ALGORITMIA

06-09-2022

TEMA 2: DISEÑO ALGORITMOS RECURSIVOS

Recursividad: situación en la que un procedimiento o función hace referencia a sí mismo dentro de su definición.

Ejemplo de la función factorial

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Donde se realiza un "caso base" para $n = 0$ y un caso general para $n > 0$ cuya formulación es recursiva, esto se llama demostración por inducción.

* Cuando diseñamos una función recursiva podemos suponer que está resuelta para un tamaño menor.

EJEMPLO - PROBLEMA: Calcular la potencia n-ésima de a, siendo $a \geq 0$ y $n \geq 0$

Precondición (Q): conjunto de estados iniciales para los que el algoritmo funciona correctamente.

$$Q \equiv \{ a \geq 0 \wedge n \geq 0 \}$$

Función POTENCIA (a: entero, n: entero) retorna (p: entero)

→ Hay que buscar y plantear el caso base con la precondición, con la cadena de invocaciones.

Si $n = 0$ entonces retorna 1 $\Rightarrow$ $a^0 = 1$

Sino retorna POTENCIA$(a, n-1) \cdot a$

fsi

ffunción

CADENA DE INVOCACIONES

$$(a, n) \Rightarrow (a, n-1) \Rightarrow (a, n-2) \Rightarrow (a, 2), \Rightarrow (a, 1) \Rightarrow (a, 0)$$

↳ Es una sucesión decreciente y finita

Ejemplo
$a = 2$
$n = 3$

1° llamada	→ 2° llamada	→ 3° llamada	→ 4° llamada
$a = 2$, $n = 3$	$a = 2$, $n = 2$	$a = 2$, $n = 1$	$a = 2$, $n = 0$
$\boxed{p = 4 \cdot 2 = 8}$ ←	$p = 2 \cdot 2 = 4$ ←	$p = 2 \cdot 1 = 2$ ←	$p = 1$

SOLUCIÓN

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

Para garantizar que el planteamiento recursivo es correcto usaremos esta herramienta teórica. El principio de inducción se establece sobre el conjunto de los nº naturales $\mathbb{N}$ y tiene tres etapas, Base, Recurrencia y Conclusión.

El principio de inducción permite demostrar una propiedad P para cualquier nº natural, por ejemplo $\forall n \in \mathbb{N}$, a^n se puede calcular como:

$a^{n-1} \cdot a$

EXISTEN DOS TIPOS INDUCCIÓN:

Inducción débil: Supone que la afirmación es cierta para $n-1$ para entonces demostrar que es cierta en n.

Inducción fuerte: Se asume que la afirmación es verdadera para todos los $m < n$ (al menos el caso base) y a partir de ahí demostrar n.

EJEMPLO INDUCCIÓN DÉBIL

Demostrar P: "$10^n - 1$ es divisible por 9, $\forall n \in \mathbb{N}$"

Base:

P se cumple para $n = 0 \Rightarrow 10^0 - 1 = 0 - 1 = 0 \Rightarrow 0 \cdot 9 = \boxed{0}$ ✓

Recurrencia:

→ Hipotesis: Suponemos que $10^n - 1$ es divisible por 9.

→ Tesis: Se demuestra que entonces $10^{n+1} - 1$ también es divisible por 9.

$$10^{n+1} - 1 = 10 \cdot 10^n - 1 = 10 \cdot (a \cdot 9 + 1) - 1 = 90a + 10 - 1$$

$$\Rightarrow 9(10a + 1) \Rightarrow \text{Múltiplo de } 9$$

$10^n = (a \cdot (9+1))$

Conclusión:

El principio de inducción nos permite concluir que para la propiedad P es cierto $\forall n \in \mathbb{N}$

ALGORITMIA

06-09-2022

EJEMPLO DE INDUCCIÓN FUERTE

Demostrar P: "P se cumple para todos IN ≥ que b"

Base:

P se cumple para un natural b.

Recurrencia:

- Hipotesis: Se supone P cierto para todo IN del intervalo $[b, n]$ con $n \geq b$
- tesis: Se demuestra que entonces P se cumple para IN $n+1$

Conclusión:

El resultado satisfactorio en cada una de las etapas anteriores, permite establecer que P es cierto $\forall n \in \mathbb{N}$ cuando $n \geq b$.

EJEMPLO II DE INDUCCIÓN FUERTE

Demostrar P: "Todo nº IN n, siendo $n \geq 2$ puede descomponerse en un producto de nº primos".

Base:

P se cumple para $n=2 \Rightarrow 2 = 2*1$, el 2 y el 1 son primos.

Recurrencia: Hipotesis:

P se cumple para todo el intervalo $[2, n]$ con $n \geq 2$.

Tesis:

Entonces P se cumple también para $n+1$.

Dos posibilidades:

- $n+1$ es primo: tesis demostrada
- $n+1$ NO es primo: $n+1 = a*b$ y $1 < a < n+1$ y $1 < b < n+1$. Por inducción satisfacen la propiedad

Conclusión

P se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$ siendo $n \geq 2$

09-09-2022

Modelo general de funciones recursivas

$\{Q(\bar{x})\}$ → PRECONDICIÓN

$\bar{x}$ e $\bar{y}$ son tuplas

s ≡ función sucesor

c ≡ función combinación

función $f(\bar{x}: T_1)$ retorna $(\bar{y}: T_2)$

caso

$B_t(\bar{x}) \longrightarrow triv(\bar{x})$ → CASO BASE

$B_{nt}(\bar{x}) \longrightarrow c(f(s(\bar{x})), \bar{x})$ → RESTO CASOS

fcaso

ffunción

$\{R(\bar{x}, \bar{y})\}$ → POSTCONDICIÓN

Lenguaje formal

Sea A un algoritmo del que conocemos sus parámetros de entrada y resultados. Tenemos la precondición Q, que incluye como variables libres los parámetros de entrada de A y los estados en que puede ejecutarse. Y se utiliza R como postcondición de la misma forma.

$\{Q\}\ A\ \{R\}$ → Si A comienza su ejecución en un estado que satisface Q, entonces la ejecución de A termina y lo hace en un estado que cumple R.

EJEMPLOS

Sumatorio (Σ) ⟶ $(\Sigma i)(A[i] : 1 \le i \le n)$

Maximo/Min (Max/Min) ⟶ $(MAX/MIN\ i)(A[i] : 1 \le i \le n)$

$Q \equiv \{a \ge 0 \wedge n \ge 0\}$ – Precondición

Función POTENCIA (a: entero, n: entero) retorna (p: entero)

si n = 0 entonces retorna 1

sino retorna POTENCIA(a, n-1) · a

fsi

ffunción

$R \equiv \{p = a^n\}$

$\bar{x} \equiv (a, n)$	$B_t(a,n) \equiv (n = 0)$
$\bar{y} \equiv p$	$B_{nt}(a,n) \equiv (n > 0)$
$Q(a,n) \equiv (a \ge 0 \wedge n \ge 0)$	$s(a,n) \equiv (a, n-1)$
$R((a,n)p) \equiv (p = a^n)$	$triv(a,n) \equiv 1$
$c(p', (a,n)) \equiv p' \cdot a$	DATOS

ALGORITMIA

09-09-2022

EJEMPLO CON FACTORIAL - PARA COMPLETAR

$Q \equiv \{ n \geq 0 \}$

Función FACTORIAL (n: entero) retorna (p: entero)

caso

$Bt(\bar{x}) \longrightarrow$ n=0 entonces retorna 1

$Bnt(\bar{x}) \longrightarrow$ sino retorna FACTORIAL(n-1)·n

fcaso

ffunción

$R \equiv \{ p = n! \}$

EJEMPLO CON Nº CIFRAS - PARA COMPLETAR

$Q \equiv \{ n \geq 0 \}$

Función NUMERO_CIFRAS (n: entero) retorna (p: entero)

caso

$Bt(\bar{x}) \longrightarrow$ n≤1 entonces retorna 1

$Bnt(\bar{x}) \longrightarrow$ sino retorna NUMERO_CIFRAS(n/10) + 1

fcaso

ffunción

$R \equiv \{ p = N \}$

FACTORIAL

$\bar{x} \equiv (n)$

$\bar{y} \equiv p$

$Q(n) \equiv (n \geq 0)$

$R((n), p) \equiv (p = N)$

$C(p', (n)) \equiv p' \cdot n$

$Bt(n) \equiv (n = 0)$

$Bnt(n) \equiv (n > 0)$

$S(n) \equiv (n-1)$

$triv(n) = 1$

13/10/2022

Tableros

caso base: $n = u \rightarrow$ retorna 1

caso general: $n > u \rightarrow$ retorna Tableros $(n-1) \cdot n + n$?

9 casos si $n=4$ y $u=2$

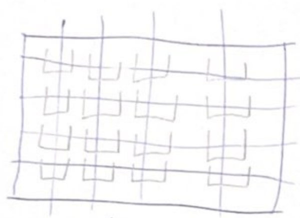
4 casos si $n=3$ y $u=2$

1 caso si $n=2$ y $u=2$

Impar → Tableros $(n-1) + n$

Par → Tableros $(n-1) + (n+1)$

$n=4$
→ Tableros(3) + 5
→ Tableros(2) + 5 + 3
→ $1 + 3 + 5 = \boxed{9}$



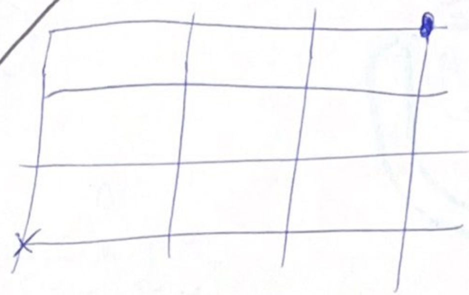
16 casos
$n=5$ y $u=2$

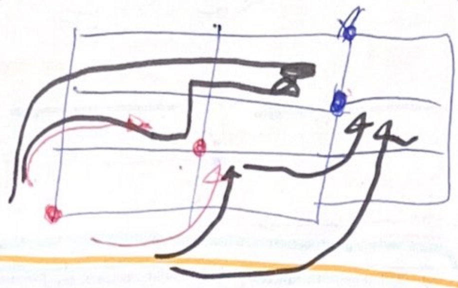
Tableros(4) + 5 + 1
→ Tableros(3) + ~~...~~ 6 + 4
→ Tableros(2) + ~~...~~ 6 + 4
→ ~~...~~

$n=5 \Rightarrow (4) + 5$
$n=4 \Rightarrow$ → $(3) + 5 + 5$
$n=3 \Rightarrow$ → $(2) + 10 + 3$
$n=2 \Rightarrow$ → $1 + 10 + 3 \Rightarrow 14$

$n=5 \Rightarrow$ Tableros $(5-1) + 5$
→ $n=4$ Tableros $(4-1) + (4+1)$

~~T(x-1, y-1)~~





CASO BASE

$\boxed{\text{Si } x \vee y = 0 \Rightarrow \underset{2}{1}}$

(1,1) = 2

(0,0)

1 + 1

(2,1)

⇓

(1,0)

1

(0,0) ⇒ 0

(0,1) ⇒ 1

(0,2) ⇒ 1

(2,0) ⇒ 1

(0,1) ⇒ 1 camino

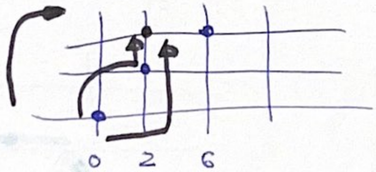
(1,0) ⇒ 1 camino

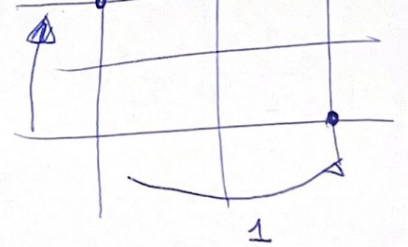
(2,1) = 3

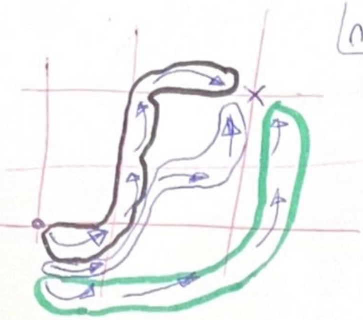
(1,1) (2,0) = 1

(1,0) (0,1)

1 1

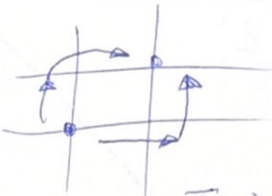






n^2

$n=1 \Rightarrow 2$



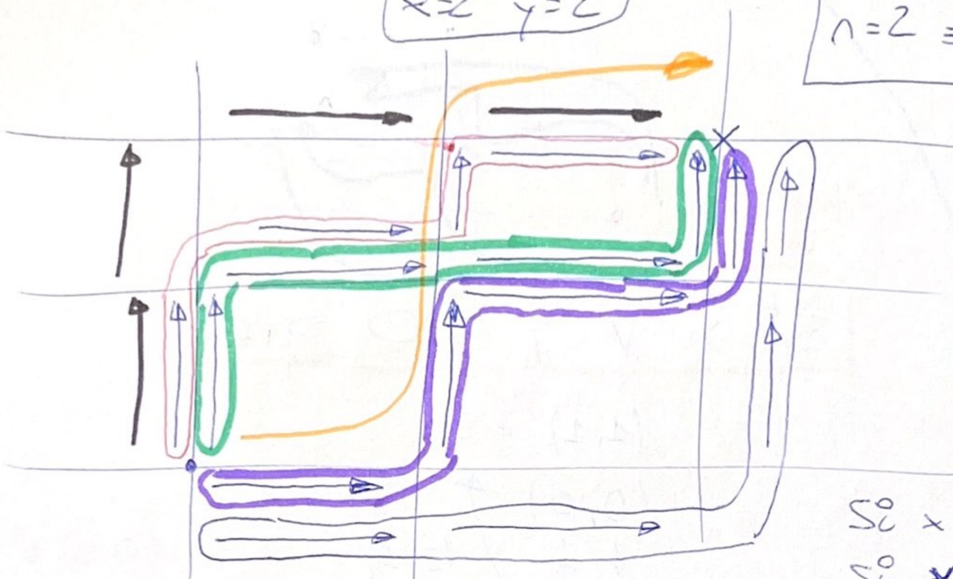
$$T(n) = \begin{cases} x=0 \Rightarrow 1 \\ y=0 \Rightarrow 1 \\ T(x-1, y-1) \end{cases}$$

$n \cdot n$

$x=n \quad y=n$

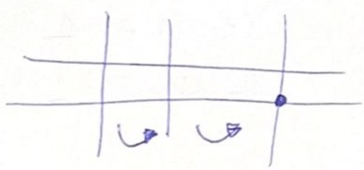
$x=2 \quad y=2$

$n=2 \Rightarrow 6$



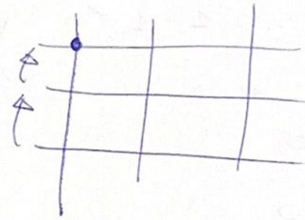
Si $x=0 \Rightarrow 1$

Si $y=0 \Rightarrow 1$



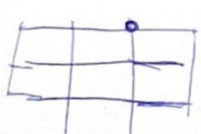
$y=0 \Rightarrow 1$ camino

$(x=2)$

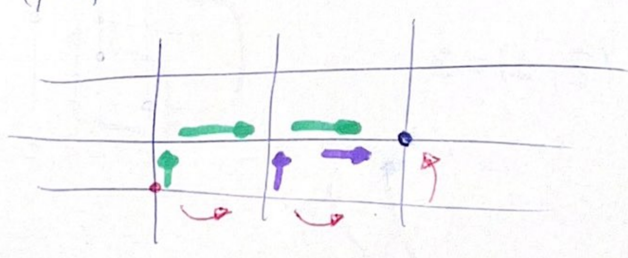


$x=0 \Rightarrow 1$ camino

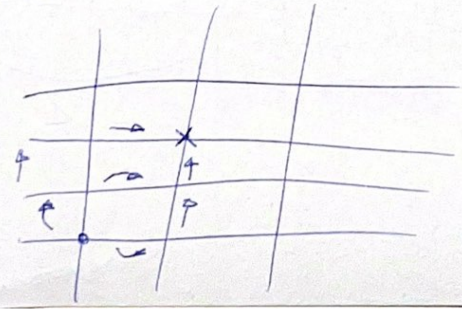
$(y=2)$



$x=2$
$y=2$ $\Rightarrow$ 5 caminos

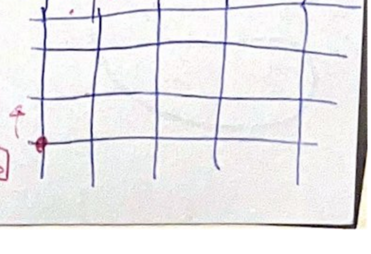


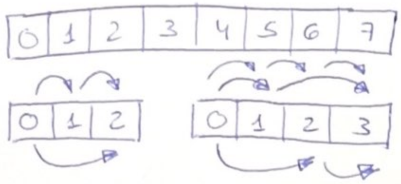
$x=2$
$y=1$ $\Rightarrow$ 3 caminos

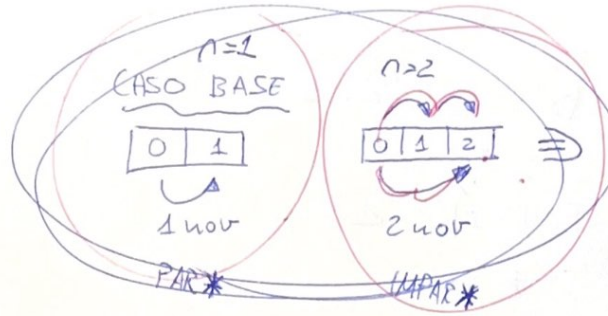


$y=2$
$x=1$ $\Rightarrow$ 3 caminos

$y=3$ $(+1)$ $y=4$
$x=0$ $\quad$ $x=0$ $\boxed{5}$







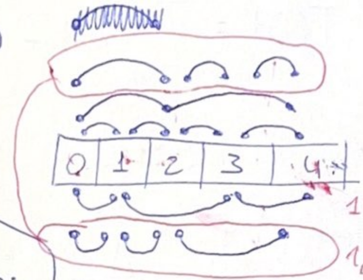
$$T(n) = \begin{cases} C_1\ (1) & n = 1 \\ & \\ T(n-1) + 1 & \end{cases}$$

] CASO BASE

RECURRENCIA

3 = 2 +

PAR* n = 3
4 caminos



IMPAR*

n = 4
5 caminos

Para n = 3

$\Rightarrow$ 3 = 2 + 1

$\Downarrow$

T(2)

2 = 2

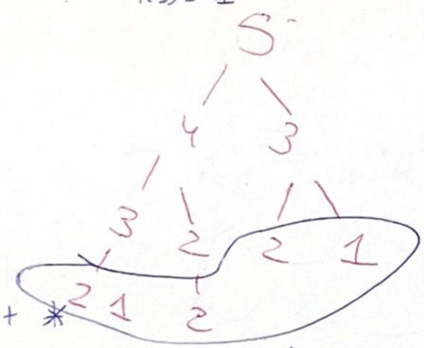
Para n = 4

4(+1) = T(3) + 1

3 = T(2) + 1

T(2) = T(1) + 1

T(1) = 1



3 = T(2) + * = 8

1 2 4 5

2 ... 989 990

T(2) = 2

$$\boxed{T(n) = T(n-1) + 2}$$

3 $\Rightarrow$ T(3 - 1) + 2 $\Rightarrow$ 3 = 4

T(2) = 2

$2^3 = 2^2 \cdot 2$

(8)

$2^2 = 2 \cdot 2$

T = T(4-1) + 2 = T = 5

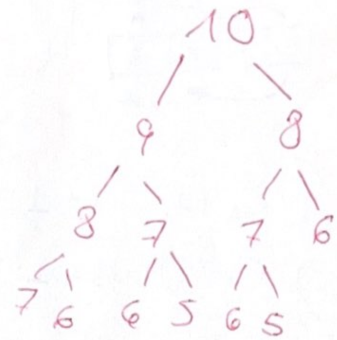
0	1	2	3	4

$\equiv 5$ caminos

$n = 4 \Rightarrow$

$T(4) = T(4-1) + 1$

$\downarrow$ 4



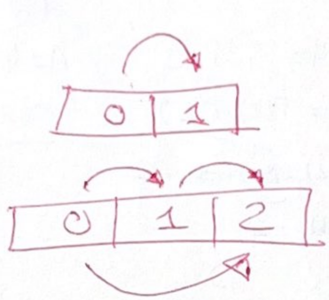
(4) $T(3) = T(2) + 2 \Rightarrow$ 4 caminos

$\downarrow$ 2

n=3
4 caminos

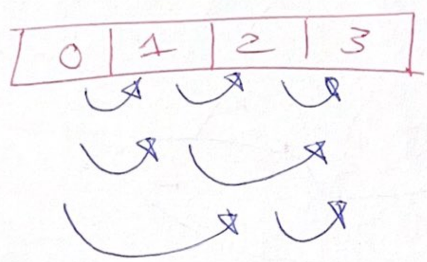
1

2



$\begin{cases} n = 1 \Rightarrow 1 \\ n = 2 \Rightarrow 2 \end{cases}$

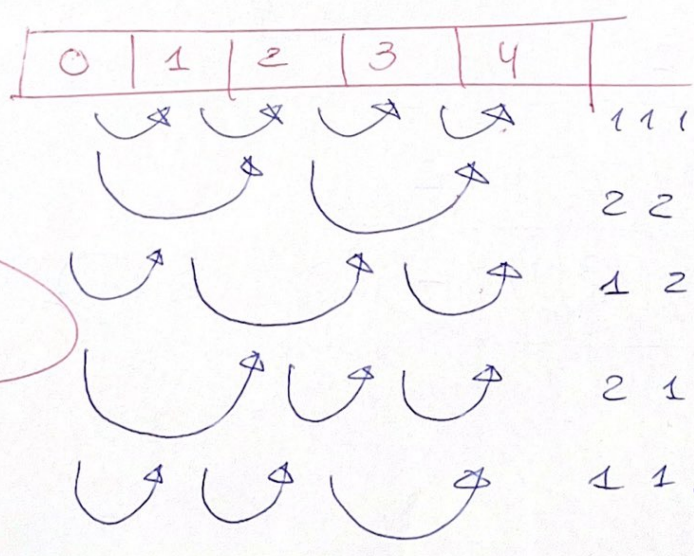
3



$n = 3 \Rightarrow 3$

1 1 1 +1
1 2 +1
2 1 +1

5



1 1 1 1
2 2
1 2 1
2 1 1
1 1 2

$\{ T(n-1) + T(n-2)$

$(501-1) + (500-2)$

499
498
1997

9+8=17

18/10/2022

ALGORITMIA

$Q \equiv \{ n > 0 \} \Rightarrow Q' \equiv \{ 1 \leq i \leq j \leq n \}$

función CAPICUA(A[1..n] : vector, | retorna (b: booleano)

caso

fcaso

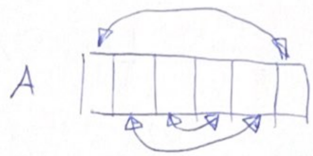
ffuncion

$R \equiv \{ b = (\forall k)(A[k] = A[n-k+1] : 1 \leq k \leq n) \}$

$A[1] = A[n]$

$A[2] = A[n-1] \simeq A[n-2+1]$

$A[3] = A[n-2] \simeq A[n-3+1]$

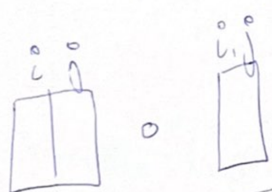


$1 \leq k \leq j \leq n$

caso

BASE → $\begin{cases} i = j \\ i = j-1 \quad A[i] = A[j] \end{cases}$

RECURRENCIA → ¿CAPICUA(A, i+1, j-1) AND (A[i] = A[j])



$Q \equiv \{ n > 0 \} \Rightarrow Q' \equiv \{ 1 \leq k \leq n \}$

$e' = \frac{A[1] + A[2] + A[k-1]}{\cancel{(k-1)}} + \frac{A[k]}{k}$

función ¿MEDIA (A[1...n]: vector reales, k: entero | retorna (e: real)

$k = 1 \rightarrow A[k]$

$k > 1 \rightarrow$ (¿MEDIA (A, k-1) + A[k] · (k-1) + A[k])/k

$R' \equiv \{ e = (\Sigma i)(A[i] = 1 \leq i \leq n)/n \}$

($n \downarrow k$, $n \downarrow k$)

MEDIA(A) = ¿MEDIA(A, n)

Dada Matriz $M[1 \ldots n][1 \ldots m]$ con $n \wedge m > 0$ Su valor, es el doble que el elemento izquierdo.

2	4	8	16

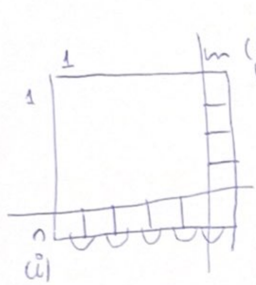
CASO BASE ⇒ ~~[illegible]~~ CIERTO

$j=1$

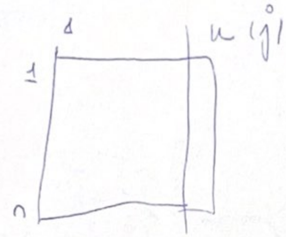
CASO RECURRENCIA ⇒

$$¿DOBLE(M[i][j-1]) \wedge 2M[i][j] = M[i][j+1]$$

$$R \equiv \{s = (\forall i)((\forall j)(2M[i][j] = M[i][j+1] : 1 \leq j \leq m-1) : 1 \leq i \leq n)\}$$



o



⇒ funcion COMPRUEBA ($M[1 \ldots n][1 \ldots m]$: matriz enteros; k: entero) retorna (s: bool)

caso

fcaso

0 = Rango VACIO ≡ $\forall$ ≡ CIERTO

$$R \equiv \{s = (\forall i)((\forall j)(2M[i][j] = M[i][j+1] : 1 \leq j \leq 1-1) : 1 \leq i \leq n)\}$$

ALGORITMIA

19/10/2022

Verificación formal:

Estas son las 6 propiedades que demuestran que un algoritmo es correcto.

1. $Q(\bar{x}) \Rightarrow Bt(\bar{x}) \vee Bnt(\bar{x})$
2. $Q(\bar{x}) \wedge Bnt(\bar{x}) \Rightarrow Q(s(\bar{x}))$
3. $Q(\bar{x}) \wedge Bt(\bar{x}) \Rightarrow R(\bar{x}, triv(\bar{x}))$ ← BASE
4. $Q(\bar{x}) \wedge Bnt(\bar{x}) \wedge R(s(\bar{x}), \bar{y}') \Rightarrow R(\bar{x}, c(\bar{y}', \bar{x}))$ ← RECURRENCIA
5. $t: D \rightarrow Z$ tal que $Q(\bar{x}) \Rightarrow t(\bar{x}) \geq 0$
6. $Q(\bar{x}) \wedge Bnt(\bar{x}) \Rightarrow t(s(\bar{x}))$

Ejemplo 1 - POTENCIA

$Q \equiv \{ a \geq 0 \wedge n \geq 0 \}$

FUNCION POTENCIA (a, n: entero) retorna (p: entero)

$n = 0 \Rightarrow 1$

$n > 0 \Rightarrow$ POTENCIA$(a, n-1) \cdot a$

* Q ⇒ La a no aparece al no sufrir variaciones

ffunción

$R \equiv \{ p = a^n \}$

VERIFICACIÓN FORMAL

1. $n \geq 0 \Rightarrow n = 0 \vee n > 0$
2. $n \geq 0 \wedge n > 0 \Rightarrow (n-1) \geq 0$
3. $n \geq 0 \wedge n = 0 \Rightarrow 1 = a^n \rightarrow$ si ya que $1 = a^0 \Rightarrow 1 = 1$ ✓ DEMOSTRAR CASO BASE
4. $n \geq 0 \wedge n > 0 \wedge (p' = a^{n-1}) \Rightarrow a \cdot p' = a^n$
   ↳ $p = a \cdot p'$
5. $t(a, n) \Rightarrow n \geq 0 \Rightarrow n \geq 0$
6. $n \geq 0 \wedge n > 0 \Rightarrow n - 1 < n$

EJEMPLO 2 - FACTORIAL

$\{n \geq 0\}$

función FACTORIAL (n: entero) retorna (f: entero)

$n = 0 \Rightarrow 1$

$n > 0 \Rightarrow$ FACTORIAL $(n-1) \cdot n$

ffunción

$\{f = (\Pi i)(i : 1 \leq i \leq n)\}$

VERIFICACIÓN FORMAL

1. $n \geq 0 \Rightarrow n = 0 \lor n > 0$
2. $n \geq 0 \land n > 0 \Rightarrow (n-1) \geq 0$
3. $n \geq 0 \land n = 0 \Rightarrow f = 1$ y $(\Pi i)(i : 1 \leq i \leq 0) \Rightarrow 1 = 1$

PRODUCTO RANGO VACIO ES 1

4. $n \geq 0 \land n > 0 \land (f' = (\Pi i)(i : 1 \leq i \leq n-1)) \Rightarrow f' \cdot n$

(FACTORIAL$(n-1) \cdot n = n!$

$f = f' \cdot n$

5. $n \geq 0 \Rightarrow n \geq 0$
6. $n \geq 0 \land n > 0 \Rightarrow n - 1 < n$

Q $\{n \geq 0\}$

Función F (n: entero) retorna (p: entero

$n = 0 \Rightarrow 1$

$n = 1 \Rightarrow 3$

$n > 1 \Rightarrow 2 \cdot F(n-1) + 3 \cdot F(n-2)$

ffunción

R $\{p = 3^n\}$

VERIFICACIÓN FORMAL

1. $n \geq 0 \Rightarrow n = 0 \lor n = 1 \lor n > 1$
2. $n \geq 0 \land n > 1 \Rightarrow (n-1) \geq 0$] 2 sucesores

$n \geq 0 \land n > 1 \Rightarrow (n-2) \geq 0$

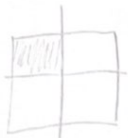
3. $n \geq 0 \land n = 1 \Rightarrow 3 = 3^n \Rightarrow$ si ya que $3^1 = 3$

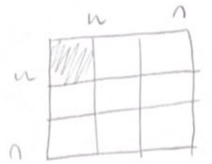
$n \geq 0 \land n = 0 \Rightarrow 1 = 3^0 \Rightarrow$ si ya que $3^0 = 1 = 1$

4. $n \geq 0 \land n > 1 \land (p_1 = 3^{n-1}) \land (p_2 = 3^{n-2}) \Rightarrow 2 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 = 3^n$

...

5. $n \geq 0 \Rightarrow n \geq 0$
6. $n \geq 0 \land n > 1 \Rightarrow n-1 < n$ y $n \geq 0 \land n > 1 \Rightarrow n-2 < n$





$n = 3\times3$
$u = 1\times1$

$\boxed{\begin{array}{l} n-u+1 = 2 \\ (n-u+1)-1 = 1 \end{array}} > 3$

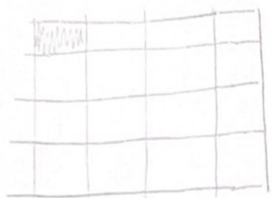
$n - u + 1$

$\cancel{3 - 1 + 1 - 1 \Rightarrow 3}$
$\cancel{3 - 1 + 1 \Rightarrow 3}$

$n - u = 2$

$\boxed{\begin{array}{l} n - u(n) = 6 \\ n - u = 2 \end{array}} > 8$

$n - u($



$4 - 1(4) = 12 > 15$
$4 - 1 = 3$

22/10/2022

ALGORITMIA

INMERSIÓN NO FINAL

EJERCICIO 1

①

$Q' \equiv \{ 1 \leq j \leq n \wedge x \geq 0 \}$

Función $iF1(A[1..n]$: vector enteros, x: entero, j: entero) retorna (p: entero)

caso

$j = 1 \Rightarrow A[j] + x^j$

$j > 1 \Rightarrow iF1(A, x, j-1) * (A[j] + x^j)$

fcaso

$R' \equiv \{ p' = (\prod i) (A[i] + x^i : 1 \leq i \leq j) \}$

La llamada inicial es $j = n \Rightarrow F1(A,x) = iF1(A, x, n)$

②

$Q' \equiv \{ 1 \leq j \leq n \wedge x \geq 0 \}$

Función $iF1(A[1..n]$: vector enteros, x: entero, j: entero) retorna (p: entero)

caso

$j = n \Rightarrow A[j] + x^j$

$j < n \Rightarrow iF1(A, x, j+1) * (A[j] * x^j)$

fcaso

$R' \equiv \{ p' = (\prod i) (A[i] + x^i : j \leq i \leq n) \}$

La llamada ... $j = 1$

$F1(A,x) = iF1(A, x, 1)$

EJERCICIO 2

(1)

$Q' \equiv \{ 1 \le j \le n \wedge x \ge 0 \}$

Funcion ¿F2(A[1..n]: vector enteros, x: entero, j: entero) retorna (p: booleano)

caso

$j = 1 \Rightarrow A[j] = x$

$j > 1 \Rightarrow$ ¿F2$(A, x, j-1)$ $\vee$ $A[j] = x$

$R' \equiv \{ p = (\exists i)(A[i] = x : 1 \le i \le j) \}$

$j = n \Rightarrow F2(A, x) =$ ¿F2(A, x, n)

(2) $Q' \equiv \{ 1 \le j \le n \wedge x \ge 0 \}$

Funcion ¿F2 (A[1..n]: vector de enteros, x: entero, j: entero) retorna p

caso

$j = n \Rightarrow A[j] = x$

$j < n \Rightarrow$ ¿F2$(A, x, j+1)$ $\vee$ $A[j] = x$

$R' \equiv \{ p = (\exists i)(A[i] = x : j \le i \le n) \}$

$j = 1$

$F2(A, x) =$ ¿F2$(A, x, 1)$

EJERCICIO 3

(1)

$Q' = \{ 1 \le j \le n \}$

Función iF3(A[1..n]: vector, j: entero) retorna (p: entero)

caso

$j = 1 \Rightarrow (A[j] = 3)$

$j > 1 \Rightarrow iF3(A, j-1) + (A[j] = 3)$

$R' = \{ p = (N i)(A[i] = 3 : 1 \le i \le j) \}$

$j = n$

$F3(A) = iF3(A, n)$

(2)

$Q' = \{ 1 \le j \le n \}$

Función iF3(A[1..n]: v, j: entero) retorna (p: entero)

caso

$j = n \Rightarrow (A[j] = 3)$

$j < n \Rightarrow iF3(A, j+1) + (A[j] = 3)$

fcaso

ffunción

$R' = \{ p = (N i)(A[i] = 3 : j \le i \le n$

$j = 1$

$F3(A) = iF3(A, 1)$

EJERCICIO 4

(1)

$Q' \equiv \{ 1 \le j \le n \}$

Funcion iF4 (A[1..n]: vector, j: entero) retorna (p: entero)

caso

$j = 1 \Rightarrow (A[j])$

$j > 1 \Rightarrow \cancel{MAX}\ iF4(A, j-1) > A[j])$

fcaso

ffuncion

$R' \equiv \{ p = (MAX\ i)(A[i]: 1 \le i \le j) \}$ $\quad j = n$

$F4(A) = iF4(A, n)$

$Q' \equiv \{ 1 \le j \le n \}$

j: entero

$j = n \Rightarrow A[j]$

$j < n \Rightarrow MAX(iF4(A, j+1), A[j])$

$R' \equiv \{ p = (MAX\ i)(A[i]: j \le j \le n) \}$

$j = 1$

$F4(A) = iF4(A, 1)$

EJERCICIO 5

(1) $Q' \equiv \{ 0 \le j \le n \wedge x \ge 0 \}$

j: entero

caso

$j = 0 \Rightarrow 1$

$j > 0 \Rightarrow iFS(A, x, j-1) * (A[j] * x^j)$

fcaso

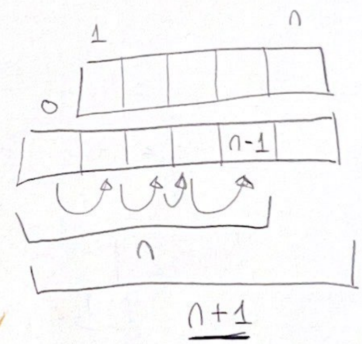
ffunción

$R' \equiv \{ p = (\Pi i)(A[i] + x^i : 0 \le j \le i) \}$ $\quad j = n$

$FS(A, x) = iFS(A, x, n)$

(2) $Q' \equiv \{ 0 \le j \le n \wedge x \ge 0 \}$

j: entero



caso

$j = n+1 \Rightarrow 1$

$j < n+1 \Rightarrow iFS(A, x, j+1) \cdot (A[j] + x^j)$

$R' \equiv \{ p = (\Pi i)(A[i] + x^i : j \le i \le n) \}$

$j = 1 \qquad FS(A, x) = iFS(A, x, 1)$

EJERCICIO 6

(1)

$Q \equiv \{0 \le j \le n \wedge x \ge 0\}$

j entero

$j = 0 \Rightarrow$ FALSO

$j > 0 \Rightarrow$ ¿$F6(A, x, j-1) \vee A[j] = x$?

$R \equiv \{p = (\exists i)(A[i] = x : 1 \le i \le j)\}$

$j = n \quad F6(A, x) = F6(A, x, n)$

(2)

$Q \equiv \{\cancel{0 \le} j \le n \wedge x \ge 0\}$ $\quad (1 \le j \le n+1)$

j entero

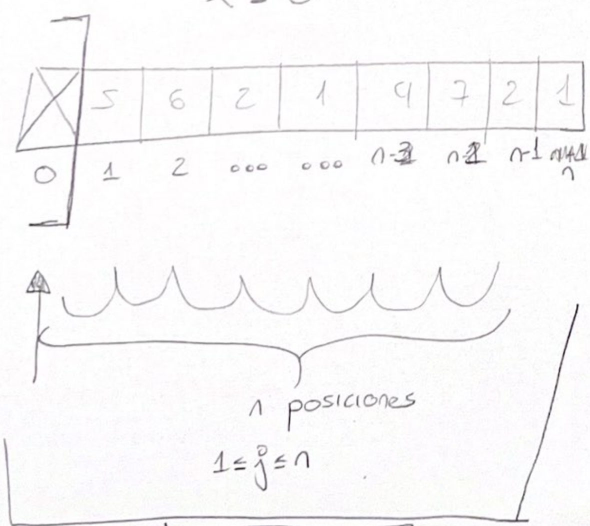
$j = n+1 \Rightarrow$ FALSO

$j < n+1 \Rightarrow$ ¿$F6(A, x, j+1) \vee A[j] = x$?

$R \equiv \{p = (\exists i)(A[i] = x : j \le i \le n)\}$

$j = 1 \quad F6(A, x) = F6(A, x, 1)$

$x \ge 0$



$\boxed{Q \equiv 1 \le j \le n+1}$

EJERCICIO 7

$n \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$

$A[n] \quad A[4] \quad A[3] \quad A[2] \quad A[1] \quad \emptyset$

①

$Q' \equiv \{0 \leq j \leq n\}$ j: entero

caso

$j = 0 \Rightarrow 0$

$j > 0 \Rightarrow iF7(A, j-1) + (A[j] = 3)$

$R' \equiv \{p = (N i)(A[i] = 3 : 1 \leq i \leq j)\}$ $\quad j = n \Rightarrow F7(A) = F7(A, n)$

②

$1, \ 2, \ 3, \ 4, \ n, \ n+1$

$A[1] \quad A[2] \quad A[3] \quad A[4] \quad A[n] \quad \emptyset$

$Q' \equiv \{1 \leq j \leq n+1\}$ j: entero

$j = n+1 \Rightarrow 0$

$j < n+1 \Rightarrow iF7(A, j+1) + (A[j] = 3)$ $\quad j = 1 \Rightarrow F7(A) = F7(A, 1)$

$R' \equiv \{p = (N i)(A[i] = 3 : j \leq i \leq n)\}$

EJERCICIO 8

$n = j \Rightarrow n \to 0 \Rightarrow Q' \equiv \{0 \leq j \leq n\}$ j: entero

$j = 0 \Rightarrow -\infty$

$j > 0 \Rightarrow MAX(iF8(A, j-1), A[j])$

$R' \equiv \{p = (MAX\ i)(A[i] : 1 \leq i \leq j)\}$ $\quad j = n \Rightarrow F8(A) = F8(A, n)$

$1 \leq j \leq n+1$

$j = n+1 \Rightarrow -\infty$

$\ldots (F(A, j+1), A[j])$ $\quad j = 1$

$x \to x$

$s(x) \to x - 1$

$s^{-1}(x) \to x + 1$

$Q' = \{ 1 \leq k \leq n \wedge 1 \leq m \}$

Función ¿ExamPL2B(A[1...n][1...m]: enteros, n, m, k: entero) retorna (p: booleano)

  si $k = 1 \Rightarrow$ AuxExamPL2B(A, n, m, k)

  SINO $\Rightarrow$ ¿ExamPL2B(A, n, m, k-1) AND AuxExamPL2B(A, n, m, k)

  fsi

ffunción

$R' = \{ p = (\forall i)((\exists j)(A[i][j] = i * j : 1 \leq j \leq m) : 1 \leq i \leq k)\}$

Llamada inicial $\Rightarrow$ ¿ExamPL2B(A, n, m, n)

$Q = \{ 1 \leq k \leq n \wedge 1 \leq m \}$

Función AuxExamPL2B(A[1...n][1...m]: enteros, n, m, k: entero) retorna (c: booleano)

$R = \{ c = (\exists j)(A[\underset{1}{k}][\underset{4}{j}] = \underset{1\cdot 4}{k * j} : 1 \leq j \leq m)\}$

a) Sea la matriz $A[1..3][1..4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 8 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ dibuja la lista de llamadas:

A, n=3, m=4 k=3 p = false	$\Rightarrow$ $\Leftarrow$	A, n=3 m=4 k=2 p = false	$\Rightarrow$ $\Leftarrow$	A, n=3 m=4 k=1 p = true

b)

Tipo de recursión: simple no final $\bar{x}$: A, n, m, k $\bar{y}$: p

Bt(x): $k = 1$ Bnt(x): $k \neq 1$ triv(x): AuxExamPL2B(A, n, m, k)

s(x): $k - 1$ $c(\bar{y}', \bar{x})$: ¿ExamPL2B(A, n, m, k-1) AND AuxExamPL2B(A, n, m, k)

$s^{-1}(x)$: $k + 1$

a) Especificación formal 1,25

$Q = \{ n \geq 1 \wedge m \geq 1 \}$

Función Examen(A[n][m]: matriz de enteros) retorna (b: booleano)

$R = \{ (\forall i) \left((N i)(A[i][j] = 0) \right)_{1 \leq j \leq n} \leq \left((N j)(A[i+1][j] = 0) \right)_{1 \leq j \leq n} : 2 \leq i \leq n \}$

b) Inducción y tipo 0,375

Inducción noetheriana ya que a cada fila de la matriz le asignamos un natural, seguido de eso inducción débil.

c) Inversión no final 0,75

$Q' = \{ 1 \leq k \leq n \wedge m \geq 1 \}$

Función Examen (A[n][m]: matriz enteros, k: entero) retorna (b: bool)

$R' = \{ (\forall i) \left((N i)(A[i][j] = 0) \right) \leq \left((N i)(A[i+1][j] = 0) \right) : 1 \leq i \leq j \}$

d) Sucesor

¿Examen (A[n][m], k-1)

$S(x) = k-1$

e) Condiciones Bt y Bnt 0,375

$Bt \Rightarrow j = 1$

$Bnt \Rightarrow j > 1$

f) Solución para Bt 1,25

La solución sería verdadero cuando Bt $j = 1$ ya que el rango vacío del cuantificador universal es verdadero, no habría filas con las que comparar el nº de ceros, esta será siempre la que tenga más en este caso.