Universidade Federal do Ceará
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada
Prof. José Roberto Santos
CC0282 - Probabilidade I.
Prova I -06/05/2022

Nome: Matrícula:

1. (*2,5 pontos*). Sejam A e B, dois eventos quaisquer:
   (a) Mostre que $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
   (b) Mostre que a probabilidade de que exatamente um dos eventos A ou B ocorra é dada por $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$.
   (c) Mostre que $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B)$.

2. (*2,0 pontos*). Uma moeda equilibrada é lançada 3 vezes. Use a definição clássica para calcular as probabilidades dos seguintes eventos:
   (a) exatamente duas caras ocorrem;
   (b) o resultado do segundo lançamento é cara;
   (c) pelo menos duas caras ocorrem;
   (d) o número de caras é igual ao de coroas.

3. (*2,5 pontos*). Em uma sala, 10 pessoas estão usando emblemas numerados de 1 até 10. Três pessoas são escolhidas ao acaso e convidadas a saírem da sala simultaneamente. Os números de seus emblemas são anotados.
   (a) Qual é a probabilidade de que o menor número de emblema seja 5?
   (b) Qual é a probabilidade de que o maior número de emblema seja 5?

4. (*3,0 pontos*). Considere três caixas, digamos I, II e III. A caixa I contém 4 bolas brancas e 2 pretas, a caixa II contém 3 bolas brancas e 1 preta e a caixa III contém 1 bola branca e 2 pretas.
   (a) Extrai-se uma bola de cada caixa. Determine a probabilidade de que todas as bolas sejam brancas.
   (b) Seleciona-se uma caixa e dela extrai-se uma bola. Determine a probabilidade de que a bola extraída seja branca.
   (c) Calcule em (b) a probabilidade de que a caixa I tenha sido escolhida, dado que a bola extraída é branca.

[redacted]

8,4

2,5 pts

① a. $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \leq P(A)+P(B)$

b. A probabilidade de ocorrer exatamente A ou B é:

$$P(A\cup B)-P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A\cap B)$$
$$= P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$$

c. $P(A^c\cap B^c) = P[(A\cup B)^c] = 1-P(A\cup B) = 1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]$
$$= 1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$

1,7 pts

② a. c_2 = "Exatamente duas caras"

$$P(c_2) = P(c\cap c\cap k)\cdot 3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{3}{8}$$

b. B = "O segundo lançamento é cara"

$$P(B) = P(c\cap c\cap c)+P(k\cap c\cap k)+P(k\cap c\cap c)+P(c\cap c\cap k) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$
$$= \frac{4}{8}$$

c. C = "Pelo menos duas caras"

$$P(C) = P(c\cap c\cap k)+P(c\cap k\cap c)+P(c\cap c\cap c)+P(k\cap c\cap c) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{4}{8}$$

d. D = "número de caras é igual ao de coroas"

$$P(D) = P(\emptyset) = 0$$

-0,3

vazio é um conjunto

2,5 pts

3) a. $\Omega = \binom{10}{3} = 120$ A="Menor emblema é 5"

$$P(A) = \frac{1 \cdot \binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

b. B="O maior ~~número é~~ emblema é 5"

$$P(B) = \frac{1 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

4) a.

1,7 pts

B_I = "Bola branca da cx 1"

B_{II} = "Bola branca da cx 2"

B_{III} = "Bola branca da cx 3"

$$P(B_I \cap B_{II} \cap B_{III}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$ X

-0,3

b. $P(B \cap I) + P(B \cap II) + P(B \cap III) = P(I)P(B|I) + P(II)P(B|II) + P(III)P(B|III)$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{18} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{12} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{54} + \frac{3}{36} + \frac{1}{27} = \frac{8+9+4}{108} = \frac{21}{108}$$

-0,5

$$P(B|I) = \frac{4}{6} \cdot \cancel{\frac{1}{3}} = \frac{4}{18}$$

$$P(B|II) = \frac{3}{4} \cdot \cancel{\frac{1}{3}} = \frac{3}{12}$$

$$P(B|III) = \cancel{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

-0,5

c. $$P(I|B) = \frac{P(I \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)\,P(B|I)}{P(B)} = \frac{\frac{21}{108} \cdot \frac{4}{18}}{\frac{21}{108}} = \frac{21}{108} \cdot \frac{4}{18} \cdot \frac{108}{21} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$