Diseño recursivo - Octubre 2017

$Q \equiv \{ n \geq 1 \}$

Funcion Evaluacion (A[1..n][1..n] : matriz de enteros) retorna (b : booleano)

$R \equiv \{ b = (\forall i)((\forall j)(A[i][j] \% 2 \neq 0$ y $A[j][i] \% 2 = 0 : 1 \leq j \leq i-1) ; 1 \leq i \leq n)$

Inducción Noetheriana : a cada matriz le asociaremos un natural n que corresponde al orden de la matriz. Seguidamente aplicaremos inducción simple sobre dicho n.

Sustituimos n por k en R :

$R \equiv \{ b = (\forall i)((\forall j)(A[i][j] \% 2 \neq 0)$ y $(A[j][i] \% 2 = 0) ; 1 \leq j \leq i-1) ; 1 \leq i \leq k)$

La llamada inicial a la función se realizará con Evaluacion (A) = iEvaluacion (A, k) siendo k = n.

Dado el problema iEvaluacion (A, k), el problema sucesor resultará de eliminar una fila y una columna a la matriz, esto es iEvaluacion (A, k-1)

B_T = k = 1, la sección de la matriz tiene una única fila y columna, esto es, un elemento.
B_{NT}, k > 1, la sección de la matriz tiene más de una fila y una columna, el mismo número de ambas.

En el caso de que la sección tratada tuviera un único elemento (k = 1), ese único elemento pertenecería a la diag. principal, por lo que no existen elementos (ni por encima ni por debajo de la diagonal) la solución al problema sería VERDADERO ya que las sección. a tratar serían vacías.

La solución al problema iEvaluacion (A, K) consiste en determinar si todos los elementos por encima de la sección de la diagonal principal son pares, (A[1..K][1..K]), y si todos los elementos de la sección principal por debajo son impares, (A[1..K][1..K]), esto es:

$$b = (\forall i)((\forall j)(A[i][j] \% 2 \neq 0) \text{ y } (A[j][i] \% 2 = 0) : 1 \leq j \leq i-1) : 1 \leq i \leq k)$$

Hipótesis de recurrencia : suponiendo conocida la solución al subproblema iEvaluacion (A, k-1) llamaremos a dicho valor b'. Esto quiere decir que suponemos conocido si todos los elementos por encima de la diagonal principal de la sección son pares (A[1..k-1][1..k-1]) y por debajo de la diagonal de la sección principal de la matriz (A[1..k-1][1..k-1] son impar :

$$b' = (\forall i)((\forall j)(A[i][j] \% 2 \neq 0 \text{ y } A[j][i] \% 2 = 0) : 1 \leq j \leq i-1) : 1 \leq i \leq k-1)$$

Por lo que para obtener la solución al problema iEvaluacion (A, k) a partir de iEvaluacion (A, k-1) basta con comprobar que los elementos A[k][1], A[k][2] ... A[k][k-1] son impares y que A[1][k], A[2][k] ... A[k-1][k] son pares :

$$(\forall j)(A[k][j] \% 2 \neq 0 \text{ y } A[j][k] \% 2 = 0 : 1 \leq j \leq k-1)$$

Tambien hay que comprobar que :

A[k][1] % 2 ≠ 0 AND A[k][2] % 2 ≠ 0 AND ... AND A[k][k-1] % 2 ≠ 0
A[1][k] % 2 = 0 AND A[2][k] % 2 = 0 AND ... AND A[k-1][k] % 2 = 0

```
Funcion iEvaluacion (A[1..n][1..n] : matriz de enteros ; k : entero) retorna (b : booleano)
    caso
        k = 1 → VERDADERO
        k > 1 → iEvaluacion (A, k-1) AND AUX (A, k)
    fcaso
ffuncion

Funcion AUX (A[1..n][1..n] : matriz de enteros ; k : entero) retorna (b : booleano)
    var i : entero, resuelto : booleano, fvar
    i = 0
    resuelto = VERDADERO
    mientras (i < k-1 AND resuelto)
        i = i + 1
        si (A[i][k] % 2 ≠ 0 OR A[k][i] % 2 = 0) entonces        // si (i, k) par
            resuelto = falso                                      (k, i) impar
        fsi                                                       (fila, col)
    fmientras
    retornar resuelto
ffuncion
```

1. $Q(\bar{x}) \Rightarrow B_{NT}(\bar{x}) \vee B_T(\bar{x})$

$0 \leq k \leq n \wedge x \geq 0 \Rightarrow k = 0 \vee k > 0$ se cumple

2. $Q(\bar{x}) \wedge B_{NT}(\bar{x}) \Rightarrow Q(s(\bar{x}))$

$x \geq 0 \wedge 0 \leq k \leq n \wedge k > 0 \Rightarrow k - 1 \geq 0$ se cumple

3. $Q(\bar{x}) \wedge B_{NT}(\bar{x}) \Rightarrow R(\bar{x}, triv(\bar{x}))$

$x \geq 0 \wedge 0 \leq k \leq n \wedge k > 0 \Rightarrow 0 = (\Pi i)(A[i] + x^i : 1 \leq i \leq k)$ no se cumple ya que para $k=0$ el cuantificador afecta a un rango vacío por lo que su valor es 1. Sin embargo, iF2 devuelve 0 y para que se cumpliera la postcondición del caso trivial debería retornar 1.

4. $Q(\bar{x}) \wedge B_{NT}(\bar{x}) \wedge R(s(\bar{x}), \bar{y}') \Rightarrow R(\bar{x}, c(\bar{y}', \bar{x}))$

$0 \leq k \leq n \wedge x \geq 0 \wedge k > 0 \wedge p' = (\Pi i)(A[i] + x^i : 1 \leq i \leq k-1) \Rightarrow P = p' + (A[k] + x^k)$

$P = p' + (A[k] + x^k) = (\Pi i)(A[i] + x^i : 1 \leq i \leq k-1) + (A[k] + x^k) \neq (\Pi i)(A[i] + x^i : 1 \leq i \leq k-1$

No se cumple ya que el operador Π representa producto y aquí estamos sumando

5 $\exists t : D \to \mathbb{Z}$ tal que $Q(\bar{x}) \Rightarrow t(\bar{x}) \geq 0$

$t(A, x, k) \stackrel{def}{=} k$

$0 \leq k \leq n \wedge x \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$

6 $Q(\bar{x}) \wedge B_{NT}(\bar{x}) \Rightarrow t(s(\bar{x})) < t(\bar{x})$

$0 \leq k \leq n \wedge x \geq 0 \wedge k > 0 \Rightarrow k - 1 < k$