Variáveis Aleatórias Discretas

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Depto. de Estatística e Matemática Aplicada - UFC

Fortaleza, 18 de maio de 2022

Sumário

1. Modelos discretos

2. Principais Modelos Probabilísticos Discretos
   - Distribuição Uniforme Discreta
   - Distribuição de Bernoulli
   - Distribuição Binomial

Modelos discretos

- Apresentaremos agora alguns dos principais modelos probabilísticos discretos utilizados para descrever vários fenômenos ou experimentos aleatórios de interesse.
- Tais modelos são expressos por uma família de distribuições de probabilidade que dependem de um ou mais parâmetros.

Sumário

Distribuição uniforme

- Esta é mais simples das distribuições de probabilidade discretas.
- Considere uma v.a X que toma um número finito de valores com a mesma probabilidade, ou seja, $X \in \{1, 2, \ldots, N\}$.
- Dessa forma podemos notar que,

$$p(x) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{N} \text{ para todo } x \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

- Uma v.a com essas propriedades é dita ter uma distribuição *uniforme discreta* com parâmetro N.
- **Notação**: $X \sim \mathcal{U}\{1, 2, \ldots, N\}$.

Distribuição uniforme

- Pode se mostrar que:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{N+1}{2} \text{ e } \mathrm{Var}(X) = \frac{N^2-1}{12}.$$

- **Exemplo**: X = resultado obtido no lançamento de um dado honesto

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \times (1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3,5$
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{6}[(1+4+9+16+25+36) - \frac{1}{6} \times (21)^2] = \frac{35}{2} = 17,5$

Sumário

1. Modelos discretos

2. Principais Modelos Probabilísticos Discretos
   - Distribuição Uniforme Discreta
   - Distribuição de Bernoulli
   - Distribuição Binomial

Modelo Bernoulli

- Em muitas aplicações, cada observação de um experimento aleatório é **binária**: tem apenas dois resultados possíveis.
  Por exemplo, uma pessoa pode:
  - aceitar ou recusar uma oferta de cartão de crédito de seu banco.
  - ter ou não um plano de saúde.
  - votar sim ou não em uma assembléia.
- Nesse caso, os resultados do experimento podem ser classificados como *sucesso* ou *fracasso*. Exemplos:
  - Lançar uma moeda e verificar a ocorrência de cara ou coroa. Podemos considerar como sucesso, a obtenção de cara.
  - Lançar um dado e verificar se o resultado é par ou ímpar. Podemos considerar como sucesso obter um número par.
- Esse tipo de experimento é denominado *ensaio de Bernoulli*.

Distribuição de Bernoulli

- Considere um ensaio de Bernoulli e defina a v.a X associada aos possíveis resultados do experimento:

- $X = \begin{cases} 1, & \text{evento de interesse ocorre} \\ 0, & \text{caso contário} \end{cases}$

- $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\text{sucesso}) = p \Rightarrow \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\text{fracasso}) = 1 - p$

Distribuição de Bernoulli

- Dizemos que X tem distribuição de Bernoulli com parâmetro p se sua função de probabilidade é dada por:

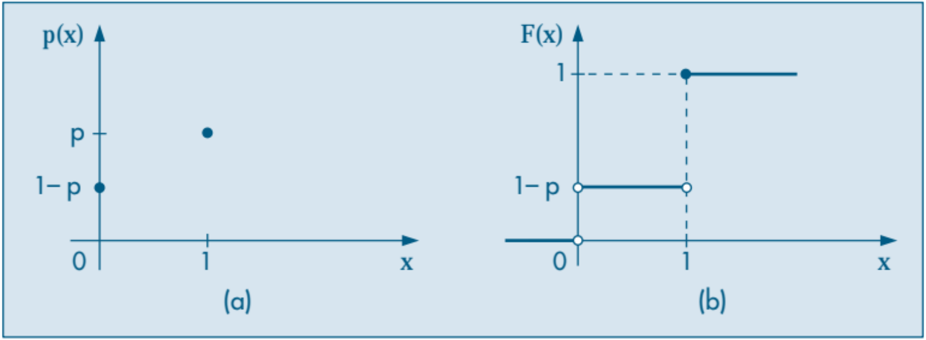
$$\mathbb{P}(X = x) = p^x(1-p)^{1-x} \text{ em que } x = 0, 1$$

- **Notação:** $X \sim \text{Ber}(p)$

Distribuição de Bernoulli

- Temos por definição:
- $\mathbb{E}(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$
- $\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$
- $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$
- f.d.a.: $\text{F(x)} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & x \in [0,1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

Distribuição de Bernoulli



Distribuição de Bernoulli

- Exemplo: lançamos um dado e consideramos como sucesso, a obtenção da face 5. Supondo que o dado é honesto:

x	0	1
$p(x)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

  - $\mathbb{P}(X = x) = p^x(1-p)^{1-x} = (\frac{1}{6})^x(\frac{5}{6})^{1-x}$ em que $x = 0, 1$
  - $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}$
  - $\text{Var}(X) = \frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6}) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

Sumário

Modelo Binomial

- Considere novamente o exemplo anterior: lançar um dado considerando obter face 5 (sucesso), qualquer outra face (fracasso). Este é um ensaio de Bernoulli, cuja probabilidade de sucesso é igual a $1/6$.
- Suponha agora que repetimos esse experimento 3 vezes, de forma independente.Ou seja, o experimento consiste, agora, em lançar o dado 3 vezes.
- Em cada lançamento podemos observar face 5 (sucesso) com probabilidade $1/6$ e qualquer outra face (fracasso) com probabilidade $5/6$.
- Seja X a v.a que conta o número de vezes que observamos face 5 nos três lançamentos. Então, $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Modelo Binomial

- A repetição de ensaios de Bernoulli independentes dão origem a uma variável aleatória Binomial.
- Exemplo: Sabe-se que a eficiência de uma vacina é de 80%. Um grupo de 3 indivíduos é sorteado, dentre a população vacinada, e cada um é submetido a testes para averiguar se está imunizado. Nesse caso, consideramos como sucesso a imunização.
  - $X_i = \begin{cases} 1, & \text{indivíduo } i \text{ está imunizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
  - pelo enunciado, sabe-se que $\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 0,8$

Modelo Binomial

- Os indivíduos 1, 2 e 3 são independentes. E as v.a.'s X_1, X_2 e X_3 são Bernoulli.

- Se o interesse está em estudar $X =$ número de indivíduos imunizados no grupo, X poderá assumir valores $\{0, 1, 2, 3\}$.

- Note que $X = X_1 + X_2 + X_3$.

Modelo Binomial

evento	$\mathbb{P}$(evento)	X
$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0$	$(0,2)^3$	0
$X_1 = 1,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0$	$0,8 \times (0,2)^2$	1
$X_1 = 0,\ X_2 = 1,\ X_3 = 0$	$0,8 \times (0,2)^2$	1
$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1$	$0,8 \times (0,2)^2$	1
$X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = 0$	$(0,8)^2 \times 0,2$	2
$X_1 = 1,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1$	$(0,8)^2 \times 0,2$	2
$X_1 = 0,\ X_2 = 1,\ X_3 = 1$	$(0,8)^2 \times 0,2$	2
$X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = 1$	$(0,8)^3$	3

Modelo Binomial

- Assim, as probabilidades de cada valor possível de X são:

x	0	1	2	3
$p(x)$	$(0,2)^3$	$3 \times 0,8 \times (0,2)^2$	$3 \times (0,8)^2 \times 0,2$	$(0,8)^3$

- E o comportamento de X é completamente determinado pela função:

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{3}{x}(0,8)^x(0,2)^{3-x} \quad \forall \quad x = 0,1,2,3.$$

Distribuição Binomial

- Suponha que n ensaios de Bernoulli independentes, são realizados. Ou seja, em cada ensaio pode acontecer *sucesso* com probabilidade p ou *fracasso* com probabilidade $1 - p$.

- Defina a v.a X como o número de sucessos em n ensaios, então X é dita ter *distribuição binomial* com parâmetros n e p e sua função de probabilidade é dada por

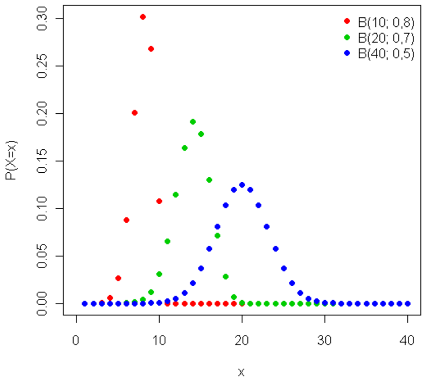
$$p(x) = \mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \forall \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

- **Notação**: $X \sim B(n, p)$.

- Note que, $\text{Ber}(p) \equiv B(1, p)$.

- f.d.a $\mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$.

Distribuição Binomial



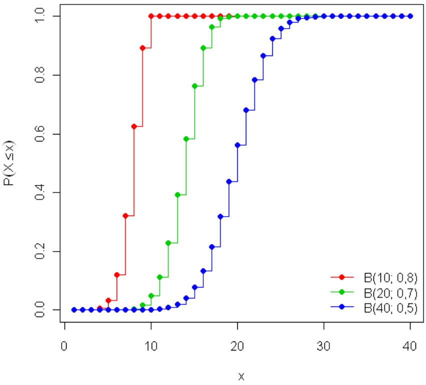


Figura: Representação gráfica da distribuição binomial

- Se $X \sim B(n, p)$ então
  - $\mathbb{E}(X) = np$ (Demonstração)
  - $\text{Var}(X) = np(1-p)$ (Demonstração)
  - $\mathbb{E}(X^k) = np\mathbb{E}[(Y+1)^{k-1}]$ sendo que $Y \sim B(n-1, p)$.

Distribuição Binomial

Proposição:

Se $X \sim B(n, p)$ então

$$\mathbb{P}(X = x + 1) = \frac{p}{1-p}\frac{n-x}{x+1}\mathbb{P}(X = x)$$

- Suponha que uma válvula eletrônica, instalada em determinado circuito, tenha probabilidade $0,2$ de funcionar mais do que 500 horas. Se testarmos 20 válvulas:

(a) Qual será a probabilidade de que, exatamente 2 válvulas, funcionem mais do que 500 horas?

(b) Qual o número esperado de válvulas que funcionaram mais do que 500 horas?

(c) Qual o desvio-padrão?

- **Solução**: Seja X a v.a que representa o número de válvulas que funcionem mais do que 500 horas. Admitindo que, $X \sim B(20; 0,2)$ temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 2) &= \binom{20}{2}(0,2)^2(0,8)^{20-2} \\ &= 190 \times (0,2)^2 \times (0,8)^{18} = 0,137\end{aligned}$$

- O número esperado de válvulas funcionando mais do que 500 horas é dado por

$$\mathbb{E}(X) = 20 \times 0,2 = 4, \text{ com desvio-padrão}$$

$$\mathrm{DP}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{20 \times 0,2 \times 0,8} \approx 1,79.$$

Exemplo

- O controle de qualidade de uma determinada industria verificou que a probabilidade de que uma peça, produzida por determinada máquina, seja defeituosa é $0,2$. Se 10 peças produzidas por essa máquina forem escolhidas ao acaso, responda:
  (a) Qual a probabilidade de ser encontrada no máximo uma peça defeituosa?

  (b) Qual a esperança e o desvio-padrão do número de peças defeituosas?

  (c) Se nenhuma peça defeituosa for encontrada, a máquina está operando em perfeitas condições. Se somente uma peça defeituosa for encontrada, a máquina precisará de "reparos leves"com um custo de R$ 10,00. Já se forem encontradas mais do que uma, a máquina precisará de "reparos maiores"ao custo de R$ 50,00. Qual o custo de manutenção esperado para essa máquina?

- O jogo a seguir, conhecido como *roda da fortuna*, é bastante popular em muitos parques e casinos. Um jogador aposta em um número de 1 a 6. Três dados são então lançados, e se o número apostado sair i vezes, $i = 1, 2, 3$, então o jogador ganha i unidades; se o número apostado não sair em nenhum dos dados, então o jogador perde 1 unidade. Este jogo é justo para o jogador?