Universidade Federal do Ceará
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada
Prof. José Roberto Silva dos Santos
CC0285 - Probabilidade II.
Lista III - 2022.2

1. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x,y) = \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) \underset{(0,1)}{I}(x) \underset{(0,2)}{I}(y).$$

   (a) Prove que de fato f é uma densidade.
   (b) Determine as densidades marginais de X e Y.
   (c) Calcule $\mathbb{P}(X > Y)$.
   (d) Obtenha $\mathbb{P}(Y > 1 \mid X < 1/2)$.

2. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} c(y-x) & \text{se } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   Obtenha o valor de c e as distribuições marginais de X e Y.

3. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x,y) = c \exp\left\{-\frac{25}{32}\left(x^2 - \frac{3xy}{5} + \frac{y^2}{4}\right)\right\}, x, y \in \mathbb{R}.$$

   Determine o valor de c e as distribuições marginais de X e Y.

4. Um romancista se comprometeu com seu editor a entregar a cada 30 dias um capítulo do livro que está escrevendo; esse tem sido o seu método de trabalho há vários anos. Sejam X o número de dias que o escritor demora para redigir a primeira versão de um capítulo, e Y o número total de dias que tarda para ter o capítulo pronto, incluindo a revisão e a correção de erros. Suponha que X e Y têm densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} cx(30-y) & \text{se } 0 \leq x \leq y \leq 30 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Obtenha o valor de c.
   (b) São X e Y independentes?
   (c) Calcule a probabilidade de que o romancista termine um capítulo em no máximo 25 dias.

(d) Encontre a probabilidade de que o tempo gasto redigindo a primeira versão seja superior ao tempo de revisão e correção de erros.

(e) Qual a probabilidade de que o escritor demore menos de 15 dias revisando e corrigindo um capítulo?

5. Uma empresa de varejo vende produtos em uma rede de lojas físicas e por meio da internet. Sejam X a proporção mensal de vendas de eletrodomésticos sobre o total de vendas das lojas físicas, e Y a proporção mensal correspondente ao comércio virtual. Suponha que a densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x,y) = (2 - x - y) \underset{(0,1)}{I}(x) \underset{(0,1)}{I}(y) .$$

(a) Mostre que de fato f é uma densidade conjunta.

(b) São X e Y independentes?

(c) Obtenha a probabilidade de que em um mês a venda de eletrodomésticos represente mais de 80% das vendas das lojas físicas.

(d) Calcule a probabilidade de que a proporção mensal de eletrodomésticos vendidos pela internet seja maior do que aquela das lojas físicas.

(e) Dado que os eletrodomésticos representaram mais de 60% das vendas das lojas físicas em um mês, qual a probabilidade de que o mesmo tenha acontecido com a loja virtual?

(f) Encontre a probabilidade de que em um mês as proporções X e Y não difiram por mais de 50%.

6. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x,y) = 2(x + y - 2xy) \underset{(0,1)}{I}(x) \underset{(0,1)}{I}(y) .$$

(a) Determine as distribuições marginais de X e Y e responda se são independentes.

(b) Calcule $\mathbb{P}(|X - Y| \geq 1/2)$.

7. A função de distribuição conjunta de um vetor aleatório (X,Y) é dada por:

8. $$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ou } y < 0 \text{ ou } x \geq y; \\ \frac{2x^2y^2 - x^4}{16}, & 0 \leq x < y, 0 \leq y < 2; \\ \frac{8x^2 - x^4}{16}, & 0 \leq x < 2, y \geq 2; \\ 1, & x \geq 2, y \geq 2, x < y. \end{cases}$$

(a) Obtenha as funções de distribuição marginais de X e Y.

(b) Determine a densidade conjunta do vetor (X,Y).

(c) Determine as densidades marginais de X e Y.

9. Considere a função:

$$f_{X|Y}(x) = \begin{cases} \frac{y^x e^{-y}}{x!}, & x = 0, 1, \ldots \text{ e } y > 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Demostre que, para cada y fixado, $f(.|y)$ é uma função de probabilidade.

(b) Determine as distribuições marginais de X e Y.

(c) Determine a conjunta do vetor (X,Y).

10. A densidade conjunta de um vetor aleatório (X,Y) é dada por:

$$f(x,y) = \frac{1}{2} xy \underset{(0,2)}{I}(x) \underset{(0,x)}{I}(y) \, .$$

(a) Verifique que f satisfaz as propriedades de uma função densidade conjunta.

(b) Obtenha as densidades marginais de X e Y. Essas va's são independentes?

11. Seja $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ e $Y|X = x \sim B(n,x)$, ou seja, a distribuição condicional de Y dada X é binomial, com parâmetros n e x.

(a) Determine a distribuição marginal de Y.

(b) Determine a esperança e variância de Y.

12. Seja (X,Y) um vetor aleatório com densidade conjunta:

$$f(x,y) = 8xy \underset{(0,y)}{I}(x) \underset{(0,1)}{I}(y) \, .$$

(a) Obtenha as distribuições marginais.

(b) Determine $\mathbb{P}(X > 1/2 | Y < 3/4)$.

13. Seja (X,Y) um vetor aleatório com densidade conjunta

$$f(x,y) = \frac{2}{\lambda^2} e^{-(x+y)/\lambda} \underset{(0,y)}{I}(x) \underset{(0,\infty)}{I}(y) \, .$$

Determine a covariância entre X e Y.

14. Seja (X,Y) um vetor aleatório com valores em $(0,1) \times (0,1)$ tal que $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ e $Y|X \sim \mathcal{U}(1 - X^2, 1)$. Calcule o valor esperado de $W = (1-Y)/X$.

15. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, tais que, $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ e $Y \sim \text{Exp}(2\lambda)$. Determine a esperança e variância de $W = X - 2X$. (*Sugestão:* Use a função geradora de momentos de W).

16. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, ambas com distribuição normal padrão. Determine a função geradora de momentos de $W = \frac{1}{2}(X - Y)^2$ e identifique a sua distribuição.

17. Sendo $X_1, X_2 \sim N(0, 1)$ independentes, defina as variáveis $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = X_1^2 + X_2^2$.

    (a) Demostre que a função geradora de momentos conjunta do vetor (Y_1, Y_2) é dada por:

    $$M_{\mathbf{Y}}(t_1, t_2) = \frac{e^{t_1^2/(1-2t_2)}}{(1-2t_2)}, -\infty < t_1 < \infty \text{ e } -\infty < t_2 < 1/2.$$

    (b) Determine o coeficiente de correlação entre Y_1 e Y_2.

18. Determine a função geradora de momentos de $W = XY$, considerando X e Y variáveis aleatórias independentes cada uma com distribuição normal padrão.

19. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço de probabilidade. Demostre que:

    (a)
    $$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \text{Cov}(X_i, Y_j).$$

    (b)
    $$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum \text{Cov}(X_i, X_j).$$

20. Sejam X, Y variáveis aleatórias contínuas definidas em um mesmo espaço de probabilidade. Demostre que:

    (a) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y)]$. (*Sugestão:* use a definição de esperança condicional).

    (b) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}(X|Y)]$. (*Sugestão:* use o resultado (a)).

    (c) $\text{Var}(X) = \text{Var}(\mathbb{E}(X|Y)) + \mathbb{E}(\text{Var}(X|Y))$. (*Sugestão:* use propriedades da variância e lembre-se de que a esperança condicional é uma v.a).

    (d) $\text{Cov}(Y, \mathbb{E}(X|Y)) = \text{Cov}(Y, X)$. (*Sugestão:* use a definição de covariância e o resultado (b)).

21. Dizemos que um vetor aleatório (X, Y) possui distribuição normal bivariada se a sua f.d.p conjunta é dada por:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \times$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho\frac{\left(x-\mu_X\right)\left(y-\mu_Y\right)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right\} \underset{\mathbb{R}^2}{I}(x,y)$$

em que $\mu_X, \mu_Y \in \mathbb{R}, \sigma_X, \sigma_Y > 0$ e $\rho \in (-1, 1)$ são constantes.

(a) Demostre que X e Y possuem distribuições marginais $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

(b) Demostre que as distribuições condicionais são dadas por $X|Y = y \sim N(\mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y), \sigma_X^2(1-\rho^2))$ e $Y|X = x \sim N(\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X), \sigma_Y^2(1-\rho^2))$.

(c) Demostre que o coeficiente de correlação entre X e Y é igual a ρ.

(d) Verifique que X e Y são independentes se $\rho = 0$.

22. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a contínuas e independentes, cada uma com f.d.p f_i para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

(a) Determine a f.d.p de $U = \text{Máx}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e $V = \text{Mín}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

(b) Determine as densidades de U e V, mas agora assumindo $f_i = f$ para todo i. Ou seja, assumindo que $X_1, \ldots, X_n$ são independentes e identicamente distribuídas.

Gabarito

(1) (b) $f_X(x) = \frac{6}{7}x(2x+1), 0 < x < 1, f_Y(y) = \frac{1}{14}(3y+4), 0 < y < 2$ (c) 15/56 (d) 13/20

(2) $c = 6, X \sim \text{Beta}(1,3)$ e $Y \sim \text{Beta}(3,1)$

(3) $c = \frac{5}{16\pi}, X \sim N(0,1)$ e $Y \sim N(0,4)$

(4) (a) 1/33750 (b) Não (c) $P(Y \leq 25) = 125/144$

(5) (b) Não (c) $P(X > 0,8) = 0,12$
(d) $P(X < Y) = 0,5$ (e) $P(Y > 0,6 \mid X > 0,6) = 0,2286$ (f) $P(|X - Y| \leq 0,5) = 0,75$

(6) (a) $X, Y \sim U[0,1]$, não são independentes. (b) 17/48

(12) (a) $f(x) = 4x(1-x^2) \underset{(0,1)}{I}(x)$, $f(y) = 4y^3 \underset{(0,1)}{I}(y)$. (b) 25/81.

(13) $\lambda^2/4$.

(14) $\mathbb{E}(W) = 1/4$.

(15) $\mathbb{E}(W) = 0$ e $\text{Var}(W) = 2/\lambda^2$.

(18) $M_W(t) = (\frac{1}{1-t^2})^{1/2}, -1 < t < 1$.