Gabarito Lista 2 MAE0219

Gustavo Soares Gomes

May 10, 2022

10)

Vamos listar os eventos e seus respectivos valores para as variáveis X e Y.

Evento	X	Y	P(E)
CCC	3	1	1/8
CCR	2	2	1/8
CRC	2	3	1/8
CRR	1	2	1/8
RCR	1	3	1/8
RCC	2	2	1/8
RRC	1	2	1/8
RRR	0	1	1/8

A distribuiçao do evento X é dada por:

X	**P(X=x)**
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

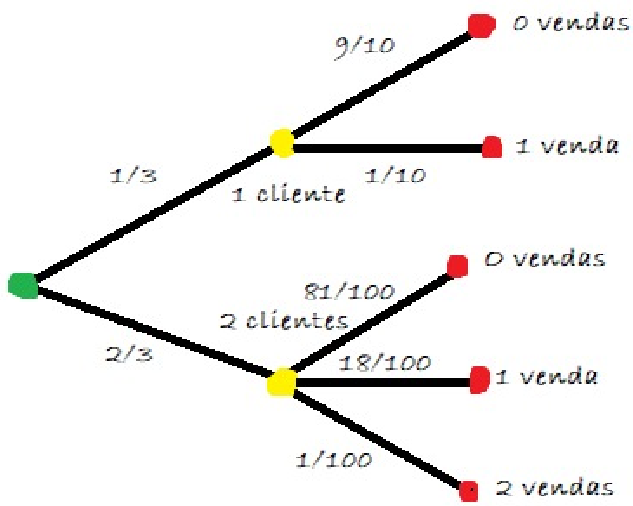
$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1.5$$
$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = 3$$
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3^2 - 1.5^2 = 0.75$$

Y	P(Y = y)
1	2/8
2	4/8
3	2/8

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{2}{8} + 2 \cdot \frac{4}{8} + 3 \cdot \frac{2}{8} = 2$$
$$E(Y^2) = 1^2 \cdot \frac{2}{8} + 2^2 \cdot \frac{4}{8} + 3^2 \cdot \frac{2}{8} = 4.5$$
$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 4.5 - 2^2 = 0.5$$

13)

Vamos fazer um diagrama de árvore para a variável Z número de vendas.



Encontrando a distribuição de Z também encontraremos a distribuição da va Y, já que $Z = 0 \Leftrightarrow Y = 0$,$Z = 1 \Leftrightarrow Y = 50.000$,$Z = 2 \Leftrightarrow Y = 100.000$

$$P(Y = 0) = P(Z = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{81}{100} = \frac{126}{150}$$
$$P(Y = 50.000) = P(Z = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{3} \cdot \frac{18}{100} = \frac{26}{150}$$
$$P(Y = 100.000) = P(Z = 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{150}$$

Logo, $E(Y) = 0 \cdot \frac{126}{150} + 1 \cdot \frac{26}{150} + 2 \cdot \frac{1}{100} = 8.333,33$ reais.

17a)

$E(T) = 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.3 + 5 \cdot 0.2 + 6 \cdot 0.2 + 7 \cdot 0.1 = 4.6$

17b)

Podemos expressar a variável G como função da dos valores t assumidos pela variável T:

$$G(t) = \begin{cases} 2 + 0.5 \cdot (6 - t), & 2 \leq t \leq 6 \\ 2, & \text{t = 7} \end{cases}$$

A tabela de dist de probabilidade de G a partir de T fica:

t	2	3	4	5	6	7
g	4	3.5	3	2.5	2	2
P(G = g)	0.1	0.1	0.3	0.2	0.2	0.1

Agrupando valores comuns de G:

g	4	3.5	3	2.5	2
P(G = g)	0.1	0.1	0.3	0.2	0.3

$$E(G) = 4 \cdot 0.1 + 3.5 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.3 + 2.5 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.3 = 2.75$$

$$E(G^2) = 4^2 \cdot 0.1 + 3.5^2 \cdot 0.1 + 3^2 \cdot 0.3 + 2.5^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.3 = 7.975$$

$$Var(G) = 7.975 - 2.75^2 = 0.4125$$

23a)

Podemos utilizar aqui uma distribuição de Poisson com parametro $\lambda = 1$, sendo N o número de cortes.

$$P(N = 0) = \frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} \approx 0.368$$

23b)

$P(N \leq 2) = P(N = 0) + P(N = 1) + P(N = 2) = \frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} + \frac{e^{-1} \cdot 1^1}{1!} + \frac{e^{-1} \cdot 1^2}{2!} \approx 0.92$

23c)

$$P(N \geq 2) = 1 - P(N \leq 1) = 1 - (P(N = 0) + P(N = 1)) = 1 - \left(\frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} + \frac{e^{-1} \cdot 1^1}{1!}\right) \approx 0.264$$

29)

Seja n o número de flores no estoque. Para $n \geq 3$ temos a seguinte distribuição do lucro L com base no valor da variável X.

x	0	1	2	3
L	$-0.5n$	$1.5 - 0.5n$	$3 - 0.5n$	$4.5 - 0.5n$
P(L = l)	0.1	0.4	0.3	0.2

$$E(L) = (-0.5n) \cdot 0.1 + (1.5 - 0.5n) \cdot 0.4 + ... + (4.5 - 0.5n) \cdot 0.2 = -0.5n + 2.4$$

Neste caso, não é dificil ver que:

$$max(E(L)) = -0.5 \cdot 3 + 2.4 = 0.9$$

Agora vamos para o caso em que n pode ser 1 ou 2. Aqui, vou supor que o cliente que chega na loja pedindo uma quantidade além do estoque leva o total do estoque (exemplo: no caso n = 2, se um cliente pedir 3 flores, levará apenas 2 flores).

$n = 1:$

x	0	1
L	-0.5	1.0
P(L = l)	0.1	0.9

$$E(L) = -0.5 \cdot 0.1 + 1.0 \cdot 0.9 = 0.85$$

$n = 2:$

x	0	1	2
L	-1.0	0.5	2.0
P(L = l)	0.1	0.4	0.5

$$E(L) = -1 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.5 = 1.10$$

Portanto, é mais vantajoso o vendedor ter 2 flores apenas no estoque da loja.

32)

Podemos usar uma Binomial com = 18 e $p = 0.05$ para modelar o problema, onde X representa o total de peças defeituosas.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= \binom{18}{0} \cdot 0.05^0 \cdot 0.95^{18} + \binom{18}{1} \cdot 0.05^1 \cdot 0.95^{17} + \binom{18}{2} \cdot 0.05^2 \cdot 0.95^{16} = 0.9418$$

34a)

Seja N o número de petroleiros que chegam no porto em um dia.

$$P(N > 3) = 1 - P(N \leq 3) = 1 - P(N = 0) - P(N = 1) - P(N = 2) =$$

$$1 - \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} - \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} - \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} - \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} \approx 0.143$$

34b)

A probabilidade de atender todos os N navios é $P(N \leq x_0)$, sendo x_0 o número máximo de petroleiros que a instalação pode suportar. Logo, queremos um x_0 tal que $P(N \leq x_0) \leq 0.95$

Do item a), vem que $P(N \leq 3) = 0.857$, portando vamos testar x_0, maiores:

$$P(N \leq 4) = P(N \leq 3) + P(N = 4) = 0.857 + \frac{2^4 \cdot e^{-2}}{4!} = 0.947$$

$$P(N \leq 5) = P(N \leq 4) + P(N = 5) = 0.497 + \frac{2^5 \cdot e^{-2}}{5!} = 0.983$$

Logo, precisamos colocar 2 instalações a mais para atingir esse objetivo.

34c)

Na distribuição de Poisson, $E(N) = \lambda = 2$.

37)

Seja X o número de parafusos numa amostra de 20 parafusos. Modelando o problema por uma distribuição Binomial, temos que $n = 20$ e $p = \frac{10}{100} = 0.1$

$$P(N = 0) = \binom{20}{0} \cdot (0.1)^0 \cdot (0.9)^{20} = 0.1216$$

$$P(N=1)+P(N=2)=\binom{20}{1}\cdot(0.1)^1\cdot(0.9)^{19}+\binom{20}{2}\cdot(0.1)^2\cdot(0.9)^{18}=0.5554$$

$$P(N\geq 3)=1-(P(N=0)+P(N=1)+P(N=2))$$
$$=1-(0.1216+0.5554)=0.3230$$

Seja V a variável que descreve o valor de venda do produto com base na proposta do comprador. Considere a tabela da distribuição de probabilidade de V abaixo:

V	20	10	8
P(V = v)	0.1216	0.5554	0.3230

$$E(V)=20\cdot 0.1216+10\cdot 0.5554+8\cdot 0.3230=10.57$$

Ou seja, em média, o valor da mercadoria com a proposta é menor do que 13.50, então é mais vantajoso o vendedor não aceitar a proposta do comprador.

39)

Seja X o número de válvulas defeituosas na caixa. Novamente podemos utilizar uma Binomial para modelar o problema com $n=10$ e $p=0.2$.

$$P(X=0)=\binom{10}{0}\cdot(0.2)^0\cdot(0.8)^{10}=0.1074$$

$$P(X=1)=\binom{10}{1}\cdot(0.2)^1\cdot(0.8)^9=0.2684$$

$$P(X=2)+P(X=3)=\binom{10}{2}\cdot(0.2)^2\cdot(0.8)^8+\binom{10}{3}\cdot(0.2)^3\cdot(0.8)^7=0.5033$$

$$P(X>3)=1-(P(N=0)+P(N=1)+P(N=2)+P(N=3))=0.1209$$

A tabela de destribuição de probabilidade para a variável P (preço de uma caixa) é:

P	10	8	6	2
P(V = v)	0.1074	0.2684	0.5033	0.1209

$$E(P)=10\cdot 0.1074+8\cdot 0.2684+6\cdot 0.5033+2\cdot 0.1209\approx 6.48$$

44a)

P(X ser par) $=P(X=2)+P(X=4)+...=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+...=\frac{1/4}{1-1/4}=\frac{1}{3}$

44b)

$$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

44c)

$$P(X > 10) = \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{12}} + ... = \frac{\frac{1}{2^{11}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{10}}$$

55c)

Primeiro, obeserve que:

$$P(x > t) = \sum_{i=t}^{\infty} (1-p)^i p = (1-p)^t p + (1-p)^{t+1} p + ... = \frac{(1-p)^t p}{1 - (1-p)} = (1-p)^t$$

Agora trabalhando o lado esquerdo...

$$P(X > s + t | X > s) = \frac{P(X > s + t) \cap (X > s))}{P(X > s)} = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} =$$

$$= \frac{(1-p)^{s+t} p + (1-p)^{s+t+1} p + ...}{(1-p)^s p + (1-p)^{s+1} p + ...} = \frac{p(1-p)^t((1-p)^s + (1-p)^{s+1} + ...)}{p((1-p)^s + (1-p)^{s+1} + ...)}$$

$$= (1-p)^t = P(X > t)$$

Exercicios Adicionais

1)

Seja D o número de dezenas acertadas, vamos calcular a probabilidade de não acertamos nenhuma dezena:

$$P(D = 0) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{45}{7}}{\binom{50}{7}} = 0.454321396$$

Note que também poderíamos ter calculado

$$P(D = 0) = \frac{\binom{7}{0} \cdot \binom{43}{5}}{\binom{50}{5}}$$

Sugestão: Faça as contas e verifique que chegamos na mesma probabilidade. Pelo complementar, a probabilidade de acertarmos pelo menos 1 dezena é 1 −

0.4543 = 0.5457 Para obter o valor de E(D), vamos fazer a tabela de distribuição de probabilidade de D. Mas, antes calculemos as respecttivas probabilidades:

$$P(D=1) = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{45}{6}}{\binom{50}{7}} = 0.407724329, P(D=2) = \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{45}{5}}{\binom{50}{7}} = 0.122317299$$

$$P(D=3) = \frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{45}{3}}{\binom{50}{7}} = 0.001420642, P(D=4) = \frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{45}{3}}{\binom{50}{7}} = 0.000710321$$

$$P(D=5) = \frac{\binom{5}{5}\cdot\binom{45}{2}}{\binom{50}{7}} = 0.000009911$$

$E(D) = 0 \cdot 0.454321396 + 1 \cdot 0.122317299 + ... + 5 \cdot 0.000009911 = 0.6595511692$

2a)

A probabilidade é

$$\frac{\binom{7}{2}\binom{13}{2}}{\binom{20}{4}} \approx 0.3381$$

2b)

Observe que o fato de o cliente ter que tirar no máximo dois cupons de 50 reais não impede de ele tirar mais que 2 cupons de 100 reais, por exemplo, desde que se totalizem 4 cupons está tudo nos conformes. Assim, a probailidade procurada é:

$$\frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{15}{4}+\binom{5}{1}\cdot\binom{15}{3}+\binom{5}{2}\cdot\binom{15}{2}}{\binom{20}{4}} \approx 0.968$$

2c)

Seja C a variável aleatória que representa o número de cupons de prêmio 100 reais obtidos na compra de 4 potes:

$$P(C=0) = \frac{\binom{2}{0}\cdot\binom{18}{4}}{\binom{20}{4}} = 0.6316$$

$$P(C=1) = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{18}{3}}{\binom{20}{4}} = 0.3368$$

$$P(C=2) = \frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{18}{2}}{\binom{20}{4}} = 0.0316$$

$$E(C) = 0 \cdot 0.6316 + 1 \cdot 0.3368 + 2 \cdot 0.0316 = 0.4$$

3)

Cada numero natural entre U e V tem uma probailidade k de ser sorteado. Se a probabilidade de sorteamos um número entre U e 5 inclusive é 0.15 e entre 17 e V inclusive é 0.30, logo, a probailidade de sorteamos um número entre 6 e 16 inclusive é $1 - 0.15 - 0.3 = 0.55$. Temos $16 - 6 + 1 = 11$ números nesse intervalo, então:

$$11k = 0.55 \implies k = 0.05$$

Assim, podemos calcular

$$P(10 < X \leq 13) = P(X = 11) + P(X = 12) + P(X = 13) = 3 \cdot 0.05 = 0.15$$