u_{yy} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$

Estas quatro derivadas parciais são denominadas <u>derivadas parciais de 2ª ordem</u> da função $u = f(x,y)$.

Vejamos exemplos:

ⓐ Dada $f(x,y) = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4$, encontre suas derivadas parciais de 2ª ordem:

$$\bullet\ f(x,y) = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4 \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2xy^3 + 3x^2y^4 \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 + 6xy^4; \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3; \end{cases} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 3x^2y^2 + 4x^3y^3 \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3; \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 6x^2y + 12x^3y^2; \end{cases} \end{cases}$$

ⓑ Dada $f(x,y) = x\,\mathrm{sen}\,y + y\,\mathrm{sen}\,x + xy$, encontre suas derivadas parciais de 2ª ordem:

$$\bullet\ f(x,y) = x\,\mathrm{sen}\,y + y\,\mathrm{sen}\,x + xy \begin{cases} f_x = \mathrm{sen}\,y + y\cos x + y \begin{cases} f_{xx} = -y\,\mathrm{sen}\,x; \\ f_{xy} = \cos y + \cos x + 1; \end{cases} \\ f_y = x\cos y + \mathrm{sen}\,x + x \begin{cases} f_{yx} = \cos y + \cos x + 1; \\ f_{yy} = -x\,\mathrm{sen}\,y; \end{cases} \end{cases}$$

Olhando com atenção os dois exemplos anteriores constatamos que, nos dois casos, as derivadas parciais mistas restaram iguais. Com efeito:

No exemplo ⓐ vemos que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y};$$

E, no exemplo ⓑ vemos que:

$$f_{xy} = \cos y + \cos x + 1 = f_{yx};$$

Não se trata de coincidência. As duas funções $f(x,y)$ satisfazem às hipóteses do seguinte teorema, devido ao matemático Alexis Clairaut (1713-1765):

TEOREMA DE CLAIRAUT.

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^2$. Seja, também, uma função real de duas variáveis reais $u = f(x,y): U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que f, f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} sejam todas contínuas em U. Então:

$$f_{xy} = f_{yx}, \text{ em } U;$$

Faremos uma demonstração deste teorema num Anexo, após a resolução da Lista de exercícios.

As definições de derivadas parciais de 2ª ordem são fácilmente estendidas à funções reais de três variáveis reais, $u = f(x,y,z)$. Vejamos um exemplo:

ⓒ Dada $f(x,y,z) = xy^2z + x^2yz + xyz^2$, encontre suas derivadas parciais de 2ª ordem:

$$f(x,y,z) = xy^2z + x^2yz + xyz^2 \begin{cases} f_x = y^2z + 2xyz + yz^2 \begin{cases} f_{xx} = 2yz; \\ f_{xy} = 2yz + 2xz + z^2; \\ f_{xz} = y^2 + 2xy + 2yz; \end{cases} \\ f_y = 2xyz + x^2z + xz^2 \begin{cases} f_{yx} = 2yz + 2xz + z^2; \\ f_{yy} = 2xz; \\ f_{yz} = 2xy + x^2 + 2xz; \end{cases} \\ f_z = xy^2 + x^2y + 2xyz \begin{cases} f_{zx} = y^2 + 2xy + 2yz; \\ f_{zz} = 2xy; \\ f_{zy} = 2xy + x^2 + 2xz; \end{cases} \end{cases}$$

Mais uma vez, constatamos a igualdade entre as derivadas parciais mistas. Com efeito: $f_{xy} = 2yz + 2xz + z^2 = f_{yx}$;

$f_{xz} = y^2 + 2xy + 2yz = f_{zx}$;

$f_{yz} = 2xy + x^2 + 2xz = f_{zy}$;

Embora na maior parte das aplicações necessitemos calcular derivadas parciais até 2ª ordem, nada impede, se solicitado, que calculemos derivadas parciais de ordens superiores à 2ª ordem. Vejamos exemplos:

ⓓ Dada $u = f(x,y) = x^3y^5 - 2x^2y + x$, encontre: f_{xxx}; f_{yyy}; e f_{xyx};

Temos: $f_x = 3y^5x^2 - 4yx + 1$; $f_{xx} = 6y^5x - 4y$; $f_{xxx} = 6y^5$;

$f_y = 5x^3y^4 - 2x^2$; $f_{yy} = 20x^3y^3$; $f_{yyy} = 60x^3y^2$;

Como já conhecemos $f_{xx} = 6y^5x - 4y$ e por Clairaut $f_{xyx} = f_{xxy}$, obtemos:

$$f_{xyx} = f_{xxy} = \frac{\partial(f_{xx})}{\partial y} = \frac{\partial(6y^5x - 4y)}{\partial y} = 30xy^4 - 4;$$

ⓔ Dada $u = f(x,y,z) = (4x - 3y + 2z)^5$, encontre $\dfrac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial y \partial x}$;

Temos: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 5(4x-3y+2z)^4 . 4 = 20(4x-3y+2z)^4$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(20(4x-3y+2z)^4\right)}{\partial y} = 80(4x-3y+2z)^3.(-3) = -240(4x-3y+2z)^3;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(-240(4x-3y+2z)^3\right)}{\partial z} = -720(4x-3y+2z)^2.2 = -1440(4x-3y+2z)^2;$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x}\right)}{\partial z} = -2880(4x-3y+2z).2 = -5760(4x-3y+2z);$$

LISTA · DERIVADAS PARCIAIS DE ORDENS SUPERIORES

01 Em cada caso, confirme a igualdade entre as derivadas parciais mistas:

ⓐ $f(x,y) = x^4y^3 - y^3 + x^2$; ⓑ $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$; ⓒ $f(x,y) = \cos(x^2y)$;

ⓓ $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$; ⓔ $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$; ⓕ $f(x,y) = e^x + x\ln y + y\ln x$;

02 Em cada caso, calcule a derivada parcial de ordem superior, indicada, para a função apresentada:

ⓐ f_{xyx} para $f(x,y) = x^4y^2 - x^3y$; ⓑ f_{yxyx} para $f(x,y) = \operatorname{sen}(2x+5y)$;

ⓒ f_{xyz} para $f(x,y,z) = e^x\cos(yz)$; ⓓ f_{yxzz} para $f(x,y,z) = xy^2z^3 + \operatorname{senh}(x\sqrt{z})$;

03 Em cada caso, decida se existe uma função real $f(x,y)$ satisfazendo às condições dadas. Se não, justifique. Se sim, apresente uma função:

ⓐ com $f_x = xy$ e $f_y = x^2$; ⓑ com $f_x = 2xy$ e $f_y = x^2$;

04 Suponha que as hipóteses do Teorema de Clairaut são sempre satis-feitas para todas as funções envolvidas. Então, mostre que:

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx};$$

05 Lembrando que você pode, pelo Teorema de Clairaut, escolher uma ordem adequada para cada parcela, indique, em cada caso, um caminho mais certo para mostrar que a derivada parcial de ordem superior solicitada, para a função dada, é igual à zero:

ⓐ f_{xyz}, para $f(x,y,z) = \sqrt{1+xz} + \sqrt{1-xy}$; ⓑ f_{zwxywz}, para $f(x,y,z,w) = \dfrac{x^2+e^yw}{3y^2+\ln(1+z^2)}$;

06 Em cada caso, verifique se a função real $u(x,t)$ dada, satisfaz à equação unidimensional da onda: $u_{tt} = a^2u_{xx}$, $a>0$; devida ao matemático D' Alembert (1717-1783):

ⓐ $u(x,t) = (x-at)^6 + (x+at)^6$; ⓑ $u(x,t) = \operatorname{sen}(a\omega t)\operatorname{sen}(\omega x)$, $\omega \in \mathbb{R}$;

07 Em cada caso, verifique se a função real $u(x,t)$ dada, satisfaz à equação unidimensional do calor: $u_t = a^2u_{xx}$, $a>0$; devida ao matemático Fourier (1768-1830):

ⓐ $u(x,t) = e^{-a^2k^2t}.\cos(kx)$, $k\in\mathbb{R}$; ⓑ $u(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t}$, $n>0$ e $L>0$;

(08) Em cada caso, verifique se a função real $u(x,y)$ dada, satisfaz à equação bidimensional de Laplace (1749-1827): $u_{xx}+u_{yy}=0$;

(a) $u(x,y)=e^x\cos y+e^y\operatorname{sen}x$; (b) $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)+2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$;

(09) Verifique se a função real $u(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ satisfaz à equação tridimensional de Laplace: $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$;

(10) Mostre que se $c^2=a^2+b^2$ então a função real $u(x,y,z)=e^{ax+by}.\operatorname{sen}(cz)$, satisfaz à equação tridimensional de Laplace;

(11) Mostre que se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem à equação bidimensional de Laplace, então a função real $w(x,y)=u(x,y)+v(x,y)$ também satisfaz à mesma equação;

(12) Enuncie e demonstre um resultado análogo ao da questão anterior para duas funções reais, de três variáveis reais;

(13) Diz-se que $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem às equações de Cauchy (1789-1857) - Riemann (1826-1866), quando: $u_x=v_y$ e $u_y=-v_x$. Então, em cada caso, verifique se $u(x,y)$ e $v(x,y)$, dadas, satisfazem às equações de Cauchy-Riemann:

(a) $u(x,y)=e^x\cos y$; $v(x,y)=e^x\operatorname{sen}y$; (b) $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$; $v(x,y)=2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$;

(14) Sejam $f(x)$ e $g(t)$ funções reais satisfazendo, respectivamente, às equações diferenciais $f''(x)+\lambda^2f(x)=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, e $g''(t)+a^2\lambda^2g(t)=0$, $a>0$. Então, verifique se a função real $u(x,t)=f(x)g(t)$ satisfaz à equação de D'Alembert;

(15) Sejam $f(x)$ e $g(t)$ funções reais satisfazendo, respectivamente, às equações diferenciais $f''(x)+\lambda^2f(x)=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, e $g'(t)+a^2\lambda^2g(t)=0$, $a>0$. Então, verifique se a função real $u(x,t)=f(x)g(t)$ satisfaz à equação de Fourier;

(16) Mostre que se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem às equações de Cauchy-Riemann, bem como as hipóteses do Teorema de Clairaut, então $u(x,y)$ e $v(x,y)$ também satisfazem à equação bidimensional de Laplace.