Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II - 3ª Avaliação Parcial

Aluno(a): ____

1. Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$. Escreva os quatro primeiros elementos da sequência das somas parciais $\{S_n\}$ e obtenha uma fórmula para S_n em termos de n. Verifique também se a série infinita é convergente ou divergente.

2. Aplique o teste da integral para verificar se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ é convergente ou divergente

3. Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} + y = xe^x$

4. Resolva o problema de valor inicial:
   $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} = x - 1; y(0) = 0$

Seg Ter Qua Qui ~~Sex~~ Sáb Dom

08/07/22

Prova 3 - Cálculo 2

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln(2n-1) - \ln(2n+1)\right]$

$\{S_1\} = \ln(1) - \ln(3) = -\ln(3)$
$\{S_2\} = -\ln(3) + \ln(3) - \ln(5) = -\ln(5)$
$\{S_3\} = -\ln(5) + \ln(5) - \ln(7) = -\ln(7)$
$\{S_4\} = -\ln(7) + \ln(7) - \ln(9) = -\ln(9)$
$\{S_n\} = -\ln(2n+1)$

$\lim_{n\to+\infty} (-\ln(2n+1)) = -\infty$

Logo a série é divergente.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ $\quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\arctan(x)\Big|_1^b\right]$

$= \lim_{b\to+\infty} \left[\arctan(b) - \arctan(1)\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

Logo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ é convergente pois a integral de $f(x)$ existiu.

3. $\frac{dy}{dx} + y = xe^x$ $\quad a(x) = 1$, $\quad b(x) = xe^x$ $\qquad e^{\int 1\,dx} = e^{x+c}$

$y(x) = e^{-x} \cdot \left[\int xe^x \cdot e^x\,dx + C\right] \Rightarrow y(x) = e^{-x} \cdot \left[\int xe^{2x}\,dx + C\right]$

$\Rightarrow y(x) = e^{-x} \cdot \left[\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C\right] \Rightarrow y(x) = \frac{xe^x}{2} - \frac{e^x}{4} + Ce^{-x} \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{e^x(2x-1)}{4} + \frac{C}{e^x}}$

$\int xe^{2x}\,dx = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$

$u = x;\ dv = e^{2x}\,dx;\ du = dx;\ v = \frac{e^{2x}}{2}$

Seg | Ter | Qua | Qui | Sex | Sáb | Dom

4. $(x^2+1)\frac{dy}{dx} = x-1;\ y(0)=0$

$(x^2+1)\,dy = x-1\,dx \Rightarrow dy = \frac{x-1}{(x^2+1)}dx \Rightarrow \int dy = \int \frac{x-1}{(x^2+1)}dx$

$\Rightarrow \int dy = \int \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\,dx \Rightarrow y = \int \frac{x}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\cdot \ln(|x^2+1|) - \arctan(x) + C$

- $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{2u}du = \frac{1}{2}\cdot\ln(|u|) = \frac{1}{2}\cdot\ln(|x^2+1|)$

Quanto $y(0)=0$ temos

$0 = \frac{1}{2}\cdot\ln(|0^2+1|) - \arctan(0) + C$

$0 = \frac{1}{2}\cdot 0 - 0 + C$

$C=0$

$\boxed{y = \frac{1}{2}\cdot\ln(|x^2+1|) - \arctan(x) + 0}$