Universidade Federal do Ceará
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada
Prof. José Roberto Silva dos Santos
CC0285 - Probabilidade II.
Lista II - 2022.2

1. Seja $X \sim U(-\alpha, \alpha)$, determine o valor do parâmetro α de modo que:

   (a) $\mathbb{P}(-1 < X < 2) = 3/4$.

   (b) $\mathbb{P}(|X| < 1) = \mathbb{P}(|X| > 2)$.

2. Supondo que a expectativa de vida, em anos, em uma determinada população siga o modelo Exp(1/60):

   (a) Determine, para um indivíduo escolhido ao acaso, a probabilidade de viver pelo menos até os 70 anos.

   (b) Idem para morrer antes dos 70 anos, sabendo-se que o indivíduo acabou de completar 50 anos.

   (c) Calcule o valor de m tal que $\mathbb{P}(X > m) = 1/2$.

3. Suponha que a duração de vida, T, de um dispositivo eletrônico, medida em horas, seja uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade

$$f(t) = 0,01e^{-0,01t} \underset{(0,\infty)}{I}(x)$$

   (a) Qual a probabilidade de que um deles escolhido ao acaso dure menos de 50 horas?

   (b) Qual a probabilidade de que pelo menos um de 10 dispositivos, escolhidos aleatoriamente, dure menos de 50 horas?

4. Demostre as seguintes propriedades:

   (a) Se $X \sim F(n, m)$, então $X^{-1} \sim F(m, n)$.

   (b) Se $X \sim t(n)$, então $X^2 \sim F(1, n)$.

   (c) Se $X \sim \text{Beta}(n/2, m/2)$, então $\frac{mX}{n(1-X)} \sim F(n, m)$.

   (d) Equivalentemente, se $X \sim F(n, m)$, então $\frac{nX/m}{1+nX/m} \sim \text{Beta}(n/2, m/2)$.

5. Considere a função gama definida por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx \text{ para todo } \alpha > 0.$$

Demostre as seguintes propriedades:

(a) $\Gamma(\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$ (*sugestão:* use integração por partes).

(b) Para n inteiro positivo, $\Gamma(n) = (n-1)!$ (*sugestão:* use o resultado (a)).

(c) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. (*sugestão:* Faça a mudança de variável $u = \sqrt{2x}$ e então relacione a expressão resultante com a distribuição normal).

6. Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição F. Defina $Y = F(X)$. Demostre que $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$.

7. Considere $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Determine:

   (a) A distribuição de $Y = e^X$. Tal distribuição é denominada *log-normal*.

   (b) A média e a variância de Y.

8. Demostre que, para α e λ positivos

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}e^{-\lambda(x-a)} \underset{(0,\infty)}{I}(x)$$

é função densidade de probabilidade. Alguns autores definem o modelo gama dessa forma, sendo que, neste caso, a distribuição possui um terceiro parâmetro a.

9. A distribuição Weibull, cuja fda é dada por

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x^n},\ x > 0,$$

em que $\alpha > 0$ é uma constante e n é um inteiro positivo, é frequentemente usada como a distribuição do tempo livre de falha de um equipamento.

   (a) Encontre a função densidade de probabilidade.

   (b) Determine sua média e variância.

   (c) Determine a função de sobrevivência.

   (d) Determine a função taxa de falha.

10. Uma variável aleatória X possui distribuição de Laplace, se sua fdp é dada por

$$f(x) = ae^{-\lambda|x|} \underset{(-\infty,\infty)}{I}(x)$$

   (a) Determine o valor de a.
   (b) Esboce o gráfico da fdp de X.
   (c) Calcule a média e a variância de X.
   (d) Determine a f.g.m de X.
   (e) Obtenha a distribuição de $Y = |X|$.

11. Seja X uma variável aleatória com a seguinte f.d.p

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)} \underset{(0,\infty)}{I}(x) \; .$$

   (Esta é conhecida como *distribuição exponencial de dois parâmetros*)

   (a) Determine a f.g.m de X.
   (b) Empregando a f.g.m, encontre a esperança e variância de X.

12. Suponha que V, a velocidade (cm/seg) de um objeto, tenha distribuição $N(0,4)$. Seja $K = \frac{mV^2}{2}$ ergs a energia cinética do objeto (em que m é a massa). Determine a f.d.p de K e calcule a probabilidade de K ser no máximo 3 para $m = 10$.

13. Seja X uma variável aleatória com f.g.m $M_X(t) = 3/(3-t)$. Determine o desvio padrão de X.

14. Considere $X \sim \mathcal{U}(-1,2)$. Assim,

   (a) Determine a f.g.m de X.
   (b) Utilizando a f.g.m, determine o valor esperado de X.

15. Seja $Z \sim N(0,1)$. Em cada caso, determine o valor da constante c.

   (a) $\Phi(c) = 0,9838$
   (b) $\mathbb{P}(0 \leq Z \leq c) = 0,291$
   (c) $\mathbb{P}(Z \geq c) = 0,121$
   (d) $\mathbb{P}(-c \leq Z \leq c) = 0,668$
   (e) $\mathbb{P}(|Z| \geq c) = 0,016.$

16. Seja $X \sim N(80, 100)$, determine as probabilidades a seguir.

    (a) $\mathbb{P}(X \leq 100)$.
    (b) $\mathbb{P}(X \leq 80)$.
    (c) $\mathbb{P}(65 < X \leq 100)$
    (d) $\mathbb{P}(X > 70)$
    (e) $\mathbb{P}(85 < X \leq 95)$.
    (f) $\mathbb{P}(|X - 80| \leq 10)$.

17. Suponha que a força que age sobre uma coluna que ajuda a suportar um edifício tenha distribuição normal com média 15,0 kips e desvio padrão 1,25 kips. Qual é a probabilidade de a força:

    (a) Ser no máximo 18 kips?
    (b) Estar entre 10 e 12 kips?
    (c) Diferir de 15,0 kips por no máximo 2 desvios padrão?

18. Suponha que o diâmetro de certo tipo de árvores na altura do tronco tenha distribuição normal com média 8,8 e desvio padrão 2,8. Responda:

    (a) Qual é a probabilidade de uma árvore selecionada aleatoriamente ter um diâmetro de no mínimo 10 polegadas? Exceder 10 polegadas?
    (b) Qual é a probabilidade de o diâmetro de uma árvore selecionada aleatoriamente exceder 20 polegadas?
    (c) Qual é a probabilidade de o diâmetro de uma árvore selecionada aleatoriamente estar entre 5 e 10 polegadas?
    (d) Que valor c faz com que o intervalo $(8,8 - c; 8,8 + c)$ inclua 98% de todos os valores de diâmetro?
    (e) Se quatro árvores forem selecionadas de forma independente, qual é a probabilidade de ao menos uma ter diâmetro maior do que 10 polegadas?

19. Há duas máquinas disponíveis para corte de rolhas para garrafas de vinho. A primeira produz rolhas com diâmetros que possuem uma distribuição normal com média 3 cm e desvio padrão 0,1 cm. A segunda máquina produz rolhas com diâmetros que possuem uma distribuição normal com média 3,04 cm e desvio padrão 0,02 cm. As rolhas aceitáveis possuem diâmetros entre 2,9 cm e 3,1 cm. Que máquina tem maior probabilidade de produzir uma rolha aceitável?

20. Seja $X \sim N(30, 25)$.

    (a) Qual é o 91º percentil da distribuição de X?

    (b) Qual é o 6º percentil da distribuição de X?

    (c) A largura de uma linha gravada em um chipe de circuito integrado tem distribuição normal com média 3,000 μm e desvio-padrão 0,140 μm. Que valor separa os 10% mais largos de todas as linhas dos outros 90%?

21. A distribuição da resistência de resistores de um tipo específico é normal, 10% de todos os equipamentos apresentam resistência maior que 10,256 ohms e 5% com resistência menor que 9,671 ohms. Quais são os valores da média e do desvio padrão da distribuição das resistências?

22. Uma máquina que produz rolamentos inicialmente foi configurada para que o diâmetro real médio dos rolamentos produzidos seja de 0,500 polegadas. Um rolamento é aceitável se o diâmetro está dentro de 0,004 polegadas desse valor-alvo. Suponha, entretanto, que a configuração tenha sido alterada durante o curso da produção, de forma que os rolamentos tenham diâmetros com distribuição normal com média 0,499 polegadas e desvio padrão 0,002 polegadas. Que porcentagem dos rolamentos produzidos não será aceitável?

23. As alturas de 10.000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal, com média 170 cm e desvio padrão 5 cm.

    (a) Qual o número esperado de alunos com altura superior a 165 cm?

    (b) Qual o intervalo simétrico em torno da média que conterá 75% das alturas dos alunos?

24. A distribuição dos pesos de coelhos criados numa granja pode muito bem ser representada por uma distribuição normal, com média de 5 kg e desvio padrão de 0,8 kg. Um abatedouro comprará 5.000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso, do seguinte modo: 20% dos leves como pequenos, os 55% seguintes como médios, os 15% seguintes como grandes e os 10% mais pesados como extras. Quais os limites de peso para cada classe?

25. O diâmetro de certo tipo de anel industrial é uma v.a. com distribuição normal, de média 0,10 cm e desvio padrão 0,02 cm. Se o diâmetro de um anel diferir da média em mais que 0,03 cm, ele é vendido por R$ 5,00; caso contrário, é vendido por R$ 10,00. Qual o preço médio de venda de cada anel?

26. Suponha que o conteúdo de bactérias de um tipo particular, presentes em um recipiente de água de 1 mililitro, tenha distribuição aproximadamente normal, com média de 85 bactérias e desvio padrão de 9 bactérias. Qual a probabilidade de uma dada amostra de 1 ml conter mais de 100 bactérias?

27. Suponha que a variável diâmetro de *Paepalanthus* tenha distribuição normal com média 10 cm e variância 4 cm^2.

    (a) Qual a probabilidade de um *Paepalanthus* aleatoriamente retirado dessa população ter diâmetro maior do que 14 cm?

    (b) Se dois *Paepalanthus* forem selecionados aleatoriamente dessa população, qual a probabilidade de ambos serem maiores do que 14 cm?

28. Numa população, o nível sérico de colesterol em adultos (medido em mg/dl) é uma variável aleatória com distribuição normal com parâmetros $\mu = 225$ e $\sigma = 75$. Calcule:

    (a) a proporção de pessoas com nível de colesterol entre 200 e 350.

    (b) o valor acima do qual se encontra o colesterol da parcela de 10% da população que tem os níveis mais elevados.

29. Suponha que o tempo em horas que um estudante precisa para aprender uma matéria de Geografia é uma variável aleatória com distribuição normal. Se 84,13% dos alunos usam mais de 3 horas e somente $2,28\%$ levam mais de 9 horas para aprender a matéria, quais são os parâmetros da distribuição?

30. O peso em gramas dos recém-nascidos em uma maternidade tem distribuição normal com parâmetro $\mu = 3000$. Sabe-se que 98% dos bebês nascem com um peso compreendido entre 2,5 e 3,5 quilos. Determine:

    (a) o parâmetro σ.

    (b) o peso abaixo do qual nascem 0,4% dos bebês dessa maternidade.

31. O salário mensal em reais de um trabalhador da empresa A tem distribuição normal com parâmetros $\mu_A = 1800$ e $\sigma_A = 300$; para a empresa B, os parâmetros da distribuição normal são $\mu_B = 2000$ e $\sigma_B = 200$. A empresa A tem o triplo de funcionários da empresa B. Se uma pessoa é escolhida aleatoriamente entre os trabalhadores das duas empresas, qual a probabilidade de que receba mais de 2200 reais por mês?

32. Uma fábrica utiliza dois métodos para a produção de lâmpadas: 70% delas são produzidas pelo método A e o resto pelo método B. A duração em horas das lâmpadas tem distribuição exponencial com parâmetro 1/80 ou 1/100, conforme se utilize o método A ou o B. Em um grupo de 10 lâmpadas selecionadas ao acaso, qual a probabilidade de que 6 delas durem pelo menos 90 horas?

33. Um banco faz operações via internet e, após um estudo sobre o serviço prestado, concluiu o seguinte modelo teórico para o tempo de conexão (em minutos):

$$f(x) = \frac{1}{4}ke^{-\frac{1}{4}kx} \underset{(0,\infty)}{I}(x)$$

em que k é 1 ou 2, dependendo do cliente ser pessoa física ou jurídica, respectivamente.Dentre os clientes que se utilizam da internet, estima-se que 20% são de pessoas física.

(a) Sendo pessoa física, qual a probabilidade de mais de 2 minutos de conexão?

(b) Sendo pessoa jurídica, qual a probabilidade de ficar conectado menos de 6 minutos?

(c) Determine a probabilidade de um cliente ficar mais de 2 minutos conectado.

(d) Se um cliente fica mais de 2 minutos conectado, qual a probabilidade dele ser pessoa jurídica?

34. O tempo de vida útil em anos de um eletrodoméstico é uma variável aleatória com densidade dada por

$$f(x) = \frac{xe^{-x/2}}{4} \underset{(0,\infty)}{I}(x)$$

(a) Mostre que de fato f é uma densidade.

(b) Se o fabricante dá um tempo de garantia de seis meses para o produto, qual a proporção de aparelhos que devem usar essa garantia?

(c) Dado que um aparelho está funcionando após um ano, qual a probabilidade de dure pelo menos dois anos?

35. Uma loja de comércio eletrônico envia e-mails com ofertas especiais a seus clientes cadastrados. Suponha que, após o recebimento de uma mensagem, a proporção de clientes que efetivam uma compra é uma variável aleatória com densidade dada por

$$f(x) = cx(1-x)^5 \underset{(0,1)}{I}(x)\,.$$

(a) Encontre o valor de c.

(b) Calcule a probabilidade de que um e-mail resulte em alguma compra para mais de 50% dos seus destinatários.

36. A proporção de ferro puro em amostras de hematita extraídas de uma região tem distribuição Beta$(4, 2)$. Obtenha a probabilidade de que uma amostra contenha

    (a) mais de 75% de ferro puro.

    (b) menos de 30% de ferro puro.