Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II - 1ª Avaliação Parcial

Aluno(a): ____

1. Calcule a área da região limitada pela curva $y = ln\, x$, pelo eixo x e pela reta $x = e^2$.

2. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região da questão 1.

3. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelo gráfico de $y = \sec x$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = \frac{\pi}{4}$.

4. Ache o comprimento de arco da curva $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$ do ponto onde x = 0 ao ponto onde x = 3.

5. Calcule a integral $\int \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}\,dx$

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom

29/04/22

1. $y = \ln(x) \quad (1, e^2) \qquad u = \ln(x) \quad du = 1/x$

$dv = dx \quad v = x$

$$\int_1^{e^2} \ln(x)\,dx = \ln(x)\cdot x - \int x \cdot 1/x\,dx = \ln(x)\cdot x - \int 1\,dx =$$

$$\ln(x)\cdot x - x \Big|_1^{e^2} = (\ln(e^2)\cdot e^2 - e^2) - (\ln(1)\cdot 1 - 1) = e^2 - (-1) = e^2 + 1$$

$$\int_1^{e^2} \ln(x)\,dx = e^2 + 1$$

2. $2\pi \int_1^{e^2} x \cdot \ln x\,dx \qquad u = \ln(x) \quad du = 1/x$

$dv = x \quad v = \frac{x^2}{2}$

$$2\pi \int_1^{e^2} x \cdot \ln x\,dx = 2\pi\left(\ln(x)\cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)$$

$$2\pi\left(\ln(x)\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2}\,dx\right) = 2\pi\left(\ln(x)\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx\right) = 2\pi\left(\ln(x)\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right)$$

$$2\pi\left(\frac{\ln(x)\cdot x^2}{2} - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^{e^2} = 2\pi\left[\left(\frac{\ln(e^2)\cdot e^4}{2} - \frac{e^4}{4}\right) - \left(\frac{\ln(1)\cdot 1^2}{2} - \frac{1^2}{4}\right)\right] =$$

$$2\pi\left[\left(\frac{2e^4}{2} - \frac{e^4}{4}\right) - \left(\frac{0\cdot 1}{2} - \frac{1}{4}\right)\right] = 2\pi\left[\left(e^4 - \frac{e^4}{4}\right) - \left(0 - \frac{1}{4}\right)\right] =$$

$$2\pi\left(e^4 - \frac{e^4}{4} + \frac{1}{4}\right) = 2\pi\left(\frac{3e^4 + 1}{4}\right) = \frac{\pi(3e^4+1)}{2}$$

Seg | Ter | Qua | Qui | Sex | Sáb | Dom   / /

4. $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$ $\quad$ $y'=\frac{1}{3}\left((x^2+2)^{3/2}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}(x^2+2)^{1/2}\cdot(x^2+2)'\right)$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}(x^2+2)^{1/2}\cdot 2x\right) = \frac{(x+2^{1/2})\cdot 2x}{2} =$$

$$y' = x(x+2^{1/2})$$

$$\int_0^3 \sqrt{1+\left(x(x+2^{1/2})\right)^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1+(x^2\cdot(x^2+2))}\,dx$$

$$\int_0^3 \sqrt{1+x^4+2x^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{(1+x^2)^2} = \int_0^3 1\,dx + \int_0^3 x^2\,dx =$$

$$x+\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 3+\frac{3^3}{3} = \frac{9+27}{3} = 12$$

5. $\int \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2+1}\,dx = \int\frac{1}{x-1}\,dx + \int\frac{1}{x^2+1}\,dx$

$$\frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1} = \frac{x^2+x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

$x^2+x = (x^2+1)A + (x-1)\cdot(Bx+C)$ $\qquad$ $A+B=1$ $\quad$ $A=1$

$x^2+x = Ax^2+A+Bx^2+Cx-Bx-C$ $\qquad$ $C-B=1$ $\quad$ $B=0$

$x^2+x = (A+B)x^2+(C-B)x+(A-C)$ $\qquad$ $A-C=0$ $\quad$ $C=1$

$$\int\frac{1}{x-1}\,dx + \int\frac{1}{x^2+1}\,dx = \ln|x-1| + \operatorname{arctg}(x) + C$$