Diseño recursivo - Octubre 2017

$Q \equiv \{ n \geq 1 \}$

Funcion Evaluacion (A[1..n][1..n] : matriz de enteros) retorna (b : booleano)

$R = \{ b = (\forall i)((\forall j)(A[i][j] = i * j \text{ y } A[i][j] = i + j : 1 \leq j \leq i-1) : 1 \leq i \leq n)$

Induccion Noetheriana : A cada matriz le asociaremos un natural n que corresponde al orden de la matriz. Seguidamente aplicaremos inducción simple sobre tal n.

Sustituimos n por K en R :

$Q' \equiv \{ 1 \leq K \leq n \}$

Funcion iEvaluacion (A[1..n][1..n] : matriz de enteros ; K : entero) retorna (b : booleano)

$R' \equiv \{ b' = (\forall i)((\forall j)(A[i][j] = i * j \text{ y } A[j][i] = i + j : 1 \leq j \leq i-1) : 1 \leq i \leq K)$

La llamada inicial a la funcion se realiza con K = n . Evaluacion (A) = iEvaluacion (A , n)

Dado el problema iEvaluacion (A, K), para pasar al siguiente subproblema eliminamos una fila y una columna , esto es , iEvaluacion (A, K-1) el problema sucesor.

$B_T \equiv K = 1$, la sección de la matriz tiene una única fila y columna , esto es , un único elem.

$B_{NT} \equiv K > 1$. la sección de la matriz tiene más de una fila y columna , el mismo nº.

En el caso de que la sección de la matriz tuviera un único elemento (K = 1) , ese único elemento pertenece a la diagonal principal , por lo que al no existir más elementos la solución al problema será VERDADERO , ya que las secciones a tratar serían vacías.

La solución al problema iEvaluacion (A , K) consiste en determinar si todos los elementos por encima de la diagonal principal de la sección de la matriz A[1..K][1..K] cumplen que su valor es igual a la suma de los índices de la fila y columna y si todos los elementos por debajo de la sección principal de A[1..K][1..K] cumplen que son iguales al producto de los índices de la fila y la columna , esto es :

$$b = (\forall i)((\forall j)(A[i][j] = i * j \text{ y } A[j][i] = i + j : 1 \leq j \leq i-1) : 1 \leq i \leq K)$$

Hipótesis de recurrencia : suponemos conocida la solución del subproblema iEvaluacion (A, K-1) Llamaremos a tal valor b'. Esto quiere decir que suponemos conocido si todos los elementos por encima de la diagonal principal de la sección de la matriz A[1..K-1][1..K-1] cumplen que su valor es igual al producto de los índices de la fila y la columna , y si todos los elementos por debajo de la diagonal principal de la sección cumplen que su valor es igual a la suma de los índices de fila y columna :

$$b' = (\forall i)((\forall j)(A[i][j] = i * j \text{ y } A[j][i] = i + j : 1 \leq j \leq i-1) : 1 \leq i \leq K-1)$$

Por lo que para obtener la solución al problema iEvaluación (A, K) a partir del subproblema iEvaluacion (A , K-1) bastaría con saber si los elementos A[K][1] , A[K][2] cumplen que su valor coincide con el producto del índice de la fila y columna sobre la que están situados y que los elementos A[1][K], A[2][K] ... A[K-1][K] cumplen que su valor coincide con la suma de los índices de la fila y columna sobre la que están situados :

$$(\forall j)(A[K][j] = i * j \text{ y } A[j][K] = i + j : 1 \leq j \leq K-1)$$

Por tanto para obtener iEvaluacion (A , K), antes deberemos comprobar si :

$$A[K][1] = K * 1 \text{ AND } A[K][2] = K * 2 \ldots \text{ AND } A[K][K-1] = K * (K-1)$$

$$A[1][K] = 1 + K \text{ AND } A[2][K] = 2 + K \ldots \text{ AND } A[K-1][K] = (K-1) + K$$

Funcion iEvaluacion (A[1..n][1..n] : matriz de enteros ; K : entero) retorna (b : booleano)

```
caso
    K = 1 → VERDADERO
    K > 1 → iEvaluacion(A, K-1) AND AUX(A, K)
fcaso
ffuncion
```

Funcion AUX (A[1..n][1..n] : matriz de enteros ; K : entero) retorna (b : booleano)

```
var i : entero, r : booleano, fvar
i = 0
r = VERDADERO
mientras (i < K-1 AND r)
    i = i + 1
    si (A[i][K] ≠ i*K OR A[K][i] ≠ i+K) entonces
        r = FALSO
    fsi
fmientras
retorna r
ffuncion
```

1. $Q(\bar{x}) \Rightarrow B_T(\bar{x}) \wedge B_{NT}(\bar{x})$

$1 \leq K \leq n+1 \wedge x \geq 0 \Rightarrow K = n+1 \vee K < n+1$ ✓

2. $Q(\bar{x}) \wedge B_{NT}(\bar{x}) \Rightarrow Q(S(\bar{x}))$

$1 \leq K \leq n+1 \wedge x \geq 0 \wedge K < n+1 \Rightarrow K+1 \leq n+1$

3. $Q(\bar{x}) \wedge B_T(\bar{x}) \Rightarrow R(\bar{x}, triv(\bar{x}))$

$1 \leq K \leq n+1 \wedge x \geq 0 \wedge K = n+1 \Rightarrow (\exists i)(A[i] = x^i : K \leq i \leq n\}$ X

4. $Q(\bar{x}) \wedge B_{NT}(\bar{x}) \wedge R(S(\bar{x}), \bar{y}') \Rightarrow R(\bar{x}, c(\bar{y}', \bar{x}))$

$1 \leq K \leq n+1 \wedge x \geq 0 \wedge K < n+1 \wedge p' = (\exists i)(A[i] = x^i : K+1 \leq i \leq n) \Rightarrow p = p' \text{ AND } (A[K] = x^K)$

$p = p' \text{ AND } (A[K] = x^K) = (\exists i)(A[i] = x^i : K+1 \leq i \leq n) \text{ AND } (A[K] = x^K) \neq (\exists i)(A[i] = x^i : K \leq i \leq n)$ X

$p = p' \text{ OR } (A[K] = x^K)$ $\quad \exists \Rightarrow \text{OR}$

5. $\exists\ t : D \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $Q(\bar{x}) \Rightarrow t(\bar{x}) \geq 0$

$t(A, x, K) \overset{def}{=} n - K + 1$

$1 \leq K \leq n \wedge x \geq 0 \Rightarrow n - K + 1 \geq 0$

6. $Q(\bar{x}) \wedge B_{NT}(\bar{x}) \Rightarrow t(S(\bar{x})) < t(\bar{x})$

$1 \leq K \leq n \wedge K < n+1 \wedge x \geq 0 \Rightarrow n - (K+1) + 1 < n - K + 1$

$n - K - 1 + 1 < n - K + 1$

$n - K \cancel{+1} < n - K + 1$ se cumple