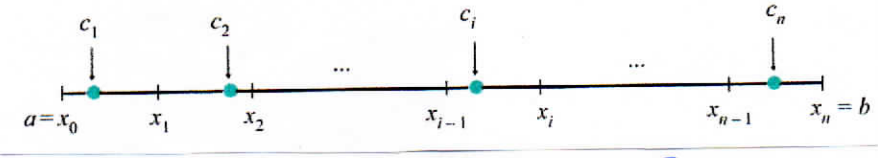
TEORIA RESUMIDA: INTEGRAIS DUPLAS

Começamos relembrando a definição de Integral para Funções $y = f(x)$. Se f é contínua em $[a,b]$ e $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ é uma partição do intervalo $[a,b]$, definimos a integral definida de f em $[a,b]$, denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$, como sendo o seguinte limite:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

, onde: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ e cada c_i pode ser escolhido livremente no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$;



A hipótese da continuidade de f em $[a,b]$, nos garante que este limite exista (e portanto tenha um único valor), independentemente da localização de cada c_i no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Lembramos, também, que se $y = f(x) \geq 0$ no intervalo $[a,b]$, a integral definida de f em $[a,b]$, tem como valor a área abaixo do gráfico de $y = f(x)$, acima do eixo-x, e entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$.

Por fim, o Teorema Fundamental do Cálculo devido, de forma independente, à Leibniz (1646-1716) e à Newton (1643-1727), nos diz que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

, onde G é qualquer função tal que: $G'(x) = f(x),\ \forall x \in [a,b]$;

Seja então $z = f(x,y): U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua em $U \supseteq [a,b] \times [c,d]$.

Então, definimos a Integral Dupla de f no retângulo $[a,b] \times [c,d]$, denotada por $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$, como sendo o seguinte limite:

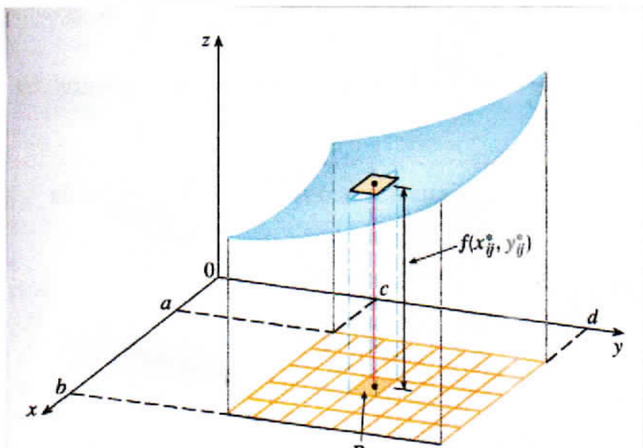
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta y_j\,\Delta x_i,$$

onde: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, para $i = 1, 2, \ldots, m$;

$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, para $j = 1, 2, \ldots, n$;

E cada ponto (x_{ij}^*, y_{ij}^*) é escolhido livremente no retângulo R_{ij},

$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$;



A hipótese da continuidade de f em U, nos garante que este limite exista (e portanto tenha um único valor), independentemente da localização de cada (x^*_{ij}, y^*_{ij}) no respectivo retângulo R_{ij}.

TEOREMA DE FUBINI (1879-1943)

Se $z = f(x,y)$ for contínua no retângulo $[a,b] \times [c,d]$, então:

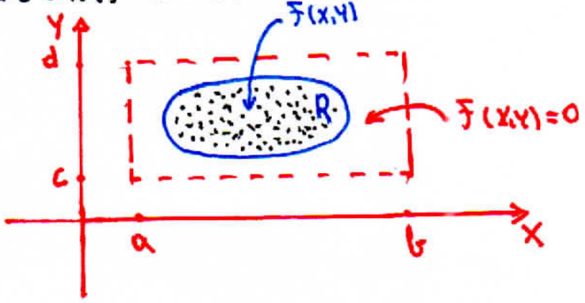
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy;$$

Como pela nossa definição supusemos f contínua em $U \supseteq [a,b] \times [c,d]$, sempre teremos a situação em que é aplicável o Teorema de Fubini.

No caso de funções de uma variável $y = f(x)$ a região de integração sempre é um intervalo $[a,b]$. Todavia, para funções de duas variáveis é desejável podermos integrar em regiões R mais gerais.

Então, para qualquer região R que possa estar contida em algum retângulo $[a,b] \times [c,d]$, estendemos a definição de $z = f(x,y)$ assim:

$$f(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in R \\ 0 & \text{se } (x,y) \in \{[a,b] \times [c,d]\} - R \end{cases};$$



Então, definimos a Integral Dupla de f na região R da seguinte maneira:

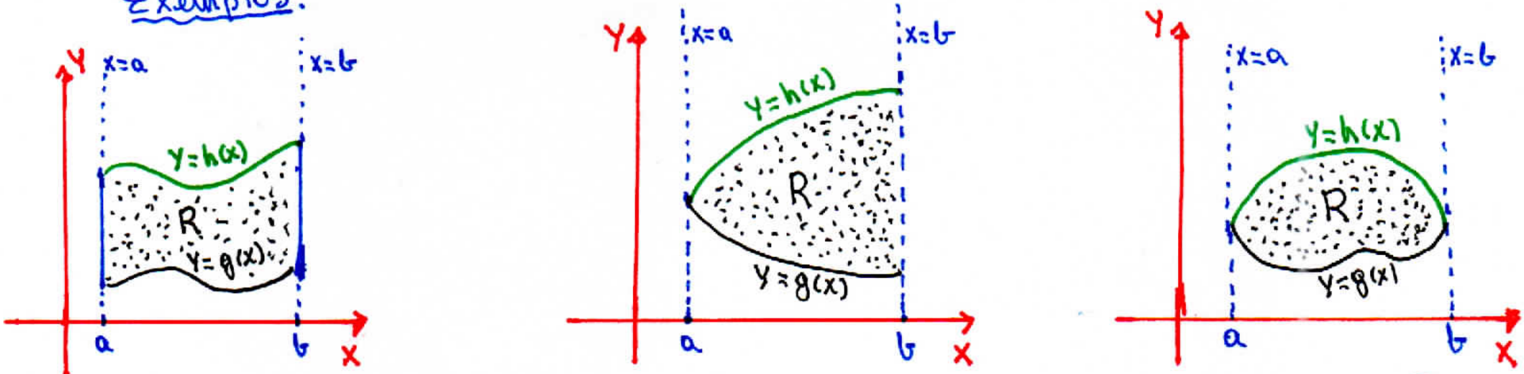
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathbf{dy\,dx} = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathbf{dx\,dy};$$

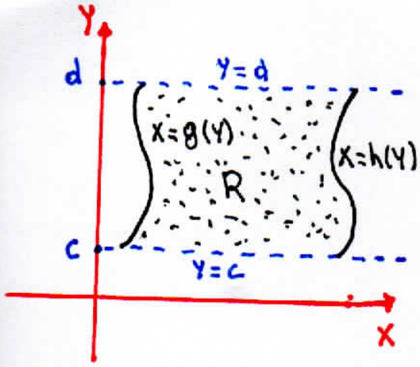
Limitaremos nossos estudos a regiões do plano R^2 que sejam do Tipo I, ou do Tipo II, ou uma união finita de regiões de **um, ou destes dois tipos.**

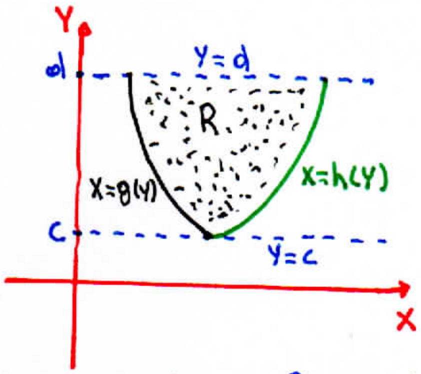
Vejamos o que significa uma região do Tipo-I:

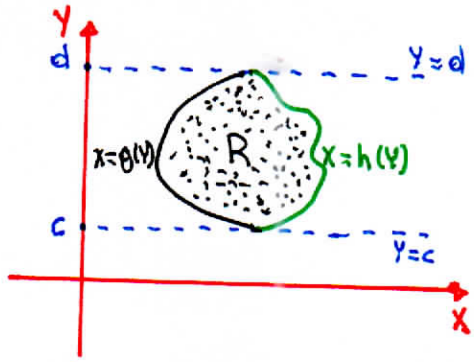
Uma região no plano R^2 é dita ser do tipo I, quando ela for limitada: à esquerda por uma reta vertical $x = a$, à direita por uma reta vertical $x = b$, abaixo pelo gráfico de uma função $y = g(x)$ e acima por um gráfico de uma função $y = h(x)$, ambas contínuas no intervalo $[a,b]$;

Exemplos:









Por outro lado, uma região no plano R^2 é dita ser do tipo II, quando ela for limitada: abaixo por uma reta horizontal $y=c$, acima por uma reta horizontal $y=d$, à esquerda pelo gráfico de uma função $x=g(y)$ e à direita pelo gráfico de uma função $x=h(y)$, ambas contínuas no intervalo $[c,d]$;

Acima vemos exemplos;

Quando tivermos uma região de tipo I, a Integral Dupla $\iint_R f(x,y)\,dA$ será calculada por meio da iteração de duas integrais simples, da seguinte forma: $\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx$, onde $\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$ a primeira a ser calculada é apenas com relação à y, tratando-se x como constante; para após seu resultado ser, agora, integrado apenas com relação à x.

E quando tivermos uma região de tipo II, a Integral Dupla $\iint_R f(x,y)\,dA$ será, também, calculada por meio da iteração de duas integrais simples, só que da seguinte forma:
$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\,dy$, onde $\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx$ a primeira a ser calculado é apenas com relação à x, tratando-se y como constante; para após seu resultado ser, agora, integrado apenas com relação à y.

Como, sempre, trabalharemos com funções $z=f(x,y)$ contínuas, quando uma região puder ser simultaneamente de tipo I e de tipo II, o Teorema de Fubini será aplicável e a Integra Dupla $\iint_R f(x,y)\,dA$, poderá ser calculada em qualquer uma das duas ordens; Ou seja:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\,dy;$$