MAE-0212 – Lista de Exercícios 06

Departamento de Estatística

2o semestre de 2023

Recomendamos aos alunos resolver todos os exercícios por conta própria antes de buscar a resposta ou solução. Ler a solução antes de resolver o exercício prejudica o aprendizado!

As respostas abaixo podem conter erros. Ao encontrar alguma diferença com resposta obtida, o aluno deve comparecer à monitoria ou perguntar pelo Moodle.

Resolver os exercícios usando apenas tabelas estatísticas e uma calculadora comum. Valores que não estiverem presentes nas tabelas do livro-texto (Magalhães & de Lima) deverão ser obtidos por interpolação linear a partir das tabelas do próprio livro.

Exercício 1. Com o auxílio da tabela t-Student e uma calculadora, calcule:

(a) $P(-1{,}87 \leq T_5 \leq 1{,}87)$.

Solução. Como 1,87 não está na tabela, podemos utilizar os valores vizinhos $P(-1{,}476 < x < 1{,}476) = 0{,}8$ e $P(-2{,}015 < x < 2{,}015) = 0{,}8$ para obter via interpolação linear que $P(-1{,}87 < x < 1{,}87) = 0{,}873$.

(b) $P(T_9 < 0{,}6)$.

Resposta. 0,718

(c) $P(-1{,}5 < T_{14} < 2{,}0)$.

Solução. Pela simetria da distribuição T, podemos consultar a tabela usando a propriedade de que

$$P(T > t) = P(T < -t) = \tfrac{1}{2}\, P(|T| > t)$$

para $t > 0$.
Assim, obtemos diretamente da tabela $P(T_{14} < -1{,}345) = 0{,}10$ e $P(T_{14} < -1{,}761) = 0{,}05$.
Fazendo interpolação linear, obtemos $P(T_{14} < -1{,}5) = 0{,}0813$.
De forma semelhante, $P(T_{14} > 1{,}761) = 0{,}05$ e $P(T_{14} > 2{,}145) = 0{,}025$.
Novamente, fazendo interpolação linear, obtemos $P(T_{14} > 2{,}0) = 0{,}034$.
Assim, $P(T_{14} < 2{,}0) = 1 - P(T_{14} > 2{,}0) = 0{,}965$.
Finalmente, $P(-1{,}5 < T_{14} < 2{,}0) = P(T_{14} < 2{,}0) - P(T_{14} < -1{,}5) = 0{,}884$

(d) O valor de a tal que $P(T_9 > a) = 0{,}03$.

Solução. 2,176

(e) O valor de c tal que $P(|T_{11}| \leq c) = 0{,}92$

Resposta. 1,958

Exercício 2. Uma amostra de 20 observações de uma variável com distribuição normal foi colhida. No teste $\mu = 5$ contra $\mu > 5$, foi calculada a estatística $t = 2{,}093$. Calcule o nível descritivo (p-valor).

Resposta. 0,025

Exercício 3. O número de pontos em um exame de inglês tem sido historicamente ao redor de 80 pontos. Sorteamos 10 estudantes que fizeram recentemente esse exame e observamos as notas: 65, 74, 78, 86, 59, 84, 75, 72, 81 e 83. Especialistas desconfiam que a média diminuiu e desejam testar essa afirmação através de um teste de hipóteses. Fazendo as suposições necessárias, calcule o p-valor. Determine o intervalo de confiança para a média, com coeficiente de confiança $\gamma = 90\%$.

Resposta. 0,079 e $IC(\mu{,}90\%) = [73{,}99; 77{,}4]$

Exercício 4. Acredita-se que a pressão sanguínea arterial em homens siga o modelo normal com média 82. Mediu-se a pressão de 7 pacientes seguindo determinado tratamento, obtendo-se os seguintes resultados: 84, 81, 77, 85, 69, 80 e 79. Calcule o p-valor do teste de $H_0 : \mu = 82$ contra $H_1 : \mu < 82$.

Resposta. 0,115

Exercício 5. O número de pontos em um exame de inglês tem sido historicamente ao redor de 65 pontos. Especialistas desconfiam que a média diminuiu e desejam testar essa afirmação através de um teste de hipóteses. Sortearam-se 10 estudantes que fizeram recentemente esse exame, e observaram-se as notas: 65, 74, 78, 86, 59, 84, 75, 72, 81 e 83. Fazendo as suposições necessárias, calcule o nível descritivo do teste. Determine o intervalo de confiança para a média, com coeficiente de confiança $\gamma = 90\%$.

Solução. 0,0082 e $IC(\mu{,}90\%) = [73{,}99; 77{,}4]$

Exercício 6. Utilizando a tabela da distribuição Qui-Quadrado, determine:

(a) $P(\chi^2_7 \geq 14{,}70)$

Resposta. 0,04

(b) $P(\chi^2_{23} \leq 38{,}97)$

Resposta. 0,98

(c) $P(\chi^2_{12} \leq 14{,}01)$

Resposta. 0,7

(d) $P(12 \leq \chi^2_{17} \leq 31)$

Solução. $P(12 \leq \chi^2_{17} \leq 31) = P(\chi^2_{17} \geq 12) - P(\chi^2_{17} \geq 31) = 0{,}8 - 0{,}02 = 0{,}78$

(e) O valor de a tal que $P(\chi^2_{13} \geq a) = 0{,}02$

Resposta. 25,47

(f) O valor de b tal que $P(\chi_4^2 > b) = 0{,}04$

Resposta. 10,03

(g) O valor de c tal que $P(\chi_{21}^2 < c) = 0{,}95$

Solução. Queremos um c tal que $P(\chi_{21}^2 > c) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$. Pela tabela vêm que $c = 32{,}67$.

Exercício 7. Utilizando a tabela Qui-Quadrado e uma calculadora, determine:

(a) $P(\chi_7^2 \geq 13)$

Resposta. 0,074

(b) $P(\chi_{23}^2 \leq 29)$

Resposta. 0,8

(c) $P(\chi_{12}^2 \leq 10)$

Resposta. 0,384

(d) $P(12 \leq \chi_{17}^2 \leq 30{,}2)$

Solução. $P(12 \leq \chi_{17}^2 \leq 30{,}2) = P(\chi_{17}^2 \geq 12) - P(\chi_{17}^2 \geq 30{,}2) = 0{,}8 - 0{,}025 = 0{,}775$

(e) O valor de a tal que $P(\chi_{13}^2 \geq a) = 0{,}06$

Solução. Como 0,06 não está na parte superior de probabilidades da tabela, podemos tomar os vizinhos $P(\chi_{13}^2 \geq 22{,}36) = 0{,}05$ e $P(\chi_{13}^2 \geq 19{,}81) = 0{,}1$ para estimar por interpolação linear que $a = 21{,}85$.

(f) O valor de b tal que $P(\chi_4^2 > b) = 0{,}03$

Resposta. 10,77

Exercício 8. Quatro máquinas de grande porte trabalham de forma independente e ao fim da jornada de trabalho são vistoriadas pelo controle de qualidade e, caso necessitem, serão ajustadas. Das informações arquivadas pela empresa, sorteamos 22 dias e anotamos o número de máquinas que sofreram ajuste nesses dias. Os dados são apresentados na tabela abaixo. O engenheiro de manutenção pretende verificar se é adequado o modelo Binomial com $n = 4$ e probabilidade de ajuste $p = 0{,}1$. Utilize o nível descritivo (p-valor) para ajudar o engenheiro a decidir sobre essa hipótese.

Ajustes diários	0	1	2	3	4
Frequência	13	6	2	1	0

Solução. Primeiramente iremos calcular a frequência esperada de cada classe:

$$P(X = 0) = \binom{4}{0}(0{,}1)^0(0{,}9)^4 = 0{,}6561 \text{ portanto } e_0 = 22 \times 0{,}6561 = 14{,}4342$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1}(0{,}1)^1(0{,}9)^3 = 0{,}2916 \text{ portanto } e_1 = 22 \times 0{,}2916 = 6{,}4152$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2}(0{,}1)^2(0{,}9)^2 = 0{,}0486 \text{ portanto } e_2 = 22 \times 0{,}0486 = 1{,}0692$$

$$P(X=3) = \binom{4}{3}(0{,}1)^3(0{,}9)^1 = 0{,}0036 \text{ portanto } e_2 = 22 \times 0{,}036 = 0{,}0792$$

$$P(X=4) = \binom{4}{4}(0{,}1)^4(0{,}9)^0 = 0{,}0001 \text{ portanto } e_2 = 22 \times 0{,}0001 = 0{,}0022$$

Como as classes de 2 a 4 tem frequências esperadas menores que 5, então podemos remanejar os dados em dois grupos: $X = 0$ e $X \geq 1$ que possuem frequências esperadas de 14,4342 e 7,5658 respectivamente. Agora podemos calcular a estatística de erro:

$$Q^2 = \frac{(13 - 14{,}4342)^2}{14{,}4242} + \frac{(9 - 7{,}5658)^2}{7{,}5658} = 0{,}4144$$

Olhando para a distribuição *chi*-quadrado com 1 grau de liberdade e usando interpolação linear, concluimos que o p-valor é 0,526 e decidimos não rejeitar a hipótese de que o modelo binomial com tais parâmetros seja adequado para modelar essa situação.

Exercício 9. Para verificar a qualidade do processo de fabricação, cabos de aço são submetidos ao ensaio de tração até acontecer a ruptura. Os cabos têm 5 metros de comprimento e deseja-se testar se o modelo uniforme contínuo é adequado. Os dados de 30 desses ensaios, sorteados ao acaso, é o seguinte:

Faixa	Frequência
0 - 1	7
1 - 2	6
2 - 3	4
3 - 4	6
4 - 5	7

Tome uma decisão a partir do nível de significância (p-valor).

Resposta. O p-valor é 0,909 e decidimos não rejeitar a hipótese nula.

Exercício 10. Suponha que você está conduzindo uma pesquisa sobre as preferências alimentares de uma turma de estudantes em relação a quatro tipos de alimentos: pizza, hambúrguer, salada e sushi. Você coletou os dados de 100 estudantes, que estão listados abaixo:

Alimento	Número de estudantes
Pizza	30
Hambúrguer	25
Salada	15
Sushi	30

Realize um teste de aderência para testar a premissa de que as preferências alimentares dos estudantes seguem uma distribuição uniforme (segundo a qual todas as categorias têm a mesma proporção na população).

Resposta. O p-valor obtido no teste foi de 0,119 e decidimos não rejeiar a hipótese de que as preferências alimentares do estudantes seguem uma distrbuição uniforme.