PLANOS TANGENTES E RETAS NORMAIS À SUPERFÍCIES

No que se segue faremos livre uso dos seguintes fatos básicos da Geometria Analítica em R^3:

(i) Uma equação do plano passando pelo ponto (x_0, y_0, z_0), e que tem como um vetor normal (perpendicular) o vetor, não-nulo; $N = ai + bj + ck$, pode ser dada por: $[(x-x_0)i + (y-y_0)j + (z-z_0)k].[ai + bj + ck] = 0$;

Ou seja: $ax + by + cz = d$, onde $d = ax_0 + by_0 + cz_0 \in R$;

(ii) Equações da reta passando pelo ponto (x_0, y_0, z_0), e que tem como um vetor direção o vetor, não-nulo, $V = ai + bj + ck$, podem ser dadas por:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} ; \forall t \in R;$$

Dito isto, passaremos às definições de Plano Tangente e Reta Normal à uma superfície.

Seja $F(x,y,z) = k$, $k \in R$, uma superfície tal que $F(x,y,z): U \subseteq R^3 \longrightarrow R$ seja uma função diferenciável em $(x_0, y_0, z_0) \in U$, e tal que $F(x_0, y_0, z_0) = k$, e com suas derivadas parciais $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ e $\frac{\partial F}{\partial z}$ contínuas em (x_0, y_0, z_0).

E seja, também, $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ uma curva diferenciável passando por (x_0, y_0, z_0), isto é existe $t_0 \in R$ tal que $r(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, contida na superfície $F(x,y,z) = k$, isto é $F(x(t), y(t), z(t)) = k$, qualquer, nestas condições.

Aplicando o quadro (08) da Regra da Cadeia à igualdade $F(x(t), y(t), z(t)) = k$, obtemos: $\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0 \therefore \left[\frac{\partial F}{\partial x}i + \frac{\partial F}{\partial y}j + \frac{\partial F}{\partial z}k\right].\left[\frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k\right] = 0$;

E numa linguagem bem simples: $\nabla F(x,y,z).r'(t) = 0$. E particularmente:

$\nabla F(x_0, y_0, z_0).r'(t_0) = 0$. Ou seja o vetor gradiente, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se for não-nulo, será ortogonal a todo vetor tangente $r'(t_0)$.

Esta discussão nos estimula a darmos as seguintes definições, respeitadas todas as condições acima:

DEFINIÇÃO-1. O plano tangente à superfície $F(x,y,z) = k$, $k \in R$, em um seu ponto (x_0, y_0, z_0) é aquele que tem como um vetor normal: $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Logo, uma sua equação pode ser dada por:

$$[(x-x_0)i + (y-y_0)j + (z-z_0)k].\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)i + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)j + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)k\right] = 0;$$

DEFINIÇÃO-2: A reta normal à superfície $F(x,y,z) = k$, $k \in R$, em um seu ponto (x_0, y_0, z_0) é aquela que tem como um vetor direção: $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Logo, suas equações podem ser dadas por:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)t \\ y = y_0 + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)t \\ z = z_0 + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)t \end{cases} ; \forall t \in R;$$