Independência Estocástica

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Depto. de Estatística e Matemática Aplicada - UFC

Fortaleza, 13 de abril de 2022

- Considere novamente a situação do Exemplo 3. Ou seja uma urna contendo 2 bolas brancas (B) e 3 vermelhas (V). No entanto, suponha agora que as extrações foram feitas **com reposição**. Nesse caso, as retiradas são independentes, ou seja, a primeira retirada não influencia nas possibilidades de resultados da segunda retirada.
  - a primeira retirada tem as seguintes probabilidades: $\mathbb{P}\left(B\right) = \frac{2}{5}$ e $\mathbb{P}\left(V\right) = \frac{3}{5}$
  - a segunda retirada tem as seguintes probabilidades: $\mathbb{P}\left(B|B\right) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}\left(B|V\right) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}\left(V|B\right) = \frac{3}{5}$ e $\mathbb{P}\left(V|V\right) = \frac{3}{5}$

- Note que $\mathbb{P}(B|*) = \mathbb{P}(B)$ e $\mathbb{P}(V|*) = \mathbb{P}(V)$
- Portanto:
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(BB) &= \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(B|B) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(B) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}\\
\mathbb{P}(BV) &= \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(V|B) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(V) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}\\
\mathbb{P}(VB) &= \mathbb{P}(V)\,\mathbb{P}(B|V) = \mathbb{P}(V)\,\mathbb{P}(B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}\\
\mathbb{P}(VV) &= \mathbb{P}(V)\,\mathbb{P}(V|V) = \mathbb{P}(V)\,\mathbb{P}(V) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}
\end{aligned}$$

Independência de eventos

Definição

Sejam A e B eventos de uma espaço amostral Ω e suponha que $\mathbb{P}(B) > 0$. O evento A é dito ser independente do evento B se:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

- É fácil verificar que se A é independente de B então, B também é independente de A. Além disso, decorre da definição que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B). \tag{1}$$

Dessa forma, os eventos A e B são independentes se, e somente se, (1) ocorre.

Solução

(a) Como A e B são independentes, temos que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$. Como $\mathbb{P}(A) > 0$ e $\mathbb{P}(B) > 0$ então, A e B não podem ser mutuamente excludentes.

(b) Se A e B são mutuamente excludentes e $\mathbb{P}(A) > 0$ e $\mathbb{P}(B) > 0$, então $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Logo, A e B não são independentes.

Independência de eventos

Em resumo:

- Eventos mutuamente excludentes possuem o maior grau de dependência: a ocorrência de um *impede* a ocorrência do outro.

- Em eventos *condicionados* a ocorrência de um altera a probabilidade de ocorrência do outro.

- Se os eventos são independentes a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro.

Independência de eventos (caso geral)

- Para definir a independência para n eventos, sendo n um inteiro positivo, devemos exigir a validade da forma produto para todo subconjunto de k dos n eventos, com $2 \leq k \leq n$.

Definição

Os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são mutuamente independentes se:

$$\mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_n})$$

para todo $k = 2, 3, \ldots, n$ e todo $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$

- Note que o número de condições a serem testadas nesta definição é $2^n - n - 1$.

- Se $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathbb{P}(\{w\}) = 1/4$, então $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ e $C = \{2, 3\}$ são eventos independentes par a par, mas não são mutuamente independentes.

  Solução: Pode-se verificar pelo fato que

  $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

  Similarmente, pode-se provar o mesmo resultado para os outros pares. Contudo,

  $$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}.$$

  Então, A, B e C não são mutuamente independentes.

- João e José disputam um jogo com uma moeda equilibrada. Cada jogador lança a moeda duas vezes e vence o jogo aquele que primeiro obtiver dois resultados iguais. João começa jogando e se não vencer passa a moeda para José e continuando alternando jogadas. Qual a probabilidade de João vencer o Jogo?

Exercício 1

- Demonstre que, se A e B forem eventos independentes, então:
  (a) A e B^c são independentes;

  (b) A^c e B são independentes;

  (c) A^c e B^c são independentes.

Exercício 2

- Para um certo casal a probabilidade de que o homem esteja vivo daqui a 30 anos é 0,47; a de sua esposa é 0,76. Assumindo que as mortes são independentes, determine a probabilidade de que daqui a 30 anos:
  (a) ambos estejam vivos.

  (b) somente o homem esteja vivo.

  (c) somente a mulher esteja viva.

  (d) nenhum esteja vivo.

  (e) pelo menos um esteja vivo.

Exercício 3

- Um teste de laboratório detecta uma doença quando ela está presente em 95% dos casos. No entanto, o teste também fornece um resultado "falso positivo" para 1% das pessoas saudáveis testadas. (Isto é, se uma pessoa saudável faz o teste, então, com probabilidade 0,01, o resultado do teste dirá que ele ou ela tem a doença.) Se 0,5% da população tem a doença, qual é a probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que o resultado do teste é positivo?

Exercício 4

- Três empresas de ônibus fazem a viagem entre Fortaleza e Maranguape. 10% dos passageiros viajam pela empresa A, 50% pela empresa B e os demais pela C. A probabilidade de um ônibus chegar atrasado é de 2% na empresa A, 6% na empresa B e 7% na C.
  (a) Se um passageiro chegou atrasado, qual a probabilidade de que tenha viajado pela empresa B?
  (b) Se um passageiro chegou no horário previsto, qual probabilidade de que tenha viajado pela empresa A?