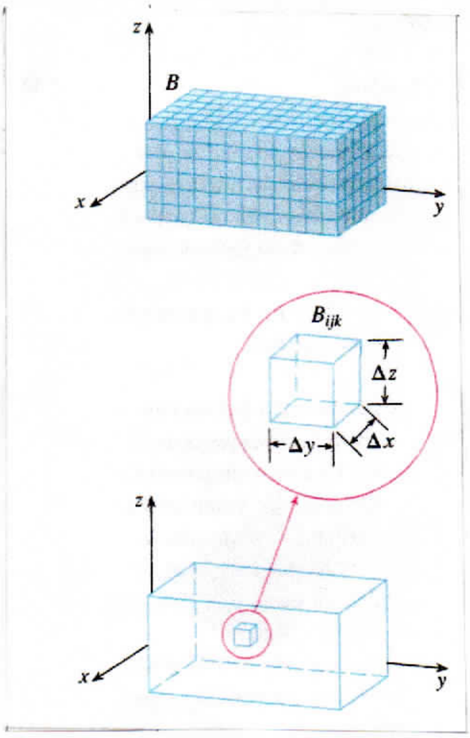
TEORIA RESUMIDA: INTEGRAIS TRIPLAS

Seja $w = f(x,y,z) : E \subseteq R^3 \longrightarrow R$ contínua em $E \supseteq [a,b]\times[c,d]\times[r,s]$.
Definimos a Integral Tripla de f no paralelepípedo $[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$, como sendo o seguinte limite:

$$\int_r^s \int_a^b \int_c^d f(x,y,z)\,\Delta y_j\,\Delta x_i\,\Delta z_k = \lim_{l,n,m\to\infty} \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\,\Delta y_j\,\Delta x_i\,\Delta z_k$$

quando este limite existir; onde:

$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, para $k = 1,2,\ldots,l$;
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, para $i = 1,2,\ldots,m$;
$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, para $j = 1,2,\ldots,n$;
E cada ponto $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ é escolhido livremente no paralelepípedo $B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i]\times[y_j - y_{j-1}]\times[z_k - z_{k-1}]$;



A hipótese da continuidade de f em E, nos garante que este limite exista (e portanto tenha um único valor), independentemente da escolha de cada $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ no respectivo paralelepípedo B_{ijk};

TEOREMA DE FUBINI (1879-1943)

Se $w = f(x,y,z)$ for contínua no paralelepípedo $[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$ então:

$$\int_a^b\int_c^d\int_r^s f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b\int_r^s f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy = \int_c^d\int_r^s\int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy =$$

$$= \int_r^s\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b\int_r^s\int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx = \int_r^s\int_a^b\int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz;$$

Como em nossa definição sempre supusemos f contínua em $E \supseteq [a,b]\times[c,d]\times[r,s]$, sempre teremos a hipótese do Teorema de Fubini satisfeita.

E, para qualquer região E, que possa ser colocada dentro de um paralelepípedo $[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$, e para qualquer função contínua $w = f(x,y,z)$ em E, estendemos a definição de $w = f(x,y,z)$ para $F(x,y,z) = f(x,y,z)$ para cada $(x,y,z) \in E$, e $F(x,y,z) = 0$ para cada $(x,y,z) \in [a,b]\times[c,d]\times[r,s] - E$;

E então podemos definir a integral tripla de $f(x,y,z)$ em E, simplesmente por:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_a^b\int_c^d\int_r^s F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx;$$

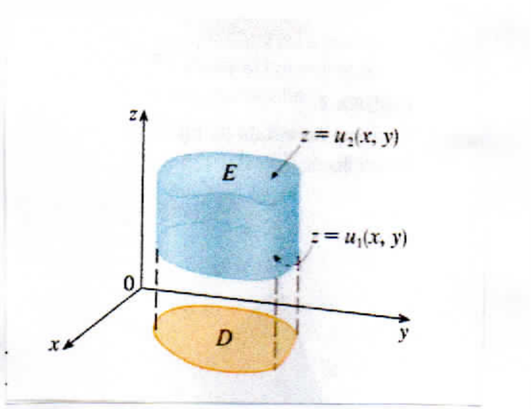
Do mesmo modo que nas Integrais Duplas nos restringimos a calcular integrais sobre regiões de dois tipos, aqui vamos nos restringir a calcular integrais triplas sobre regiões de três tipos, a saber:

Tipo: I; $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x,y)\in D$ e $u_1(x,y)\leq z\leq u_2(x,y)\}$;

onde $D\subseteq\mathbb{R}^2$ é uma região de tipo 1 ou tipo 2;

Nesse caso, teremos as seguintes integrais triplas:

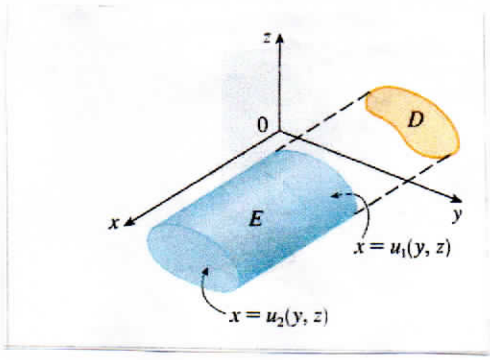
$$\underbrace{\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)}\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)}}_{D \text{ do tipo } 1;} F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx=\underbrace{\int_c^d\int_{g(y)}^{h(y)}\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)}}_{D \text{ do tipo } 2;} F(x,y,z)\,dz\,dx\,dy;$$



Tipo: II; $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (y,z)\in D$ e $u_1(y,z)\leq x\leq u_2(y,z)\}$;

onde $D\subseteq\mathbb{R}^2$, no plano yz, é uma região de tipo 1 ou de tipo 2; Nesse caso, teremos as seguintes integrais triplas:

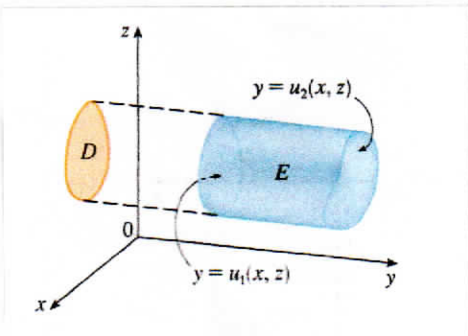
$$\underbrace{\int_r^s\int_{g(z)}^{h(z)}\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)}}_{D \text{ do tipo } 1;} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\underbrace{\int_c^d\int_{g(y)}^{h(y)}\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)}}_{D \text{ do tipo } 2;} F(x,y,z)\,dx\,dz\,dy;$$



Tipo: III; $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x,z)\in D$ e $u_1(x,z)\leq y\leq u_2(x,z)\}$;

onde $D\subseteq\mathbb{R}^2$, no plano xz, é uma região de tipo 1 ou de tipo 2; Nesse caso, teremos as seguintes integrais triplas:

$$\underbrace{\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)}\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)}}_{D \text{ do tipo } 1;} F(x,y,z)\,dy\,dz\,dx=\underbrace{\int_r^s\int_{g(z)}^{h(z)}\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)}}_{D \text{ do tipo } 2;} F(x,y,z)\,dy\,dx\,dz;$$



Como, sempre, trabalharemos com Funções $w=F(x,y,z)$ contínuas, quando uma região de integração $E\subseteq\mathbb{R}^3$ puder ser simultaneamente expressa nas seis situações acima; O Teorema de Fubini nos garantirá que os seis resultados serão todos iguais.