MAE0219 - Introdução a Probabilidade e Estatística
1^0 semestre de 2022

Gabarito Lista 1

10A) Os possíveis resultados para o experimento são: 5, Q5,QQ5, ... Um resultado com k "Q's" tem probabilidade de ocorrer $(\frac{5}{6})^k(\frac{1}{6})$, então a soma pedida é:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^0 + \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + ...\right)$$

Utilizando a fórmula de soma de PG infinita com razão menor que 1:

$$S = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-\frac{5}{6}}\right) = \frac{1}{6} \times 6 = 1$$

10B) Isso acontece quando temos o evento QQ5, ou seja quando $k = 2$, então a probabilidade pedida é $(\frac{5}{6})^2(\frac{1}{6}) = \frac{25}{216}$

11) Solução 1
A probabilidade de termos um produto negativo é :

$$P(N) = \frac{2 \times 6 \times 8}{14 \times 13} = \frac{48}{91}$$

Obs: a multiplicação por 2 é devido estarmos considerando a ordem de retirada, podemos tirar primeiro um número positivo e depois um negativo ou vice-versa.

Pelo complementar a probabilidade de termos o produto dos números positivo é:

$$P(P) = 1 - P(N) = 1 - \frac{48}{91} = \frac{43}{91}$$

11)Solução 2
Temos um produto positivo quando tiramos ou dois números positivos ou dois números negativos.
Portanto a probailidade de o produto ser positivo é:

$$P(P) = \frac{6 * 5 + 8 * 7}{14 * 13} = \frac{86}{182} = \frac{43}{91}$$

17) Seja $P(NR)$ a probabilidade de o problema não ser resolvido:

$$P(NR) = (1 - \frac{2}{3})(1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{12}$$

Se $P(R)$ é a probabilidade do problema ser resolvido por algum dos dois, então:

$$P(R) = 1 - P(NR) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

18A) Seja $P(i)$ a probabilidade de sair o número i. Pelo enunciado, podemos um encontrar um k $(0 < k < 1)$ tal que: $P(1) = k, P(2) = 2k, ..., P(6) = 6k$.(Como exercício mostre que $k = \frac{1}{21}$ para que $\sum_{i=1}^{6} P(i) = 1$)

A probabilidade de sair um número ímpar é $P(I) = P(1) + P(3) + P(5) = 9k$. Então,

$$P(5|I) = \frac{P(5)}{P(I)} = \frac{5k}{9k} = \frac{5}{9}$$

18B) A probabilidade de sair um número maior que 3 é $P(\{4,5,6\}) = P(4) + P(5) + P(6) = 15k$ e a probailidade de sair um número par maior que 3 é $P(P > 3) = P(4) + P(6) = 10k$, então:

$$P(P|i > 3) = \frac{P(P > 3)}{P(i > 3)} = \frac{10k}{15k} = \frac{2}{3}$$

20) Divida o sistema em duas partes: a parte 1 contém a componente 1 e a parte 2 contêm as componentes 2 e 3 do sistema.

P(sistema funcionar) = P(parte 1 funcionar) x P(parte 2 funcionar)

$=$ P(#1 funcionar) x P(#2 ou #3 funcionar) $= p_1(p_2 + p_3 - p_2p_3)$

$$= p_1p_2 + p_1p_3 - p_1p_2p_3$$

21) Pela tabela temos que $P(A) = 0.10$,$P(B) = 0.12$, $P(A \cap B) = 0.04$. $P(A)\dot{P}(B) = 0.012 \neq P(A \cap B)$. Logo, A e B não são independentes.

29) Denote por B a retirada de uma lampada boa e por D uma defeituosa. Os casos favoráveis são: $BBDD, BDBD, DBBD$. Cada caso tem probailidade de acontecer $\frac{6}{8}.\frac{5}{7}.\frac{2}{6}.\frac{1}{5} = \frac{1}{28}$, então a probabilidade desejada é $3 * \frac{1}{28} = \frac{3}{28}$.

31A) Considere 5 pessoas, onde o evento V indica que ela estará viva e o evento M que estará morta. Temos que escolher 2 pessoas para acreditar que elas estarão vivas, isso é feito de $C_{(5,2)} = \binom{5}{2} = 10$ maneiras. Escolhidas, basta atribuir as probabilidades correspondentes supondo independência entre cada evento:

$$P = 10.\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{40}{243}$$

31B) Neste caso, só temos 1 escolha possível, acreditar que todas elas estejam vivas:

$$P = 1.\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

31C) Podemos escolher 3,4, ou 5 pessoas para acreditarmos estarem vivas.

- Caso 1: 3 pessoas vivas
  A probabilidade associada é $C_{(5,3)}.\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3})\right)^2 = \frac{80}{243}$
- Caso 2: 4 pessoas vivas
  A probabilidade associada é $C_{5,4}.\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{80}{243}$
- Caso 3: 5 pessoas vivas (item b)
  A probabilidade associada é $\frac{32}{243}$

Portanto, a probabilidade pedida é $\frac{80}{243} + \frac{80}{243} + \frac{32}{243} = \frac{192}{243}$

34A) Denote por E o evento em que o empreteiro ganha a concorrência da parte elétrica e por C em que ganha a da parte do encanamento.

Pelo enunciado $P(E) = \frac{1}{2}$, $P(C|E) = \frac{3}{4}$, $P(C|E^c) = \frac{1}{3}$

$$P(C|E) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)} \Rightarrow P(C \cap E) = P(E).P(C|E) = \frac{1}{2}.\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

34B) Temos de encontrar a probabilidade de ele ganhar a concorrência da parte elétrica e perder a do encanamento ($P(C^c \cap E)$) e a probabilidade de ganhar a do encanamento e perder a da elétrica ($P(C \cap E^c)$).

$$P(C|E^c) = \frac{P(C \cap E^c)}{P(E^c)} \Rightarrow P(C \cap E^c) = P(C|E^c).P(E^c) = \frac{1}{3}.\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\text{P(C } \cap E^c) = \tfrac{1}{6}}$$

$$P(C^c|E) = 1 - P(C|E) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Mas, por outro lado,

$$P(C^c|E) = \frac{P(C^c \cap E)}{P(E)} \Rightarrow P(C^c \cap E) = P(E).P(C^c|E) = \frac{1}{2}.\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{\text{P(C}^c \cap E) = \tfrac{1}{8}}$$

Logo, P(ganhar apenas uma) = $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$

34C) Temos que encontrar a probabilidade $P(C^c \cap E^c)$.

$$P(C^c|E^c) = 1 - P(C|E^c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Mas por outro lado,

$$P(C^c|E^c) = \frac{P(C^c \cap E^c)}{P(E^c)} \Rightarrow P(C^c \cap E^c) = P(C^c|E^c).P(E^c) = \frac{2}{3}.(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$$

37) Sejam D os parafusos defeituosos, A os parafusos produzidos ena máquina A, B os parafusos produzidos na máquina B e C os parafusos produzidos por C. Pelo enunciado:

$$P(A) = 0.25, P(B) = 0.35, P(C) = 0.40$$

$$P(D|A) = 0.05, P(D|B) = 0.04, P(D|C) = 0.02$$

Pela probabilidade total, temos:

$$P(D) = P(A) * P(D|A) + P(B) * P(D|B) + P(C) * P(D|C) =$$

$$= 0.25 * 0.05 + 0.35 * 0.04 + 0.40 * 0.02 = 0.0345$$

Pelo Teorema de Bayes, conseguimos encontrar as probabilidades pedidas:

- $P(A|D) = \frac{P(A)}{P(D)} P(D|A) = \frac{0.25}{0.0345} * 0.05 = 0.36$
- $P(B|D) = \frac{P(B)}{P(D)} P(D|B) = \frac{0.35}{0.0345} * 0.04 = 0.41$
- $P(C|D) = \frac{P(C)}{P(D)} P(D|C) = \frac{0.49}{0.0345} * 0.02 = 0.23$

39A) Temos nove possibilidades para que o último carro seja da marca W:

$$P(W \Rightarrow W \Rightarrow W) = 0.5 * 0.5 * 0.5 = 0.125$$
$$P(W \Rightarrow F \Rightarrow W) = 0.5 * 0.25 * 0.15 = 0.01875$$
$$P(W \Rightarrow X \Rightarrow W) = 0.5 * 0.25 * 0.30 = 0.0375$$

$$P(X \Rightarrow X \Rightarrow W) = 0.2 * 0.4 * 0.3 = 0.024$$
$$P(X \Rightarrow F \Rightarrow W) = 0.2 * 0.3 * 0.15 = 0.009$$
$$P(X \Rightarrow W \Rightarrow W) = 0.2 * 0.3 * 0.5 = 0.03$$

$$P(F \Rightarrow F \Rightarrow W) = 0.3 * 0.7 * 0.15 = 0.0315$$

$$P(F \Rightarrow X \Rightarrow W) = 0.3 * 0.15 * 0.3 = 0,0135$$

$$P(F \Rightarrow W \Rightarrow W) = 0.3 * 0.15 * 0.5 = 0,0225$$

Somando todas as probabilidades e denotando por TW o evento em que o último carro é da marca W, encontramos aproximadamente $P(TW) = 0.31$ como probabilidade de um individuo comprar W como terceiro carro.

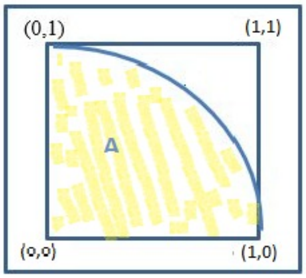
39B) Denotando por PW o evento em que o primeiro carro é da marca W, temos:

$$P(PW|TW) = \frac{P(PW \cap TW)}{P(TW)} = \frac{0.125 + 0.01875 + 0.0375}{0.31} = 0.58$$

42A)$P = \left(\frac{8300}{15800}\right)\left(\frac{8.299}{15.799}\right) = 0.276$

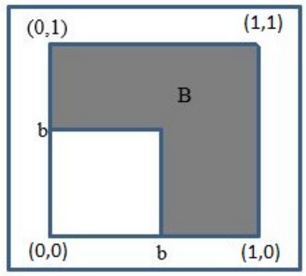
42B)$P = \left(\frac{13.000}{15800}\right)\left(\frac{12.999}{15.799}\right) = 0.677$

49A)



49B) $P(A) = \frac{AreaA}{AreaQuadrado} = \frac{\frac{\pi 1^2}{4}}{1^2} = \frac{\pi}{4}$

49C) $P(B) = \frac{AreaB}{AreaQuadrado} = \frac{1-b^2}{1} = 1 - b^2$



49D) $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - (1 - b^2) = b^2$