ANEXO.4. UMA PROVA DA REGRA DA CADEIA

Vejamos a demonstração do quadro 01 da Regra da Cadeia. As demonstrações dos demais quadros seguem, exatamente, os mesmos argumentos.

REGRA DA CADEIA. QUADRO 01. Sejam $u=f(x,y)$ diferenciável e $x=g(r,s)$ e $y=h(r,s)$ tais que existam $\frac{\partial x}{\partial r}$, $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial r}$ e $\frac{\partial y}{\partial s}$. Então:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}; \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}; \end{cases}$$

Prova: como $u=f(x,y)$ é diferenciável, temos:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y;\ \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_i(\Delta x,\Delta y)=0,\ i=1,2;$$

Usando a notação $u=f(x,y)$ e abstraindo (x_0,y_0) em $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, temos:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y;\ \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_i(\Delta x,\Delta y) = 0, \text{ para } i=1 \text{ e } 2;$$

Agora, para deduzirmos a 1ª equação do Quadro, dividamos os dois membros da igualdade acima, por Δr, obtendo: $\frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta r} + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta r} + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta r}$, com $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_i(\Delta x,\Delta y) = 0$; para $i=1$ e 2;

Ocorre que: $\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial r}$; $\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta r} = \frac{\partial x}{\partial r}$; e $\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta r} = \frac{\partial y}{\partial r}$;

E como existem $\frac{\partial x}{\partial r}$ e $\frac{\partial y}{\partial r}$, cada uma das funções $x=g(r,s)$ e $y=h(r,s)$, quando consideradas como função de uma única variável r, é contínua com relação à esta única variável. Logo: $\lim_{\Delta r\to 0}\Delta x = \lim_{\Delta r\to 0}[x(r+\Delta r,s) - x(r,s)] = 0$; bem como: $\lim_{\Delta r\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta r\to 0}[y(r+\Delta r,s) - y(r,s)] = 0$; Ou seja quando $\Delta r\to 0$ temos: $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$;

Este fato acarreta que: $\lim_{\Delta r\to 0}\varepsilon_i(\Delta x,\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_i(\Delta x,\Delta y) = 0$, para $i=1$ e 2;

Então,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial x}\underbrace{\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta r}}_{=\frac{\partial x}{\partial r}} + \frac{\partial u}{\partial y}\underbrace{\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta r}}_{=\frac{\partial y}{\partial r}} + \underbrace{\lim_{\Delta r\to 0}\left[\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta r}\right]}_{=0\cdot\frac{\partial x}{\partial r}=0} + \underbrace{\lim_{\Delta r\to 0}\left[\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta r}\right]}_{=0\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=0}$$

Portanto, $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$;

A segunda equação é obtida de forma exatamente igual, apenas dividindo os dois membros da igualdade:

$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y$, $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_i(\Delta x,\Delta y)=0$, $i=1$ e 2, por Δs;