LISTA. REGRA DA CADEIA

01 Em cada caso, verifique se a função real u, satisfaz à equação à derivadas parciais indicada:

ⓐ $u=f(x,y)$; $x(r,s)=r^3-s^3$; $y(r,s)=s^3-r^3$; $s^2\frac{\partial u}{\partial r}+r^2\frac{\partial u}{\partial s}=0$;

ⓑ $u=f(x,y)$; $x(r,s)=r+s$; $y(r,s)=r-s$; $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial s}$;

ⓒ $u=f(x,y,z)$; $x(r,s,t)=r-s$; $y(r,s,t)=s-t$; $z(r,s,t)=t-r$; $\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial t}=0$;

ⓓ $u=f(x,y)$; $x(r,s)=\frac{s-r}{rs}$; $y(s,t)=\frac{t-s}{st}$; $r,s,t\neq 0$; $r^2\frac{\partial u}{\partial r}+s^2\frac{\partial u}{\partial s}+t^2\frac{\partial u}{\partial t}=0$;

ⓔ $u=f(ar+bs)$; a e $b\in\mathbb{R}$; $b\frac{\partial u}{\partial r}-a\frac{\partial u}{\partial s}=0$;

ⓕ $u(r,s)=s+f(r^2-s^2)$; $s\frac{\partial u}{\partial r}+r\frac{\partial u}{\partial s}=r$;

ⓖ $u(r,s)=rs+f(r^2+s^2)$; $s\frac{\partial u}{\partial r}-r\frac{\partial u}{\partial s}=s^2-r^2$;

02 Sejam $u=f(x,y)$; $x(r,\theta)=r\cos\theta$; $y(r,\theta)=r\,\text{sen}\,\theta$. Mostre que:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2;$$

03 [Equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares;]
Sejam $u(x,y)$ e $v(x,y)$ funções reais satisfazendo às equações de Cauchy(1789-1857)-Riemann(1826-1866). Mostre que se $x(r,\theta)=r\cos\theta$ e $y(r,\theta)=r\,\text{sen}\,\theta$, então: $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$;

04 [Fórmula de Leibniz;]
Sejam $w=F(u,v)=\int_v^u p(t)\,dt$; $u=g(x)$; $v=h(x)$; Mostre a seguinte fórmula devida à Leibniz(1646-1716): $\frac{dw}{dx}=p(g(x))g'(x)-p(h(x))h'(x)$;

05 [Teorema de Euler para funções homogêneas;]
Diz-se que $f(x,y)$ é <u>homogênea de grau n</u>, $n\geq 0$ um número inteiro, quando $f(tx,ty)=t^nf(x,y)$. Mostre a seguinte igualdade, devida à Euler(1707-1783):

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y);$$

06 Em cada caso, mostre que se a equação:

ⓐ $F(x,y)=0$, definir y como uma função diferenciável de x e $F_y\neq 0$, então:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-F_x}{F_y};$$

ⓑ $F(x,y,z)=0$, definir z como uma função diferenciável de x e y e $F_z\neq 0$, então:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F_x}{F_z}; \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_y}{F_z};$$