Gabarito Lista 3 MAE0219

Gustavo Soares Gomes

June 2022

As próximas questões são referentes ao capítulo 8 (Variáveis Aleatórias Multidimensionais) do livro-texto da disciplina.

Questão 2

item a)

Y,X	1	2	3	P(Y)
0	0.1	0.1	0.1	0.3
1	0.2	0	0.3	0.5
2	0	0.1	0.1	0.2
P(X)	0.3	0.2	0.5	1

item b)

$$E(X) = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.5 = 2.2$$
$$E(X^2) = 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.5 = 5.6$$
$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 0.76$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.2 = 0.9$$
$$E(Y^2) = 0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.2 = 1.3$$
$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 0.49$$

item c)

Note que $P(Y = 0, X = 1) = 0.1$ e $P(Y = 0) \cdot P(X = 1) = 0.3 \cdot 0.3 = 0.09$, então $P(Y = 0, X = 1) \neq P(Y = 0) \cdot P(X = 1) \Rightarrow$ X,Y não são independentes.

item d)

$$P(Y=0|X=1) = \frac{P(Y=0,X=1)}{P(Y=0)} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=2|X=3) = \frac{P(Y=2,X=3)}{P(X=3)} = \frac{0.1}{0.5} = \frac{1}{5}$$

item e)

$$P(X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2) = 0.3 + 0.2 = 0.5$$

$$P(X=2, Y \leq 1) = P(X=2, Y=1) + P(X=2, Y=0) = 0.1$$

Questão 3

item a)

Y,X	-1	0	1	P(Y)
-1	1/12	x_{12}	x_{13}	x_{14}
0	x_{21}	x_{22}	x_{23}	1/3
1	1/4	x_{32}	1/4	x_{34}
P(X)	x_{41}	x_{42}	x_{43}	1

Juntando a independência e o fato de $P(Y) = 1$, tiramos que

$$x_{41} \cdot x_{14} = 1/12$$

$$x_{41} \cdot x_{34} = 1/4$$

$$x_{14} + x_{34} = 2/3$$

Somando membro a membro as duas primeiras equações vem que

$$x_{41}(x_{14} + x_{34}) = 4/12 \Rightarrow x_{41} \cdot 2/3 = 4/12 \Rightarrow x_{41} = 1/2$$

Da primeira equação vem que $x_{14} = 1/6$, logo $x_{34} = 2/3 - 1/6 = 1/2$

Veja que da tabela

$$x_{41} = 1/12 + x_{21} + 1/4 \Rightarrow x_{21} = 1/2 - 1/12 - 1/4 = 1/6$$

Por independência,

$$x_{43} \cdot x_{34} = 1/4 \Rightarrow x_{43} \cdot 1/2 = 1/4 \Rightarrow x_{43} = 1/2$$

A última linha nos diz que

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1 \Rightarrow 1/2 + x_{42} + 1/2 = 1 \Rightarrow x_{42} = 0$$

Note que

$$x_{i2} = x_{42} \cdot x_{i4}, 1 \leq i \leq 3 \Rightarrow x_{i2} = 0, 1 \leq i \leq 3$$

A somas parciais da primeira e sgunda linha nos diz que

$$1/12 + 0 + x_{13} = 1/6 \Rightarrow x_{13} = 1/12$$

$$1/6 + 0 + x_{23} = 1/3 \Rightarrow x_{23} = 1/6$$

Portanto, a tabela ficará:

Y,X	-1	0	1	P(Y)
-1	1/12	0	1/12	1/6
0	1/6	0	1/6	1/3
1	1/4	0	1/4	1/2
P(X)	1/2	0	1/2	1

item b)

$$E(X) = -1 \cdot 1/2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1/2 = 0$$
$$E(X^2) = (-1)^2 \cdot 1/2 + 0^2 \cdot 0 + 1^2 \cdot 1/2 = 1$$
$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 1$$

$$E(Y) = -1 \cdot 1/6 + 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/2 = 1/3$$
$$E(Y^2) = (-1)^2 \cdot 1/6 + 0^2 \cdot 1/3 + 1^2 \cdot 1/2 = 2/3$$
$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 5/9$$

item c)

$$P(X = -1|Y = 0) = \frac{P(X = -1, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{1/6}{1/3} = 1/2$$
$$P(X = 0|Y = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{0}{1/3} = 0$$
$$P(X = 1|Y = 0) = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{1/6}{1/3} = 1/2$$

$$P(Y = -1|X = 1) = \frac{P(X = 1, Y = -1)}{P(X = 1)} = \frac{1/12}{1/2} = 1/6$$
$$P(Y = 0|X = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(X = 1)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$
$$P(Y = 1|X = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(X = 1)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$$

Questão 4

(X,Y)	P(X,Y)	X+Y	XY
(1,0)	0.1	1	0
(1,1)	0.2	2	1
(1,2)	0	3	2
(2,0)	0.1	2	0
(2,1)	0	3	2
(2,2)	0.1	4	4
(3,0)	0.1	3	0
(3,1)	0.3	4	3
(3,2)	0.1	5	6

Portanto, agrupando os valores em comum, as distribuições de X+Y e XY ficarão:

X+Y	P(X+Y)
1	0.1
2	0.3
3	0.1
4	0.4
5	0.1

XY	P(XY)
0	0.3
1	0.2
2	0
3	0.3
4	0.1
6	0.1

$$E(X+Y) = 0.1 \cdot 1 + 0.3 \cdot 2 + ... + 0.1 \cdot 5 = 3.1$$
$$E((X+Y)^2) = 0.1^2 \cdot 1 + 0.3^2 \cdot 2 + ... + 0.1^2 \cdot 5 = 11,1$$
$$Var(X+Y) = E((X+Y)^2) - E^2(X+Y) = 1,49$$

Obs: Note que $E(X) + E(Y) = 2.2 + 0.9 = 3.1 = E(X+Y)$

$$E(XY) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.2 + ... + 0.1 \cdot 6 = 2.1$$
$$E((XY)^2) = 0^2 \cdot 0.3 + ... + 0.1^2 \cdot 6 = 8.1$$
$$Var(XY) = E((XY)^2) - E^2(XY) = 3.69$$

Questão 5

item a)

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0 + 1/3 = 1/3$$

Como X,Y são independentes segue que

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 1 + 5/9 = 14/9$$

item b)

Pelas propriedades da função esperança,

$$E(Z) = E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) = 10 \Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot 1/3 = 10 \Rightarrow b = 30$$

Como X,Y são independentes e com propriedades da variância vem que

$$Var(Z) = Var(aX+bY) = Var(aX)+Var(bY) = a^2Var(X)+b^2Var(Y) = 600$$

$$\Rightarrow a^2 \cdot 1 + 900 \cdot 5/9 = 600 \Rightarrow a = \pm 10$$

Questão 6

item a)

Y,X	1	2	3	4	P(Y)
1	1/16	2/16	2/16	2/16	7/16
2	0	1/16	2/16	2/16	5/16
3	0	0	1/16	2/16	3/16
4	0	0	0	1/16	1/16
P(X)	1/16	3/16	5/16	7/16	1

item b)

$$E(X) = 1 \cdot 1/16 + 2 \cdot 3/16 + ... + 4 \cdot 1/16 = 50/16$$
$$E(X^2) = 1^2 \cdot 1/16 + 2^2 \cdot 3/16 + ... + 4^2 \cdot 1/16 = 170/16$$
$$Var(X) = 170/16 - (50/16)^2 = 0.8594$$

$$E(Y) = 1 \cdot 7/16 + 2 \cdot 5/16 + ... + 4 \cdot 1/16 = 30/16$$
$$E(Y^2) = 1^2 \cdot 7/16 + 2^2 \cdot 5/16 + ... + 4^2 \cdot 1/16 = 70/16$$
$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 0.8594$$

Para construir a tabela de distribuição de Z observe que os pares com mesma soma estão na diagonal na tabela acima:

Y,X	1	2	3	4	P(Y)
1	1/16	2/16	2/16	2/16	7/16
2	0	1/16	2/16	2/16	5/16
3	0	0	1/16	2/16	3/16
4	0	0	0	1/16	1/16
P(X)	1/16	3/16	5/16	7/16	1

Z	P(Z)
2	1/16
3	2/16
4	3/16
5	4/16
6	3/16
7	2/16
8	1/16

$$E(Z) = 2 \cdot 1/16 + ... + 8 \cdot 1/16 = 5$$

$$E(Z^2) = 2^2 \cdot 1/16 + ... + 8^2 \cdot 1/16 = 55/2$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) = 2.5$$

Questão 8

item a)

Trincas possiveis	P(Z)	X	Y
(0,0,0)	$C_3^3/C_5^3 = 1/10$	0	0
(0,0,1)	$C_2^3 \cdot C_1^1/C_3^5 = 3/10$	1	1
(0,0,-1)	$C_2^3 \cdot C_1^1/C_3^5 = 3/10$	-1	0
(0,1,-1)	$C_1^3 \cdot C_1^1/C_3^5 = 3/10$	0	1

A distribuição conjunta entre X e Y é:

Y,X	-1	0	1	P(Y)
0	3/10	1/10	0	4/10
1	0	3/10	3/10	6/10
P(X)	3/10	4/10	3/10	1

item b)

$$E(X) = -1 \cdot 3/10 + 0 \cdot 4/10 + 1 \cdot 3/10 = 0$$

$$E(X^2) = (-1)^2 \cdot 3/10 + 0^2 \cdot 4/10 + 1^2 \cdot 3/10 = 6/10$$

$$Var(X) = 6/10 - 0^2 = 6/10$$

item c)

Olhando as somas comuns da tebela anterior, podemos construir a tabela de $Z = X + Y$:

Z	P(Z)
-1	3/10
0	1/10
1	3/10
2	3/10

$$E(Z) = -1 \cdot 3/10 + ... + 2 \cdot 3/10 = 6/10$$
$$E(Z^2) = (-1)^2 \cdot 3/10 + ... + 2^2 \cdot 3/10 = 18/10$$
$$Var(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) = 144/100$$

Questão 11

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 2.1 - 2.2 \cdot 0.9 = 0.12$$
$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{0.12}{\sqrt{0.76}\sqrt{0.49}} \approx 0.197$$

Questão 13

Vamos completar a tabela dada com as distribuições marginais e fazer outra tabela com a distribuição de XY a fim de calcular $E(XY), E(X), E(Y)$.

Y,X	-1	0	1	P(Y)
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
P(X)	1/4	1/2	1/4	1

$$E(X) = -1 \cdot 1/4 + 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/4 = 0$$
$$E(Y) = -1 \cdot 1/4 + 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/4 = 0$$

X	P(XY)
-1	0
0	1
1	0

$$E(XY) = -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

Logo,
$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X) - E(Y) = 0$$

Para observar que X,Y não são independentes, veja que

$$P(X = -1, Y = -1) \neq P(X = -1) \cdot P(Y = -1)$$

Y,X	-1	0	1	P(Y)
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
P(X)	1/4	1/2	1/4	1

Questão 31

item a & b)

Y,X	5	10	15	P(Y)
5	1/10	2/10	1/10	4/10
10	2/10	3/10	1/10	6/10
P(X)	3/10	2/10	5/10	1

item c)

Não, basta ver que $P(X=5, Y=5) \neq P(X=5) \cdot P(Y=5)$

Y,X	5	10	15	P(Y)
5	1/10	2/10	1/10	4/10
10	2/10	3/10	1/10	6/10
P(X)	3/10	5/10	2/10	1

item d)

$$E(X) = 5 \cdot 3/10 + 10 \cdot 5/10 + 15 \cdot 2/10 = 9.5$$
$$E(X^2) = 5^2 \cdot 3/10 + 10^2 \cdot 5/10 + 15^2 \cdot 2/10 = 102.5$$
$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 12.25$$

$$E(Y) = 5 \cdot 4/10 + 10 \cdot 6/10 = 8$$
$$E(Y^2) = 5^2 \cdot 4/10 + 10^2 \cdot 6/10 = 70$$
$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 6$$

Vamos contruir a tabela de distribuição de XY a fim de obter $E(XY)$ para calcular a $cov(X,Y)$:

XY	P(XY)
25	1/10
50	4/10
75	1/10
100	3/10
150	1/10

$$E(XY) = 25 \cdot 1/10 + ... + 150 \cdot 1/10 = 75$$

Então,

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 75 - 9.5 \cdot 8 = -1$$

item e)

Z = X+Y	P(Z)
10	1/10
15	4/10
20	4/10
25	1/10

$$E(Z) = 10 \cdot 1/10 + 15 \cdot 4/10 + 20 \cdot 4/10 + 25 \cdot 1/10 = 17.5$$

$$E(Z^2) = 10^2 \cdot 1/10 + ... + 25^2 \cdot 1/10 = 322.5$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) = 16.25$$

item f)

Pela tabela acima, essa probabilidade é $4/10 + 1/10 = 0.5$.

As próximas questões são referentes ao capítulo 7 (Variáveis Aleatórias Contínuas) do livro-texto da disciplina.

Questão 2

item a)

Primeiramente, $C > 0$ para garantir que a fdp seja uma função não negativa neste intervalo. Além disso,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

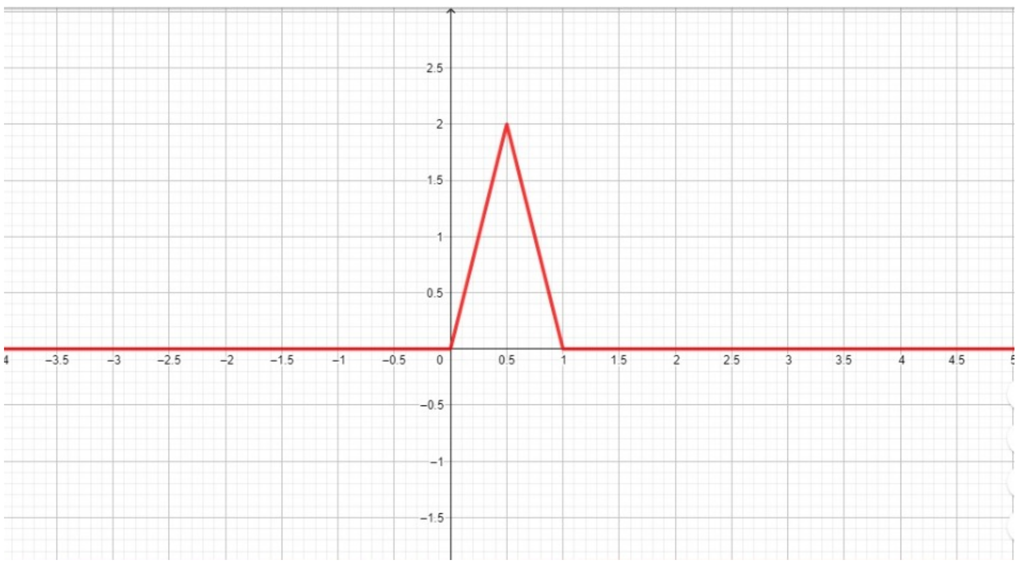
$$\int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1/2} Cxdx + \int_{1/2}^{1} C(1-x)dx + \int_{1}^{+\infty} 0dx = 1$$

$$C\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} + C\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1} = 1$$

$$\frac{1}{8}C + \frac{1}{8}C = 1 \Rightarrow C = 4$$

item b)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 4x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 4 - 4x, & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$



item c)

$$P(X \leq 1/2) = \int_{-\infty}^{1/2} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1/2} 4xdx = [2x^2]_0^{1/2} = 1/2$$

$$P(X > 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1/2$$

$$P(1/4 \leq X \leq 3/4) = \int_{1/4}^{3/4} f(x)dx = \int_{1/4}^{1/2} 4xdx + \int_{1/2}^{3/4} (4-4x)dx = [2x^2]_{1/4}^{1/2} + [4x-2x^2]_{1/2}^{3/4} = 3/4$$

Questão 8

item a)

De acordo com o enunciado $-1/2 < b/2 < 0$

$$P(X < b/2) = \int_{-\infty}^{b/2} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^{b/2} 3x^2dx + \int_{b/2}^{+\infty} 0dx = \frac{b^3+8}{8}$$

$$P(b < X < b/2) = \int_{b}^{b/2} f(x) = \int_{b}^{b/2} 3x^2dx = \frac{-7b^3}{8}$$

$$P(X > b|X < b/2) = \frac{\frac{-7b^3}{8}}{\frac{b^3+8}{8}} = -\frac{7b^3}{b^3+8}$$

Observação : essa probabilidade não possui valor negativo,verifique testando para um $-1 < b < 0$ qualquer.

item b)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} x \cdot 0dx + \int_{-1}^{0} x \cdot 3x^2dx + \int_{0}^{+\infty} x \cdot 0dx = -3/4$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} x^2 \cdot 0dx + \int_{-1}^{0} x^2 \cdot 3x^2dx + \int_{0}^{+\infty} x^2 \cdot 0dx = 3/5$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 3/80$$

Questão 10

item a)

$$P(X > 1.5) = \int_{1.5}^{3} -x/3 + 1dx + \int_{3}^{+\infty} 0dx = [-x^2/6 + x]_{1.5}^{3} = 0.375$$

item b)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_{0}^{1} x \cdot \frac{2x}{3}dx + \int_{1}^{3} x \cdot \left(\frac{-x}{3} + 1\right) dx + \int_{3}^{+\infty} x \cdot 0dx = \frac{4}{3}$$

Portanto , em um dia são esperados vender 400/3 kg. Então, em um mês o supermercado espera vender $(400/3) \cdot 30 = 4000$kg.

item c)

Queremos achar m tal que $P(X \leq m) \geq 0.95$. Note do item a, que $P(X \leq 1.5) = 1 - 0.375 = 0.625$, então com certeza $m > 1.5$, então $1.5 < m < 3$.

$$P(X \leq m) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} \frac{2x}{3}dx + \int_{1}^{m} \left(\frac{-x}{3} + 1\right) dx \geq 0.95$$

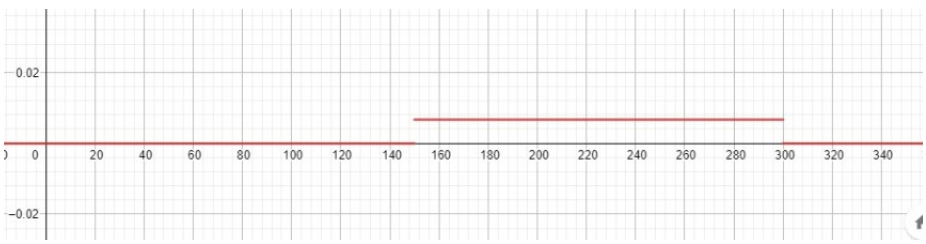
$$2.45 \approx \frac{30-\sqrt{30}}{10} \leq m \leq \frac{30+\sqrt{30}}{10} \approx 3.55$$

Portanto, 245 kg terão que ser deixados a disposição todos os dias para que não falte arroz em pelo menos 95% dos dias.

Questão 13

item a)

$$f(T) = \begin{cases} \frac{1}{150}, & \text{se} \quad 150 \leq T \leq 300, \\ 0, & \quad cc. \end{cases}$$



item b)

Os possíveis valores para a variável lucro L são $C_2 - C_1$ e $C_3 - C_1$.

$$E(L) = (C_2 - C_1) \cdot P(L = C_2 - C_1) + (C_3 - C_1) \cdot P(L = C_3 - C_1)$$

$$E(L) = (C_2 - C_1) \cdot P(T \leq 200) + (C_3 - C_1) \cdot P(T \geq 200)$$

$$E(L) = (C_2 - C_1) \cdot \frac{50}{150} + (C_3 - C_1) \cdot \frac{100}{150}$$

$$E(L) = \frac{C_2}{3} + \frac{2C_3}{3} - C_1$$

Questão 16

Seja $Z \sim N(0,1)$ a normal padrão, cuja tabela de probabilidades se encontra no final do gabarito.

item a)

$$P(X \leq \mu + 2\sigma) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq 2\right) = P(Z \leq 2) = 0.9772$$

item b)

$P(|X-\mu| \leq \sigma) = P(-\sigma \leq X-\mu \leq \sigma) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 2P(0 \leq Z \leq 1) = 0.6826$

item c)

$$P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = P(-a \leq Z \leq a) = 2P(0 \leq Z \leq a) = 0.99$$
$$\Rightarrow P(0 \leq Z \leq a) = 0.495 \Rightarrow a \approx 2.575$$

item d)

$$P(X > b) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = 0.9$$
$$\frac{b-\mu}{\sigma} = -1.28 \Rightarrow b = \mu - 1.28\sigma$$

Questão 17)

Seja X a va que representa a altua dos alunos dessa escola: $X \sim (170, 25)$ e seja $Z \sim N(0,1)$ a normal padrão, cuja tabela de probabilidades se encontra no final do gabarito.

item a)

$$P(X > 165) = P\left(\frac{X-170}{5} > \frac{165-170}{5}\right) = P(Z > -1) = 0.8413$$

Assim, já que existem 10000 alunos, o número esperado de alunos com altura superior a 1.65 é $0.8413 \cdot 10000 = 8413$

item b)

Precisamos encontrar um a tal que:

$$P(170 - a < X < 170 + a) = 0.75$$
$$P\left(\frac{170-a-170}{5} < \frac{X-170}{5} < \frac{170+a-170}{5}\right) = 0.75$$
$$P\left(\frac{-a}{5} < Z < \frac{a}{5}\right) = 2P\left(0 < Z < \frac{a}{5}\right) = 0.75$$
$$P\left(0 < Z < \frac{a}{5}\right) = 0.375 \Rightarrow a = 5 \cdot 1.15 = 5.75$$

Portanto, o intervalo procurado é $[164.25, 175.75]$

Questão 18

Seja Y a variável que representa as vendas em um determinado mês na empresa: $Y \sim N(500, 50)$ e seja $Z \sim N(0, 1)$ a normal padrão, cuja tabela de probabilidades se encontra no final do gabarito.
A empresa não irá atender todos os pedidos caso $Y > 600$. Então,

$$P(Y > 600) = P\left(\frac{Y - 500}{50} > \frac{600 - 500}{50}\right) = P(Z > 2) = 0.0228$$

Questão 19

Um aparelho será preferido em relação ao outro quando a probabilidade da vida útil deste aparelho ser maior que o período considerado for maior do essa mesma probabilidade para o outro aparelho.

Seja $Z \sim N(0, 1)$ a normal padrão, cuja tabela de probabilidades se encontra no final do gabarito.

$$P(D1 > 45) = P\left(\frac{D1 - 42}{6} > \frac{45 - 42}{6}\right) = P(Z > 0.5) = 0.31$$

$$P(D2 > 45) = P\left(\frac{D2 - 45}{3} > \frac{45 - 45}{3}\right) = P(Z > 0) = 0.5$$

Para o período de 45 horas, é preferível o aparelho D2.

$$P(D1 > 49) = P\left(\frac{D1 - 42}{6} > \frac{49 - 42}{6}\right) = P(Z > 7/6) = 0.121$$

$$P(D2 > 49) = P\left(\frac{D2 - 45}{3} > \frac{49 - 45}{3}\right) = P(Z > 4/3) = 0.092$$

Para o período de 49 horas, é preferível o aparelho D1.

Questão 20

Pelo enunciado, $X \sim (0.6140, (0.0025)^2)$. Seja $Z \sim N(0, 1)$ a normal padrão, cuja tabela de probabilidades se encontra no final do gabarito.

item a)

$$P(0.610 < X < 0.618) = P\left(\frac{0.610 - 0.614}{0.0025} < \frac{X - 0.614}{0.0025} < \frac{0.618 - 0.614}{0.0025}\right)$$
$$= P(-1.6 < Z < 1.6) = 2P(0 < Z, 1.6) = 0.8904 \Rightarrow P(bom) = 0.8904$$

$$P(0.608 < X < 0.610) + P(0.618 < X < 0.620) =$$

$$P(-2.4 < Z < -1.6) + P(1.6 < X < 2.4) = 0.0932 \Rightarrow P(recuperavel) = 0.0932$$

Perceba que a região de X onde o rolamento é defeituoso é complementar a união das duas reigões anteriores, então

$$P(defeituoso) = 1 - P(bom) - P(recuperavel) = 0.0164$$

item b)

$$E(T) = 0.10 \cdot 0.8904 + 0.05 \cdot 0.0932 + (-0.1) \cdot 0.0164 = 0.09206$$

Questão 21

O vendedor terá lucro apenas com os produtos tais que $X > 0.9$, então o lucro esperado é $E(L) = 5 \cdot P(X > 0.9) - 2$.

$$P(X > 0.9) = \int_{0.9}^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \to \infty} (-e^{-x})_{0.9}^{t} = \lim_{t \to \infty} (-e^{-t} + e^{-0.9}) = e^{-0.9}$$

Assim, o valor esperado do lucro é $5 \cdot e^{-0.9} - 2 = 5 \cdot 0.4066 - 2 = 0.033$

Questão 28

item a)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{0}^{2} x \cdot \left(\frac{x}{10} + \frac{1}{10}\right) + \int_{2}^{6} x \cdot \left(\frac{-3x}{40} + \frac{9}{20}\right) dx$$
$$= \left(\frac{8}{30} + \frac{4}{20}\right) + \left(\frac{-648}{120} + \frac{324}{40}\right) - \left(\frac{-24}{120} + \frac{36}{40}\right) = 2.47$$

item b)

$$P(X > 3) = \int_{3}^{6} \left(\frac{-3x}{40} + \frac{9}{20}\right) = \left(\frac{-108}{80} + \frac{54}{20}\right) - \left(\frac{-27}{80} + \frac{27}{20}\right) = 0.338$$

item c)

Vamos calcular

$$P(X > 2) = \int_{2}^{6} \left(\frac{-3x}{40} + \frac{9}{20}\right) dx = 0.6$$

Temos que achar o número m que divide $f(x)$ em áreas iguais. O item b) juntamente com o cálculo feito acima nos indica que $2 < m < 3$, então:

$$\int_{m}^{6} \left(\frac{-3x}{40} + \frac{9}{20}\right) = 0.5 \Rightarrow m = 2.35$$

Questão 36

Seja X a variável de volume, então $X \sim N(1000, 100)$, e seja $Z \sim N(0,1)$ a normal padrão, cuja tabela de probabilidades se encontra no final do gabarito.

item a)

$$P(X < 990) = P\left(\frac{X - 1000}{10} < \frac{990 - 1000}{10}\right) = P(Z < -1) = 0.1587$$

item b)

$$\begin{aligned} P(1000 - 2 \cdot 10 < X < 1000 + 2 \cdot 10) &= P(980 < X < 1020) \\ &= P\left(\frac{980 - 1000}{10} < \frac{X - 1000}{10} < \frac{1020 - 1000}{10}\right) \\ &= P(-2 < Z < 2) = 2P(0 < Z < 2) = 0.9544 \end{aligned}$$

item c)

Ela não se alterará. Tome $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, a probailidade pedida é

$$\begin{aligned} P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) &= P\left(\frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P(-2 < Z < 2) = 2P(0 < Z < 2) = 0.9544 \end{aligned}$$

Questão 38

Seja TDA a variável que representa o tempo de para defeito dos aparelhos tipo A: $TDA \sim N(9, 4)$ e seja TDB a variável que representa o tempo para defeito dos aparelhos tipo B: $TDB \sim N(12, 9)$ e seja $Z \sim N(0,1)$ a normal padrão, cuja tabela de probabilidades se encontra no final do gabarito.

Calculemos a probabilidade de restituição para ambos aparelhos:

$$P(TDA < 6) = P\left(Z < \frac{6 - 9}{2}\right) = P(Z < -1.5) = 0.0668$$

$$P(TDB < 6) = P\left(Z < \frac{6 - 12}{3}\right) = P(Z < -2) = 0.0228$$

Ou seja, no caso A, temos que $6,68\%$ dos aparelhos apresentarão defeito e teremos prejuizo de 3000 e 93.32% gerarão lucro de 1000 reais. Então, o lucro esperado para os aparelhos do tipo A é

$$E(L_A) = 0.9332 \cdot 1000 + 0.0668 \cdot (-3000) = 732.8$$

Analogamente para os aparelhos tipo B, teremos:

$$E(L_B) = 0.9972 \cdot 2000 + 0.0228 \cdot (-8000) = 1812$$

Assim, é melhor incentivar a venda dos produtos B na loja.

Questão 46

item a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} 0dx + \int_{b}^{+\infty} \frac{\alpha}{b}\frac{b^{\alpha+1}}{x^{\alpha+1}}dx = \alpha b^{\alpha} \int_{b}^{+\infty} x^{-(\alpha+1)}dx$$
$$= \alpha b^{\alpha}\left(\frac{-x^{-\alpha}}{\alpha}\right)_{b}^{+\infty} = \alpha b^{\alpha} \cdot \frac{b^{-\alpha}}{\alpha} = 1$$

item b)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{b} x \cdot 0dx + \int_{b}^{+\infty} x \cdot \frac{\alpha}{b}\frac{b^{\alpha+1}}{x^{\alpha+1}}dx$$
$$= \frac{\alpha}{b} \cdot b^{\alpha+1} \int_{b}^{+\infty} x^{-\alpha} = \frac{\alpha}{b} \cdot b^{\alpha+1}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)_{b}^{+\infty} = \frac{\alpha \cdot b}{\alpha - 1}$$

(quando $\alpha > 1$)

item c)

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} x^2 \cdot 0dx + \int_{b}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{\alpha}{b}\frac{b^{\alpha+1}}{x^{\alpha+1}}dx$$
$$= \frac{\alpha}{b} \cdot b^{\alpha+1} \int_{b}^{+\infty} x^{-\alpha+1}dx = \frac{\alpha}{b} \cdot b^{\alpha+1} \cdot \left(\frac{x^{-\alpha+2}}{-\alpha+2}\right)_{b}^{+\infty}$$
$$= \frac{\alpha}{b} \cdot b^{\alpha+1} \cdot -\left(\frac{b^{-\alpha+2}}{-\alpha+2}\right) = \frac{\alpha \cdot b^2}{\alpha - 2}$$

(quando $\alpha > 2$)

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\alpha \cdot b^2}{\alpha - 2} - \frac{\alpha^2 \cdot b^2}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha \cdot b^2 \cdot (\alpha-1)^2 - \alpha^2 \cdot b^2 \cdot (\alpha - 2)}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha-2)}$$
$$= \frac{\alpha b^2}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha-2)}$$