TEORIA RESUMIDA - DERIVADAS PARCIAIS

DEFINIÇÃO. Seja $u = f(x,y): U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, ou seja: uma função real de duas variáveis reais definida num subconjunto aberto U do $\mathbb{R}^2$. Então, definimos:

(i) A função derivada parcial de $u = f(x,y)$ com relação à variável x, denotada por; $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$; como sendo o seguinte limite, se ele existir:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x};$$

(ii) A função derivada parcial de $u = f(x,y)$ com relação à variável y, denotada por; $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$; como sendo o seguinte limite, se ele existir:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y};$$

Vejamos exemplos:

ⓐ Seja $u = f(x,y) = x^2 + y^2$. Encontre as funções derivadas parciais, com relação à x e com relação à y:

Por definição; $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + y^2 - [x^2+y^2]}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + y^2 - x^2 - y^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x;$$

E, também, por definição;

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 + (y+\Delta y)^2 - [x^2+y^2]}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 + y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 - x^2 - y^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2y\Delta y + \Delta y^2}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y(2y + \Delta y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (2y + \Delta y) = 2y;$$

Logo: $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ e $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$;

ⓑ Seja $u = f(x,y) = x^2y - y^3$. Encontre as duas funções derivadas parciais: com relação à x e com relação à y:

Temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 y - y^3 - (x^2y - y^3)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2y + 2xy\Delta x + y\Delta x^2 - y^3 - x^2y + y^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2xy\Delta x + y\Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2xy + y\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2xy + y\Delta x) = 2xy;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2(y+\Delta y) - (y+\Delta y)^3 - [x^2y - y^3]}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2y + x^2\Delta y - y^3 - 3y^2\Delta y - 3y\Delta y^2 - \Delta y^3 - x^2y + y^3}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2\Delta y - 3y^2\Delta y - 3y\Delta y^2 - \Delta y^3}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y(x^2 - 3y^2 - 3y\Delta y - \Delta y^2)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} (x^2 - 3y^2 - 3y\Delta y - \Delta y^2) = x^2 - 3y^2;$$

Logo, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$ e $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 3y^2$;

Felizmente, para calcularmos derivadas parciais não necessitaremos, frequentemente, calcularmos limites. Com efeito, olhando cuidadosamente as definições vemos que na definição de $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ só x varia e y permanece constante, já na definição de $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ só y varia enquanto agora x permanece constante.

Portanto, bastará usarmos todas as regras e teoremas sobre derivação que conhecemos, e no cálculo de:

- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, tratarmos y como constante;
- $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, tratarmos x como constante;

Vejamos como os exemplos ⓐ e ⓑ ficam extremamente simples:

ⓐ $u = f(x,y) = x^2 + y^2$; Logo, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} = 2x + 0 = 2x$;

e $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} = 0 + 2y = 2y$;

(b) $u = f(x,y) = x^2y - y^3$;

Logo, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial (x^2y - y^3)}{\partial x} = 2xy - 0 = 2xy$;

e $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial (x^2y - y^3)}{\partial y} = x^2 - 3y^2$;

A observação desta regra vai ajudá-los no cálculo de derivadas parciais que seriam complexas se nos restringirmos ao cálculo apenas via limites. Vejamos exemplos:

(c) Se $u = f(x,y) = \text{sen}(x^2+y^3)$, encontre $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}$:

Ora,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial (\text{sen}(x^2+y^3))}{\partial x} = \cos(x^2+y^3).\frac{\partial (x^2+y^3)}{\partial x} = 2x\cos(x^2+y^3);$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (\text{sen}(x^2+y^3))}{\partial y} = \cos(x^2+y^3).\frac{\partial (x^2+y^3)}{\partial y} = 3y^2\cos(x^2+y^3);$$

(d) Se $u = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, encontre $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}$:

Temos: $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial (\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x} = \frac{\partial [(x^2+y^2)^{1/2}]}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}.\frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

e $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (\sqrt{x^2+y^2})}{\partial y} = \frac{\partial [(x^2+y^2)^{1/2}]}{\partial y} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}.\frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

No decorrer do nosso curso, trabalharemos também com funções reais de três variáveis reais. Ou seja, funções do tipo $u = f(x,y,z): U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, onde U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$. E, precisaremos encontrar as derivadas parciais de $u = f(x,y,z)$ com relação à x, com relação à y e com relação à z.

As definições são meras generalizações do caso em que só há duas variáveis x e y. Assim sendo, definimos:

- $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$, se este limite existir;
- $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z)}{\Delta y}$, se este limite existir;
- $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z}$, se este limite existir;

Observemos, que na definição de $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ apenas x varia, com y e z permanecendo constantes. Logo, no cálculo de $\frac{\partial u}{\partial x}$ y e z são tratados como constantes.

De forma análoga no cálculo de $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$, x e z são tratados como constantes, bem como no cálculo de $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$, x e y são tratados como constantes.

Vejamos exemplos:

⑥ Se $u = f(x,y,z) = (x^2+y^3+z^4)^{3/2}$, encontre: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial z}$;

Temos: $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial[(x^2+y^3+z^4)^{3/2}]}{\partial x} = \frac{3}{2}(x^2+y^3+z^4)^{1/2}\cdot\frac{\partial(x^2+y^3+z^4)}{\partial x} =$$
$$= \frac{3}{2}(x^2+y^3+z^4)^{1/2}\cdot 2x = 3x\sqrt{x^2+y^3+z^4};$$

e $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial[(x^2+y^3+z^4)^{3/2}]}{\partial y} = \frac{3}{2}(x^2+y^3+z^4)^{1/2}\cdot\frac{\partial(x^2+y^3+z^4)}{\partial y} =$$
$$= \frac{3}{2}(x^2+y^3+z^4)^{1/2}\cdot 3y^2 = \frac{9}{2}y^2\sqrt{x^2+y^3+z^4};$$

e $$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial[(x^2+y^3+z^4)^{3/2}]}{\partial z} = \frac{3}{2}(x^2+y^3+z^4)^{1/2}\cdot\frac{\partial(x^2+y^3+z^4)}{\partial z} =$$
$$= \frac{3}{2}(x^2+y^3+z^4)^{1/2}\cdot 4z^3 = 6z^3\sqrt{x^2+y^3+z^4};$$

⑦ Se $u = f(x,y,z) = tg(x+2y+3z)$, encontre: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial z}$;

Temos: $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial[tg(x+2y+3z)]}{\partial x} = sec^2(x+2y+3z)\cdot\frac{\partial(x+2y+3z)}{\partial x} =$$
$$= sec^2(x+2y+3z)\cdot 1 = sec^2(x+2y+3z);$$

e $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial[tg(x+2y+3z)]}{\partial y} = sec^2(x+2y+3z)\cdot\frac{\partial(x+2y+3z)}{\partial y} =$$
$$= sec^2(x+2y+3z)\cdot 2 = 2sec^2(x+2y+3z);$$

e $$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial[tg(x+2y+3z)]}{\partial z} = sec^2(x+2y+3z)\cdot\frac{\partial(x+2y+3z)}{\partial z}$$
$$= sec^2(x+2y+3z)\cdot 3 = 3sec^2(x+2y+3z);$$

⑧ Se $u = f(x,y,z) = e^{xyz}$, encontre: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial z}$;

Temos $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial[e^{xyz}]}{\partial x} = e^{xyz}\cdot\frac{\partial(xyz)}{\partial x} = yze^{xyz};$$

Se quisermos podemos calcular $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial z}$, mas é fácil ver que encontraremos:
$$\frac{\partial u}{\partial y} = xze^{xyz} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial z} = xye^{xyz};$$

Afora as duas notaçoẽs usadas quando definimos as derivadas parciais, existem outras também utilizadas para denotar derivadas parciais.

Entaõ se $u = f(x,y,z)$, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = u_x(x,y,z) = f_x(x,y,z) = f_1(x,y,z) = D_1 f(x,y,z) = D_x f(x,y,z);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = u_y(x,y,z) = f_y(x,y,z) = f_2(x,y,z) = D_2 f(x,y,z) = D_y f(x,y,z);$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = u_z(x,y,z) = f_z(x,y,z) = f_3(x,y,z) = D_3 f(x,y,z) = D_z f(x,y,z);$$

E quando, sem causar confusaõ, podemos omitir (x,y,z) as notações ficam ainda mais "limpas" e simples; Temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = u_x = f_x = f_1 = D_1 f = D_x f;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = u_y = f_y = f_2 = D_2 f = D_y f;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} = u_z = f_z = f_3 = D_3 f = D_z f;$$

Por fim, podemos generalizar a definiçaõ de derivadas parciais para uma funçaõ real de n variáveis reais.

Ou seja, se $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n): U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, onde U é um aberto em $\mathbb{R}^n$, para cada i, $1 \leq i \leq n$, definimos a derivada parcial de $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ com relaçaõ à variável x_i, como sendo o seguinte limite, se ele existir:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta_i x \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + \Delta_i x, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\Delta_i x}$$

para cada i, $1 \leq i \leq n$;

E, obviamente, no cálculo de $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ apenas x_i varia, todas as outras variáveis x_j com $j \neq i$, permanecem constantes. Vejamos um exemplo:

h) Seja $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$. Encontre $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, para $1 \leq i \leq n$:

Vamos escrever u convenientemente assim:

$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \ln(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_i^2 + \ldots + x_n^2)$, onde $1 \leq i \leq n$;

Logo, $$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial[\ln(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_i^2 + \ldots + x_n^2)]}{\partial x_i} = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_i^2 + \ldots + x_n^2)} \cdot \frac{\partial(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_i^2 + \ldots + x_n^2)}{\partial x_i}$$

$$= \frac{2x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_i^2 + \ldots + x_n^2)};$$