MAE 399 - Análise de dados e Simulação
Prof. Fábio Machado
Lista 7 - 25/06/2022

1. Vamos pensar no problema conhecido como **Ruina do jogador**, ou seja, um passeio aleatório simples ($p \in [0,1]$) em $\mathbb{Z}$, partindo de x ($S_0 = x$), com barreiras absorventes em c e d, com $c \leq x \leq d$. Inicialmente definimos $T_c = \text{ínf}_n\{S_n = c\}$ e $T_d = \text{ínf}_n\{S_d = d\}$. Da teoria dos processos estocásticos, sabemos que para $p \neq \frac{1}{2}$, $P(T_d = T_c = \infty) = 0$ e

$$P_x(T_d < T_c) = \frac{1-(q/p)^{x-c}}{1-(q/p)^{d-c}}.$$

   a. Considere o um passeio onde p seja igual a probabilidade de vencer uma rodada na roleta americana, ou seja, $p = 18/38$ (portanto $q = 20/38$). Imagine um jogador que começa com com $x = \{10, 20, 30, 40\}$ e decide jogar até chegar em $50,00 ou até perder tudo. Faça 1.000 simulações para cada uma das fortunas iniciais $x = \{10, 20, 30, 40\}$ de modo a comparar os resultados simulados com os obtidos pelas fórmula acima.

   b. Considere agora o passeio simétrico, ou seja $p = 1/2$. Faça o mesmo que foi pedido no item acima, plotando as probabilidades obtidas pela simulação (também para $x = \{10, 20, 30, 40\}$) e inferindo sobre qual a função que melhor ajusta o conjunto de pontos obtidos. Fato: $P_x(T_d < T_c)$ é linear em x (fortuna inicial).

2. Considere uma sequência de v.a.i.i.d. $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, com distribuição exponencial de média 1 ($\lambda = 1$) e suas somas parciais, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, com $S_0 = 0$. Considere o processo de contagem $N(t) = \text{máx}\{n : S_n \leq t\}$, ou seja, um Processo de Poisson. Em particular, $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, sendo $\mathbb{E}(N(t)) = Var(N(t)) = \lambda t$.

   a. Considere 1.000 simulações para as trajetórias de $N(t)$, definido acima. Para cada $n \in \{10, 20, \ldots, 100\}$ encontre os percentis 5 e 95 para os valores observados de S_n e os valores análogos estimados pelo Teorema Central do Limite. Apresente estes valores em uma tabela.

   b. Apresente em um só gráfico

      i) a trajetória de 5 simulações para $N(t)$, com $t \in [0, 100]$,

      ii) a função $\mathbb{E}(N(t))$ + ou - $3 * (Var(N(t)))^{1/2}$.