Eficiencia - Noviembre 2016

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ entonces $f(n)$ domina asintóticamente a $g(n)$ ✓

Si $O(n) \subseteq O(\log n)$ ✗

$f(n) = n$ y $g(n) = cn$ con $c \in \mathbb{R}^+$. Se verifica que $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$ ✓

$f(n) = n$ y $g(n) = n^2$. Se verifica que $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \notin O(f(n))$ ✓

Resolver la siguiente ecuación de recurrencia.

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{si } n \leq 5 \\ T(n-5) + T(n-1) + T(n \text{ div } 5) + c_2 & n > 5 \end{cases}$$

$$T(n) = T(n-5) + T(n-1) + T(n\text{ div }5) + c_2 =$$
$$= T(n-10) + T(n-6) + T((n-5)\text{ div }5) + c_2 + T(n-6) + T(n-2) + T((n-1)\text{ div }5) + c_2$$
$$+ T((n\text{ div }5) - 5) + T(n\text{ div }5 - 1) + T((n\text{ div }5)\text{ div }5) + c_2 + c_2 = \dots$$

En la expresión anterior el nº de términos aumenta conforme nos vamos acercando a la base, lo que dificulta establecer una fórmula general. Para solventar este problema acotamos $T(n)$ con $T_1(n)$ y $T_2(n)$:

$$T_1(n) = \begin{cases} c_1 & \text{si } n \leq 5 \\ 3T_1(n-1) + c_2 & \text{si } n > 5 \end{cases} \qquad T_2(n) = \begin{cases} c_1 & \text{si } n \geq 5 \\ 3T_2(n\text{ div }5) + c_2 & \text{si } n > 5 \end{cases}$$

$$T_1(n) = 3T_1(n-1) + c_2 = 3[3T_1(n-2) + c_2] + c_2 = 3^2 T_1(n-2) + 3c_2 + c_2 = \dots$$
$$= 3^i T_1(n-i) + \sum_{j=0}^{i-1} 3^j c_2 =$$

$n - i = 5$, $i = n$

El caso base se alcanza para $i \approx n$: $3^n c_1 + \sum_{j=0}^{n-1} 3^j c_2 \in \Theta(3^n)$

$$T_2(n) = 3T_2(n\text{ div }5) + c_2 = 3[3T_2(n\text{ div }5^2) + c_2] + c_2 = 3^2 T_2(n\text{ div }5^2) + 3c_2 + c_2 = \dots$$
$$= 3^i T_2(n\text{ div }5^i) + \sum_{j=0}^{i-1} 3^j c_2 .$$

la base se alcanza para

$n\text{ div }5^i = 5$ $\quad i \approx \log_5 n$

$$T_2(n) \in \Theta(3^{\log_5 n}) = \Theta(n^{\log_5 3}) = \Theta(n^{0.68})$$

$$T(n) \in \Omega(n^{0.68}) \text{ y } O(3^n) \ni T(n)$$

```
Funcion Cuestion (A[1..n]: vector de enteros; p,q: entero) retorna (e: entero)
   si (p = q o p = q-1) entonces retorna p*q
   sino
                                                        quitas de cada lado
      si (A[p] es par) entonces retorna Cuestion(A, p+1, q-1) * Cuestion(A, p+1, q)
        sino retorna (Cuestion (A, p, (p+q) div 2) * Aux(A, p, q)/(p+q)      *2
        fsi                                                                 quitas
   fsi                                                                      de un
ffuncion                                                                    lado
```

donde $Aux(A,p,q) \in \Theta(\log n)$

Talla: $n = q - p + 1$

∃ mejor y peor caso: sí

Mejor cas: A[p] es impar: $T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{si } n \leq 2 \\ T(n \text{ div } 2) + \log n\, C_2 + C_3 & n > 2 \end{cases}$

Peor caso: A[p] es par $T(n) = \begin{cases} C_1 & n \geq 2 \\ T(n-2) + T(n-1) + C_2 & n > 2 \end{cases}$

```
Funcion Cuestion (V[1..n]: vector de enteros, n: entero) retorna (r: entero)
    var siguiente, resuetado : entero fvar
    siguiente = 2, resuetado = 0;
    mientras (siguiente ≤ n) hacer
        resuetado = resuetado + Aux (V, 1, siguiente - 1, V[siguiente])
        siguiente = siguiente + 1
    fmientras
    retorna resuetado
ffuncion

Funcion Aux ( V[1..n]: vector de enteros; p, q, x: enteros) retorna (p: entero)
    var s, K: entero fvar
    s = 0;
    si p = q entonces retorna x
    sino si V[p] < X entonces
                    K = 100
                    mientras K > 0 hacer:
                    s = s + K;
                    K = K div 2;
     sino para K = p hasta q hacer:
              s = s + V[K];
          fpara
    fsi
    retorna s
  fsi
ffuncion
```

Funcion AUX:

Talla: $n = q - p + 1$

∃ mejor y peor caso: sí

Funcion AUX (Mejor caso): V[p] < $\cancel{X}$

$$T_{MC}(n) = 1 + \sum_{i=0}^{\log 100} 2 = 1 + 2(\log 100 + 1) \in \Theta(1)$$

Funcion Aux (Peor caso): V[p] ≥ X

$$T_{PC}(n) = 1 + \sum_{K=p}^{q} 1 = 1 + (q - p + 1) = 1 + n \in \Theta(n)$$

Función Cuestión

Talla: n

∃ mejor y peor caso: sí, Como tal la función Cuestion no tiene mejor ni peor caso pero llama a Aux, que sí que tiene, entonces Cuestión presenta mejor y peor caso.

Mejor caso (Mejor caso de la función Aux)

$$T_{MC}(n) = 2 + \sum_{i=2}^{n} (1+1) = 2 + 2(n-1) = 2n \in \Theta(n)$$

Peor caso (Peor caso debido al Peor caso de la función Aux)

$$T_{PC}(n) = 2 + \sum_{i=2}^{n} (i+2) \in \Theta(n^2)$$