Gabarito P1 MAE0219

Gustavo Soares Gomes

May 2022

Questão 1

O número X de pessoas vivas daqui a 30 anos segue uma disitribuição binomial: $X \sim Bin(6, \frac{2}{3})$.

a)

$P(X = 2) = \binom{6}{2} \cdot (\frac{2}{3})^2 \cdot (\frac{1}{3})^4 = \frac{20}{243} \approx 0.0823$

b)

$$P(X = 0) = \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$$

$$P(X = 1) = \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{12}{729}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \frac{13}{729} = \frac{716}{729} \approx 0.9822$$

c)

$$E(X) = np = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$$

$$Var(X) = np(1 - p) = 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Questão 2

Eventos A e B mutuamente exclusivos tem intersecção nula, enquanto que independentes tem intersecção dada pelo produto de suas probabilidades.

a)

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

Substituindo os dados do enunciado,

$$0.68 = p + 3p \Rightarrow p = \frac{0.68}{4} = 0.17$$

b)

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$
$$\Rightarrow 0.68 = p + 3p - 3p^2 \Rightarrow -3p^2 + 4p - 0.68 = 0$$
$$\Rightarrow p = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-3) \cdot (-0.68)}}{2 \cdot (-3)}$$
$$\Rightarrow p = \frac{-4 \pm 2.8}{-6}$$
$$\Rightarrow p_1 = 0.2, p_2 = 1.1334$$

Obtemos dois valores para p, contudo $0 < p < 1$, logo:

$$p = 0.2$$

Questão 3

Seja P(D) a probabilidade de um contrato ser futuro em dólares e P(A),P(B), P(C) as probabilidades de um contrato escolhido ser das empresas A,B e C respectivamente. O enunciado nos indica que

$$P(A) = 0.2, P(B) = 0.5, P(C) = 0.3$$

$$P(D|A) = 0.2, P(D|B) = 0.05, P(D|C) = 0.02$$

a)

Vamos encontrar $P(D)$:

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)$$
$$= 0.2 \cdot 0.2 + 0.05 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.3 = 0.071$$

b)

Pelo Teorema de Bayes,

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0.2 \cdot 0.2}{0.071} = 0.5634$$

$$P(C|D) = \frac{P(D|C)P(C)}{P(D)} = \frac{0.02 \cdot 0.3}{0.071} = 0.0845$$

Questão 4

Seja T o número de total de alunos e C o número de corinthianos comteplados com ingresso. Observe que C segue uma distribuição hipergeométrica, onde o tamanho da amostra é $n = 3$ e o número de pessoas com atributo desejável (ser corinthiano) é $r = x$, ie, $C \sim hip(T, x, 3)$.

Analogamente, sendo NP a váriavel que representa o número de não palmeirenses que ganharam o ingresso, $NP \sim hip(T, T-14, 3)$. O enunciado nos diz que

$$E(NP) = np = 3 \cdot \left(\frac{T-14}{T}\right) = 2.16 \Rightarrow T = 50$$

$$E(C) = np = 3 \cdot \frac{x}{T} = 0.72 \Rightarrow x = 12$$

Em particular, chamando S o número de são paulinos que ganharam o ingresso,

$$C \sim hip(50, 12, 3), S \sim hip(50, 8, 3)$$

a)

$$P(C = 2) = \frac{\binom{12}{2}\binom{38}{1}}{\binom{50}{3}} \approx 0.1280$$

b)

$$P(S \geq 1) = 1 - P(S = 0) = 1 - \frac{\binom{8}{0}\binom{42}{3}}{\binom{50}{3}} \approx 0.4143$$

c)

$$P(S \geq 2 | S \geq 1) = \frac{P(S \geq 2 \cap S \geq 1)}{P(S \geq 1)} = \frac{P(S \geq 2)}{P(S \geq 1)}$$

$$P(S \geq 2) = \frac{\binom{8}{2}\binom{42}{1}}{\binom{50}{3}} + \frac{\binom{8}{3}\binom{42}{0}}{\binom{50}{3}} \approx 0.06286$$

Portanto, a probabilidade desejada é

$$\frac{0.06286}{0.4143} \approx 0.15172$$

Caso encontre algum **erro** no gabarito, favor mandar para gustavosg@usp.br, **dúvidas** sobre o gabarito serão tiradas nas aulas e ou monitorias como de costume.