1.- [8 puntos] Se quiere diseñar un algoritmo recursivo que resuelva el siguiente problema:
"Dada una matriz A[1..n][1..n] de enteros, siendo n ≥ 1, diseñar una función recursiva que determine si todos los elementos por encima de la diagonal principal cumplen que su valor coincide con la suma de los índices de la fila y de la columna en la que están situados y todos los elementos por debajo de la diagonal principal cumplen que su valor coincide con el producto de los índices de la fila y de la columna en la que están situados.". Ejemplos:

$$A[1..3][1..3] = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$ retornará VERDADERO

$$A[1..3][1..3] = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$ retornará FALSO

Se pide responder a los siguientes apartados de manera clara, concisa y sin ambigüedad:

a) Especificación formal de la función (15%)

$Q \equiv \{ n \geq 1 \}$

Función Evaluacion (A[1..n][1..n]:matriz de enteros) retorna (b:booleano)

$$R \equiv \left\{ b = (\forall i)\big((\forall j)(A[i][j] = i * j \ y \ A[j][i] = i + j : 1 \leq j \leq i - 1) : 1 \leq i \leq n\big) \right\}$$

b) Describir el principio de inducción utilizado (5%)

Inducción Noetheriana: A cada matriz le asociaremos un natural n que corresponde al orden de la matriz. Seguidamente aplicaremos inducción simple sobre dicho natural n.

c) Realizar una inmersión no final , escribir la especificación formal de la función inmersora e indicar cómo se ha de efectuar la primera llamada a la función (10%)

Sustituimos n por k en *R*:

$Q' \equiv \{ \ 1 \leq k \leq n \}$

Función iEvaluacion (A[1..n][1..n]:matriz de enteros, k:entero) retorna (b:booleano)

$$R' \equiv \left\{ b = (\forall i)\big((\forall j)(A[i][j] = i * j \ \ y \ \ A[j][i] = i + j : 1 \leq j \leq i - 1) : 1 \leq i \leq k\big) \right\}$$

La llamada inicial a la función iEvaluacion se realiza con k = n, esto es,

Evaluacion (A) = iEvaluacion (A, n)

d) Identificar el sucesor, o sucesores, de un problema dado (5%)

Dado el problema iEvaluacion(A, k), para pasar al siguiente problema eliminamos una fila y una columna. Así, el subproblema sucesor será iEvaluacion(A, k-1).

e) Establecer las condiciones de caso/s trivial/es y caso/s no trivial/es (5%)

$B_t \equiv$ k = 1 la sección de la matriz tiene un única fila y columna, esto es, un único elemento.

$B_{nt} \equiv$ k > 1 la sección de la matriz tiene varias filas y columnas, el mismo número de ambas.

f) Explicar razonadamente la solución propuesta para el caso trivial, esto es, *triv*($\bar{x}$) (15%)

En el caso de que la sección de la matriz tratada tuviera un único elemento (k = 1), ese único elemento pertenece a la diagonal principal, por lo que al no existir más elementos (ni por encima ni por debajo de la diagonal) la solución del problema será VERDADERO ya que las secciones a tratar serán vacías.

g) Explicar razonadamente la solución propuesta para el caso no trivial, esto es, explicar la función de combinación *c*($\bar{x}$, $\overline{y}'$) (25%)

La solución del problema iEvaluacion(A,k) consiste en determinar si todos los elementos por encima de la diagonal principal de la sección de la matriz A[1..k][1..k] cumplen que su valor coincide con la suma de los índices de la fila y de la columna en la que están situados y si todos los elementos por debajo de la diagonal principal de la sección de la matriz A[1..k][1..k] cumplen que su valor coincide con el producto de los índices de la fila y de la columna en la que están situados, esto es,

$$(\forall i)((\forall j)\ (A[\ i\ ][\ j\ ] = i * j \ \text{ y } \ A[\ j\ ][\ i\ ] = i + j : 1 \le j \le i\text{-}1\ ) : 1 \le i \le k),$$

llamamos a dicho resultado, b.

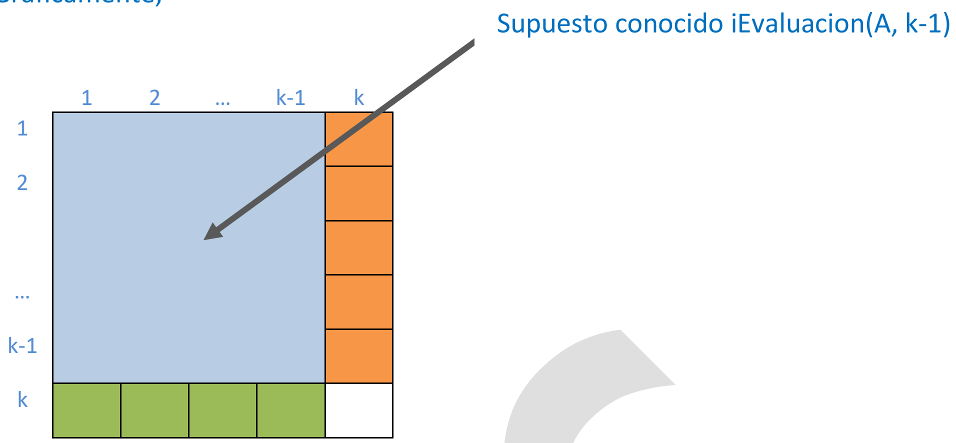
Hipótesis de recurrencia: Supongamos conocida la solución del subproblema iEvaluacion(A,k-1). Llamaremos a dicho valor, b´. Esto quiere decir que suponemos conocido si todos los elementos por encima de la diagonal principal de la sección de la matriz A[1..k-1][1..k-1] cumplen que su valor coincide con la suma de los índices de la fila y de la columna en la que están situados y si todos los elementos por debajo de la diagonal principal de la sección de la matriz A[1..k-1][1..k-1] cumplen que su valor coincide con el producto de los índices de la fila y de la columna en la que están situados, esto es,

$$(\forall i)((\forall j)\ (A[\ i\ ][\ j\ ] = i * j \text{ y } A[\ j\ ][\ i\ ] = i + j : 1 \le j \le i\text{-}1\ ) : 1 \le i \le k\text{-}1),$$

Por lo que para obtener la solución del problema iEvaluacion(A, k) a partir de la solución del subproblema iEvaluacion(A,k-1) bastaría comprobar que los elementos A[k][1], A[k][2], …., A[k][k-1] cumplen que su valor coincide con el producto de los índices de la fila y de la columna en la que están situados y que los elementos A[1][k], A[2][k], …., A[k-1][k] cumplen que su valor coincide con la suma de los índices de la fila y de la columna en la que están situados, esto es,

$$(\forall j)\ (A[\ k\ ][\ j\ ] = i * j \text{ y } A[\ j\ ][\ k\ ] = i + j : 1 \le j \le k\text{-}1\ ) \qquad (1)$$

Graficamente,



Por tanto, para obtener iEvaluacion(A,k) deberemos comprobar además si:

a) $A[k][1] = k*1$ AND $A[k][2] = k*2$ AND … AND $A[k][k-1] = k * (k-1)$ (en verde)

b) $A[1][k] = 1 + k$ AND $A[2][k] = 2 + k$ AND … AND $A[k-1][k] = (k-1) + k$ (en naranja) y

h) Escribir la función inmersora en pseudocódigo, incluyendo función/es auxiliar/es si se precisan (20%)

```
Función iEvaluacion ( A[1..n][1..n]: matriz de enteros; k : entero ) retorna ( b:booleano )
  caso
        k = 1 → VERDADERO
        k > 1 → iEvaluacion ( A, k-1) AND AUX(A,k)
  fcaso
ffunción
```

La llamada inicial a la función iEvaluacion se realiza del siguiente modo: iEvaluacion(A, n).

La función AUX(A,k) es una función que calcula (1).-

```
Función AUX ( A[1..n][1..n]: matriz de enteros; k : entero ) retorna ( b:booleano )
var i:entero, resul:booleano fvar
i = 0
resul = VERDADERO
mientras ( i < k-1 AND resul )
      i = i + 1;
      si ( A[ i ][ k ] ≠ i + k  OR A[ k ][ i ] ≠ k * i  ) entonces
          resul = FALSO
      fsi
fmientras
retorna resul
ffunción
```

ALG

2.- [2 puntos] Dada la siguiente función recursiva, se pide verificar formalmente su corrección:

$Q' \equiv \{ 1 \le k \le n+1 \wedge x \ge 0 \}$
Función iF2 (A[1..n]:vector de enteros, x:entero, k:entero) retorna (p:booleano)
caso
$k = n+1 \rightarrow$ VERDADERO
$k < n+1 \rightarrow$ iF2 (A, x, k+1) AND (A[k] = x^k)
fcaso
ffuncion
$R' \equiv \{ p = (\exists i)(A[i] = x^i : k \le i \le n) \}$

La llamada inicial a la función se realizará con k = 1, de ese modo.-

F2 (A,x) = iF2 (A, x, 1)

SOLUCIÓN:

1. $Q(\bar{x}) \Rightarrow B_t(\bar{x}) \vee B_{nt}(\bar{x})$

$1 \le k \le n+1 \wedge x \ge 0 \Rightarrow k = n+1 \vee k < n+1$ Se cumple.

2. $Q(\bar{x}) \wedge B_{nt}(\bar{x}) \Rightarrow Q(s(\bar{x}))$

$1 \le k \le n+1 \wedge x \ge 0 \wedge k < n+1 \Rightarrow k + 1 \le n+1$ Se cumple.

3. $Q(\bar{x}) \wedge B_t(\bar{x}) \Rightarrow R(\bar{x}, triv(\bar{x}))$

$1 \le k \le n+1 \wedge x \ge 0 \wedge k = n+1 \Rightarrow$ VERDADERO $= (\exists i)(A[i] = x^i : k \le i \le n)$

No se cumple, ya que cuando k=n+1 tendremos que el cuantificador $\exists$ afecta a un rango vacío, por lo que su valor es FALSO (elemento neutro de la operación OR). Sin embargo, la función iF2 devuelve VERDADERO. Para que se cumpla la postcondición en el caso trivial, la función debería retornar FALSO.

4. $Q(\bar{x}) \wedge B_{nt}(\bar{x}) \wedge R(s(\bar{x}), \bar{y}') \Rightarrow R(\bar{x}, c(\bar{y}', \bar{x}))$

$1 \le k \le n+1 \wedge x \ge 0 \wedge k < n+1 \wedge p' = (\exists i)(A[i] + x^i : k+1 \le i \le n) \Rightarrow p = p'$ AND $(A[k] = x^k)$

$p = p'$ AND $(A[k] = x^k) = (\exists i)(A[i] = x^i : k+1 \le i \le n)$ AND $(A[k] = x^k) \ne (\exists i)(A[i] = x^i : k \le i \le n)$

No se cumple, ya que la función de combinación de iF2 consiste en aplicar la operación AND al término k-ésimo cuando en realidad debería ser aplicar la operación OR al término k-ésimo, esto es,

$p = p'$ OR $(A[k] = x^k)$

ya que el cuantificador $\exists$ representa la operación OR, esto es,

$(A[1] = x^1)$ OR $(A[2] = x^2)$ OR ...OR $(A[k] = x^k)$

5. Encontrar una función $t{:}D \rightarrow Z$, tal que $Q(\overline{x}) \Rightarrow t(\overline{x}) \geq 0$

$t(A,x,k) \overset{def}{=} n - k + 1$

$1 \leq k \leq n{+}1 \wedge x \geq 0 \Rightarrow \quad n - k + 1 \geq 0$ Se cumple.

6. $Q(\overline{x}) \wedge B_{nt}(\overline{x}) \Rightarrow t(s(\overline{x})) < t(\overline{x})$

$1 \leq k \leq n{+}1 \wedge x \geq 0 \wedge k < n + 1 \Rightarrow \quad n - (k + 1) + 1 < n - k + 1$

$n - k < n - k + 1$ Se cumple.

ALG