Principais Distribuições Contínuas

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Fortaleza, 14 de outubro de 2022

- Ônibus chegam a uma determinada parada em intervalos de 15 minutos começando às 7h00. Isto é, eles chegam às 7h00, 7h15, 7h30, 7h45, e assim por diante. Se um passageiro chega na parada em instante de tempo que é uniformemente distribuído entre 7h00 e 7h30, determine a probabilidade de que ele espere
  (a) menos do que 5 minutos por um ônibus;
  (b) mais do que 10 minutos por um ônibus.

- A distribuição exponencial possui a propriedade de falta de memória, ou seja, para quaisquer $s \geq 0$ e $t \geq 0$, tem-se que

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

- Para verificar, note que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > s + t | X > s) &= \frac{\mathbb{P}(X > s + t; X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} \\ &= \mathbb{P}(X > t) \end{aligned}$$

- Suponha que o número de quilômetros que um carro pode rodar sem que sua bateria se descarregue seja exponencialmente distribuído com um valor médio de 10.000 Km. Se uma pessoa deseja fazer uma viagem de 5000 Km, qual a probabilidade de que ela consiga completar a viagem sem ter que trocar a bateria do carro? O que pode ser dito quando a distribuição não é exponencial?

- É possível mostrar que o quantil de ordem p de uma variável aleatória exponencial é dada por

$$Q_p = -\frac{\log(1-p)}{\lambda}$$

- Já o r-ésimo momento de X é dado por

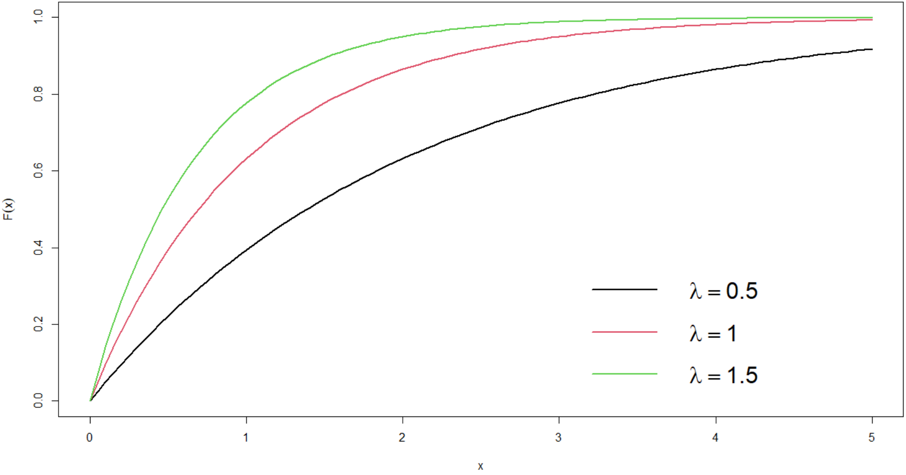
$$\mathbb{E}(X^r) = \frac{r!}{\lambda^r} \text{ para todo } r \in \mathbb{N}.$$

- A função de sobrevivência de uma variável aleatória com função de distribuição F é definida por

$$S(x) = 1 - F(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

- É possível mostrar que, se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ então

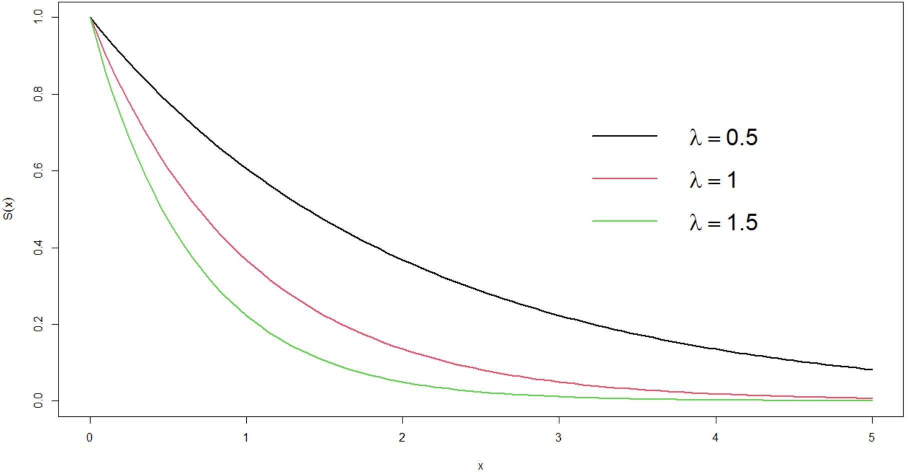
$$S(x) = e^{-\lambda x} \text{ para todo } x \geq 0.$$



F(x)
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
1
2
3
4
5
λ = 0.5
λ = 1
λ = 1.5

Modelo Exponencial

Comportamento da Função de sobrevivência



- A função taxa de falha de uma variável aleatória X é definida por

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\mathbb{P}(t < X \leq x + \Delta_x | X > x)}{\Delta_x} \\
&= \frac{f(x)}{S(x)}
\end{aligned}
$$

- Esta função expressa a proporção de unidades que falhão entre x e $x + \Delta_x$ dentre aquelas que ainda não haviam falhado até o instante x
- Se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ então

$$h(x) = \lambda$$

Relação entre distribuições Uniforme e Exponencial

- Seja $X \sim U[a, b], a, b \in \mathbb{R}$:
  (a) Determine a distribuição de $Y = \frac{X-a}{b-a}$.

  (b) Determine a distribuição de $Z = -\log Y$.