ANEXO - 3 - TEOREMAS SOBRE DIFERENCIABILIDADE

TEOREMA 1: Se $u = f(x,y)$ é diferenciável em (x_0,y_0), então é contínua em (x_0,y_0);

Prova: como $f(x,y)$ é diferenciável em (x_0,y_0), existem $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, e:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

$$\text{com } \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_i(\Delta x,\Delta y) = 0;$$

Logo,

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Big[f(x_0,y_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y}_{\to 0} + \underbrace{\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x}_{\to 0} + \underbrace{\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y}_{\to 0}\Big]$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0,y_0) = f(x_0,y_0);$$ Logo f é contínua em (x_0,y_0);

TEOREMA 2. Se f_x e f_y são contínuas em (x_0,y_0), então f é diferenciável em (x_0,y_0);

Prova: vamos somar e subtrair $f(x_0+\Delta x, y_0)$ à $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$, obtendo:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \underbrace{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)}_{(I)} + \underbrace{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}_{(II)};$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio à (I) e à (II), obtemos:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) = f_y(x_0+\Delta x, d), \text{ com } y_0 < d < y_0+\Delta y;$$

e $f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) = f_x(c, y_0)$, com $x_0 < c < x_0+\Delta x$;

Agora, definamos:
$$\begin{cases} \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y) = f_x(c,y_0) - f_x(x_0,y_0); \\ \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y) = f_y(x_0+\Delta x, d) - f_y(x_0,y_0); \end{cases}$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} [f_x(c,y_0) - f_x(x_0,y_0)] = f_x(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0) = 0,$$ já que f_x é contínua em (x_0,y_0);

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} [f_y(x_0+\Delta x,d) - f_y(x_0,y_0)] = f_y(x_0,y_0) - f_y(x_0,y_0) = 0,$$ já que f_y é contínua em (x_0,y_0);

Agora, basta vermos que:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) + f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)$$

$$= f_y(x_0+\Delta x, d)\Delta y + f_y(x_0,y_0)\Delta y - f_y(x_0,y_0)\Delta y + f_x(c,y_0)\Delta x + f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_x(x_0,y_0)\Delta x$$

$$= f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + [f_x(c,y_0) - f_x(x_0,y_0)]\Delta x + [f_y(x_0+\Delta x,d) - f_y(x_0,y_0)]\Delta y$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y$$

$$\text{com } \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y) = 0 \text{ e } \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y) = 0;$$

TEOREMA-3. Se $u = f(x,y,z)$ é diferenciável em (x_0,y_0,z_0), então é contínua em (x_0,y_0,z_0);

Prova: como $f(x,y,z)$ é diferenciável em (x_0,y_0,z_0), existem $f_x(x_0,y_0,z_0)$, $f_y(x_0,y_0,z_0)$ e $f_z(x_0,y_0,z_0)$ tais que:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0) = f_x(x_0,y_0,z_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y + f_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta y + \varepsilon_3(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta z,$$

com $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)} \varepsilon_i(\Delta x,\Delta y,\Delta z) = 0$;

Logo, $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)} [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0)] = f_x(x_0,y_0,z_0).0 + f_y(x_0,y_0,z_0).0 + f_z(x_0,y_0,z_0).0 + 0 + 0 + 0 = 0$;

Ou seja: $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) = f(x_0,y_0,z_0)$; $u = f(x,y,z)$ é contínua em (x_0,y_0,z_0).

TEOREMA-4. Se f_x, f_y e f_z forem contínuas em (x_0,y_0,z_0), então f será diferenciável em (x_0,y_0,z_0);

Prova: na expressão $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0)$, vamos: (i) subtrair e somar $f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$; (ii) subtrair e somar $f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)$; obtendo:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) + f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0+\Delta z) + f(x_0,y_0,z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0);$$

Agora, podemos aplicar o Teorema do valor médio a cada uma das três diferenças no lado direito, acima, obtendo:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0) = f_x(c, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)\Delta x + f_y(x_0, d, z_0+\Delta z)\Delta y + f_z(x_0,y_0,e)\Delta z; \; x_0 < c < x_0+\Delta x; \; y_0 < d < y_0+\Delta y; \; z_0 < e < z_0+\Delta z; \; \text{(I)}$$

Então, definamos:

$\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z) = f_x(c, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f_x(x_0,y_0,z_0)$; Pela continuidade de f_x; $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)} \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z) = f_x(x_0,y_0,z_0) - f_x(x_0,y_0,z_0) = 0$;

$\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y,\Delta z) = f_y(x_0,d,z_0+\Delta z) - f_y(x_0,y_0,z_0)$; Pela continuidade de f_y; $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)} \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y,\Delta z) = f_y(x_0,y_0,z_0) - f_y(x_0,y_0,z_0) = 0$;

$\varepsilon_3(\Delta x,\Delta y,\Delta z) = f_z(x_0,y_0,e) - f_z(x_0,y_0,z_0)$; Pela continuidade de f_z; $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)} \varepsilon_3(\Delta x,\Delta y,\Delta z) = f_z(x_0,y_0,z_0) - f_z(x_0,y_0,z_0) = 0$;

Por fim, como: $f_x(c, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) = f_x(x_0,y_0,z_0) + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$; $f_y(x_0,d,z_0+\Delta z) = f_y(x_0,y_0,z_0) + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$; e $f_z(x_0,y_0,e) = f_z(x_0,y_0,z_0) + \varepsilon_3(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$;

A expressão (I) fica:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0) = f_x(x_0,y_0,z_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y + f_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta y + \varepsilon_3(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta z;$$ $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)} \varepsilon_i(\Delta x,\Delta y,\Delta z) = 0$; $i = 1,2,3$;