Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Fortaleza, 16 de novembro de 2022

Sumário

- Seja (X, Y) um vetor aleatório com função mista de probabilidade

$$f(x, y) = \frac{xy^{x-1}}{3} \underset{\{1,2,3\}}{I}(x) \underset{[0,1]}{I}(y)$$

(a) Determine as distribuições marginais de X e Y.

(b) Calcule $\mathbb{P}(X \geq 2; Y \geq 1/2)$.

Definição:

- Seja (X, Y) um vetor aleatório bidimensional com f.d.p conjunta $f(x, y)$ as funções densidade de probabilidade condicionais de $X|Y$ e $Y|X$ são dadas por

$$f_{X|Y}(x) = \frac{f(x, y)}{f(y)}, \quad f(y) > 0$$

$$f_{Y|X}(x) = \frac{f(x, y)}{f(x)}, \quad f(x) > 0$$

- Esta definição pode ser interpretada da seguinte forma:

$$f_{X|Y}(x)dx = \frac{f(x, y)dxdy}{f(y)dy} \approx \frac{\mathbb{P}(x < X \leq x + dx; y < Y \leq y + dy)}{\mathbb{P}(y < Y \leq y + dy)}.$$

- Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional com f.d.p conjunta definida por

$$f(x, y) = \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) \underset{[0,1]}{I}(x) \underset{[0,2]}{I}(y)$$

(a) Determine as densidades condicionais.
(b) Verifique que de fato são densidades.

Independência de variáveis aleatórias

Definição 5

Dizemos que $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade (ou densidade) conjunta $f(x_1, \ldots, x_n)$ e distribuições de probabilidade (ou densidades) marginais $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ são *independentes* se para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tivermos:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1)f(x_2), \cdots, f(x_n)$$

Lema

As variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independentes se, e somente se

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1)F(x_2), \cdots, F(x_n)$$

em que $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $F(x_1)F(x_2), \cdots, F(x_n)$ denotam a função de distribuição acumulada conjunta e funções de distribuição marginais do vetor aleatório, respectivamente.

Exemplo

- Sejam X e Y v.a's que representam os tempos de vida de dois dispositivos eletrônicos, com f.d.p conjunta dada por

$$f(x,y) = 8xy\, \underset{(0,y)}{I}(x)\ \underset{(0,1)}{I}(y)\,.$$

Verifique se X e Y são independentes.

Esperança de vetores aleatórios

Definição 6

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a's com distribuição conjunta $f(x_1, \ldots, x_n)$. O valor esperado de uma função $g(X_1, \ldots, X_n)$ é dado por

$$\mathbb{E}[g(X_1, \ldots, X_n)] = \begin{cases} \sum_{x_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{x_n=1}^{\infty} g(X_1, \ldots, X_n) f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(X_1, \ldots, X_n) f(x_1, x_2, \ldots, x_n) d_{x_1} \cdots d_{x_n} \end{cases}$$

Propriedades

Teorema 1

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ um número finito de variáveis aleatórias então

(i) $\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n)$.

(ii) Se $X_1, \dots, X_n$ são v.a's independentes, então

$$\mathbb{E}(X_1 X_2 \cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) \cdots \mathbb{E}(X_n).$$

Definição:

- Seja (X, Y) um vetor aleatório contínuo, definiremos o valor esperado de X condicionado a Y por

$$\mathbb{E}(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x) dx$$

- Como $\mathbb{E}(X|Y)$ é função de Y, temos que a esperança condicional é também uma variável aleatória.
- De forma semelhante, é possível definir o valor esperado de Y dado X

Teorema:

Seja (X,Y) um vetor aleatório contínuo então

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|Y)\right].$$

e

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(Y|X)\right].$$

Definição 7

Sejam X e Y v.a's. A covariância entre estas é definida por

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))],$$

ou seja, é o valor esperado do produto dos desvios de X e Y em relação às suas respectivas médias.

Obs: Quando $\text{Cov}(X, Y) = 0$ dizemos que estas v.a's são não correlacionadas linearmente.

Propriedades de covariância

Se X e Y são v.a's e a e b são constantes, então os seguintes fatos são consequências da definição de covariância.

- $\text{Cov}(X, a) = 0$
- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
- $\text{Cov}(aX, bY) = ab\text{Cov}(X, Y)$
- $\text{Cov}(X + a, Y + b) = \text{Cov}(X, Y)$
- $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- Se X e Y são independentes, então $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Proposição:

(a) Se X e Y são duas variáveis aleatórias quaisquer, temos

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X,Y)$$

(b) Se X e Y forem independentes, então

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

(c) $\text{Var}(X) = \text{Var}(\mathbb{E}(X|Y)) + \mathbb{E}(\text{Var}(X|Y))$

Propriedades de covariância

Proposição:

- Sejam $X_1, \ldots, X_n$ forem v.a's definidas em um mesmo espaço de probabilidades, então

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

- Se além das condições mencionadas, as v.a's forem independentes, então

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i).$$

Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a's independentes tais que $X_i \sim \mathrm{Ber}(p)$ para todo $i = 1, \dots, n$. Determine $\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)$ e $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n)$.

Correlação entre duas v.a's

Definição 8

O coeficiente correlação entre duas v.a's X e Y é definido por

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

Algumas propriedades

- $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$,
- Se a e b são constantes então $\rho(X+a, Y+b) = \rho(X,Y)$,
- $\rho(aX, bY) = \frac{ab}{|ab|}\rho(X,Y)$.