Programación Dinámica - Noviembre 2016.

Secuencia de decisiones : tamaño y significado de la decisión i-ésima :

Número de decisiones = R

Secuencia de decisiones = $\langle d_1, d_2 \ldots d_R \rangle$ donde d_i representa si se destruye el reino o no, que lo resolveremos con 0 → no se destruye
1 → se destruye

Función objetivo y reestricciones :

$$\text{maximizar} \sum_{i=1}^{R} Enri[i] * d_i \;\Big|\; \sum_{i=1}^{R} Res[i] * d_i \leq S$$

Demostración del principio de Optimalidad :

Sea $\langle d_1, d_2, \ldots d_R \rangle$ la solución óptima del probeema de conquistar R reinos disponibles con S soldados disponibles, Denotaremos al problema Destruccion (R, S), el valor asociado obteniendo máx beneficio a dicha secuencia de decisiones es :

$$\sum_{i=1}^{R} Enri[i] * d_i \quad \text{sujeto a} \quad \sum_{i=1}^{R} Res[i] * d_i \leq S$$

Ahora supongamos que prescindimos de la última decisión, ésta es d_R. La subsecuencia que resueta, $\langle d_1, d_2, \ldots, d_{R-1} \rangle$ es la solución óptima del subproblema asociado, es decir, Destruccion (R - 1, S - Res[R] * d_R) que es el subproblema de conquistar R-1 reinos con S - Res[R] * d_R soldados disponibles obteniendo el máx enriquecimiento

El valor asociado a dicha secuencia es :

$$\sum_{i=1}^{R-1} Enri[i] * d_i \quad \text{y además se cumple}$$

$$\sum_{i=1}^{R-1} Res[i] * d_i \leq S - Res[R] * d_R$$

Ahora supongamos que $\langle d_1, d_2, \ldots d_{R-1} \rangle$ no es la solución óptima del problema asociado, sino que existe una secuencia $\langle d_1^*, d_2^*, \ldots, d_{R-1}^* \rangle$ que mejora su valor. Con lo que:

$$\sum_{i=1}^{R-1} Enri[i] * d_i < \sum_{i=1}^{R-1} Enri[i] * d_i^*, \quad (1)$$

y además se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{R-1} Res[i] * d_i^* \leq E - Res[S] * d_S$$

Con lo cual sumando Enri[R] * d_R a ambos lados de la igualdad en (1) :

$$\sum_{i=1}^{R-1} Enri[i] * d_i + Enri[R] * d_R < \sum_{i=1}^{R-1} Enri[i] * d_i^* + Enri[R] * d_R$$

Lo cual significa que la secuencia $\langle d_1^*, d_2^*, \ldots, d_R^* \rangle$ mejoraría la solución de $\langle d_1, d_2, \ldots, d_R \rangle$ para el problema asociado, lo cual es contradictorio porque la hipótesis de partida es que $\langle d_1, d_2, \ldots, d_R \rangle$ era la solución óptima del problema.

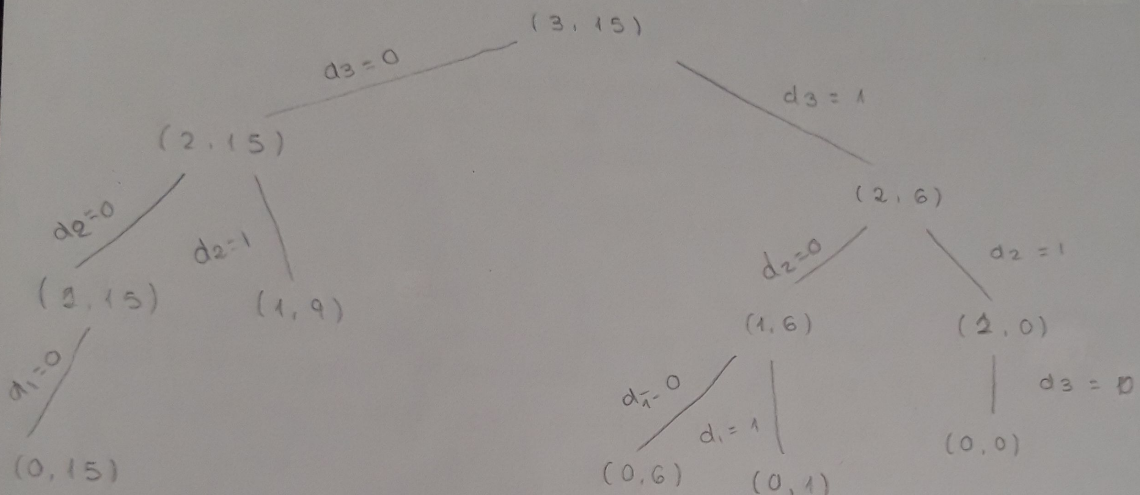
Ecuacion recursiva y primera llamada a la función

$$\text{Destruccion}(r,s) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ \text{Destruccion}(r-1,s)\ * & r>0 \text{ y } Res[r] > s \\ \max\limits_{d_r \in \{0,1\}} \{\text{Destruccion}(r-1,\ s - Res[r]*d_r) + Enri[r]*d_R\} & \text{si } r>0 \text{ y } s \geq Res[r] \end{cases}$$

* Recursiva cuando se decide no atacar por nº de s < Res[i]

Árbol de llamadas, estructuras de almacenamiento y como se rellenan.

$R = 3$, $S = 15$, $Enri[1..3] = \{20, 40, 38\}$, $Res[1..3] = \{5, 6, 9\}$



Dado que la función recursiva tiene dos parámetros, se precisan dos estructuras de almacenamiento. Éstas tendrán R+1 filas y S+1 columnas ya que $1 \leq s \leq S$ y $1 \leq r \leq R$. En una de ellas, Emax se guadará el valor asociado a cada subproblema, esto es, el máximo enriquecimiento obtenido. En la otra, Dec, se guardará la altern. que proporcione el máximo para cada subproblema.

Las estructuras de almacenamiento se inicializarán con los resultados de los probl. triviales, que corresponde a llenar la fila 0 de cada matriz con un 0 ya que los problemas triviales son del tipo Destrucción(0, s)

Dado que para solucionar el subproblema Destruccion(r, s) se precisa conocer la solución a los subproblemas del tipo Destruccion(r-1, x), ambas matrices se rellenan por filas en sentido creciente.

El enriquecimiento máximo buscado estará en la posición [R][S] de la matriz Emax. La secuencia óptima de decisiones se obtiene recorriendo determinadas posiciones de la matriz Dec. En la posición [R][S] se encuentra el valor asociado a d_R, y a continuación nos iríamos a $Dec[R-1][S - d_R * Res[R]]$, donde se encuentra el valor asociado a d_{R-1} y así sucesivamente $d_{R-1} \ldots d_2, d_1$.