1.- [8 puntos] Se quiere diseñar un algoritmo recursivo que resuelva el siguiente problema: “Dada una matriz A[1..n][1..n] de enteros, siendo n ≥ 1, diseñar una función recursiva que determine si todos los elementos por encima de la diagonal principal son pares y todos los elementos por debajo de la diagonal principal son impares.” Ejemplos:

$$A[1..3][1..3] = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$ retornará VERDADERO

$$A[1..3][1..3] = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$ retornará FALSO

Se pide responder a los siguientes apartados de manera clara, concisa y sin ambigüedad:

a) Especificación formal de la función (15%)

$Q \equiv \{ n \geq 1 \}$

Función Evaluacion (A[1..n][1..n]:matriz de enteros) retorna (b:booleano)

$$R \equiv \left\{ b = (\forall i)\big((\forall j)(A[\,i\,][\,j\,]\%2 \neq 0 \ y \ \ A[\,j\,][\,i\,]\%2 = 0 : 1 \leq j \leq i-1) : 1 \leq i \leq n\big) \right\}$$

b) Describir el principio de inducción utilizado (5%)

Inducción Noetheriana: A cada matriz le asociaremos un natural n que corresponde al orden de la matriz. Seguidamente aplicaremos inducción simple sobre dicho natural n.

c) Realizar una inmersión no final, escribir la especificación formal de la función inmersora e indicar cómo se ha de efectuar la primera llamada a la función (10%)

Sustituimos n por k en *R*:

$Q' \equiv \{ \ 1 \leq k \leq n \}$

Función iEvaluacion (A[1..n][1..n]:matriz de enteros, k:entero) retorna (b:booleano)

$$R' \equiv \left\{ b = (\forall i)\big((\forall j)(A[\,i\,][\,j\,]\%2 \neq 0 \ y \ \ A[\,j\,][\,i\,]\%2 = 0 : 1 \leq j \leq i-1) : 1 \leq i \leq k\big) \right\}$$

La llamada inicial a la función iEvaluacion se realiza con k = n, esto es,

Evaluacion (A) = iEvaluacion (A, n)

d) Identificar el sucesor, o sucesores, de un problema dado (5%)

Dado el problema iEvaluacion(A, k), para pasar al siguiente problema eliminamos una fila y una columna. Así, el subproblema sucesor será iEvaluacion(A, k-1).

e) Establecer las condiciones de caso/s trivial/es y caso/s no trivial/es (5%)

$B_t \equiv$ k = 1 la sección de la matriz tiene un única fila y columna, esto es, un único elemento.

$B_{nt} \equiv$ k > 1 la sección de la matriz tiene varias filas y columnas, el mismo número de ambas.

f) Explicar razonadamente la solución propuesta para el/los caso/s trivial/es, esto es, *triv*($\bar{x}$) (15%)

En el caso de que la sección de la matriz tratada tuviera un único elemento (k = 1), ese único elemento pertenece a la diagonal principal, por lo que al no existir más elementos (ni por encima ni por debajo de la diagonal) la solución del problema será VERDADERO ya que las secciones a tratar serán vacías.

g) Explicar razonadamente la solución propuesta para el/los caso/s no trivial/es, esto es, explicar la función de combinación *c*($\bar{x}$, $\overline{y'}$) (25%)

La solución del problema iEvaluacion(A, k) consiste en determinar si todos los elementos por encima de la diagonal principal de la sección de la matriz A[1..k][1..k] son pares y si todos los elementos por debajo de la diagonal principal de la sección de la matriz A[1..k][1..k] son impares, esto es,

$$(\forall i)((\forall j)\ (A[\ i\ ][\ j\ ]\ \%\ 2 \neq 0 \text{ y } A[\ j\ ][\ i\ ]\ \%\ 2 = 0: 1 \leq j \leq i\text{-}1\ ): 1 \leq i \leq k),$$

llamamos a dicho resultado, b.

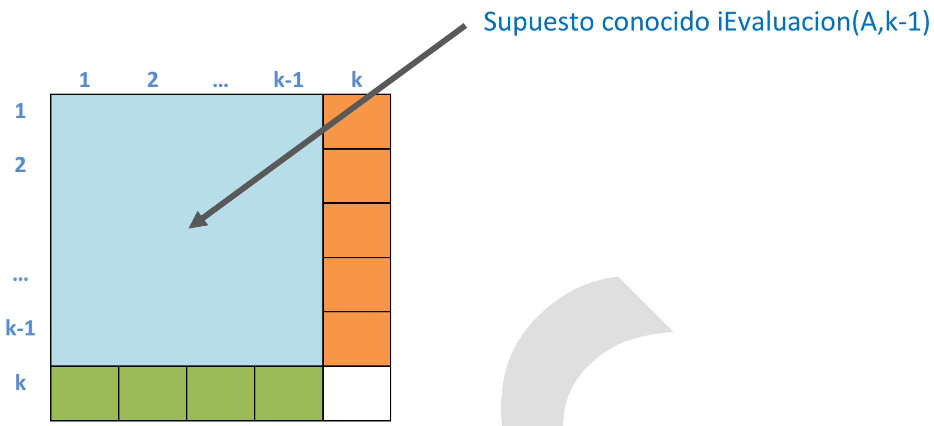
Hipótesis de recurrencia: Supongamos conocida la solución del subproblema iEvaluacion(A, k-1). Llamaremos a dicho valor, b´. Esto quiere decir que suponemos conocido si todos los elementos por encima de la diagonal principal de la sección de la matriz A[1..k-1][1..k-1] son pares y si todos los elementos por debajo de la diagonal principal de la sección de la matriz A[1..k-1][1..k-1] son impares, esto es,

$$(\forall i)((\forall j)\ (A[\ i\ ][\ j\ ]\ \%\ 2 \neq 0 \text{ y } A[\ j\ ][\ i\ ]\ \%\ 2 = 0: 1 \leq j \leq i\text{-}1\ ): 1 \leq i \leq k\text{-}1),$$

Por lo que para obtener la solución del problema iEvaluacion(A, k) a partir de la solución del subproblema iEvaluacion(A,k-1) bastaría comprobar que los elementos A[k][1], A[k][2], …., A[k][k-1] son impares y que los elementos A[1][k], A[2][k], …., A[k-1][k] son pares, esto es,

$$(\ \forall\ j\ )\ (\ A[\ k\ ][\ j\ ]\ \%\ 2 \neq 0 \text{ y } A[\ j\ ][\ k\ ]\ \%\ 2 = 0: 1 \leq j \leq k\text{-}1\ ) \qquad (1)$$

Graficamente,



Por tanto, para obtener iEvaluacion(A,k) deberemos comprobar además si:

a) A[k][1] %2 ≠ 0 AND A[k][2] %2 ≠ 0 AND … AND A[k][k – 1] %2 ≠ 0 (en verde) y

b) A[1][k] %2 = 0 AND A[2][k] %2 = 0 AND … AND A[k – 1][k] %2 = 0 (en naranja)

h) Escribir la función inmersora en pseudocódigo, incluyendo función/es auxiliar/es si se precisan (20%)

```
Función iEvaluacion ( A[1..n][1..n]: matriz de enteros; k : entero ) retorna ( b:booleano )
  caso
            k = 1 → VERDADERO
            k > 1 → iEvaluacion ( A, k-1 ) AND AUX (A, k )
  fcaso
ffunción
```

La llamada inicial a la función iEvaluacion se realiza del siguiente modo: iEvaluacion(A, n).

La función AUX(A, k) es una función que calcula (1).-

```
Función AUX ( A[1..n][1..n]: matriz de enteros; k : entero ) retorna ( b:booleano )
var i : entero, resul : booleano fvar
i = 0
resul = VERDADERO
mientras ( i < k-1 AND resul )
      i = i + 1
      si ( A[ i ][ k ] %2 ≠ 0 OR A[ k ][ i ] %2 = 0 ) entonces
          resul = FALSO
      fsi
fmientras
retorna resul
ffunción
```

2.- [2 puntos] Dada la siguiente función recursiva, se pide verificar formalmente su corrección:

$Q' \equiv \{ 0 \le k \le n \wedge x \ge 0 \}$

Función iF2 (A[1..n] : vector de enteros, x : entero, k : entero) retorna (p : entero)
    caso
        $k = 0 \rightarrow 0$
        $k > 0 \rightarrow$ iF2 (A, x, k-1) + (A[k] + x^k)
    fcaso
ffuncion

$R' \equiv \{ p = (\Pi\, i)\,(A[i] + x^i : 1 \le i \le k) \}$

La llamada inicial a la función se realizará con k = n, de ese modo.-

F2 (A, x) = iF2 (A, x, n)

SOLUCIÓN:

1. $Q(\overline{x}) \Rightarrow B_t(\overline{x}) \vee B_{nt}(\overline{x})$

$0 \le k \le n \wedge x \ge 0 \Rightarrow k = 0 \vee k > 0$ Se cumple.

2. $Q(\overline{x}) \wedge B_{nt}(\overline{x}) \Rightarrow Q(s(\overline{x}))$

$0 \le k \le n \wedge x \ge 0 \wedge k > 0 \Rightarrow k-1 \ge 0$ Se cumple.

3. $Q(\overline{x}) \wedge B_t(\overline{x}) \Rightarrow R(\overline{x}, triv(\overline{x}))$

$0 \le k \le n \wedge x \ge 0 \wedge k = 0 \Rightarrow 0 = (\Pi\, i)\,(A[i] + xi : 1 \le i \le k)$

No se cumple, ya que cuando k=0 tendremos que el cuantificador Π afecta a un rango vacío, por lo que su valor es 1 (elemento neutro de la operación producto). Sin embargo, la función iF2 devuelve 0. Para que se cumpla la poscondición en el caso trivial, la función debería retornar 1.

4. $Q(\overline{x}) \wedge B_{nt}(\overline{x}) \wedge R(s(\overline{x}),\overline{y}') \Rightarrow R(\overline{x},c(\overline{y}',\overline{x}))$

$0 \le k \le n \wedge x \ge 0 \wedge k > 0 \wedge p' = (\Pi\, i)\,(A[i] + x^i : 1 \le i \le k\text{-}1) \Rightarrow p = p' + (A[k] + x^k)$

$p = p' + (A[k] + x^k) = (\Pi\, i)\,(A[i] + x^i : 1 \le i \le k\text{-}1) + (A[k] + x^k) \ne (\Pi\, i)\,(A[i] + x^i : 1 \le i \le k)$

No se cumple, ya que la función de combinación de iF2 consiste en sumar el término k-ésimo cuando en realidad debería multiplicar el término k-ésimo, esto es, $p = p' * (A[k] + x^k)$ ya que el cuantificador Π representa la operación producto $((A[1] + x^1)*(A[2] + x^2)* \ldots *(A[k] + x^k))$

5. Encontrar una función $t:D \to Z$, tal que $Q(\overline{x}) \Rightarrow t(\overline{x}) \ge 0$

$t(A,x,k) \overset{def}{=} k$

$0 \le k \le n \wedge x \ge 0 \Rightarrow k \ge 0$ Se cumple.

6. $Q(\overline{x}) \wedge B_{nt}(\overline{x}) \Rightarrow t(s(\overline{x})) < t(\overline{x})$

$0 \le k \le n \wedge x \ge 0 \wedge k > 0 \Rightarrow k\text{-}1 < k$ Se cumple.