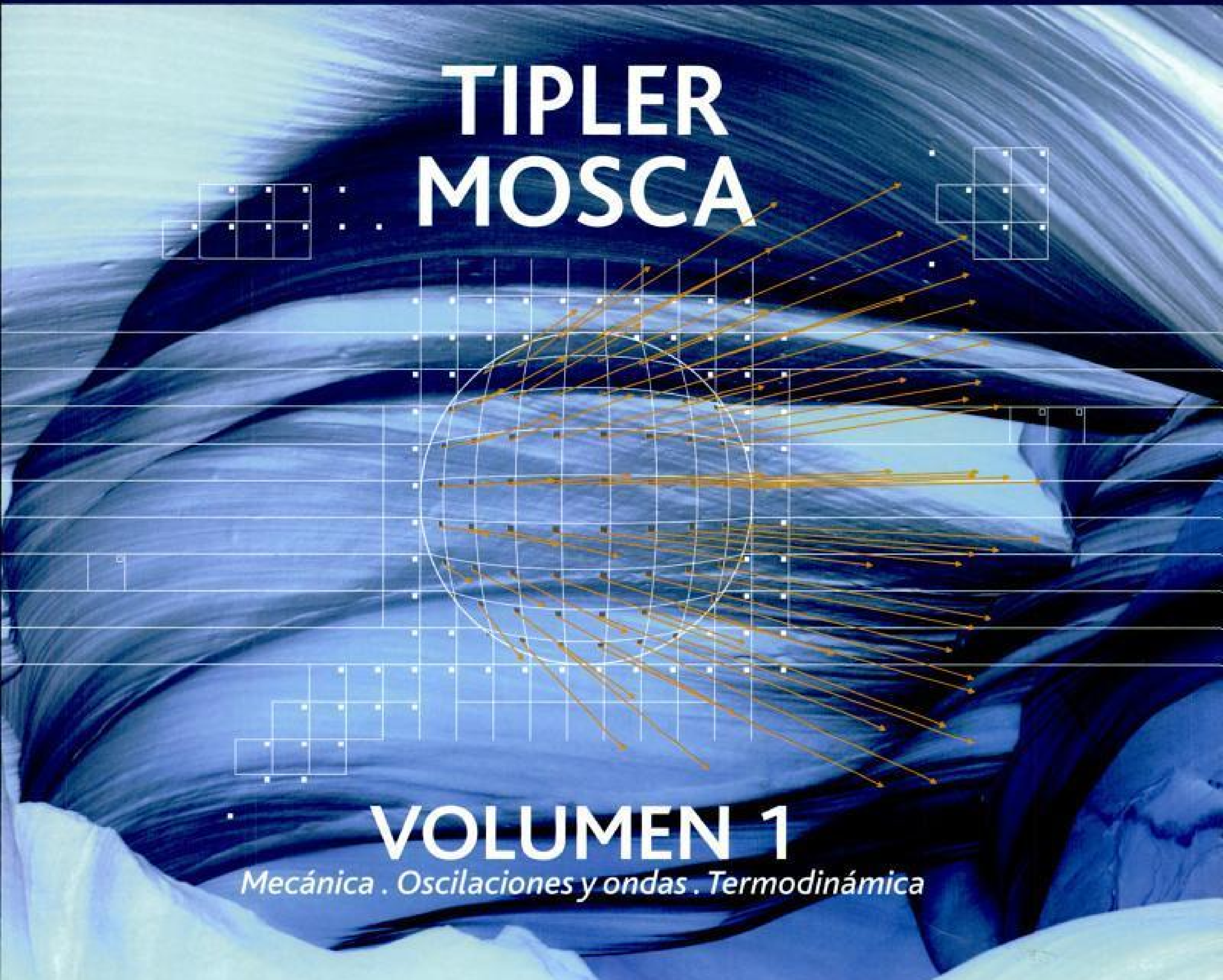
EDICIÓN 5ª

física

PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA



TIPLER
MOSCA

VOLUMEN 1

Mecánica . Oscilaciones y ondas . Termodinámica

EDITORIAL REVERTÉ

Título de la obra original:
Physics for Scientists and Engineers, Fifth Edition.

Edición original en lengua inglesa publicada por
W. H. FREEMAN AND COMPANY, New York and Basingstoke
41 Madison Avenue, New York (NY) – U.S.A.

Versión española por
Dr. Albert Bramón Planas
Catedrático de Física Teórica

Dr. José Casas-Vázquez
Catedrático de Física de la Materia Condensada

Dr. Josep Enric Llebot Rabagliati
Catedrático de Física de la Materia Condensada

Dr. Fernando López Aguilar
Catedrático de Física Aplicada

Departamento de Física de la Universidad Autónoma de Barcelona

Coordinada por
Dr. José Casas-Vázquez

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA

Tel: (34) 93 419 33 36
Fax: (34) 93 419 51 89
e-mail: reverte@reverte.com

www.reverte.com

Reimpresión: Octubre de 2006

ISBN: 84-291-4411-0 Volumen 1
ISBN: 84-291-4410-2 Obra completa
Depósito Legal: B-10615-2006

Impreso en España - Printed in Spain

Impreso por Ferré Olsina
Viladomat 158-160
08015 Barcelona

Índice analítico

VOLUMEN 1

PARTE I MÉCANICA

Capítulo 1 Sistemas de medida 3

Física clásica y moderna 4

1.1 Unidades 5

El sistema internacional de unidades 5

Otros sistemas de unidades 7

1.2 Conversión de unidades 7

1.3 Dimensiones de las magnitudes físicas 8

1.4 Notación científica 9

1.5 Cifras significativas y órdenes de magnitud 11

Resumen 13

Problemas 14

Capítulo 2 El movimiento en una dimensión 19

2.1 Desplazamiento, velocidad y módulo de la velocidad 19

Velocidad instantánea 22

Velocidad relativa 24

2.2 Aceleración 25

2.3 Movimiento con aceleración constante 27

Problemas con un objeto 28

Problemas con dos objetos 33

2.4 Integración 35

Resumen 39

Problemas 40

Capítulo 3 Movimiento en dos y tres dimensiones 49

3.1 El vector desplazamiento 49

Suma de vectores desplazamiento 50

3.2 Propiedades generales de los vectores 51

Producto de un vector por un escalar 51

Resta de vectores 51

Componentes de los vectores 51

Vectores unitarios 53

3.3 Posición, velocidad y aceleración 54

Vectores posición y velocidad 54

Velocidad relativa 56

Vector aceleración 57

3.4 Primer caso particular: movimiento de proyectiles 60

3.5 Segundo caso particular: movimiento circular 67

Movimiento circular uniforme 68

Resumen 69

Problemas 70

Capítulo 4 Leyes de Newton 79

4.1 Primera ley de Newton: ley de la inercia 80

Sistemas de referencia inerciales 80

4.2 Fuerza, masa y segunda ley de Newton 81

4.3 La fuerza debida a la gravedad: el peso 83

Unidades de fuerza y masa 84

4.4 Las fuerzas en la naturaleza 85

Las fuerzas fundamentales 86

Acción a distancia 87

Fuerzas de contacto 87

4.5 Resolución de problemas: diagramas de fuerzas de sistemas aislados 89

4.6 La tercera ley de Newton 94

4.7 Problemas con dos o más objetos 95

Resumen 98

Problemas 99

Capítulo 5 Aplicaciones de las leyes de Newton 109
5.1 Rozamiento 109
Rozamiento estático 109
Rozamiento cinético 110
El rozamiento por rodadura 110
¿Cuál es la causa del rozamiento? 111
5.2 Movimiento por una curva 119
*Curvas con pendiente (peralte) 122
5.3 *Fuerzas de arrastre 124
5.4 *La integración numérica: el método de Euler 126
Resumen 128
Problemas 129

Capítulo 6 Trabajo y energía 141
6.1 Trabajo y energía cinética 142
Movimiento en una dimensión con fuerzas constantes 142
Teorema del trabajo-energía cinética 143
Trabajo realizado por una fuerza variable 146
6.2 Producto escalar 148
Potencia 152
6.3 Trabajo y energía en tres dimensiones 154
6.4 Energía potencial 155
Fuerzas conservativas 156
Funciones de energía potencial 156
Fuerzas no conservativas 159
Energía potencial y equilibrio 159
Resumen 161
Problemas 162

Capítulo 7 Conservación de la energía 171
7.1 Conservación de la energía mecánica 172
Aplicaciones 173
7.2 Conservación de la energía 178
Teorema trabajo-energía 179
Problemas en los que interviene el rozamiento cinético 181
Sistemas con energía química 185
7.3 Masa y energía 186
Energía nuclear 187
Mecánica Newtoniana y relatividad 189
7.4 Cuantización de la energía 189
Resumen 191
Problemas 192

Capítulo 8 Sistemas de partículas y conservación del momento lineal 201
8.1 Centro de masas 202
Energía potencial gravitatoria de un sistema 205
8.2 *Determinación del centro de masas por integración 206
Barra uniforme 206
Aro semicircular 206
8.3 Movimiento del centro de masas 207
8.4 Conservación del momento lineal 211
8.5 Energía cinética de un sistema 216
8.6 Colisiones 217
Impulso y fuerza media 217
Colisiones en una dimensión (colisiones frontales) 220
Colisiones en tres dimensiones 226
8.7 *Sistema de referencia del centro de masas 228
8.8 *Sistemas de masa variable: la propulsión de los cohetes 230
Resumen 233
Problemas 234

Capítulo 9 Rotación 247
9.1 Cinemática de la rotación: velocidad angular y aceleración angular 247
9.2 Energía cinética de rotación 250
9.3 Cálculo del momento de inercia 252
Sistemas de partículas discretas 253
Sistemas continuos 253
Teorema de los ejes paralelos 255
*Demostración del teorema de los ejes paralelos 255
9.4 La segunda ley de Newton en la rotación 259
Cálculo de momentos 260
Momento debido a la gravedad 260
9.5 Aplicaciones de la segunda ley de Newton a la rotación 261
Indicaciones útiles para la resolución de problemas relacionados con la aplicación de la segunda ley de Newton a sistemas en rotación 261
Rotación sin deslizamiento 263
Indicaciones útiles para la resolución de problemas relacionados con la aplicación de la segunda ley de Newton a sistemas en rotación 263
Potencia 265
9.6 Objetos rodantes 266
Rodamiento sin deslizamiento 266
*Rodamiento con deslizamiento 270
Resumen 272
Problemas 273

Capítulo 10 Conservación del momento angular 285
10.1 Naturaleza vectorial de la rotación 285
Producto vectorial 286
10.2 Momento angular 287
Movimiento de un giroscopio 292
10.3 Conservación del momento angular 293
Demostraciones de las ecuaciones 10.10, 10.12, 10.13, 10.14, y 10.15 300
10.4 Cuantización del momento angular 302
Resumen 303
Problemas 304

Capítulo 11 Gravedad 313
11.1 Leyes de Kepler 314
11.2 Ley de la gravitación de Newton 316
Medida de G 319
Masa gravitatoria y masa inercial 319
Deducción de las leyes de Kepler 320
11.3 Energía potencial gravitatoria 322
Velocidad de escape 323
Clasificación energética de las órbitas 324
11.4 El campo gravitatorio **g** 326
Campo gravitatorio **g** de una corteza esférica y de una esfera sólida 327
Campo **g** en el interior de una esfera sólida 328
11.5 Cálculo de la ecuación correspondiente al campo gravitatorio de una corteza esférica por integración 330
Resumen 332
Problemas 333

Capítulo 12 Equilibrio estático y elasticidad 341
12.1 Condiciones de equilibrio 342
12.2 Centro de gravedad 342
12.3 Ejemplos de equilibrio estático 343
12.4 Par de fuerzas 347
12.5 Equilibrio estático en un sistema acelerado 348
12.6 Estabilidad del equilibrio de rotación 349
12.7 Problemas indeterminados 350
12.8 Tensión y deformación 350
Resumen 353
Problemas 354

Capítulo 13 Fluidos 365
13.1 Densidad 366
13.2 Presión en un fluido 367
13.3 Flotación y principio de Arquímedes 371
13.4 Fluidos en movimiento 376
Ecuación de Bernoulli 377
*Flujo viscoso 381
Resumen 383
Problemas 385

PARTE II OSCILACIONES Y ONDAS

Capítulo 14 Oscilaciones 395
14.1 Movimiento armónico simple 396
Movimiento armónico simple y movimiento circular 402
14.2 Energía del movimiento armónico simple 402
*Movimiento general próximo al equilibrio 404
14.3 Algunos sistemas oscilantes 405
Objeto colgado de un muelle vertical 405
El péndulo simple 408
*El péndulo físico 411
14.4 Oscilaciones amortiguadas 413
14.5 Oscilaciones forzadas y resonancia 416
*Tratamiento matemático de la resonancia 417
Resumen 420
Problemas 421

Capítulo 15 Movimiento ondulatorio 431
15.1 Movimiento ondulatorio simple 432
Ondas transversales y longitudinales 432
Pulsos de onda 432
Velocidad de las ondas 433
*La ecuación de onda 436

15.2 Ondas periódicas 438
Ondas armónicas 438
Ondas sonoras armónicas 442
Ondas electromagnéticas 443
15.3 Ondas en tres dimensiones 444
Intensidad de una onda 444
15.4 Ondas y barreras 448
Reflexión y refracción 448
Difracción 449
15.5 Efecto Doppler 451
Ondas de choque 455
Resumen 456
Problemas 458

Capítulo 16 Superposición y ondas estacionarias 467
16.1 Superposición de ondas 468
*La superposición y la ecuación de onda 468
Interferencia de ondas armónicas 469
16.2 Ondas estacionarias 474
Ondas estacionarias en cuerdas 474
Ondas sonoras estacionarias 479
16.3 *Superposición de ondas estacionarias 482
16.4 *Análisis y síntesis armónicos 482
16.5 *Paquetes de onda y dispersión 484
Resumen 484
Problemas 486

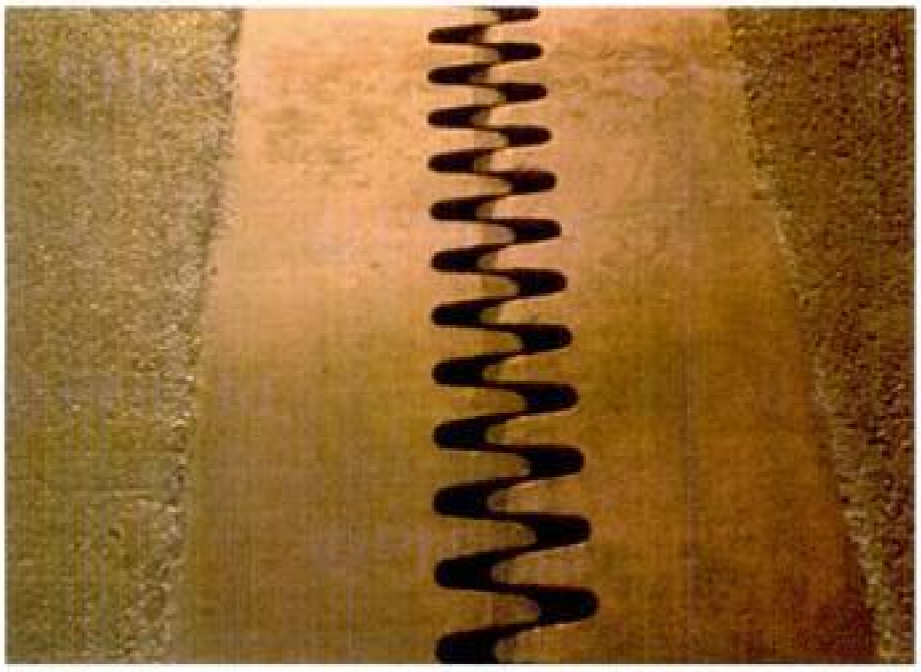
PARTE III **TERMODINÁMICA**

Capítulo 17 Temperatura y teoría cinética de los gases 495
17.1 Equilibrio térmico y temperatura 495
17.2 Escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit 496
17.3 Termómetros de gas y escala de temperaturas absolutas 498
17.4 Ley de los gases ideales 500
17.5 La teoría cinética de los gases 503
Cálculo de la presión ejercida por un gas 503
Interpretación molecular de la temperatura 504
El teorema de equipartición 506
Recorrido libre medio 506
*Distribución de velocidades moleculares 508
Resumen 512
Problemas 513

Capítulo 18 Calor y primer principio de la termodinámica 519
18.1 Capacidad calorífica y calor específico 520
Calorimetría 522
18.2 Cambio de fase y calor latente 523
18.3 El experimento de Joule y el primer principio de la termodinámica 525
18.4 La energía interna de un gas ideal 528
18.5 Trabajo y diagrama *PV* para un gas 528
Procesos cuasiestáticos 529
Diagramas *PV* 529
18.6 Capacidades caloríficas de los gases 531
Capacidades caloríficas y el teorema de equipartición 534
18.7 Capacidades caloríficas de los sólidos 535
18.8 Fallos del teorema de equipartición 536
18.9 Compresión adiabática cuasiestática de un gas 539
Velocidad de las ondas sonoras 542
Resumen 542
Problemas 544

Capítulo 19 Segundo principio de la termodinámica 551
19.1 Máquinas térmicas y el segundo principio de la termodinámica 552
19.2 Refrigeradores y segundo principio de la termodinámica 556
19.3 Equivalencia entre los enunciados de la máquina térmica y del refrigerador 557
19.4 La máquina de Carnot 558
La escala termodinámica o absoluta de temperaturas 564
19.5 *Bombas de calor 564
19.6 Irreversibilidad y desorden 565
19.7 Entropía 566
Entropía de un gas ideal 566
Cambios de entropía en diversos procesos 567
19.8 Entropía y energía utilizable 572
19.9 Entropía y probabilidad 573
Resumen 574
Problemas 576

Capítulo 20 Propiedades y procesos térmicos 583
20.1 Dilatación térmica 583
20.2 Ecuación de van der Waals e isotermas líquido-vapor 587
20.3 Diagramas de fase 588
20.4 Transferencia de energía térmica 589
Conducción 590
Convección 596
Radiación 596
Resumen 599
Problemas 600



Capítulo R Relatividad especial R-1

R.1 El principio de relatividad y la constancia de la velocidad de la luz R-2

R.2 Barras en movimiento R-3

R.3 Relojes en movimiento R-4

R.4 Más sobre barras en movimiento R-8

R.5 Relojes lejanos y simultaneidad R-9

R.6 Aplicación de las reglas R-10

R.7 Momento, masa y energía relativistas R-12

Momento y masa R-12

Energía R-13

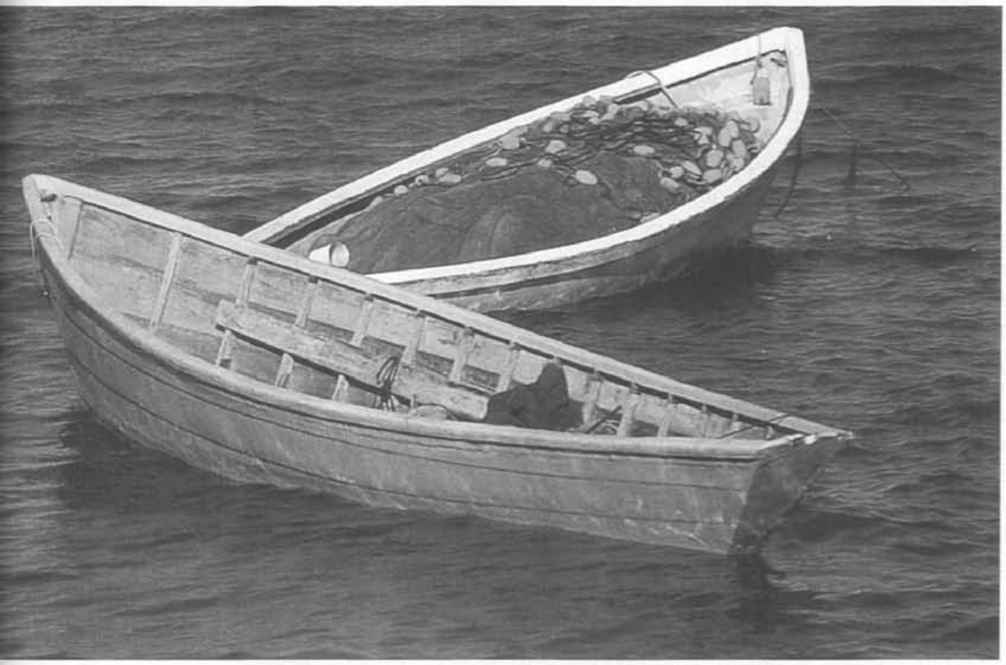
Resumen R-13

Problemas R-14

OSCILACIONES

Capítulo 14

14.1 Movimiento armónico simple
14.2 Energía del movimiento armónico simple
14.3 Algunos sistemas oscilantes
14.4 Oscilaciones amortiguadas
14.5 Oscilaciones forzadas y resonancia



Los botes de la fotografía se mueven con el oleaje del mar, ofreciéndonos un ejemplo de movimiento oscilatorio. La oscilación vertical máxima de la posición del bote se mide fácilmente, al igual que el tiempo que invierte el bote en completar un ciclo.

¿Cómo puede expresarse la posición vertical del bote en función del tiempo? (Véase el ejemplo 14.1.)

Cuando se perturba un sistema y éste pierde su posición de equilibrio estable, se producen oscilaciones. Hay muchos ejemplos familiares: los barcos se balancean arriba y abajo, los péndulos de reloj oscilan a un lado y otro, y las cuerdas y lengüetas de los instrumentos musicales vibran al producir los sonidos. Otros ejemplos menos familiares son las oscilaciones de las moléculas de aire en las ondas sonoras y las oscilaciones de las corrientes eléctricas en los aparatos de radio y televisión.

☛ **En este capítulo nos ocupamos del movimiento armónico simple, la forma más básica de movimiento oscilatorio. Mediante el uso de la cinemática y de la dinámica del movimiento armónico se puede analizar una amplia variedad de sistemas de interés. En algunas situaciones, las fuerzas disipativas amortiguan el movimiento oscilatorio, mientras que en otras, la acción de fuerzas impulsoras compensa el amortiguamiento.**

14.1 Movimiento armónico simple

Figura 14.1 Cuerpo unido a un muelle que descansa sobre una mesa sin rozamiento. Se mide el desplazamiento x desde la posición de equilibrio. El desplazamiento es positivo si el muelle se estira y negativo si el muelle se comprime.

Un tipo corriente y muy importante de movimiento oscilatorio es el **movimiento armónico simple**, como el de un cuerpo unido a un muelle, como puede verse en la figura 14.1. En el equilibrio, el muelle no ejerce ninguna fuerza sobre el cuerpo. Cuando éste se ve desplazado en una cantidad x de su posición de equilibrio, el muelle ejerce una fuerza $-kx$, que viene dada por la ley de Hooke:[1]

$$F_x = -kx \tag{14.1}$$

en donde k es la constante del muelle, característica de su rigidez. El signo menos indica que se trata de una fuerza restauradora; es decir, se opone al sentido del desplazamiento respecto al punto de equilibrio. Combinando la ecuación 14.1 con la segunda ley de Newton ($F_x = ma_x$) se tiene

$$-kx = ma_x$$

es decir

$$a_x = -\frac{k}{m}x \qquad \left(\text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x\right) \tag{14.2}$$

La aceleración es proporcional al desplazamiento y tiene sentido contrario. Esta es la característica que define el movimiento armónico simple y puede utilizarse para identificar sistemas que presentan esta clase de movimiento:

> Siempre que la aceleración de un objeto sea proporcional a su desplazamiento pero con sentido opuesto, el objeto se moverá con movimiento armónico simple.

CONDICIONES DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE EN FUNCIÓN DE LA ACELERACIÓN

Como la aceleración es proporcional a la fuerza neta, siempre que la fuerza neta sobre un objeto sea proporcional a su desplazamiento y con sentido opuesto, el objeto se moverá con movimiento armónico simple.

El tiempo que emplea el objeto desplazado para realizar una oscilación completa alrededor de su posición de equilibrio se denomina **periodo** T. El recíproco es la **frecuencia** f, que es el número de oscilaciones por segundo:

$$f = \frac{1}{T} \tag{14.3}$$

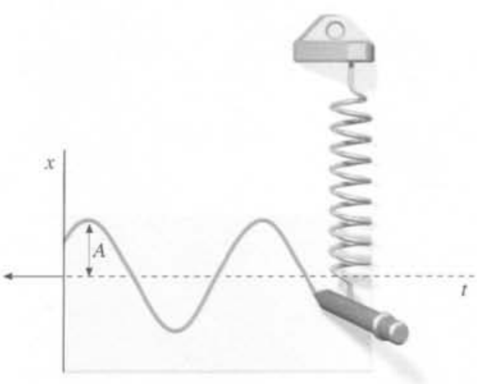


Figura 14.2 Una plumilla está sujeta a la masa de un muelle y el papel se mueve hacia la izquierda. Cuando el papel se mueve con velocidad constante, la plumilla va dibujando el desplazamiento x en función del tiempo t. (En este caso hemos considerado x como positivo cuando el muelle se comprime.)

La unidad de frecuencia es el ciclo por segundo (ciclo/s), que recibe el nombre de **hertz** (Hz). Por ejemplo, si el tiempo necesario para una oscilación completa es 0,25 s, la frecuencia es 4 Hz.

La figura 14.2 muestra cómo se puede obtener experimentalmente x en función de t para una masa sobre un muelle. La ecuación correspondiente a esta curva es

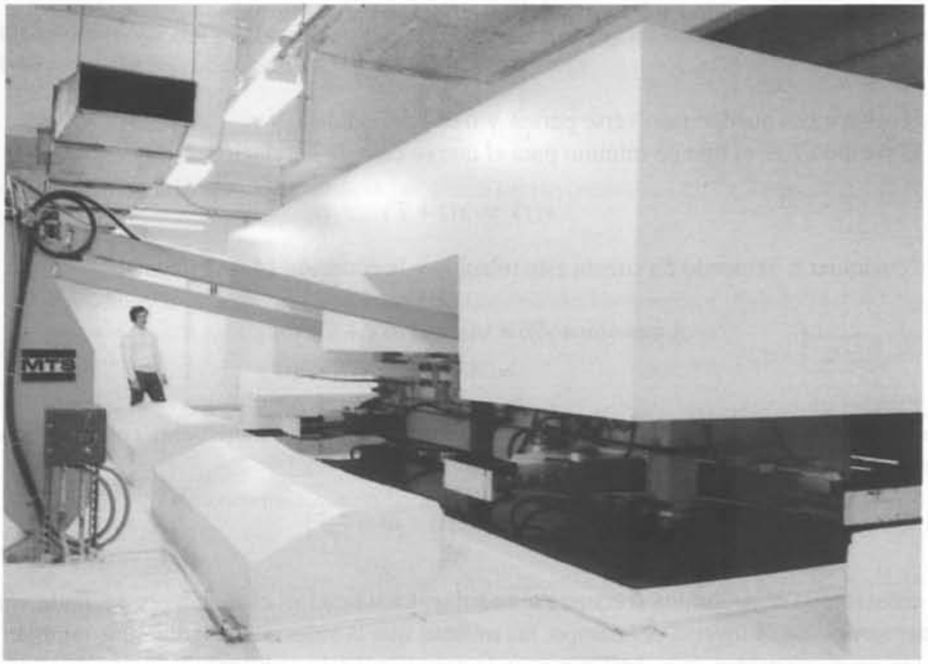
$$x = A\cos(\omega t + \delta) \tag{14.4}$$

POSICIÓN EN UN MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

en donde A, ω y δ son constantes. El desplazamiento máximo $x_{máx}$ respecto a la posición de equilibrio se denomina **amplitud** A. El argumento de la función coseno, $\omega t + \delta$, se denomina **fase** de movimiento y la constante δ se denomina **constante de fase**. Esta constante corresponde a la fase cuando $t = 0$. (Obsérvese que $\cos(\omega t + \delta) = \text{sen}(\omega t + \delta + \pi/2)$, por lo tanto, expresar la ecuación como una función coseno o seno depende simplemente de la fase de la oscilación en el momento que elijamos como $t = 0$.) Si tenemos sólo un sistema oscilante siempre podemos elegir $t = 0$ de modo que $\delta = 0$. Si tenemos dos sistemas oscilantes con igual amplitud y frecuencia, pero diferente fase, podemos elegir $\delta = 0$ para uno de ellos. Las ecuaciones de los dos sistemas son entonces

$$x_1 = A\cos(\omega t)$$

[1] La ley de Hooke se ha introducido en el capítulo 4, sección 4.



El balanceo debido a la acción de vientos fuertes en el edificio Citicorp de Nueva York se reduce mediante el amortiguador de la fotografía, instalado en uno de los pisos más altos. El amortiguador consiste en un bloque de 400 toneladas que está acoplado al edificio mediante un muelle cuya constante se elige de forma que la frecuencia natural del sistema muelle-bloque sea la misma que la frecuencia natural de balanceo del edificio. Si el viento hace oscilar el edificio, el oscilador y el edificio oscilan con una diferencia de fase de 180°, con lo cual se reduce la oscilación.

y

$$x_2 = A\cos(\omega t + \delta)$$

Si la diferencia de fase δ es 0 ó un número entero de veces 2π, entonces $x_2 = x_1$ y se dice que los sistemas están en fase. Si la diferencia de fase δ es π o un número entero impar de veces π, entonces $x_2 = -x_1$ y se dice que los sistemas están fuera de fase en 180°.

Podemos demostrar que la ecuación 14.4 es una solución de la ecuación 14.2 derivando x dos veces respecto al tiempo. La primera derivada de x es la velocidad v:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen}(wt + \delta) \tag{14.5}$$

VELOCIDAD EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Derivando la velocidad respecto al tiempo se obtiene la aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta) \tag{14.6}$$

Sustituyendo x por $A\cos(\omega t+\delta)$(véase la ecuación 14.4) se obtiene

$$a = -\omega^2 x \tag{14.7}$$

ACELERACIÓN EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Comparando $a = -\omega^2 x$ con $a = -(k/m)\,x$ (ecuación 14.2), vemos que $x = A\cos(\omega t + \delta)$ es una solución de la ecuación 14.2 (que puede escribirse de la forma $d^2x/dt^2 = -(k/m)\,x$) si

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{14.8}$$

La amplitud A y la constante de fase δ pueden determinarse a partir de la posición inicial x_0 y la velocidad inicial v_0 del sistema. Haciendo $t = 0$ en $x = A\cos(\omega t + \delta)$ se obtiene

$$x_0 = A\cos\delta \tag{14.9}$$

De igual modo, haciendo $t = 0$ en $v = dx/dt = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$ resulta

$$v_0 = -A\omega \operatorname{sen} \delta \tag{14.10}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para A y δ en función de x_0 y v_0.

El periodo T es el tiempo mínimo para el que se cumple la relación

$$x(t) = x(t + T)$$

para cualquier t. Teniendo en cuenta esta relación y la ecuación 14.4 se llega a

$$\begin{aligned} A \cos(\omega t + \delta) &= A \cos[\omega(t + T) + \delta] \\ &= A \cos(\omega t + \delta + \omega T) \end{aligned}$$

Las funciones coseno (y seno) repiten su valor cuando la fase se incrementa en 2π, de modo que

$$\omega T = 2\pi \qquad \left(\text{o} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

La constante ω se denomina **frecuencia angular**. La unidad es el radián por segundo y sus dimensiones son la inversa del tiempo, las mismas que la velocidad angular, que también se designa por ω. Sustituyendo $2\pi/T$ por ω en la ecuación 14.4 se obtiene

$$x = A \cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \delta\right)$$

Trabajando en esta relación se ve que cada vez que t aumenta en T, la fase crece 2π y, por lo tanto, esto indica que se ha completado un ciclo completo del movimiento.

La frecuencia es la recíproca del periodo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{14.11}$$

DEFINICIÓN —FRECUENCIA, PERIODO Y FRECUENCIA ANGULAR

Como $\omega = \sqrt{k/m}$, la frecuencia y el periodo de un objeto ligado a un muelle están relacionados con la constante de fuerza k y la masa m por

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{14.12}$$

FRECUENCIA Y PERIODO DE UN OBJETO LIGADO A UN MUELLE

La frecuencia crece cuando aumenta k (rigidez del muelle) y disminuye cuando aumenta la masa.

El astronauta Alan L. Bean midiendo la masa de su cuerpo durante el segundo viaje del Skylab. Lo hace sentándose en un asiento atado a un muelle y oscilando adelante y atrás. La masa total del astronauta más la del aparato está relacionada con su frecuencia de vibración por la ecuación 14.12.

EJEMPLO 14.1 | Movimiento de un bote sobre las olas

Un bote se balancea arriba y abajo. El desplazamiento vertical del bote y viene dado por

$$y = (1{,}2\text{ m})\cos\left(\frac{1}{2s}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

(*a*) Determinar la amplitud, frecuencia angular, constante de fase, frecuencia y periodo del movimiento. (*b*) ¿Dónde se encuentra el bote cuando $t = 1$ s? (*c*) Determinar la velocidad y la aceleración en cualquier tiempo t. (*d*) Calcular los valores iniciales de la posición, la velocidad y la aceleración del bote.

Planteamiento del problema Para determinar las magnitudes solicitadas en (*a*) comparamos la ecuación del movimiento

$$y = (1{,}2\text{ m})\cos\left(\frac{1}{2s}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

con la ecuación estándar del movimiento armónico simple (ecuación 14.4). La velocidad y la aceleración se determinan derivando $y(t)$.

(a) 1. Comparar la ecuación correspondiente al desplazamiento vertical del bote con la ecuación 14.4, $y = A\cos(\omega t + \delta)$, para deducir A, ω y δ:

$$y = (1{,}2\text{ m})\cos\left(\frac{t}{2\text{ s}} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$A = \boxed{1{,}2\text{ m,}} \qquad \omega = \boxed{1/2\text{ rad/s,}} \qquad \delta = \boxed{\pi/6\text{ rad}}$$

2. La frecuencia y el periodo se deducen de ω:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \boxed{0{,}0796\text{ Hz,}} \qquad T = \frac{1}{f} = \boxed{12{,}6\text{ s}}$$

(b) Hacer $t = 1$ s para determinar la posición del bote:

$$y = (1{,}2\text{ m})\cos\left[\frac{1}{2\text{ s}}(1\text{ s}) + \frac{\pi}{6}\right] = \boxed{0{,}624\text{ m}}$$

(c) La velocidad y la aceleración se obtienen derivando una y dos veces la posición respecto al tiempo:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[A\cos(\omega t + \delta)]$$

$$= -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \delta)$$

$$= -\frac{1}{2s}(1{,}2\text{ m})\,\text{sen}\left(\frac{1}{2\text{ s}}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \boxed{-(0{,}6\text{ m/s})\,\text{sen}\left(\frac{1}{2\text{ s}}t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}[-\omega A\,\text{sen}(\omega t + \delta)]$$

$$= -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta)$$

$$= -\left(\frac{1}{2\text{ s}}\right)^2(1{,}2\text{ m})\cos\left(\frac{1}{2\text{ s}}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \boxed{-(0{,}3\text{ m/s}^2)\cos\left(\frac{1}{2\text{ s}}t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

(d) Hacer $t = 0$ para determinar y_0, v_{y0} y a_{y0}:

$$y_0 = (1{,}2\text{ m})\cos\frac{\pi}{6} = \boxed{1{,}04\text{ m}}$$

$$v_{y0} = -(0{,}6\text{ m/s})\,\text{sen}\frac{\pi}{6} = \boxed{-0{,}300\text{ m/s}}$$

$$a_{y0} = -(0{,}3\text{ m/s}^2)\cos\frac{\pi}{6} = \boxed{-0{,}260\text{ m/s}^2}$$

Ejercicio Un objeto de 0,8 kg está sujeto a un muelle de constante de fuerza $k = 400$ N/m. Determinar la frecuencia y el periodo del movimiento del objeto cuando se desplaza del equilibrio. (*Respuesta* $f = 3{,}56$ Hz, $T = 0{,}281$ s.)

La figura 14.3 muestra dos masas idénticas sujetas a muelles iguales que descansan sobre una superficie sin rozamiento. Un muelle se estira 10 cm y el otro 5 cm. Si se dejan en libertad al mismo tiempo, ¿cuál de los dos cuerpos alcanza primero la posición de equilibrio?

Según la ecuación 14.12, el periodo depende sólo de k y m, pero no de la amplitud. Como k y m son los mismos para ambos sistemas, los periodos son iguales. Por lo tanto, los objetos alcanzan la posición de equilibrio al mismo tiempo. El segundo objeto tiene que recorrer una distancia doble a la del primero para alcanzar el equilibrio, pero también posee una velocidad media doble. La figura 14.4 muestra un esquema de las funciones de posición de los dos objetos. Esto ilustra una propiedad general importante del movimiento armónico simple:

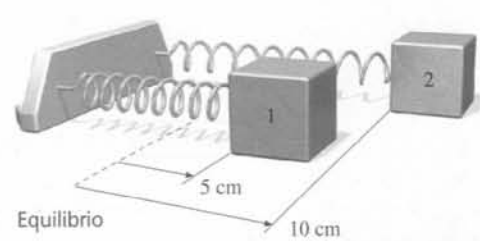


Figura 14.3 Dos sistemas masa-muelle idénticos.

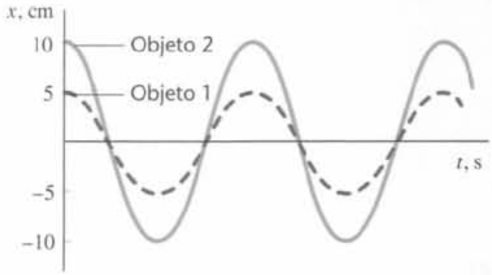


Figura 13.4 Posición x en función de t para los sistemas de la figura 14.3. Ambos alcanzan la posición de equilibrio al mismo tiempo.

En el movimiento armónico simple, la frecuencia y el periodo son independientes de la amplitud.

El hecho de que la frecuencia del movimiento armónico simple sea independiente de la amplitud tiene importantes consecuencias en muchos campos. En música, por ejemplo, significa que el tono (que corresponde a la frecuencia) de una nota que se toca en un piano no depende de la fuerza con que se toca la nota (es decir, de la intensidad de la misma que corresponde a la amplitud).[1] Si las variaciones de amplitud tuviesen un gran efecto sobre la frecuencia, los instrumentos musicales no serían armoniosos.

EJEMPLO 14.2 | Un objeto que oscila

Un objeto oscila con frecuencia angular $\omega = 8{,}0$ rad/s. En $t = 0$, el objeto se encuentra en $x = 4$ cm con una velocidad inicial $v = -25$ cm/s. (*a*) Determinar la amplitud y la constante de fase para este movimiento. (*b*) Escribir x en función del tiempo.

Planteamiento del problema La posición y velocidad iniciales nos proporcionan dos ecuaciones a partir de las cuales se determinan la amplitud A y la constante de fase δ.

(a) 1. La posición inicial y la velocidad están relacionadas con la amplitud y con la constante de fase. La posición viene dada por la ecuación 14.4 y la velocidad se calcula derivando con respecto del tiempo:

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

y

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)$$

2. Cuando $t = 0$, la posición y la velocidad valen:

$$x_0 = A\cos\delta \quad \text{y} \quad v_0 = -\omega A\,\mathrm{sen}\,\delta$$

3. Dividir estas ecuaciones para eliminar A:

$$\frac{v_0}{x_0} = \frac{-\omega A\,\mathrm{sen}\,\delta}{A\cos\delta} = -\omega\,\mathrm{tg}\,\delta$$

4. Reemplazando por los valores numéricos se obtiene δ:

$$\mathrm{tg}\,\delta = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

por lo tanto

$$\delta = \mathrm{arctg}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) = \mathrm{arctg}\left[-\frac{-25\text{ cm/s}}{(8{,}0\text{ rad/s})(4\text{ cm})}\right] = \boxed{0{,}663\text{ rad}}$$

5. La amplitud puede determinarse utilizando la ecuación para x_0 o v_0. Aquí utilizamos la de x_0:

$$A = \frac{x_0}{\cos\delta} = \frac{4\text{ cm}}{\cos 0{,}663} = \boxed{5{,}08\text{ cm}}$$

(b) Comparando con la ecuación 14.4 resulta x:

$$x = \boxed{(5{,}08\text{ cm})\cos[(8{,}0\text{ s}^{-1})t + 0{,}663]}$$

Cuando la constante de fase es $\delta = 0$, las ecuaciones 14.4, 14.5 y 14.6 se convierten en

$$x = A\cos\omega t \tag{14.13a}$$

$$v = -\omega A\,\mathrm{sen}\,\omega t \tag{14.13b}$$

y

$$a = -\omega^2 A\cos\omega t \tag{14.13c}$$

Estas funciones vienen representadas en la figura 14.5.

[1] En muchos instrumentos musicales existe una ligera dependencia de la frecuencia con la amplitud. El tono de la lengüeta de un oboe, por ejemplo, depende de la fuerza con que se sople el instrumento porque la vibración no es exactamente armónica simple. Sin embargo, este efecto puede ser corregido por un músico experto.

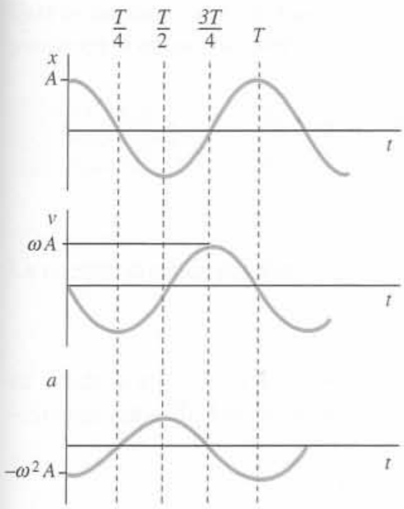


Figura 14.5 Gráficos de x, v y a en función del tiempo t para $\delta = 0$. En $t = 0$, el desplazamiento es máximo, la velocidad es cero y la aceleración es negativa e igual a $-\omega^2 A$. La velocidad se hace negativa cuando el objeto se mueve hacia atrás buscando su posición de equilibrio. Después de un cuarto de periodo ($t = T/4$), el objeto está en equilibrio, $x = 0$, $a = 0$ y la velocidad alcanza su valor máximo ωA. En $t = T/2$, el desplazamiento es $-A$, la velocidad es de nuevo cero y la aceleración $+\omega^2 A$. En $t = 3T/4$, $x = 0$, $a = 0$ y $v = +\omega A$.

EJEMPLO 14.3 | Objeto ligado a un muelle

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Un objeto de 2 kg se sujeta a un muelle como indica la figura 14.1. La constante de fuerza del muelle es $k = 196$ N/m. El objeto se mantiene a una distancia de 5 cm de la posición de equilibrio y se deja en libertad en el tiempo $t = 0$. (*a*) Determinar la frecuencia angular ω, la frecuencia f y el periodo T. (*b*) Expresar x en función del tiempo.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
(a) 1. Calcular ω utilizando $\omega = \sqrt{k/m}$.	$\omega = \boxed{9{,}90 \text{ rad/s}}$
2. Utilizar este resultado para determinar f y T.	$f = \boxed{1{,}58 \text{ Hz}}$ $T = \boxed{0{,}635 \text{ s}}$
3. Determinar A y δ a partir de las condiciones iniciales.	$A = 5$ cm, $d = 0$
(b) Expresar $x(t)$ utilizando los resultados de A, ω y δ.	$x = \boxed{(5 \text{ cm}) \cos (9{,}90 \text{ s}^{-1}\, t)}$

EJEMPLO 14.4 | Velocidad y aceleración de un objeto en un muelle

Considerar un objeto ligado a un muelle cuya posición viene dada por la ecuación $x = (5 \text{ cm}) \cos (9{,}90 \text{ s}^{-1}\, t)$. (*a*) ¿Cuál es la velocidad máxima del objeto? (*b*) ¿En qué instante se alcanza por vez primera esta velocidad máxima? (*c*) ¿Cuál es la aceleración máxima del objeto? (d) ¿En qué instante se alcanza por vez primera esta aceleración máxima?

Planteamiento del problema Como el objeto se deja libre desde el reposo, $\delta = 0$ y la velocidad y la aceleración vienen dadas por las ecuaciones 14.13a, b y c.

(a) 1. La posición se obtiene de la ecuación 14.13a, con $\delta = 0$. La velocidad se obtiene derivando con respecto del tiempo:

$$x = A \cos \omega t$$

por lo tanto

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \text{ sen } \omega t$$

2. La velocidad máxima tiene lugar cuando $|\text{sen } \omega t| = 1$:

$$|v| = \omega A |\text{sen } \omega t|$$

y entonces

$$|v|_{\text{máx}} = \omega A = (9{,}90 \text{ rad/s})(5 \text{ cm}) = \boxed{49{,}5 \text{ cm/s}}$$

(b) 1. El $|\text{sen } \omega t| = 1$ por vez primera se da cuando $\omega t = \pi/2$:

$$|\text{sen } \omega t| = 1 \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

2. Despejar t cuando $\omega t = \pi/2$:

$$t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2(9{,}90 \text{ s}^{-1})} = \boxed{0{,}159 \text{ s}}$$

(c) 1. Determinar la aceleración derivando la velocidad, obtenida en el paso 1 del apartado (a):

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos \omega t$$

2. La aceleración máxima corresponde a $\cos \omega t = -1$:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (9{,}90 \text{ rad/s})^2(5 \text{ cm})$$

$$= \boxed{490 \text{ cm/s}^2 \approx \tfrac{1}{2}\, g}$$

(d) La aceleración máxima tiene lugar cuando $|\cos \omega t| = 1$, lo que ocurre cuando $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$:

$$\omega t = \pi$$

y despejando t

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{9{,}90 \text{ s}^{-1}} = \boxed{0{,}317 \text{ s}}$$

Observación La velocidad máxima ocurre por vez primera después de un cuarto de periodo,

$$t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2(2\pi/T)} = \tfrac{1}{4}\, T$$

El máximo del módulo de la aceleración se da cuando $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ que corresponde a $t = 0, \frac{1}{2}T, \frac{2}{2}T, \frac{3}{2}T, \ldots$

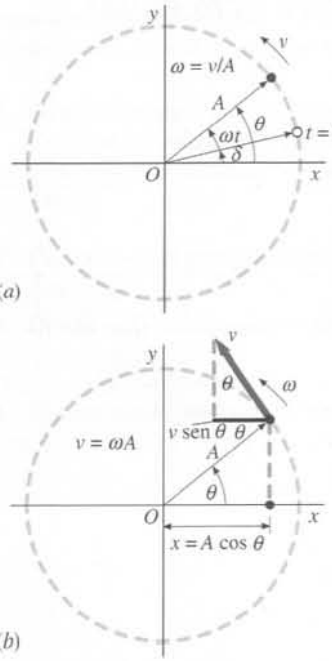
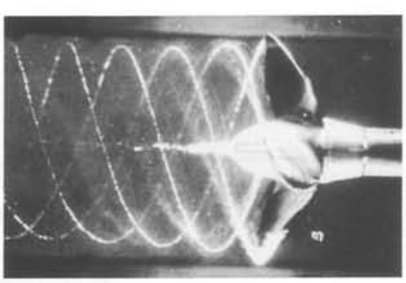


Figura 14.6 Una partícula se mueve en una trayectoria circular con velocidad constante. (*a*) La componente x de la posición describe un movimiento armónico simple, y (*b*) la componente x de la velocidad describe la velocidad de un movimiento armónico simple



Las burbujas de la espuma que genera una hélice en movimiento por el agua producen un patrón sinusoidal.

Movimiento armónico simple y movimiento circular

Existe una relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular con velocidad constante. Consideremos una partícula que se mueve con una velocidad cuyo módulo v es constante sobre una circunferencia de radio A como se indica en la figura 14.6*a*. El desplazamiento angular de la partícula respecto al eje x viene dado por

$$\theta = \omega t + \delta \tag{14.14}$$

en donde δ es el desplazamiento angular en el instante $t = 0$ y $\omega = v/A$ es la velocidad angular de la partícula. La componente x de la posición de la partícula viene dada por

$$x = A \cos \theta = A \cos(\omega t + \delta)$$

que coincide con la ecuación 14.4 del movimiento armónico simple.

> La proyección sobre un diámetro de una partícula que se mueve con movimiento circular uniforme es un movimiento armónico simple (figura 14.6).

La velocidad de una partícula que se mueve sobre una circunferencia es $r\omega$, donde r es el radio. En el caso de la partícula de la figura 14.6*b*, $r = A$, por lo que su velocidad es $A\omega$. La proyección del vector velocidad sobre el eje x da $v_x = -v \operatorname{sen} \theta$. Sustituyendo los valores de v y de θ se obtiene la ecuación

$$v_x = -\omega A \operatorname{sen} \theta = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

que coincide con la ecuación 14.5 del movimiento armónico simple.

14.2 Energía del movimiento armónico simple

Cuando un objeto oscila con movimiento armónico simple, las energías cinética y potencial del sistema varían con el tiempo. Su suma, la energía total $E = E_c + U$, es constante. Consideremos un objeto a una distancia x del equilibrio, sobre el que actúa una fuerza de restitución $-kx$. La energía potencial del sistema es

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2$$

Esta es la ecuación 6.21. Para un movimiento armónico simple, $x = A\cos(\omega t + \delta)$ y sustituyendo en la ecuación anterior

$$U = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta) \tag{14.15}$$

ENERGÍA POTENCIAL DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

La energía cinética del sistema es

$$E_c = \tfrac{1}{2}mv^2$$

en donde m es la masa del objeto y v su velocidad. En el movimiento armónico simple, $v_x = -A\omega\,\text{sen}\,(\omega t + \delta)$. Sustituyendo resulta

$$E_c = \tfrac{1}{2}mA^2\omega^2\,\text{sen}^2\,(\omega t + \delta)$$

Teniendo en cuenta que $\omega^2 = k/m$ resulta

$$E_c = \tfrac{1}{2}kA^2\,\text{sen}^2\,(\omega t + \delta) \tag{14.16}$$

ENERGÍA CINÉTICA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

La energía mecánica total es la suma de las energías potencial y cinética:

$$E_{\text{total}} = U + E_c = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta) + \tfrac{1}{2}kA^2\,\text{sen}^2\,(\omega t + \delta)$$
$$= \tfrac{1}{2}kA^2\,[\cos^2(\omega t + \delta) + \text{sen}^2\,(\omega t + \delta)]$$

Como $\text{sen}^2\,(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta) = 1$

$$E_{\text{total}} = \tfrac{1}{2}kA^2 \tag{14.17}$$

ENERGÍA TOTAL DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

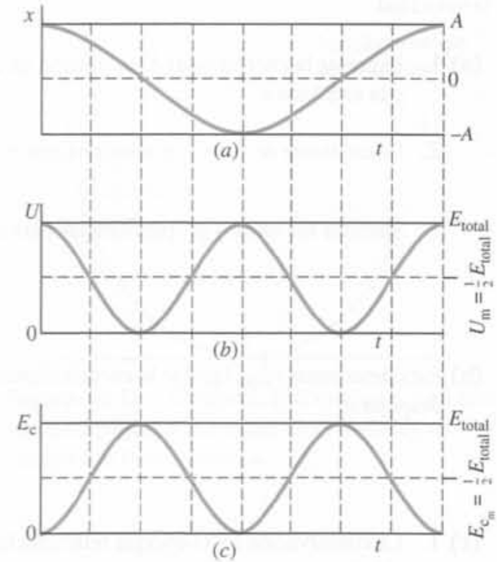


Figura 14.7 Gráficos de x, U y E_c en función de t.

Esta ecuación nos enseña una importante propiedad general del movimiento armónico simple:

La energía total del movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud.

Para un objeto en su desplazamiento máximo, la energía total es toda energía potencial. Cuando el objeto se mueve hacia su posición de equilibrio, la energía cinética del sistema crece y la energía potencial disminuye. Cuando atraviesa la posición de equilibrio, la velocidad del objeto es máxima, la energía potencial del sistema es cero y la energía total es igual a la energía cinética.

Cuando el objeto sobrepasa el punto de equilibrio, su energía cinética comienza a decrecer y la energía potencial del sistema crece hasta que el objeto de nuevo se detiene momentáneamente en su desplazamiento máximo (ahora en el sentido opuesto). En todo momento, la suma de las energías potencial y cinética es constante. La figura 14.7 muestra los gráficos de U y E_c en función del tiempo. Ambas curvas tienen la misma forma, excepto que cuando una es cero, la otra pasa por un máximo. Sus valores medios en uno o más ciclos son iguales y como $U + E_c = E$, estos valores medios vienen dados por

$$U_m = E_{c_m} = \tfrac{1}{2}E \tag{14.18}$$

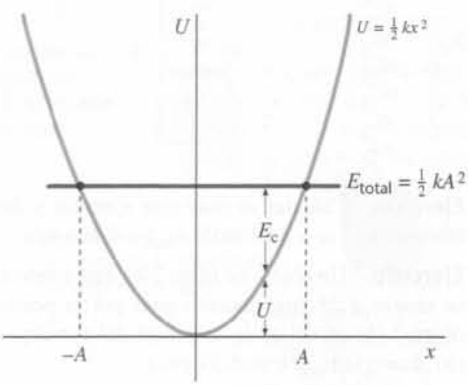


Figura 14.8 Función de la energía potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$ en el caso de un objeto de masa m unido a un muelle de masa despreciable de constante k. La línea horizontal representa la energía mecánica total E_{total} para una amplitud A. La energía cinética E_c está representada por la distancia vertical $E_c = E_{\text{total}} - U$. Como $E_{\text{total}} \geq U$, el movimiento está restringido a $-A \leq x \leq +A$.

En la figura 14.8 se ha representado la energía potencial U en función de x. La energía total E_{total} es constante y está representada por una línea horizontal. Esta línea corta a la curva de la energía potencial en $x = A$ y $x = -A$. Éstos son los puntos en que los objetos, en su oscilación, cambian el sentido de la velocidad y vuelven hacia la posición de equilibrio. Dado que $U \leq E_{\text{total}}$, el movimiento está restringido a $A \leq x \leq +A$.

EJEMPLO 14.5 | Velocidad y energía de un objeto que oscila

Un objeto de 3 kg ligado a un muelle oscila con una amplitud de 4 cm y un periodo de 2 s. (*a*) ¿Cuál es la energía total? (*b*) ¿Cuál es el módulo máximo de la velocidad del objeto? (*c*) ¿En qué posición x_1 el módulo de velocidad es igual a la mitad de su valor máximo?

Planteamiento del problema (*a*) La energía total puede determinarse a partir de la amplitud del movimiento y de la constante de fuerza del muelle, que puede calcularse mediante la masa del objeto y el periodo. (*b*) La velocidad máxima tiene lugar cuando la energía cinética es igual a la energía total. (*c*) Mediante el principio de conservación de la energía podemos relacionar la posición con el módulo la velocidad.

(a) 1. Expresar la energía total E en función de la constante de fuerza k y la amplitud A:

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2$$

2. La constante de fuerza se relaciona con el periodo y la masa:

$$k = m\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

3. Sustituir los valores proporcionados para determinar E:

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(3\text{ kg})\left(\frac{2\pi}{2\text{s}}\right)^2(0{,}04\text{ m})^2 = \boxed{2{,}37 \times 10^{-2}\text{ J}}$$

(b) Para determinar $v_{\text{máx}}$, igualar la energía cinética con la energía total y despejar v:

$$\tfrac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = E$$

con lo cual

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2(2{,}37 \times 10^{-2}\text{ J})}{3\text{ kg}}} = \boxed{0{,}126\text{ m/s}}$$

(c) 1. La conservación de la energía relaciona la posición x con la velocidad v:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

2. Sustituir $v = \frac{1}{2}v_{\text{máx}}$ y despejar x_1. Es conveniente determinar x en función de E y a partir de $E = \frac{1}{2}kA^2$ deducir una expresión de x en función de A:

$$E = \tfrac{1}{2}m(\tfrac{1}{2}v_{\text{máx}})^2 + \tfrac{1}{2}kx_1^2$$

$$= \tfrac{1}{4}\,(\tfrac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2) + \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{4}E + \tfrac{1}{2}kx_1^2$$

por lo tanto

$$\tfrac{1}{2}kx_1^2 = E - \tfrac{1}{4}E = \tfrac{3}{4}E$$

y

$$x_1 = \sqrt{\frac{3E}{2k}} = \sqrt{\frac{3}{2k}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}A$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(4\text{ cm}) = \boxed{3{,}46\text{ cm}}$$

Ejercicio Calcular ω para este ejemplo y determinar $v_{\text{máx}}$ a partir de la expresión $v_{\text{máx}} = \omega A$. (*Respuesta* $\omega = 3{,}14$ rad/s, $v_{\text{máx}} = 0{,}126$ m/s.)

Ejercicio Un objeto de masa 2 kg está sujeto a un muelle de constante de fuerza 40 N/m. El objeto se mueve a 25 cm/s cuando pasa por la posición de equilibrio. (*a*) ¿Cuál es la energía total del objeto? (*b*) ¿Cuál es la amplitud del movimiento? (*Respuesta* (*a*) $E_{\text{total}} = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = 0{,}0625$ J, (*b*) $A = \sqrt{2E_{\text{total}}/k} = 5{,}59$ cm.)

*Movimiento general próximo al equilibrio

En general se da movimiento armónico simple cuando una partícula se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio estático. La figura 14.9 es un gráfico de la energía potencial U en función de x para una fuerza que tiene una posición de equilibrio estable y otra de equilibrio inestable. Como se vio en el capítulo 6, el máximo en x_2 de la figura 14.9 corresponde al equilibrio inestable, mientras que el mínimo en x_1 corresponde al equilibrio estable. Cualquier curva continua que presente un mínimo como el de la figura 14.9 puede aproximarse cerca del mínimo por una parábola. La curva de trazos de la figura es una parábola que aproximadamente corresponde a la curva de energía potencial cerca del punto de equilibrio estable. La ecuación general de una parábola que tiene un mínimo en el punto x_1 puede expresarse en la forma

$$U = A + B(x - x_1)^2 \qquad (14.19)$$

en donde A y B son constantes. La constante A es el valor de U en la posición de equilibrio $x = x_1$. La fuerza está relacionada con la curva de la energía potencial por $F_x = -dU/dx$. Por lo tanto,

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -2B(x - x_1)$$

Si hacemos $2B = k$, esta ecuación se reduce a

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -k(x - x_1) \qquad (14.20)$$

De acuerdo con la ecuación 14.20, la fuerza es proporcional al desplazamiento y está dirigida en sentido opuesto, de modo que el movimiento es armónico simple. En la figura 14.9 se representa la función energía potencial del sistema $U(x)$, que tiene una posición de equilibrio estable en $x = x_1$. La figura 14.10 muestra, en cambio, una función energía potencial que tiene una posición de equilibrio estable en $x = 0$. El sistema que responde a una función como la que se representa en esta figura es una partícula pequeña de masa m que oscila en el fondo de un cuenco con forma esférica.

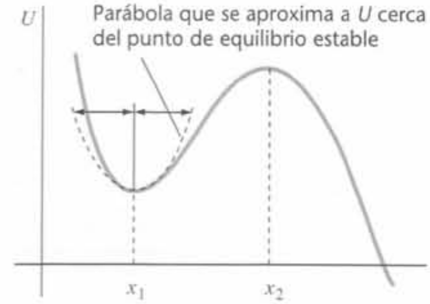


Figura 14.9 Gráfico de U en función de x para una fuerza que tiene una posición de equilibrio estable (x_1) y otra de equilibrio inestable (x_2).

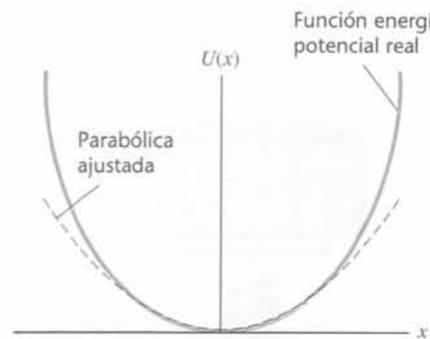


Figura 14.10 Dibujo de U respecto a x para una partícula pequeña que oscila en el fondo de un cuenco con forma esférica.

14.3 Algunos sistemas oscilantes

Objeto colgado de un muelle vertical

Cuando un objeto cuelga de un muelle vertical, además de la fuerza del muelle hay una fuerza vertical adicional hacia abajo que es el peso mg (figura 14.11). Si se elige la dirección hacia abajo como el sentido positivo del eje y, la fuerza del muelle sobre el objeto es $-ky$, donde y es el alargamiento del muelle. La fuerza neta sobre el objeto es

$$\sum F_y = -ky + mg \qquad (14.21)$$

Esta ecuación puede simplificarse definiendo una nueva variable $y' = y - y_0$, donde $y_0 = mg/k$ es la longitud que se alarga el muelle cuando el objeto está en equilibrio. Sustituyendo $y = y' + y_0$ nos lleva a

$$\sum F_y = -k(y' + y_0) + mg$$

Pero $ky_0 = mg$, por lo que

$$\sum F_y = -ky' \qquad (14.22)$$

La segunda ley de Newton ($\Sigma F_y = ma_y$) nos lleva a

$$-ky' = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

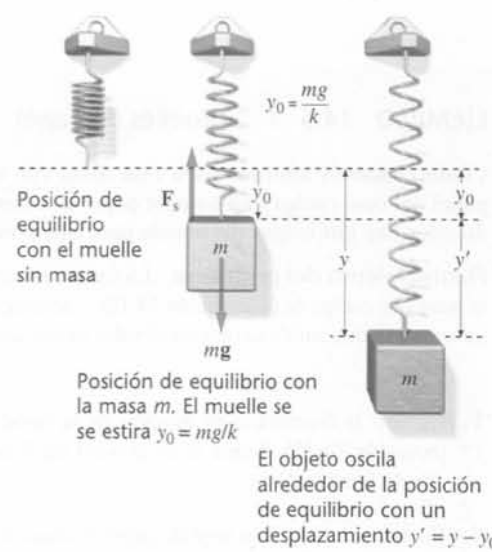


Figura 14.11 El problema de una masa colgada de un muelle vertical se simplifica si el desplazamiento (y') se mide desde la posición de equilibrio del muelle conectado a la masa.

Sin embargo, $y = y' + y_0$, donde $y_0 = mg/k$ es constante. Así, $d^2y/dt^2 = d^2y'/dt^2$, por lo tanto

$$-ky' = m\frac{d^2y'}{dt^2}$$

o sea

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{k}{m}y'$$

que es la ecuación 14.2 con y' reemplazando a x. La solución de esta ecuación nos es familiar:

$$y' = A\cos(\omega t + \delta)$$

en donde $\omega = \sqrt{k/m}$.

Así pues, el efecto de la fuerza gravitatoria mg consiste meramente en desplazar la posición de equilibrio desde $y = 0$ hasta $y' = 0$. Cuando el objeto se pasa de su posición de equilibrio una cantidad y', la fuerza neta es $-ky'$. El objeto oscila respecto a la posición de equilibrio con una frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$, la misma frecuencia con la que se movería un objeto atado a un muelle horizontal.

Si una fuerza realiza un trabajo que es independiente del camino se dice que la fuerza es conservativa. La fuerza de la gravedad y la fuerza ejercida por un muelle son conservativas, y la suma de estas fuerzas (ecuaciones 14.21 y 14.22) también lo es. La energía potencial U asociada con la suma de estas fuerzas es el trabajo realizado, con signo negativo, más una constante de integración arbitraria. Es decir,

$$U = -\int -ky'\,dy' = \tfrac{1}{2}ky'^2 + U_0$$

en donde la constante de integración U_0 es el valor de U en la posición de equilibrio ($y' = 0$). Por lo tanto,

$$U = \tfrac{1}{2}ky'^2 + U_0 \tag{14.23}$$

EJEMPLO 14.6 | Muelles de papel — *¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!*

Confeccionamos adornos para una fiesta con muelles de papel. Construimos un muelle de papel del cual cuelga una hoja de papel de color que lo alarga 8 cm. ¿Cuántas hojas de papel de color hay que colgar del muelle para que oscile con la frecuencia de 1 ciclo/s?

Planteamiento del problema La frecuencia depende del cociente entre la constante del muelle y la masa que cuelga de él (ecuación 14.12), y no sabemos ni una cosa ni otra. Sin embargo, a partir de la información disponible se obtiene el valor de este cociente usando la ley de Hooke (ecuación 14.1).

1. Escribir la frecuencia en función de la constante k y de la masa M (ecuación 14.12), donde M es la masa de N hojas de papel. Tenemos que determinar N: $\quad f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{M}}$

2. Cuando se cuelga una hoja de papel de masa m el muelle se alarga una distancia $y_0 = 8$ cm: $\quad ky_0 = mg$ y entonces $\dfrac{k}{m} = \dfrac{g}{y_0}$

3. La masa de N hojas de papel se calcula multiplicando por N la masa de una hoja m: $\quad M = Nm$

4. Se despeja k/M usando los resultados de los pasos 2 y 3: $\quad \dfrac{k}{M} = \dfrac{k}{Nm} = \dfrac{1}{N}\dfrac{g}{y_0}$

5. Se sustituye el resultado del paso 4 en el resultado del paso 1 y se despeja N:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{N}\frac{g}{y_0}}$$

por lo tanto

$$N = \frac{g}{(2\pi f)^2 y_0} = \frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{4\pi^2(1\ \text{Hz})^2(0{,}08\ \text{m})} = 3{,}11$$

$\boxed{\text{Hay que colgar tres hojas de papel de color}}$

Observación Obsérvese que en este ejemplo no hemos usado el valor de m o de k, ya que la frecuencia depende del cociente k/m que resulta ser g/y_0. Las unidades también salen bien, ya que 1 Hz = 1 ciclo/s, y un ciclo es una unidad sin dimensiones.

Ejercicio ¿Cuánto se alarga el muelle de papel cuando un adorno hecho con tres hojas de papel colgando está en equilibrio? (*Respuesta* 24 cm)

EJEMPLO 14.7 | Una bolita de abalorio sobre un bloque

Un bloque descansa sobre un muelle y oscila verticalmente con una frecuencia de 4 Hz y una amplitud de 7 cm. Una bolita de abalorio se sitúa sobre el bloque oscilante justo cuando éste alcanza su punto más bajo. Suponiendo que la masa de la bolita es tan pequeña que no afecta el movimiento del bloque, ¿a qué distancia de la posición de equilibrio del bloque la bolita pierde contacto con éste?

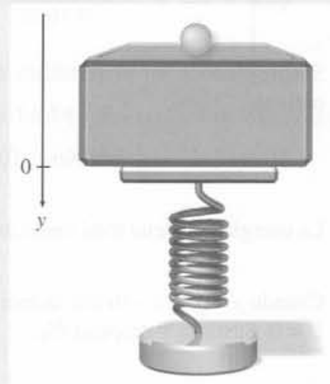


Figura 14.12

Planteamiento del problema Las fuerzas que actúan sobre la bola son su peso mg hacia abajo y la fuerza normal ejercida por el bloque hacia arriba. El módulo de esta fuerza normal cambia con las variaciones de la aceleración. A medida que el bloque se mueve hacia arriba, *por encima de la posición de equilibrio*, su aceleración y la de la bolita van *hacia abajo* y aumentan en módulo. Cuando la aceleración alcanza el valor g, la fuerza normal es cero. Si la aceleración hacia abajo a la que está sometido el bloque supera hacia abajo este valor, la bolita pierde contacto con el bloque.

1. Dibujar un esquema del sistema (figura 14.12). Incluir el eje de coordenadas y con el origen situado en la posición de equilibrio y con la dirección positiva dirigida hacia abajo:

2. Buscar el valor de y para el cual la aceleración es g dirigida hacia abajo. Usar la ecuación 14.7:

$$a_y = -\omega^2 y$$

$$g = -\omega^2 y$$

3. Sustituir $2\pi f$ por ω y despejar y:

$$g = -(2\pi f)^2 y$$

por lo tanto

$$y = -\frac{g}{(2\pi f)^2} = -\frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{[2\pi(4\ \text{Hz})]^2}$$
$$= -0{,}0155\ \text{m} = \boxed{-1{,}55\ \text{cm}}$$

Comprobar el resultado La bola se separa del bloque cuando y es negativa, lo cual se produce cuando la bolita está por encima de la posición de equilibrio, como era de esperar.

EJEMPLO 14.8 | Energía potencial del sistema Tierra-muelle

Un objeto de 3 kg alarga en 16 cm la longitud de un muelle cuando cuelga de él verticalmente y está en equilibrio. El muelle se estira 5 cm más desde su posición de equilibrio y se deja el objeto en libertad. Sea U la energía potencial total del sistema muelle-objeto-planeta. Determinar U cuando la separación de la masa respecto de su posición de equilibrio es máxima (*a*) si $U = 0$ en la posición de equilibrio y (*b*) si $U = 0$ cuando el muelle está sin deformar.

Planteamiento del problema (*a*) Con $U = 0$ en la posición de equilibrio, la energía potencial total U es $1/2ky'^2$, donde y' es el desplazamiento de la posición de equilibrio. (*b*) Si $U = 0$ cuando el muelle está sin deformar, la energía potencial total es la energía potencial del muelle más la energía potencial gravitatoria.

(a) 1. Dibujar tres esquemas del sistema, uno con el muelle sin deformar, otro con el muelle deformado 16 cm y un tercero con el muelle alargado 21 cm (figura 14.13).

2. Si la dirección positiva de y' es la dirección hacia abajo y si $y' = 0$ en la posición de equilibrio, la energía potencial total vale (ecuación 14.23)

$$U = \frac{1}{2}ky'^2$$

3. Para determinar U primero hay que saber cuánto vale la constante del muelle k. Cuando hay equilibrio la fuerza hacia arriba del muelle iguala la fuerza hacia abajo de la gravedad. Utilizando este hecho, calcular el valor de k:

$$ky_0 = mg$$

por lo tanto

$$k = \frac{mg}{y_0} = \frac{(3\text{ kg})(9{,}81\text{ m/s}^2)}{0{,}16\text{ m}} = 184\text{ N/m}$$

4. Sustituyendo k en el resultado del paso 1 y despejando U se obtiene:

$$U = \frac{1}{2}ky'^2 = \frac{1}{2}(184\text{ N/m})(0{,}05\text{ m})^2 = \boxed{0{,}230\text{ J}}$$

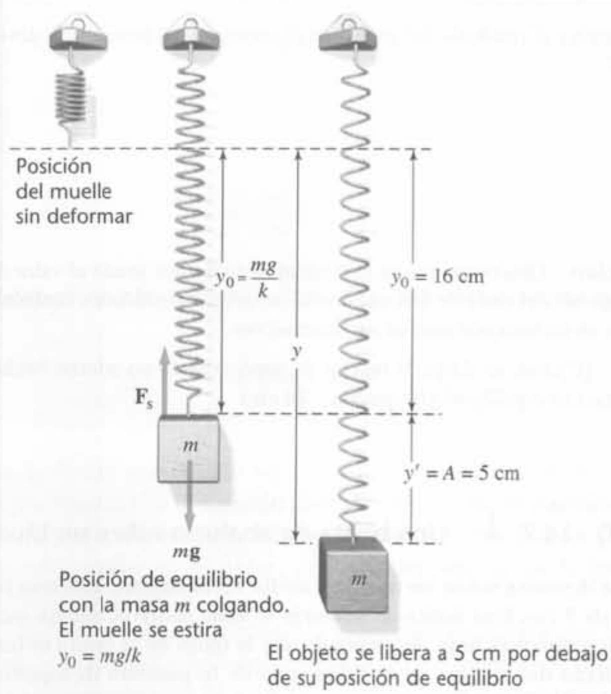


Figura 14.13

(b) 1. La energía potencial total viene dada por la ecuación 14.23:

$$U = \frac{1}{2}ky'^2 + U_0$$

2. Cuando $y' = y'_{\text{ref}} = -16$ cm, la energía potencial vale cero, es decir, $U = 0$. Sustituir y despejar U_0:

$$0 = \frac{1}{2}ky'^2 + U_0$$

por lo tanto

$$U_0 = -\frac{1}{2}ky'^2_{\text{ref}} = -\frac{1}{2}(184\text{ N/m})(-0{,}16\text{ m})^2$$
$$= -2{,}35\text{ J}$$

3. Sustituyendo U_0 en el resultado del paso 1 del apartado b se obtiene:

$$U = \frac{1}{2}ky'^2 + U_0$$
$$= \frac{1}{2}(184\text{ N/m})(0{,}05\text{ m})^2 - 2{,}35\text{ J} = \boxed{-2{,}12\text{ J}}$$

Comprobar el resultado La energía potencial calculada en el apartado (b) debe coincidir con la suma de la energía potencial del muelle U_m en $y = 21$ cm más la energía potencial gravitatoria U_g en $y = 21$cm, ya que cada una de estas energías potenciales es cero en $y = 0$, donde el muelle está sin deformar, y la dirección positiva de y está dirigida hacia abajo. $U_s = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}(184\text{ N/m})(0{,}21\text{m})^2 = 4{,}06$ J y $U_g = mg(-y) = (3\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg})(-0{,}21\text{ m}) = -6{,}18$ J. Efectivamente, la suma de estos dos términos da: $4{,}06\text{ J} - 6{,}18\text{ J} = -2{,}12$ J, que coincide con el resultado obtenido en el apartado (b) del ejercicio.

El péndulo simple

Un péndulo simple consta de una cuerda de longitud L y una lenteja de masa m. Cuando la lenteja se deja en libertad desde un ángulo inicial ϕ_0 con la vertical, oscila a un lado y a otro con un periodo T.

Ejercicio de análisis dimensional Parece lógico suponer que el periodo de un péndulo simple depende de la masa m de la lenteja, la longitud L del péndulo, la aceleración debida a la gravedad, g, y el ángulo inicial ϕ_0. Determinar una combinación simple de estas magnitudes que ofrezca las dimensiones correctas del periodo. (*Respuesta* $\sqrt{L/g}$.)

Observación Las unidades de longitud, masa y g son m, kg y m/s², respectivamente. Si dividimos L por g los metros se cancelan y permanecen segundos al cuadrado, lo que sugiere la forma $\sqrt{L/g}$. Si la fórmula del periodo contuviera la masa, la unidad kg debería cancelarse por alguna otra magnitud. Sin embargo, ninguna combinación de L y g puede cancelar las unidades de masa. Así pues, el periodo no puede depender de la masa de la lenteja. Como el ángulo ϕ_0 es adimensional, no podemos saber por análisis dimensional si es o no un factor del periodo. Más adelante veremos que para valores pequeños de ϕ_0, el periodo viene expresado por $T = 2\pi \sqrt{L/g}$.)

Las fuerzas que actúan sobre la lenteja son su peso $m\mathbf{g}$ y la tensión **T** de la cuerda (figura 14.14). Cuando la cuerda forma un ángulo ϕ con la vertical, el peso tiene las componentes $mg \cos \phi$ a lo largo de la cuerda y mg sen ϕ tangencial al arco circular en el sentido de ϕ decreciente. Para la componente tangencial, la segunda ley de Newton ($\Sigma F_t = ma_t$) nos da

$$-mg \text{ sen } \phi = m\frac{d^2s}{dt^2} \tag{14.24}$$

en donde la longitud del arco s está relacionada con el ángulo ϕ mediante $s = L\phi$. Derivando dos veces con respecto del tiempo ambos lados de la expresión $s = L\phi$ se obtiene

$$\frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

Sustituyendo en la ecuación 14.24 $L\, d^2\phi/dt^2$ por d^2s/dt^2 se obtiene

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{L} \text{ sen } \phi \tag{14.25}$$

Obsérvese que la masa m no aparece en la ecuación 14.25, es decir, el movimiento de un péndulo no depende de su masa. Para valores pequeños de ϕ, sen $\phi \approx \phi$ y

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} \approx -\frac{g}{L}\,\phi \tag{14.26}$$

La ecuación 14.26 es de la misma forma que la ecuación 14.2 para un objeto ligado a un muelle. El movimiento de un péndulo es, por lo tanto, aproximadamente armónico simple para pequeños desplazamientos angulares.

La ecuación 14.26 también puede escribirse en la forma

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi, \quad \text{en donde} \quad \omega^2 = \frac{g}{L} \tag{14.27}$$

y ω es la frecuencia angular —no la velocidad angular— del movimiento del péndulo. En consecuencia, el periodo del péndulo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{14.28}$$

PERIODO DE UN PÉNDULO SIMPLE

La solución de la ecuación 14.27 es

$$\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)$$

en donde ϕ_0 es el desplazamiento angular máximo.

De acuerdo con la ecuación 14.28, cuanto mayor es la longitud del péndulo, mayor es el periodo, lo cual está de acuerdo con lo observado experimentalmente. Obsérvese también que la frecuencia y el periodo son independientes de la amplitud de la oscilación (para amplitudes pequeñas), lo cual es una característica general del movimiento armónico simple.

Ejercicio Determinar el periodo de un péndulo simple de 1 m de longitud. (*Respuesta* 2,01 s.)

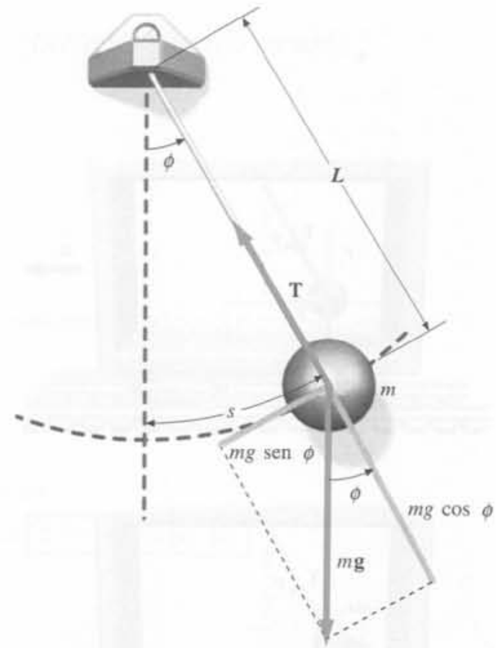
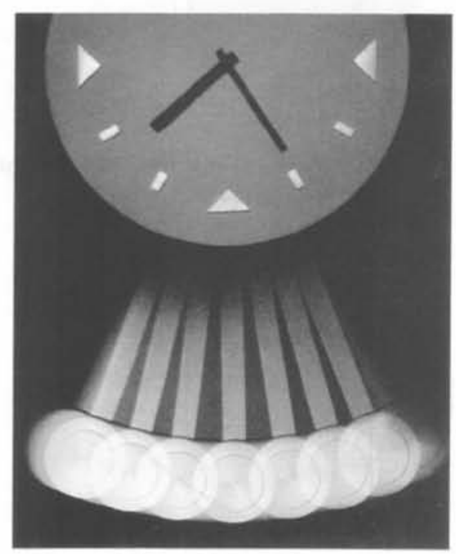
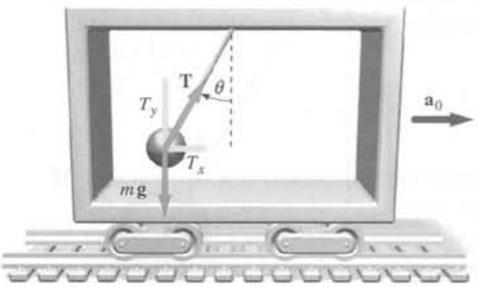


Figura 14.14 Fuerzas sobre la lenteja de un péndulo.

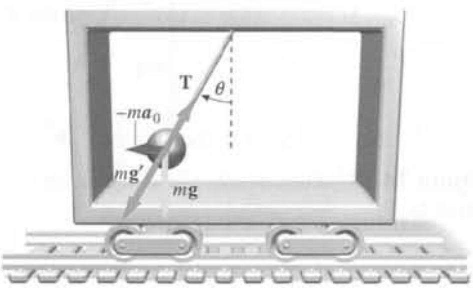


Todos los relojes mecánicos mantienen la hora exacta porque el periodo del elemento oscilante del mecanismo permanece constante. El periodo de cualquier péndulo cambia con las variaciones de la amplitud, pero el mecanismo que mueve un reloj de péndulo mantiene la amplitud a un valor constante.

La aceleración debida a la gravedad puede medirse fácilmente utilizando un péndulo simple. Únicamente es necesario medir la longitud L y el periodo T. Mediante la ecuación 14.28 se calcula g. (Para determinar T, habitualmente medimos el tiempo necesario para n oscilaciones y dividimos por n, lo cual minimiza el error de la medida.)



(a)



(b)

Figura 14.15 (a) Péndulo simple en equilibrio aparente en un furgón con movimiento acelerado. Las fuerzas que se muestran corresponden a un sistema estacionario exterior. (b) Fuerzas que actúan sobre la lenteja observadas en el sistema acelerado. Sumar la pseudofuerza $-m\mathbf{a}_0$ es equivalente a reemplazar $\mathbf{g}$ por $\mathbf{g}'$.

El péndulo en un sistema de referencia acelerado La figura 14.15*a* muestra un péndulo simple suspendido del techo de un furgón de ferrocarril que se mueve con aceleración $\mathbf{a}_0$ relativa al suelo hacia la derecha, y $\mathbf{a}$ es la aceleración de la lenteja relativa al suelo. Aplicando la segunda ley de Newton a la lenteja se obtiene

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a} \tag{14.29}$$

Si la lenteja permanece en reposo con respecto del furgón, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$ y se cumple

$$\sum F_x = T \text{ sen } \theta = ma_0$$
$$\sum F_y = T \cos \theta - mg = 0$$

en donde θ_0 es el ángulo de equilibrio, que según esto viene dado por tg $\theta_0 = a_0/g$. Si la lenteja se mueve con respecto al furgón, entonces $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$, donde $\mathbf{a}'$ es la aceleración de la lenteja relativa al furgón. Sustituyendo $\boldsymbol{a}$ en la ecuación 14.29 se obtiene

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} = m(\mathbf{a}' + \mathbf{a}_0)$$

Restando $m\mathbf{a}_0$ en los dos términos de la expresión anterior se llega a

$$\mathbf{T} + m\mathbf{g}' = m\mathbf{a}'$$

en donde $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}_0$. Reemplazando $\mathbf{g}$ por $\mathbf{g}'$ y $\boldsymbol{a}$ por $\mathbf{a}'$ en la ecuación 14.29 se obtiene el movimiento de la lenteja relativa al furgón. En la figura 14.15*b* se muestran los vectores $\mathbf{T}$ y $m\mathbf{g}'$. Si la cuerda se rompe y, por lo tanto, $\mathbf{T} = 0$, la ecuación anterior nos conduce a $\mathbf{a}' = \mathbf{g}'$, lo cual significa que $\mathbf{g}'$ es la aceleración de caída libre en el sistema de referencia del furgón. Si se desplaza ligeramente la lenteja de su posición de equilibrio, oscilará con un periodo T dado por la ecuación 14.28, donde g ha sido reemplazada por g'.

Ejercicio Un péndulo simple de longitud 1 m se encuentra en un furgón que se mueve horizontalmente con una aceleración $a_0 = 3$ m/s². Determinar g' y el periodo T. (*Respuesta* $g' = 10{,}26$ m/s², $T = 1{,}96$ s.)

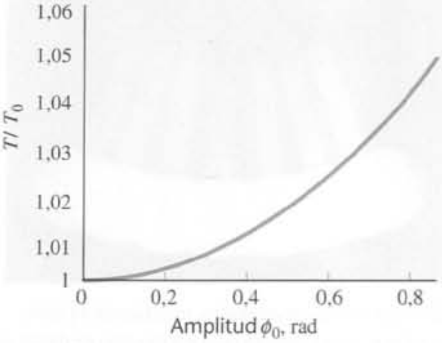


Figura 14.16 Obsérvese que los valores de las ordenadas van de 1 a 1,06. En un rango de ϕ entre 0 y 0,8 rad (46°) el periodo cambia en 5% aproximadamente.

Oscilaciones de gran amplitud Cuando la amplitud de un péndulo se hace grande, su movimiento continúa siendo periódico pero deja de ser armónico simple. Para determinar el periodo debe tenerse en cuenta una ligera dependencia con la amplitud. Para una amplitud angular cualquiera ϕ_0, se demuestra que el periodo viene dado por la expresión

$$T = T_0\left[1 + \frac{1}{2^2}\text{ sen}^2\,\frac{1}{2}\phi_0 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \text{ sen}^4\,\frac{1}{2}\phi_0 + \ldots\right] \tag{14.30}$$

PERIODO PARA OSCILACIONES DE GRAN AMPLITUD

en donde $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ es el periodo correspondiente a amplitudes muy pequeñas. La figura 14.16 muestra T/T_0 en función de la amplitud ϕ_0.

EJEMPLO 14.9 | Un reloj de péndulo

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Un reloj de péndulo simple se calibra para marchar de modo exacto con una amplitud angular de $\phi_0 = 10°$. Cuando la amplitud ha disminuido hasta ser muy pequeña, ¿el reloj se adelantará o se atrasará? ¿Cuánto se adelantará o se atrasará en un día si la amplitud sigue siendo muy pequeña?

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
1. Responder a la primera cuestión determinando si el periodo aumenta o disminuye.	T disminuye cuando ϕ disminuye de modo que el reloj se adelanta.
2. Utilizar la ecuación 14.30 para determinar la variación relativa en porcentaje, $[(T - T_0)/T_0] \times 100\%$, para $\phi = 10°$. Utilizar sólo el primer término de corrección.	0,190%.
3. Determinar el número de minutos de un día.	Hay 1440 minutos en un día.
4. Combinar las pasos 2 y 3 para determinar la variación del número de minutos en un día según el reloj del ejemplo.	Se produce un adelanto de 2,73 minutos por día.

Observación Para evitar que el reloj se adelante, los mecanismos los relojes de péndulo se diseñan de modo que mantengan la amplitud apreciablemente constante.

*El péndulo físico

Un cuerpo rígido que pueda girar libremente alrededor de un eje horizontal que no pase por su centro de masas oscilará cuando se desplace de su posición de equilibrio. Este sistema recibe el nombre de **péndulo físico**. Consideremos una figura plana con un eje de rotación situado a una distancia D del centro de masas y desplazada de su posición de equilibrio un ángulo ϕ (figura 14.17). El momento respecto al eje tiene como módulo MgD sen ϕ y tiende a disminuir $|\phi|$. La segunda ley de Newton aplicada a la rotación es

$$\tau = I\alpha$$

en donde α es la aceleración angular e I el momento de inercia respecto al eje. Sustituyendo el momento neto τ por $-MgD$ sen ϕ y $d^2\phi/dt^2$ por α tenemos

$$-MgD \operatorname{sen} \phi = I \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

o sea,

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{MgD}{I} \operatorname{sen} \phi \tag{14.31}$$

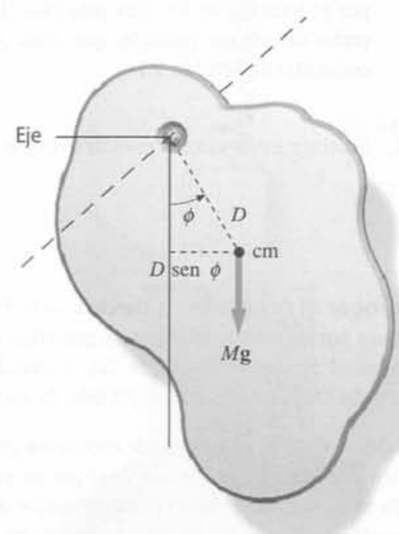


Figura 14.17 Péndulo físico.

Igual que en el péndulo simple, el movimiento es aproximadamente armónico simple si los desplazamientos angulares son pequeños, de manera que la aproximación sen $\phi \approx \phi$ sea válida. En este caso tenemos

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} \approx -\frac{MgD}{I}\phi = -\omega^2\phi \tag{14.32}$$

en donde $\omega = \sqrt{MgD/I}$ es la frecuencia angular —no la velocidad angular— del movimiento. En consecuencia, el periodo vale

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}} \tag{14.33}$$

PERIODO DE UN PÉNDULO FÍSICO

Para grandes amplitudes, el periodo viene dado por la ecuación 14.30 con T_0 expresado por la ecuación 14.33. Para un péndulo simple de longitud L, el momento de inercia es $I = ML^2$ y $D = L$. La ecuación 14.33 nos da $T = 2\pi\sqrt{ML^2/MgL} = 2\pi\sqrt{L/g}$, igual que en la ecuación 14.28.

EJEMPLO 14.10 | La barra oscilante

Una barra uniforme de masa M y longitud L puede girar libremente alrededor de un eje horizontal perpendicular a la barra y que pasa por uno de sus extremos. *(a)* Determinar el periodo de oscilación para pequeños desplazamientos angulares. *(b)* Determinar el periodo de oscilación si el eje de rotación está a una distancia x del centro de masas.

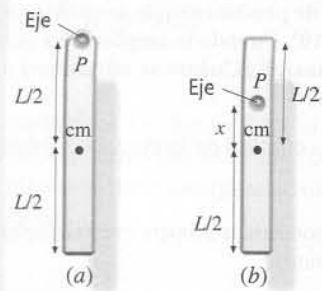


Figura 14.18

Planteamiento del problema *(a)* El periodo viene dado por la ecuación 14.33. El centro de masas se encuentra en el centro de la barra, de modo que la distancia del centro de masas al eje de rotación es la mitad de la longitud de la barra (figura 14.18*a*). El momento de inercia de una barra uniforme puede encontrase en la tabla 9.1. *(b)* Para rotaciones alrededor de un eje que pasa por un punto P (figura 14.18*b*) el momento de inercia se deduce a partir del teorema de los ejes paralelos $I = I_{cm} + MD^2$ (ecuación 9.44) en donde I_{cm} puede encontrarse en la tabla 9.1.

(a) 1. El periodo viene dado por la ecuación 14.33:
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}$$

2. El valor de I respecto al extremo se encuentra en la tabla 9.1 y D es la mitad de la longitud de la barra:
$$I = \frac{1}{3}ML^2; \qquad D = \frac{1}{2}L$$

3. Aplicar los valores de I y D para determinar T:
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg\,(\frac{1}{2}L)}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}}$$

(b) 1. Alrededor del punto P, $D = x$ y el momento de inercia viene dado por el teorema de los ejes paralelos. El momento de inercia respecto de un eje paralelo que pasa por el centro de masas se encuentra en la tabla 9.1:
$$D = x$$
$$I = I_{cm} + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + Mx^2$$

2. Sustituir estos valores para determinar T:
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}} = 2\pi\sqrt{\frac{(\frac{1}{12}ML^2 + Mx^2)}{Mgx}}$$
$$= \boxed{2\pi\sqrt{\frac{(\frac{1}{12}L^2 + x^2)}{gx}}}$$

Comprobar el resultado Cuando $x \to 0$, $T \to \infty$ como era de esperar. (Si el eje de rotación de la barra pasa por su centro de masas la gravedad no ejerce un momento restaurador.) Cuando $x = L/2$, se obtiene el mismo resultado de (a), y cuando $x >> L$ la expresión del periodo se acerca a $T = 2\pi\sqrt{x/g}$, la cual corresponde al periodo de un péndulo simple de longitud x (ecuación 14.28).

Ejercicio ¿Cuál es el periodo de oscilación para pequeños desplazamientos angulares de una regla de metro alrededor de un eje que pasa por un extremo? (*Respuesta* $T = 1{,}64$ s. Obsérvese que este periodo es menor que el de un péndulo simple de longitud $L = 1$ m. El periodo del péndulo simple es mayor porque el cociente entre su momento de inercia y el momento restaurador es mayor.)

Ejercicio Demostrar que cuando $x = L/6$, el periodo es el mismo que cuando $x = L/2$.

Observación En la figura 14.19 se muestra el periodo T en función de la distancia x del centro de masas para una barra de longitud 1 m.

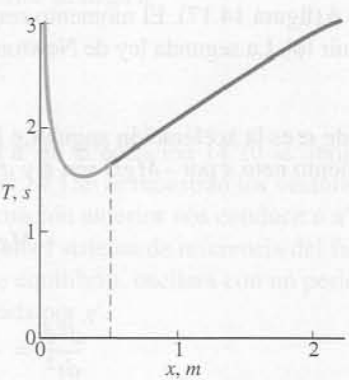


Figura 14.19 Representación gráfica del periodo en función de la distancia al centro de masas. Si $x > 0{,}5$ m el pivote está fuera del extremo de la barra.

EJEMPLO 14.11 | Revisión del ejercicio de la barra que oscila

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Determinar el valor de x en el ejemplo 14.10 para que el periodo sea mínimo.

Planteamiento del problema En el valor de x para el cual T es un mínimo, $dT/dx = 0$.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
1. El periodo viene dado por el resultado del apartado (b) del ejercicio 14.10 en el cual $T = 2\pi\sqrt{Z/g}$, donde $Z = (\frac{1}{12}L^2 + x^2)/x$. Determinar el periodo cuando x se acerca a cero y a infinito.	Cuando $x \to 0$, $Z \to \infty$, y $T \to \infty$. Cuando $x \to \infty$, $Z \to \infty$, y $T \to \infty$.

2. El periodo tiende a infinito cuando x se acerca a cero y a infinito. En algún punto del intervalo $0 < x < \infty$ el periodo es un mínimo. Para determinar el mínimo, se impone $dT/dx = 0$ y se despeja x.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT}{dZ}\frac{dZ}{dx} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}Z^{-1/2}\frac{dZ}{dx}$$

$Z > 0$ en todo el intervalo $0 < x < \infty$, con lo cual $\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dZ}{dx} = 0$

$$\frac{dZ}{dx} = 0 \Rightarrow x = \boxed{\frac{L}{\sqrt{12}} = 0.289L}$$

14.4 Oscilaciones amortiguadas

Si un muelle o un péndulo oscilan libremente, siempre acaban parándose porque las fuerzas de rozamiento disipan su energía mecánica. Un movimiento con estas características se denomina movimiento **amortiguado.** Si el amortiguamiento es muy grande, como por ejemplo en el caso de un péndulo que oscila en melaza, el oscilador ni tan solo ejecuta una oscilación completa, sino que se mueve hacia la posición de equilibrio con una velocidad que se aproxima a cero cuando el objeto se acerca a dicha posición de equilibrio. Este tipo de movimiento se denomina **sobreamortiguado**. Si, en cambio, el amortiguamiento del movimiento es débil, de modo que la amplitud decrece lentamente con el tiempo, como le ocurre a un niño que se divierte en un columpio de un parque cuando su madre deja de empujarle, el movimiento resultante se denomina **subamortiguado**. Cuando se tiene el amortiguamiento mínimo para que se produzca un movimiento no oscilatorio se dice que el sistema está **amortiguado críticamente.** (Cualquier amortiguamiento inferior produce un movimiento subamortiguado.)

Movimiento subamortiguado La fuerza de amortiguamiento ejercida por un oscilador como el que se muestra en la figura 14.20a puede representarse mediante la expresión empírica

$$\mathbf{F}_d = -b\mathbf{v}$$

en donde b es una constante. Un sistema que cumple la ecuación anterior se dice que está amortiguado linealmente. El análisis siguiente corresponde a este tipo de movimiento. La fuerza de amortiguamiento se opone a la dirección del movimiento, por lo tanto, realiza un trabajo negativo y hace que la energía mecánica del sistema disminuya. Esta energía es proporcional al cuadrado de la amplitud (ecuación 14.17) y el cuadrado de la amplitud disminuye exponencialmente a medida que aumenta el tiempo. Por lo tanto,

$$A^2 = A_0^2 e^{-t/\tau} \qquad (14.34)$$

DEFINICIÓN—CONSTANTE DE TIEMPO

en donde A es la amplitud, A_0 es la amplitud cuando $t = 0$, y τ es el **tiempo de extinción** o **constante de tiempo.** La constante de tiempo es el tiempo necesario para que la energía disminuya en un factor e.

El movimiento de un sistema amortiguado puede deducirse de la segunda ley de Newton. Para un objeto de masa m ligado a un muelle de constante de fuerza k, la fuerza neta es $-kx - b(dx/dt)$. Igualando la fuerza neta con el producto de la masa por la aceleración d^2x/dt^2, se obtiene

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (14.35)$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UN OSCILADOR AMORTIGUADO

La solución exacta de esta ecuación puede determinarse utilizando los métodos conocidos de las ecuaciones diferenciales. La solución para el caso subamortiguado es

$$x = A_0 e^{-(b/2m)t}\cos(\omega' t + \delta) \qquad (14.36)$$

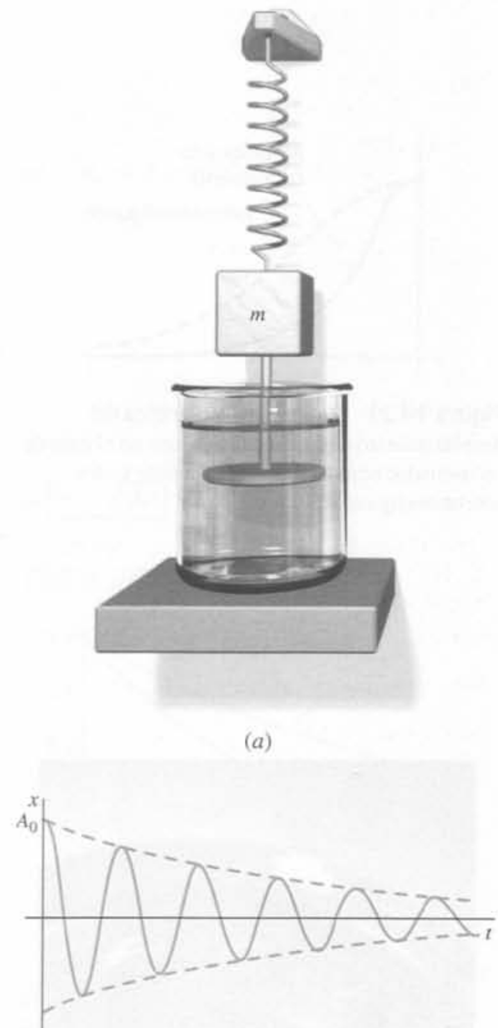


Figura 14.20 (a) Oscilador amortiguado. El movimiento se amortigua por el émbolo sumergido en el líquido. (b) Curva de oscilación amortiguada.

Para amortiguar la oscilación de esta camioneta se utilizan los amortiguadores (cilindros amarillos) que absorven los choques.

Figura 14.21 Representación gráfica del desplazamiento en función del tiempo en el caso de un oscilador amortiguado críticamente y otro sobreamortiguado.

En las llantas de las ruedas de los coches se colocan pesos para equilibrarlas. El objetivo de equilibrar las ruedas es evitar las vibraciones que producirían las oscilaciones de la dirección del vehículo.

en donde A_0 es la amplitud máxima. La frecuencia ω' viene dada por

$$\omega' = \omega_0\sqrt{1-\left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2} \tag{13.37}$$

en donde ω_0 es la frecuencia cuando no hay amortiguamiento ($\omega_0 = \sqrt{k/m}$ para una masa ligado a un muelle). Para un amortiguamiento débil, $b/2\,m\omega_0 << 1$ y ω' es aproximadamente igual a ω_0. Las curvas de trazos de la figura 14.20 corresponden a $x = A$ y $x = -A$, en donde A viene dado por

$$A = A_0 e^{-(b/2m)t} \tag{14.38}$$

Elevando al cuadrado los dos términos de esta ecuación y comparando el resultado con la ecuación 14.34 podemos identificar

$$\tau = \frac{m}{b} \tag{14.39}$$

Si la constante de amortiguamiento b crece gradualmente, la frecuencia angular ω' disminuye hasta hacerse igual a cero en el valor crítico

$$b_c = 2\,m\omega_0 \tag{14.40}$$

Si b es igual o mayor que b_c, el sistema no oscila. Cuando b es mayor que b_c el sistema es **sobreamortiguado**. Cuanto menor sea b, más rápidamente volverá el objeto al equilibrio. Cuando $b = b_c$, se dice que el sistema está **amortiguado críticamente**, y vuelve a su posición de equilibrio en el tiempo más breve posible sin oscilar. La figura 14.21 muestra el desplazamiento en función del tiempo correspondiente a un oscilador amortiguado críticamente y sobreamortiguado. En muchas aplicaciones prácticas se usa un amortiguador crítico o casi crítico para evitar las oscilaciones y sin embargo conseguir que el sistema vuelva al equilibrio rápidamente. Un ejemplo es el empleo de amortiguadores (sistemas que absorben choques) para amortiguar las oscilaciones de un automóvil sobre sus muelles. Esto puede verse empujando la parte delantera o trasera de un coche. Si el coche vuelve al equilibrio sin oscilar, el sistema de absorción de choques está amortiguado críticamente o sobreamortiguado. (Normalmente en un vehículo vacío se producen una o dos oscilaciones antes de que el sistema quede en reposo, lo que indica que la constante de tiempo está justo bajo su valor crítico.)

Como la energía de un oscilador es proporcional al cuadrado de la amplitud, la energía de un oscilador subamortiguado (valor promediado en un ciclo) también disminuye exponencialmente con el tiempo:

$$E = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2(A_0e^{-(b/2m)t})^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A_0^2e^{-(b/m)t} = E_0e^{-t/\tau} \tag{14.41}$$

en donde $E_0 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A_0^2$ y

$$\tau = \frac{m}{b} \tag{14.42}$$

Un oscilador amortiguado se describe normalmente por su **factor Q** (o factor de calidad).

$$Q = \omega_0\tau \tag{14.43}$$

DEFINICIÓN —FACTOR Q

El factor Q es adimensional. (Como las dimensiones de ω_0 son las recíprocas del tiempo, $\omega_0\tau$ no tiene diemensiones.) Podemos relacionar Q con la pérdida relativa de energía por ciclo. Diferenciando la ecuación 14.41, se obtiene

$$dE = -\frac{1}{\tau}\,E_0e^{-t/\tau}\,dt = -\frac{1}{\tau}\,E\,dt$$

Si la amortiguación es suficientemente débil para que la pérdida de energía por ciclo sea pequeña, podemos reemplazar dE por ΔE y dt por el periodo T. Por lo tanto $|\Delta E|/E$ en un ciclo (un periodo) viene dado por

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{ciclo}} = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0 \tau} = \frac{2\pi}{Q} \tag{14.44}$$

o sea,

$$Q = \frac{2\pi}{(|\Delta E|/E)_{\text{ciclo}}}, \quad \frac{|\Delta E|}{E} << 1 \tag{14.45}$$

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE Q PARA UN AMORTIGUAMIENTO LEVE

Así pues, Q es inversamente proporcional a la pérdida relativa de energía por ciclo.

EJEMPLO 14.12 | Componiendo música

Cuando se pulsa la nota do-central en el piano (frecuencia 262 Hz), la mitad de su energía se pierde en 4 segundos. (*a*) ¿Cuál es el tiempo de extinción τ? (*b*) ¿Cuál es el factor Q de esta cuerda de piano? (*c*) ¿Cuál es la pérdida de energía relativa por ciclo?

Planteamiento del problema (*a*) Utilizamos $E = E_0 e^{-t/\tau}$ haciendo $E = \frac{1}{2}E_0$. (*b*) El valor Q puede determinarse entonces a partir del tiempo de extinción y de la frecuencia.

(a) 1. Igualamos la energía de la nota pulsada en el tiempo $t = 4$ s con la mitad de su energía original:

$E = E_0 e^{-t/\tau}$ de modo que $\frac{1}{2}E_0 = E_0 e^{-4\,\text{s}/\tau}$

$\frac{1}{2} = e^{-4\,\text{s}/\tau}$

2. Despejar el tiempo tomando logaritmos neperianos de la expresión anterior:

$\ln\frac{1}{2} = -\frac{4\text{ s}}{\tau}$

despejando τ se obtiene

$\tau = \frac{4\text{ s}}{\ln 2} = \boxed{5{,}77\text{ s}}$

(b) Calcular Q a partir de τ y ω_0:

$Q = \omega_0 \tau = 2\pi f \tau$

$= 2\pi(262\text{ Hz})(5{,}77\text{ s}) = \boxed{9{,}50 \times 10^3}$

(c) La pérdida de energía relativa en un periodo viene dada por la ecuación 14.44 y la frecuencia por $f = 1/T$:

$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{ciclo}} = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{f\tau} = \frac{1}{(262\text{ Hz})(5{,}77\text{ s})} = \boxed{6{,}61 \times 10^{-4}}$

Comprobar el resultado El factor Q también puede calcularse a partir de $Q = 2\pi/(\Delta E/E)_{\text{ciclo}} = 2\pi/(6{,}61 \times 10^{-4}) = 9{,}50 \times 10^3$. Obsérvese que la pérdida de energía relativa después de 4 s no coincide con el producto del número de ciclos (4 × 262) por la pérdida de energía relativa por ciclo, ya que el decrecimiento de energía relativa no es constante, sino exponencial.

Observación La figura 14.22 muestra la amplitud relativa A/A_0 y la energía relativa E/E_0 en función del tiempo de la oscilación de una cuerda de piano después de pulsar la nota do-central. Al cabo de los 4 s, la amplitud ha disminuido a unas 0,7 veces su valor inicial y la energía, proporcional al cuadrado de la amplitud, es aproximadamente la mitad de su valor inicial.

Obsérvese que Q es bastante grande. Es fácil estimar τ y Q de diversos sistemas oscilantes. Dése un pequeño golpe a un vaso de cristal y obsérvese el tiempo que tarda el sonido en extinguirse. Un tiempo mayor supone un mayor valor de τ y Q y menor amortiguamiento. Los vasos de vidrio del laboratorio suelen tener un Q elevado. Probar con una taza de plástico. ¿Cómo es el amortiguamiento comparado con el vaso del laboratorio?

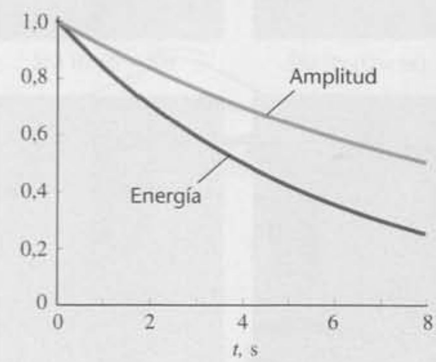


Figura 14.22 Representación de A/A_0 y de E/E_0 para una cuerda de piano pulsada.

En función de Q, la frecuencia exacta de un oscilador subamortiguado es

$$\omega' = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \tag{14.46}$$

Como b es pequeña (Q es grande) para un oscilador débilmente amortiguado (ejemplo 14.12), vemos que ω' es casi igual a ω_0.

Mediante consideraciones energéticas podemos entender cualitativamente el comportamiento de un oscilador amortiguado. La potencia disipada por la fuerza amortiguadora es igual a la variación instantánea de la energía mecánica total por unidad de tiempo

$$P = \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v} = -b\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = -bv^2 \tag{14.47}$$

En un oscilador ligeramente amortiguado, la energía mecánica total disminuye poco a poco con el tiempo. La energía cinética media es igual a la mitad de la energía total

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_m = \frac{1}{2}E \qquad \text{o} \qquad (v^2)_m = \frac{E}{m}$$

Si sustituimos $(v^2)_m = E/m$ por v^2 en la ecuación 14.47, resulta

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2 \approx -b(v^2)_m = -\frac{b}{m}E \tag{14.48}$$

Reordenando la ecuación 14.48 nos queda

$$\frac{dE}{E} = -\frac{b}{m}dt$$

ecuación que integrada tiene la solución

$$E = E_0 e^{-(b/m)t} = E_0 e^{-t/\tau}$$

que es la ecuación 14.41.

Dándose impulso en el columpio, la persona de la fotografía transfiere parte de su energía interna la energía mecánica del oscilador.

14.5 Oscilaciones forzadas y resonancia

Para mantener en marcha un sistema amortiguado debemos ir suministrando energía al sistema. Cuando se lleva a cabo esto, se dice que el oscilador es forzado. Por ejemplo, al sentarse en un columpio y hacerlo oscilar, el suministro de energía se realiza moviendo el cuerpo y las piernas hacia delante y hacia atrás, de forma que se convierte en un oscilador forzado. Si se introduce energía en el sistema a un ritmo mayor del que se disipa, la energía aumenta con el tiempo, lo cual se aprecia por un aumento de la amplitud del movimiento. Si la energía se introduce al mismo ritmo que se disipa, la amplitud permanece constante con el tiempo. En este caso se dice que el oscilador está en estado estacionario.

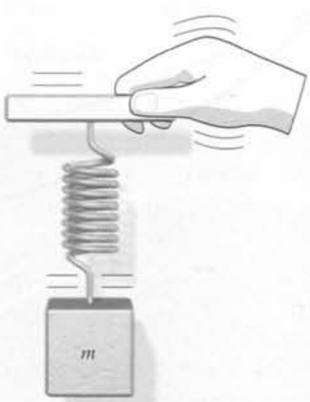


Figura 14.23 Se puede ejercer una fuerza externa sobre un objeto sujeto a un muelle desplazando el punto del soporte hacia arriba y hacia abajo.

Una manera de suministrar energía a un sistema formado por un objeto que cuelga de un muelle vertical es mover el punto de soporte hacia arriba y hacia abajo, con un movimiento armónico simple de frecuencia ω (figura 14.23). Al principio el movimiento es complicado, pero finalmente alcanza un estado estacionario en el que el sistema oscila con la misma frecuencia de la fuerza externa impulsora y con amplitud constante y, por lo tanto, con energía constante. En el estado estacionario, la energía introducida en el sistema por la fuerza impulsora durante un ciclo es igual a la disipada en el ciclo debido al amortiguamiento.

La amplitud y, por lo tanto, la energía de un sistema en estado estacionario, no sólo depende de la amplitud del sistema impulsor sino también de su frecuencia. Se define la **frecuencia natural** de un oscilador, ω_0 como la que tendría si no estuviesen presentes ni el amortiguamiento ni el sistema impulsor. (Por ejemplo, la frecuencia angular natural de un muelle es $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.) Si la frecuencia impulsora es aproximadamente igual a la frecuencia natural del sistema, éste oscilará con una amplitud relativamente grande. Por ejemplo, si el soporte de la figura 14.23 oscila con la frecuencia natural del sistema masa-muelle, la masa oscilará con una amplitud mucho mayor que si el soporte oscila con frecuencias mayores o menores. Este fenómeno se denomina **resonancia**. Cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es igual a la frecuencia natural del oscilador, la energía absorbida por éste en cada ciclo es máxima. Por ello la frecuencia natural del sistema se denomina **frecuencia de resonancia** del mismo. (Matemáticamente es más conveniente utilizar la frecuencia angular ω que la frecuencia $f = \omega/(2\pi)$. Como ω y f son proporcionales, la mayoría de las afirmaciones concernientes a la frecuencia angular también son válidas para la frecuencia. En descripciones verbales normalmente se omite la palabra angular siempre que esta omisión no provoque confusión.) En la figura 14.24 se muestra un diagrama de la potencia media transmitida a un oscilador en función de la frecuencia de la fuerza impulsora para dos valores diferentes del amortiguamiento. Estas curvas reciben el nombre de **curvas de resonancia**. Cuando el amortiguamiento es pequeño (el valor de Q es alto), la anchura del pico de la curva de resonancia es correspondientemente estrecha y se dice que la resonancia es aguda. Cuando el amortiguamiento es grande, la curva de resonancia es ancha. La anchura $\Delta\omega$ de cada curva de resonancia, indicada en la figura, es la anchura a la mitad de la altura máxima. Para un amortiguamiento relativamente pequeño, se demuestra que el cociente entre la anchura de resonancia y la frecuencia de resonancia es igual al valor inverso del factor Q (véase problema 126):

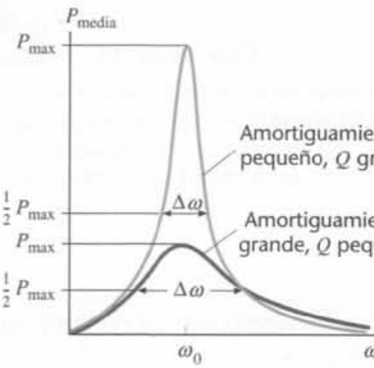


Figura 14.24 Resonancia en un oscilador. La anchura $\Delta\omega$ del pico de resonancia para un oscilador que tiene una Q grande es pequeña comparada con la frecuencia natural ω_0.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \qquad (14.49)$$

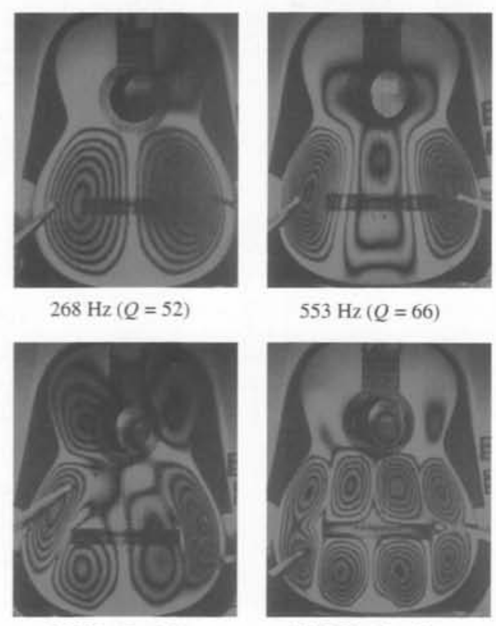
ANCHURA DE RESONANCIA PARA UN AMORTIGUAMIENTO PEQUEÑO

Por lo tanto, el factor Q es una medida directa de la agudeza de la resonancia.

Puede hacerse un experimento simple que demuestre la resonancia. Se sostiene una regla por un extremo con dos dedos, de modo que actúe como un péndulo. (Si no se dispone de una regla, se puede usar cualquier otro objeto conveniente, como un palo de golf.) Se suelta el otro extremo desde una cierta distancia angular y se observa la frecuencia natural del movimiento. Después se mueve la mano adelante y atrás horizontalmente para darle impulso con la frecuencia natural de la regla. Aunque la amplitud del movimiento de la mano sea pequeña, la regla oscilará con una amplitud considerable. Si la mano se mueve adelante y atrás a una frecuencia el doble o triple de la frecuencia natural, se observará una disminución de la amplitud de la regla oscilante.

Existen muchos ejemplos familiares de resonancia. Cuando nos sentamos en un columpio aprendemos intuitivamente a mover el cuerpo con la misma frecuencia que la natural del columpio. Muchas máquinas vibran porque tienen piezas en rotación que no están perfectamente equilibradas. (Observar, por ejemplo, una máquina de lavar en el periodo de centrifugado.) Si se sujeta una de estas máquinas a una estructura que pueda vibrar, dicha estructura se convierte en un sistema oscilatorio forzado que puede iniciar su movimiento por la acción de la máquina. Los técnicos han hecho grandes esfuerzos para equilibrar las partes giratorias de estas máquinas u otras semejantes, amortiguando sus vibraciones y aislándolas de los edificios que las soportan.

Puede romperse un vaso con bajo amortiguamiento mediante una onda sonora intensa con una frecuencia igual o muy próxima a la frecuencia natural de vibración del mismo. Este efecto se emplea a menudo en demostraciones de física utilizando un oscilador de audio y un amplificador adecuado.



268 Hz (Q = 52) — 553 Hz (Q = 66) — 672 Hz (Q = 61) — 1010 Hz (Q = 80)

Los objetos extensos tienen más de una frecuencia de resonancia. Cuando se pulsa una cuerda de guitarra, se transmite la energía al cuerpo del instrumento. Las oscilaciones del cuerpo de la guitarra, acopladas a las oscilaciones de la masa del aire que encierra, producen los diagramas de resonancia que se indican en estas figuras.

*Tratamiento matemático de la resonancia

Vamos a estudiar matemáticamente el oscilador forzado suponiendo que, además de estar sometido a una fuerza restauradora y a una fuerza de amortiguamiento, está sujeto a una fuerza externa (fuerza impulsora) que varía armónicamente con el tiempo:

$$F_{ext} = F_0 \cos \omega t \qquad (14.50)$$

en donde F_0 y ω son el módulo y la frecuencia angular de la fuerza impulsora. Generalmente esta frecuencia no está relacionada con la frecuencia angular natural del sistema ω_0.

La segunda ley de Newton aplicada a un objeto de masa m atado a un muelle de constante de fuerza k y sujeto a una fuerza amortiguadora $-bv_x$ y a una fuerza externa $F_0 \cos \omega t$, nos da

$$\sum F_x = ma_x$$

$$-kx - bv_x + F_0 \cos \omega t = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

en donde se ha usado que $a_x = d^2x/dt^2$. Sustituyendo $m\omega_0^2$ por k (ecuación 14.8) y ordenando los términos se obtiene

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t \tag{14.51}$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UN OSCILADOR FORZADO

Abordaremos la solución general de la ecuación 14.51 cualitativamente. La solución de la ecuación consta de dos partes, la **solución transitoria** y la **solución estacionaria**. La parte transitoria de la solución es idéntica a la de un oscilador amortiguado no forzado dada en la ecuación 14.36. Las constantes de esta solución dependen de las condiciones iniciales. Transcurrido cierto tiempo, esta parte de la solución se hace despreciable porque la amplitud disminuye exponencialmente con el tiempo. De este modo sólo queda la solución estacionaria, que puede escribirse en la forma

$$x = A \cos(\omega t - \delta) \tag{14.52}$$

POSICIÓN DE UN OSCILADOR FORZADO

en donde la frecuencia angular ω es la misma que la de la fuerza impulsora. La amplitud A viene dada por

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \tag{14.53}$$

AMPLITUD DE UN OSCILADOR FORZADO

y la constante de fase δ viene dada por

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{14.54}$$

CONSTANTE DE FASE DE UN OSCILADOR FORZADO

Comparando las ecuaciones 14.50 y 14.52, podemos ver que el desplazamiento del sistema y la fuerza impulsora oscilan con la misma frecuencia pero difieren en fase en δ. Cuando la frecuencia impulsora ω es mucho menor que la frecuencia natural ω_0, $\delta \approx 0$, como puede verse a partir de la ecuación 14.54. En la resonancia, $\delta = \pi/2$. Cuando ω es mucho mayor que ω_0, $\delta \approx \pi$. Al comienzo de este capítulo hemos visto que el desplazamiento de una partícula que experimenta un movimiento armónico simple viene dado por $x = A\cos(\omega t + \delta)$ (ecuación 14.4). Esta ecuación es idéntica a la ecuación 14.52 excepto en el signo que precede a la constante δ. La fase de un oscilador forzado siempre va retrasada con respecto a la fase de la fuerza impulsora. El signo negativo de la ecuación 14.52 asegura que δ siempre es positivo.

En el experimento simple de la regla impulsada por el movimiento de la mano adelante y atrás, obsérvese que, en la resonancia, la oscilación de la mano no está en fase ni en desfase de 180° con la oscilación de la regla. Si se mueve la mano adelante y atrás con una frecuencia varias veces la frecuencia natural de la regla, el movimiento en el estado estacionario de ésta se habrá desfasado respecto a la mano casi 180°.

La velocidad del objeto en estado estacionario se obtiene derivando x respecto a t:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t - \delta)$$

En la resonancia, $\delta = \pi/2$, y la velocidad está en fase con la fuerza impulsora:

$$v = -A\omega \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = +A\omega \cos \omega t$$

Así pues, en la resonancia, el objeto siempre se está moviendo en el sentido en que actúa la fuerza impulsora, como era de esperar para que se consiguiese el máximo aporte de energía. La amplitud de velocidad ωA es máxima para $\omega = \omega_0$.

EXPLORANDO

¿Tienen solución numérica las ecuaciones para los osciladores amortiguados y forzados? Investigue esto y mucho más en www.whfreeman.com/tipler5e

EJEMPLO 14.13 | Un objeto en un muelle

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Un objeto de masa 1,5 kg situado sobre un muelle de constante de fuerza 600 N/m pierde el 3% de su energía en cada ciclo. El sistema viene impulsado por una fuerza sinusoidal con un valor máximo de $F_0 = 0{,}5$ N. (*a*) ¿Cuál es el valor de Q para este sistema? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia (angular) de resonancia? (*c*) Si la frecuencia impulsora varía, ¿cuál es la anchura $\Delta\omega$ de la resonancia? (*d*) ¿Cuál es la amplitud en la resonancia? (*e*) ¿Cuál es la amplitud de la frecuencia impulsora si $\omega = 19$ rad/s?

Planteamiento del problema La pérdida de energía por ciclo es del 3%, por lo que la amortiguación es débil. El factor Q puede determinarse mediante la expresión $Q = 2\pi/(\Delta E/E)_{\text{ciclo}}$ (ecuación 14.45) y después utilizar este resultado y $\Delta\omega/\omega_0 = 1/Q$ (ecuación 14.49) para determinar la anchura de la resonancia $\Delta\omega$. La frecuencia de resonancia es la frecuencia natural. La amplitud puede determinarse a partir de la ecuación 14.53 tanto en resonancia como fuera de resonancia, con la constante de amortiguamiento calculada mediante Q utilizando la definición de Q (ecuación 14.43) $Q = \omega_0\tau = \omega_0 m/b$.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
(a) El amortiguamiento es débil. Relacionar Q con la pérdida de energía usando la ecuación 14.45 y despejar Q.	$Q \approx \frac{2\pi}{(\lvert\Delta E\rvert/E)_{\text{ciclo}}} = \frac{2\pi}{0{,}03} = \boxed{209}$
(b) Relacionar la frecuencia de resonancia con la frecuencia natural del sistema.	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \boxed{20 \text{ rad/s}}$
(c) Relacionar la anchura de la resonancia $\Delta\omega$ con Q.	$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \boxed{0{,}0957 \text{ rad/s}}$
(d) 1. Escribir una expresión para la amplitud A válida para cualquier frecuencia impulsora ω.	$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$
2. Aplicar $\omega = \omega_0$ para el cálculo de A en la resonancia.	$A(\omega_0) = \frac{F_0}{b\omega_0}$
3. Utilizar la ecuación 14.43 para relacionar la constante de amortiguamiento b con Q.	$b = \frac{m\omega_0}{Q} = 0{,}144$ kg/s
4. Utilizar los resultados de los dos pasos previos para calcular la amplitud en la resonancia.	$A(\omega_0) = \frac{F_0}{b\omega_0} = \boxed{17{,}4 \text{ cm}}$
(e) Calcular la amplitud para $\omega = 19$ rad/s. (Podemos omitir las unidades para simplificar la ecuación. Como todas las magnitudes se expresan en unidades del SI, A se expresa en metros).	$A(19\ \text{s}^{-1}) = \frac{0{,}5}{\sqrt{1{,}5^2(20^2 - 19^2)^2 + 0{,}144^2(19)^2}} = \boxed{0{,}854 \text{ cm}}$

Observación Para una separación de 1 rad/s del valor ω de la resonancia, la amplitud disminuye en un factor 20. Esto no es sorprendente, ya que la anchura de la resonancia es sólo de 0,0957 rad/s. Obsérvese que fuera de la resonancia, el término $b^2\omega^2$ es despreciable comparado con el otro término del denominador de la expresión de A. Cuando $\omega - \omega_0$ es superior en varias veces la anchura $\Delta\omega$ a mitad de altura, como en este ejemplo, podemos despreciar el término $b^2\omega^2$ y calcular A según la expresión $A \approx F_0/[m(\omega_0^2 - \omega^2)]$. La figura 14.25 muestra la amplitud en función de la frecuencia impulsora ω. Obsérvese que la escala horizontal corresponde a un rango pequeño de ω.

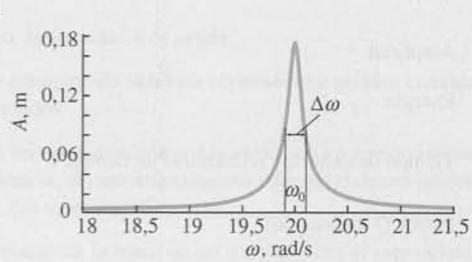


Figura 14.25

Resumen

1 El movimiento armónico simple tiene lugar cuando la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento contado desde el equilibrio. Tiene numerosas aplicaciones en el estudio de las oscilaciones, ondas, circuitos eléctricos y de la dinámica molecular.

2 La resonancia es un fenómeno importante en múltiples áreas de la física. Tiene lugar cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es similar a la frecuencia natural del sistema oscilante.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Movimiento armónico simple	En el movimiento armónico simple, la fuerza neta y la aceleración son proporcionales al desplazamiento, pero tienen sentido contrario a éste.
Función desplazamiento	$x = A\cos(\omega t + \delta)$ **(14.4)**
Velocidad	$v = -\omega A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \delta)$ **(14.5)**
Aceleración	$a_x = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta)$ **(14.6)** $a_x = -\omega^2 x$ **(14.7)**
Frecuencia angular	$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$ **(14.11)**
Energía total	$E_{\text{total}} = E_c + U = \frac{1}{2}kA^2$ **(14.17)**
Energía cinética y potencial medias	$E_{c_m} = U_m = \frac{1}{2}E_{\text{total}}$ **(14.18)**
Movimiento circular	Cuando una partícula se mueve sobre una circunferencia con velocidad constante, la proyección de la posición de la partícula sobre un diámetro de esa circunferencia se mueve con movimiento armónico simple.
Movimiento general próximo al equilibrio	Si un objeto experimenta un pequeño desplazamiento a partir de cualquier posición de equilibrio estable, oscila alrededor de esta posición con movimiento armónico simple.
2. Frecuencias angulares para diversos sistemas	
Masa ligada a un muelle	$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ **(14.8)**
Péndulo simple	$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$ **(14.27)**
*Péndulo físico	$\omega = \sqrt{\dfrac{MgD}{I}}$ **(14.32)** en donde D es la distancia del centro de masas al eje de rotación e I es el momento de inercia respecto a dicho eje.
3. Oscilaciones amortiguadas	En las oscilaciones de los sistemas reales, el movimiento está amortiguado debido a fuerzas disipativas. Si el amortiguamiento es mayor que cierto valor crítico, el sistema no oscila sino que regresa simplemente a su posición de equilibrio si ha sido perturbado. El movimiento de un sistema ligeramente amortiguado es muy semejante al movimiento armónico simple pero tiene una amplitud que disminuye exponencialmente con el tiempo.
Frecuencia	$\omega' = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$ **(14.46)**
Amplitud	$A = A_0 e^{-(b/2m)t}$ **(14.38)**
Energía	$E = E_0 e^{-t/\tau}$ **(14.41)**
Tiempo de extinción o constante de tiempo	$\tau = \dfrac{m}{b}$ **(14.42)**
Factor Q (definición)	$Q = \omega_0 \tau$ **(14.43)**
Factor Q para amortiguamiento débil	$Q = \dfrac{2\pi}{(\lvert\Delta E\rvert/E)_{\text{ciclo}}}, \quad \dfrac{\lvert\Delta E\rvert}{E} << 1$ **(14.45)**

4. Oscilaciones forzadas

Cuando un sistema ligeramente amortiguado ($b < b_c$) se ve forzado a oscilar por la acción de una fuerza externa que varía sinusoidalmente con el tiempo, $F_{ext} = F_0 \cos \omega t$, el sistema oscila con una frecuencia ω igual a la del sistema impulsor y con una amplitud A que depende de esta frecuencia.

Frecuencia de resonancia	$\omega = \omega_0$	
Anchura de resonancia para amortiguamiento débil	$\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = \dfrac{1}{Q}$	(14.49)
*Función desplazamiento	$x = A \cos(\omega t - \delta)$	(14.52)
*Amplitud	$A = \dfrac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$	(14.53)
*Constante de fase	$\operatorname{tg} \delta = \dfrac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$	(14.54)

Problemas

- ● Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- ●● Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- ●●● Desafiante, para alumnos avanzados.
- SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.
- iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.
- iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

1 ● ¿Cuál es el módulo de la aceleración de un oscilador de amplitud A y frecuencia f cuando el módulo de su velocidad es máximo? ¿Y cuándo es máximo su desplazamiento?

2 ● ¿Pueden tener el mismo sentido el desplazamiento y la aceleración de un oscilador armónico simple? ¿Y el desplazamiento y la velocidad? ¿Y la aceleración y la velocidad? Razonar las respuestas.

3 ● Verdadero o falso:

(*a*) En el movimiento armónico simple, el periodo es proporcional al cuadrado de la amplitud.

(*b*) En el movimiento armónico simple, la frecuencia no depende de la amplitud.

(*c*) Si la aceleración de una partícula que se mueve en una dimensión es proporcional al desplazamiento pero de sentido opuesto, el movimiento es armónico simple.

4 ● SSM Si la amplitud de un oscilador armónico simple se triplica, ¿en qué factor se modifica la energía?

5 ●● Un objeto sujeto a un muelle tiene un movimiento armónico simple de amplitud 4,0 cm. Cuando el objeto se encuentra a 2,0 cm de la posición de equilibrio, ¿qué fracción de su energía total es energía potencial? (*a*) Un cuarto. (*b*) Un tercio. (*c*) La mitad. (*d*) Dos tercios. (*e*) Tres cuartos.

6 ● Verdadero o falso:

(*a*) El periodo de un objeto que oscila sobre un determinado muelle es el mismo independientemente de que el muelle sea vertical u horizontal.

(*b*) El módulo máximo de la velocidad de un objeto que oscila con amplitud A sobre un determinado muelle es el mismo independientemente de que el muelle sea vertical u horizontal.

7 ● Verdadero o falso: El movimiento de un péndulo simple es armónico simple para cualquier desplazamiento angular inicial.

8 ● Verdadero o falso: El movimiento de un péndulo simple es periódico para cualquier desplazamiento angular inicial.

9 ●● SSM Dos carros idénticos están unidos por un muelle en una vía de aire sin rozamiento. De repente uno de ellos recibe un golpe que lo separa del otro. El movimiento resultante de los carros es muy irregular: primero se mueve uno, que se para cuando el otro inicia el movimiento, el cual a su vez se para de modo que el primer carro se pone en movimiento de nuevo y así sucesivamente. Explicar este movimiento de forma cualitativa.

10 ●● SSM Cuando sube la temperatura la cuerda de un péndulo simple se alarga como consecuencia de la dilatación. ¿Cómo afectaría esto al funcionamiento de un reloj que funcionara con un péndulo simple?

11 ● Verdadero o falso: La energía mecánica de un oscilador no forzado, amortiguado, decrece exponencialmente con el tiempo.

12 ● Verdadero o falso:

(*a*) La resonancia tiene lugar cuando la frecuencia impulsora es igual a la frecuencia natural.

(*b*) Si el valor de Q es alto, la resonancia es aguda.

13 ● Dar algunos ejemplos de sistemas comunes que pueden considerarse como osciladores forzados.

14 ● Una copa de cristal que estalla por la acción de un sonido intenso es un ejemplo de (*a*) resonancia, (*b*) amortiguamiento crítico, (*c*) decrecimiento exponencial de la energía, (*d*) sobreamortiguamiento.

15 ● SSM El efecto de la masa de un muelle sobre el movimiento de un objeto atado a él suele despreciarse. Describir cualitativamente su efecto cuando se tiene en cuenta.

16 ●● Una lámpara que cuelga del techo de un vagón-club de un tren oscila con periodo T_0 cuando el tren está en reposo. El periodo será (emparejar las columnas derecha e izquierda)

1. mayor que T_0 cuando	A. el tren se mueve horizontalmente con velocidad constante.
2. menor que T_0 cuando	B. el tren se mueve por una curva de radio R con velocidad v.
3. igual a T_0 cuando	C. el tren asciende por una colina de inclinación θ a velocidad constante.
	D. el tren pasa por una colina de radio de curvatura R con velocidad constante.

17 ●● Dos sistemas masa-muelle oscilan con frecuencias f_A y f_B. Si $f_A = 2f_B$ y las constantes de los dos muelles son iguales, las masas de ambos sistemas cumplen la relación (*a*) $M_A = 4M_B$, (*b*) $M_A = M_B/\sqrt{2}$, (*c*) $M_A = M_B/2$, (*d*) $M_A = M_B/4$.

18 ●● Dos sistemas masa-muelle A y B oscilan de modo que sus energías son iguales. Si $M_A = 2M_B$, ¿cuál de las siguientes fórmulas relaciona las amplitudes de oscilación? (*a*) $A_A = A_B/4$. (*b*) $A_A = A_B/\sqrt{2}$. (*c*) $A_A = A_B$. (*d*) No hay suficiente información para determinar la relación de las amplitudes.

19 ●● Dos sistemas masa-muelle A y B oscilan de modo que sus energías son iguales. Si $k_A = 2k_B$, ¿cuál de las siguientes fórmulas relaciona las amplitudes de oscilación? (*a*) $A_A = A_B/4$. (*b*) $A_A = A_B/\sqrt{2}$. (*c*) $A_A = A_B$. (*d*) No hay suficiente información para determinar la relación de las amplitudes.

20 ●● El péndulo A tiene una lenteja de masa M_A y longitud L_A; el péndulo B tiene una lenteja de masa M_B y longitud L_B. Si el periodo de A es doble al de B, será (*a*) $L_A = 2L_B$ y $M_A = 2M_B$, (*b*) $L_A = 4L_B$ y $M_A = M_B$, (*c*) $L_A = 4L_B$ cualquiera que sea la relación M_A/M_B, (*d*) $L_A = \sqrt{2}\, L_B$ cualquiera que sea la relación M_A/M_B.

Aproximaciones y estimaciones

21 ●● Un niño se está columpiando en un columpio. Si no se le suministra energía mecánica, la amplitud de su oscilación disminuye un factor $1/e$ cada ocho periodos. Estimar el factor Q para este sistema.

22 ●● SSM (*a*) Estimar el periodo natural de oscilación del batir de brazos de una persona cuando camina, suponiendo que no lleva ningún peso. (*b*) Estimar el periodo natural de oscilación si la persona mueve una cartera muy pesada. Obsérvese cómo camina la gente y estímese si estos dos cálculos se ajustan a lo que se percibe en el mundo real.

Movimiento armónico simple

23 ● iSOLVE La posición de una partícula viene dada por $x = (7\text{ cm}) \cos 6\pi t$, en donde t viene dado en segundos. Determinar (*a*) la frecuencia, (*b*) el periodo y (*c*) la amplitud del movimiento de la partícula. (*d*) ¿Cuál es el primer instante después de $t = 0$ en que la partícula está en su posición de equilibrio? ¿En qué sentido se está moviendo en ese instante?

24 ● ¿Cuál es la constante de fase δ de la ecuación 14.4 si la posición de la partícula oscilante en el instante $t = 0$ es (*a*) 0, (*b*) $-A$, (*c*) A, (*d*) $A/2$?

25 ● SSM Una partícula de masa m empieza estando en reposo en $x = +25$ cm y oscila alrededor de su posición de equilibrio en $x = 0$ con un periodo de 1,5 s. Escribir las ecuaciones para (*a*) la posición x en función del tiempo t, (*b*) la velocidad v en función de t y (*c*) la aceleración a en función de t.

26 ● Hallar el módulo máximo de (*a*) la velocidad y (*b*) la aceleración de la partícula del problema 23. (*c*) ¿Cuál es la primera vez que la partícula está en $x = 0$ y moviéndose hacia la derecha?

27 ●● Resolver el problema 25 para el caso en que la partícula está inicialmente en $x = 25$ cm y se está moviendo con velocidad $v_0 = +50$ cm/s.

28 ●● El periodo de una partícula oscilante es 8 s y su amplitud 12 cm. En el tiempo $t = 0$ se encuentra en la posición de equilibrio. Determinar la distancia recorrida durante el intervalo (*a*) $t = 0$ a $t = 2$ s, (*b*) $t = 2$ s a $t = 4$ s, (*c*) $t = 0$ a $t = 1$ s y (*d*) $t = 1$ s a $t = 2$ s.

29 ●● El periodo de una partícula oscilante es 8 s. En $t = 0$, la partícula está en reposo en $x = A = 10$ cm. (*a*) Hacer un gráfico de x en función de t. (*b*) Hallar la distancia recorrida en el primer, segundo, tercer y cuarto segundo después de $t = 0$.

30 ●● SSM iSOLVE En las especificaciones militares es frecuente que exijan que los dispositivos electrónicos sean capaces de resistir aceleraciones de $10g = 98{,}1$ m/s². Para asegurarse de que sus productos cumplen con esta especificación, los fabricantes los someten a ensayos en una mesa vibrante que puede hacer vibrar un equipo a diversas frecuencias y amplitudes especificadas. Si un determinado dispositivo se somete a una vibración de 1,5 cm de amplitud, ¿cuál deberá ser su frecuencia para que cumpla con la especificación militar de los $10g$?

31 ●● iSOLVE✓ La posición de una partícula viene dada por $x = 2{,}5 \cos \pi t$, en donde x se expresa en metros y t en segundos. (*a*) Determinar la velocidad máxima y la aceleración máxima de la partícula. (*b*) Determinar la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $x = 1{,}5$ m.

32 ●● SSM (*a*) Demostrar que $A_0 \cos(\omega t + \delta)$ puede escribirse también como $A_s \operatorname{sen}(\omega t) + A_c \cos(\omega t)$, y determinar A_s y A_c en función de A_0 y δ. (*b*) Relacionar A_s y A_c con la posición y la velocidad iniciales de una partícula que experimenta un movimiento armónico simple.

Movimiento armónico simple y movimiento circular

33 ● iSOLVE Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio 40 cm con una velocidad constante de 80 cm/s. Hallar (*a*) la frecuencia y (*b*) el periodo del movimiento. (*c*) Escribir una ecuación para la componente x de la posición de la partícula en función del tiempo t, suponiendo que la partícula está sobre el eje x en el instante $t = 0$.

34 ● SSM Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio 15 cm, dando 1 revolución cada 3 s. (*a*) ¿Cuál es el módulo de la velocidad de la partícula? (*b*) ¿Cuál es su velocidad angular ω? (*c*) Escribir una ecuación para la componente x de la posición de la misma en función de t, suponiendo que está sobre el eje x positivo en el instante $t = 0$.

La energía en el movimiento armónico simple

35 ● Un objeto de 2,4 kg está sujeto a un muelle horizontal de constante de fuerza $k = 4{,}5$ kN/m. El muelle se estira 10 cm desde el equilibrio y se deja en libertad. Determinar su energía total.

36 ● Determinar la energía total de un objeto de 3 kg que oscila sobre un muelle horizontal con una amplitud de 10 cm y una frecuencia de 2,4 Hz.

37 ● Un objeto de 1,5 kg oscila con movimiento armónico simple unido a un muelle de constante de fuerza $k = 500$ N/m. Su velocidad máxima es 70 cm/s. (*a*) ¿Cuál es la energía total? (*b*) ¿Cuál es la amplitud de la oscilación?

38 ● Un objeto de 3 kg que oscila unido a un muelle de constante 2 kN/m tiene una energía total de 0,9 J. (*a*) ¿Cuál es la amplitud del movimiento? (*b*) ¿Cuál es su velocidad máxima?

39 ● Un objeto oscila unido a un muelle con una amplitud de 4,5 cm. Su energía total es 1,4 J. ¿Cuál es la constante de fuerza del muelle?

40 ●● SSM iSOLVE✓ Un objeto de 3 kg oscila sobre un muelle con una amplitud de 8 cm. Su aceleración máxima es 3,50 m/s². Determinar la energía total.

Muelles

41 • Un objeto de 2,4 kg está sujeto a un muelle horizontal de constante de fuerza $k = 4{,}5$ kN/m. El muelle se estira 10 cm desde el equilibrio y se deja en libertad. Determinar (*a*) la frecuencia del movimiento, (*b*) el periodo, (*c*) la amplitud, (*d*) la velocidad máxima y (*e*) la aceleración máxima. (*f*) ¿Cuándo alcanza el objeto por vez primera su posición de equilibrio? ¿Cuál es su aceleración en ese instante?

42 • Responder a las cuestiones del problema 41 para un objeto de 5 kg sujeto a un muelle de constante de fuerza $k = 700$ N/m, teniendo en cuenta que el muelle está inicialmente separado 8 cm de la posición de equilibrio.

43 • Un objeto de 3 kg sujeto a un muelle horizontal oscila con una amplitud $A = 10$ cm y una frecuencia $f = 2{,}4$ Hz. (*a*) ¿Cuál es la constante de fuerza del muelle? (*b*) ¿Cuál es el periodo del movimiento? (*c*) ¿Cuál es la velocidad máxima del objeto? (*d*) ¿Cuál es la aceleración máxima del objeto?

44 • SSM iSOLVE ✓ Una persona de 85 kg sube a un coche de masa 2400 kg, con lo cual sus ballestas descienden 2,35 cm. Suponiendo que no hay amortiguamiento, ¿con qué frecuencia vibrará el coche y el pasajero sobre las ballestas?

45 • Un objeto de 4,5 kg oscila sobre un muelle horizontal con una amplitud de 3,8 cm. Su aceleración máxima es de 26 m/s^2. Determinar (*a*) la constante de fuerza k, (*b*) la frecuencia y (*c*) el periodo del movimiento.

46 • Un objeto oscila con una amplitud de 5,8 cm sobre un muelle horizontal de constante de fuerza 1,8 kN/m. Su velocidad máxima es 2,20 m/s. Determinar (*a*) la masa del objeto, (*b*) la frecuencia del movimiento y (*c*) el periodo del movimiento.

47 •• iSOLVE ✓ Un bloque de 0,4 kg que está sujeto a un muelle de constante de fuerza 12 N/m oscila con una amplitud de 8 cm. Determinar (*a*) la velocidad máxima del bloque, (*b*) la velocidad y aceleración del bloque cuando se encuentra a $x = 4$ cm de la posición de equilibrio y (*c*) el tiempo que tarda el bloque en desplazarse de $x = 0$ a $x = 4$ cm.

48 •• SSM Un objeto de masa m está colgado de un muelle vertical de constante 1800 N/m. Cuando se estira de él hacia abajo separándole 2,5 cm del equilibrio y se le deja en libertad desde el reposo, el objeto oscila con una frecuencia de 5,5 Hz. (*a*) Hallar m. (*b*) Hallar cuánto se estira el muelle a partir de su longitud natural cuando el objeto está en equilibrio. (*c*) Escribir expresiones para el desplazamiento x, la velocidad v y la aceleración a en función de t.

49 •• iSOLVE ✓ Un muelle sin deformación cuelga verticalmente y en su extremo se cuelga un cuerpo de masa desconocida que se suelta desde el reposo. Cae 3,42 cm antes de que quede en reposo por primera vez. Hallar el periodo del movimiento.

50 •• Un muelle de constante $k = 250$ N/m se cuelga de un soporte rígido y se une a su extremo inferior un objeto de 1 kg de masa, que se deja en libertad partiendo del reposo cuando el muelle está sin deformar. (*a*) ¿A qué distancia por debajo del punto de partida está la posición de equilibrio del objeto? (*b*) ¿Cuánto desciende el objeto antes de empezar a ascender de nuevo? (*c*) ¿Cuál es el periodo de la oscilación? (*d*) ¿Cuál es la velocidad del objeto cuando alcanza por primera vez su posición de equilibrio? (*e*) ¿Cuándo sucede esto?

51 •• iSOLVE El Arco de St. Luis tiene una altura de 192 m. Supongamos que una atleta de 60 kg salta de la parte más alta del arco con una banda elástica atada a sus pies y alcanza justo el suelo con velocidad cero. Determinar su energía cinética E_c a los 2,00 segundos del salto. (Suponer que la banda elástica obedece la ley de Hooke y despreciar su longitud natural.)

52 •• SSM Una maleta de 20 kg de masa cuelga de dos cuerdas tal como se muestra en la figura 14.26. Cada cuerda se alarga 5 cm cuando la maleta está en equilibrio. Si se estira la maleta un poco hacia abajo y se suelta, ¿cuál será la frecuencia de la oscilación?

Figura 14.26 Problema 52

53 •• Un bloque de 0,12 kg está suspendido de un muelle. Cuando una pequeña piedra de masa 30 g se sitúa sobre el bloque, el muelle se alarga 5 cm más. Con la piedra sobre el bloque, el muelle oscila con una amplitud de 12 cm. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia del movimiento? (*b*) ¿Cuánto tiempo tardará el bloque en recorrer la distancia entre el punto más bajo y el punto más alto? (*c*) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la piedra cuando se encuentra en un punto de máximo desplazamiento hacia arriba?

54 •• Determinar en el problema 53 la máxima amplitud de oscilación con la condición de que la piedra permanezca sobre el bloque.

55 •• Un objeto de masa 2,0 kg está sujeto en la parte superior de un muelle vertical que está anclado en el suelo. La longitud natural del muelle es de 8,0 cm y la longitud del muelle cuando el objeto está en equilibrio es de 5,0 cm. Cuando el objeto está en reposo en su posición de equilibrio, se le da un impulso hacia abajo con un martillo, de tal manera que la velocidad inicial es de 0,3 m/s. (*a*) ¿A que máxima altura, respecto al nivel del suelo, se elevará el objeto? (*b*) ¿Cuánto tiempo tardará el objeto en alcanzar la máxima altura la primera vez? (*c*) ¿Volverá el muelle a estar sin compresión? ¿Qué velocidad inicial mínima debe darse al objeto para que el muelle no tenga compresión en un instante dado?

56 •• SSM En un torno, un bloque de 950 kg de masa cuelga del extremo de un cable de 150 GN/m^2 de módulo de Young, 1,5 cm^2 de área transversal y 2,5 m de longitud. (*a*) ¿Cuánto se alargará el cable? (*b*) Suponiendo que el cable se comporta como un muelle simple, ¿cuál es la frecuencia de oscilación del bloque en el extremo del cable?

Energía de un objeto sobre un muelle vertical

57 •• Un cuerpo de 2,5 kg cuelga de un muelle vertical de constante 600 N/m. Oscila con una amplitud de 3 cm. Cuando el cuerpo posee su máximo desplazamiento hacia abajo, encontrar (*a*) la energía total del sistema, (*b*) la energía potencial gravitatoria, y (*c*) la energía potencial del muelle. (*d*) ¿Cuál es la energía cinética máxima del cuerpo? (Escoger $U = 0$ cuando el cuerpo está en equilibrio.)

58 •• iSOLVE Un cuerpo de 1,5 kg, que alarga un muelle en 2,8 cm respecto a su longitud natural cuando cuelga de él en reposo, oscila con una amplitud de 2,2 cm. Hallar (*a*) la energía total del sistema, (*b*) la energía potencial gravitatoria en el máximo desplazamiento hacia abajo, (*c*) la energía potencial del muelle en su máximo desplazamiento hacia abajo y (*d*) ¿Cuál es la energía cinética máxima del cuerpo?

59 •• SSM Un objeto de 1,2 kg que cuelga de un muelle de constante de fuerza 300 N/m oscila con una velocidad máxima de 30 cm/s. (*a*) ¿Cuál es su desplazamiento máximo? Cuando el objeto está en su desplazamiento máximo, hallar (*b*) la energía total del sistema, (*c*) la energía potencial gravitatoria, y (*d*) la energía potencial del muelle.

Péndulos simples

60 • Hallar la longitud de un péndulo simple si el periodo del péndulo es 5 s en un punto en donde $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

61 • ¿Cuál sería el periodo del péndulo del problema 60 en la Luna, en donde la aceleración de la gravedad es un sexto de la correspondiente a la Tierra?

62 • Si el periodo de un péndulo de 70 cm de longitud es 1,68 s, ¿cuál es el valor de g en el sitio donde está situado el péndulo?

63 • SSM Un péndulo colgado en el hueco de una escalera de un edificio de 10 pisos se compone de una masa grande suspendida de un alambre de 34,0 m de longitud. ¿Cuál es su periodo de oscilación si $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$?

64 •• Demostrar que la energía total de un péndulo simple que se mueve con oscilaciones de pequeña amplitud ϕ_0 es aproximadamente $E \approx 1/2mgL\phi_0^2$ (*Sugerencia: Utilizar la aproximación* $\cos\phi \approx 1 - \phi^2/2$ *para valores pequeños de* ϕ.)

65 •• Un péndulo simple de longitud L está sujeto a un carro que desliza sin rozamiento hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal, como muestra la figura 14.27. Determinar el periodo de oscilación del péndulo que está sobre el carro deslizante.

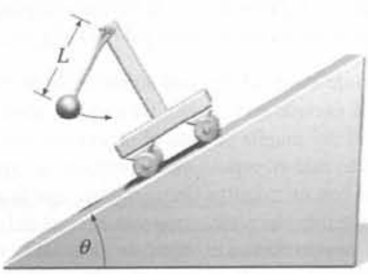


Figura 14.27 Problema 65

66 •• Un péndulo simple de longitud L se libera partiendo del reposo desde un ángulo ϕ_0. (*a*) Suponiendo que el péndulo realiza un movimiento armónico simple, determinar su velocidad cuando pasa por la posición $\phi = 0$. (*b*) Considerando la conservación de la energía, determinar exactamente esta velocidad. (*c*) Demostrar que los resultados de (*a*) y (*b*) coinciden cuando ϕ_0 es pequeño. (*d*) Determinar la diferencia entre estos resultados para $\phi_0 = 0{,}20$ rad y $L = 1$ m.

*Péndulos físicos

67 • Un disco delgado de 5 kg de masa y con un radio de 20 cm se suspende mediante un eje horizontal perpendicular al disco y que pasa por su borde. El disco se desplaza ligeramente del equilibrio y se suelta. Hallar el periodo del movimiento armónico simple que se produce.

68 • Un aro circular de 50 cm de radio se cuelga de una varilla horizontal delgada, permitiéndose que oscile en el plano del aro. ¿Cuál es el periodo de su oscilación, suponiendo que la amplitud es pequeña?

69 • Se suspende una figura plana de 3 kg de un punto situado a 10 cm de su centro de masas. Cuando está oscilando con amplitud pequeña, el periodo de oscilación es 2,6 s. Hallar el momento de inercia I respecto a un eje perpendicular al plano de la figura que pasa por el punto de oscilación.

70 •• El péndulo de un enorme reloj de un ayuntamiento tiene una longitud de 4 m. (*a*) Considerando que su funcionamiento puede asimilarse al de un péndulo simple que realiza pequeñas oscilaciones, calcular su periodo de oscilación. (*b*) Para regular su periodo se ha colocado una caja en la mitad de la barra del péndulo con unas cuantas piezas de tamaño y peso parecido al de una moneda, de modo que para cambiar el periodo del péndulo basta añadir o quitar una pieza de la caja. Explicar por qué este método funciona. Si se añaden piezas, ¿el periodo del péndulo aumenta o disminuye?

71 •• La figura 14.28 muestra una pesa con dos masas iguales (consideradas como masas puntuales) sujetas a los extremos de una barra muy delegada (masa despreciable) de longitud L. (*a*) Demostrar que el periodo de este péndulo es un mínimo cuando el punto de pivotamiento P se encuentra sobre una de las masas. (*b*) Determinar el periodo de este péndulo físico si la distancia entre P y la masa superior es $L/4$.

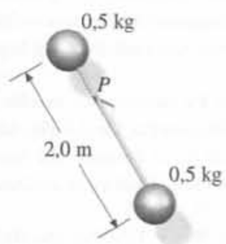


Figura 14.28 Problema 71

72 •• Supongamos que la barra del problema 71 tiene una masa de $2m$ (figura 14.29). Determinar la distancia entre la masa superior y el punto de pivotamiento P, de tal modo que el periodo de este péndulo físico sea un mínimo.

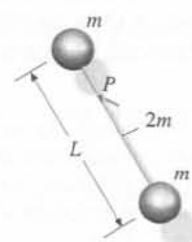


Figura 14.29 Problema 72

73 •• SSM Tenemos una regla y se nos pide que taladremos un agujero de tal modo que cuando pivotemos la regla sobre él, el periodo del péndulo sea un mínimo. ¿Dónde taladraremos el agujero?

74 •• La figura 14.30 muestra un disco uniforme de radio $R = 0{,}8$ m y masa 6 kg con un pequeño agujero a la distancia d del centro del disco que puede servir de punto de pivote. (*a*) ¿Cuál debe ser la distancia d para que el periodo de este péndulo físico sea 2,5 s? (*b*) ¿Cuál debe ser la distancia d para que este péndulo físico tenga el periodo menor posible? ¿Cuál es este periodo?

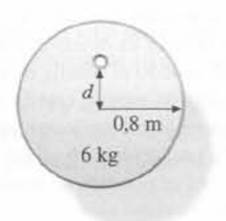


Figura 14.30 Problema 74

75 ••• Un objeto plano tiene un momento de inercia I respecto a su centro de masas. Cuando se hace girar el objeto alrededor del punto P_1, como se indica en la figura 14.31, oscila alrededor del pivote con un periodo T. Existe otro punto P_2 en el lado opuesto del centro de masas respecto al cual el objeto oscila con el mismo periodo T. Demostrar que $h_1 + h_2 = gT^2/(4\pi^2)$.

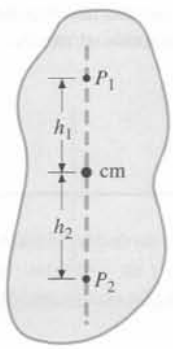


Figura 14.31 Problema 75

76 ••• Se construye un péndulo físico a partir de una lenteja esférica de radio r y masa m colgada de una cuerda (figura 14.32). La distancia desde el centro de la esfera al punto de suspensión es L. Cuando r es mucho menor que L, este péndulo suele considerarse como un péndulo simple de longitud L. (*a*) Demostrar que para pequeñas oscilaciones el periodo viene dado por

$$T = T_0\sqrt{1+\frac{2r^2}{5L^2}}$$

en donde $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ es el periodo del péndulo simple de longitud L. (*b*) Demostrar que cuando r es mucho menor que L, el periodo vale aproximadamente $T \approx T_0(1 + r^2/5L^2)$. (*c*) Si L = 1 m y r = 2 cm, hallar el error cuando se utiliza la aproximación $T = T_0$ para este péndulo. ¿Qué tamaño deberá tener el radio de la lenteja para que el error sea del 1 por ciento?

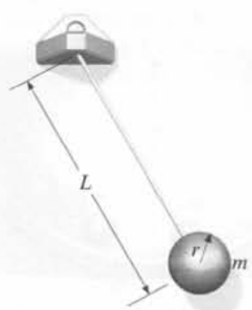


Figura 14.32 Problema 76

77 ••• La figura 14.33 muestra el péndulo de un reloj. La barra uniforme de longitud L = 2,0 m tiene una masa m = 0,8 kg. Sujeto a la barra hay un disco de masa M = 1,2 kg y radio 0,15 m. El reloj se ha construido de modo que marque un tiempo perfecto si el periodo del péndulo es exactamente 3,50 s. (*a*) ¿Cuál debe ser la distancia d para que el periodo del péndulo sea 2,5 s? (*b*) Supongamos que el reloj de péndulo atrasase a 5,0 min por día. ¿A qué distancia y en qué sentido debe desplazarse el disco para asegurar que el reloj marque correctamente el tiempo?

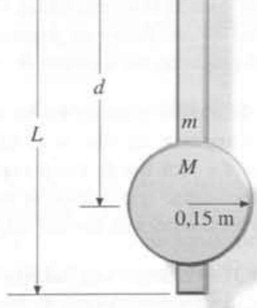


Figura 14.33 Problema 77

78 •• SSM Un reloj de péndulo pierde 48 s por día cuando la amplitud del péndulo es 8,4°. ¿Cuál debería ser la amplitud del péndulo para que el reloj marcase el tiempo exacto?

79 •• Un reloj de péndulo que oscila con una amplitud muy pequeña se adelanta 5 min cada día. ¿Qué amplitud angular deberá tener el péndulo para mantener el tiempo correcto?

Oscilaciones amortiguadas

80 • Demostrar que la constante de amortiguamiento, b, tiene unidades de kg/s.

81 • Un oscilador tiene un factor Q igual a 200. ¿En qué porcentaje disminuye su energía durante un periodo?

82 • Un objeto de 2 kg ligado a un muelle de constante k = 400 N/m oscila con una amplitud inicial de 3 cm. Hallar (*a*) el periodo y (*b*) la energía inicial total. (*c*) Si la energía disminuye en un 1 por ciento por periodo, hallar la constante de amortiguamiento b y el factor Q.

83 •• Demostrar que el cociente de las amplitudes de dos oscilaciones sucesivas en un oscilador forzado es constante.

84 •• Un oscilador tiene un periodo de 3 s. Su amplitud disminuye en un 5 por ciento durante cada ciclo. (*a*) ¿En cuánto disminuye su energía durante cada ciclo? (*b*) ¿Cuál es la constante de tiempo τ? (*c*) ¿Cuál es el factor Q?

85 •• Un oscilador posee un factor Q igual a 20. (*a*) ¿En qué fracción disminuye la energía en cada ciclo? (*b*) Utilizar la ecuación 14.37 para determinar la diferencia en porcentaje entre ω' y ω_0. (*Sugerencia: Utilizar la aproximación* $(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ *para valores pequeños de x.*)

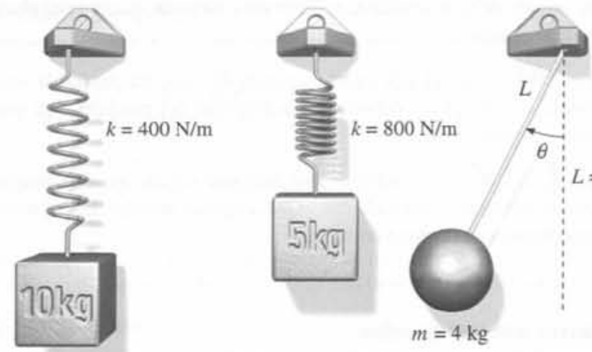
86 •• Un sistema masa-muelle amortiguado oscila con una frecuencia de 200 Hz. La constante de tiempo del sistema es 2,0 s. En el tiempo t = 0, la amplitud de oscilación es 6,0 cm y la energía del sistema oscilante es 60 J. (*a*) ¿Cuáles son las amplitudes de oscilación para t = 2,0 s y t = 4,0 s? (*b*) ¿Cuánta energía se disipa en el primer intervalo de 2 s y en el segundo intervalo de 2 s?

87 •• SSM Se ha establecido que cuando la Tierra vibra tiene un periodo de resonancia de 54 min y un factor Q de aproximadamente 400, y que después de un gran terremoto, la Tierra "tiembla" (se produce una vibración continua) durante dos meses. (*a*) Determinar el porcentaje de energía de vibración perdida debido a las fuerzas de amortiguamiento en cada ciclo. (*b*) Demostrar que después de n periodos, la energía es $E_n = (0{,}984)^n E_0$, siendo E_0 la energía inicial. (*c*) Si la energía inicial de vibración de un terremoto es E_0, ¿cuál es la energía al cabo de 2 días?

88 •• Un péndulo compacto que se usa en un experimento de física tiene una masa de 15 g y una longitud de 75 cm. Para que el péndulo comience a oscilar un estudiante de física instala un ventilador, que produce un flujo horizontal de aire de velocidad 7 m/s hacia la lenteja. Con el ventilador en marcha, la lenteja está en equilibrio cuando el péndulo está inclinado 5° respecto la dirección vertical. Cuando se para el ventilador, se deja que el péndulo oscile. (*a*) Si suponemos que la fuerza de resistencia a causa del aire viene dada por $-bv$, ¿cuál es la constante de tiempo o tiempo de extinción τ de las oscilaciones del péndulo? (*b*) ¿Cuánto tiempo pasará hasta que la amplitud de la oscilación sea de 1°?

Oscilaciones forzadas y resonancia

89 • Determinar la frecuencia de resonancia de cada uno de los tres sistemas indicados en la figura 14.34.



(*a*) (*b*) (*c*)

Figura 14.34 Problema 89

90 • Un oscilador amortiguado pierde el 2 por ciento de su energía en cada ciclo. (*a*) ¿Cuál es su factor Q? (*b*) Si su frecuencia de resonancia es 300 Hz, ¿cuál es la anchura de la curva de resonancia $\Delta\omega$ cuando el oscilador está forzado?

91 •• Un objeto de 2 kg oscila sobre un muelle de constante de fuerza $k = 400$ N/m. La constante de amortiguamiento es $b = 2{,}00$ kg/s. Está forzado por una fuerza sinusoidal de valor máximo 10 N y frecuencia angular $\omega = 10$ rad/s. (*a*) ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones? (*b*) Si se varía la frecuencia de la fuerza impulsora, ¿a qué frecuencia se producirá la resonancia? (*c*) Hallar la amplitud de las vibraciones en la resonancia. (*d*) ¿Cuál es la anchura $\Delta\omega$ de la curva de resonancia?

92 •• Un oscilador amortiguado pierde el 3,5 por ciento de su energía durante cada ciclo. (*a*) ¿Cuántos ciclos han de transcurrir antes de que se disipe la mitad de su energía? (*b*) ¿Cuál es el factor Q? (*c*) Si la frecuencia natural es 100 Hz, ¿cuál es la anchura de la curva de resonancia cuando el oscilador se ve forzado exteriormente?

Colisiones

93 ••• La figura 14.35 muestra un sistema vibrante masa-muelle colocado en una superficie sin rozamiento y una segunda masa igual que se mueve hacia la masa vibrante con velocidad v. El movimiento de la masa vibrante viene dado por $x(t) = (0{,}1\text{ m}) \cos (40\text{ s}^{-1}t)$, en donde x es el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio. Las dos masas chocan elásticamente justo cuando la masa vibrante pasa por su posición de equilibrio y se mueve hacia la derecha. (*a*) ¿Cuál debe ser la velocidad v de la segunda masa para que el sistema masa-muelle quede en reposo después de la colisión elástica? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la segunda masa después de la colisión elástica?

Figura 14.35 Problema 93

94 ••• Después de la colisión elástica del problema 93, la energía cinética de la masa en retroceso es 8,0 J. Determinar el valor de las masas m y la constante del muelle k.

95 ••• Un objeto de 2 kg de masa apoyado sobre una superficie horizontal sin rozamiento se une a un muelle de constante 600 N/m. Otro objeto de 1 kg de masa desliza sobre la superficie acercándose al primero a 6 m/s. (*a*) Hallar la amplitud de oscilación si el segundo objeto choca de forma perfectamente inelástica quedando unido también al muelle. ¿Cuál es el periodo de oscilación? (*b*) Hallar la amplitud y el periodo de oscilación si el choque es elástico. (*c*) Para cada tipo de colisión, escribir una expresión para la posición x en función del tiempo t para el objeto unido al muelle, suponiendo que el choque se produce en el instante $t = 0$.

Problemas generales

96 • Una partícula posee un desplazamiento dado por $x = 0{,}4 \cos (3t + \pi/4)$, en donde x viene en metros y t en segundos. (*a*) Hallar la frecuencia f y el periodo T del movimiento. (*b*) ¿En donde está la partícula en $t = 0$? (*c*) ¿Y en $t = 0{,}5$ s?

97 • (*a*) Hallar una expresión para la velocidad de la partícula cuya posición viene dada en el problema 96. (*b*) ¿Cuál es la velocidad en el instante $t = 0$? (*c*) ¿Cuál es la velocidad máxima? (*d*) ¿En qué momento después de $t = 0$ se da esta velocidad máxima por primera vez?

98 • Un cuerpo unido a un muelle horizontal oscila con un periodo de 4,5 s. Si el cuerpo se suspende verticalmente del muelle, ¿en cuánto se alarga el muelle respecto a su longitud natural cuando el cuerpo está en equilibrio?

99 •• SSM Una partícula pequeña de masa m se desliza sin rozamiento en un cuenco esférico de radio r. (*a*) Demostrar que el movimiento de la masa es el mismo que si estuviese sujeta a un muelle de longitud r. (*b*) Se desplaza una partícula de masa m_1 una pequeña distancia s_1 de la parte inferior del cuenco (figura 14.36), siendo s_1 mucho menor que r. Otra segunda masa m_2 se desplaza en sentido opuesto a una distancia $s_2 = 3s_1$ (s_2 es también mucho menor que r). Si las masas se dejan libres en el mismo instante, ¿en dónde se encontrarán? Explicarlo.

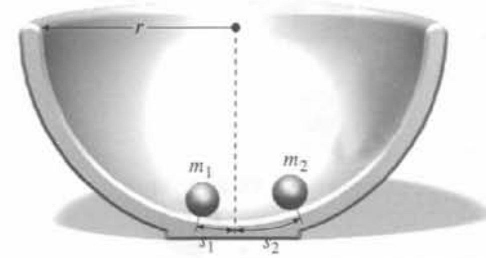


Figura 14.36 Problemas 99, 100

100 •• Supongamos ahora que una pequeña bola de masa m y radio R rueda sin deslizar por el fondo del cuenco de la figura 14.36. (*a*) Escribir una expresión para la energía total de la bola en función de su velocidad y de la distancia (supuesta pequeña) al centro del cuenco. (*b*) Comparando esta expresión con la de la energía total de una bola de masa m que resbala sin rozamiento por la superficie del cuenco, determinar la frecuencia de oscilación de la bola respecto al centro del cuenco.

101 •• ISOLVE✓ Cuando un avión disminuye su velocidad a fin de aterrizar, un viajero mide su aceleración suspendiendo un yo-yo como un péndulo simple y observando que cuando la lenteja (masa 40 g) está en reposo respecto a él, la cuerda (longitud 70 cm) forma un ángulo de 22° con la vertical. Determinar el periodo T para pequeñas oscilaciones de este péndulo.

102 •• Una balanza de torsión consiste en un objeto de momento de inercia I que se cuelga del extremo de un hilo. Si se retuerce el hilo, éste produce un momento restaurador $\tau = -\kappa\theta$, donde κ es la constante de torsión y θ es el ángulo de deformación. Demostrar que cuando se tuerce el hilo un ángulo pequeño la frecuencia de las oscilaciones de torsión vale $\omega = \sqrt{\kappa/I}$.

103 •• En la figura 14.37 se muestra una balanza de torsión sencilla que se utiliza en una rica variedad de experimentos de física (véase el problema 102). Supongamos que tenemos una barra de 5,0 cm de longitud y de masa despreciable que tiene dos partículas idénticas de 50 g de masa en sus extremos y que está atada al extremo del hilo de la balanza. Si el periodo de oscilación es de 80 s, ¿cuál es la constante de torsión de la balanza?

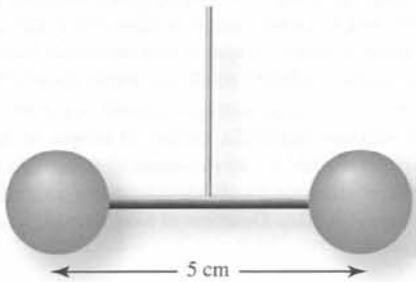


Figura 14.37 Problema 103

104 ●● SSM iSOLVE Un cubo de madera de arista a y masa m flota en agua con una de sus caras paralela a la superficie del agua. La densidad del agua es ρ. Determinar el periodo de oscilación en la dirección vertical cuando se empuja el cubo ligeramente hacia abajo.

105 ●● Un reloj de péndulo funciona correctamente en la superficie de la Tierra. ¿En qué situación el error será mayor: si el reloj se baja a una mina de profundidad h o si se eleva a una altura h? Suponer que $h << R_T$.

106 ●● iSOLVE La figura 14.38 muestra un péndulo de longitud L con una lenteja de masa M. La lenteja está unida a un muelle de constante k como se indica. Cuando la lenteja está directamente por debajo del soporte del péndulo, el muelle tiene su longitud natural de equilibrio. (a) Deducir una expresión para el periodo de este sistema oscilante para vibraciones de pequeña amplitud. (b) Suponer que $M = 1$ kg y L es tal que en ausencia del muelle el periodo es 2,0 s. ¿Cuál es la constante del muelle k si el periodo del sistema oscilante es 1,0 s?

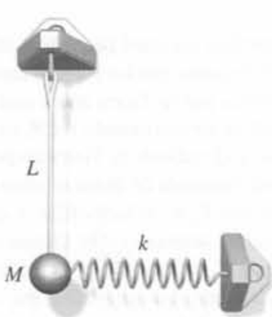


Figura 14.38 Problema 106

107 ●● Una masa m_1 que se desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento está sujeta a un muelle de constante de fuerza k y oscila con amplitud A. Cuando el muelle está con su mayor deformación y la masa está instantáneamente en reposo, se coloca en la parte superior de m_1 otra masa m_2. (a) ¿Cuál es el menor valor del coeficiente de rozamiento estático μ_e que permite que m_2 no deslice sobre m_1? (b) Explicar cómo se modifican la energía total E, la amplitud A, la frecuencia angular ω y el periodo T al situar m_2 sobre m_1 suponiendo que el rozamiento es suficientemente grande para que no haya deslizamiento.

108 ●● Una caja de 100 kg de masa cuelga del techo de una habitación sujeta a un muelle de constante 500 N/m. El muelle tiene una longitud natural de 0,5 m. (a) Determinar la posición de equilibrio de la caja. (b) Un muelle idéntico se cuelga del techo y de la misma caja, al lado del anterior. Determinar qué frecuencia tendrán las oscilaciones cuando se libere la caja. (c) ¿Cuál será la nueva posición de equilibrio de la caja, cuando acabe parándose?

109 ●● La aceleración debida a la gravedad g varía con la situación geográfica debido a la rotación de la Tierra y a que la Tierra no es exactamente esférica. Este hecho fue descubierto por primera vez durante el siglo XVII, cuando se observó que un reloj de péndulo cuidadosamente ajustado para marcar el tiempo correcto en París, se atrasaba alrededor de 90 s/día cerca del ecuador. (a) Demostrar que una pequeña variación en la aceleración de la gravedad Δg produce un pequeño cambio ΔT en el periodo de un péndulo dado por $\Delta T/T \approx \frac{1}{2}\,\Delta g/g$. (Utilizar el cálculo diferencial para aproximar los valores de ΔT y Δg.) (b) ¿Qué variación de g se necesita para justificar un cambio de periodo de 90 s/día?

110 ●● La figura 14.39 muestra dos masas iguales de 0,6 kg unidas con pegamento entre sí y conectadas a un muelle de constante $k = 240$ N/m. Las masas, que descansan sobre una superficie horizontal sin rozamiento, se desplazan 0,6 m de su posición de equilibrio y se dejan en libertad. Antes de liberarse se depositan unas gotas de disolvente sobre el pegamento que las une. (a) Determinar la frecuencia de vibración y la energía total del sistema vibrante antes de que el pegamento se haya disuelto. (b) Determinar la frecuencia de vibración, amplitud y energía del sistema vibrante si el pegamento se disuelve (1) en la compresión máxima y (2) en la extensión máxima.

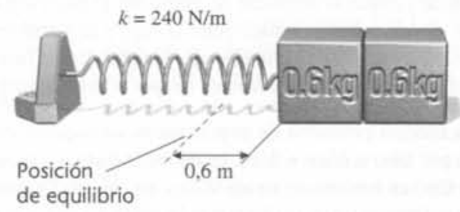


Figura 14.39 Problema 110

111 ●● Demostrar que en los dos casos de la figura 14.40a y b, el objeto oscila con una frecuencia $f = [1/(2\pi)]\sqrt{k_{ef}/m}$, en donde k_{ef} viene dado por (a) $k_{ef} = k_1 + k_2$ y (b) $1/k_{ef} = 1/k_1 + 1/k_2$. (*Indicación: Hallar la fuerza neta F sobre el objeto para un pequeño desplazamiento x y escribir $F = -k_{ef}\,x$. Obsérvese que en* (b) *los muelles se deforman en cantidades diferentes cuya suma es x.*)

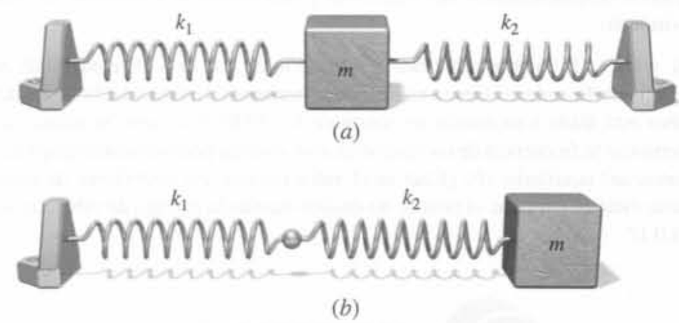


Figura 14.40 Problema 111

112 ●● SSM Un bloque pequeño de masa m_1 descansa sobre un pistón que está vibrando verticalmente con movimiento armónico simple dado por $y = A$ sen ωt. (a) Demostrar que el bloque se separará del pistón si $\omega^2 A > g$. (b) Si $\omega^2 A = 3g$ y $A = 15$ cm, ¿en qué instante el bloque se separará del pistón?

113 ●● iSOLVE El émbolo de una máquina de lanzamiento de bolas tiene una masa m_e y está conectado a un muelle de constante de fuerza k (figura 14.41). El muelle se comprime una distancia x_0 a partir de su posición de equilibrio, $x = 0$, y se deja en libertad. Una bola de masa m_b está junto al émbolo. (a) ¿En qué punto la bola se separa del émbolo? (b) ¿Cuál es la velocidad v_b de la bola cuando ésta se separa? (c) ¿A qué distancia x_f el émbolo se detiene momentáneamente? (Suponer que la superficie es horizontal y sin rozamiento de modo que la bola se desliza sin rodar.)

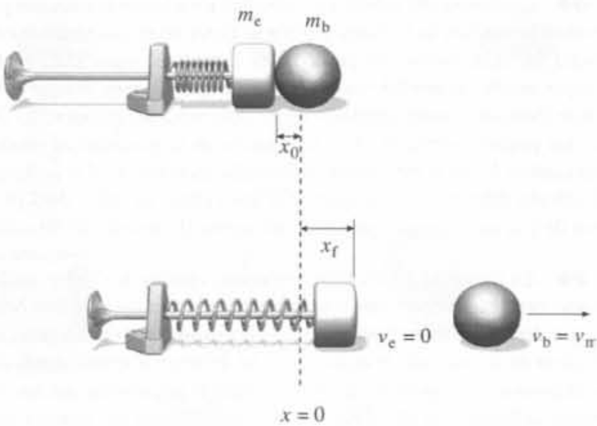


Figura 14.41 Problema 113

114 ●● Una plataforma nivelada vibra horizontalmente con movimiento armónico simple con un periodo de 0,8 s. (*a*) Una caja sobre la plataforma comienza a deslizar cuando la amplitud de vibración alcanza los 40 cm; ¿cuál es el coeficiente de rozamiento estático entre la caja y la plataforma? (*b*) Si el coeficiente de rozamiento estático entre la caja y la plataforma fuera 0,40, ¿cuál sería la amplitud máxima de vibración antes de que la caja deslizase?

115 ●●● La energía potencial de una masa m en función de la posición viene expresada por $U(x) = U_0(\alpha + 1/\alpha)$, en donde $\alpha = x/a$ y a es una constante. (*a*) Representar $U(x)$ en función de x para $0{,}1a < x < 3a$. (*b*) Determinar el valor de $x = x_0$ en el equilibrio estable. (*c*) Expresar la energía potencial $U(x)$ para $x = x_0 + \varepsilon$, siendo ε un pequeño desplazamiento de la posición de equilibrio x_0. (*d*) Aproximar el término $1/x$ utilizando el desarrollo binómico

$$(1+r)^n = 1 + nr + \frac{n(n-1)}{(2)(1)}r^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{(3)(2)(1)}r^3 + \ldots$$

con $r = \varepsilon/x_0 << 1$ y despreciar los términos de potencia superior a r^2. (*e*) Comparar el resultado obtenido con el potencial de un oscilador armónico simple. Demostrar que la masa experimentará un movimiento armónico simple para pequeños desplazamientos del equilibrio y determinar la frecuencia de este movimiento.

116 ●●● Un tambor cilíndrico sólido de masa 6,0 kg y diámetro 0,06 m rueda sin deslizamiento sobre una superficie horizontal (figura 14.42). El eje del tambor está atado a un muelle de constante $k = 4000$ N/m como se indica. (*a*) Determinar la frecuencia de oscilación de este sistema para pequeños desplazamientos del equilibrio. (*b*) ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático para que el tambor no deslice cuando la energía de vibración es de 5,0 J?

Figura 14.42 Problema 116

117 ●●● SSM Si atamos dos cuerpos de masas m_1 y m_2 a los dos extremos de un muelle de constante k y los hacemos oscilar, demostrar que la frecuencia de oscilación es $\omega = (k/\mu)^{1/2}$, donde $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida del sistema.

118 ●● Uno de los modos vibracionales de la molécula de HCl tiene una frecuencia de $8{,}969 \times 10^{13}$ s^{-1}. Usando la relación deducida en el problema 117, determinar la constante k de la molécula de HCl.

119 ●● En el problema 118, si se reemplaza el átomo de hidrógeno de la molécula de HCl por un átomo de deuterio, ¿cuál será la nueva frecuencia de vibración de la molécula? (El átomo de deuterio está formado por un protón y un neutrón.)

120 ●●● Un bloque de masa m situado sobre una mesa horizontal está unido a un muelle de constante k como se muestra en la figura 14.43. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la masa es μ_c. Se estira el muelle una longitud A y luego se le deja libre. (*a*) Aplicar la segunda ley de Newton al bloque para obtener una ecuación para su aceleración d^2x/dt^2 durante el primer medio ciclo, durante el cual el bloque se está moviendo hacia la izquierda. Demostrar que la ecuación resultante puede escribirse como $d^2x'/dt^2 = -\omega^2x'$, en donde $\omega = \sqrt{k/m}$ y $x' = x - x_0$ con $x_0 = \mu_c mg/k = \mu_c g/\omega^2$. (*b*) Repetir el apartado (*a*) para el segundo semiciclo, cuando el bloque se mueve hacia la derecha y demostrar que $d^2x''/dt^2 = -\omega^2x''$, siendo $x'' = x + x_0$ y teniendo x_0 el mismo valor. (*c*) Utilizar una hoja de cálculo para hacer un gráfico de los primeros 5 semiciclos para $A = 10x_0$. Describir el movimiento, si lo hay, después del quinto semiciclo.

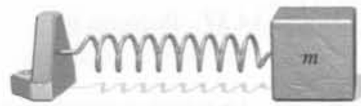


Figura 14.43 Problema 120

121 ●●● La figura 14.44 muestra un semicilindro de masa M y radio R que descansa sobre una superficie horizontal. Si un lado del semicilindro se empuja ligeramente y luego se libera, el objeto oscilará alrededor de su posición de equilibrio. Determinar el periodo de esta oscilación.

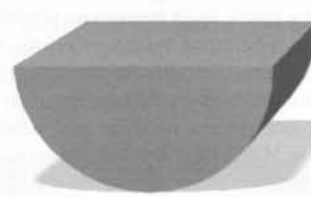


Figura 14.44 Problema 121

122 ●●● SSM Se perfora un túnel pequeño a través de la Tierra como se indica en la figura 14.45. Suponer que las paredes carecen de rozamiento. (*a*) La fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre una partícula de masa m a una distancia r del centro de la misma cuando $r < R_T$ es $F_r = -(GmM_T/R_T^3)r$, en donde M_T y R_T son la masa y el radio de la Tierra respectivamente. Demostrar que la fuerza neta sobre una partícula de masa m situada a una distancia x del centro del túnel viene dada por $F_x = -(GmM_T/R_T^3)x$, y que el movimiento de la partícula es, por consiguiente, armónico. (*b*) Demostrar que el periodo del movimiento viene dado por $T = 2\pi\sqrt{R_T/g}$ y hallar su valor en minutos. (Resulta ser el mismo periodo que el de un satélite que orbite la Tierra cerca de su superficie y es independiente de la longitud del túnel.)

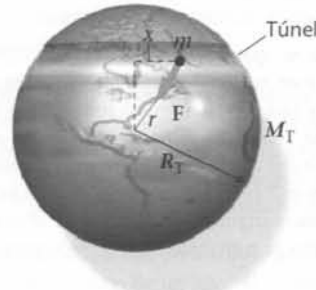


Figura 14.45 Problema 122

123 ●●● Un oscilador amortiguado tiene una frecuencia ω' que es un 10 por ciento menor que su frecuencia sin amortiguamiento. (*a*) ¿En qué factor disminuye su amplitud en cada oscilación? (*b*) ¿En qué factor se reduce su energía durante cada oscilación?

124 ●●● Demostrar mediante sustitución directa que la ecuación 14.52 es una solución de la ecuación 14.51.

125 ●●● SSM En este problema hay que obtener la expresión correspondiente a la potencia media cedida por una fuerza impulsora a un oscilador forzado (figura 14.24).

(*a*) Demostrar que la potencia instantánea cedida por la fuerza impulsora es

$$P = Fv = -A\omega F_0 \cos \omega t \,\mathrm{sen}\, (\omega t - \delta)$$

(*b*) Utilizar la identidad trigonométrica $\mathrm{sen}\,(\theta_1 - \theta_2) = \mathrm{sen}\,\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \,\mathrm{sen}\,\theta_2$ para demostrar que esta última expresión puede escribirse

$$P = A\omega F_0 \,\mathrm{sen}\,\delta \cos^2 \omega t - A\omega F_0 \cos\delta \cos\omega t \,\mathrm{sen}\,\omega t$$

(*c*) Demostrar que el valor medio del segundo término del resultado del apartado (*b*) calculado en uno o más periodos es cero y que, por lo tanto,

$$P_\mathrm{m} = \tfrac{1}{2} A\omega F_0 \,\mathrm{sen}\,\delta$$

(*d*) A partir de la ecuación 14.54 para tg δ, construir un triángulo rectángulo en el que el cateto opuesto al ángulo δ sea $b\omega$ y el adyacente sea $m(\omega_0^2 - \omega^2)$ y utilizar este triángulo para demostrar que

$$\mathrm{sen}\,\delta = \frac{b\omega}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} = \frac{b\omega A}{F_0}$$

(*e*) Utilizar este resultado de (*d*) para eliminar ωA de forma que la potencia media cedida pueda escribirse

$$P_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\frac{F_0^2}{b}\,\mathrm{sen}^2\,\delta = \frac{1}{2}\left[\frac{b\omega^2 F_0^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}\right] \qquad (14.55)$$

126 ●●● En este problema debe de utilizarse el resultado del problema 125 para deducir la ecuación 14.49, que relaciona la anchura de la curva de resonancia con el valor de Q cuando la resonancia es aguda. En la resonancia el denominador de la fracción entre corchetes de la ecuación 14.55 es $b^2\omega_0^2$ y P_m tiene un valor máximo. (La ecuación 14.55 se encontrará en el problema 125.) En el caso de una resonancia aguda, la variación de ω del numerador de la ecuación 14.55 puede despreciarse. Entonces la potencia cedida será la mitad de su valor máximo en los valores de ω para los cuales el denominador sea $2b^2\omega_0^2$.

(*a*) Demostrar entonces que ω satisface $m^2(\omega - \omega_0)^2(\omega - \omega_0)^2 \approx b^2\omega_0^2$.

(*b*) Utilizando la aproximación $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$, demostrar que $\omega - \omega_0 \approx \pm b/2m$.

(*c*) Expresar b en función de Q.

(*d*) Combinar los resultados de (*b*) y (*c*) para demostrar que existen dos valores de ω para los que la potencia cedida es la mitad de la correspondiente en la resonancia y que vienen dados por

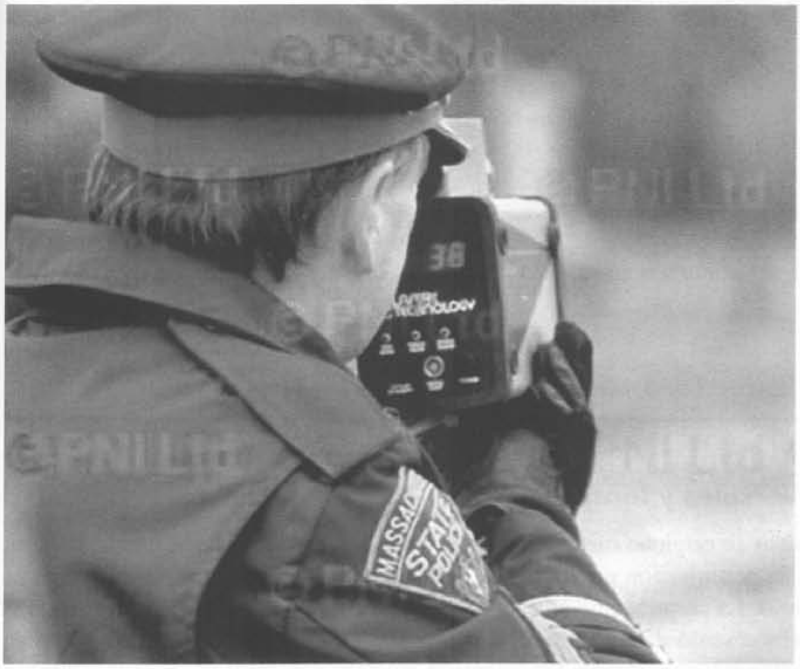
$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q} \qquad \text{y} \qquad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q}$$

Por consiguiente, $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \omega_0/Q$, que es equivalente a la ecuación 14.49.

127 ●●● El potencial de Morse, que frecuentemente se usa para representar las fuerzas interatómicas, puede escribirse de la forma $U(r) = D(1 - e^{-\beta(r - r_0)})^2$, donde r es la distancia entre los dos núcleos atómicos. (*a*) Usando una hoja de cálculo o una calculadora gráfica, representar gráficamente el potencial de Morse usando $D = 5$ eV, $\beta = 0{,}2\ \mathrm{nm}^{-1}$ y $r_0 = 0{,}75$ nm. (*b*) Determinar a partir del potencial de Morse la separación de equilibrio y la constante k para pequeños desplazamientos del equilibrio. (*c*) Determinar una fórmula para la frecuencia de oscilación de una molécula diatómica homonuclear (es decir, con los dos átomos iguales) si los átomos tienen una masa m.

MOVIMIENTO ONDULATORIO

Capítulo 15



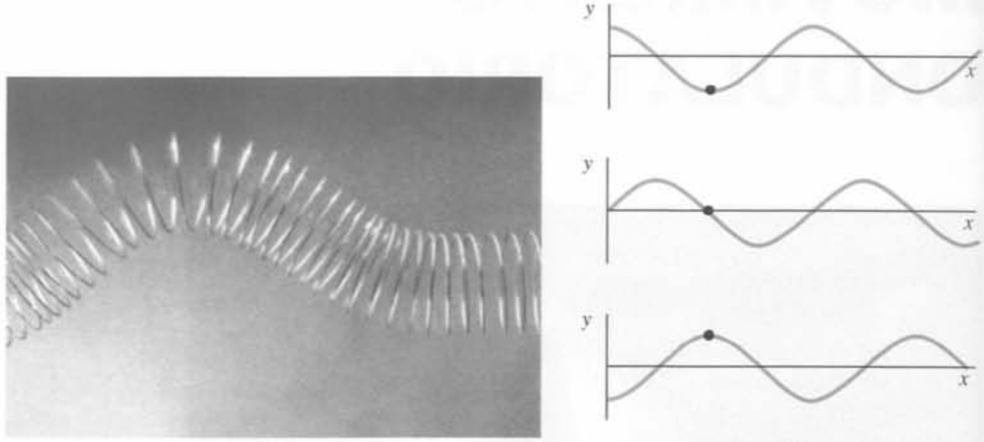
Este radar de la policía lanza ondas electromagnéticas, que se mueven a la velocidad de la luz, y que se reflejan en un coche en movimiento.

¿Cómo mide el policía la velocidad del vehículo? (Véase el ejemplo 15.12.)

15.1 Movimiento ondulatorio simple
15.2 Ondas periódicas
15.3 Ondas en tres dimensiones
15.4 Ondas y barreras
15.5 Efecto Doppler

Las ondas transportan energía y momento lineal a través del espacio sin transportar materia. Cuando una onda se mueve por la superficie del agua de un estanque, las moléculas de agua oscilan hacia arriba y hacia abajo pero no cruzan el estanque con la onda. La onda transporta energía y momento pero, en cambio, no transporta masa. Un bote de remos también se mueve hacia arriba y hacia abajo impulsado por las ondas u olas, pero tampoco cruzará el estanque impulsado por ellas. Las ondas de agua, las ondas generadas cuando pulsamos una cuerda de guitarra y las ondas sonoras, todas ellas comportan una oscilación.

☛ **En este capítulo seguimos analizando el movimiento oscilatorio que comenzamos en el capítulo 14, estudiando las ondas periódicas, en especial las ondas armónicas. Veremos que las ondas mecánicas se generan cuando hay una perturbación en un medio, como el aire o el agua, mientras que las ondas electromagnéticas pueden existir sin que necesariamente haya un medio material por el cual la onda se propague.**



(*a*) (*b*)

Figura 15.1 (*a*) Pulso de una onda transversal en un muelle. La perturbación es perpendicular a la dirección del movimiento de la onda. (*b*) Tres dibujos sucesivos de una onda transversal que viaja hacia la derecha sobre un muelle. Un elemento de la cuerda se mueve hacia arriba y abajo.

15.1 Movimiento ondulatorio simple

Ondas transversales y longitudinales

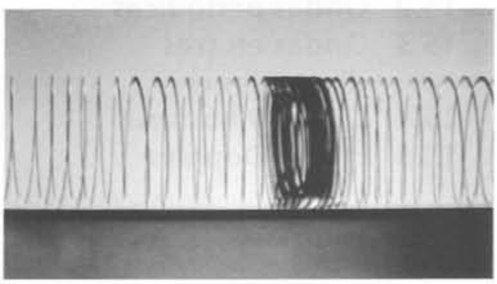


Figura 15.2 Pulso de una onda longitudinal en un muelle. La perturbación se desplaza en la dirección de movimiento de la onda.

Las ondas mecánicas se originan mediante una perturbación de un medio. Cuando se pulsa una cuerda tensa, la perturbación provocada se propaga a lo largo de la misma en forma de un pulso ondulatorio. La perturbación en este caso consiste en la variación de la forma de la cuerda a partir de su estado de equilibrio. Su propagación surge de la interacción de cada segmento de cuerda con los segmentos adyacentes. Los segmentos de la cuerda (el medio) se mueven en dirección perpendicular a la cuerda y por lo tanto perpendiculares a la dirección del movimiento del pulso. Una onda como esta en la que la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación se denomina **onda transversal** (figura 15.1). Una onda en la que la perturbación es paralela a la dirección de propagación se denomina **onda longitudinal** (figura 15.2). Las ondas sonoras son ejemplos de ondas longitudinales. Las moléculas de un gas, líquido o sólido a través del cual viaja el sonido, oscilan según la línea de propagación (moviéndose adelante y atrás), comprimiendo y enrareciendo alternativamente el medio.

Pulsos de onda

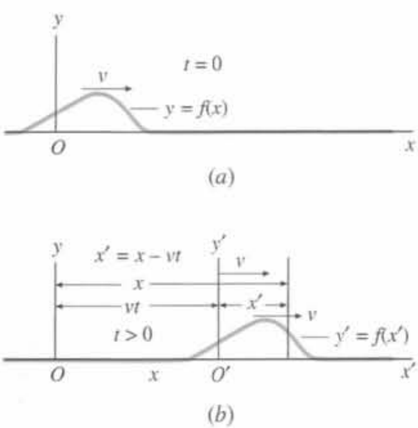


Figura 15.3

En la figura 15.3*a* se muestra un pulso en una cuerda en el instante $t = 0$. La forma de la cuerda en este instante puede representarse por una función $y = f(x)$. Un cierto tiempo después (figura 13.3*b*), el pulso se ha desplazado por la cuerda, de modo que en un nuevo sistema de coordenadas con origen O' que se mueve con la velocidad del pulso, éste es estacionario. La cuerda se describe en este nuevo sistema por $f(x')$ en todo instante. Las coordenadas de los dos sistemas de referencia están relacionadas por

$$x = x' + vt$$

y por lo tanto $f(x') = f(x - vt)$.
Así pues, el desplazamiento de la cuerda en el sistema original O puede escribirse

$$y = f(x - vt), \quad \text{onda moviéndose en el sentido positivo de } x \qquad (15.1)$$

Esta misma línea de razonamiento aplicada al caso de un pulso que se mueve hacia la izquierda conduce a

$$y = f(x + vt), \quad \text{onda moviéndose en el sentido negativo de } x \qquad (15.2)$$

En cada una de estas expresiones, v es el módulo de la velocidad de propagación de la onda. La función $y = f(x - vt)$ se denomina **función de onda**. En el caso de ondas en una cuerda, la función de onda representa el desplazamiento transversal de la cuerda. Para las ondas sonoras en el aire, la función de onda puede ser el desplazamiento longitudinal de las moléculas gaseosas o la presión del aire. Estas funciones de onda son soluciones de una ecuación diferencial llamada ecuación de onda, que puede deducirse de las leyes de Newton.

Velocidad de las ondas

Una propiedad general de las ondas es que su velocidad depende de las propiedades del medio y que es independiente del movimiento de la fuente de las ondas. Por ejemplo, la velocidad del sonido de la bocina de un coche depende sólo de las propiedades del aire y no del movimiento del coche.

En el caso de los pulsos de onda en una cuerda, es fácil demostrar que cuanto mayor es la tensión, más rápidamente se propagan las ondas. Además, las ondas se propagan más rápidamente en una cuerda ligera que en una cuerda pesada bajo la misma tensión. Veremos posteriormente que si F_T (usamos F_T para designar la tensión porque reservamos T para el periodo) es la tensión y μ la densidad de masa lineal (masa por unidad de longitud), la velocidad de la onda es

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \qquad (15.3)$$

VELOCIDAD DE LAS ONDAS EN UNA CUERDA

EJEMPLO 15.1 | El gusano que corre para salvar la vida

¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

Un gusano está a 2,5 cm del extremo de la cuerda de un tendedero cuando la chica que está tendiendo su traje de baño en el otro extremo de la cuerda lo ve. La chica da un golpe a la cuerda de modo que por ésta se propaga un pulso de 3 cm de altura que se dirige hacia el animal. Si el gusano se mueve a 2,54 cm/s, ¿llegará al extremo de la cuerda antes que le alcance el movimiento generado por la chica? La cuerda tiene 25 m de longitud y una masa de 0,25 kg y se mantiene tensa gracias a un peso de 10 kg que cuelga de ella, tal como se muestra en la figura 15.4. La chica está tendiendo su traje de baño a una distancia de 5 m del extremo de la cuerda opuesto a la posición del gusano.

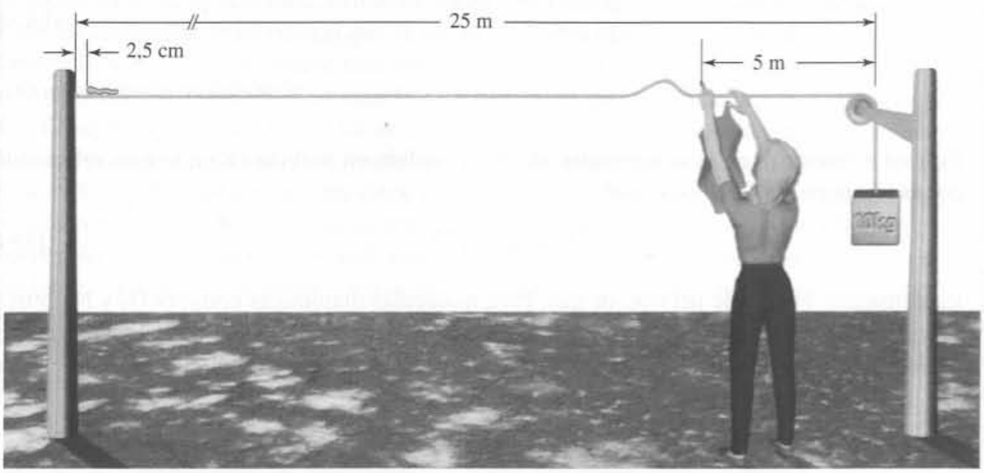


Figura 15.4

Planteamiento del problema Hay que saber a qué velocidad se mueve la onda. Para ello usamos la fórmula $v = \sqrt{F_T/\mu}$.

1. La velocidad está relacionada con la tensión F_T y la densidad de masa lineal μ: $\qquad v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$

2. Calcular la densidad de masa lineal y la tensión a partir de la información recibida: $\qquad \mu = \frac{m_c}{L} \quad \text{y} \quad F_T = mg$

3. Aplicar estos valores a la expresión de v para calcular la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{mgL}{m_c}} = \sqrt{\frac{(10\ \text{kg})(9{,}81\ \text{m/s}^2)(25\ \text{m})}{0{,}25\ \text{kg}}}$$
$$= 99{,}0\ \text{m/s}$$

4. Usar esta velocidad para determinar el tiempo que tarda en recorrer los 20 m que le separan del otro extremo de la cuerda.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{20\ \text{m}}{99{,}0\ \text{m/s}} = 0{,}202\ \text{s}$$

5. Determinar el tiempo que invierte el gusano en moverse los 2,5 cm que le separan del extremo de la cuerda y, por lo tanto, de la salvación.

$$\Delta t = \frac{\Delta x'}{v'} = \frac{2{,}5\ \text{cm}}{2{,}54\ \text{cm/s}} = 0{,}984\ \text{s}$$

$$\boxed{\text{El gusano no se escapa del pulso}}$$

Ejercicio Si se sustituye la masa de 10 kg por otra de 20 kg, ¿cuál será la velocidad de las ondas en la cuerda? (*Respuesta* 54,2 m/s.)

Ejercicio Demostrar que las unidades de $\sqrt{F_T/\mu}$ son m/s cuando F se expresa en Newtons y μ en kg/m.

En el caso de las ondas sonoras en un fluido como el aire o el agua, la velocidad v viene expresada por

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{15.4}$$

en donde ρ es la densidad del medio (en equilibrio) y B el módulo de compresibilidad[1] (ecuación 13.6). Comparando las ecuaciones 15.3 y 15.4 puede verse que, en general, la velocidad de las ondas depende de una propiedad elástica del medio (la tensión en el caso de las ondas de las cuerdas y el módulo de compresibilidad de las ondas sonoras) y de una propiedad inercial del mismo (la densidad de masa lineal o la densidad de masa volúmica).

Para las ondas sonoras en un gas, tal como el aire, el módulo de compresibilidad[2] es proporcional a la presión, la cual a su vez es proporcional a la densidad ρ y a la temperatura absoluta T del gas. La relación B/ρ es por lo tanto, independiente de la densidad y simplemente proporcional a la temperatura absoluta T. En el capítulo 17 demostraremos que en este caso, la ecuación 15.4 es equivalente a

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \tag{15.5}$$

VELOCIDAD DEL SONIDO EN UN GAS

En esta ecuación T es la temperatura absoluta medida en kelvins (K) que está relacionada con la temperatura Celsius, t_C por

$$T = t_C + 273 \tag{15.6}$$

La constante γ depende del tipo de gas. Para moléculas diatómicas como el O_2 y N_2, γ tiene el valor 1,4, y como el O_2 y N_2 constituyen el 98% de la atmósfera, éste es el valor que corresponde también al aire. (Para moléculas monoatómicas como el He, γ posee el valor 1,67.) La constante R es la constante universal de los gases,

$$R = 8{,}314\ \text{J/(mol} \cdot \text{K)} \tag{15.7}$$

[1] El módulo de compresibilidad es el cociente, con signo negativo, entre el cambio en la presión y el correspondiente cambio del volumen por unidad de volumen (capítulo 13):

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

[2] El **módulo de compresibilidad isotermo**, que describe cambios en el volumen que ocurren a temperatura constante, difiere del **módulo de compresibilidad adiabático**, que describe variaciones del volumen que se dan cuando no se produce transferencia de calor. En las ondas sonoras a las frecuencias audibles los cambios de la presión se producen tan rápidamente que no hay tiempo para que se den flujos de calor y, por lo tanto, se describen mediante el módulo de compresibilidad adiabático.

y M la masa molar del gas (es decir, la masa de 1 mol del gas), que para el aire es

$$M = 29 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}$$

EJEMPLO 15.2 | Velocidad del sonido en el aire

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Calcular la velocidad del sonido en el aire (a) a 0 °C y (b) a 20 °C.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
(a) 1. Escribir la ecuación 15.5.	$v_a = \sqrt{\dfrac{\gamma R T_a}{M}}$
2. Introducir los valores dados en la ecuación y despejar la velocidad. (Asegurarse de que la temperatura se convierte a kelvins.)	$v_a = \boxed{331\ \mathrm{m/s}}$
(b) 1. Utilizar el hecho de que v es proporcional a $\sqrt{T}$ (ecuación 15.5) para relacionar las velocidades a 293 K y 273 K.	$\dfrac{v_b}{v_a} = \sqrt{\dfrac{T_b}{T_a}}$
2. Calcular v a 293 K.	$v_b = \boxed{343\ \mathrm{m/s}}$

Observación En este ejemplo vemos que la velocidad del sonido en el aire es aproximadamente 340 m/s a temperaturas ordinarias.

Ejercicio Para el helio, $M = 4 \times 10^{-3}$ kg/mol y $\gamma = 1{,}67$. ¿Cuál es la velocidad de las ondas sonoras en helio a 20 °C? (*Respuesta* 1,01 km/s.)

Deducción de *v* para ondas en una cuerda La ecuación 15.3 puede deducirse a partir de las leyes de Newton. Consideremos un pulso que se propaga a lo largo de una cuerda con velocidad v hacia la derecha (figura 15.5*a*). Si la amplitud del pulso es pequeña comparada con la longitud de la cuerda, la tensión F_T es aproximadamente constante a lo largo de la cuerda. En un sistema de referencia que se mueve con velocidad v hacia la derecha, el pulso es estacionario y la cuerda se mueve con velocidad v hacia la izquierda. En la figura 15.5*b* se muestra un pequeño segmento de cuerda de longitud Δs que se encuentra en el pico de un pulso. El segmento forma parte de un arco circular de radio R. Instantáneamente el segmento se mueve con velocidad v en una trayectoria circular, de modo que posee una aceleración centrípeta v^2/R. Las fuerzas que actúan sobre el segmento son las tensiones F_T en ambos extremos. Las componentes horizontales de estas fuerzas son iguales y opuestas y, por lo tanto, se cancelan. Si consideramos Δs lo suficientemente pequeño, las componentes verticales de estas fuerzas apuntan radialmente hacia el centro del arco circular. Estas fuerzas radiales proporcionan la aceleración centrípeta.

Sea θ el ángulo subtendido por la cuerda. La componente centrípeta de la fuerza neta que actúa sobre el segmento es

$$\sum F_c = 2F_T \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\theta \approx 2F_T(\tfrac{1}{2}\theta) = F_T\theta$$

en donde hemos utilizado la aproximación sen $\frac{1}{2}\theta \approx \frac{1}{2}\theta$ para valores pequeños de θ. Si μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda, la masa de un segmento de longitud Δs es $m = \mu\Delta s$. El ángulo θ viene relacionado con Δs por

$$\theta = \frac{\Delta s}{R}$$

La masa del elemento es, por lo tanto,

$$m = \mu\Delta s = \mu R\theta$$

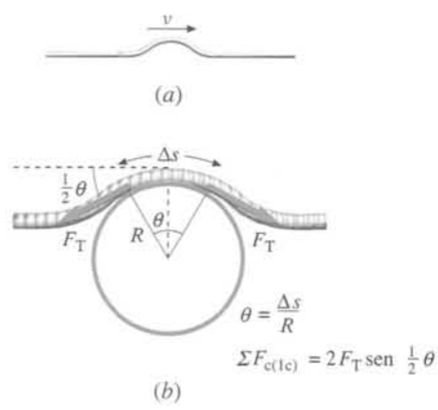


Figura 15.5 (*a*) Pulso de onda moviéndose con velocidad v a lo largo de una cuerda. (*b*) En un sistema de referencia en el que el pulso de onda de (*a*) está en reposo, la cuerda se está moviendo con velocidad v hacia la izquierda. Un segmento pequeño de la cuerda de longitud Δs se mueve sobre un arco circular de radio R. La aceleración centrípeta del segmento la originan los componentes radiales de la tensión.

La segunda ley de Newton ($\Sigma F_c = ma_c$) nos lleva a

$$F_T\theta = \mu R\theta \frac{v^2}{R}$$

Despejando v, obtenemos $v = \sqrt{F_T/\mu}$.

En el sistema de referencia original, la cuerda está fija y el pulso se mueve con velocidad $v = \sqrt{F_T/\mu}$, que es la ecuación 15.3. Como v es independiente de R y θ, este resultado es válido para el pico de cualquier pulso. A continuación demostraremos que este resultado no sólo es cierto para el pico, sino también para el resto de las partes del pulso.

*La ecuación de onda

Podemos aplicar las leyes de Newton a un segmento de cuerda para deducir una ecuación diferencial llamada ecuación de onda que relaciona las derivadas espaciales de la función $y(x, t)$ con sus derivadas temporales. La figura 15.6 muestra un segmento de una cuerda. Consideraremos sólo ángulos pequeños θ_1 y θ_2. En este caso, la longitud del segmento es aproximadamente Δx y su masa $m = \mu\,\Delta x$, en donde μ es la masa de la cuerda por unidad de longitud. Primero demostraremos que, para desplazamientos verticales pequeños, la fuerza resultante horizontal sobre un segmento es cero y que la tensión es uniforme y constante. Es decir,

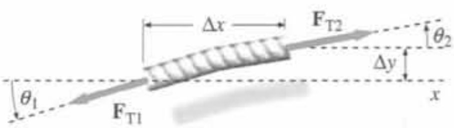


Figura 15.6 Segmento de una cuerda tensa utilizado para la deducción de la ecuación de onda. La fuerza vertical neta sobre el segmento es F_{T2} sen $\theta_2 - F_{T1}$ sen θ_1, siendo F_T la tensión en la cuerda. Se obtiene la ecuación de onda aplicando la segunda ley de Newton al segmento.

$$\sum F_x = F_{T2}\cos\theta_2 - F_{T1}\cos\theta_1 = 0$$

en donde θ_2 y θ_1 son los ángulos indicados y F_T es la tensión en la cuerda. Como se supone que los ángulos son pequeños, podemos aproximar cos θ por 1. Por lo tanto, la fuerza neta horizontal que actúa sobre el segmento de cuerda puede expresarse en la forma

$$\sum F_x = F_{T2} - F_{T1} = 0$$

Con lo cual,

$$F_{T2} = F_{T1} = F_T$$

El segmento de cuerda se mueve verticalmente y la fuerza neta en esta dirección es

$$\sum F_y = F_T \text{ sen } \theta_2 - F_T \text{ sen } \theta_1$$

Se supone que los ángulos son pequeños, por lo tanto se puede aproximar sen θ por tg θ para cada uno de ellos. En estas condiciones la fuerza vertical neta sobre el segmento de cuerda se escribe como

$$\sum F_y = F_T(\text{sen } \theta_2 - \text{sen } \theta_1) \approx F_T(\text{tg } \theta_2 - \text{tg } \theta_1)$$

La tangente del ángulo formado por la cuerda con la horizontal es la pendiente de la curva formada por la cuerda. La pendiente S es la primera derivada de $y(x, t)$ respecto a x para t constante. Una derivada de una función de dos variables respecto a una de ellas, manteniendo constante la otra, se denomina una **derivada parcial**. La derivada parcial de y respecto a t se escribe $\partial y/\partial x$. Así tenemos

$$S = \text{tg } \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Por lo tanto,

$$\sum F_y = F_T(S_2 - S_1) = F_T\,\Delta S$$

en donde S_1 y S_2 son las pendientes de ambos extremos del segmento de cuerda y ΔS la variación de la pendiente. Haciendo que esta fuerza neta sea igual a la masa $\mu\,\Delta x$ multiplicada por la aceleración $\partial^2 y/\partial t^2$, se tiene

$$F_T\,\Delta S = \mu\,\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

o bien

$$F_T \frac{\Delta S}{\Delta x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.8}$$

En el límite $\Delta x \to 0$, tenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Así pues, la ecuación 15.8 se reduce a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F_T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.9a}$$

La ecuación 15.9a es la **ecuación de onda** para una cuerda tensa.

Ahora demostraremos que la ecuación de onda es satisfecha por cualquier función de $x - vt$. Hagamos $\alpha = x - vt$ y consideremos cualquier función de onda

$$y = y(x - vt) = y(\alpha)$$

La derivada de y respecto a α la denominaremos y'. Entonces, por la regla de derivación en cadena, tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} = y'\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = y'\frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

Dado que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial(x - vt)}{\partial t} = -v$$

se obtiene

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = -vy'$$

Tomando segundas derivadas, tenemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y''$$

y

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v\frac{\partial y'}{\partial t} = -v\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = +v^2 y''$$

Así pues,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.9b}$$

ECUACIÓN DE ONDA

El mismo resultado se obtiene para cualquier función de $x + vt$. Comparando las ecuaciones 15.9a y 15.9b vemos que la velocidad de propagación de la onda es $v = \sqrt{F_T/\mu}$, que es la ecuación 15.3.

EJEMPLO 15.3 | Función de onda armónica

En el apartado siguiente se definen las ondas armónicas mediante la función de ondas $y(x, t) = A\ \mathrm{sen}(kx - \omega t)$, en donde $v = \omega/k$. Demostrar, calculando explícitamente las derivadas, que la función $y(x,t) = A\ \mathrm{sen}\ (kx - \omega t)$ satisface la ecuación 15.9b.

1. Calcular la primera y segunda derivada de y respecto a x:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)] = A\cos\ (kx - \omega t)\frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial x}$$
$$= kA\ \cos\ (kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}kA\ \cos\ (kx - \omega t)$$
$$= -kA\ \mathrm{sen}(kx - \omega t)\frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial x}$$
$$= -k^2\ A\mathrm{sen}(kx - \omega t)$$

2. De igual modo, las dos derivadas parciales respecto al tiempo, t, son:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\ [A\ \mathrm{sen}\ (kx - \omega t)] = A\cos\ (kx - \omega t)\ \frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial t}$$
$$= -\omega A\cos\ (kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \omega A\ \mathrm{sen}\ (kx - \omega t)\frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial t} = -\omega^2 A\ \mathrm{sen}\ (kx - \omega t).$$

3. Sustituyendo estos resultados en la ecuación 15.9b se obtiene:

$$-k^2 A\ \mathrm{sen}\ (kx - \omega t) = \frac{1}{v^2}\ [-\omega^2 A\ \mathrm{sen}\ (kx - \omega t)]$$

o bien

$$A\ \mathrm{sen}\ (kx - \omega t) = \frac{\omega^2/k^2}{v^2} A\ \mathrm{sen}\ (kx - \omega t)$$

4. Sustituyendo k utilizando $k = \omega/v$ se obtiene:

$$A\ \mathrm{sen}\ (kx - \omega t) = \frac{v^2}{v^2}A\ \mathrm{sen}\ (kx - \omega t) = \boxed{A\ \mathrm{sen}\ (kx - \omega t)}$$

Observación Hemos demostrado que la función $y = A\ \mathrm{sen}\ (kx - \omega t)$ es una solución a la ecuación de onda si $v = \omega/k$.

Ejercicio Demostrar que cualquier función $y(x + vt)$ satisface la ecuación 15.9b.

Utilizando las leyes de Newton puede deducirse también una ecuación de onda para las ondas sonoras. En una dimensión esta ecuación es

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

donde s es el desplazamiento del medio en la dirección x y v_s es la velocidad del sonido.

15.2 Ondas periódicas

Si el extremo de una cuerda tensa se mueve de forma periódica hacia arriba y hacia abajo, se genera una **onda periódica**. Si una onda periódica se mueve a lo largo de una cuerda tensa o en cualquier otro medio, cada punto del medio oscila con el mismo periodo.

Ondas armónicas

Las ondas armónicas constituyen la clase más básica de las ondas periódicas. Todas las ondas, tanto si son periódicas como si no lo son, pueden describirse como la suma de ondas armónicas. Por lo tanto, el conocimiento del movimiento de las ondas armónicas es fundamental para poder generalizar y obtener la descripción de cualquier clase de movimiento ondulatorio. Si una **onda armónica** se mueve por un medio, cada punto del medio oscila siguiendo un movimiento armónico simple.

Si un extremo de una cuerda se sujeta a un diapasón que está vibrando con movimiento armónico simple, se produce un tren de ondas sinusoidales que se propaga a lo largo de la cuerda. Este tren de ondas es una onda armónica. La forma de la cuerda es la de una función sinusoidal, como muestra la figura 15.7. La distancia mínima recorrida en el espacio hasta que la función de onda se repite (la distancia entre crestas, por ejemplo) se llama **longitud de onda** λ.

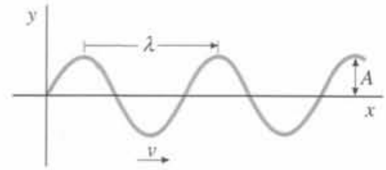


Figura 15.7 Onda armónica en un cierto instante de tiempo. A es la amplitud y λ es la longitud de onda. En el caso de ondas en una cuerda puede obtenerse esta figura tomando una fotografía instantánea de la misma.

Cuando la onda se propaga por la cuerda, cada punto de la misma se mueve hacia arriba y hacia abajo (perpendicularmente a la dirección de propagación) realizando un movimiento armónico simple cuya frecuencia f es la del diapasón. Durante un periodo $T = 1/f$, la onda se mueve una distancia de una longitud de onda, de modo que la velocidad viene dada por

$$v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda \tag{15.10}$$

Como esta relación surge de las definiciones de longitud de onda y frecuencia, es válida para todas las ondas armónicas.

La función sinusoidal que describe los desplazamientos en la figura 15.7 es

$$y(x) = A \text{ sen}\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \delta\right)$$

en donde A es la **amplitud**, λ la longitud de onda y δ una constante de fase que depende de la elección del origen $x = 0$. Esta ecuación se expresa de forma más sencilla como

$$y(x) = A \text{ sen }(kx + \delta) \tag{15.11}$$

en donde k, el **número de onda,** viene dado por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{15.12}$$

Obsérvese que las dimensiones de k son m^{-1}. (Como el ángulo debe expresarse en radianes, a veces se escriben las unidades de k en la forma rad/m.) Cuando se trata con una única onda armónica se suele elegir el origen de modo que $\delta = 0$.

Para describir una onda que se mueve en el sentido creciente de x con velocidad v, sustituyamos x en la ecuación 15.11 por $x - vt$ (como hicimos con los "pulsos de onda" de la sección 15.1). Eligiendo δ igual a cero se obtiene

$$y(x, t) = A \text{ sen } k(x - vt) = A \text{ sen }(kx - kvt)$$

o

$$y(x, t) = A \text{ sen }(kx - \omega t) \tag{15.13}$$

FUNCIÓN DE ONDA ARMÓNICA

en donde

$$\omega = kv \tag{15.14}$$

es la frecuencia angular y el argumento de la función seno, $(kx - \omega t)$, se denomina **fase**. La frecuencia angular está relacionada con la frecuencia f y el periodo T mediante

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{15.15}$$

Sustituyendo $\omega = 2\pi f$ en la ecuación 15.14 y utilizando $k = 2\pi/\lambda$, se obtiene

$$2\pi f = kv = \frac{2\pi}{\lambda}v$$

o $v = f\lambda$, que es la ecuación 15.10.

Si una onda armónica que se mueve por una cuerda está descrita por $y(x, t) = A\ \mathrm{sen}(kx - \omega t)$, en un punto fijo x la velocidad viene dada por

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[A\ \mathrm{sen}(kx - \omega t)] = \omega A \cos(kx - \omega t) \tag{15.16}$$

VELOCIDAD TRANSVERSAL

La aceleración en este punto viene dada por $\partial^2 y/\partial t^2$.

EJEMPLO 15.4 | Una onda armónica en una cuerda

La función de onda de una onda armónica que se mueve en una cuerda es $y(x,t) = (0{,}03\ \mathrm{m}) \times \mathrm{sen}\,[(2{,}2\ \mathrm{m}^{-1})x - (3{,}5\ \mathrm{s}^{-1})t]$. (*a*) ¿En qué sentido se propaga esta onda y cuál es su velocidad? (*b*) Determinar la longitud de onda, la frecuencia y el periodo de esta onda. (*c*) ¿Cuál es el desplazamiento máximo de cualquier segmento de cuerda? (*d*) ¿Cuál es la velocidad máxima de cualquier segmento de cuerda?

Planteamiento del problema (*a*) Para determinar el sentido de la onda, expresar $y(x,t)$ como una función de $(x - vt)$ o como una función $(x + vt)$ y utilizar las ecuaciones 15.1 y 15.2. Para determinar la velocidad utilizar $\omega = kv$ (ecuación 15.14). (*b*) La longitud de onda, frecuencia y periodo pueden determinarse a partir del número de onda k y la frecuencia angular ω. (*c*) El desplazamiento máximo de un segmento de cuerda es la amplitud A. (*d*) La velocidad de cualquier segmento corto de cuerda es $\partial y/\partial t$.

(a) 1. La función de onda es de la forma $y(x, t) = A\ \mathrm{sen}(kx - \omega t)$. Teniendo en cuenta que $\omega = kv$ (ecuación 15.14), escribir la función de onda en función de $x - vt$. Usar las ecuaciones 15.1 y 15.2 para determinar el sentido del movimiento:

$y(x, t) = A\ \mathrm{sen}\ (kx - \omega t)$ y $\omega = kv$

es decir,

$y(x, t) = A\ \mathrm{sen}\ (kx - \omega t) = A\ \mathrm{sen}\ [k(x - vt)]$

la onda viaja en el $\boxed{\text{sentido } +x}$

2. Como la forma de la función de onda es $y(x, t) = A\ \mathrm{sen}(kx - \omega t)$ sabemos cuánto vale A, ω y k. Usarlos para calcular la velocidad:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{3{,}5\ \mathrm{s}^{-1}}{2{,}2\ \mathrm{m}^{-1}} = \boxed{1{,}59\ \mathrm{m/s}}$$

(b) La longitud de onda λ está relacionada con el número de onda k; y la frecuencia y el periodo están relacionados con ω:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2{,}2\ \mathrm{m}^{-1}} = \boxed{2{,}86\ \mathrm{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3{,}5\ \mathrm{s}^{-1}} = \boxed{1{,}80\ \mathrm{s}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}80\ \mathrm{s}} = \boxed{0{,}557\ \mathrm{Hz}}$$

(c) El desplazamiento máximo del segmento de cuerda es la amplitud A:

$$A = \boxed{0{,}03\ \mathrm{m}}$$

(d) 1. Calcular $\partial y/\partial t$ para determinar la velocidad de un punto de la cuerda:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = (0{,}03\ \mathrm{m})\,\frac{\partial[\mathrm{sen}(2{,}2\ \mathrm{m}^{-1}x - 3{,}5\ \mathrm{s}^{-1}t)]}{\partial t}$$

$$= (0{,}03\ \mathrm{m})(-3{,}5\ \mathrm{s}^{-1})\cos\,(2{,}2\ \mathrm{m}^{-1}x - 3{,}5\ \mathrm{s}^{-1}t)$$

$$= -(0{,}105\ \mathrm{m/s})\cos\,(2{,}2\ \mathrm{m}^{-1}x - 3{,}5\ \mathrm{s}^{-1}t)$$

2. La velocidad transversal máxima tiene lugar cuando la función coseno tiene el valor de ± 1:

$$v_{y,\,\text{máx}} = \boxed{0{,}105\ \mathrm{m/s}}$$

Observación Hemos incluido las unidades para destacar cómo se utilizan. Con frecuencia prescindimos de ellas por simplicidad.

Transferencia de energía a una cuerda mediante ondas Consideremos una cuerda sujeta a un diapasón. Cuando éste vibra, transfiere energía al segmento de cuerda unido a él. Por ejemplo, cuando el diapasón se desplaza de su posición de equilibrio, estira el segmento aumentando su energía potencial y transfiere una velocidad transversal al segmento, incrementando su energía cinética. Cuando una onda se mueve a lo largo de la cuerda, la energía se transmite por ésta a los restantes segmentos.

La potencia es la tasa de transferencia de energía. La potencia se calcula determinando la tasa con que realiza trabajo la fuerza que un segmento de cuerda ejerce sobre un segmento vecino. La figura 15.8 muestra una onda armónica moviéndose hacia la derecha a través de un segmento de cuerda. La tensión $\mathbf{F}_T$ que actúa sobre el extremo izquierdo del segmento es tangente a la cuerda. Para calcular la potencia transferida por esta fuerza usamos la fórmula $P = \mathbf{F}_T \cdot \mathbf{v}_t$ (ecuación 6.16), donde $\mathbf{F}_T$ es la tensión y $\mathbf{v}_t$, la velocidad transversal, es la velocidad del extremo del segmento. Para obtener una expresión para la potencia primero expresamos los vectores en función de sus componentes, es decir, $\mathbf{F}_T = F_{Tx}\mathbf{i} + F_{Ty}\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}_t = v_y\mathbf{j}$, con lo cual $P = F_{Ty}v_y$. A partir de la ecuación 15.16 obtenemos v_y y a partir de la figura vemos que $F_{Ty} = -F_T \operatorname{sen}\theta \approx -F_T \operatorname{tg}\theta$, en donde se ha usado la aproximación según la cual, para ángulos pequeños $\operatorname{sen}\theta \approx \operatorname{tg}\theta$. Como $\operatorname{tg}\theta$ es la pendiente de la cuerda, tenemos $\operatorname{tg}\theta = \partial y/\partial x$, y por lo tanto

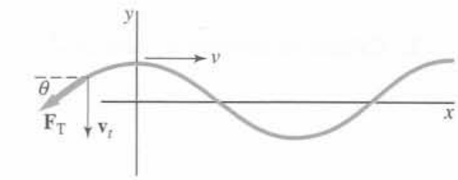


Figura 15.8

$$P = F_{Ty}v_y \approx -F_T \operatorname{tg}\theta\, v_y = -F_T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}$$
$$= -F_T[kA\cos(kx-\omega t)][-A\omega\cos(kx-\omega t)]$$

Usando las ecuaciones 15.3 y 15.14, sustituimos F_T y k, obteniendo

$$P = \mu v\omega^2A^2\cos^2(kx-\omega t) \tag{15.17}$$

en donde v es la velocidad de la onda. La potencia media es

$$P_m = \tfrac{1}{2}\mu v\omega^2A^2 \tag{15.18}$$

ya que el valor medio de $\cos^2(kx-\omega t)$, si se calcula el promedio sobre un periodo entero del movimiento manteniendo x constante, es $\frac{1}{2}$.

La energía recorre la cuerda a la velocidad de la onda v, por lo que la energía media $(\Delta E)_m$ que fluye por un punto P_1 durante el tiempo Δt (figuras 15.9*a* y 15.9*b*) es

$$(\Delta E)_m = P_m\Delta t = \tfrac{1}{2}\mu v\omega^2A^2\Delta t$$

Esta energía se distribuye a lo largo de una distancia $\Delta x = v\Delta t$, de modo que la energía media en Δx es

$$(\Delta E)_m = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2A^2\Delta x \tag{15.19}$$

Obsérvese que tanto la potencia media como la energía media transmitidas son proporcionales al cuadrado de la amplitud de la onda.

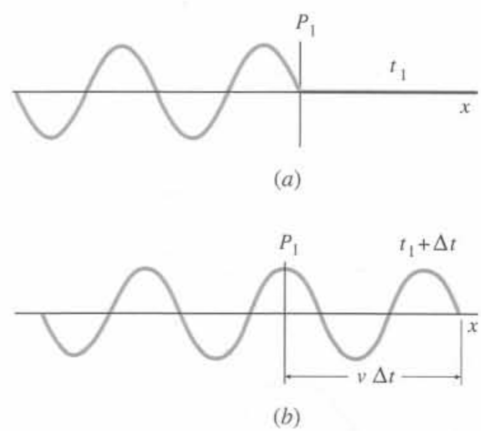


Figura 15.9

EJEMPLO 15.5 | Energía total media de una onda en una cuerda

Una onda armónica de longitud de onda 25 cm y amplitud 1,2 cm se mueve a lo largo de un segmento de 15 m de una cuerda de 60 m de longitud y 320 g de masa que está sometida a una tensión de 12 N. (*a*) Determinar la velocidad y la frecuencia angular de la onda. (*b*) ¿Cuál es la energía total media de la onda?

Planteamiento del problema La velocidad de las ondas es $v = \sqrt{F_T/\mu}$, en donde F_T es conocida y $\mu = m/L$. Determinamos ω a partir de $\omega = 2\pi f$, en donde $f = v/\lambda$. La energía se obtiene de la ecuación 15.19.

(a) 1. La velocidad está relacionada con la tensión y la densidad de masa lineal: $v = \sqrt{\dfrac{F_T}{\mu}}$

2. Calcular la densidad de masa lineal:

$$\mu = \frac{m}{L}$$

por lo tanto

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{F_T L}{m}} = \sqrt{\frac{(12\text{ N})(60\text{ m})}{(0{,}32\text{ kg})}} = \boxed{47{,}4\text{ m/s}}$$

3. La frecuencia angular se determina a partir de la frecuencia y ésta de la velocidad y la longitud de onda:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\frac{v}{\lambda} = 2\pi\frac{47{,}4\text{ m/s}}{0{,}25\text{ m}} = \boxed{1190\text{ rad/s}}$$

(b) La energía total media de las ondas en la cuerda viene dada por la ecuación 15.19 con $\mu\,\Delta x = \Delta m = 80$ g

$$(\Delta E)_m = \tfrac{1}{2}\,\mu\omega^2A^2\,\Delta x = \frac{1}{2}\frac{m}{L}\omega^2A^2\Delta x$$

$$= \frac{1}{2}\frac{0{,}32\text{ kg}}{60\text{ m}}(1190\text{ s}^{-1})^2(0{,}012\text{ m})^2(15\text{ m})$$

$$= \boxed{8{,}19\text{ J}}$$

Ejercicio Calcular la energía total media transmitida por unidad de tiempo a lo largo de la cuerda. (*Respuesta* 25,9 W.)

Ondas sonoras armónicas

Las ondas sonoras armónicas pueden generarse mediante un diapasón o un altavoz que vibre con movimiento armónico simple. La fuente vibrante hace que las moléculas de aire próximas oscilen con movimiento armónico simple alrededor de sus posiciones de equilibrio. Estas moléculas chocan con otras moléculas próximas haciéndolas oscilar y, por lo tanto, propagan la onda sonora. La ecuación 15.13 describe una onda sonora armónica si la función de onda $y(x,t)$ se reemplaza por $s(x,t)$, el desplazamiento de las moléculas respecto a su posición de equilibrio.

$$s(x,t) = s_0 \text{ sen }(kx - \omega t) \tag{15.20}$$

Estos desplazamientos se verifican a lo largo de la dirección del movimiento de la onda y dan lugar a variaciones de densidad y presión del aire. La figura 15.10 muestra el desplazamiento de las moléculas de aire y los cambios de densidad originados por una onda sonora en un momento determinado. Como la presión del gas es proporcional a su densidad, el cambio de presión es máximo cuando la variación de densidad es máxima. Los gráficos de la figura nos muestran que la onda de presión (o de densidad) está desfasada 90º respecto al

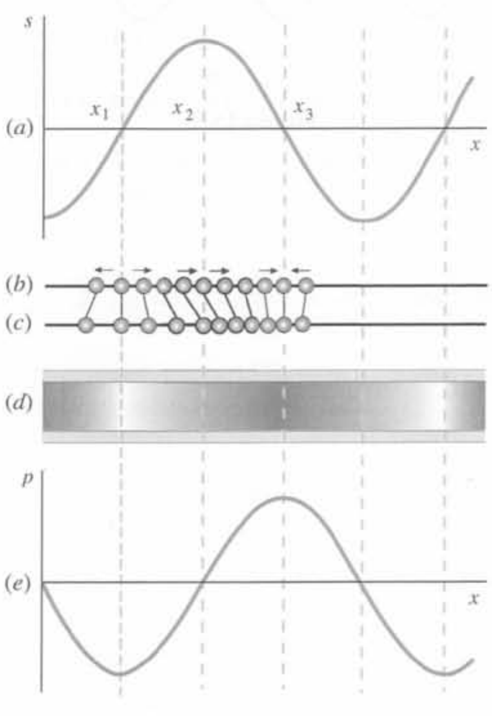


Figura 15.10 (*a*) Desplazamiento respecto al equilibrio de las moléculas de aire en una onda sonora armónica en función de la posición en un cierto instante. Los puntos x_1 y x_3 son puntos de desplazamiento nulo. (*b*) Algunas moléculas representativas igualmente espaciadas en sus posiciones de equilibrio 1/4 de ciclo antes. Las flechas indican el sentido de sus velocidades en ese momento. (*c*) Moléculas próximas a los puntos x_1, x_2 y x_3 después de la llegada de la onda. Justo a la izquierda de x_1, el desplazamiento es negativo, indicando que las moléculas del gas se desplazan hacia la izquierda, alejándose del punto x_1 en este momento. Justo a la derecha de x_1, el desplazamiento es positivo, indicando que las moléculas se desplazan hacia la derecha, o sea, de nuevo alejándose del punto x_1. Así, en el punto x_1 la densidad es un mínimo, ya que las moléculas de gas en ambos lados se desplazan alejándose de dicho punto. En el punto x_3, la densidad es un máximo porque las moléculas a ambos lados de este punto se desplazan hacia x_3. En el punto x_2 la densidad no se modifica, pues las moléculas a ambos lados de este punto tienen desplazamientos iguales en la misma dirección. (*d*) Densidad del aire en ese momento. La densidad es máxima en x_3 y mínima en x_1, puntos ambos en los que el desplazamiento es nulo. Es cero en el punto x_2, que es un máximo en el desplazamiento. (*e*) Cambio de presión, que es proporcional al cambio de densidad, en función de la posición. Los cambios de presión y desplazamiento (cambios de posición) están desfasados en 90º.

desplazamiento de la onda. (En los argumentos de las funciones seno o coseno siempre expresamos los ángulos de fase en radianes. Sin embargo, en las descripciones verbales decimos normalmente que "dos ondas están desfasadas 90°", en lugar de "dos ondas están desfasadas $\pi/2$ radianes".) Cuando el desplazamiento es cero, los cambios de presión y densidad son máximos o mínimos. Cuando el desplazamiento es máximo o mínimo, los cambios de presión y densidad son nulos. Una onda de desplazamiento dada por la ecuación 15.20 implica una onda de presión dada por

$$p = p_0 \operatorname{sen}\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (15.21)$$

donde p representa el *cambio* de presión respecto a la presión de equilibrio y p_0 es el valor máximo de este cambio. Se puede demostrar que la máxima amplitud de presión p_0 está relacionada con la máxima amplitud de desplazamiento s_0 por

$$p_0 = \rho \omega v s_0 \qquad (15.22)$$

en donde v es la velocidad de propagación y ρ la densidad de equilibrio del gas. Así, cuando una onda sonora se propaga con el tiempo, el desplazamiento de las moléculas del aire, la presión y la densidad varían todas ellas sinusoidalmente con la frecuencia de la fuente vibrante.

Ejercicio El hombre puede percibir sonidos de frecuencias comprendidas entre 20 Hz y 20 000 Hz (aunque mucha gente tiene limitada la audición por encima de 15 000 Hz). Si la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s, ¿cuáles son las longitudes de onda que corresponden a estas frecuencias extremas? (*Respuesta* $\lambda = 17$ m a 20 Hz, 1,7 cm a 20 000 Hz.)

Energía de las ondas sonoras La energía media de una onda sonora armónica en un elemento de volumen ΔV viene dado por la ecuación 15.19, en donde A se reemplaza por s_0 y el elemento de masa $\Delta m = \mu\, \Delta x$ se sustituye por $\rho\, \Delta V$, siendo ρ la densidad media del medio en que se propaga el sonido.

$$(\Delta E)_{\text{m}} = \tfrac{1}{2}\, \rho \omega^2 s_0^2\, \Delta V \qquad (15.23)$$

La energía por unidad de volumen es la **densidad de energía** media η_{m}:

$$\eta_{\text{m}} = \frac{\Delta E_{\text{m}}}{\Delta V} = \frac{1}{2}\, \rho \omega^2 s_0^2 \qquad (15.24)$$

Ondas electromagnéticas

Las ondas electromagnéticas incluyen la luz, ondas de radio, rayos X, rayos gamma, microondas, etc. Los diversos tipos de ondas electromagnéticas difieren sólo en su longitud de onda y frecuencia. A diferencia de las ondas mecánicas, las ondas electromagnéticas no requieren un medio para su propagación. Viajan a través del vacío con la velocidad c que es una constante universal, $c \approx 3 \times 10^8$ m/s. La función de onda de las ondas electromagnéticas es un campo eléctrico asociado con la onda, $\mathbf{E}(x,t)$. (Los campos eléctricos se tratan en el capítulo 21. Se deducirá una ecuación de onda, similar a la de las ondas en una cuerda o las ondas sonoras, a partir de las leyes de la electricidad y el magnetismo en el capítulo 30.) El campo eléctrico es perpendicular a la dirección de propagación, de modo que las ondas electromagnéticas son ondas transversales.

Las ondas electromagnéticas se producen cuando las cargas eléctricas libres aceleran o cuando los electrones ligados a los átomos y moléculas realizan transiciones a estados energéticos inferiores. Las ondas de radio, con frecuencias de aproximadamente 1 MHz para AM y 100 MHz para FM, se producen por corrientes eléctricas macroscópicas que oscilan en antenas de radio. La frecuencia de las ondas emitidas es igual a la frecuencia de oscilación de las cargas. Las ondas luminosas, con frecuencias del orden de 10^{14} Hz, se producen generalmente por transiciones de electrones ligados. El espectro de ondas electromagnéticas se trata en el capítulo 31.

15.3 Ondas en tres dimensiones

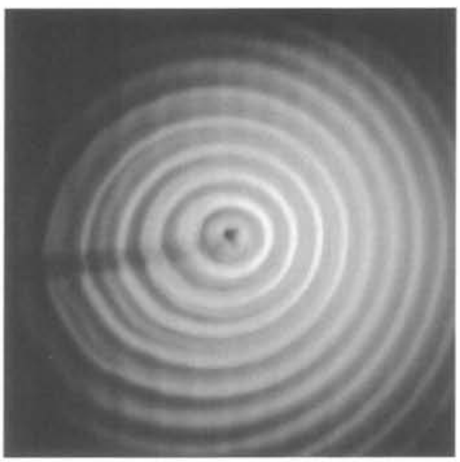


Figura 15.11 Frentes de onda circulares que divergen a partir de un foco puntual en una cubeta de ondas.

En la figura 15.11 se ven ondas circulares bidimensionales sobre la superficie del agua de una cubeta de ondas. Estas ondas se generan mediante una fuente puntual que se mueve hacia arriba y hacia abajo con un movimiento armónico simple. En este caso, la longitud de onda es la distancia entre crestas de ondas sucesivas, que son circunferencias concéntricas, denominadas **frentes de onda**. En el caso de un foco o fuente puntual de sonido, las ondas se emiten en tres dimensiones. Se mueven alejándose del foco en todas direcciones y los frentes de onda son ahora superficies esféricas concéntricas.

El movimiento de un conjunto cualquiera de frentes de onda puede indicarse mediante rayos, que son líneas dirigidas perpendicularmente a los frentes de onda (figura 15.12). Para ondas circulares o esféricas, los **rayos** son líneas radiales.

En un medio homogéneo, como el aire a densidad constante, una onda se mueve en línea recta en la dirección de los rayos, como si se tratara de un haz de partículas. A una distancia grande de un foco puntual, una parte pequeña del frente de onda puede sustituirse aproximadamente por un plano, y los rayos son aproximadamente líneas paralelas; este tipo de onda se llama **onda plana** (figura 15.13). El análogo bidimensional de una onda plana es una onda lineal, que puede considerarse como una pequeña parte de un frente de ondas circular a una gran distancia de su foco. Estas ondas pueden producirse también en una cubeta de ondas mediante una fuente lineal, como la indicada en la figura 15.14.

Intensidad de una onda

Si un foco puntual emite ondas uniformemente en todas direcciones, la energía a una distancia r del mismo estará distribuida uniformemente sobre una corteza esférica de radio r y superficie $4\pi r^2$. Si la potencia emitida por el foco es P, la potencia por unidad de área a una distancia r del foco será $P/(4\pi r^2)$. La potencia media por unidad de área que está incidiendo perpendicularmente a la dirección de propagación de denomina **intensidad**:

$$I = \frac{P_{\text{m}}}{A} \qquad (15.25)$$

DEFINICIÓN DE INTENSIDAD

Las unidades de la intensidad son vatios por metro cuadrado. A una distancia r de un foco puntual, la intensidad vale

$$I = \frac{P_{\text{m}}}{4\pi r^2} \qquad (15.26)$$

INTENSIDAD DEBIDA A UN FOCO PUNTUAL

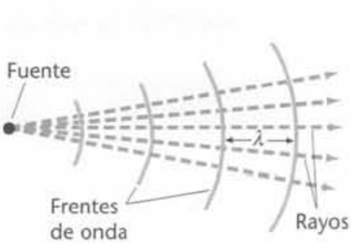


Figura 15.12 El movimiento de los frentes de onda puede representarse mediante rayos que se dibujan perpendiculares a los frentes de onda. En el caso de una fuente puntual, los rayos son rectas radiales que divergen de la misma.

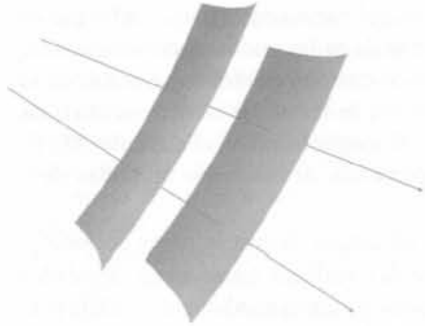


Figura 15.13 Ondas planas. A distancias grandes de un foco puntual, los frentes de onda son aproximadamente planos paralelos y los rayos son aproximadamente rectas paralelas perpendiculares a los frentes de onda.

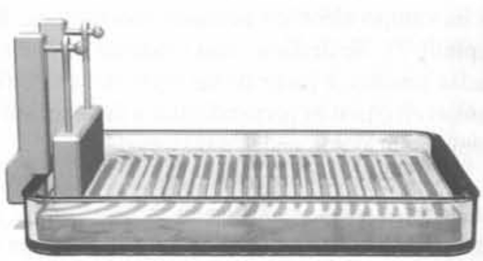
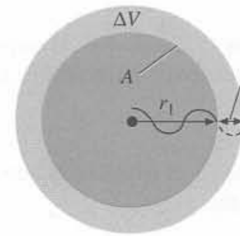


Figura 15.14 Analogía bidimensional de una onda plana que puede generarse en una cubeta de ondas mediante un listón plano que oscila arriba y abajo dentro del agua para producir frentes de onda que son líneas rectas.

La intensidad de una onda tridimensional varía inversamente con el cuadrado de la distancia al foco puntual.

Existe una relación sencilla entre la intensidad de una onda y la energía por unidad de volumen del medio por el que se propaga la onda. Consideremos la onda esférica que acaba de alcanzar el radio r_1 de la figura 15.15. El volumen interior al radio r_1 contiene energía debido a que las partículas en esta región están oscilando con movimiento armónico simple. La región exterior a r_1 no contiene energía porque las ondas todavía no han alcanzado dicha región. Después de un intervalo corto de tiempo Δt, la onda, en su movimiento, sobrepasa r_1 en una distancia corta $\Delta r = v\,\Delta t$. La energía total en el medio se ve incrementada en la energía contenida en la corteza esférica de superficie A, espesor $v\,\Delta t$ y volumen $\Delta V = A\,\Delta r = Av\,\Delta t$. La energía media de la corteza esférica es



Volumen de la corteza = $\Delta V = A\,\Delta r = Av\,\Delta t$

Figura 15.15

$$(\Delta E)_m = \eta_m\,\Delta V = \eta_m A v\,\Delta t$$

El incremento de energía por unidad de tiempo es la potencia que entra en la corteza. Así pues, la potencia media incidente es

$$P_m = \frac{(\Delta E)_m}{\Delta t} = \eta_m A v$$

y la intensidad de la onda es

$$I = \frac{P_m}{A} = \eta_m v \qquad (15.27)$$

Por lo tanto, la intensidad es igual al producto de la velocidad de la onda v por la densidad de energía media η_m. Sustituyendo $\eta_m = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2$ de la ecuación 15.24 (densidad de energía media de una onda sonora) en la expresión anterior resulta

$$I = \eta_m v = \tfrac{1}{2}\,\rho\omega^2 s_0^2 v = \tfrac{1}{2}\,\frac{p_0^2}{\rho v} \qquad (15.28)$$

en donde se ha tenido en cuenta que $s_0 = p_0/(\rho\omega v)$ según la ecuación 15. 22. Este resultado —que la intensidad de una onda sonora es proporcional al cuadrado de la amplitud— es una propiedad general de las ondas armónicas.

El oído humano puede acomodarse a un largo intervalo de intensidad de ondas sonoras, desde 10^{-12} W/m^2 aproximadamente (que normalmente se toma como el umbral de audición) hasta 1 W/m^2 aproximadamente (que produce una sensación dolorosa en la mayoría de las personas). Las variaciones de presión que corresponden a estas intensidades extremas varían aproximadamente desde 3×10^{-5} Pa para el umbral de audición hasta 30 Pa para el umbral de dolor. (Recuérdese que el pascal es un newton por metro cuadrado.) Estas pequeñas variaciones de presión se superponen (sumando o restando) a la presión atmosférica normal cuyo valor es aproximadamente 101 kPa.

Ondas sonoras procedentes de un receptor telefónico propagándose en el aire. Las ondas se han hecho visibles barriendo el espacio delante del receptor con una lámpara que tiene un brillo controlado mediante un micrófono.

EJEMPLO 15.6 | Un altavoz

El diafragma de un altavoz de 30 cm de diámetro vibra con una frecuencia de 1 kHz y una amplitud de 0,020 mm. Suponiendo que las moléculas de aire próximas al diafragma tienen esta misma amplitud de vibración, determinar (*a*) la amplitud de la presión justo enfrente del diafragma, (*b*) la intensidad sonora en esta posición y (*c*) la potencia acústica irradiada. (*d*) Si el sonido se irradia uniformemente en la semiesfera anterior, determinar la intensidad a 5 m del altavoz.

Planteamiento del problema (*a*) y (*b*) La amplitud de la presión se calcula directamente de $p_0 = \rho\omega v s_0$ (ecuación 15.22) y la intensidad sonora de $I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 v$ (ecuación 15.28). (*c*) La potencia irradiada es igual al producto de la intensidad por el área del diafragma. (*d*) El área de una semiesfera de radio r es $2\pi r^2$. Podemos utilizar la ecuación 15.26 haciendo $A = 2\pi r^2$.

(a) La ecuación 15.22 relaciona la amplitud de la presión con la amplitud del desplazamiento, la frecuencia, la velocidad de la onda y la densidad del aire:

$$p_0 = \rho\omega v s_0 = (1{,}29\ \mathrm{kg/m^3})2\pi(10^3\ \mathrm{Hz})(340\ \mathrm{m/s})(2\times10^{-5}\ \mathrm{m}) = \boxed{55{,}1\ \mathrm{N/m^2}}$$

(b) La ecuación 15.28 relaciona la intensidad con estas mismas magnitudes conocidas:

$$I = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 v = \tfrac{1}{2}(1{,}29\ \mathrm{kg/m^3})[2\pi(10^3\ \mathrm{Hz})]^2(2\times10^{-5}\ \mathrm{m})^2(340\ \mathrm{m/s}) = \boxed{3{,}46\ \mathrm{W/m^2}}$$

(c) La potencia es el producto de la intensidad por el área del diafragma:

$$P = IA = (3{,}46\ \mathrm{W/m^2})\pi(0{,}15\ \mathrm{m})^2 = \boxed{0{,}245\ \mathrm{W}}$$

(d) Calcular la intensidad a la distancia $r = 5$ m suponiendo una radiación uniforme en la semiesfera anterior:

$$I = \frac{P_{\mathrm{m}}}{2\pi r^2} = \frac{0{,}245\ \mathrm{W}}{2\pi(5\ \mathrm{m})^2} = \boxed{1{,}56\times10^{-3}\mathrm{W/m^2}}$$

Observación La hipótesis de radiación uniforme en la semiesfera anterior no es muy buena porque la longitud de onda en este caso [$\lambda = v/f = (340\ \mathrm{m/s})/(1000\ \mathrm{s^{-1}}) = 34$ cm] no es grande comparada con el diámetro del altavoz. Existe también cierta radiación en la dirección posterior, como puede observarse situándose detrás de un altavoz.

Los altavoces de un concierto de "rock" pueden emitir con una potencia 100 veces mayor que el altavoz del ejemplo.

***Nivel de intensidad y sensación sonora** Nuestra percepción de la sonoridad no es proporcional a la intensidad sino que varía logarítmicamente. Usaremos, por lo tanto, una escala logarítmica para describir el **nivel de intensidad** de una onda sonora β, el cual se mide en **decibelios** (dB) y se define por

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0} \tag{15.29}$$

DEFINICIÓN — NIVEL DE INTENSIDAD EN dB

en donde I es la intensidad física del sonido e I_0 es un nivel de referencia, que tomaremos como umbral de audición:

$$I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2} \tag{15.30}$$

En esta escala, el umbral de audición es $\beta = 10\log(I_0/I_0) = 0$ dB y el umbral del dolor ($I = 1$ W/m²) es $\beta = 10\log(1/10^{-12}) = 10\log 10^{12} = 120$ dB. Así pues, el intervalo de intensidades físicas de 10^{-12} W/m² a 1 W/m² corresponden a un intervalo de niveles de sensación sonora de 0 dB a 120 dB. La tabla 15.1 relaciona los niveles de intensidad de algunos sonidos comunes.

EJEMPLO 15.7 | Pruebas de sonido

Un material absorbente del sonido atenúa el nivel de sonoridad en 30 dB. ¿En qué factor disminuye la intensidad?

En la tabla 15.1 vemos que por cada 10 dB de disminución del nivel de sensación sonora, la intensidad física disminuye en un factor de 10. Así, si la sonoridad disminuye en 30 dB, la intensidad física disminuye en un factor $10^3 = \boxed{1000}$.

TABLA 15.1 Intensidad física y nivel de intensidad sonora de algunos sonidos comunes ($I_0 = 10^{-12}$ W/m²)

Fuente	I/I_0	dB	Descripción
	10^0	0	Umbral de audición
Respiración normal	10^1	10	Escasamente audible
Rumor de hojas	10^2	20	
Conversación en voz muy baja (a 5 m)	10^3	30	Apenas ruidoso
Biblioteca	10^4	40	
Oficina tranquila	10^5	50	Poco ruidoso
Conversación normal (a 1 m)	10^6	60	
Tráfico denso	10^7	70	
Oficina ruidosa con máquinas; fábrica de tipo medio	10^8	80	
Camión pesado (a 15 m); Cataratas del Niágara	10^9	90	La exposición constante daña al oído
Tren de metro antiguo	10^{10}	100	
Ruido de construcción (a 3 m)	10^{11}	110	Umbral de dolor
Concierto de rock con amplificadores (a 2 m); despegue de un reactor (a 60 m)	10^{12}	120	
Remachadora neumática; ametralladora	10^{13}	130	
Despegue de un reactor (cercano)	10^{15}	150	
Motor de cohete grande (cercano)	10^{18}	180	

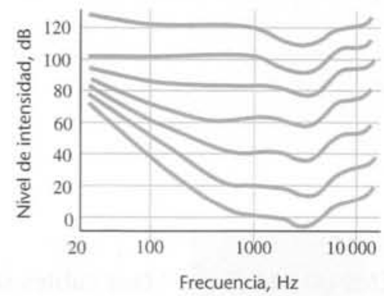


Figura 15.16 Nivel de intensidad en función de la frecuencia para sonidos de igual sensación sonora. La curva inferior está por debajo del umbral de audición del 99 por ciento aproximadamente de la población. La segunda curva inferior constituye aproximadamente el umbral de audición para un cincuenta por ciento de la población.

En realidad, la sonoridad depende de la frecuencia así como del nivel de intensidad en decibelios. La figura 15.16 es un gráfico de este nivel de intensidad en dB en función de la frecuencia para sonidos de igual sonoridad en el oído humano. (En esta figura, la frecuencia se representa en escala logarítmica para abarcar el amplio intervalo de frecuencias de 20 Hz a 10 kHz.) Obsérvese en esta figura que el oído es más sensible a ~ 4 kHz para todos los niveles de intensidad sonora en dB.

EJEMPLO 15.8 | Ladridos de perros

El ladrido de un perro supone alrededor de 1 mW de potencia. (*a*) Si esta potencia se distribuye uniformemente en todas direcciones, ¿cuál es el nivel de intensidad sonora a una distancia de 5 m? (*b*) ¿Cuál sería el nivel de intensidad de dos perros ladrando al mismo tiempo si cada uno de ellos desarrolla una potencia de 1 mW?

Planteamiento del problema El nivel de intensidad sonora se deduce de la intensidad física y ésta de la expresión $I = P/(4\pi r^2)$. Para dos perros, las intensidades físicas se suman.

(a) 1. El nivel de intensidad sonora está relacionado con la intensidad física:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

2. Calcular la intensidad a $r = 5$ m:

$$I = \frac{P_1}{4\pi r^2} = \frac{10^{-3}\text{ W}}{4\pi\,(5\text{ m})^2} = 3{,}18 \times 10^{-6}\text{ W/m}^2$$

3. Utilizar el resultado anterior para determinar el nivel de intensidad sonora a 5 m:

$$\beta_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \log \frac{3{,}18 \times 10^{-6}}{10^{-12}} = \boxed{65{,}0\text{ dB}}$$

(b) Si I_1 es la intensidad de un perro, la intensidad de dos perros es $I_2 = 2I_1$:

$$\beta_2 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 10 \log \frac{2I_1}{I_0} = 10 \log 2 + 10 \log \frac{I_1}{I_0}$$

$$= 10 \log 2 + \beta_1 = 3{,}01 + 65{,}0 = \boxed{68{,}0\text{ dB}}$$

Observación Vemos en este ejemplo que siempre que la intensidad física se duplica, la intensidad sonora se incrementa en 3 dB.

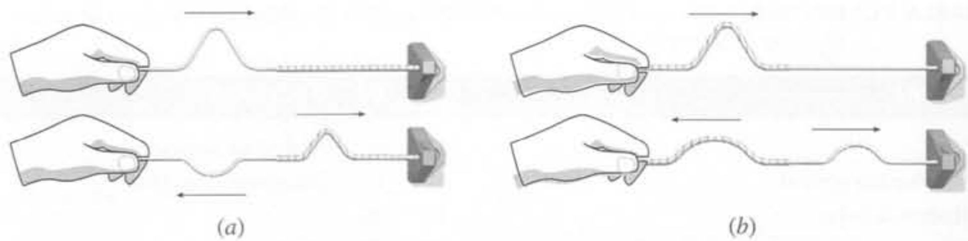


Figura 15.17 (*a*) Un pulso de onda se propaga sobre una cuerda ligera unida a otra más pesada en la cual es menor la velocidad de la onda. El pulso reflejado se invierte, mientras que el transmitido no. (*b*) Un pulso de onda se propaga sobre una cuerda pesada unida a otra más ligera, en la cual es mayor la velocidad. En este caso el pulso reflejado no se invierte.

15.4 Ondas y barreras

Reflexión y refracción

Cuando una onda incide sobre una superficie límite o de separación de dos regiones en las que la velocidad de la onda es diferente, parte de la onda se refleja y parte se transmite. La figura 15.17*a* muestra un pulso sobre una cuerda ligera unida a una cuerda más pesada. En este caso, el pulso reflejado en la superficie límite se invierte. Si la segunda cuerda es más ligera que la primera (figura 15.17*b*), el pulso reflejado no se invierte. En cualquier de estos dos casos, el pulso transmitido no se invierte. Si la cuerda está atada a un punto fijo, el pulso se refleja y se invierte. Si está atada a una cuerda de masa despreciable, el pulso se refleja, pero no se invierte.

EJEMPLO 15.9 | Dos cables soldados

Dos cables de densidades de masa lineal distintas se sueldan uno a continuación del otro y después se estiran bajo una tensión F_T (la tensión es la misma en los dos alambres). La velocidad de una onda en el primer alambre es doble que en el segundo. Cuando una onda armónica que se transmite por el primer alambre llega a la unión de los alambres, la onda reflejada tiene la mitad de amplitud que la onda transmitida. (*a*) Si la amplitud de la onda incidente es A_{in}, ¿cuáles son las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida? (*b*) ¿Qué fracción de la potencia incidente se refleja en la unión y qué fracción se transmite?

Planteamiento del problema Por el principio de conservación de la energía, la potencia incidente en la unión es igual a la potencia reflejada más la potencia transmitida. Cada una de las potencias se expresan en la ecuación 15.18 como una función de la densidad μ, amplitud A, frecuencia ω y velocidad de la onda v (figura 15.18). Las frecuencias angulares de todas las ondas son iguales. Como las ondas reflejada e incidente están en el mismo medio, ambas poseen la misma velocidad v_1. Sabemos que la velocidad en el segundo alambre es $v_2 = \frac{1}{2}v_1$.

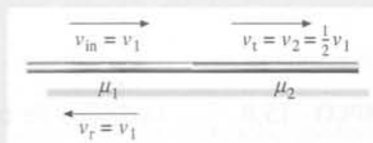


Figura 15.18

(a) 1. Por conservación de la energía, la potencia incidente es igual a la potencia trasmitida más la potencia reflejada:

$$P_{in} = P_t + P_r$$

2. Escribir la ecuación 15.18:

$$P_{in} = \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2v$$

3. Sustituir en el resultado del paso 1 y simplificar: La frecuencia angular es la misma para las tres ondas.

$$\frac{1}{2}\mu_1\omega^2A_{in}^2v_1 = \frac{1}{2}\mu_2\omega^2A_t^2v_2 + \frac{1}{2}\mu_1\omega^2A_r^2v_1$$

$$\mu_1A_{in}^2v_1 = \mu_2A_t^2v_2 + \mu_1A_r^2v_1$$

4. Usando la relación $v = \sqrt{F_T/\mu}$ (ecuación 15.3), sustituir μ_1 y μ_2 por su valor y simplificar. F_T es el mismo a cada lado de la unión entre los cables:

$$\frac{F_T}{v_1^2}A_{in}^2v_1 = \frac{F_T}{v_2^2}A_t^2v_2 + \frac{F_T}{v_1^2}A_r^2v_1$$

$$\frac{A_{in}^2}{v_1} = \frac{A_t^2}{v_2} + \frac{A_r^2}{v_1}$$

5. Sustituir las relaciones $v_2 = \frac{1}{2}v_1$ y $A_r = \frac{1}{2}A_t$, despejar las amplitudes:

$$\frac{A_{in}^2}{v_1} = \frac{A_t^2}{\frac{1}{2}v_1} + \frac{\left(\frac{1}{2}A_t\right)^2}{v_1} = \frac{9}{4}\frac{A_t^2}{v_1}$$

por lo tanto,

$$A_t = \boxed{\frac{2}{3}A_{in}} \quad \text{y} \quad A_r = \boxed{\frac{1}{3}A_{in}}$$

(b) 1. En los pasos 1-4 del apartado (a) se ha demostrado que la potencia es proporcional a A^2/v. Expresar cada una de las tres potencias, usando b como constante de proporcionalidad:

$$P_{in} = b\frac{A_{in}^2}{v_1} \qquad P_t = b\frac{A_t^2}{v_2} \qquad P_r = b\frac{A_r^2}{v_1}$$

2. Usando el resultado del paso 5 del apartado (a), eliminar v_2, A_t y A_r de las expresiones de P_t y P_r:

$$P_t = b\frac{(\frac{2}{3}A_{in})^2}{\frac{1}{2}v_1} = \frac{8}{9}b\frac{A_{in}^2}{v_1} = \boxed{\frac{8}{9}P_{in}}$$

$$P_r = b\frac{(\frac{1}{3}A_{in})^2}{v_1} = \frac{1}{9}b\frac{A_{in}^2}{v_1} = \boxed{\frac{1}{9}P_{in}}$$

Observación La onda reflejada está invertida respecto a la onda incidente, de modo que está desfasada 180º respecto a ella. Mientras que el desplazamiento del trozo de alambre justo a la izquierda de la unión por causa de la onda incidente es y_1, por causa de la onda reflejada es $-(y_1/3)$. Estos desplazamientos se suman (de acuerdo con el principio de superposición que se estudiará en el siguiente capítulo) con un resultado $2y_1/3$ que es igual al desplazamiento que tiene lugar a la derecha de la unión por causa de la onda transmitida. Puede demostrarse que, conocida la relación entre las velocidades de la onda, las amplitudes de las ondas trasmitida y reflejada pueden determinarse teniendo en cuenta que el desplazamiento y la pendiente del alambre deben ser continuos en la unión.

En tres dimensiones, una frontera entre dos regiones de diferente velocidad de onda es una superficie. La figura 15.19 muestra un rayo incidente sobre una de estas superficies límites. Este ejemplo podría ser una onda sonora en el aire que choca sobre una superficie sólida o líquida. El rayo reflejado forma un ángulo con la normal a la superficie igual al que forma el rayo incidente.

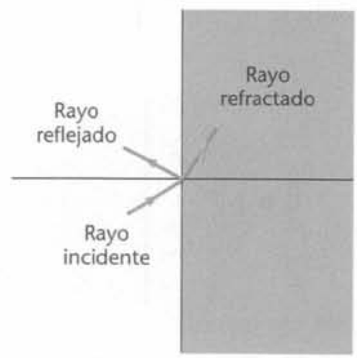


Figura 15.19 Onda incidiendo sobre una superficie límite entre dos medios en los cuales la velocidad de onda difiere. Parte de la onda se refleja y parte se transmite. Se denomina refracción al cambio de dirección del rayo transmitido.

El rayo transmitido se desvía acercándose o alejándose de la normal; lo cual depende de si la velocidad de la onda en el segundo medio es menor o mayor que la que posee en el medio inicial. Esta desviación del rayo transmitido se denomina **refracción**. Cuando la velocidad de la onda en el segundo medio es mayor que en el medio incidente (como ocurre cuando una onda luminosa que se propaga en vidrio o agua se refracta en el aire), el rayo que describe la dirección de propagación se desvía alejándose de la normal, como indica la figura 15.20. Al incrementarse el ángulo de incidencia, crece también el ángulo de refracción, hasta que se alcanza un ángulo crítico de incidencia, para el cual el ángulo de refracción es de 90º. Para ángulos de incidencia superiores al valor crítico, desaparece el rayo refractado, fenómeno que se llama **reflexión interna total**.

La cantidad de energía reflejada por una superficie depende de la clase de superficie. Las paredes, suelos y techos planos son buenos reflectores de las ondas sonoras; mientras que otros materiales porosos y menos rígidos, como la ropa de los paños y tapizados absorben gran cantidad de la energía incidente. La reflexión de las ondas sonoras juega un papel importante en el proyecto de una sala de conferencias, de una biblioteca o un auditorio de música. En una sala de conferencias con muchas superficies planas reflectoras es difícil de entender lo que se dice debido a la multitud de ecos que llegan en instantes diferentes a los oídos del oyente. Para reducir estas reflexiones es corriente colocar sobre las paredes y el techo materiales absorbentes. En una sala de conciertos, se sitúa una placa reflectora detrás de la orquesta y también se cuelgan paneles reflectores del techo para reflejar y dirigir el sonido hacia los oyentes.

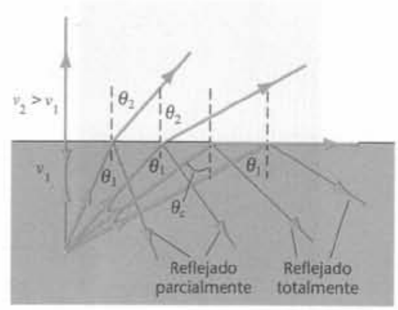


Figura 15.20 La luz procedente de una fuente en el agua se refracta alejándose de la normal cuando entra en el aire. Para ángulos de incidencia por encima de un valor crítico, no hay rayo transmitido, condición conocida como reflexión interna total.

Difracción

Cuando una onda encuentra un obstáculo tiende a rodearlo. Este comportamiento del frente de onda se denomina **difracción**. Casi toda la difracción de una onda se produce en aquella parte del frente de onda que está a una distancia de pocas longitudes de onda de los límites del obstáculo. En aquellas zonas de la onda que están más alejadas, el efecto del obstáculo, es decir la difracción, es imperceptible y la onda se propaga en línea recta en la dirección de los rayos incidentes. Cuando una onda se encuentra con una barrera con una pequeña abertura (un agujero) de unas pocas longitudes de onda de diámetro la parte de la onda que la

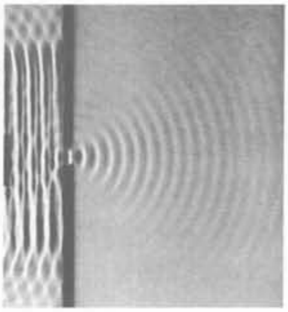


Figura 15.21 Ondas planas en una cubeta de ondas que se encuentran con una barrera que posee una pequeña abertura de unas pocas longitudes de onda de ancho. Más allá de la barrera son las ondas circulares concéntricas respecto a la abertura, como si hubiese un foco puntual en la misma.

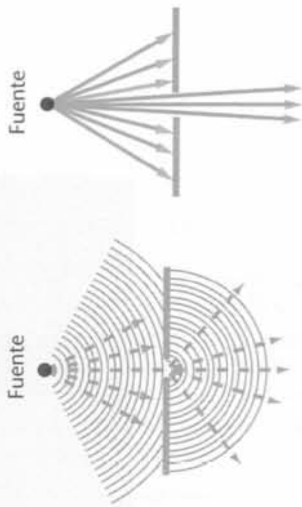


Figura 15.22 Comparación entre las transmisiones que sufren en una abertura estrecha situada en una barrera (*a*) un haz de partículas y (*b*) una onda. En (*a*) las partículas transmitidas se encuentran confinadas en un ángulo estrecho. En (*b*) la abertura actúa como un foco puntual de ondas que se propagan en un ángulo mucho más amplio que el correspondiente a las partículas en (*a*).

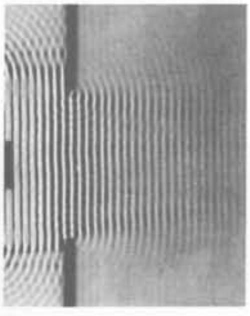


Figura 15.23 Ondas planas en una cubeta de ondas que se encuentran con una barrera que posee una abertura mucho mayor que λ. La onda continúa propagándose hacia adelante; sólo se observa una pequeña desviación en las regiones a ambos lados de la abertura.

atraviesa pasa toda ella a una distancia de pocas longitudes de onda de los bordes. Así, los frentes de onda planos se curvan y se propagan adoptando la forma circular o esférica (figura 15.21). En contraste, si un haz de partículas incide sobre un obstáculo con una abertura, las *partículas* que lo atraviesan no cambian su dirección (figura 15.22) La difracción es una de las características fundamentales que distingue las ondas de las partículas. Demostraremos cómo surge la difracción al estudiar la interferencia y difracción de la luz en el capítulo 35.

Aunque las ondas que encuentran un obstáculo o abertura siempre se curvan, o difractan, la magnitud de este fenómeno depende de la relación que existe entre su longitud de onda y el tamaño del obstáculo o abertura. Si la longitud de onda es grande en relación con la abertura, como en la figura 15.21, los efectos de difracción son grandes y las ondas se dispersan al atravesar la abertura como si procediesen de una fuente puntual localizada en la misma abertura. En cambio, si la longitud de onda es pequeña en relación con la abertura, el efecto de difracción es pequeño como indica la figura 15.23. Cerca de los bordes de la abertura los frentes de onda se distorsionan y las ondas se curvan ligeramente. Sin embargo, los frentes de ondas no se ven afectados en su mayor parte y la sondas se propagan en líneas rectas, como si se tratara de un haz de partículas. Esta aproximación de propagación de las ondas en líneas rectas en la dirección de los rayos y sin difracción se conoce con el nombre de **aproximación de rayos**. Los frentes de onda se distorsionan *cerca* (entendemos por cerca, una distancia de pocas longitudes de onda del borde del obstáculo) de los bordes del obstáculo que bloquea parte del frente de onda.

Como las longitudes de onda del sonido audible están dentro de un margen que va desde algunos centímetros hasta varios metros y son con frecuencia grandes en comparación con las aberturas o los obstáculos (puertas o ventanas, por ejemplo), la difracción de las ondas sonoras resulta ser un fenómeno común. Por otra parte, las longitudes de onda de la luz visible están dentro del intervalo de 4×10^{-7} a 7×10^{-7} m aproximadamente. Como estas ondas son pequeñas en comparación con el tamaño de los objetos y aberturas ordinarios, la difracción de la luz no es observable fácilmente, de forma que la luz parece viajar en línea recta. Sin embargo, la difracción de la luz es un fenómeno importante que estudiaremos con detalle en el capítulo 35.

Los efectos de la difracción imponen una limitación a la capacidad para situar o localizar objetos pequeños o para identificar sus detalles más finos mediante la reflexión de ondas sobre ellos. No se produce ninguna reflexión apreciable de las ondas a no ser que el objeto sea de un tamaño por lo menos del orden de la longitud de onda. Así pues, no puede observarse ningún detalle a una escala menor que la longitud de onda utilizada. Si se utilizan ondas de longitud de onda λ para localizar un objeto, su posición podrá conocerse sólo con un margen de $\pm\lambda$.

Las ondas sonoras de frecuencias mayores a 20 000 Hz se llaman **ondas ultrasónicas**. Debido a sus longitudes de onda muy cortas pueden emitirse y reflejarse en objetos pequeños. Los murciélagos emiten y detectan frecuencias de hasta 120 000 Hz, correspondientes a una longitud de onda de 2,8 mm, que utilizan para localizar pequeñas presas como mariposas nocturnas. Los sistemas de localización por eco, llamados sonars (iniciales de "*so*und *n*avigation *a*nd *r*anging"; cuyo significado es, navegación y localización por el sonido), se utilizan para detectar perfiles de objetos sumergidos con ondas sonoras. Las frecuencias utilizadas por los detectores de peces disponibles en el mercado están en un rango de 25 a 200 kHz. Las marsopas hacen chasquidos de localización de este mismo rango de frecuencias. Se hacen pasar ultrasonidos a través del cuerpo humano y la información sobre la frecuencia e intensidad de las ondas transmitidas y reflejadas se procesa para construir una imagen tridimensional llamado sonograma o ecografía.

15.5 Efecto Doppler

Cuando un foco productor de ondas y un receptor se están moviendo uno respecto al otro, la frecuencia emitida por el receptor no es la misma que la emitida por el foco. Cuando se están acercando entre sí, la frecuencia observada es mayor que la del foco, mientras que resulta menor si se están alejando. Esto se denomina **efecto Doppler**. Un ejemplo familiar es el cambio de tono de la bocina de un coche cuando éste se acerca o se aleja de nosotros.

En el análisis que sigue, todos los movimientos se consideran relativos al medio. Consideremos que el foco se mueve con una velocidad u_f, tal como se muestra en las figuras 15.24*a* y *b*, y un receptor estacionario. El foco tiene una frecuencia f_f (y un periodo $T_f = 1/f_f$). La frecuencia del receptor f_r, el número de ondas que pasan por el receptor por unidad de tiempo, es

$$f_r = \frac{v}{\lambda} \quad \text{(receptor estacionario)} \tag{15.31}$$

en donde v es la velocidad de la onda y λ su longitud de onda (la distancia entre dos crestas sucesivas). Para conocer f_r hay que determinar, en primer lugar, λ. Tal como se muestra en la figura 15.24*c*, el foco, situado en el punto 5, emite una onda y en un instante T_f inmediatamente posterior emite una segunda onda. Mientras la primera onda recorre una distancia vT_f el foco se mueve desde el punto 5 al punto 6 una distancia u_fT_f. Por lo tanto, en el momento en que se emite la segunda onda, la longitud de onda λ es la distancia entre el foco y el frente de onda, es decir, $\lambda = \lambda_{\text{detrás}} = (v + u_f)T_f$ por detrás de la fuente y $\lambda = \lambda_{\text{delante}} = (v - u_f)T_f$ por

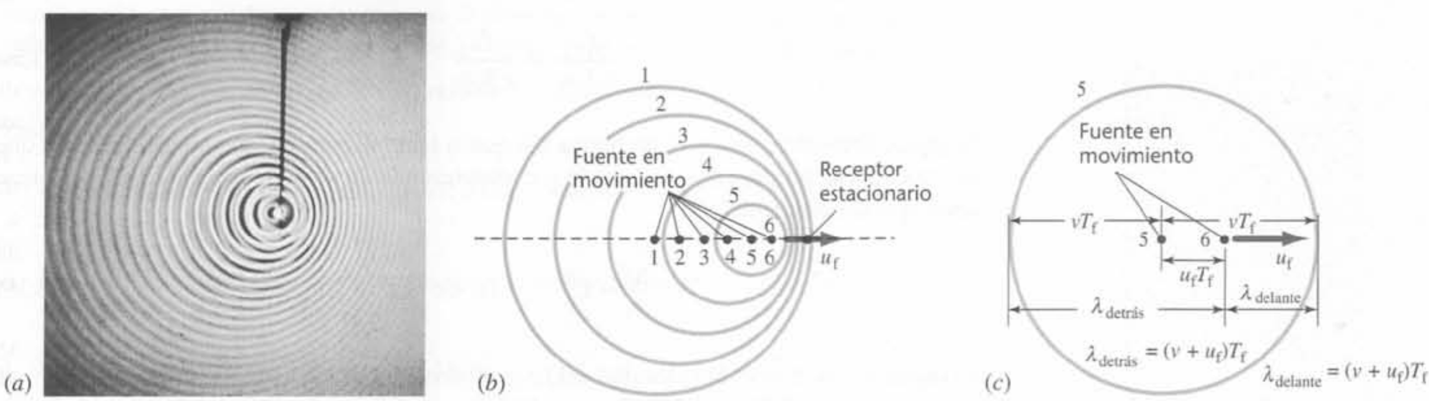


Figura 15.24 (*a*) Ondas en una cubeta de ondas producidas por un foco puntual que se mueve hacia la derecha. Los frentes de onda se encuentran más próximos delante del foco y más separados detrás de él. (*b*) Frentes de onda sucesivos emitidos por un foco puntual que se mueve hacia la derecha con velocidad u_f. Cada uno de los frentes numerados fue emitido cuando el foco estaba en la posición a la que corresponde el mismo número. (*c*) Durante el tiempo T_f la fuente se mueve una distancia u_fT_f y el 5º frente se mueve una distancia vT_f. Delante de la fuente la longitud de onda es $\lambda_{\text{delante}} = (v - u_f)T_f$ y detrás de ésta, $\lambda_{\text{detrás}} = (v + u_f)T_f$.

delante de ésta, suponiendo que $u_f < v$. (Si $u_f \geq v$, no hay ningún frente de onda por delante del foco). Estas dos relaciones pueden expresarse como

$$\lambda = (v \pm u_f)T_f = \frac{v \pm u_f}{f_f} \tag{15.32}$$

en donde se ha sustituido $1/f_f$ por T_f. Delante del foco, la longitud de onda es más pequeña, por lo que se aplica en 15.32 el signo menos. Detrás del foco se aplica el signo más. Sustituyendo λ en la ecuación 15.31 obtenemos

$$f_r = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v \pm u_f} f \qquad \text{(receptor parado)} \tag{15.33}$$

Cuando el receptor se mueve relativo al medio, la frecuencia que detecta difiere de la frecuencia emitida porque el movimiento del receptor afecta al número de ondas que detecta en un determinado intervalo de tiempo. Sea un receptor que se mueve con velocidad u_r y sea T_r el tiempo que transcurre entre que llegan dos crestas consecutivas. Durante el tiempo entre la llegada de las dos crestas, el receptor se mueve u_rT_r, mientras que las crestas se habrán desplazado vT_r. Si el receptor se mueve en la dirección opuesta a la de la onda (figura 15.25), durante el tiempo T_r la longitud de onda λ es la distancia que se mueve cada cresta más la que se mueve el receptor, es decir $\lambda = vT_r + u_rT_r$, o bien, $T_r = \lambda/((v + u_r)$. [Si el receptor se mueve en la misma dirección que la onda, $vT_r - \lambda = u_rT_r$, o bien $T_r = \lambda/((v - u_r)]$. Dado que $f_r = 1/T_r$, tenemos

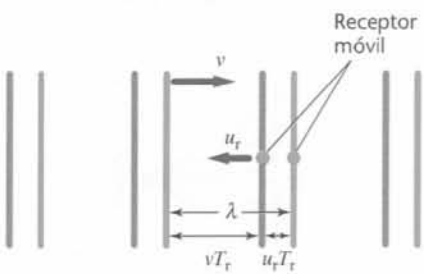


Figura 15.25

$$f_r = \frac{1}{T_r} = \frac{v \pm u_r}{\lambda} \tag{15.34}$$

en donde si el receptor se mueve en el mismo sentido que la onda, la frecuencia recibida es menor y aplicamos el signo negativo. Si, en cambio, el receptor se mueve en sentido opuesto al de la onda, la frecuencia es mayor y elegimos el signo positivo. Sustituyendo λ de la ecuación 15.32 se obtiene

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f \tag{15.35a}$$

La elección correcta del signo se determina recordando que la frecuencia tiende a aumentar cuando el foco se mueve hacia el receptor o cuando éste se mueve hacia el foco. Por ejemplo, si el receptor se mueve hacia el foco en el numerador se selecciona el signo positivo, lo cual tiende a incrementar la frecuencia recibida, y si el foco se aleja del receptor se aplica al denominador el signo positivo, lo cual induce que la frecuencia recibida sea menor. La ecuación 15.35a adquiere un aspecto más simétrico si se expresa de la forma

$$\frac{f_r}{v \pm u_r} = \frac{f_f}{v \pm u_f} \tag{15.35b}$$

Se puede demostrar (véase el problema 89) que si tanto u_f como u_r son mucho menores que la velocidad de propagación de la onda v, el desplazamiento de la frecuencia $\Delta f = f_r - f_f$ viene dado aproximadamente por

$$\frac{\Delta f}{f_f} \approx \pm\frac{u}{v} \qquad (u << v) \tag{15.36}$$

en donde $u = u_f \pm u_r$ es la velocidad del foco relativa al receptor.

Las ecuaciones 15.31 – 15.36 *sólo* son válidas en el sistema de referencia del medio. En un sistema de referencia donde el medio se mueve (por ejemplo, un sistema de referencia fijo con la superficie terrestre donde el medio sea el aire y éste se mueva, es decir, sople el viento) la velocidad de propagación de la onda v se sustituye por $v' = v \pm u_v$ donde u_v es la velocidad del viento relativo a la superficie terrestre.

EJEMPLO 15.10 | Tocando la bocina

La frecuencia de la bocina de un coche parado es 400 Hz. Determinar (*a*) la longitud de onda del sonido y (*b*) la frecuencia observada si el coche se mueve con una velocidad $u_f = 34$ m/s (aproximadamente 122 km/h) a través del aire en reposo hacia un receptor estacionario. Tomar como velocidad del sonido en el aire el valor 340 m/s. (*c*) Determinar la frecuencia observada si el coche está parado y un receptor se mueve con velocidad $u_r = 34$ m/s hacia el coche.

Planteamiento del problema (*a*) Las ondas de delante de la fuente se comprimen y por lo tanto, se utiliza el signo menos en la ecuación 15.32. (*b*) Se calcula la frecuencia a partir la ecuación 15.35a. (*c*) Para un receptor móvil, se usan las mismas ecuaciones que en los apartados (*a*) y (*b*).

(a) Usando la ecuación 15.32, calcular la longitud de onda delante del coche. Delante del foco, la longitud de onda es más pequeña, por lo tanto elegimos el signo en consonancia:

$$\lambda = \frac{v - u_f}{f_f} = \frac{340 \text{ m/s} - 34 \text{ m/s}}{400 \text{ Hz}} = \boxed{0{,}765 \text{ m}}$$

(b) Usando la ecuación 15.35a, despejar la frecuencia recibida:

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f = \frac{v + 0}{v - u_f} f_f$$

$$= \left(\frac{340}{340 - 34}\right)(400 \text{ Hz}) = \boxed{444 \text{ Hz}}$$

(c) 1. Usando la ecuación 15.32, calcular la longitud de onda en la proximidad del receptor:

$$\lambda = \frac{v \pm u_f}{f_f} = \frac{340 \text{ m/s} \pm 0}{400 \text{ Hz}} = \boxed{0{,}850 \text{ m}}$$

2. La frecuencia recibida viene dada por la ecuación 15.35a. El foco se aproxima al receptor, por lo tanto la frecuencia es mayor. Elegir el signo en concordancia con este hecho:

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f = \frac{u + u_r}{v \pm 0} f_f = \left(1 + \frac{u_r}{v}\right) f_f$$

$$= \left(1 + \frac{34}{340}\right)(400 \text{ Hz}) = \boxed{440 \text{ Hz}}$$

Observación La frecuencia f_r también puede obtenerse a partir de la ecuación 15.34.

Ejercicio Cuando un tren que se mueve a 90 km/h se aproxima a un observador estacionario, hace sonar su bocina con una frecuencia de 630 Hz. No hay viento. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda del sonido delante del tren? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia percibida por el observador? (Usar 340 m/s para la velocidad del sonido.) (*Respuestas* (*a*) $\lambda = 0{,}5$ m, (*b*) $f_r = 680$ Hz.)

EJEMPLO 15.11 | Otra bocina de coche

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

La relación entre la frecuencia de una nota y la frecuencia del semitono por encima de ella en la escala diatónica es aproximadamente 15:16. ¿Qué velocidad tiene un coche si su bocina disminuye en un semitono al pasar frente a un observador parado? No hay viento. (Usar 340 m/s para la velocidad del sonido.)

Planteamiento del problema Sea u_f la velocidad del coche y f_f la frecuencia original. La frecuencia percibida f_r cuando el coche se acerca al observador es mayor que f_f y la frecuencia observada cuando el coche se aleja, f_r' es menor que f_f. Considerando que $f_r'/f_f = 15/16$ despejar u.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
1. Expresar la frecuencia observada cuando el coche se aproxima en función de f_f.	$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f = \frac{v}{v - u_f} f_f$
2. Expresar la frecuencia observada cuando el coche se aleja en función de f_f.	$f_r' = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f = \frac{v}{v - u_f} f_f$
3. Establecer que el cociente f_r'/f_f es igual a 15/16.	$\frac{f_r'}{f_r} = \frac{v - u_f}{v + u_f} = \frac{15}{16}$
4. Despejar u_f.	$u_f = 0{,}0323v = \boxed{39{,}5 \text{ km/h}}$

Observación La longitud de onda del sonido detrás del coche es mayor que la longitud de onda delante del coche. Asimismo 1m/s = 3,6 km/h.

Otro ejemplo familiar de efecto Doppler es el radar usado por la policía para medir la velocidad de un vehículo. Las ondas electromagnéticas emitidas por el transmisor del radar chocan con el vehículo en movimiento. Cuando las ondas se reflejan en el coche, éste actúa a la vez como receptor y como foco emisor en movimiento. Como las ondas electromagnéticas se mueven a la velocidad de la luz, $v = 3 \times 10^8$ m/s, la condición $u << v$ se cumple y para calcular el desplazamiento Doppler se usa la ecuación 15.36.

EJEMPLO 15.12 | El radar de la policía

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

La unidad de radar de un coche policía estacionario emite ondas electromagnéticas de frecuencia f_f que se propagan a la velocidad de la luz, c. Las ondas se reflejan en un coche que se mueve a la velocidad u alejándose del coche policía. Determinar u en función de f_f y Δf, donde Δf es la diferencia de frecuencias entre f_f y f_r', la frecuencia recibida en el coche de policía.

Planteamiento del problema La onda del radar choca contra el coche con frecuencia f_r. Esta frecuencia es menor que f_f porque el coche se mueve alejándose del foco. El desplazamiento de la frecuencia viene dado por la ecuación 15.36. El coche actúa entonces como un foco móvil que emite ondas de frecuencia f_r. El coche policía detecta ondas de frecuencia $f_r' < f_r$ porque el foco (el coche circulando) se aleja del coche de policía. La diferencia de frecuencia es $f_r - f_s$.

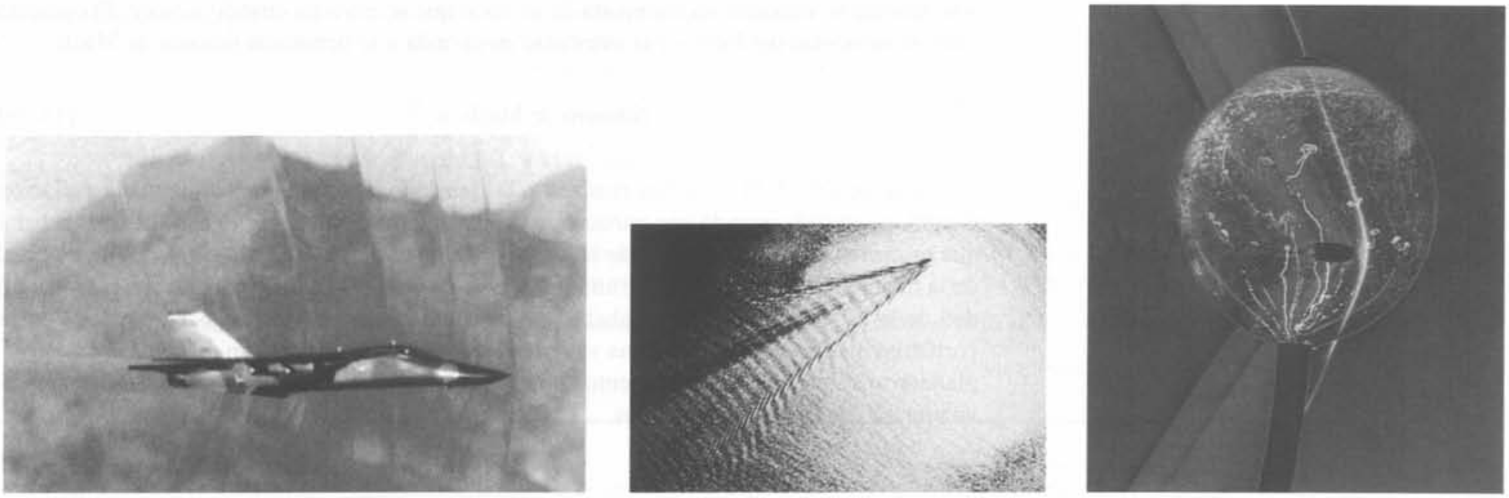
Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
1. La unidad de radar ha de determinar la velocidad únicamente a partir de lo que emite y de lo que recibe.	La unidad de radar debe determinar u en función de f_f y f_r'. Tal como está escrita la ecuación 15.36, despejamos u en función de f_f y de $\Delta f = f_r' - f_f$.
2. El desplazamiento de la frecuencia Δf es igual a la suma del desplazamiento de la frecuencia cuando la onda va hacia el vehículo $\Delta f_1 = f_r - f_f$ y el desplazamiento de la frecuencia cuando la onda vuelve $\Delta f_2 = f'_r - f_r$.	$\Delta f = \Delta f_1 + \Delta f_2$
3. Usando la ecuación 15.36, sustituir la diferencia de frecuencias del paso 2.	$\Delta f = -\frac{u}{c} f_f - \frac{u}{c} f_r = -\frac{u}{c}(f_f + f_r)$
4. De nuevo utilizando 15.36, despejar f_r en función de f_f.	$\frac{\Delta f_1}{f_f} = -\frac{u}{c}$ por lo tanto $f_r = \left(1 - \frac{u}{c}\right) f_f$
5. Sustituir el resultado del paso 4 en el del paso 3 y simplificar:	$\Delta f = -\frac{u}{c}\left(2 - \frac{u}{c}\right) f_f$
6. u/c es despreciable frente a 2. Simplificar el resultado del paso 5 utilizando este hecho y despejar u, obteniendo una expresión en función de f_f y de Δf.	$\Delta f = -2 f_f \frac{u}{c}$ por lo tanto $u = -\frac{\Delta f}{2 f_f} c = \boxed{\frac{\lvert\Delta f\rvert}{2 f_f} c}$

Observación La diferencia de frecuencias entre las dos ondas de frecuencia tan parecida es fácil de medir porque las dos ondas interfieren produciendo otra onda cuya amplitud oscila con la frecuencia $\lvert\Delta f\rvert$, que se denomina frecuencia de pulsación. La interferencia y la pulsación se analizan en el capítulo 16.

Ejercicio Calcular Δf si $f_f = 1{,}5 \times 10^9$ Hz, $c = 3 \times 10^8$ m/s y $u = 50$ m/s. (*Respuesta* $\Delta f = 500$ Hz.)

El desplazamiento Doppler y la relatividad En el ejemplo 15.10 (y en las ecuaciones 15.33, 15.34 y 15.35) hemos visto que la magnitud del desplazamiento Doppler de la frecuencia depende de si es la fuente o el receptor lo que se mueve respecto al medio. En el caso del sonido, estas situaciones son físicamente diferentes. Por ejemplo, si una persona se mueve respecto al aire en reposo, parece notar que el aire se desplaza en sentido contrario. En su propio sistema de referencia existe un viento. En el caso de las ondas sonoras en el aire, podemos decir que la fuente o el receptor se mueven especificando si existe un viento en el sistema de referencia de uno o del otro. Sin embargo, la luz y otras ondas electromagnéticas se propagan a través del espacio vacío, en el cual no hay medio alguno. Es decir, no existe "un viento" que nos diga si es la fuente o el receptor el que se mueve. De acuerdo con



(a) (b) (c)

(*a*) Ondas de choque producidas por un avión supersónico. (*b*) Ondas de proa producidas por un bote. (*c*) Ondas de choque producidas por una bala que atraviesa un globo de helio.

la teoría de la relatividad de Einstein, el movimiento absoluto no puede detectarse y todos los observadores miden la misma velocidad c para la luz independientemente de su movimiento respecto al foco. Así, la ecuación 15.35 no es válida para el desplazamiento Doppler aplicado a la luz. Al calcular el efecto Doppler relativista debemos introducir dos modificaciones. En primer lugar, la velocidad de las ondas que se cruzan con un receptor es siempre c, independientemente del estado de movimiento del receptor. En segundo lugar, el intervalo de tiempo entre la emisión de dos ondas sucesivas, que es $T_f = 1/f_f$ en el sistema de referencia de la fuente, es distinto en el sistema de referencia del receptor cuando éstos se encuentran en movimiento relativo debido a la dilatación relativista del tiempo y la contracción relativista de la longitud (ecuaciones R.9 y R.3). (En el capítulo 39 abordaremos el efecto Doppler relativista). El resultado es que la frecuencia percibida depende sólo de la velocidad relativa de aproximación o alejamiento u y está relacionada con la frecuencia emitida por

$$f_r = \sqrt{\frac{c \pm u}{c \mp u}}\, f_f \qquad (15.37)$$

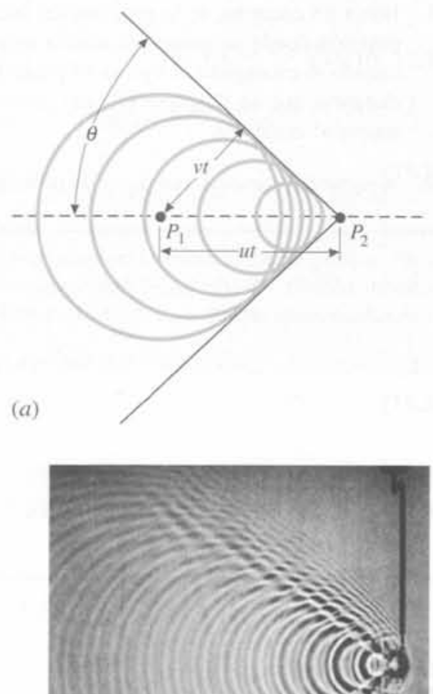
Los signos se eligen de modo que dan un desplazamiento hacia una frecuencia mayor cuando el foco y el receptor se aproximan y viceversa. (Los signos superiores se usan en el caso de que el foco y el receptor se aproximen, y los signos inferiores se usan si se alejan.) Análogamente, cuando $u << c$, $f/f_0 \approx 1 \pm u/c$, tal como se da en la ecuación 15.36.

Ondas de choque

En nuestra deducción de las expresiones para el desplazamiento Doppler, hemos supuesto que la velocidad u del foco o del receptor es menor que la velocidad de la onda v. Si un foco se mueve con una velocidad mayor que la velocidad de propagación de la onda, frente al foco no habrá ondas. En realidad, las ondas se concentran detrás del foco y forman lo que se denomina una onda de choque. En el caso de las ondas sonoras, por ejemplo, cuando la onda de choque llega al receptor se percibe como un estampido.

La figura 15.26 muestra un foco situado originalmente en el punto P_1, que se mueve hacia la derecha con velocidad u. Después de un tiempo t, la onda emitida desde el punto P_1 habrá recorrido una distancia vt. El foco habrá recorrido a su vez una distancia ut y estará en el punto P_2. La recta tangente desde esta nueva posición del foco al frente de onda emitido cuando estaba en P_1 forma un ángulo θ con el trayecto del foco, dado por

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{vt}{ut} = \frac{v}{u} \qquad (15.38)$$



(a)

(b)

Figura 15.26 (*a*) Fuente que con una velocidad u que es mayor que la velocidad de onda v. La envolvente de los frentes de onda forma un cono con el foco en su vértice. (*b*) Ondas en una cubeta experimental producidas por un foco que se mueve con una velocidad $u > v$.

Así, la onda de choque está confinada en un cono que se estrecha cuando u crece. El cociente entre la velocidad del foco u y la velocidad de la onda v se denomina número de Mach:

$$\text{Número de Mach} = \frac{u}{v} \tag{15.39}$$

La ecuación 15.38 se aplica también a la radiación electromagnética llamada radiación Cerenkov, emitida cuando una partícula cargada se mueve en un medio con una velocidad u que es mayor que la velocidad v de la luz en dicho medio. (De acuerdo con la teoría especial de la relatividad es imposible que una partícula se mueva con mayor rapidez que c, la velocidad de la luz en el vacío. Sin embargo, en un medio como el vidrio, los electrones y otras partículas pueden moverse con una velocidad mayor que la de la luz en dicho medio.) El resplandor azul que rodea los elementos combustibles utilizados en los reactores nucleares es un ejemplo de radiación Cerenkov.

EJEMPLO 15.13 | El estampido sónico

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Un avión supersónico se encuentra sobre un punto P volando hacia el este a una altura de 15 km. El estampido sónico se oye en el punto P cuando el avión está a 22 km al este de dicho punto. ¿Cuál es la velocidad del avión supersónico?

Planteamiento del problema La velocidad del avión está relacionada con el seno del ángulo de Mach (ecuación 15.38). Dibujar un esquema que ayude a determinar el seno del ángulo de Mach.

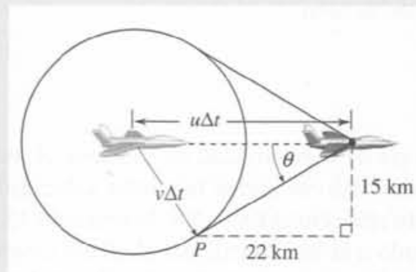


Figura 15.27

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	**Respuestas**
1. Hacer un esquema de la posición del avión (figura 15.27) tanto en la posición donde se generó el sonido como en la posición que ocupa cuando el estampido se oye en el punto P. Señalar, en el esquema, la distancia que se desplaza la onda sonora $v\Delta t$ y la distancia que se mueve el avión $u\Delta t$.	
2. A partir del esquema anterior y de la ecuación 15.38, calcular u.	$\text{tg}\ \theta = \frac{15\ \text{km}}{22\ \text{km}}$ es decir, $\theta = 34{,}3°$ $\text{sen}\ \theta = \frac{v\Delta t}{u\Delta t} = \frac{v}{u}$ y despejando u, $u = \frac{v}{\text{sen}\ \theta} = \boxed{604\ \text{m/s}}$

Resumen

1 En el movimiento ondulatorio, la energía y el momento lineal se transportan de un punto a otro del espacio sin transportar materia.

2 La relación $v = f\lambda$ es válida para todas las ondas armónicas.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Ondas transversales y longitudinales	En las ondas transversales, como las ondas en una cuerda, la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación. En las ondas longitudinales, como las sonoras, la perturbación tiene la dirección de la propagación.	
2. Velocidad de las ondas	La velocidad de una onda v depende de la densidad y de las propiedades elásticas del medio. Es independiente del movimiento de la fuente de las ondas.	
Ondas sobre una cuerda	$v = \sqrt{F_T/\mu}$	(15.3)
Ondas sonoras	$v = \sqrt{B/\rho}$	(15.4)

Ondas sonoras en un gas

$$v = \sqrt{\gamma RT/M} \tag{15.5}$$

donde T es la temperatura absoluta,

$$T = t_C + 273 \tag{15.6}$$

R es la constante universal de los gases,

$$R = 8{,}314 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \tag{15.7}$$

M es la masa molar del gas, que para el aire es 29×10^{-3} kg/mol, y γ es una constante que depende del tipo de gas. Para un gas diatómico como el aire, $\gamma = 1{,}4$. Para un gas monoatómico como el helio, $\gamma = 1{,}67$.

Ondas electromagnéticas — La velocidad de las ondas electromagnéticas el vacío es una constante universal.

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

***3. Ecuación de ondas**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.9b}$$

4. Ondas armónicas

Función de onda

$$y(x, t) = A \text{ sen } (kx \pm \omega t) \tag{15.13}$$

en donde A es la amplitud, k el número de onda y ω la frecuencia angular. Se usa el signo – cuando la onda se mueve en la dirección positiva de x, y el signo + cuando la onda se mueve en la dirección negativa de x.

Número de onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{15.12}$$

Frecuencia angular

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{15.15}$$

Velocidad

$$v = f\lambda = \frac{\omega}{\kappa} \tag{15.10, 15.14}$$

Energía — La energía de una onda armónica es proporcional al cuadrado de la amplitud.

Potencia de las ondas sobre una cuerda

$$P_m = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2 \tag{15.18}$$

5. Ondas armónicas sonoras — Las ondas sonoras pueden considerarse, o bien ondas de desplazamiento, o bien ondas de presión. En una onda sonora armónica, la amplitud de presión y el desplazamiento están desfasados 90º. El oído humano es sensible a ondas sonoras de frecuencia comprendidas en el intervalo de 20 Hz a 20 kHz aproximadamente.

Amplitudes — La amplitud de presión está relacionada con la amplitud de desplazamiento por

$$p_0 = \rho\omega v s_0 \tag{15.22}$$

en donde ρ es la densidad del medio.

Densidad de energía

$$\eta_m = \frac{(\Delta E)_m}{\Delta V} = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 \tag{15.24}$$

6. Intensidad — La intensidad de una onda es la potencia media por unidad de área

$$I = \frac{P_m}{A} \tag{15.25}$$

Densidad de energía media η_m de una onda sonora

$$I = \eta_m v = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 v = \tfrac{1}{2}\frac{p_0^2}{\rho v} \tag{15.28}$$

*Nivel de intensidad (sonoridad), β en dB. — Los niveles de intensidad de los sonidos se miden en una escala logarítmica.

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \tag{15.29}$$

en donde $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 es aproximadamente el umbral de audición.

7. Reflexión y refracción — Cuando una onda incide sobre una superficie límite que separa dos regiones de diferente velocidad de onda, una parte de la onda se refleja y otra parte se transmite.

8. Difracción	Si un frente de ondas se ve parcialmente obstruido por un obstáculo, en la región posterior del obstáculo la parte no obstruida del frente se difracta (se curva).	
Aproximación de rayo	Si un frente de ondas se ve parcialmente obstruido por un obstáculo, casi toda la difracción se da en aquella zona del frente de ondas que pasa a una distancia de pocas longitudes de onda del borde. En aquellas zonas del frente que pasan más lejos del borde, la difracción es despreciable y la onda se propaga en líneas rectas en la dirección de los rayos incidentes.	
9. Efecto Doppler	Cuando un foco y un receptor del sonido están en movimiento relativo, la frecuencia recibida f_r es mayor que la frecuencia del foco f_f si su separación disminuye y menor si su separación aumenta.	
Foco móvil	$\lambda = \frac{v \pm u_f}{f_f}$	**(15.32)**[1]
Receptor móvil	$f_r = \frac{v \pm u_r}{\lambda}$	**(15.34)**[1]
Foco y/o receptor móvil	$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f \quad \text{o} \quad \frac{f_r}{v \pm u_r} = \frac{f_f}{v \pm u_f}$	**(15.35)**[1]
	Elegir los signos que conducen a un aumento del desplazamiento de la frecuencia si se aproxima el foco o el receptor, y viceversa.	
Pequeñas velocidades de foco o receptor	$\frac{\Delta f}{f_f} \approx \pm \frac{u}{v} \qquad (u << v)$	**(15.36)**[1]
Desplazamiento Doppler relativista	$f_r = \sqrt{\frac{c \pm u}{c \mp u}} f_f$	**(15.37)**
	Elegir los signos que conducen a un aumento del desplazamiento de la frecuencia si se aproxima el foco o el receptor, y viceversa.	
10. Ondas de choque	Cuando la velocidad del foco es mayor que la velocidad de la onda, las ondas de detrás del foco están confinadas en un cono de ángulo θ dado por	
Ángulo de Mach	$\text{sen}\ \theta = \frac{v}{u}$	**(15.38)**
Número de Mach	$\text{Número de Mach} = \frac{u}{v}$	**(15.39)**

[1] Las ecuaciones comprendidas entre la 15.32 y la 15.36 sólo son válidas en el sistema de referencia del medio. Si el medio se mueve, la velocidad de propagación de la onda v tiene que reemplazarse por $v' = v \pm u_m$, donde u_m es la velocidad del medio.

Problemas

- ● Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- ●● Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- ●●● Desafiante, para alumnos avanzados.
- SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual.*
- iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.
- iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

A menos que se indique lo contrario, el valor de la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s.

Problemas conceptuales

1 • SSM Una cuerda cuelga verticalmente del techo. Cuando las ondas se mueven de abajo hacia arriba por la cuerda, ¿lo hacen más rápidamente, más lentamente o a la misma velocidad que las ondas que se mueven de arriba hacia abajo? Razonar la respuesta.

2 • Un tren de ondas atraviesa un punto de observación. En este punto, el tiempo entre crestas sucesivas es 0,2 s. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? (*a*) La longitud de onda es 5 m. (*b*) La frecuencia es 5 Hz. (*c*) La velocidad de propagación es 5 m/s. (*d*) La longitud de onda es 0,2 m. (*e*) No hay suficiente información para justificar las afirmaciones anteriores.

3 • Verdadero o falso: La energía de una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda.

4 • Una cuerda cuelga verticalmente. Se sacude el extremo libre de atrás hacia adelante, generando un tren de ondas sinusoidales. La longitud de onda en la parte superior, ¿es igual, menor o mayor que en el extremo inferior?

5 • SSM El chasquido del látigo lo produce la velocidad de la punta que rompe la barrera del sonido. Explicar cómo la forma del látigo hace posible que la punta del mismo se mueva mucho más rápido que la mano que lo mueve.

6 • Verdadero o falso: Un sonido de 60 dB tiene una intensidad doble a la de un sonido de 30 dB.

7 • Si la fuente y el receptor están en reposo relativo uno respecto al otro pero el medio donde se propaga la onda se mueve respecto a ambos, ¿existirá desplazamiento Doppler en la frecuencia?

8 • La frecuencia de la bocina de un coche es f_0. ¿Qué frecuencia se observa si tanto el coche como el observador están en reposo, pero un viento sopla hacia el observador? (*a*) f_0. (*b*) Mayor que f_0. (*c*) Menor que f_0. (*d*) Puede ser mayor o menor que f_0. (*e*) Puede ser f_0 o mayor que f_0 según los valores relativos de la velocidad del viento y la velocidad del sonido.

9 •• SSM Frecuentemente las estrellas se observan en pares que giran alrededor de su centro de masas común. Si una de las estrellas es un agujero negro, es invisible. Explicar cómo la existencia de este agujero negro puede deducirse de la luz observada de la otra estrella visible.

10 • Cuando se pulsa una cuerda de guitarra, ¿es la longitud de onda de la onda que se produce en el aire la misma que la que se produce en la cuerda?

11 • Verdadero o falso:
(*a*) Los pulsos de onda de una cuerda son ondas transversales.
(*b*) Las ondas sonoras en el aire son ondas transversales de compresión y rarificación.
(*c*) La velocidad del sonido a 20° C es doble que a 5° C.

12 • El sonido se propaga a 340 m/s en el aire y a 1500 m/s en el agua. Un sonido de frecuencia 256 Hz se produce bajo el agua. En el aire la frecuencia será (*a*) la misma, pero la longitud de onda será más corta, (*b*) más elevada, pero la longitud de onda será la misma, (*c*) más baja, pero la longitud de onda será más larga, (*d*) más baja, y la longitud de onda será más corta, (*e*) la misma, y la longitud de onda también será la misma.

13 • SSM Durante una patrulla, el acorazado *Rodger Young* choca con una mina, empieza a arder y acaba explotando. El marinero Abel salta al agua por la borda y comienza a nadar intentando escapar del barco mientras que el marinero Baker consigue subir a una balsa salvavidas. Cuando pasado el episodio, Abel y Baker comparan sus experiencias, Abel dice "Yo nadaba bajo el agua y oí una gran explosión procedente del navío. Cuando salí a la superficie oí una segunda explosión. ¿Qué crees que pudo ser?". Baker responde, "Yo creo que fue tu imaginación, ya que yo oí únicamente una explosión". Explicar por qué Baker oyó sólo una explosión mientras que Abel oyó dos.

14 •• El pulso de onda en la cuerda, para un tiempo $t = 0$, indicado en la figura 15.28 se mueve hacia la derecha. En este instante particular, ¿qué segmentos de la cuerda se están moviendo hacia arriba? ¿Cuáles se están moviendo hacia abajo? ¿Existe algún segmento de la cuerda que está en el pulso que esté instantáneamente en reposo? Responder a estas cuestiones haciendo un esquema del pulso en un instante ligeramente posterior y ligeramente anterior para ver cómo se mueven los segmentos de la cuerda.

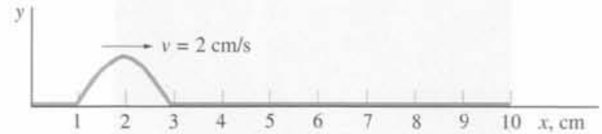


Figura 15.28 Problemas 14 y 15

15 •• Hacer un esquema de la velocidad de cada segmento de cuerda en función de la posición en el caso del pulso indicado en la figura 15.28.

16 •• En un experimento clásico de física, se coloca una campana en un recinto sellado y se la hace sonar mientras que, poco a poco, se va extrayendo el aire. Pasado un tiempo, la campana es inaudible. Se suele interpretar el experimento como la prueba de que las ondas sonoras no pueden propagarse en el vacío, pero de hecho, el sonido es inaudible mucho antes de que el recinto se quede sin aire. ¿Puede argumentar porqué no puede oírse el sonido de la campana?

17 •• SSM Un helicóptero que vuela tal como se muestra en la figura 15.29 registra la explosión de una carga de profundidad bajo la superficie del agua. ¿Cuál de los tres caminos A, B, o C será el camino por el cual el sonido llegará en menos tiempo?

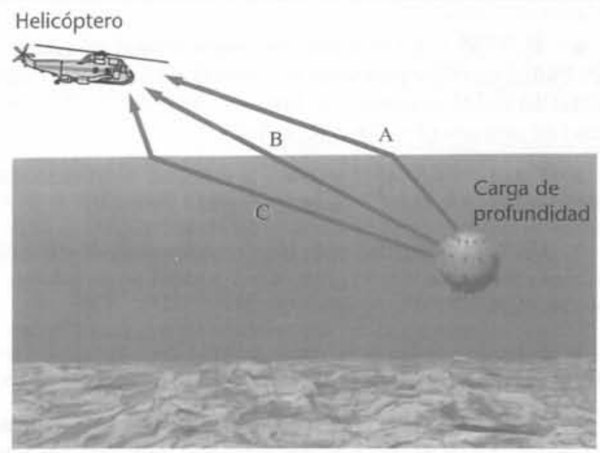


Figura 15.29 Problema 17

Estimaciones y aproximaciones

18 •• La sonoridad de una conversación normal entre personas a 1 m de distancia es de 65 dB. Estimar la potencia con la que hablamos los seres humanos.

19 •• Una persona deja caer una piedra desde un puente elevado y oye cuando choca directamente debajo de él exactamente 4 s después. (*a*) Estimar la distancia al agua suponiendo que el tiempo que emplea el sonido en alcanzar la persona es despreciable. (*b*) Mejorar el valor estimado utilizando el resultado del apartado (*a*) correspondiente a esta distancia para estimar el tiempo que tarda el sonido en recorrerla. Entonces calcular la distancia de caída de la piedra en 4 s menos este tiempo. (*c*) Calcular la distancia exacta y compararla con los valores estimados previamente.

20 •• SSM Estimar la velocidad de la bala cuando pasa por el globo de helio de la figura 15.30 a partir del ángulo del cono de la onda de choque.

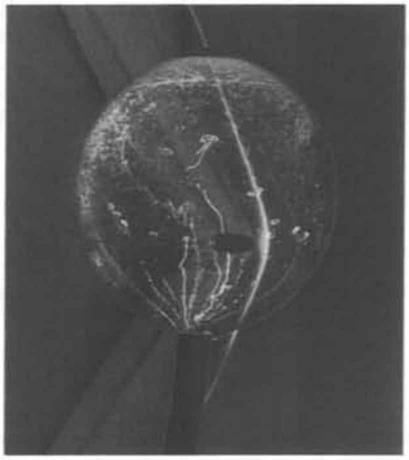


Figura 15.30 Problema 20

21 ●● Los edificios de una residencia de estudiantes están distribuidos en forma semicircular. Para calcular la velocidad del sonido un avezado estudiante de física se sitúa en el centro del semicírculo, a 30 pasos dobles de los edificios y aplaude rítmicamente de modo que la frecuencia, de 2,5 aplausos por segundo, es tal que el eco de un aplauso llega a la vez que el estudiante produce el siguiente. Suponiendo que la distancia de un paso doble es la misma que su altura (180 cm), estimar la velocidad del sonido en el aire. ¿Cuánto difiere del valor habitual?

Velocidad de ondas

22 ● iSOLVE✓ (*a*) El módulo de compresibilidad del agua es $2{,}0 \times 10^9\ N/m^2$. Utilizar este valor para hallar la velocidad del sonido en el agua. (*b*) La velocidad del sonido en mercurio es 1410 m/s. ¿Cuál es el módulo de compresibilidad del mercurio ($\rho = 13{,}6 \times 10^3\ kg/m^3$)?

23 ● SSM iSOLVE✓ Calcular la velocidad de las ondas sonoras en el gas hidrógeno a $T = 300$ K. (Tomar $M = 2$ g/mol y $\gamma = 1{,}4$.)

24 ● Un hilo de acero de 7 m de largo tiene una masa de 100 g. Si está sometido a una tensión de 900 N, ¿cuál es la velocidad de un pulso de onda transversal en este hilo?

25 ● Sobre un alambre de 80 cm de longitud que está bajo una tensión de 550 N viajan ondas tranversales a 150 m/s. ¿Cuál es la masa del alambre?

26 ● SSM Un pulso de onda se propaga a lo largo de un alambre en el sentido positivo del eje de las x a 20 m/s. ¿Cuál será la velocidad de pulso (*a*) si duplicamos la longitud del alambre pero mantenemos constante la tensión y la masa por unidad de longitud?, (*b*) si duplicamos la tensión mientras se mantienen constantes la longitud y la masa por unidad de longitud?, (*c*) si duplicamos la masa por unidad de longitud mientras se mantienen constantes las demás variables?

27 ● iSOLVE Una cuerda de piano de acero tiene 0,7 m de longitud y una masa de 5 g. Se tensa mediante una fuerza de 500 N. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en la cuerda? (*b*) Para reducir la velocidad de la onda en un factor 2 sin modificar la tensión, ¿qué masa de alambre de cobre habrá que enrollar alrededor del hilo de acero?

28 ●● Una regla práctica común para calcular la distancia a la que cae un rayo es empezar a contar el tiempo cuando se observa el relámpago y detener el cronómetro cuando se oye el estampido del trueno. El número de segundos contados se divide entonces por 3 para obtener la distancia en kilómetros. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del sonido en kilómetros por segundo? (*b*) ¿Cuánta exactitud tiene este procedimiento? (*c*) ¿Tiene importancia la corrección que tiene en cuenta el tiempo empleado por la luz en llegar a nosotros? (La velocidad de la luz es aproximadamente 3×10^8 m/s.)

29 ●● SSM (*a*) Calcular la derivada de la velocidad de una onda en una cuerda con respecto a la tensión dv/dF y demostrar que las diferenciales dv y dF obedecen a la expresión $dv/v = \frac{1}{2}\, dF/F$. (*b*) Una onda se mueve con una velocidad de 300 m/s en un alambre que está sometido a una tensión de 500 N. Utilizando dF para aproximar la variación de tensión, hallar en qué cantidad debe variarse la tensión para aumentar la velocidad a 312 m/s.

30 ●● (*a*) Calcular la derivada de la velocidad del sonido respecto a la temperatura absoluta y demostrar que las diferenciales dv y dT obedecen a la expresión $dv/v = \frac{1}{2}\, dT/T$. (*b*) Utilizar esta expresión para calcular la variación porcentual de la velocidad del sonido cuando la temperatura se modifica de 0 a 27° C. (*c*) Si la velocidad del sonido es 331 m/s a 0° C, ¿cuál es (aproximadamente) a 27° C? ¿Cómo es el resultado obtenido mediante esta aproximación comparado con el que se obtiene mediante un cálculo exacto?

31 ●●● En este problema se ha de obtener una fórmula práctica para determinar la velocidad del sonido en el aire a una temperatura t en grados Celsius. Se empieza escribiendo la temperatura como $T = T_0 + \Delta T$, en donde $T_0 =$ 273 K corresponde a los 0° C y $\Delta T = t$, a la temperatura Celsius. La velocidad del sonido es una función de T, $v(T)$. Con una aproximación de primer orden podemos escribir $v(T) \approx v(T_0) + (dv/dT)_{T_0}\,\Delta T$, donde $(dv/dT)_{T_0}$ es la derivada calculada para $T = T_0$. Calcular esta derivada y demostrar que su resultado lleva a $v = (331\ \text{m/s})\left(1 + \dfrac{t}{2T_0}\right) = (331 + 0{,}606t)\ \text{m/s}$

32 ●● Varias historias sobre fenómenos psiquícos se pueden explicar considerando fenómenos físicos. Por ejemplo, se cuenta la historia de un hombre que se despertó sin motivo aparente de un sueño profundo, salió de la cama y se acercó a la ventana justo a tiempo para escuchar el sonido de una explosión de una planta de municiones al otro lado de la ciudad. La historia se cita a menudo para dar credibilidad a la idea de clarividencia, pero se puede explicar considerando que el hombre se despertó con el temblor de la onda sonora que se propagó a través de la Tierra y luego anduvo hasta la ventana con el tiempo suficiente para oir la onda sonora que se propagó a través del aire. Si tardó 3 s en desplazarse de la cama a la ventana y la velocidad media del sonido a través de la roca sólida es de 3000 m/s, ¿a qué distancia estaba su casa de la planta de municiones?

33 ●●● Una estudiante está en su habitación estudiando física y, a la vez, escuchando por radio la retransmisión de un partido de béisbol que se celebra en un estadio situado a 1,6 km de distancia. Por la radio la estudiante oye el chasquido producido por el pulso electromagnético de un rayo y dos segundos más tarde oye, por la radio también, el trueno, que ha sido registrado por un micrófono del campo. Cuatro segundos después de haber oído el pulso electromagnético por la radio, los cristales de su habitación vibran por el efecto del trueno. ¿A qué distancia del estadio de béisbol se ha producido el rayo?

34 ●●● SSM La estación meteorológica Beta está a 1,2 km de la estación meteorológica Alfa. Los observadores de las dos estaciones ven un rayo que se produce hacia el norte. Los observadores de la estación Alfa oyen el trueno 3,4 s después del rayo, mientras que los de la estación Beta lo oyen 2,5 s después. Calcular las coordenadas del rayo relativas a la estación Alfa.

35 ●●● Un muelle en espiral del tipo Slinky se deforma alargándose hasta una longitud L. Tiene una constante de fuerza k y una masa m. (*a*) Demostrar que la velocidad de las ondas de compresión longitudinales a lo largo del muelle viene dada por $v = L\sqrt{k/m}$. (*b*) Demostrar que este valor es también el de la velocidad de las ondas transversales a lo largo del muelle si la longitud natural del muelle es mucho menor que L.

La ecuación de onda

36 ● Demostrar explícitamente que las siguientes funciones satisfacen la ecuación de onda: (*a*) $y(x, t) = (x + vt)^3$; (*b*) $y(x, t) = Ae^{ik(x - vt)}$, en donde A y k son constantes e $i = \sqrt{-1}$; (*c*) $y(x, t) = \ln k(x + vt)$.

37 ● SSM Demostrar que la función $y = A$ sen kx cos ωt satisface la ecuación de onda.

Ondas armónicas en una cuerda

38 • iSOLVE Uno de los extremos de una cuerda de 6 m de largo se mueve hacia arriba y abajo con un movimiento armónico simple de frecuencia 60 Hz. Las ondas alcanzan el otro extremo de la cuerda en 0,5 s. Hallar la longitud de onda de las ondas en la cuerda.

39 • La ecuación 15.13 expresa el desplazamiento de una onda armónica como una función de x y t y de los parámetros de onda k y ω. Escribir expresiones equivalentes que en lugar de k y ω contengan los siguientes pares de parámetros: *(a)* k y v, *(b)* λ y f, *(c)* λ y T, *(d)* λ y v y *(e)* f y v.

40 • SSM La ecuación 15.10 se aplica a todos los tipos de ondas periódicas, incluidas las electromagnéticas, como la luz y las microondas, que tienen una velocidad de 3×10^8 m/s en el vacío. *(a)* El intervalo de longitudes de onda de la luz para las que el ojo es sensible abarca desde 4×10^{-7} a 7×10^{-7} m aproximadamente. ¿Cuáles son las frecuencias que corresponden a estas longitudes de onda? *(b)* Hallar la frecuencia de una microonda que tiene una longitud de onda de 3 cm.

41 • iSOLVE Una onda armónica en una cuerda con una masa de 0,05 kg/m y una tensión de 80 N tiene una amplitud de 5 cm. Cada sección de la cuerda se mueve con movimiento armónico simple a una frecuencia de 10 Hz. Hallar la potencia propagada a lo largo de la cuerda.

42 • iSOLVE✓ Una cuerda de 2 m de largo tiene una masa de 0,1 kg. La tensión es 60 N. Una fuente de potencia en uno de sus extremos envía una onda armónica con una amplitud de 1 cm por la cuerda. La onda se extrae por el otro extremo sin ninguna reflexión. ¿Cuál es la frecuencia de la fuente de potencia si la potencia transmitida es 100 W?

43 •• La función de onda para una onda armónica en una cuerda es $y(x, t) = (0{,}001 \text{ m}) \text{ sen } (62{,}8 \text{ m}^{-1} x + 314 \text{ s}^{-1} t)$. *(a)* ¿En qué sentido se desplaza esta onda y cuál es su velocidad? *(b)* Hallar la longitud de onda, la frecuencia y el periodo de la misma. *(c)* ¿Cuál es la velocidad máxima de un segmento cualquiera de la cuerda?

44 •• Una onda armónica con una frecuencia de 80 Hz y una amplitud de 0,025 m se propaga hacia la derecha a lo largo de una cuerda con una velocidad de 12 m/s. *(a)* Escribir una expresión que sea adecuada para la función de onda de la misma. *(b)* Determinar la velocidad máxima de un punto de la cuerda. *(c)* Determinar la aceleración máxima de un punto de la cuerda.

45 •• iSOLVE A lo largo de una cuerda que tiene 20 m de largo, una masa de 0,06 kg y una tensión de 50 N se mueven ondas de frecuencia 200 Hz y amplitud 1,2 cm. *(a)* ¿Cuál es la energía total media de las ondas en la cuerda? *(b)* Hallar la potencia transmitida que pasa por un punto determinado de la cuerda.

46 •• SSM En una cuerda real, una onda pierde cierta energía cuando se propaga a lo largo de ésta. Tal situación puede describirse por una función de onda cuya amplitud $A(x)$ depende de x: $y = A(x) \text{ sen } (kx - \omega t) = (A_0 e^{-bx}) \text{ sen } (kx - \omega t)$ *(a)* ¿Cuál es la potencia original transportada por la onda en el origen? *(b)* ¿Cuál es la potencia transportada por la onda en el punto x, donde $x > 0$?

47 •• Se ha transmitido una determinada potencia a lo largo de un alambre tenso mediante ondas armónicas transversales. La velocidad de la onda es de 10 m/s y la densidad de masa lineal del alambre es 0,01 kg/m. La fuente de potencia oscila con una amplitud de 0,50 mm. *(a)* ¿Qué potencia media se transmite a lo largo del alambre si la frecuencia es de 400 Hz? *(b)* La potencia transmitida puede aumentarse aumentando la tensión en el alambre, la frecuencia de la fuente o la amplitud de las ondas. Si sólo se varía una de estas magnitudes, ¿cómo habría de modificarse cada una de ellas con objeto de producir un aumento de potencia en un factor de 100? *(c)* ¿Cuál de las variaciones indicadas se podría realizar probablemente con mayor facilidad?

48 ••• SSM Dos cuerdas largas están unidas en el punto $x = 0$. En la región $x < 0$, la velocidad de propagación de la onda es v_1, mientras que en la región $x > 0$, la velocidad es v_2. Desde la izquierda ($x < 0$) incide una onda sinusoidal de tal forma que parte de la onda se refleja y parte se transmite. Si $x < 0$, el desplazamiento de la onda se describe mediante $y(x, t) = A \text{ sen}(k_1 x - \omega t) + B \text{ sen}(k_1 x + \omega t)$, y si $x > 0$, $y(x, t) = C \text{ sen}(k_2 x - \omega t)$, en donde $\omega/k_1 = v_1$ y $\omega/k_2 = v_2$. *(a)* Si suponemos que tanto la función de onda y como su primera derivada espacial $\partial y/\partial x$ han de ser continuas en $x = 0$, demostrar que $C/A = 2/(1 + v_1/v_2)$, y que $B/A = (1 - v_1/v_2)/(1 + v_1/v_2)$. *(b)* Probar que $B^2 + (v_1/v_2)C^2 = A^2$.

Ondas sonoras armónicas

49 • SSM Una onda sonora en aire produce una variación de presión dada por

$$p(x, t) = 0{,}75 \cos \frac{\pi}{2}(x - 340t)$$

en donde p se expresa en pascales, x en metros y t en segundos. ¿Cuál es *(a)* la amplitud de la presión, *(b)* la longitud de onda, *(c)* la frecuencia y *(d)* la velocidad de la onda sonora?

50 • iSOLVE *(a)* La nota Do central de la escala musical tiene una frecuencia de 262 Hz. ¿Cuál es la longitud de onda de esta nota en el aire? *(b)* La frecuencia de la nota Do una octava por encima del Do central es el doble que la de este último. ¿Cuál es la longitud de onda de esta nota en el aire?

51 • *(a)* ¿Cuál es la amplitud del desplazamiento correspondiente a una onda sonora de frecuencia 100 Hz y amplitud de presión 10^{-4} atm? *(b)* La amplitud del desplazamiento correspondiente a una onda sonora de frecuencia 300 Hz es 10^{-7} m. ¿Cuál es la amplitud de presión de esta onda?

52 • iSOLVE✓ *(a)* Hallar la amplitud de desplazamiento correspondiente a una onda sonora de frecuencia 500 Hz cuando la amplitud de presión corresponde al umbral de dolor de 29 Pa. *(b)* Hallar la amplitud de desplazamiento para una onda sonora con la misma amplitud de presión pero con una frecuencia de 1 kHz.

53 • Una onda de un sonido intenso típico con una frecuencia de 1 kHz tiene una amplitud de presión de 10^{-4} atm aproximadamente. *(a)* Cuando $t = 0$, la presión es máxima en un cierto punto x_1. ¿Cuál es el desplazamiento en dicho punto en $t = 0$? *(b)* ¿Cuál es el valor máximo del desplazamiento en un instante y posición cualquiera? (Considerar que la densidad del aire es 1,29 kg/m^3.)

54 • SSM Una octava representa un cambio en la frecuencia en un factor dos. ¿Cuántas octavas puede oír una persona normal?

Ondas en tres dimensiones: Intensidad

55 • Un pistón situado en un extremo de un tubo largo lleno de aire a la temperatura ambiente y a la presión normal, oscila con una frecuencia de 500 Hz y una amplitud de 0,1 mm. El área del pistón es 100 cm^2. *(a)* ¿Cuál es la amplitud de la presión de las ondas sonoras generadas en el tubo? *(b)* ¿Cuál es la intensidad de las ondas? *(c)* ¿Qué potencia media se necesita para mantener oscilando el pistón (despreciando el rozamiento)?

56 • Un foco esférico radia el sonido uniformemente en todas direcciones. A una distancia de 10 m, el nivel de intensidad del sonido es de 10^{-4} W/m^2. *(a)* ¿A qué distancia del foco el nivel de intensidad es de 10^{-6} W/m^2? *(b)* ¿Qué potencia está radiando dicho foco?

57 • SSM iSOLVE Un altavoz de un concierto de rock genera 10^{-2} W/m^2 a 20 m a una frecuencia de 1 kHz. Suponiendo que el altavoz extiende su energía uniformemente en tres dimensiones, *(a)* ¿cuál es la potencia total acústica emitida por el altavoz? *(b)* ¿A qué distancia la intensidad del sonido se encontrará en el umbral del dolor de 1 W/m^2? *(c)* ¿Cuál es la intensidad a 30 m?

58 •• Cuando se lanza un alfiler de 0,1 g de masa desde una altura de 1 m, el 0,05 por ciento de su energía se convierte en un pulso sonoro de duración 0,1 s.

(*a*) Estimar el intervalo en el que puede oirse la caída del alfiler si la intensidad mínima que puede llegar a oirse es de 10^{-11} W/m². (*b*) En la práctica, el resultado obtenido en (*a*) es mucho mayor debido al ruido de fondo. Si en lugar de la suposición anterior se considera que para llegar a oirse el ruido el nivel de intensidad debe ser de al menos 10^{-8} W/m², estimar el intervalo en el que puede llegar a oirse la caída del alfiler. (Suponer en ambos casos que la intensidad es $P/4\pi r^2$.)

*Nivel de intensidad (o sonoridad)

59 • ¿Cuál es el nivel de intensidad en decibelios correspondiente a una onda sonora de intensidad (*a*) 10^{-10} W/m² y (*b*) 10^{-2} W/m²?

60 • iSOLVE Hallar la intensidad de una onda sonora si (*a*) $\beta = 10$ dB y (*b*) $\beta = 3$ dB. (*c*) Hallar las amplitudes de la presión correspondientes a ondas sonoras en el aire en condiciones normales para cada una de estas intensidades.

61 • SSM El nivel acústico del ladrido de un perro es 50 dB. La intensidad de un concierto de rock es 10 000 veces superior a la del ladrido de un perro. ¿Cuál es el nivel acústico del concierto de rock?

62 • iSOLVE Dos sonidos difieren en 30 dB. La intensidad del sonido más fuerte es I_F y la del más débil I_D. El valor de la relación I_F/I_D es (*a*) 1000, (*b*) 30, (*c*) 9, (*d*) 100, (*e*) 300.

63 • Demostrar que si se duplica la intensidad, el nivel de intensidad aumenta en 3,0 dB.

64 • SSM ¿Qué fracción de la potencia acústica de un ruido deberá eliminarse para disminuir su nivel de intensidad sonora de 90 a 70 dB?

65 •• iSOLVE Una fuente esférica irradia sonido uniformemente en todas las direcciones. A una distancia de 10 m el nivel acústico es de 80 dB. (*a*) ¿A qué distancia de la fuente el nivel acústico es de 60 dB? (*b*) ¿Cuál es la potencia irradiada por la fuente?

66 •• Una fuente esférica de intensidad I_0 irradia sonido uniformemente en todas las direcciones. Su nivel acústico es β_1 a una distancia r_1 y β_2 a una distancia r_2. Determinar β_2/β_1.

67 •• iSOLVE✓ Un altavoz genera en un concierto de rock 10^{-2} W/m² a 20 m a una frecuencia de 1 kHz. Suponiendo que la energía del cantante se extienda uniformemente en todas las direcciones, (*a*) ¿cuál es el nivel de intensidad a 20 m? (*b*) ¿Cuál es la potencia acústica total generada por el cantante? (*c*) ¿A qué distancia alcanzará la intensidad el umbral de dolor de 120 dB? (*d*) ¿Cuál es el nivel de intensidad a 30 m?

68 •• Un artículo sobre contaminación acústica señala que el nivel de intensidad sonora en grandes ciudades ha estado aumentando en 1 dB anualmente. (*a*) ¿A qué aumento porcentual de intensidad corresponde esto? ¿Parece razonable este incremento? (*b*) ¿Aproximadamente en cuántos años se duplicará la intensidad de sonido si se incrementa en 1 dB anualmente?

69 •• Tres fuentes sonoras producen unos niveles de intensidad de 70, 73 y 80 dB cuando actúan separadamente. Cuando actúan juntas las intensidades de las fuentes se suman. (*a*) Hallar el nivel de intensidad sonora en decibelios cuando las tres fuentes actúan simultáneamente. (*b*) Estudiar la utilidad de eliminar las dos fuentes menos intensas con objeto de reducir el nivel de intensidad del ruido.

70 •• SSM Si se dobla la distancia entre un foco y un receptor, la intensidad en el receptor disminuye, aproximadamente, (*a*) 2 dB, (*b*) 3 dB, (*c*) 6 dB, (*d*) a partir de la información que se tiene no se puede dar una cifra.

71 ••• iSOLVE Todas las personas que han acudido a un cocktail se encuentran hablando igual de ruidosamente. Si sólo estuviese hablando una persona, el nivel de sonido sería de 72 dB. Calcular el nivel de sonido cuando las 38 personas hablan a la vez.

72 ••• SSM Cuando un violinista mueve su arco sobre una cuerda, la fuerza que ejerce es pequeña, del orden de 0,6 N. Supongamos que el arco se mueve a través de la cuerda "la", que vibra con una frecuencia de 440 Hz a 0,5 m/s. Un oyente a 35 m del músico oye un sonido de intensidad 60 dB. ¿Cuál es el rendimiento de la transformación de la energía mecánica de la pulsación en energía sonora? (Suponer que el sonido se irradia uniformemente en todas las direcciones.)

73 ••• El nivel de ruido en un aula vacía donde se va a realizar un examen es de 40 dB. Cuando 100 alumnos se encuentran escribiendo su examen, los sonidos de las respiraciones y de las plumas escribiendo sobre el papel elevan el nivel de ruido a 60 dB. (No tener en cuenta los carraspeos ocasionales.) Suponiendo que la contribución de cada alumno a la potencia de ruido es la misma, calcular el nivel de ruido cuando sólo quedan 50 alumnos en el aula.

Efecto Doppler

En los problemas 74 a 79 la fuente emite un sonido de 200 Hz que se mueve por el aire en reposo con una velocidad de 340 m/s

74 • La fuente se mueve con una velocidad de 80 m/s respecto al aire en reposo hacia un observador estacionario. (*a*) Hallar la longitud de onda del sonido en la zona entre la fuente y el observador. (*b*) Hallar la frecuencia oída por este último.

75 • Considerar el caso del problema 74 a partir del sistema de referencia en que la fuente está en reposo. En este sistema el observador se mueve hacia la fuente con una velocidad de 80 m/s y existe un viento de velocidad 80 m/s que sopla del observador hacia la fuente. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del sonido desde la fuente al observador en este sistema? (*b*) Hallar la longitud de onda del sonido en la zona entre la fuente y el observador. (*c*) Hallar la frecuencia percibida por el observador.

76 • La fuente se mueve con una velocidad de 80 m/s alejándose del observador estacionario. (*a*) Hallar la longitud de onda de las ondas sonoras en la zona entre la fuente y el observador. (*b*) Hallar la frecuencia oída por este último.

77 • iSOLVE✓ El observador se mueve con velocidad de 80 m/s respecto al aire en reposo hacia la fuente estacionaria. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda del sonido entre la fuente y el observador? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia oída por el observador?

78 • Consideremos en caso del problema 77 en el sistema de referencia en el que el observador está en reposo. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del viento en este sistema? (*b*) ¿Cuál es la velocidad del sonido de la fuente al observador en este sistema, es decir, relativa a este último? (*c*) Hallar la longitud de onda del sonido en la zona entre la fuente y el observador en este sistema. (*d*) Hallar la frecuencia oída por el observador.

79 • El observador se mueve con una velocidad de 80 m/s respecto al aire en reposo alejándose de la fuente estacionaria. Hallar la frecuencia oída por dicho observador.

80 • Un reactor se mueve a un Mach de 2,5 a una altitud de 5000 m. (*a*) ¿Cuál es el ángulo que la onda de choque forma con la trayectoria del reactor? (Suponer que la velocidad del sonido a esta altura sigue siendo 340 m/s.) (*b*) En dónde se encontrará el reactor cuando una persona en el suelo oiga la onda de choque?

81 • Una persona corre a toda velocidad hacia un foco sonoro de frecuencia 1000 Hz. Estimar la frecuencia del sonido que percibe esta persona. Suponer que esta persona es capaz de reconocer un cambio en la frecuencia del 3%. ¿Puede utilizarse esta valoración de la frecuencia para estimar su propia velocidad?

82 •• iSOLVE Un dispositivo de radar emite microondas con una frecuencia de 2,00 GHz. Cuando las ondas se reflejan en un coche que se aleja frontalmente del emisor, se detecta una diferencia de frecuencia de 293 Hz. Determinar la velocidad del coche.

83 ●● SSM De forma rutinaria se utiliza el efecto Doppler para medir la velocidad del viento en una tormenta. Una estación meteorológica utiliza un radar de 625 MHz de frecuencia. Las ondas producidas por el instrumento se reflejan en las gotas de lluvia de una tormenta situada a 50 km de la estación y cuando llegan de nuevo a la estación meteorológica su frecuencia es 325 Hz mayor. Suponiendo que el viento está directamente encarado hacia la antena del radar y que el instrumento únicamente mide el componente radial de la velocidad, ¿a qué velocidad sopla el viento?

84 ●● ISOLVE Un destructor que se encuentra en reposo está equipado con un sonar que envía pulsos sonoros de 40 MHz. Los pulsos que se reciben han sido reflejados por un submarino que se encuentra directamente debajo con un retraso de tiempo de 80 ms y una frecuencia de 39,958 MHz. Si la velocidad del sonido en el agua del mar es de 1,54 km/s, calcular (*a*) la profundidad del submarino y (*b*) su velocidad vertical.

85 ●● Una unidad de radar de la policía transmite microondas de frecuencia 3×10^{10} Hz. La velocidad de estas ondas en el aire es $3{,}0 \times 10^8$ m/s. Supóngase que un coche se aleja de esta unidad de radar a una velocidad de 140 km/h. ¿Cuál es la diferencia de frecuencia entre la señal transmitida y la señal recibida del coche?

86 ●● Supóngase que el coche policía del problema 85 se mueve en la misma dirección que el otro vehículo a la velocidad de 60 km/h. ¿Cuál es entonces la diferencia de frecuencia entre las señales emitida y reflejada?

87 ●● ISOLVE En el tiempo $t = 0$, un avión supersónico está directamente sobre un punto P volando hacia el oeste a una altura de 12 km y a una velocidad Mach 1,6. ¿Dónde está el avión cuando se escucha el estampido sónico?

88 ●● Un pequeño aparato de radio de masa 0,10 kg está unido a una pista de aire por un extremo mediante un muelle. La radio emite un sonido de 800 Hz. Un observador en el otro extremo de la pista de aire escucha un sonido cuya frecuencia varía entre 797 y 803 Hz. (*a*) Determinar la energía del sistema vibrante masa-muelle. (*b*) Si la constante del muelle es de 200 N/m, ¿cuál es la amplitud de vibración de la masa y cuál es el periodo del sistema oscilante?

89 ●● Un foco sonoro de frecuencia f_0 se mueve con velocidad u_f respecto al aire en reposo hacia un receptor que se mueve con velocidad u_r respecto al aire en reposo alejándose del foco. (*a*) Escribir una expresión para la frecuencia recibida f'. (*b*) Utilizar la expresión aproximada $(1 - x)^{-1} \approx 1 + x$ para demostrar que si tanto u_f como u_r son pequeñas en comparación con v, la frecuencia recibida es aproximadamente

$$f' \approx \left(1 + \frac{u_f - u_r}{v}\right) f_0 = \left(1 + \frac{u_{rel}}{v}\right) f_0$$

en donde $u_{rel} = u_f - u_r$ es la velocidad relativa entre la fuente y el receptor.

90 ●● Dos alumnos con diapasones vibrantes de 440 Hz, pasean alejándose uno del otro con la misma velocidad. ¿Con qué rapidez deberán andar para que cada uno de ellos escuche una frecuencia de 438 Hz del otro diapasón?

91 ●● Un alumno de física anda a lo largo de un vestíbulo grande portando un diapasón que vibra a 512 Hz. El extremo del vestíbulo está cerrado, de forma que el sonido se refleja en él. El estudiante oye un sonido de 516 Hz procedente de la pared. ¿Con qué rapidez está andando?

92 ●● SSM Un pequeño altavoz que emite un sonido de 1000 Hz está unido a uno de los extremos de una barra de 0,8 m que puede girar libremente por el otro extremo. La barra gira en el plano horizontal con una velocidad angular de 4,0 rad/s. Deducir una expresión para la frecuencia percibida por un observador estacionario alejado del altavoz rotatorio.

93 ●● Un globo arrastrado por un viento de 36 km/h emite un sonido de 800 Hz cuando se aproxima a un gran edificio. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia del sonido percibido por un observador asomado en una ventana de este edificio? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia del sonido reflejado que escucha un viajero del globo?

94 ●● ISOLVE ✓ Un coche se aproxima a una pared reflectora. Un observador inmóvil situado detrás del coche escucha un sonido de frecuencia 745 Hz procedente de la bocina del coche y un sonido de frecuencia 863 Hz procedente de la pared. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del coche? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia de la bocina? (*c*) ¿Cuál es la frecuencia escuchada por el conductor del coche, procedente de la reflexión del sonido en la pared?

95 ●● La conductora de un coche que viaja a 100 km/h hacia un acantilado vertical hace sonar brevemente la bocina. Exactamente un segundo después, ella escucha el eco y observa que su frecuencia es de 840 Hz. ¿A qué distancia del acantilado se encontraba el coche cuando la conductora hizo sonar la bocina y cuál es la frecuencia del sonido emitido?

96 ●● Una persona en un vuelo transatlántico viaja hacia el oeste a 800 km/h. Un Concorde que vuela con velocidad Mach 1,6 se encuentra a 3 km al norte del primer avión y su rumbo es también este-oeste. ¿Cuál es la distancia entre los dos aviones cuando desde el vuelo transatlántico se oye el estampido sónico producido por el Concorde?

97 ●● SSM Se ha usado el telescopio espacial Hubble para determinar la existencia de planetas de estrellas lejanas. Cuando un planeta está en órbita alrededor de una estrella, ésta experimenta un movimiento con el mismo periodo de la órbita que el planeta. Por esta causa, la luz procedente de la estrella presenta un desplazamiento Doppler también periódico. Estimar la longitud de onda máxima y mínima que tiene la luz de 500 nm de frecuencia nominal emitida por el Sol como consecuencia del desplazamiento Doppler producido por el movimiento del Sol debido a Júpiter.

98 ●●● ISOLVE ✓ Un estudiante de física deja caer por el hueco del ascensor de un rascacielos un diapasón que está vibrando a 440 Hz. Cuando el estudiante oye una frecuencia de 400 Hz, ¿qué longitud ha recorrido en su caída el diapasón?

99 ●● El detector de neutrinos japonés Superkamiokande es un tanque de agua del tamaño de un edificio de 14 pisos. Se detecta un neutrino, la "partícula fantasma" de la física, mediante la onda de choque producida cuando un neutrino choca con un electrón y éste se mueve por el tanque prácticamente a la velocidad de la luz. Si el ángulo máximo del cono de la onda de choque de Cerenkov es de 48,75°, ¿cuánto vale la velocidad de la luz en el agua?

Problemas generales

100 ● En el instante $t = 0$, la forma de un pulso de onda en una cuerda viene dada por la función

$$y(x, 0) = \frac{0{,}12\ \text{m}^3}{(2{,}00\ \text{m})^2 + x^2}$$

en donde x está en metros. (*a*) Dibujar $y(x, 0)$ en función de x. Expresar la función de onda $y(x, t)$ en un instante t cualquiera si (*b*) el pulso se está moviendo en el sentido positivo de las x con una velocidad de 10 m/s y (*c*) si se está moviendo en el sentido negativo de las x con una velocidad del mismo valor.

101 ● ISOLVE Una onda de frecuencia 1200 Hz se propaga a lo largo de un alambre que está bajo una tensión de 800 N. La longitud de onda de la onda es de 24 cm. ¿Cuál será la longitud de onda si la tensión decrece a 600 N y la frecuencia se mantiene constante?

102 ● ISOLVE ✓ En clase, una demostración común de pulsos de onda consiste en atar un tubo de goma por uno de sus extremos a un poste fijo, pasarlo por una polea y colgar un peso por su otro extremo. Supóngase que la distancia desde el soporte fijo a la polea es de 10 m, la masa de esta longitud de tubo es de 0,7 kg y el peso suspendido es de 110 N. Si se le da al tubo una sacudida transversal en un extremo, ¿cuánto tiempo empleará el pulso resultante en alcanzar el otro extremo?

103 ● Un bote que se mueve a 10 m/s sobre un lago tranquilo forma una onda de proa con un ángulo de 20° con su dirección de movimiento. ¿Cuál es la velocidad de la onda de proa?

104 • Si una longitud de onda es mucho mayor que el diámetro de un altavoz, éste irradia en todas direcciones como si fuera un foco puntual. En cambio, si la longitud de onda es mucho menor que el diámetro, el sonido se propaga aproximadamente en línea recta por delante del altavoz. Determinar la frecuencia de una onda sonora que tiene una longitud de onda (*a*) 10 veces mayor que el diámetro de un altavoz de 30 cm y (*b*) un décimo del diámetro de un altavoz de 30 cm. (*c*) Repetir el problema para un altavoz de 6 cm.

105 • Un silbato de 500 Hz de frecuencia se mueve en una circunferencia de 1 m de radio a 3 rev/s. ¿Cuáles son las frecuencias máxima y mínima oídas por un observador estacionario situado en el plano del círculo y 5 m alejado de su centro?

106 • Las olas del mar se mueven hacia la playa con una velocidad de 8,9 m/s y con una separación entre crestas de 15,0 m. Nos encontramos en un pequeño bote anclado junto a la costa. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia de las olas del mar? (*b*) Se leva el ancla y nos movemos hacia el mar con una velocidad de 15 m/s. ¿Qué frecuencia de olas se observará entonces?

107 •• Un alambre de 12,0 m y masa 85 g se estira bajo una tensión de 180 N. En el extremo izquierdo del alambre se genera un pulso y 25 milisegundos más tarde se genera un segundo pulso en el extremo derecho del alambre. ¿Dónde se encontrarán los dos pulsos?

108 •• SSM iSOLVE ✓ Determinar la velocidad de un coche cuya bocina, al pasar al lado de un receptor parado, disminuye la frecuencia un 10 por ciento.

109 •• Un altavoz con un diafragma de 20 cm de diámetro vibra con una frecuencia de 800 Hz y una amplitud de 0,025 mm. Suponiendo que las moléculas de aire de las proximidades poseen la misma amplitud de vibración, calcular (*a*) la amplitud de la presión justo enfrente del diafragma del altavoz, (*b*) la intensidad del sonido y (*c*) la potencia acústica que se está radiando.

110 •• iSOLVE Una onda acústica, plana y armónica que oscila en el aire con una amplitud de 1 μm tiene una intensidad de 10 mW/m^2. ¿Cuál es la frecuencia de la onda?

111 •• Por un tubo de radio 5 cm fluye agua a la velocidad de 7 m/s. Una placa de área igual a la sección transversal del tubo se inserta súbitamente en éste para detener el flujo. Determinar la fuerza ejercida sobre la placa. Tomar el valor de 1,4 km/s para la velocidad del sonido en el agua. (*Sugerencia*: *Cuando se inserta la placa, una onda de presión se propaga a través del agua a la velocidad del sonido,* v_s. *La masa de agua detenida en el tiempo* Δt *es la contenida en una longitud del tubo igual a* $v_s\,\Delta t$.)

112 •• En la figura 15.31 se representa el esquema de la realización de una fotografía de alta velocidad que mediante un flash y una máquina captura la imagen de una bala rompiendo una burbuja de jabón. La onda de choque producida por la bala se detecta mediante un micrófono, colocado en una guía paralela a la trayectoria de la bala. El micrófono dispara el flash y la máquina. Si la bala se mueve a 1,25 veces la velocidad del sonido y la distancia vertical entre la guía y la bala es de 0,35 m, ¿a qué distancia por detrás de la pompa de jabón hay que colocar el micrófono para que accione el disparador de la máquina.? (Supóngase que el flash y la máquina se accionan inmediatamente después de que el micrófono detecte la onda de choque)

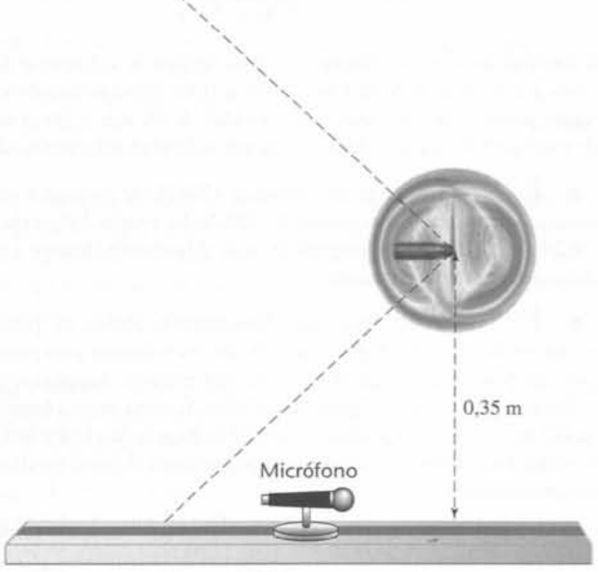


Figura 15.31 Problema 112

113 •• Una tropa bien entrenada mantiene el paso escuchando la banda de música que está situada a la cabeza de la columna. La música se lleva a un ritmo que corresponde a 100 pasos por minuto. Una cámara de televisión muestra que sólo la tropa que está en la cabeza de la columna y la que está en su parte posterior lleva realmente el paso. Los soldados de la sección intermedia se encuentran adelantando el pie izquierdo cuando los que componen los otros dos grupos mencionados están adelantando el pie derecho. La tropa está tan bien entrenada que, a pesar de esto, están seguros de que llevan el paso de acuerdo con la música. Explicar el origen del problema y calcular la longitud de la columna.

114 •• Un murciélago que vuela hacia un obstáculo a 12 m/s emite pulsos sonoros breves y de alta frecuencia con una frecuencia de repetición de 80 Hz. ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre los pulsos de eco oídos por el murciélago?

115 •• SSM De forma rutinaria se envían rayos de luz láser hacia la Luna para determinar la distancia Tierra-Luna. Sin embargo, para determinar la distancia con la máxima exactitud, debe tenerse en cuenta que la velocidad de la luz en la atmósfera terrestre es el 99,997 por ciento de la velocidad de la luz en el vacío. Suponiendo que la atmósfera de la Tierra tiene un espesor de 8 km., estimar qué cambio en la distancia supone la corrección.

116 •• Un diapasón unido a un alambre tenso genera ondas transversales. La vibración del diapasón es perpendicular al alambre. Su frecuencia es de 400 Hz y su amplitud de oscilación es de 0,50 mm. El alambre tiene una densidad de masa lineal de 0,01 kg/m y está sometido a una tensión de 1 kN. Se supone que no hay ondas reflejadas. (*a*) Hallar el periodo y frecuencia de las ondas en el alambre. (*b*) ¿Cuál es la velocidad de las ondas? (*c*) ¿Cuál es la longitud de onda y el número de ondas? (*d*) Escribir una función de onda adecuada para las ondas sobre el alambre. (*e*) Calcular la velocidad y aceleración máximas de un punto del alambre. (*f*) ¿A qué potencia media debe suministrarse energía al diapasón para mantenerlo oscilando con amplitud constante?

117 ••• Si una cadena cerrada se hace girar sobre su eje a velocidad alta, rodará como un aro sin caerse. Consideremos una cadena de densidad de masa lineal μ que está rodando sin deslizar con una velocidad elevada v_0. (*a*) Demostrar que la tensión en la cadena es $F = \mu v_0^2$. (*b*) Si la cadena rueda sobre una pequeña protuberancia, se generará en ella un pulso de onda transversal. ¿A qué velocidad se moverá a lo largo de la cadena? (*c*) ¿Hasta dónde se moverá una onda transversal a lo largo del aro (en grados) en el tiempo en que la rueda gire una revolución completa?

118 ••• Una cuerda larga con una masa por unidad de longitud de 0,1 kg/m está bajo una tensión constante de 10 N. Un motor en el punto $x = 0$ impone a este extremo de la cuerda un movimiento armónico a 5 oscilaciones por segundo y una amplitud de 4 cm. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de la onda? (*b*) ¿Cuál es la longitud de onda? (*c*) ¿Cuál es el momento lineal transversal máximo de un segmento de 1 mm de la cuerda? (*d*) ¿Cuál es la fuerza máxima neta ejercida sobre un segmento de 1 mm de la cuerda?

119 ••• SSM Una cuerda pesada de 3 m de largo cuelga del techo libremente. (*a*) Demostrar que la velocidad de las ondas transversales en la cuerda es independiente de su masa y longitud, pero que depende de la distancia y desde el extremo inferior de acuerdo con la fórmula $v = \sqrt{gy}$. (*b*) Si se le da al extremo inferior de la cuerda un desplazamiento lateral repentino, ¿cuánto tardará el pulso de onda resultante en subir al techo, reflejarse y regresar al punto inferior de la cuerda?

120 ••• En este problema hay que deducir una expresión para la energía potencial de un segmento de una cuerda por el que se propaga un tren de ondas (figura 15.32). La energía potencial de un segmento es igual al trabajo realizado por la tensión al estirar la cuerda, de valor $\Delta U = F(\Delta\ell - \Delta x)$, en donde F es la tensión, $\Delta\ell$ la longitud del segmento estirado e Δx su longitud original. En la figura puede verse que

$$\Delta\ell \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x\{1 + (\Delta y/\Delta x)^2\}^{1/2}$$

(*a*) Utilizar el desarrollo del binomio para demostrar que $\Delta\ell - \Delta x \approx \frac{1}{2}(\Delta y/\Delta x)^2\,\Delta x$ y por lo tanto, $\Delta U \approx \frac{1}{2}F(\Delta y/\Delta x)^2\,\Delta x$. (*b*) Calcular dy/dx a partir de la función de onda expresada por la ecuación 15.13 y demostrar que $\Delta U \approx \frac{1}{2}Fk^2\cos^2(kx - \omega t)\,\Delta x$.

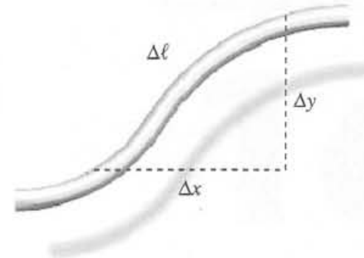
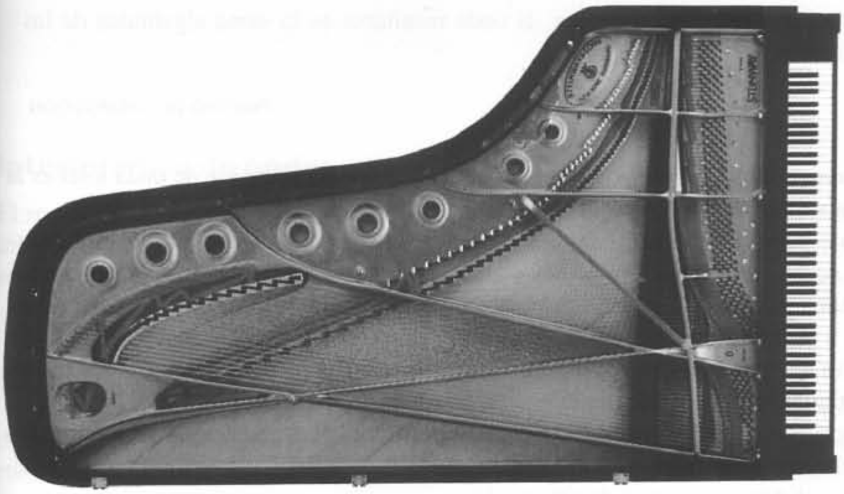


Figura 15.32 Problema 120

SUPERPOSICIÓN Y ONDAS ESTACIONARIAS

Capítulo 16

16.1 Superposición de ondas
16.2 Ondas estacionarias
16.3 Superposición de ondas estacionarias
16.4 Análisis y síntesis armónicos
16.5 Paquetes de onda y dispersión



El pianista toca las teclas y acciona los martillos que golpean las cuerdas de este magnífico piano de cola. Las cuerdas más largas vibran a frecuencias más bajas que las más cortas.

¿Qué otros factores influyen en la afinación de un piano? (Véase el ejemplo 16.6.)

Cuando dos o más ondas se encuentran en el espacio, sus perturbaciones individuales (representadas matemáticamente por sus funciones de onda) se superponen y se suman algebraicamente creando una nueva onda. Este principio se llama principio de superposición. En ciertas circunstancias la superposición de ondas armónicas de la misma frecuencia produce patrones en el espacio. Este fenómeno se llama interferencia. La interferencia y la difracción es lo que distingue el movimiento ondulatorio del movimiento de partículas. El descubrimiento de la interferencia de la luz por Thomas Young en 1801 llevó a los científicos al convencimiento de que la luz se propagaba con un movimiento ondulatorio y no en forma de corpúsculos, como había propuesto Newton. En 1927 la observación de fenómenos de interferencia en ondas electrónicas por parte de C. J. Davisson y L. H. Germer ayudó a entender la naturaleza ondulatoria de los electrones y otros objetos materiales. Estas ideas son esenciales para entender la física cuántica, que presentaremos en el capítulo 34.

☛ **En este capítulo comenzaremos por estudiar la superposición de pulsos de onda en una cuerda y después consideraremos la superposición e interferencia de ondas armónicas. Examinaremos el fenómeno de las pulsaciones, que resultan de la interferencia de dos ondas de frecuencias ligeramente distintas y estudiaremos las ondas estacionarias, que resultan cuando las ondas armónicas están confinadas en el espacio. También consideraremos el análisis de tonos musicales complejos en función de sus ondas armónicas componentes, así como el problema inverso de la síntesis de ondas armónicas para producir tonos complejos. Finalizaremos con una exposición cualitativa de la extensión del análisis armónico a ondas no periódicas, tales como los pulsos de onda.**

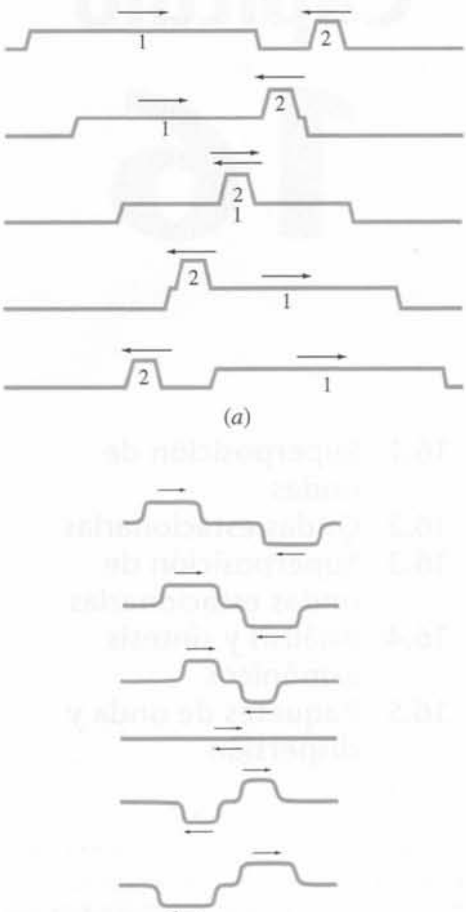


Figura 16.1 Pulsos de onda que se mueven en direcciones opuestas sobre una cuerda. La forma de la cuerda cuando se encuentran los pulsos se obtiene sumando los desplazamientos de cada pulso por separado. (*a*) Superposición de pulsos con desplazamientos en el mismo sentido. (*b*) Superposición de pulsos con desplazamientos iguales pero con signos opuestos. En este caso la suma algebraica de los desplazamientos equivale a la sustracción de las magnitudes.

16.1 Superposición de ondas

La figura 16.1*a* muestra pequeños pulsos de onda que se mueven en direcciones opuestas en una cuerda. La forma resultante del encuentro de estos pulsos puede determinarse sumando los desplazamientos producidos por cada pulso separadamente. El **principio de superposición** es una propiedad del movimiento ondulatorio que expresa lo siguiente:

> Cuando dos o más ondas se combinan, la onda resultante es la suma algebraica de las ondas individuales.
>
> PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Matemáticamente, cuando tenemos dos pulsos sobre la cuerda, la función de onda total es la suma algebraica de las funciones de onda de las ondas individuales.

En el caso especial de dos pulsos que son idénticos, excepto que uno está invertido respecto al otro, como en la figura 16.1*b*, hay un instante en que los pulsos se solapan exactamente y su suma es igual a cero. En este momento la cuerda está horizontal, pero no en reposo. Justo a la derecha de la región de solapamiento, la cuerda está moviéndose hacia arriba, mientras que a la izquierda se mueve hacia abajo. En un instante posterior, los pulsos emergen, continuando cada uno en su dirección original.

La superposición es una propiedad característica y única del movimiento ondulatorio. No existe una situación análoga en el movimiento newtoniano de partículas; es decir, dos partículas nunca se solapan o se suman de este modo.

*La superposición y la ecuación de onda

El principio de superposición resulta de la linealidad de la ecuación de onda (ecuación 15.9) para pequeños desplazamientos transversales. Es decir, la función $y(x, t)$ y sus derivadas se presentan sólo en primera potencia. La propiedad que define las ecuaciones lineales es que si y_1 e y_2 son dos soluciones de la ecuación de onda, la combinación lineal

$$y_3 = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{16.1}$$

en donde C_1 y C_2 son constantes cualesquiera, es también una solución. Esto se demuestra fácilmente sustituyendo directamente y_3 en la ecuación de onda. El resultado es la expresión matemática del principio de superposición. Si dos ondas cualesquiera satisfacen la ecuación de onda, su suma también satisface la misma ecuación de onda.

EJEMPLO 16.1 | La superposición y la ecuación de onda

Demostrar que si las funciones y_1 e y_2 satisfacen la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \textbf{(ecuación 15.9b)}$$

la función y_3 de la ecuación 16.1 también la satisface.

Planteamiento del problema Se sustituye y_3 en la ecuación de onda, teniendo en cuenta que y_1 e y_2 también son funciones de onda, es decir, que satisfacen la ecuación de onda. Finalmente, se demuestra que la combinación lineal $C_1 y_1 + C_2 y_2$ es una función de onda.

1. Sustituir la expresión de y_3 de la ecuación 16.1 en el miembro de la izquierda de la ecuación de onda y separar los términos en función de y_1 e y_2:

$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + C_2\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}$$

2. Escribir la ecuación de onda para y_1 e y_2:

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}$$

3. Sustituir el resultado del paso 2 en el paso 1 y sacar factor común: $\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = C_1 \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + C_2 \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\left(C_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + C_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}\right)$

4. Introducir las constantes dentro de las derivadas y expresar la suma de las derivadas como la derivada de la suma: $\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2 C_1 y_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 C_2 y_2}{\partial t^2}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(C_1 y_1 + C_2 y_2)$

5. El argumento de la derivada del paso 4 es y_3: $\therefore \boxed{\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2}}$

Interferencia de ondas armónicas

El resultado de la superposición de ondas armónicas de la misma frecuencia depende de la diferencia de fase δ entre las ondas. Sea $y_1(x,t)$ la función de onda de una onda armónica que se propaga hacia la derecha con amplitud A, frecuencia angular ω y número de onda k:

$$y_1 = A \text{ sen } (kx - \omega t) \tag{16.2}$$

Para esta función de onda, hemos escogido cuando la fase sea cero.[1] Si tenemos también en movimiento una segunda onda armónica hacia la derecha con la misma amplitud, frecuencia y número de ondas, la ecuación general para esta función de onda puede escribirse

$$y_2 = A \text{ sen } (kx - \omega t + \delta) \tag{16.3}$$

en donde δ es la constante de fase. Las dos ondas descritas por las ecuaciones 16.2 y 16.3 difieren en fase en δ. La figura 16.2 muestra una representación de las dos funciones de onda para un tiempo fijo en función de la posición. La onda resultante es la suma

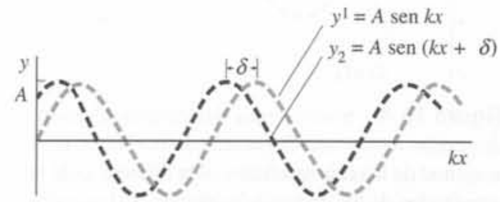


Figura 16.2 Desplazamiento en función de la posición para dos ondas armónicas que tienen la misma amplitud, frecuencia y longitud de onda pero que difieren en fase en δ.

$$y_1 + y_2 = A \text{ sen } (kx - \omega t) + A \text{ sen } (kx - \omega t + \delta) \tag{16.4}$$

La ecuación 16.4 puede simplificarse utilizando la identidad trigonométrica

$$\text{sen } \theta_1 + \text{sen } \theta_2 = 2 \cos \tfrac{1}{2} (\theta_1 - \theta_2) \text{ sen } \tfrac{1}{2} (\theta_1 - \theta_2) \tag{16.5}$$

En este caso $\theta_1 = kx - \omega t$ y $\theta_2 = kx - \omega t + \delta$, de modo que

$$\tfrac{1}{2} (\theta_1 - \theta_2) = -\tfrac{1}{2}\delta$$

y

$$\tfrac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) = kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\delta$$

Así, la ecuación 16.4 toma la forma

$$y_1 + y_2 = [2y_0 \cos \tfrac{1}{2}\delta] \text{ sen } (kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\delta) \tag{16.6}$$

SUPERPOSICIÓN DE DOS ONDAS DE IGUAL AMPLITUD Y FRECUENCIA

en donde hemos utilizado $\cos (-\frac{1}{2}\delta) = \cos \frac{1}{2}\delta$. Vemos que el resultado de la superposición de dos ondas armónicas de igual frecuencia y número de ondas es otra onda armónica que tiene la misma frecuencia y el mismo número de onda. La onda resultante tiene una amplitud igual a $2A \cos \frac{1}{2}\delta$ y una fase igual a la mitad de la diferencia entre las fases de las ondas originales. La superposición de dos o más ondas de frecuencia igual o muy parecida que da

[1] Esta selección es conveniente, pero no es obligatoria. Si, por ejemplo, escogemos $t = 0$ cuando el desplazamiento sea máximo en $x = 0$, deberíamos escribir $y_1 = A \cos (kx - \omega t) = \text{sen } (kx - \omega t - \pi/2)$.

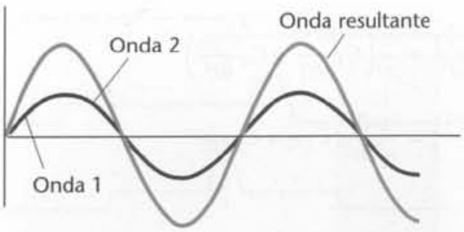


Figura 16.3 Interferencia constructiva. Cuando dos ondas están en fase, la amplitud de la onda resultante es la suma de las amplitudes de las ondas individuales.

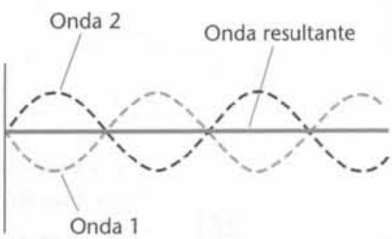


Figura 16.4 Interferencia destructiva. Cuando dos ondas tienen una diferencia de fase de π, la amplitud de la onda resultante es la diferencia de las amplitudes de las ondas individuales. Si las ondas originales tienen amplitudes iguales, se anulan completamente.

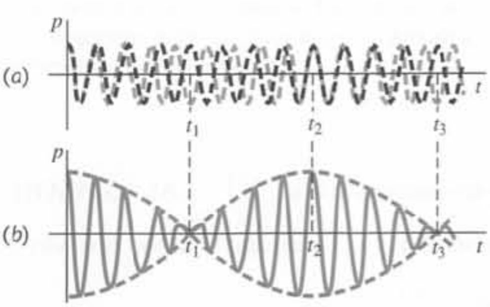


Figura 16.5 Batidos o pulsaciones. (*a*) Dos ondas de frecuencias diferentes pero próximas que están en fase en $t_0 = 0$ están desfasadas en 180° un cierto instante después t_1. En otro instante aún más tarde t_2, vuelven a estar en fase. (*b*) Resultante de las ondas indicadas en (*a*). La frecuencia de la onda resultante es casi la misma que la de las dos ondas originales, pero la amplitud se encuentra modulada como indica la curva a trazos. La amplitud es máxima en los instantes t_0 y t_2 y nula en los instantes t_1 y t_3.

un patrón de intensidad observable se denomina **interferencia**. En este caso, la intensidad, que es proporcional al cuadrado de la amplitud, es uniforme. Si las dos ondas están en fase, la diferencia de fase es $\delta = 0$, $\cos 0 = 1$ y la amplitud de la onda resultante es $2A$. La interferencia de dos ondas en fase se llama **interferencia constructiva** (figura 16.3). Si están desfasadas 180°, $\delta = \pi$ rad, $\cos(\pi/2) = 0$ y la amplitud de la onda resultante es nula. La interferencia de dos ondas desfasadas 180° se llama **interferencia destructiva** (figura 16.4).

Ejercicio Dos ondas con la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud se están moviendo en la misma dirección. (*a*) Si difieren en fase en $\pi/2$ y cada una de ellas tiene una amplitud de 4,0 cm, ¿cuál es la amplitud de la onda resultante? (*b*) ¿Para qué diferencia de fase δ la amplitud resultante sería igual a 4 cm? (*Respuestas* (*a*) 5,66 cm, (*b*) 120° o 240°.)

Pulsaciones (o batidos) La interferencia de dos ondas sonoras de frecuencias ligeramente distintas produce el interesante fenómeno de las **pulsaciones** o **batidos**. Consideremos dos ondas sonoras con frecuencias angulares ω_1 y ω_2 que poseen la misma amplitud de la presión p_0. ¿Qué es lo que oímos? En un punto fijo, la dependencia espacial de la onda contribuye simplemente en la constante de fase, de modo que podemos despreciarla. La presión en el oído debida a una de las ondas, será una función armónica simple de la forma

$$p_1 = p_0 \operatorname{sen} \omega_1 t$$

o bien

$$p_2 = p_0 \operatorname{sen} \omega_2 t$$

en donde hemos escogido funciones seno por conveniencia y hemos supuesto que las dos ondas están en fase en el instante $t = 0$. Usando la siguiente identidad trigonométrica para la suma de dos funciones seno,

$$\operatorname{sen} \theta_1 + \operatorname{sen} \theta_2 = 2 \cos\tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

se obtienen la onda resultante

$$p = p_0 \operatorname{sen} \omega_1 t + p_0 \operatorname{sen} \omega_2 t = 2p_0 \cos \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t$$

Si ponemos $\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ que es la frecuencia angular media y $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ que corresponde a la diferencia de las frecuencias angulares, la función de onda resultante toma la forma

$$p = 2p_0 \cos\left(\tfrac{1}{2}\Delta\omega\, t\right) \operatorname{sen} \omega_m t = 2p_0 \cos\left(2\pi \tfrac{1}{2}\Delta f\, t\right) \operatorname{sen} 2\pi f_m t \tag{16.7}$$

en donde $\Delta f = \Delta\omega/(2\pi)$ y $f_m = \omega_m/(2\pi)$.

La figura 16.5 muestra una representación gráfica de la variación de presión en función del tiempo. Las ondas están inicialmente en fase y se suman constructivamente en el instante $t = 0$. Como sus frecuencias no son iguales, las ondas van desfasándose gradualmente y en el instante t_1 ya tienen un desfase de 180° e interfieren destructivamente[1]. Al cabo de un intervalo de tiempo igual (tiempo t_2 en la figura), las dos ondas estarán de nuevo en fase e interferirán constructivamente. Cuanto mayor sea la diferencia entre las frecuencias de ambas ondas, más pronto quedarán desfasadas y volverán a ponerse en fase de nuevo.

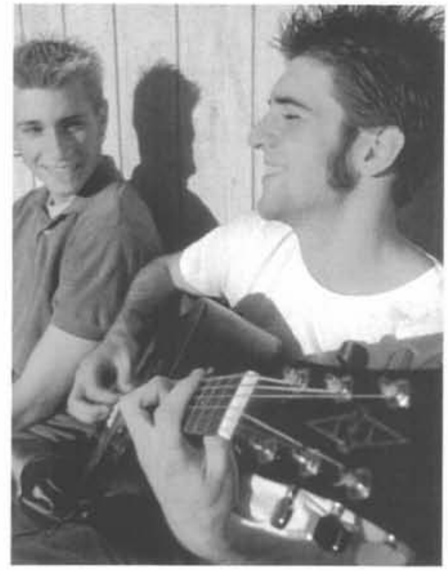
El tono que percibe el oído tiene la frecuencia media $f_m = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ con una amplitud de $2p_0 \cos(2\pi \frac{1}{2}\Delta f\, t)$. (Para algunos valores de t la amplitud es negativa. Como $-\cos\theta = \cos(\theta + \pi)$, un cambio de signo de la amplitud equivale a un cambio de fase de 180°.) La amplitud oscila con frecuencia $\frac{1}{2}\Delta f$. Puesto que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, el sonido será fuerte siempre que la amplitud sea máxima o mínima. Por consi-

[1] La anulación completa sólo se produce cuando son iguales las amplitudes de presión de ambas ondas.

guiente, la frecuencia de esta variación de intensidad, llamada **frecuencia de batido** es igual al doble de $\frac{1}{2}\Delta f$.

$$f_{\text{batido}} = \Delta f \tag{16.8}$$

FRECUENCIA DE BATIDO



La frecuencia de batido es igual a la diferencia de las frecuencias individuales de las dos ondas. Por ejemplo, si golpeamos simultáneamente dos diapasones que tienen frecuencias de 241 Hz y 243 Hz, se oirá un tono pulsante con la frecuencia media de 242 Hz que tendrá una intensidad máxima dos veces por segundo; es decir, la frecuencia de batido será 2 Hz. El oído puede detectar hasta 15 ó 20 batidos por segundo. Por encima de estas frecuencias, las fluctuaciones de la intensidad son demasiado rápidas para ser oídas.

El fenómeno descrito se utiliza a menudo para comparar una frecuencia no conocida con otra conocida, como cuando se utiliza un diapasón para afinar la cuerda de un piano. Los pianos se afinan haciendo sonar al mismo tiempo el diapasón y la nota del piano y actuando sobre la cuerda del instrumento hasta que las pulsaciones desaparecen (o son mínimas), lo que indica que la diferencia en frecuencia de los dos generadores de sonido es muy pequeña.

EJEMPLO 16.2 | Afinando una guitarra

Cuando se golpea un diapasón de 440 Hz (nota La) al mismo tiempo que se pulsa la cuerda ligeramente desafinada de una guitarra que debe dar la nota La se escuchan 3 pulsaciones por segundo. Después que la cuerda de la guitarra se tensa un poco más para aumentar su frecuencia, las pulsaciones aumentan a 6 por segundo. ¿Cuál era la frecuencia de la cuerda de guitarra antes de tensar la cuerda?

Planteamiento del problema Inicialmente se oyen 3 pulsaciones por segundo, por lo tanto la frecuencia original de la cuerda de la guitarra es o bien 443 Hz o bien 437 Hz. Supongamos que la frecuencia inicial sea 437 Hz. Aumentando lentamente la tensión de la cuerda y, por lo tanto, la frecuencia, se disminuye la frecuencia de pulsación.

La frecuencia de la pulsación aumenta si aumenta la tensión de la cuerda de 3 a 6 pulsaciones por segundo, lo cual indica que la frecuencia es 443 Hz.

$$f = f_{\text{La}} + f_{\text{batido}} = 440\text{ Hz} + 3\text{Hz} = \boxed{443\text{ Hz}}$$

Diferencia de fase debida a la diferencia de trayectos Una causa corriente que origina una diferencia de fase entre dos ondas es la diferencia de longitudes de los trayectos que deben recorrer las ondas desde su fuente o foco hasta el punto donde se produce la interferencia. Supóngase que tenemos dos focos que están emitiendo ondas armónicas de la misma frecuencia y longitud de onda y que están oscilando en fase; es decir, cuando sale de un foco una cresta positiva, sale también al mismo tiempo una cresta positiva del otro foco. Si la diferencia entre los trayectos hasta un punto determinado es una longitud de onda, como es el caso de la figura 16.6*a*, o es un número entero de longitudes de onda, la interferencia es constructiva. Si la diferencia de trayectos es una semilongitud de onda o un número impar de semilongitudes de onda, como en la figura 16.6*b*, el máximo de una onda coincidirá con el mínimo de la otra y la interferencia es destructiva.

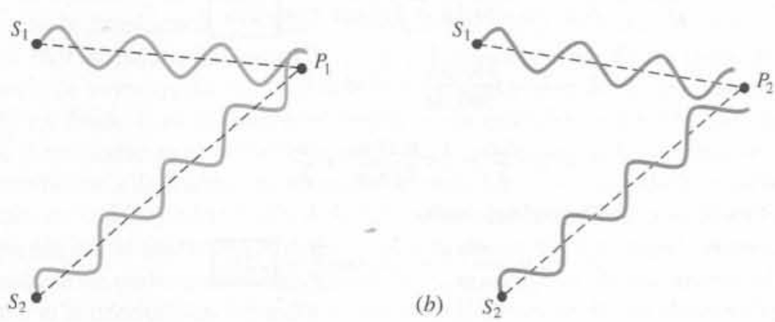


Figura 16.6 Las ondas en fase procedentes de dos focos S_1 y S_2, que están en fase se encuentran en un punto P_1. (*a*) Cuando la diferencia de trayectos es de una longitud de onda λ, las ondas están en fase en P_1 e interfieren constructivamente. (*b*) Cuando la diferencia de trayectos es $\frac{1}{2}\lambda$, las ondas en P_2 están desfasadas 180° y por lo tanto interfieren destructivamente. Si las ondas son de la misma amplitud en P_2, ambas se anularán totalmente en este punto.

Las funciones de onda para las ondas de dos fuentes que oscilan en fase pueden escribirse en la forma

$$p_1 = p_0 \operatorname{sen}(kx_1 - \omega t)$$

y

$$p_2 = p_0 \operatorname{sen}(kx_2 - \omega t)$$

La diferencia de fase para estas dos funciones de onda es

$$\delta = (kx_2 - \omega t) - (kx_1 - \omega t) = k(x_2 - x_1) = k\Delta x$$

Utilizando $k = 2\pi/\lambda$, se tiene

$$\delta = k\,\Delta x = 2\pi\,\frac{\Delta x}{\lambda} \tag{16.9}$$

DIFERENCIA DE FASE DEBIDA A LA DIFERENCIA DE TRAYECTOS

EJEMPLO 16.3 | Una onda sonora resultante

Dos focos sonoros oscilan en fase. En un punto a 5,00 m de un foco y a 5,17 m del otro, la amplitud del sonido procedente de cada foco por separado es p_0. Hallar la amplitud de la onda resultante si la frecuencia de las ondas sonoras es (*a*) 1000 Hz, (*b*) 2000 Hz y (*c*) 500 Hz. (Utilizar 340 m/s como velocidad del sonido.)

Planteamiento del problema La amplitud de la onda resultante debida a la superposición de dos ondas cuya diferencia de fase es δ viene dada por $A = 2p_0 \cos \frac{1}{2}\delta$ (ecuación 16.6), en donde p_0 es la amplitud de una cualquiera de las ondas y $\delta = 2\pi\,\Delta x/\lambda$ es la diferencia de fase. Como ya conocemos la diferencia de trayectos $\Delta x = 5{,}17\text{ m} - 5\text{ m} = 0{,}17\text{ m}$, sólo necesitamos determinar la longitud de onda λ.

(a) 1. La longitud de onda es igual a la velocidad dividida por la frecuencia. Calcular λ para $f = 1000$ Hz:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\text{ m/s}}{1000\text{ Hz}} = 0{,}34\text{ m}$$

2. Para $\lambda = 0{,}34$ m la diferencia de trayectos ($\Delta x = 0{,}17$ m) es $\frac{1}{2}\lambda$, de modo que se producirá interferencia destructiva. Usar este valor de λ para calcular la diferencia de fase δ y utilizar δ para determinar la amplitud A:

$$\delta = 2\pi\,\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi\,\frac{0{,}17\text{ m}}{0{,}34\text{ m}} = \pi$$

por lo tanto

$$A = 2p_0 \cos \tfrac{1}{2}\delta = 2p_0 \cos \frac{\pi}{2} = \boxed{0}$$

(b) 1. Calcular λ para $f = 2000$ Hz:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\text{ m/s}}{2000\text{ Hz}} = 0{,}17\text{ m}$$

2. Para $\lambda = 0{,}17$ m, la diferencia de trayectos es igual a λ y la interferencia es constructiva. Calcular la diferencia de fase y la amplitud:

$$\delta = 2\pi\,\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi\,\frac{0{,}17\text{ m}}{0{,}17\text{ m}} = 2\pi$$

y substituyendo en la expresión de la amplitud

$$A = 2p_0 \cos \tfrac{1}{2}\delta = 2p_0 \cos \pi = \boxed{-2p_0}$$

(c) 1. Calcular λ para $f = 500$ Hz:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\text{ m/s}}{500\text{ Hz}} = 0{,}68\text{ m}$$

2. Calcular la diferencia de fase y amplitud:

$$\delta = 2\pi\,\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi\,\frac{0{,}17\text{ m}}{0{,}68\text{ m}} = \frac{\pi}{2}$$

La amplitud resulta

$$A = 2p_0 \cos \tfrac{1}{2}\delta = 2p_0 \cos \frac{\pi}{4} = \boxed{\sqrt{2}\,p_0}$$

EJEMPLO 16.4 | Intensidad sonora de dos altavoces

Dos altavoces enfrentados entre sí a una distancia de 180 cm están accionados por un oscilador común de audio a 680 Hz. Localizar los puntos entre los altavoces a lo largo de la línea que los une, para los cuales la intensidad del sonido es *(a)* máxima y *(b)* mínima. (Despreciar la variación de intensidad de cada altavoz con la distancia y usar 340 m/s para la velocidad del sonido.)

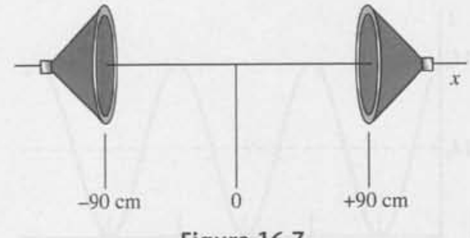


Figura 16.7

Planteamiento del problema Elegimos como origen el punto medio entre los altavoces (figura 16.7). Como este punto equidista de los altavoces será un punto de intensidad máxima. Si nos movemos una distancia x hacia uno de los altavoces la diferencia de trayectos es $2x$. La intensidad será máxima cuando $2x = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots$ y mínimo cuando $2x = \frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda, \ldots$

(a) 1. La intensidad será máxima cuando $2x$ sea igual a un número entero de longitudes de onda: $2x = \pm\lambda, \pm 2\lambda, \pm 3\lambda, \ldots$

2. Calcular la longitud de onda: $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{340 \text{ m/s}}{680 \text{ Hz}} = 0{,}5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$

3. Despejar x utilizando la longitud de onda calculada $x = \pm\frac{1}{2}\lambda, \pm\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \ldots$

$= \boxed{0, \pm 25 \text{ cm}, \pm 50 \text{ cm}, \pm 75 \text{ cm}}$

(b) 1. La intensidad será mínima cuando $2x$ sea igual a un número impar de semilongitudes de onda: $2x = \pm\frac{1}{2}\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \pm\frac{5}{2}\lambda, \ldots$

2. Despejar x utilizando la longitud de onda calculada: $x = \pm\frac{1}{4}\lambda, \pm\frac{3}{4}\lambda, \pm\frac{5}{4}\lambda, \ldots$

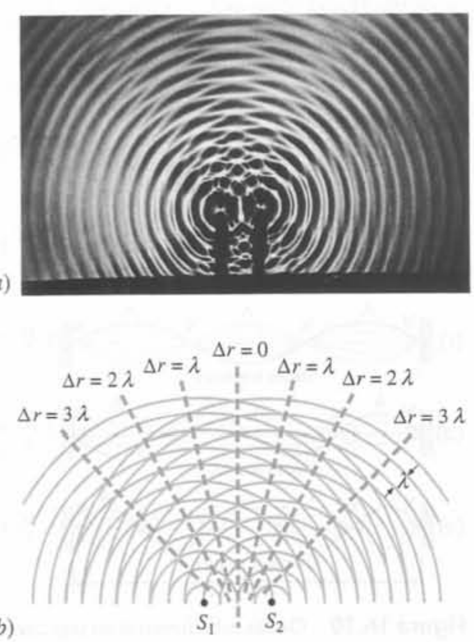
$= \boxed{\pm 12{,}5 \text{ cm}, \pm 37{,}5 \text{ cm}, \pm 62{,}5 \text{ cm}, 87{,}5 \text{ cm}}$

Observaciones Los máximos y mínimos serán máximos y mínimos relativos, ya que la amplitud del altavoz más próximo será ligeramente mayor que la correspondiente al altavoz más alejado. Solo se han utilizado siete valores de x para la intensidad máxima y ocho valores para la intensidad mínima ya que valores adicionales estarán fuera del alcance de un altavoz.

La figura 16.8*a* muestra el conjunto de las ondas producidas por dos focos puntuales en una cubeta experimental que están oscilando en fase, produciendo cada uno de ellos ondas circulares. Los frentes de onda que se observan tienen todos la misma fase y están separados por una longitud de onda. Podemos construir un esquema semejante con un compás dibujando arcos circulares que representen las crestas de las ondas de cada foco en un instante de tiempo determinado (figura 16.8*b*). En los puntos en donde se cortan o solapan las crestas procedentes de cada foco, las ondas interfieren constructivamente. En estos puntos, los trayectos correspondientes a las ondas procedentes de ambos focos son iguales o difieren en un número entero de longitudes de onda. Las líneas de trazos indican los puntos que son equidistantes de los focos o cuyas diferencias de trayectos son una, dos o tres longitudes de onda. En cada punto de cualquiera de esta líneas la interferencia es constructiva, de modo que éstas son líneas de interferencia máxima. Entre las líneas de interferencia máxima hay líneas de interferencia mínima. En una línea de interferencia mínima, la longitud desde cualquier punto que esté en ella hasta cada uno de los dos focos difiere en un número impar de semilongitudes de onda. En la región donde las dos ondas se superponen, la amplitud de la onda resultante viene dada por $A = 2p_0 \cos \frac{1}{2}\,\delta$, siendo p_0 la amplitud de cada onda por separado y estando δ relacionada con la diferencia de trayectos Δr mediante $\delta = 2\pi\, \Delta r/\gamma$(ecuación 16.9).

La figura 16.9 muestra la intensidad de la onda resultante a partir de dos focos, en función de la diferencia de trayectos Δx. En los puntos en que la interferencia es constructiva, la intensidad es $4I_0$, en donde I_0 es la intensidad debida a una cualquiera de las fuentes, ya que la amplitud de la resultante es el doble de la amplitud de una de las ondas cualesquiera. En los puntos de interferencia destructiva, la intensidad es cero. La intensidad media, indicada por la línea de trazos de la figura, es el doble de la intensidad correspondiente a la de un solo foco, resultado exigido por la conservación de la energía. Podemos ver que, como consecuencia de la interferencia de las ondas procedentes de dos focos, la energía se redistribuye en el espacio. Puede mostrarse la interferencia entre dos ondas sonoras alimentando dos altavoces separados

(*a*)



(*b*)

Figura 16.8 (*a*) Ondas de agua producidas por dos focos puntuales que oscilan en fase en una cubeta de ondas. (*b*) Construcción geométrica del patrón de interferencia de (*a*). Las líneas de trazos indican los puntos para los cuales las longitudes de los trayectos difieren en un número entero de longitudes de onda.

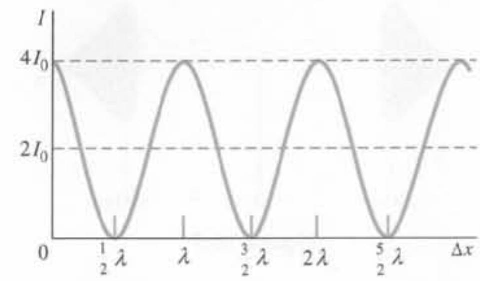


Figura 16.9 Intensidad en función de la diferencia de trayectos para dos fuentes que están en fase. I_0 es la intensidad de cada fuente individualmente.

con el mismo amplificador (de modo que estén siempre en fase) que recibe una señal de audiofrecuencia. Moviéndose por la habitación es posible detectar por el oído las posiciones de interferencia constructiva y destructiva.[1] Esta experiencia ha de realizarse en cámaras insonorizadas, donde se minimizan las reflexiones (los ecos) de las paredes del recinto.

Coherencia No es necesario que dos focos estén en fase para que produzcan un patrón de interferencia. Considérense dos focos que están desfasados en 180°. (Dos focos sonoros que están en fase pueden convertirse en dos focos desfasados en 180°, intercambiando simplemente las conexiones de uno de los altavoces.) El patrón de intensidades es el mismo que el de la figura 16.9 excepto que los máximos y mínimos están intercambiados. En los puntos en que la diferencia de trayectos es un número impar de semilongitudes de onda, las ondas están ahora en fase porque la diferencia de fase de 180° se ve contrarrestada por la diferencia de fase de 180° originada por la diferencia entre los trayectos.

Se producirán patrones de interferencia semejantes, mediante dos focos cuya diferencia de fase sea constante a lo largo del tiempo. Dos focos que están en fase o tienen una diferencia de fase constante se dice que son focos o **fuentes coherentes**. Es fácil conseguir fuentes coherentes de ondas en el agua de una cubeta de ondas si se accionan ambas fuentes con el mismo motor. Se obtienen focos sonoros coherentes accionando dos altavoces con la misma fuente de señal y el mismo amplificador.

Las fuentes de ondas cuya diferencia de fase no es constante a lo largo del tiempo, sino que varía aleatoriamente, se denominan **fuentes incoherentes**. Existen muchos ejemplos de fuentes incoherentes, como dos altavoces alimentados por amplificadores diferentes o dos violines tocados por dos violinistas diferentes. En el caso de fuentes incoherentes, la interferencia en un punto concreto varía rápidamente pasando de constructiva a destructiva, y viceversa, y no se observa ningún patrón de interferencia. La intensidad resultante de las ondas originadas por dos o más fuentes incoherentes es simplemente la suma de las intensidades debidas a las fuentes aisladas.

16.2 Ondas estacionarias

Cuando las ondas están confinadas en el espacio, como las ondas de una cuerda de piano, las ondas sonoras de un tubo de órgano o las ondas luminosas de un láser se producen reflexiones en ambos extremos y, por consiguiente, existen ondas que se mueven en los dos sentidos que se combinan de acuerdo con el principio de superposición. Para una cuerda o tubo determinados, existen ciertas frecuencias para las cuales la superposición da un patrón de vibración estacionario denominado **onda estacionaria**. Este tipo de ondas tiene aplicaciones importantes en instrumentos musicales y en teoría cuántica.

Ondas estacionarias en cuerdas

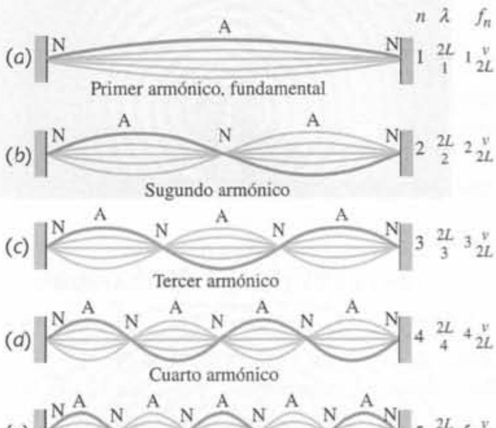


Figura 16.10 Ondas estacionarias en una cuerda fija por ambos extremos. Los puntos marcados con A son vientres o antinodos y los señalados con N son nodos. En general, el armónico enésimo tiene n antinodos.

Cuerda fija por ambos extremos Si fijamos los dos extremos de una cuerda y movemos una parte de la misma hacia arriba y hacia abajo con un movimiento armónico simple de pequeña amplitud, resulta que a ciertas frecuencias se obtienen unos patrones de ondas estacionarias semejantes a los indicados en la figura 16.10. Las frecuencias que producen estos patrones se denominan **frecuencias de resonancia** del sistema de la cuerda. Cada una de estas frecuencias y la función de onda que la acompaña se llama **modo de vibración**. La frecuencia de resonancia más baja se denomina frecuencia fundamental f_1 y produce el patrón de ondas estacionarias indicado en la figura 16.10*a* que recibe el nombre de **modo fundamental** de vibración o **primer armónico**. La segunda frecuencia más baja f_2 produce el patrón indicado en la figura 16.10*b*. Este modo de vibración tiene una frecuencia que es el doble de la frecuencia fundamental y se denomina segundo armónico. La tercera frecuencia más baja f_3 es tres veces la fundamental y produce el patrón del tercer armónico indicado en la figura 16.10*c*. El conjunto de todas las frecuencias resonantes de la cuerda se denomina **espectro de frecuencias de resonancia.**

[1] En esta demostración, la intensidad sonora no será totalmente nula en los puntos de interferencia destructiva de las ondas sonoras que proceden directamente de los altavoces, debido a las reflexiones del sonido en las paredes y otros objetos presentes en la habitación.

No todas las frecuencias de resonancia reciben la denominación de armónicos sino únicamente aquellas del espectro de frecuencias resonantes que son un múltiplo entero de la frecuencia fundamental. Muchos sistemas tienen un espectro de ondas resonantes en donde las frecuencias resonantes no son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental (la de menor frecuencia). Se denomina primer sobretono a la primera frecuencia después de la fundamental, el segundo sobretono a la segunda y así sucesivamente. Esta denominación tiene su origen en la terminología usada en la teoría musical, donde los armónicos son los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.

Obsérvese en la figura 16.10 que para cada armónico existen ciertos puntos sobre la cuerda que no se mueven. Por ejemplo, el punto medio en la figura 16.10*b* no se mueve. Estos puntos se denominan **nodos**. En el punto intermedio entre cada par de nodos existe un punto de amplitud de vibración máxima denominado **vientre o antinodo**. Como es natural, los dos extremos fijos de la cuerda son nodos. (Si se sujeta uno de los extremos a un diapasón u otro vibrador en lugar de estar fijo, seguirá siendo todavía aproximadamente un nodo porque la amplitud de vibración en dicho extremo será mucho menor que la amplitud en los antinodos.) Obsérvese que el fundamental o primer armónico tiene un antinodo, el segundo armónico tiene dos antinodos y así sucesivamente.

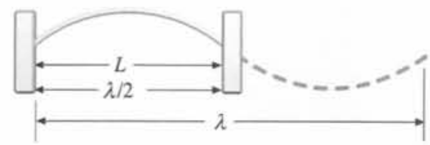


Figura 16.11

Podemos relacionar las frecuencias de resonancia con la velocidad de onda en la cuerda y la longitud de la misma. La distancia entre un nodo y el antinodo más próximo es un cuarto de longitud de onda. Por lo tanto, la longitud de la cuerda L es igual a la mitad de la longitud de onda del primer armónico (figura 16.11) y, como revela la figura 16.10, L es igual a dos medias longitudes de onda para el segundo armónico, tres medias longitudes de onda para el tercer armónico, etc. En general, si λ_n es la longitud de onda del armónico n se cumple

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{16.10}$$

CONDICIÓN DE ONDA ESTACIONARIA CON AMBOS EXTREMOS FIJOS

Este resultado se conoce como **condición de onda estacionaria**. Podemos hallar la frecuencia del enésimo armónico a partir del hecho de que la velocidad de la onda v es igual a la frecuencia f_n multiplicada por la longitud de onda. Así

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2L/n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

o bien

$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{16.11}$$

FRECUENCIAS DE RESONANCIA, AMBOS EXTREMOS FIJOS

en donde $f_1 = v/2L$ es la frecuencia fundamental.

Un modo sencillo de recordar las frecuencias de resonancia dadas por la ecuación 16.11 es hacer el esquema de la figura 16.10 para reconstruir uno mismo la condición de onda estacionaria $\lambda_n = 2L/n$ y luego utilizar $f = v_n/\lambda_n$.

SUGERENCIA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Podemos entender la producción de ondas estacionarias en función de la resonancia. Consideremos una cuerda de longitud L que está sujeta por un extremo a un diapasón en vibración (figura 16.12), mientras que tiene fijo el otro extremo. La primera onda producida por el diapasón vibrante recorre la cuerda hasta que a una distancia L se encuentra con el extremo fijo, en donde se refleja e invierte. Entonces regresa hacia el diapasón, y se refleja de nuevo en éste. El tiempo total para recorrer la distancia $2L$ es $2L/v$. Si este tiempo es igual al periodo del diapasón vibrante, la onda reflejada dos veces se solapa exactamente a la

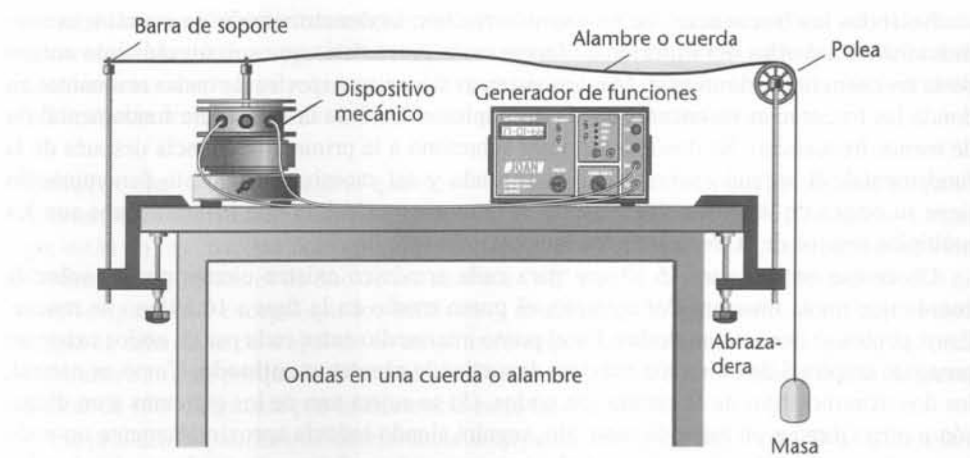


Figura 16.12

Figura 16.13 Ondas en una cuerda producidas por un dispositivo mecánico cuya frecuencia no está en resonancia con las frecuencias naturales de la cuerda. La onda que abandona el diapasón por primera vez (línea de trazos roja) no está en fase con las ondas que se han reflejado dos o más veces (líneas grises), y éstas no están en fase entre ellas, por lo que no existe crecimiento de amplitud. La onda resultante (línea negra) tiene aproximadamente la misma amplitud que las ondas individuales, que coinciden aproximadamente con la amplitud del dispositivo.

segunda onda producida por el diapasón y las dos ondas interferirán constructivamente, lo que significa que se sumarán para producir una onda que tendrá una amplitud doble que la de una de ellas. La onda combinada recorrerá la cuerda hasta el extremo fijo y retornará añadiéndose a la tercera onda producida por el diapasón y así sucesivamente. Así, el diapasón entra en resonancia con la cuerda. La longitud de onda es igual a $2L$ y la frecuencia es $v/(2L)$.

La resonancia también se da en otras frecuencias. El diapasón entra en resonancia con la cuerda si el tiempo que le cuesta a la primera onda moverse una distancia $2L$ es igual al producto nT_n en donde n es un número entero y T_n es el periodo del diapasón. Es decir, si $2L/v = nT_n$, donde $2L/v$ es el tiempo de ida y vuelta de una onda. Así,

$$f_n = \frac{1}{T_n} = n\,\frac{v}{2L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

es la condición de resonancia. Este resultado es el mismo que encontramos ajustando un número entero de semilongitudes de onda en la distancia L. Diversos efectos amortiguadores tales como la pérdida de energía durante la reflexión y la flexibilidad imperfecta de la cuerda limitan la amplitud máxima que puede alcanzarse.

Las frecuencias de resonancia dadas por la ecuación 16.11 se denominan también **frecuencias naturales** de la cuerda. Cuando la frecuencia del diapasón no coincide con ninguna de las frecuencias naturales de la cuerda vibrante, no se producen ondas estacionarias. Después de que la primera onda ha recorrido la distancia $2L$ y se ha reflejado en el diapasón, su fase es diferente de la que posee la onda que en ese momento está generando el diapasón (figura 16.13). Cuando esta onda resultante ha recorrido la distancia $2L$ y se refleja de nuevo en el dia-

El viento turbulento produjo ondas estacionarias en el puente colgante de Tacoma Narrows, produciendo su derrumbamiento el 7 de noviembre de 1940, sólo cuatro meses después de haber sido abierto al tráfico.

pasón, tendrá una fase que será en general diferente de la que posee la siguiente onda generada en el diapasón. En algunos casos, la nueva onda resultante tendrá una amplitud mayor que la primera, mientras que en otros casos la nueva amplitud será menor. En promedio, sin embargo, la amplitud no aumentará sino que permanecerá en el orden de magnitud de la amplitud de la primera onda generada, que es la amplitud del diapasón y es muy pequeña en comparación con las amplitudes que se obtienen a las frecuencias de resonancia.

La resonancia de las ondas estacionarias es análoga a la resonancia de un oscilador armónico simple con una fuerza impulsora armónica. Sin embargo, un oscilador posee sólo una frecuencia natural, mientras que una cuerda vibrante posee una secuencia de frecuencias naturales que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Esta secuencia se denomina **serie armónica**.

EJEMPLO 16.5 | Toca un La

Una cuerda se estira entre dos soportes fijos distantes 0,70 m entre sí y se ajusta la tensión hasta que la frecuencia fundamental de la cuerda es la nota La de 440 Hz. ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en la cuerda?

Planteamiento del problema La velocidad de la onda es igual al producto de la frecuencia por la longitud de onda. Si la cuerda está fija en los dos extremos, en el modo fundamental hay un único antinodo en el centro de la cuerda. Así la longitud de la cuerda coincide con la mitad de la longitud de onda.

1. La velocidad de la onda está relacionada con la frecuencia y la longitud de onda: $v = f_1\lambda_1$
2. La longitud de onda del modo fundamental es el doble de la longitud de la cuerda: $L = \lambda_1/2$
3. Utilizar esta longitud de onda y la frecuencia conocida para determinar la velocidad: $v = f_1\lambda_1 = f_1 2L = (440\ \text{Hz}) \times 2(0{,}7\ \text{m}) = \boxed{616\ \text{m/s}}$

Ejercicio La velocidad de las ondas transversales en una cuerda tensa es de 200 m/s. Si la cuerda tiene 5 m de largo, hallar las frecuencias del armónico fundamental y del segundo y tercer armónicos. (*Respuesta* $f_1 = 20$ Hz, $f_2 = 40$ Hz, $f_3 = 60$ Hz.)

EJEMPLO 16.6 | Probando cuerdas de piano

Durante el verano un estudiante encuentra un trabajo en una tienda de música, donde colabora en la construcción de instrumentos musicales. Uno de los trabajos que tiene encomendado es probar la idoneidad del uso de cuerdas de un nuevo material en pianos. Una cuerda tiene una longitud de tres metros y una densidad de masa lineal de 0,0025 kg/m y se le han medido dos frecuencias resonantes consecutivas a 252 Hz y a 336 Hz. Hay que determinar la frecuencia fundamental de la cuerda y comprobar si una cuerda de este nuevo material es adecuada, teniendo en cuenta que si la tensión de la misma sobrepasa los 700 N hay problemas de seguridad.

Planteamiento del problema La tensión F_T se calcula a partir de la expresión $v = \sqrt{F_T/\mu}$, en donde la velocidad v se calcula a partir de $v = f\lambda$ usando cualquier armónico. La longitud de onda de la onda fundamental es el doble de la longitud de la cuerda. Para calcular la frecuencia fundamental supongamos que el armónico n corresponde a una frecuencia de 252 Hz. Entonces $f_n = nf_1$ y $f_{n+1} = (n+1)f_1$, en donde $f_{n+1} = 366$ Hz. De estas dos ecuaciones se despeja f_1.

1. La tensión está relacionada con la velocidad de propagación de la onda: $v = \sqrt{F_T/\mu}$ o $F_T = \mu v^2$
2. Para obtener la velocidad usar la frecuencia fundamental f_1, con $\lambda_1 = 2L$: $v = f_1\lambda_1 = f_1(2L)$
3. Para obtener la tensión combinar los dos resultados anteriores: $F_T = \mu v^2 = \mu f_1^2(2L)^2$
4. Los armónicos consecutivos f_n y f_{n+1} están relacionados con la frecuencia fundamental f_1: $nf_1 = 252$ Hz; $(n+1)f_1 = 336$ Hz

5. Dividir las dos ecuaciones anteriores permite eliminar f_1 y calcular n: $\frac{n}{n+1} = \frac{252\text{ Hz}}{336\text{ Hz}} = 0{,}75 = \frac{3}{4}$

   $4n = 3n + 3$, luego $n = 3$

6. Despejar f_1: $f_n = nf_1$ por lo tanto $f_1 = \frac{f_n}{n} = \frac{f_3}{3} = \frac{252\text{ Hz}}{3} = 84\text{ Hz}$

7. Se usa el resultado del paso 3 para calcular F_T: $F_T = \mu f_1^2(2L)^2 = (0{,}0025\text{ kg/m})(84\text{ Hz})^2(6\text{ m})^2 = 635\text{ N}$

8. ¿La tensión es segura? La tensión es inferior a 700 N, con lo cual parece que la cuerda es segura siempre y cuando la tensión no aumente de forma significativa.

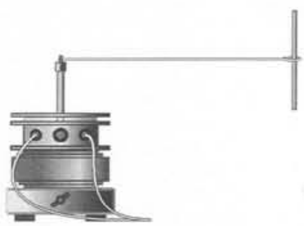


Figura 16.14 Se pueden reproducir las condiciones en que una cuerda está fija por un extremo y libre por el otro atando un anillo que se mueve con toda libertad por una varilla vertical al extremo libre de la cuerda. El otro extremo se ata a un dispositivo mecánico que oscila con una amplitud muy pequeña, con lo cual puede suponerse que el extremo está fijo.

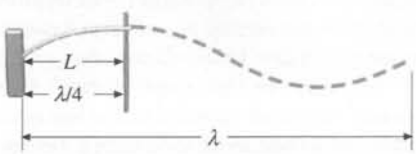


Figura 16.15

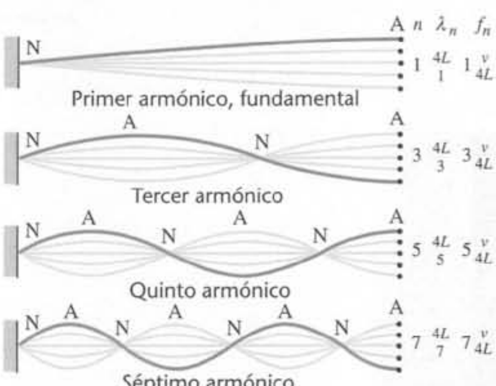


Figura 16.16 Ondas estacionarias en una cuerda fija sólo por un extremo. El extremo libre es un vientre o antinodo.

Cuerda fija por un extremo y libre por el otro La figura 16.14 muestra una cuerda que tiene un extremo fijo y el otro atado a un anillo sin masa que puede moverse con toda libertad hacia arriba y hacia abajo por una varilla vertical. El movimiento vertical del extremo atado al anillo no tiene ninguna restricción, por lo que podemos decir que es un extremo libre. El anillo no tiene masa, es decir, si la cuerda le ejerce una fuerza vertical finita éste responderá con una aceleración infinita. La aceleración será finita sólo si la pendiente de la cuerda en su extremo libre es horizontal, lo cual significa que es un antinodo. En el modo fundamental de vibración de una cuerda sujeta únicamente por un extremo hay un nodo en un extremo y un antinodo en el otro, por lo tanto $L=\lambda_1/4$ (figura 16.15). (La distancia de un nodo al siguiente antinodo es $\lambda/4$.)

En cada modo de vibración mostrado en la figura 16.16 hay un número impar de cuartos de longitud de onda en toda la cuerda, es decir, $L = n\lambda_n/4$, en donde $n = 1,3,5,\ldots$ La condición de onda estacionaria se escribe como

$$L = n\frac{\lambda_n}{4}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{16.12}$$

CONDICIÓN DE ONDA ESTACIONARIA, UN EXTREMO LIBRE

con lo cual $\lambda_n = 4L/n$. En estas condiciones, las frecuencias de resonancia vienen dadas por

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{4L} = nf_1, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{16.13}$$

FRECUENCIAS DE RESONANCIA, UN EXTREMO LIBRE

en donde

$$f_1 = \frac{v}{4L} \tag{16.14}$$

es la frecuencia fundamental. Las frecuencias naturales de este sistema se presentan en las razones 1:3:5:7:…, lo que significa que se han perdido los armónicos pares.

La ecuación 16.13 se esquematiza en la figura 16.16 para recordarnos de un modo sencillo las frecuencias de resonancia y la condición de onda estacionaria utilizando $f = v_n/\lambda_n$.

SUGERENCIA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Funciones de onda para ondas estacionarias Cuando una cuerda vibra en su modo n, cada punto de la cuerda se mueve con movimiento armónico simple. Su desplazamiento $y_n(x, t)$ viene dado por

$$y_n(x, t) = A_n(x)\cos(\omega_n t + \delta_n)$$

en donde ω_n es la frecuencia angular, δ_n la constante de fase, que depende de las condiciones iniciales, y $A_n(x)$ es la amplitud, que depende de la localización del segmento. La función $A_n(x)$ es la forma de la cuerda cuando $\cos(\omega_n t + \delta_n) = 1$ (el instante en que la vibración tiene su amplitud máxima). La amplitud de una cuerda vibrando en su armónico n es

$$A_n(x) = A_n \text{ sen } k_n x \tag{16.15}$$

en donde $k_n = 2\pi/\lambda_n$ es el número de ondas. Por lo tanto, la función de onda para una onda estacionaria en el armónico n puede escribirse en la forma

$$y_n(x, t) = A_n \text{ sen } k_n x \cos(\omega_n t + \delta_n) \tag{16.16}$$

Es útil recordar las dos condiciones necesarias para que se den ondas estacionarias, a saber,

1. Cada punto de la cuerda permanece en reposo o bien oscila con movimiento armónico simple. (Los puntos en reposo son los nodos).
2. El movimiento de dos puntos cualesquiera de la cuerda que no sean nodos va en fase o con un desfase de 180°.

CONDICIONES NECESARIAS PARA EL MOVIMIENTO DE UNA ONDA ESTACIONARIA EN UNA CUERDA

EJEMPLO 16.7 | Ondas estacionarias — *¡INTÉNTELO USTED MISMO!*

(*a*) Las funciones de onda para dos ondas de igual amplitud, frecuencia y longitud de onda, pero que se propagan en sentidos opuestos, vienen dadas por $y_1 = y_0$ sen $(kx - \omega t)$ e $y_2 = y_0$ sen $(kx + \omega t)$. Demostrar que la suma de estas dos ondas es una onda estacionaria. (*b*) Una onda estacionaria en una cuerda fija por sus dos extremos viene dada por $y(x, t) = (0{,}024\text{ m})$ sen $(52{,}3\text{ m}^{-1}\,x)$ cos $(480\text{ s}^{-1}\,t)$. Determinar la velocidad de las ondas sobre la cuerda y la distancia entre los nodos para las ondas estacionarias.

Planteamiento del problema Para demostrar que la superposición de dos ondas es una onda estacionaria hay que demostrar que la suma algebraica de y_1 e y_2 puede escribirse de una forma semejante a la ecuación 16.16. Para determinar la velocidad de propagación de la onda y la longitud de onda se compara la función de onda dada con la ecuación 16.16 y se identifican el número de onda y la frecuencia angular, y a partir de éstos se calcula la longitud de onda y la velocidad de propagación.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
(a) 1. Escribir la ecuación 16.16. Si la suma de y_1 e y_2 puede escribirse de esta forma, la superposición de las dos ondas es una onda estacionaria.	$y(x, t) = A \text{ sen } kx \cos \omega t$
2. Sumar las dos funciones de onda y usar la identidad trigonométrica sen θ_1 + sen θ_2 = 2 sen $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$cos $\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$.	$y = y_0 \text{ sen}(kx - \omega t) + y_0 \text{ sen}(kx + \omega t)$ $= 2y_0 \text{ sen } kx \cos \omega t$

Nota: Esta expresión coincide con la forma dada por la ecuación 16.16 con $A = 2y_0$, por lo tanto, la superposición es una onda estacionaria.

(b) 1. Identificar el número de onda y la frecuencia angular.	$k = \boxed{52{,}3\text{ m}^{-1}}$, $\omega = \boxed{480\text{ s}^{-1}}$
2. Calcular la velocidad a partir de $v = \omega/k$.	$v = \boxed{9{,}18\text{ m/s}}$
3. Determinar la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, y usar esta magnitud para calcular la distancia entre nodos.	$\frac{\lambda}{2} = \boxed{6{,}01\text{ cm}}$

Ondas sonoras estacionarias

Un tubo de órgano es un ejemplo familiar del empleo de ondas estacionarias en columnas de aire. En estos tubos de tipo lengüeta se dirige un chorro de aire contra el borde afilado de una abertura (punto *A* en la figura 16.17). El movimiento turbulento complicado del aire cerca de dicho borde crea vibraciones en la columna de aire. Las frecuencias de resonancia del tubo dependen de su longitud y de que su extremo esté abierto o cerrado.

Figura 16.17 Tubo de órgano de lengüeta. Se sopla una corriente de aire contra el borde originando un movimiento turbulento del aire cerca de A que excita ondas estacionarias en el tubo. Existe un nodo de presión cerca del punto A, que está abierto a la atmósfera.

En un tubo de órgano abierto, la presión en ambos extremos es igual a la presión atmosférica y no varía. Por lo tanto, existe un nodo de presión en los dos extremos del tubo. (Este resultado está basado en la hipótesis de que la onda sonora en el tubo es una onda unidimensional, lo cual es aproximadamente cierto si el diámetro del tubo es mucho menor que la longitud de onda. En la práctica, los nodos de presión están ligeramente más allá de los extremos del tubo. La longitud efectiva del tubo es $L_{ef} = L + \Delta L$, en donde ΔL es la corrección de los extremos, una distancia que es algo menor que el diámetro del tubo.) La condición de onda estacionaria para este sistema es la misma que para una cuerda fija por ambos extremos. Una vez que se reemplaza L por L_{ef} (la longitud efectiva del tubo), pueden aplicarse las mismas ecuaciones de la cuerda.

En un tubo de órgano cerrado (abierto por un extremo y cerrado por el otro) hay un nodo de presión próximo a la abertura (punto A de la figura 16.17) y un antinodo de presión en el extremo cerrado. La condición de onda estacionaria para este sistema es la misma que la de una cuerda con un extremo fijo y el otro libre. La longitud efectiva del tubo debe ser igual a un número impar de veces $\lambda/4$. Es decir, la longitud de onda del modo fundamental es 4 veces la longitud efectiva del tubo y sólo están presentes los armónicos impares.

Como vimos en el capítulo 15, una onda sonora puede considerarse como una onda de presión o como una onda de desplazamiento. Las variaciones de presión y desplazamiento en una onda sonora están desfasadas 90°. Así, en una onda sonora estacionaria, los nodos de presión son antinodos de desplazamiento y viceversa. Cerca del extremo abierto de un tubo de órgano hay un nodo de presión y un antinodo de desplazamiento, mientras que el extremo cerrado es un antinodo de presión y un nodo de desplazamiento.

EJEMPLO 16.8 | Ondas sonoras estacionarias en una columna de aire I

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Si la velocidad del sonido es 340 m/s, ¿cuáles son las frecuencias y las longitudes de onda permitidas en el caso de las ondas estacionarias de un tubo abierto por los dos lados cuya longitud efectiva es 1 m?

Planteamiento del problema En cada extremo hay un antinodo para el desplazamiento (y un nodo para la presión). Por consiguiente, la longitud efectiva del tubo es un número entero de semilongitudes de onda.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
1. Calcular la longitud de onda fundamental a partir de $\lambda_1 = 2L_{ef}$.	$\lambda_1 = 2L_{ef} = 2\ \text{m}$
2. Utilizar el valor de λ_1 para calcular la frecuencia fundamental f_1.	$f_1 = \dfrac{v}{\lambda_1} = 170\ \text{Hz}$
3. Escribir expresiones para las frecuencias f_n y longitudes de onda λ_n de los restantes armónicos en función de n.	$\boxed{f_n = nf_1 = n(170\ \text{Hz}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$ $\boxed{\lambda_n = \dfrac{2L}{n} = \dfrac{2\ \text{m}}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$

EJEMPLO 16.9 | Ondas sonoras estacionarias en una columna de aire II

Cuando encima del tubo parcialmente lleno de agua de la figura 16.18 se mantiene un diapasón de 500 Hz de frecuencia, aparecen resonancias cuando el nivel del agua está a distancias L = 16,0, 50,5, 85,0 y 119,5 cm de la parte superior del tubo. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del sonido en el aire? (*b*) ¿A qué distancia del extremo del tubo está el antinodo de desplazamiento?

Planteamiento del problema Ajustando el nivel del agua, en la columna de aire de longitud ajustable L se producen ondas sonoras de 500 Hz. La columna de aire está cerrada por un extremo y abierta por el otro. Así cuando hay resonancia, en el tubo hay un número impar de cuartos de longitudes de onda (véase la figura 16.19). Hay un nodo de desplazamiento en la superficie del agua y un antinodo de desplazamiento un poco por encima del extremo abierto del tubo. Ya que la frecuencia está determinada por el diapasón también lo está la longitud de onda. La velocidad de propagación se calcula entonces a partir de $v = f\lambda$, donde f es 500 Hz.

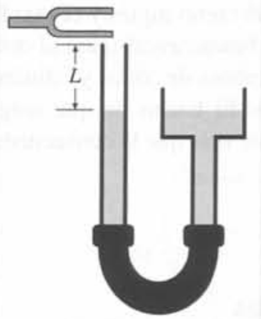


Figura 16.18

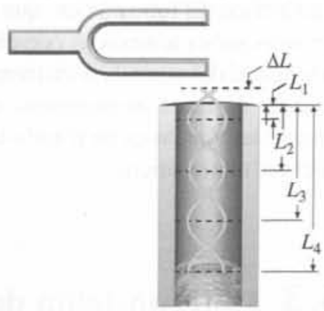


Figura 16.19

(a) 1. La velocidad del sonido en el aire está relacionada con la frecuencia y la longitud de onda:

$v = f\lambda$

2. La longitud de onda es el doble de la distancia entre dos niveles sucesivos del agua en los que se da resonancia:

$\lambda = 2(L_{n+1} - L_n), \quad n = 1, 2, 3, 4$

3. La distancia entre dos niveles sucesivos de agua se determina a partir de los datos del problema:

$L_{n+1} - L_n = L_4 - L_3 = 119{,}5\text{ cm} - 85\text{ cm} = 34{,}5\text{ cm}$

sustituyendo arriba se obtiene

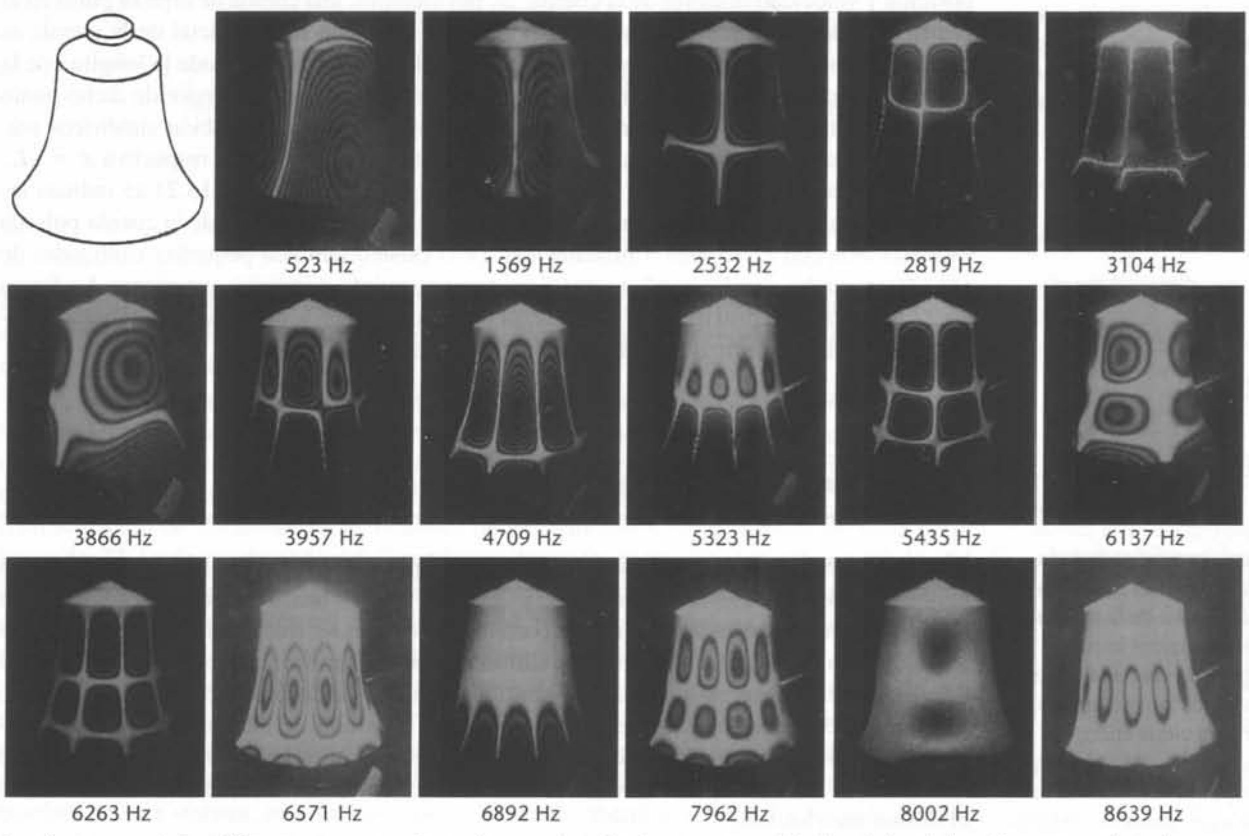
$\lambda = 2(34{,}5\text{ cm}) = 69\text{ cm} = 0{,}69\text{ m}$

4. Para calcular v se sustituyen los valores de f y de λ:

$v = f\lambda = (500\text{ Hz})(0{,}69\text{ m}) = \boxed{345\text{ m/s}}$

(b) Hay un antinodo $\lambda/4$ por encima del nodo situado en la superficie del agua. Así, la distancia desde el nivel del agua más alto que da lugar a resonancia y el antinodo situado por encima del tubo es $\lambda/4$, es decir $\frac{1}{4}\lambda = L_1 + \Delta L$:

$\Delta L = \frac{1}{4}\lambda - L_1 = \frac{1}{4}(69{,}0\text{ cm}) - (16{,}0\text{ cm}) = \boxed{1{,}25\text{ cm}}$



Interferogramas holográficos que muestran las ondas estacionarias de una campanilla. Los "ojos de buey" corresponden a las posiciones de los vientres o antinodos.

La mayoría de los instrumentos musicales son mucho más complicados que un simple tubo cilíndrico. El tubo cónico, que es la base del oboe, el fagot, el corno inglés y el saxofón tienen unas series armónicas completas con su longitud de onda fundamental igual al doble de la longitud del cono. Los instrumentos de viento son combinaciones de conos y cilindros. El análisis de estos instrumentos es extremadamente complejo. El hecho de que tengan series casi armónicas es un triunfo del método de tanteo inteligente más que la consecuencia de cálculos matemáticos.

Figura 16.20 Cuerda pulsada por el centro. Cuando se deja libre, su vibración es una combinación lineal de ondas estacionarias.

*16.3 Superposición de ondas estacionarias

Como hemos visto existen una serie de frecuencias de resonancia naturales que producen ondas estacionarias sonoras en columnas de aire o cuerdas vibrantes que están sujetas por uno o ambos extremos. Por ejemplo, para una cuerda fija en ambos extremos, la frecuencia del modo fundamental de vibración es $f_1 = v/2L$, en donde L es la longitud de la cuerda y v la velocidad de la onda. La función de onda correspondiente es la ecuación 16.16:

$$y_1(x, t) = A_1 \operatorname{sen} k_1 x \cos(\omega_1 t + \delta_1)$$

En general, un sistema vibrante no vibra con un modo armónico aislado. En su lugar, el movimiento se compone de una mezcla de los armónicos permitidos. La función de onda es una combinación lineal de funciones de onda armónicas:

$$y(x, t) = \sum_n A_n \operatorname{sen} k_n x \cos(\omega_n t + \delta_n) \tag{16.17}$$

en donde $k_n = 2\pi/\lambda_n$, $\omega_n = 2\pi f_n$ y A y δ_n son constantes. Las constantes A_n y δ_n dependen de la posición y velocidad iniciales de la cuerda. Si, por ejemplo, una cuerda de arpa se pulsa en el centro y se deja en libertad como muestra la figura 16.20, la forma inicial de la cuerda es simétrica alrededor del punto $x = \frac{1}{2}L$ y la velocidad inicial es cero en toda la longitud de la cuerda. El movimiento de la cuerda permanecerá siendo simétrico alrededor de dicho punto una vez suelta. Sólo se excitarán los armónicos impares, que son también simétricos respecto al punto central y no se excitarán los pares, que son antisimétricos respecto a $x = \frac{1}{2}L$. Es decir, la constante A_n es cero para todo valor par de n. En la figura 16.21 se indican las formas de los cuatro primeros armónicos. La mayor parte de la energía de la cuerda pulsada está asociada con el armónico fundamental, pero existen también pequeñas cantidades de energía asociadas con los modos armónicos tercero, quinto e impares superiores. La figura 16.22 muestra una aproximación de la forma inicial de la cuerda utilizando las superposiciones únicamente de los tres primeros armónicos impares.

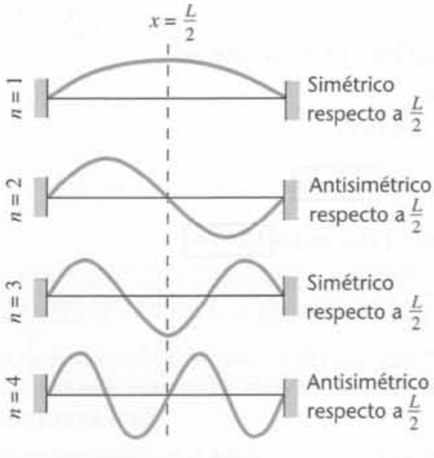


Figura 16.21 Los cuatro primeros armónicos correspondientes a una cuerda fija por ambos extremos. Los armónicos impares son simétricos respecto al centro de la cuerda, cosa que no ocurre con los armónicos pares. Cuando una cuerda se pulsa por el centro, vibra únicamente con los armónicos impares.

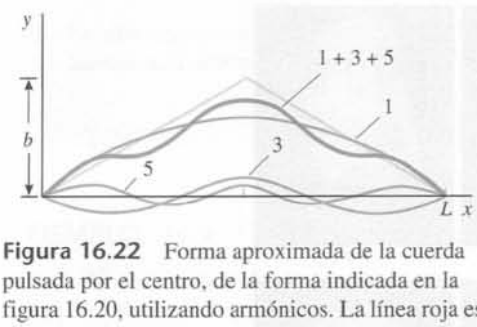


Figura 16.22 Forma aproximada de la cuerda pulsada por el centro, de la forma indicada en la figura 16.20, utilizando armónicos. La línea roja es la aproximación a la forma original de la cuerda basada en los tres primeros armónicos impares. La mayor parte de la energía está asociada con el fundamental, pero los armónicos tercero, quinto y demás impares poseen también cierta energía.

*16.4 Análisis y síntesis armónicos

Cuando un oboe y un clarinete tocan la misma nota, por ejemplo la nota La, suenan de forma muy diferente. Ambas notas tienen el mismo **tono**, que es una sensación fisiológica de la altura de la nota que está fuertemente correlacionada con su frecuencia. Sin embargo, las notas difieren en lo que se denomina **cualidad del tono o timbre**. La razón principal para la diferencia del timbre es que, aunque tanto el clarinete como el oboe están produciendo vibraciones con la misma frecuencia fundamental, cada uno de ellos está también produciendo armónicos cuyas intensidades relativas dependen del instrumento y de la forma en que se toque. Si cada instrumento produjese sólo la frecuencia fundamental, el sonido sería el mismo para los dos.

En la figura 16.23 se muestran algunos gráficos de las variaciones de presión en función de tiempo para un diapasón, un clarinete y un oboe, que tocan todos la misma nota. Estas

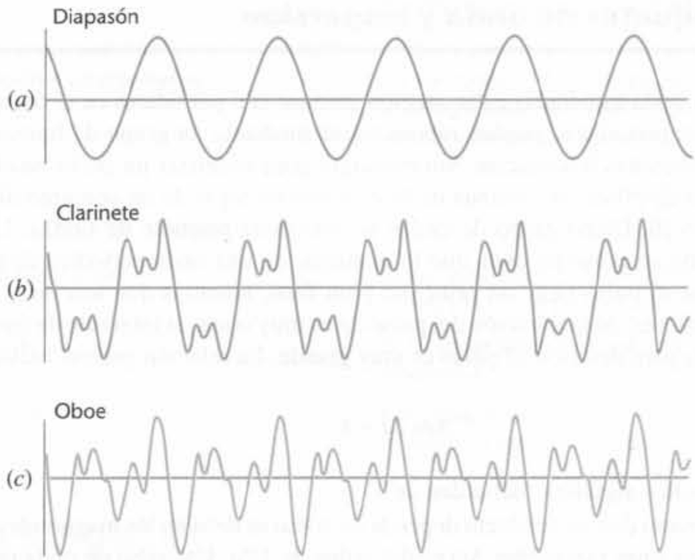


Figura 16.23 Formas de onda de (*a*) un diapasón, (*b*) un clarinete y (*c*) un oboe, todos con una frecuencia fundamental de 440 Hz y la misma intensidad aproximada.

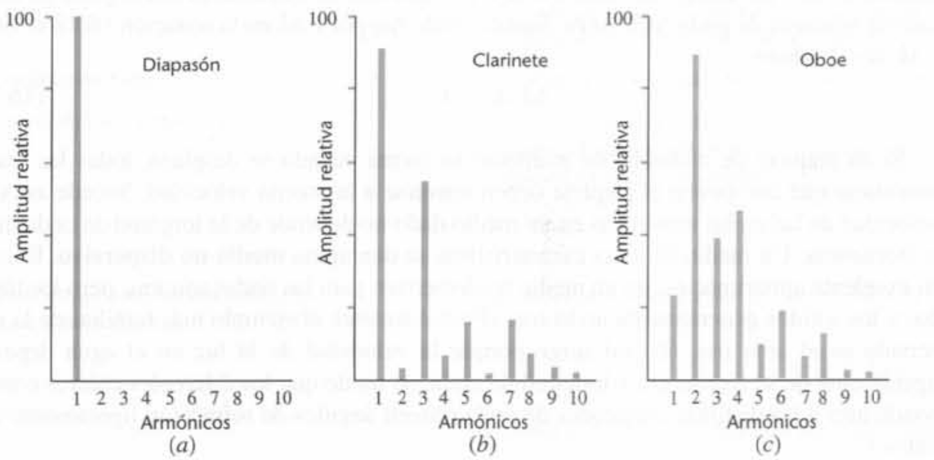


Figura 16.24 Intensidades relativas de los armónicos de las formas de onda indicadas en la figura 16.23 para (*a*) el diapasón, (*b*) el clarinete y (*c*) el oboe.

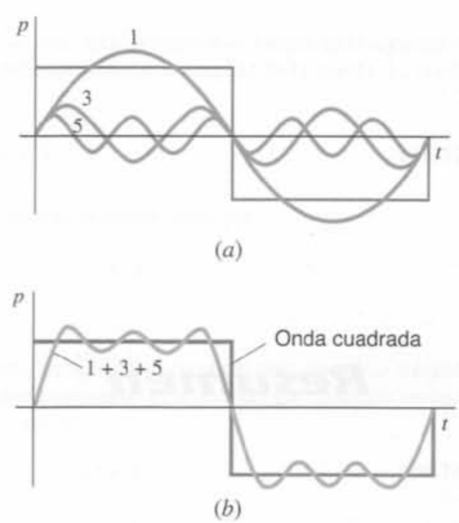


Figura 16.25 (*a*) Onda cuadrada y los tres primeros armónicos impares (ondas sinusoidales simples) utilizados para sintetizarla. (*b*) La forma aproximada de una onda cuadrada se obtiene sumando los tres primeros armónicos impares.

curvas reciben el nombre de **formas de onda**. La forma de onda correspondiente a un diapasón es prácticamente una onda sinusoidal pura, lo cual evidentemente no ocurre en el caso del clarinete y el oboe.

Las formas de onda pueden analizarse descomponiéndolas en los armónicos que la constituyen. Dicho análisis recibe el nombre de **análisis armónico**. (El análisis armónico también se llama a veces **análisis de Fourier**, ya que fue este científico francés quien desarrolló el método matemático para analizar funciones periódicas.) La figura 16.24 muestra una representación de las intensidades relativas de los armónicos de las formas de onda de la figura 16.23. La forma de onda del diapasón contiene sólo la frecuencia fundamental. La del clarinete contiene el armónico fundamental, grandes cantidades del tercero, quinto y séptimo armónicos y cantidades menores del segundo, cuarto y sexto armónicos. En el caso del oboe el segundo y cuarto armónicos tienen más energía que el fundamental.

La inversa del análisis armónico es la **síntesis armónica**, que es la construcción de una onda periódica a partir de sus componentes armónicos. La figura 16.25*a* muestra los tres primeros armónicos impares utilizados para sintetizar una onda cuadrada y la 16.25*b* muestra la onda cuadrada que resulta de la suma de los tres armónicos. Cuantos más armónicos se empleen en una síntesis, más se aproxima el resultado obtenido a la forma de onda real (la línea gris oscura de la figura). Las amplitudes relativas de los armónicos necesarios para sintetizar la onda cuadrada se indican en la figura 16.26.

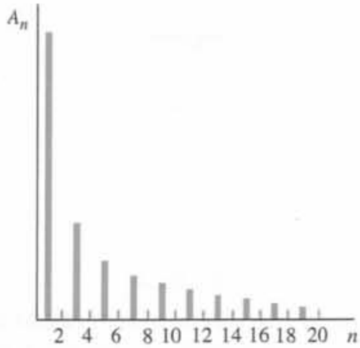


Figura 16.26 Amplitudes relativas A_n de los diez primeros armónicos necesarios para sintetizar una onda cuadrada. Cuantos más armónicos se utilicen, más nos aproximaremos a la onda cuadrada.

*16.5 Paquetes de onda y dispersión

Las formas de onda estudiadas en la sección anterior son periódicas en el tiempo. Los pulsos, que no son periódicos, pueden representarse mediante un grupo de funciones de onda armónicas de distintas frecuencias. Sin embargo, para sintetizar un pulso resulta necesario contar con una distribución continua de frecuencias en lugar de un conjunto discreto como en la figura 16.26. Dicho grupo de ondas se denomina **paquete de ondas**. La propiedad característica de un pulso de onda que lo distingue de una onda periódica de una sola frecuencia, es que el pulso tiene un principio y un final, mientras que una onda armónica se repite una y otra vez. Si la duración del pulso Δt es muy corta, el intervalo de frecuencias $\Delta\omega$ que se necesita para describir el pulso es muy grande. La relación general existente entre Δt y $\Delta\omega$ es

$$\Delta\omega\ \Delta t \sim 1 \qquad (16.18)$$

donde el símbolo ~ significa "del orden de".

El valor exacto de este producto depende de cómo se definen las magnitudes $\Delta\omega$ y Δt. En todas las definiciones razonables $\Delta\omega$ es del orden de $1/\Delta t$. Un pulso de onda producido por una fuente de corta duración Δt, como un golpe de bate sobre una pelota, tiene una anchura corta en el espacio $\Delta x = v\ \Delta t$, siendo v la velocidad de la onda. Toda onda armónica de frecuencia ω tiene un número de onda $k = \omega/v$. Un intervalo de frecuencias $\Delta\omega$ implica un intervalo de números de onda $\Delta k = \Delta\omega/v$. Sustituyendo $\Delta\omega$ por $v\ \Delta k$ en la ecuación 16.18 se tiene $v\ \Delta k\ \Delta t \sim 1$ o bien

$$\Delta k\ \Delta x \sim 1 \qquad (16.19)$$

Si un paquete de ondas ha de mantener su forma cuando se desplaza, todas las ondas armónicas que componen el paquete deben moverse a la misma velocidad. Sucede así si la velocidad de las ondas armónicas en un medio dado no depende de la longitud de onda ni de la frecuencia. Un medio de estas características se denomina **medio no dispersivo**. El aire, en excelente aproximación, es un medio no dispersivo para las ondas sonoras, pero los líquidos y los sólidos generalmente no lo son. (Probablemente el ejemplo más familiar de la dispersión es el arco iris, el cual surge porque la velocidad de la luz en el agua depende ligeramente de su frecuencia y longitud de onda, de modo que los diferentes colores correspondientes a las distintas longitudes de onda poseen ángulos de refracción ligeramente distintos.)

Cuando la velocidad de la onda en un medio dispersivo depende sólo ligeramente de la frecuencia y de la longitud de onda, un paquete de ondas cambia muy lentamente de forma en su propagación y recorre una distancia considerable como una entidad reconocible. Sin embargo, la velocidad de este paquete, llamada **velocidad de grupo**, no es la misma que la velocidad (media) de las ondas armónicas componentes individuales, llamada **velocidad de fase**. (La velocidad de una onda armónica individual es la velocidad de sus frentes de onda. Por lo tanto, se denomina velocidad de fase de la onda a la velocidad de los frentes de onda, ya que éstos son las líneas o superficies de fase constante.)

Resumen

1 El principio de superposición, válido para todas las ondas electromagnéticas en el vacío, para las ondas en una cuerda flexible tensa en la aproximación de ángulos pequeños y para las ondas sonoras de pequeña amplitud, resulta de la linealidad de las correspondientes ecuaciones de ondas.

2 La interferencia es un fenómeno ondulatorio importante que se aplica a todas las ondas que se superponen coherentemente. Resulta del principio de superposición. La difracción y la interferencia distinguen el movimiento ondulatorio del movimiento de partículas.

3 Las condiciones de onda estacionaria pueden recordarse esquematizando una cuerda o un tubo con nodos en un extremo fijo o cerrado y antinodos en un extremo libre o abierto.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Superposición e interferencia	La superposición de dos ondas armónicas de igual amplitud, número de onda y frecuencia, pero fase distinta δ, da lugar a una onda armónica del mismo número de onda y frecuencia pero distinta en fase y amplitud respecto a cada una de las ondas. $$y = y_1 + y_2 = y_0\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) + y_0\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta) = [2y_0 \cos \tfrac{1}{2}\delta]\,\mathrm{sen}\,(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\delta) \quad \textbf{(16.6)}$$
Interferencia constructiva	Si las ondas están en fase o difieren sus fases en un múltiplo entero de 2π, las amplitudes de las ondas se suman y la interferencia es constructiva.
Interferencia destructiva	Si las ondas difieren en fase en π o en un múltiplo impar de π, las amplitudes se restan y la interferencia es destructiva.
Pulsaciones (o batidos)	Las pulsaciones resultan de la interferencia de dos ondas de frecuencias ligeramente distintas. La frecuencia de batido es igual a la diferencia entre las frecuencias de las dos ondas: $$f_{\mathrm{batido}} = \Delta f$$
Diferencia de fase δ debida a la diferencia de trayectos Δx	$$\delta = k\,\Delta x = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \quad \textbf{(16.9)}$$
2. Ondas estacionarias	Cuando las ondas están confinadas en el espacio, las ondas estacionarias se producen a ciertas frecuencias y longitudes de onda. Sólo se dan ondas estacionarias cuando cada punto del sistema oscila en un movimiento armónico simple y dos puntos en movimiento cualesquiera oscilan en fase o con un desfase de 180º
Longitud de onda	La distancia entre un nodo y un antinodo adyacente es un cuarto de longitud de onda.
Cuerda fija por ambos extremos	En una cuerda fija por sus dos extremos se forma un nodo en cada uno de ellos. El resultado es que debe ajustarse un número entero de semilongitudes de onda en la longitud completa de la cuerda. En este caso, la condición de onda estacionaria es $$L = n\frac{\lambda_n}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \textbf{(16.10)}$$
Onda estacionaria en una cuerda fija por los dos extremos	Las ondas permitidas forman una serie armónica, en que las frecuencias vienen dadas por $$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L} = nf_1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$ en donde $f_1 = v/2L$ es la frecuencia más baja, llamada fundamental.
Tubo de órgano abierto por ambos extremos	Las ondas sonoras estacionarias en el aire de un tubo abierto por ambos extremos dan lugar a un nodo de presión (y un antinodo de desplazamiento) cerca de cada extremo. La condición de onda estacionaria es la misma que la de una cuerda fija por los dos extremos.
Cuerda fija por un extremo y libre por el otro	Si una cuerda tiene un extremo fijo y el otro libre, existe un nodo en el primero y un vientre en el segundo, de modo que el número de cuartos de longitudes de onda debe ajustarse en la longitud de la cuerda. La condición de onda estacionaria en este caso es $$L = n\frac{\lambda_n}{4}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \quad \textbf{(16.12)}$$ Solamente están presentes los armónicos impares. Sus frecuencias vienen dadas por $$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{4L} = nf_1, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$ donde $f_1 = v/4L$.
Tubo de órgano abierto por un extremo y cerrado por el otro	Las ondas sonoras estacionarias en un tubo abierto por un extremo y cerrado por el otro, tienen un antinodo de desplazamiento en el extremo abierto y un nodo de desplazamiento en el cerrado. La condición de onda estacionaria es la misma que la de una cuerda fija por un extremo.
Funciones de onda estacionaria	$$y_n(x, t) = A_n\,\mathrm{sen}\,k_n x\,\cos\,(\omega_n t + \delta_n) \quad \textbf{(16.16)}$$ en donde $k_n = 2\pi/\lambda_n$ y $\omega_n = 2\pi f_n$. Las condiciones necesarias para que haya ondas estacionarias en una cuerda son: 1 Cada punto de la cuerda o bien permanece en reposo o bien oscila con movimiento armónico simple. (Los puntos en reposo son los nodos.) 2 El movimiento de dos puntos cualesquiera de la cuerda que no sean nodos va en fase o con un desfase de 180º.

***3. Superposición de ondas estacionarias**	En general, un sistema vibrante no vibra en un solo modo armónico, sino según una superposición de armónicos permitidos.
***4. Análisis y síntesis armónicos**	Los sonidos de diferente cualidad de tono contienen diferentes mezclas de armónicos. El análisis de un tono particular en función de su contenido armónico se llama análisis armónico. La síntesis armónica es la construcción de un tono por suma de armónicos.
***5. Paquetes de ondas**	Un pulso de onda puede representarse por una distribución continua de ondas armónicas llamada paquete de ondas. El intervalo de frecuencias $\Delta\omega$ está relacionado con la anchura del tiempo Δt y el intervalo de números de onda Δk con la anchura del espacio Δx.
Intervalos de frecuencia y tiempo	$\Delta\omega\ \Delta t \sim 1$ **(16.18)**
Intervalos de número de ondas y espacio	$\Delta k\ \Delta x \sim 1$ **(16.19)**
***6. Dispersión**	En un medio no dispersivo, la velocidad de fase no depende de la frecuencia y el pulso (paquete de ondas) se propaga sin cambio de forma. En un medio dispersivo, la velocidad de fase sí depende de la frecuencia y el pulso cambia de forma durante su movimiento. El pulso se mueve con una velocidad denominada velocidad de grupo del paquete.

Problemas

- ● Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- ●● Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- ●●● Desafiante, para alumnos avanzados.
- SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.
- iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.
- iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

1 ●● SSM Dos pulsos de onda rectangulares se mueven en sentidos opuestos a lo largo de una cuerda. En $t = 0$ los dos pulsos se encuentran tal y como indica la figura 16.27. Dibujar las funciones de onda para $t = 1$, 2 y 3 *s*.

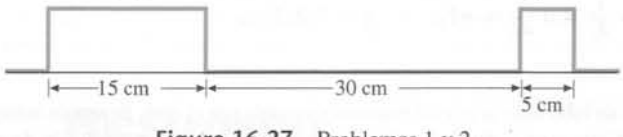


Figura 16.27 Problemas 1 y 2

2 ●● Repetir el problema 1 para el caso en que el pulso de la derecha de la figura 16.27 esté invertido.

3 ● Las pulsaciones se producen por la superposición de dos ondas armónicas sólo si (*a*) sus amplitudes y frecuencias son iguales, (*b*) sus amplitudes son iguales, pero sus frecuencias difieren ligeramente, (*c*) sus frecuencias difieren ligeramente, incluso si sus amplitudes no son iguales, (*d*) sus frecuencias son iguales pero sus amplitudes difieren ligeramente.

4 ● Verdadero o falso:

(*a*) La frecuencia del tercer armónico es tres veces la del primer armónico.
(*b*) La frecuencia del quinto armónico es cinco veces la del fundamental.
(*c*) En un tubo abierto por un extremo y cerrado por el otro no se excitan los armónicos pares.

5 ●● Las ondas estacionarias se producen por la superposición de dos ondas de (*a*) la misma amplitud, frecuencia y sentido de propagación, (*b*) la misma amplitud y frecuencia y sentidos opuestos de propagación, (*c*) la misma amplitud, frecuencia ligeramente distinta y el mismo sentido de propagación, (*d*) la misma amplitud, frecuencia ligeramente distinta y sentidos opuestos de propagación.

6 ● SSM Las frecuencias de resonancia de una cuerda de un violín son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental, mientras que las frecuencias de resonancia de un tambor circular tienen una distribución espacial irregular. A partir de este hecho explicar la diferencia entre el sonido de un violín y de un tambor.

7 ● Un tubo de órgano abierto por ambos extremos tiene una frecuencia fundamental de 400 Hz. Si ahora se cierra un extremo de este tubo, la frecuencia fundamental será (*a*) 200 Hz, (*b*) 400 Hz, (*c*) 546 Hz, (*d*) 800 Hz.

8 ●● Una cuerda fija por ambos extremos resuena con una frecuencia fundamental de 180 Hz. ¿Cuál de las acciones siguientes reducirá la frecuencia fundamental a 90 Hz? (*a*) Duplicar la tensión y duplicar la longitud. (*b*) Reducir a la mitad la tensión y mantener fija la longitud. (*c*) Mantener fija la tensión y duplicar la longitud. (*d*) Mantener fija la tensión y reducir la longitud a la mitad.

9 ●● ¿Cómo se modifican las frecuencias de resonancia de un tubo de órgano cuando aumenta la temperatura del aire?

10 ● SSM Cuando dos ondas se mueven en direcciones opuestas se superponen como en la figura 16.1. ¿Impide cada una de ellas el progreso de la otra?

11 ● Cuando se pulsa la cuerda de una guitarra, ¿la longitud de onda de la onda que se produce en el aire es la misma que la que se produce en la cuerda?

12 ● Cuando dos ondas interfieren constructiva o destructivamente, ¿hay alguna ganancia o pérdida de energía? Razonar la respuesta.

13 ● Un instrumento musical está formado por un conjunto de vasos parcialmente llenos de agua que son golpeados con un pequeño mazo. Explicar cómo funciona.

14 ●● Durante un recital de órgano, el compresor de aire que alimenta los tubos se avería súbitamente. Un estudiante de física emprendedor, que forma parte del público, aconseja conectar un tanque de gas nitrógeno puro de alta presión a la salida del compresor. ¿Qué efecto, si lo hay, tendrá esta sustitución en el funcionamiento del órgano? ¿Y si el tanque fuera de helio?

15 ●● SSM Cuando aumenta la tensión de una cuerda de piano, ¿cuál de los siguientes hechos tiene lugar? (*a*) Su longitud de onda decrece. (*b*) Su longitud de onda permanece la misma, pero su frecuencia crece. (*c*) Su longitud de onda y su frecuencia crecen. (*d*) Ninguno de los anteriores.

16 ●● Las instrucciones para conectar correctamente los altavoces estéreo a un amplificador de modo que estén en fase son las siguientes: "Después de conectar ambos altavoces, póngase un disco o programa monofónico con el control de bajos al máximo y el de agudos al mínimo. Escuchando los altavoces, girar el control de balance, de modo que primero se oiga fuerte un solo altavoz, luego los dos juntos y finalmente sólo el otro altavoz. Si las notas bajas suenan más fuertes cuando los dos altavoces se oyen a la vez, entonces están conectados correctamente. Si las notas bajas se oyen más débiles con los dos altavoces juntos que con uno y otro solo, intercambiar las conexiones de uno de los altavoces". Explicar la razón de este método. En particular explicar por qué no se utiliza un programa estéreo y por qué se comparan sólo las notas bajas.

17 ●● La constante γ del helio (como la de todos los gases monoatómicos) es 1,67. Si un hombre inhala helio y después comienza a hablar, sus sonidos son más agudos. ¿Por qué?

18 ●● SSM La figura 16.28 corresponde a una fotografía de dos telas de seda, muy finas, colocadas una encima de otra. En los puntos donde las telas se superponen se pueden ver una serie de líneas oscuras y claras que corresponden a una figura de moiré, figura que aparece también cuando se utiliza un escáner para copiar fotos de un libro o de un periódico. ¿Cuál es la causa de la aparición de la figura de moiré y en qué se parece a una interferencia?

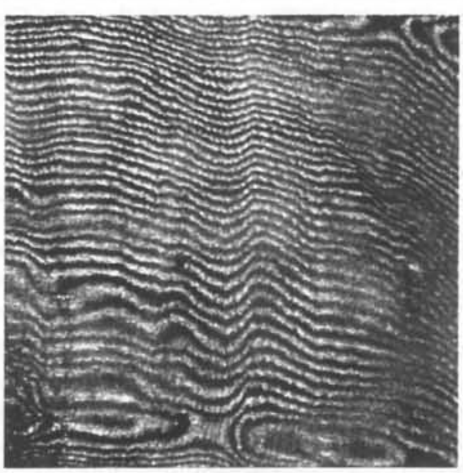


Figura 16.28 Problema 18

Estimaciones y aproximaciones

19 ●● ¿Hasta cuando puede afinarse el sonido de una cuerda de piano con el de un diapasón?

20 ● SSM Los tubos más cortos utilizados en los órganos tienen aproximadamente 7,5 cm de largo. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de un tubo con esta longitud que está abierto por ambos extremos? (*b*) ¿Cuál es el armónico más alto para un tubo de este tipo que está dentro del intervalo audible? (El intervalo de audición normal está entre 20 y 20 000 Hz.)

21 ●● En un día de mucho viento resuena a veces un tubo de desagüe. Estimar la frecuencia de resonancia de este tubo en una casa de un solo piso. Estimar el cambio de esta frecuencia del invierno al verano en una región templada.

Superposición e interferencia

22 ● Dos ondas que se mueven por una cuerda en la misma dirección y sentido tienen la misma frecuencia de 100 Hz, una longitud de onda de 2 cm y una amplitud de 0,02 m. Determinar la amplitud de la onda resultante si las dos ondas difieren en fase (*a*) en $\pi/6$ y (*b*) en $\pi/3$.

23 ● Dos ondas que tienen la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud, se están moviendo en la misma dirección y sentido. Si difieren en fase en $\pi/2$ y cada una de ellas tiene una amplitud de 0,05 m, hallar la amplitud de la onda resultante.

24 ● SSM ISOLVE Dos fuentes sonoras oscilan en fase con la misma amplitud A. Están separadas en el espacio por una distancia de $\lambda/3$. ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante de las dos fuentes en un punto situado en la línea que une las fuentes, admitiendo que el punto no está entre las fuentes?

25 ● Dos fuentes sonoras oscilan en fase con una frecuencia de 100 Hz. En un punto situado a 5,00 m de una de ellas y a 5,85 m de la otra, la amplitud del sonido procedente de cada fuente separadamente es A. (*a*) ¿Cuál es la diferencia de fase de las ondas sonoras procedentes de ambas fuentes en dicho punto? (*b*) ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante en dicho punto?

26 ● SSM Con un compás dibujar arcos de circunferencia que representen crestas de ondas para dos fuentes puntuales distantes entre sí $d = 6$ cm y para $\lambda = 1$ cm. Conectar las intersecciones que corresponden a los puntos de diferencias de caminos constantes y marcar dicha diferencia en cada línea. (ver figura 16.8)

27 ● Dos altavoces separados por una cierta distancia emiten sonidos de una misma frecuencia. En un punto determinado P la intensidad debida a cada altavoz separadamente es I_0. La distancia desde P a uno de los altavoces es $\frac{1}{2}\lambda$ mayor que la de P al otro. Determinar la intensidad de P si los altavoces (*a*) son coherentes y están en fase; (*b*) son incoherentes; y (*c*) son coherentes, pero tienen una diferencia de fase de π rad.

28 ● Responder a las cuestiones del problema 27 para el punto P' en el cual la distancia al altavoz más alejado es 1 λ mayor que la distancia al más cercano. Admitir de nuevo que la intensidad en el punto P' es I_0 debido a cada altavoz separadamente.

29 ● Dos altavoces separados cierta distancia emiten ondas sonoras de la misma frecuencia, pero están desfasados en 90°. Sea r_1 la distancia de un punto determinado al altavoz 1 y r_2 la que dista del mismo punto al altavoz 2. Hallar el menor valor de $r_2 - r_1$ para el cual el sonido en ese punto sea (*a*) máximo y (*b*) mínimo. (Expresar la respuesta en función de la longitud de onda.)

30 ●● SSM Demostrar que si la separación entre dos fuentes de sonido que irradian coherentemente en fase es inferior a media longitud de onda, no se observará interferencia totalmente destructiva en ninguna dirección.

31 ●● ISOLVE Una onda transversal de frecuencia 40 Hz se propaga por una cuerda. Dos puntos separados entre sí 5 cm están desfasados en $\pi/6$. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda? (*b*) ¿Cuál es la diferencia de fase entre dos desplazamientos en un punto determinado para instantes separados 5 ms entre sí? (*c*) ¿Cuál es la velocidad de la onda?

32 ●● Se supone que el cerebro determina la dirección de una fuente de sonido porque es capaz de apreciar la diferencia de fase entre las ondas sonoras que chocan contra los tímpanos auditivos. Una fuente sonora distante emite un sonido de frecuencia 680 Hz. Si nuestro rostro está frontalmente dirigido hacia la fuente sonora, no apreciaremos diferencia de fase. Estimar la diferencia de fase entre los sonidos recibidos por cada oído si ahora giramos 90° respecto a la posición frontal.

33 ●● ISOLVE✓ Una fuente sonora *A* está localizada en $x = 0$, $y = 0$ y otra *B* en $x = 0$, $y = 2{,}4$ m. Las dos fuentes emiten coherentemente en fase. Una observadora en $x = 40$ m, $y = 0$ observa que cuando camina en dirección *y* positiva o negativa alejándose de $y = 0$, la intensidad del sonido disminuye. ¿Cuál es la frecuencia más baja y más alta de las fuentes que puede explicar dicha observación?

34 ●● Suponer que la observadora del problema 33 localiza un punto de intensidad mínima en $x = 40$ m, $y = 0$. ¿Cuál es entonces la frecuencia más alta y más baja congruente con esta observación?

35 ●● SSM Se superponen dos ondas armónicas en agua que tienen igual amplitud pero distinta frecuencia, número de onda y velocidad. La perturbación total se escribe mediante la ecuación $y(x,t) = A[\cos(k_1x - \omega_1t) + \cos(k_2x - \omega_2t)]$, donde $\omega_1 k_1 = v_1$ (la velocidad de la primera onda) y $\omega_2 k_2 = v_2$ (la velocidad de la segunda onda). (*a*) Demostrar que $y(x,t)$ puede escribirse de la forma $y(x,t) = 2A\cos[(\Delta k/2)x - (\Delta\omega/2)t]\cos(k_m x - \omega_m t)$ donde $\omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2$, $k_m = (k_1 + k_2)/2$, $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ y $\Delta k = k_1 - k_2$. El factor $2A\cos[(\Delta k/2)x - (\Delta\omega/2)t]$ es lo que se denomina la portadora de la onda. (*b*) Usando una hoja de cálculo o una calculadora gráfica, representar $y(x,t)$ si $A = 1$, $\omega_1 = 1$ rad/s, $k_1 = 1\ m^{-1}$, $\omega_2 = 0{,}9$ rad/s y $k_2 = 0{,}8\ m^{-1}$ cuando $t = 0$ s, $t = 0{,}5$ s y $t = 1$ s y si además *x* está entre 0 y 50 m. (*c*) ¿Cuál es la velocidad a la que se mueve la portadora?

36 ●● Dos focos puntuales que están en fase se encuentran separados una distancia *d*. Se detecta un patrón de interferencia a lo largo de una recta paralela a la que une los focos y situada a una distancia grande *D*, como se indica en la figura 16.29. (*a*) Demostrar que la diferencia de trayectos desde los dos focos al mismo punto de la línea situado a un ángulo θ viene dada aproximadamente por $\Delta s = d$ sen θ (*Sugerencia*: *Suponer que las líneas procedentes de las fuentes a P son aproximadamente paralelas.*) (*b*) Demostrar que la distancia y_m desde el punto correspondiente al máximo central hasta el máximo de interferencia *m* viene dada aproximadamente por $y_m = m(D\lambda/d)$.

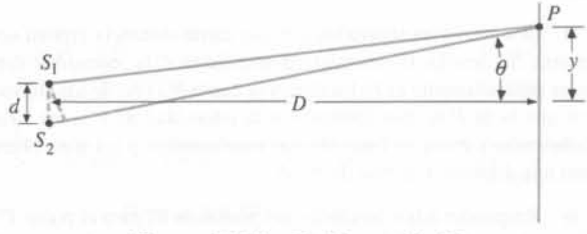


Figura 16.29 Problemas 36–40

37 ●● ISOLVE✓ Dos focos sonoros que emiten en fase con una frecuencia de 480 Hz interfieren de tal modo que los máximos se oyen bajo ángulos de 0° y 23° medidos a partir de una línea perpendicular a la que une los dos focos. Determinar la separación entre ambos focos, así como cualquier otro ángulo bajo el cual se percibe una intensidad máxima. (Utilizar los resultados del problema 36.)

38 ●●● SSM Se accionan en fase dos altavoces mediante un amplificador de audiofrecuencia de 600 Hz. Ambos están sobre el eje *y*, uno en $y = +1{,}00$ m y el otro en $y = -1{,}00$ m. Un observador empieza a andar desde $y = 0$ a lo largo de una línea paralela al eje *y* pero a una distancia *D* muy grande de éste. (Ver problema 36.) (*a*) ¿Para qué ángulo θ escuchará por primera vez un mínimo de intensidad sonora? (*b*) ¿Para qué ángulo escuchará el primer máximo (después de $\theta = 0$)? (*c*) ¿Cuántos máximos podrá escuchar posiblemente si se mantiene andando en la misma dirección?

39 ●●● ISOLVE Dos focos sonoros, accionados en fase por el mismo amplificador, están sobre el eje *y* separados una distancia de 2 m. En un punto situado a una distancia muy grande del eje *y* se oye la primera interferencia constructiva a un ángulo $\theta_1 = 0{,}140$ rad respecto al eje *x* y el siguiente se escucha a $\theta_2 = 0{,}283$ rad. (Ver figura 16.29.) (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas sonoras procedentes de los focos? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia de los focos? (*c*) ¿A qué otros ángulos se escuchará interferencia constructiva? (*d*) ¿Cuál es el ángulo menor para el cual se cancelarán completamente las ondas sonoras?

40 ●●● Los dos focos sonoros del problema 39 funcionan ahora con un desfase de 90°, pero con la misma frecuencia del problema anterior. ¿A qué ángulos se oyen las interferencias constructiva y destructiva?

41 ●●● Un radiotelescopio se compone de dos antenas separadas una distancia de 200 m. Cada antena se sintoniza a una frecuencia particular, como 20 MHz. Las señales procedentes de cada antena pasan a un amplificador común, pero una de las señales pasa primero por un ajustador de fase, que retrasa la fase en una cantidad prevista de modo que el telescopio pueda "mirar" en diferentes direcciones. Con un retraso de fase cero, las ondas de radio planas que inciden verticalmente se suman constructivamente en el amplificador. ¿Cuál deberá ser el retraso de fase para que las señales que vienen formando un ángulo de $\theta = 10°$ con la vertical (en el plano formado por la vertical y la línea que une las antenas) se sumen constructivamente en el amplificador?

Pulsaciones

42 ● ISOLVE Se golpean simultáneamente dos diapasones y se oyen cuatro batidos por segundo. La frecuencia de uno de los diapasones es 500 Hz. (*a*) ¿Cuáles son los valores posibles de la frecuencia del otro diapasón? (*b*) Se coloca un trocito de cera en el diapasón de 500 Hz para disminuir ligeramente su frecuencia. Explicar cómo puede utilizarse la medida de la nueva frecuencia de batido para determinar cuál de las repuestas al apartado (*a*) es la frecuencia correcta del segundo diapasón.

43 ●● SSM Dos ambulancias se mueven a 80 km/h por una calle recta una en sentido contrario a la otra. La sirena de cada ambulancia funciona a 500 Hz. (*a*) El conductor de cada ambulancia oye la sirena de la otra y la pulsación que se produce cuando interfiere con el sonido de su sirena. ¿Cuál es la frecuencia de la pulsación? (*b*) Un peatón está a igual distancia de las dos ambulancias, ¿cuál es la frecuencia que éste oye de la pulsación producida por las dos sirenas?

Ondas estacionarias

44 ● SSM ISOLVE✓ Una cuerda fija por ambos extremos tiene 3 m de largo. Resuena en su segundo armónico a una frecuencia de 60 Hz. ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en ella?

45 ● Una cuerda de 3 m de largo y fija por sus dos extremos está vibrando en su tercer armónico. El desplazamiento máximo de los puntos de la cuerda es 4 mm. La velocidad de las ondas transversales en ella es 50 m/s. (*a*) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de esta onda? (*b*) Escribir la función de onda correspondiente a este caso.

46 • iSOLVE ✓ Calcular la frecuencia fundamental de un tubo de órgano de 10 m de longitud que está (*a*) abierto por sus dos extremos y (*b*) cerrado por un extremo.

47 • Un hilo de acero de 5 g de masa y 1,4 m de longitud está fijo por ambos extremos y soporta una tensión de 968 N. (*a*) Hallar la velocidad de las ondas transversales en él. (*b*) Hallar la longitud de onda y la frecuencia fundamental. (*c*) Hallar las frecuencias del segundo y tercer armónicos.

48 • Una cuerda de 4 m de longitud se fija por un extremo y se liga por el otro a una cuerda ligera de modo que puede moverse libremente en dicho extremo. La velocidad de las ondas en la cuerda es 20 m/s. Hallar la frecuencia (*a*) del armónico fundamental, (*b*) del segundo armónico y (*c*) del tercer armónico.

49 • Una cuerda de piano sin arrollamientos tiene una frecuencia fundamental de 200 Hz. Cuando se le arrolla un hilo, su densidad de masa lineal se duplica. ¿Cuál es la nueva frecuencia fundamental, suponiendo que no se varía la tensión?

50 • SSM El intervalo normal de audición humana está comprendido entre 20 y 20 000 Hz. ¿Cuál es la mayor longitud de un tubo de órgano cuya nota fundamental se encuentre dentro de este intervalo si (*a*) está cerrado por un extremo y (*b*) está abierto por los dos extremos?

51 •• iSOLVE ✓ La función de onda $y(x, t)$ correspondiente a una onda estacionaria en una cuerda fija por ambos extremos viene dada por $y(x, t) = 4{,}2 \text{ sen } 0{,}20x \cos 300t$, con y y x en centímetros y t en segundos. (*a*) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de esta onda? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en esta cuerda? (*c*) Si la cuerda está vibrando en su cuarto armónico, ¿cuál es su longitud?

52 •• La función de onda $y(x, t)$ para una onda estacionaria sobre una cuerda que está fija por ambos extremos es $y(x, t) = (0{,}05 \text{ m}) \text{ sen } 2{,}5 \text{ m}^{-1}x \cos 500 \text{ s}^{-1}t$. (*a*) Hallar la velocidad y la amplitud de las dos ondas móviles que originan esta onda estacionaria. (*b*) ¿Cuál es la distancia entre nodos sucesivos de la cuerda? (*c*) ¿Cuál es la longitud más corta posible de la cuerda?

53 •• Una cuerda de 2,51 m de largo tiene la función de onda dada en el problema 52. (*a*) Dibujar la posición de la cuerda en los instantes $t = 0$, $t = T/4$, $t = T/2$, y $t = 3T/4$, en donde $T = 1/f$ es el periodo de la vibración. (*a*) Hallar T en segundos. (*b*) En un instante t en el que la cuerda está horizontal, es decir, $y(x) = 0$ para todo valor de x, ¿cuál resulta ser la energía de la onda?

54 •• SSM iSOLVE En una cuerda existen las tres frecuencias de resonancia sucesivas de 75, 125 y 175 Hz. (*a*) Hallar los cocientes entre cada par de frecuencias sucesivas de resonancia. (*b*) ¿Cómo podría saberse si estas frecuencias corresponden a una cuerda fija por un extremo y no a una cuerda fija por los dos extremos? (*c*) ¿Cuál es la frecuencia fundamental? (*d*) ¿Qué armónicos son esas frecuencias de resonancia? (*e*) Si la velocidad de las ondas transversales en esta cuerda es 400 m/s, hallar la longitud de la misma.

55 •• El espacio que hay encima del agua en un tubo semejante al del ejemplo 16.9 tiene una longitud de 120 cm. Cerca del extremo abierto existe un altavoz accionado por un oscilador de audio cuya frecuencia puede variarse de 10 a 5000 Hz. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia más baja del oscilador que resonará dentro del tubo? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia mayor con la que resonará? (*c*) Cuántas frecuencias diferentes del oscilador producirán resonancia? (Despreciar la corrección del extremo.)

56 •• Un diapasón de 460 Hz produce resonancia en el tubo del ejemplo 16.9 cuando la parte superior del tubo está a 18,3 cm y a 55,8 cm por encima de la superficie del agua. (*a*) Hallar la velocidad del sonido en el aire. (*b*) ¿Cuál es la corrección del extremo para ajustar el hecho de que el vientre o antinodo no se presente exactamente en el extremo del tubo abierto?

57 •• SSM iSOLVE ✓ A 16 °C la frecuencia fundamental de un tubo de órgano es 440,0 Hz. ¿Cuál será la frecuencia fundamental del tubo si la temperatura aumenta a 32 °C? ¿Sería preferible construir el tubo con un material que se dilatara sustancialmente cuando aumente la temperatura o con un material que mantuviera su longitud a todas las temperaturas normales?

58 •• La corrección ΔL para un tubo circular es aproximadamente $\Delta L = 0{,}3186D$, en donde D es el diámetro del tubo (véase el ejemplo 16.9). Determinar la longitud de un tubo abierto por ambos extremos que produzca un *do* (256 Hz) como armónico fundamental si $D = 1$ cm, 10 cm y 30 cm.

59 •• iSOLVE Una cuerda de violín de 40 cm de longitud y 1,2 g de masa tiene una frecuencia de 500 Hz cuando está vibrando en su modo fundamental. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda estacionaria en la cuerda? (*b*) ¿Cuál es la tensión de la cuerda? (*c*) ¿Dónde se debería colocar el dedo para incrementar la frecuencia a 650 Hz?

60 •• La cuerda Sol de un violín tiene 30 cm de longitud. Cuando se toca sin pulsar, vibra con una frecuencia de 196 Hz. Las notas próximas más altas en la escala son: La (220 Hz), Si (247 Hz), Do (262 Hz) y Re (294 Hz). ¿A qué distancia del extremo de la cuerda debe colocarse un dedo para generar estas notas?

61 •• Una cuerda con una densidad de masa 4×10^{-3} kg/m está sometida a una tensión de 360 N y está fija en ambos extremos. Una de sus frecuencias de resonancia es 375 Hz. La frecuencia de resonancia más alta siguiente es 450 Hz. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia fundamental? (*b*) ¿Qué armónicos son los que se dan? (*c*) ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

62 •• iSOLVE ✓ Una cuerda sujeta por ambos extremos tiene resonancias sucesivas con longitudes de onda de 0,54 m para el armónico n y de 0,48 m para el armónico $(n + 1)$. (*a*) ¿Qué armónicos son? (*b*) ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

63 •• Las cuerdas de un violín están afinadas con los tonos Sol, Re, La y Mi, que están separados entre sí por un quinto. Es decir, $f(\text{Re}) = 1{,}5\, f(\text{Sol})$, $f(\text{La}) = 1{,}5\, f(\text{Re}) = 440$ Hz y $f\,(\text{Mi}) = 1{,}5\, f(\text{La})$. La distancia entre los dos puntos fijos de las cuerdas es de 30 cm. La tensión de la cuerda Mi es 90 N. (*a*) ¿Cuál es la masa por metro de longitud de dicha cuerda? (*b*) Para evitar distorsiones del instrumento con el tiempo, es importante que la tensión en todas las cuerdas sea la misma. Determinar las masas por metro de longitud de las restantes cuerdas.

64 •• Una ambulancia se mueve a 80 km/h hacia una pared de ladrillo de un hospital que refleja el sonido de la sirena. Cuando la ambulancia está parada, la sirena emite a 500 Hz. (*a*) ¿Cuál es el la longitud de onda de la onda estacionaria causada por la sirena y su reflexión? (*b*) Un médico que está parado entre la ambulancia y la pared oye que el sonido de la sirena aumenta y disminuye alternativamente a medida que la ambulancia se acerca a su posición. ¿Por qué?

65 •• Para afinar un violín, el violinista primero afina la cuerda La con el tono correcto de 440 Hz y después toca simultáneamente con el arco dos cuerdas contiguas y escucha las pulsaciones producidas. Cuando toca con el arco las cuerdas La y Mi detecta una frecuencia de batido de 3 Hz y observa que esta frecuencia crece cuando la tensión de la cuerda Mi aumenta (la cuerda Mi se afina a 660 Hz). (*a*) ¿Por qué se produce el batido cuando estas cuerdas se tocan simultáneamente? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia de la cuerda Mi en vibración si la frecuencia de batido es de 3 Hz? (*c*) Si la tensión de la cuerda Mi es 80,0 N cuando la frecuencia de batido es 3 Hz, ¿qué tensión corresponde al tono perfecto de dicha cuerda?

66 •• Una estudiante lleva consigo un pequeño oscilador y altavoz cuando pasea muy lentamente por una larga sala. El altavoz emite un sonido de frecuencia 680 Hz que se refleja en las paredes de los extremos de la sala. La estudiante observa que cuando pasea a lo largo de la sala, la intensidad del sonido que ella percibe, pasa por una serie de máximos y mínimos sucesivos. ¿Qué distancia debe recorrer para que el sonido pase de un máximo al siguiente?

67 •• SSM Demostrar que la función de onda estacionaria $A' \text{ sen } kx \cos(\omega t + \delta)$ puede escribirse como la suma de dos funciones de onda armónicas, la de una onda que se mueve en la dirección positiva del eje x y la de otra onda de la misma amplitud que se mueve en sentido contrario. Cada una de las ondas tiene el mismo número de onda y frecuencia angular que la onda estacionaria.

68 ●● Se fija una cuerda de 2 m por un extremo y se la hace vibrar en su tercer armónico con una amplitud de 3 cm y una frecuencia de vibración de 100 Hz. (*a*) Escribir la función de onda correspondiente a esta vibración. (*b*) Escribir una expresión para la energía cinética de un segmento de la cuerda de longitud dx en el punto x y en cierto tiempo t. ¿En qué instante es máxima esta energía cinética? ¿Cuál es la forma de la cuerda en dicho momento? (*c*) Hallar la energía cinética máxima de la cuerda integrando la expresión del apartado (*b*) en la longitud total de la cuerda.

69 ●● SSM En la figura 16.30 se muestra la disposición de un experimento de física muy habitual que sirve para estudiar las ondas transversales en una cuerda. Se cuelga un peso del extremo de una cuerda que pasa por una polea, y en el otro extremo un oscilador mecánico mueve la cuerda hacia arriba y hacia abajo con una frecuencia f. La longitud L entre el oscilador y la polea se mantiene constante y las ondas que se producen en la cuerda resuenan para determinados valores del peso. Si $L = 1$ m, $f = 80$ Hz, y la masa por unidad de longitud de la cuerda es $\mu = 0{,}75$ g/m, ¿qué pesos habrá que colgar del extremo de la cuerda para que se produzcan los tres primeros modos resonantes?

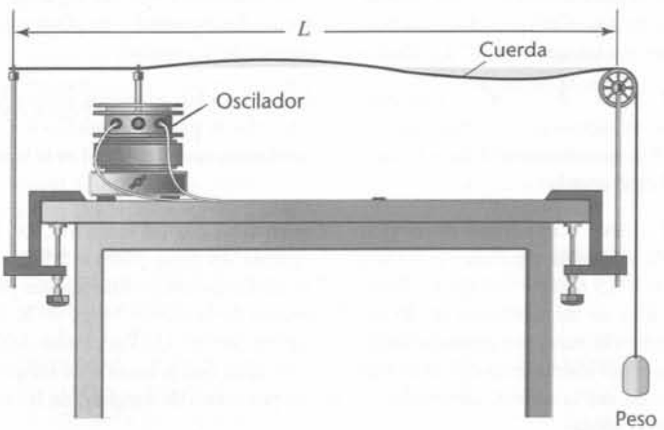


Figura 16.30 Problema 69

*Paquetes de ondas

70 ● La información que utilizan los ordenadores se transmite por cable en forma de pulsos eléctricos cortos a razón de 10^7 pulsos por segundo. (*a*) ¿Cuál es la duración máxima de cada pulso para que dos pulsos no se solapen? (*b*) ¿Cuál es el intervalo de frecuencias a las cuales debe responder el equipo receptor?

71 ● SSM Un diapasón de frecuencia f_0 empieza a vibrar en el instante $t = 0$ y se detiene después de un intervalo de tiempo Δt. La forma de la onda sonora un cierto tiempo después se muestra como una función de x. Sea N el número (aproximado) de ciclos de esta forma de onda. (*a*) ¿Cómo están relacionados entre sí N, f_0 y Δt? (*b*) Si Δx es la longitud en el espacio de este paquete de ondas, ¿cuál es la longitud de onda en función de Δx y N? (*c*) ¿Cuál es el número de ondas k en función de N y Δx? (*d*) El número de ciclos N posee una incertidumbre de ± 1 ciclo aproximadamente. Explicar por qué, usando la figura 16.31. (*e*) Demostrar que la incertidumbre del número de onda debido a la incertidumbre en N es $2\pi/\Delta x$.

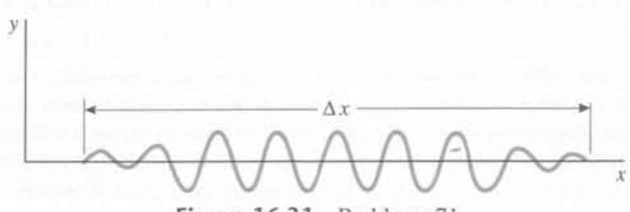


Figura 16.31 Problema 71

Problemas generales

72 ● La nota Do de la escala bien temperada utilizada por los constructores de instrumentos musicales modernos tiene una frecuencia de 261,63 Hz. Si una cuerda de piano de 7 g y 80 cm de longitud ha de afinarse de modo que 261,63 Hz sea su frecuencia fundamental, ¿qué tensión debe aplicarse a la cuerda?

73 ● iSOLVE El canal auditivo, que tiene una longitud próxima a los 2,5 cm, se puede considerar como un tubo cerrado por un extremo y abierto por el otro. (*a*) ¿Cuáles son las frecuencias de resonancia del mismo? (*b*) Describir los posibles efectos de los modos de resonancia del canal auditivo sobre el umbral de audición.

74 ● Una cuerda de 160 g de masa y 4 m de largo está fija por un extremo y ligada a una cuerda ligera por el otro. Su tensión es 400 N. (*a*) ¿Cuáles son las longitudes de onda del armónico fundamental y los dos siguientes? (*b*) ¿Cuáles son las frecuencias de estas ondas estacionarias?

75 ●● Dos ondas procedentes de dos fuentes coherentes poseen la misma longitud de onda λ, frecuencia ω y amplitud A. ¿Cuál es la diferencia de trayectos si la onda resultante en algún punto tiene la amplitud A?

76 ●● iSOLVE Una cuerda de 35 m tiene una densidad de masa lineal de 0,0085 kg/m y soporta una tensión de 18 N. Determinar las frecuencias de los cuatro primeros armónicos si (*a*) el muelle está fijo por ambos extremos, y (*b*) la cuerda está fija por un extremo y atada a un hilo largo y delgado, de masa despreciable en el otro extremo.

77 ●● iSOLVE ✓ Una persona encuentra un pozo de una mina abandonada y desea medir su profundidad. Utilizando un oscilador de audio de frecuencia variable, observa que se producen en el pozo resonancias sucesivas a frecuencias de 63,58 y 89,25 Hz. ¿Cuál es la profundidad del pozo?

78 ●● Una cuerda de 5 m de largo que está fija sólo por un extremo está vibrando en su quinto armónico con una frecuencia de 400 Hz. El desplazamiento máximo de cualquier segmento de la cuerda es 3 cm. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda del mismo? (*b*) ¿Cuál es el número de onda k? (*c*) ¿Cuál es la frecuencia angular? (*d*) Escribir la función de onda correspondiente a esta onda estacionaria.

79 ●● Una onda estacionaria en una cuerda está representada por la siguiente función de onda: $y(x, t) = 0{,}02 \text{ sen } 4\pi x \cos 60\pi t$, en donde x e y se expresan en metros y t en segundos. Determinar el desplazamiento máximo y la velocidad máxima de un punto de la cuerda situado en (*a*) $x = 0{,}10$ m, (*b*) $x = 0{,}25$ m, (*c*) $x = 0{,}30$ m y (*d*) $x = 0{,}50$ m.

80 ●● Un alambre de longitud 2,5 m y masa 0,10 kg está fijo por ambos extremos bajo una tensión de 30 N. Al excitar el armónico n se forma un nodo a 0,5 m de un extremo. (*a*) ¿Cuánto vale n? (*b*) ¿Cuáles son las frecuencias de los primeros tres modos permitidos de vibración?

81 ●● SSM En un método antiguo para determinar la velocidad del sonido en gases, se colocaba horizontalmente un tubo de vidrio cilíndrico y se esparcía en el fondo del tubo una determinada cantidad de un polvo muy fino. Un extremo se cerraba con un pistón que oscilaba con una frecuencia conocida f. El otro extremo se cerraba por un pistón cuya posición podía modificarse hasta conseguir la resonancia. Cuando esto ocurría, el polvo se recogía en montoncitos igualmente separados a lo largo del fondo del tubo. (*a*) Explicar por qué se recogía el polvo de esta manera. (*b*) Deducir una fórmula que nos dé la velocidad del sonido en el gas en función de f y de la distancia entre los montoncitos de polvo. (*c*) Dar valores adecuados de la frecuencia f y de la distancia entre los montoncitos de polvo. (*d*) Dar valores adecuados de la frecuencia f y de la longitud L del tubo con los cuales podía medirse la velocidad del sonido utilizando aire o helio.

82 ●● En una demostración en una clase de ondas estacionarias, se sujeta una cuerda a un diapasón que vibra a 60 Hz que origina la formación de ondas transversales de esta frecuencia en la cuerda. El otro extremo de la cuerda pasa por una polea, variándose la tensión con pesos en este extremo. La cuerda tiene nodos aproximadamente en el diapasón y en la polea. (*a*) Si la cuerda tiene una densidad de masa lineal de 8 g/m y tiene una longitud de 2,5 m

(desde el diapasón hasta la polea), ¿cuál debe ser la tensión para que la cuerda vibre en su modo fundamental? (*b*) Hallar las tensiones necesarias para la cuerda de forma que vibre en sus armónicos segundo, tercero y cuarto.

83 ●● ISOLVE✓ Tres frecuencias de resonancia sucesivas de un tubo de órgano son 1310, 1834 y 2358 Hz. (*a*) ¿Está el tubo cerrado por un extremo o abierto en ambos extremos? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia fundamental? (*c*) ¿Cuál es la longitud del tubo?

84 ●● ISOLVE✓ Una cuerda de 1 g de masa y una longitud de 50 cm se tensa con una fuerza de 440 N. Está colocada próxima al extremo abierto del tubo del ejemplo 16.9 y se hace sonar con un arco de violín de modo que oscile con su frecuencia fundamental. El nivel de agua del tubo se hace bajar hasta que se obtiene por primera vez la resonancia a 18 cm por debajo de la parte superior del tubo. Utilizar estos datos para determinar la velocidad del sonido en el aire. ¿Por qué no es muy exacto este método?

85 ●● Una onda estacionaria sobre una cuerda viene descrita por la siguiente función de onda: $y(x, t) = 0{,}02 \text{ sen } \frac{1}{2}\pi x \cos 40\pi t$, en donde x e y están en metros y t en segundos. (*a*) Escribir funciones de onda para dos trenes de ondas que al superponerse produzcan un patrón de ondas estacionarias. (*b*) ¿Cuál es la distancia entre los nodos de la onda estacionaria? (*c*) ¿Cuál es la velocidad de un segmento de cuerda en $x = 1$ m? (*d*) ¿Cuál es la aceleración del mismo segmento de cuerda?

86 ●● ISOLVE Dos altavoces idénticos emiten uniformemente en todas direcciones ondas sonoras de 680 Hz de frecuencia con una potencia de salida total de audio de 1 mW cada uno de ellos. Un punto P está a una distancia de 2,00 m de un altavoz y a 3,00 m de otro. (*a*) Hallar las intensidades I_1 e I_2 de cada altavoz en el punto P separadamente. (*b*) Si los altavoces se alimentan coherentemente y en fase, ¿cuál será la intensidad en el punto P? (*c*) Si se alimentan coherentemente pero desfasados en 180°, ¿cuál será la intensidad en el punto P? (*d*) Si los altavoces son incoherentes, ¿cuál será la intensidad en el punto P?

87 ●● Tres ondas con la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud, se mueven en la misma dirección y sentido. Las tres ondas vienen dadas por

$$y_1(x, t) = 0{,}05 \text{ sen } \left(kx - \omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y_2(x, t) = 0{,}05 \text{ sen } (kx - \omega t)$$

$$y_3(x, t) = 0{,}05 \text{ sen } \left(kx - \omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Hallar la onda resultante.

88 ●● Una onda plana tiene la forma $f(x, y, t) = A \cos(k_x x + k_y y - \omega t)$. Demostrar que la dirección en que se mueve la onda forma un ángulo $\theta = \text{arctg}(k_y/k_x)$ con la dirección positiva del eje x y que la velocidad de propagación de la onda es $v = \omega/\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

89 ●● SSM La velocidad del sonido es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta T (ecuación 15.5). (*a*) Demostrar que si la temperatura varía en una pequeña cantidad ΔT, la frecuencia fundamental de un tubo de órgano varía aproximadamente en Δf, siendo $\Delta f/f = \frac{1}{2}\Delta T/T$. (*b*) Suponer un tubo de órgano cerrado por un extremo y que tiene una frecuencia fundamental de 200 Hz cuando la temperatura es de 20 °C. ¿Cuál será su frecuencia fundamental cuando la temperatura sea de 30 °C? (Ignorar cualquier variación de longitud del tubo debido a la dilatación térmica.)

90 ●● Dos pulsos de onda que se mueven sobre una cuerda están representados por las funciones de onda

$$y_1(x, t) = \frac{0{,}02}{2 + (x - 2t)^2}$$

y

$$y_2(x, t) = \frac{-0{,}02}{2 + (x + 2t)^2}$$

en donde x está en metros y t en segundos. (*a*) Dibujar por separado cada onda en función de x para $t = 0$ utilizando una hoja de cálculo o una calculadora gráfica y describir el comportamiento de ambas al aumentar el tiempo. (*b*) Hallar la función de onda resultante para $t = 0$. (*c*) Hallar la función de onda resultante para $t = 1$ s. (*d*) Dibujar la función de onda resultante en este último caso.

91 ●● Si pone su oído y su mano cerca de un extremo de un tubo abierto y hace un chasquido con los dedos, oirá un sonido parecido al que se da cuando se puntea una cuerda de guitarra. (Los mejores tubos son los que tienen 1 m de longitud aproximadamente.) (*a*) Explicar cuál es la causa de este sonido. (*b*) ¿Qué longitud efectiva del tubo se necesita para producir un sonido como el de una cuerda de guitarra con un tono de *la* por encima del *do* central (440 Hz)?

92 ●● La energía cinética de un segmento de longitud Δx y masa Δm de una cuerda vibrante viene dada por

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\,\Delta m\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \Delta x$$

en donde $\mu = \Delta m/\Delta x$. (*a*) Hallar la energía cinética total del modo enésimo de vibración de una cuerda de longitud L fija por ambos extremos. (*b*) Determinar la energía cinética máxima de la cuerda. (*c*) ¿Cuál es la función de onda cuando la energía cinética tiene su máximo valor? (*d*) Demostrar que la energía cinética máxima del modo enésimo es proporcional a $n^2 A_n^2$.

93 ●● (*a*) Demostrar que si la tensión de una cuerda fija por ambos extremos varía en una pequeña cantidad dF, la frecuencia del armónico fundamental varía aproximadamente en df, siendo $df/f = \frac{1}{2}dF/F$. ¿Se aplica este resultado a todos los armónicos? (*b*) Utilizar este resultado para hallar la variación porcentual de la tensión que se necesita para aumentar la frecuencia del armónico fundamental de una cuerda de piano de 260 a 262 Hz.

94 ●● SSM Dos fuentes de ondas armónicas situadas en el eje x tienen una diferencia de fase δ_0 que es proporcional al tiempo, $\delta_0 = Ct$, siendo C una constante. La amplitud de la onda procedente de cada fuente en un punto P del eje x es A_0. (*a*) Escribir las funciones de onda de cada una de las ondas en el punto P admitiendo que este punto está a una distancia x_1 de una fuente y a $x_1 + \Delta x$ de la otra. (*b*) Hallar la función de onda resultante y demostrar que su amplitud es $2A_0 \cos\,[\frac{1}{2}(\delta + \delta_0)]$, siendo δ la diferencia de fase en P debida a la diferencia de trayectos. (*c*) Hacer un gráfico de la intensidad en el punto P en función del tiempo para una diferencia cero de trayectos utilizando una hoja de cálculo o una calculadora gráfica. (Sea I_0 la intensidad debida a cada onda separadamente.) ¿Cuál es el promedio temporal de la intensidad? (*d*) Hacer el mismo gráfico para la intensidad en un punto cuya diferencia de trayectos sea media longitud de onda.

95 ●●● Las funciones de dos ondas estacionarias en una cuerda de longitud L son $y_1(x, t) = A_1 \cos\,\omega_1 t \text{ sen } k_1 x$ e $y_2(x, t) = A_2 \cos\,\omega_2 t \text{ sen } k_2 x$, en donde $k_n = n\pi/L$ y $\omega_n = n\omega_1$. La función de la onda resultante se expresa como $y_r(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$. (*a*) Hallar la velocidad de un segmento dx de la cuerda. (*b*) Hallar la energía cinética de este segmento. (*c*) Por integración, hallar la energía cinética total de la onda resultante. Obsérvese la desaparición de los términos cruzados de modo que la energía cinética total es proporcional a $(n_1A_1)^2 + (n_2A_2)^2$.

96 ●●● Un alambre de 2 m fijo por ambos extremos está vibrando en su modo fundamental. La tensión es 40 N y la masa del alambre es 0,1 kg. El punto medio del alambre tiene una amplitud de 2 cm. (*a*) Hallar la energía cinética máxima del alambre. (*b*) En el instante en que el desplazamiento transversal viene dado por (0,02 m) sen $(\pi x/2)$, ¿cuál es la energía cinética del alambre? (*c*) ¿En qué posición del alambre tiene su mayor valor la energía cinética por unidad de longitud del alambre? (*d*) ¿En dónde tiene su máximo valor la energía potencial por unidad de longitud?

97 ●●● En principio una onda de forma arbitraria puede expresarse como la suma de ondas armónicas de diferentes frecuencias. (*a*) Considere una función definida por

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \ldots\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos[(2n+1)x]}{2n+1}$$

Escribir un programa en una **hoja de cálculo** que calcule esta serie utilizando un número finito de términos y hacer tres representaciones gráficas de la función en el intervalo de x comprendido entre 0 y 4π. En la primera representación gráfica, aproximar la suma desde $n = 0$ hasta $n = \infty$ con el primer término de la suma. En la segunda y tercera representación gráfica, usar sólo los cinco y los diez primeros términos respectivamente. Esta función se suele denominar la *onda cuadrada* (o *función* θ). (*b*) ¿Cuál es la relación entre esta función y la serie de *Leibnitz* para π,

$$\frac{4}{\pi} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots ?$$

98 ●●● Escribir un programa en una hoja de cálculo que calcule y representar gráficamente la función

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\text{sen } x - \frac{\text{sen } 3x}{9} + \frac{\text{sen } 5x}{25} - \ldots\right)$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_n \frac{(-1)^n \text{sen}(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

¿Qué clase de onda es ésta?

99 ●●● Si se dan palmadas en el extremo de un tubo cilíndrico largo, el eco no suena igual que las palmadas sino que se oyen sonidos como los procedentes de un silbato, inicialmente con una frecuencia muy alta que rápidamente desciende hasta hacerse imperceptible. Este efecto puede explicarse si se piensa que el sonido de la palmada es una compresión que se radia de las manos y que se propaga. Los diferentes ecos que llegan al oído, tal como se muestra en la figura 16.32, recorren trayectorias distintas por el tubo. El primer eco resulta de una única reflexión en el fondo del tubo, mientras que el segundo también se refleja en el centro de las paredes del tubo, una vez al ir y otra al volver; el tercer eco se refleja dos veces en puntos situados a distancias 1/4 y 3/4, etc. El tono del sonido que llega al oído es consecuencia de la frecuencia a la que estos sonidos reflejados llegan al oído. (*a*) Demostrar que el retraso del tiempo entre el eco n y el eco $n + 1$ viene dado por

$$\Delta t_n = \frac{2}{v}\left(\sqrt{(2n)^2r^2 + L^2} - \sqrt{[2(n-1)^2r^2 + L^2]}\right),$$

en donde v es la velocidad del sonido, L la longitud del tubo y r su radio. (*b*) Usando una **hoja de cálculo** o una calculadora gráfica, representar gráficamente Δt_n frente a n si $L = 90$ m, $r = 1$ m. (Estas son las dimensiones de un tubo del *Exploratorium* de San Francisco.) Represente como mínimo hasta $n = 100$. (*c*) A partir del gráfico, explique por qué la frecuencia disminuye con el tiempo. ¿Cuáles son las frecuencias máxima y mínima que se oirán?

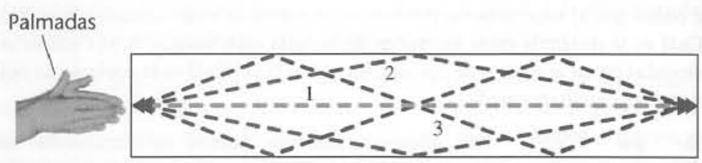
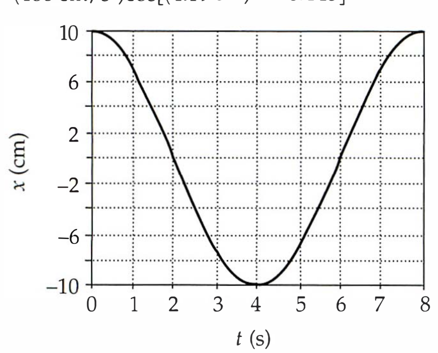


Figura 16.32 Problema 99

Chapter 14

1. 0; $4\pi^2 f^2 A$
3. *(a)* False
   (b) True
   (c) True
5. *(a)*
7. False
9. Assume that the first cart is given an initial velocity v by the blow. After the initial blow, there are no external forces acting on the carts, so their center of mass moves at a constant velocity $v/2$. The two carts will oscillate about their center of mass in simple harmonic motion where the amplitude of their velocity is $v/2$. Therefore, when one cart has velocity $v/2$ with respect to the center of mass, the other will have velocity $-v/2$. So, the velocity with respect to the laboratory frame of reference will be $+v$ and 0, respectively. Half a period later, the situation is reversed; so, one will appear to move as the other stops, and vice-versa.
11. True
13. Examples of driven oscillators include the pendulum of a clock, a bowed violin string, and the membrane of any loudspeaker.
15. Because f' varies inversely with the square root of m, taking into account the effective mass of the spring predicts that the frequency will be reduced.
17. *(d)*
19. *(b)*
21. 8π
23. *(a)* 3.00 Hz
    (b) 0.333 s
    (c) 7.00 cm
    (d) 0.0833 s; Because $v < 0$, the particle is moving in the negative direction at $t = 0.0833$ s.
25. *(a)* $x = (25\text{ cm})\cos[(4.19\text{ s}^{-1})t]$
    (b) $v = -(105\text{ cm/s})\sin[(4.19\text{ s}^{-1})t]$
    (c) $a = -(439\text{ cm/s}^2)\cos[(4.19\text{ s}^{-1})t]$
27. *(a)* $x = (27.7\text{ cm})\cos[(4.19\text{ s}^{-1})t - 0.445]$
    (b) $v = -(116\text{ cm/s})\sin[(4.19\text{ s}^{-1})t - 0.445]$
    (c) $a = -(486\text{ cm/s}^2)\cos[(4.19\text{ s}^{-1})t - 0.445]$
29. *(a)*



(b)

t_f (s)	t_i (s)	Δx (cm)
1	0	$\boxed{2.93}$
2	1	$\boxed{7.07}$
3	2	$\boxed{7.07}$
4	3	$\boxed{2.93}$

31. *(a)* 7.85 m/s; 24.7 m/s^2
    (b) −6.28 m/s; −14.8 m/s^2
33. *(a)* 0.313 Hz
    (b) 3.14 s
    (c) $x = (40\text{ cm})\cos[(2\text{ s}^{-1})t + \delta]$
35. 22.5 J
37. *(a)* 0.368 J
    (b) 3.84 cm
39. 1.38 kN/m
41. *(a)* 6.89 Hz
    (b) 0.145 s
    (c) 0.100 m
    (d) 4.33 m/s
    (e) 187 m/s^2
    (f) 36.3 ms; 0
43. *(a)* 682 N/m
    (b) 0.417 s
    (c) 1.51 m/s
    (d) 22.7 m/s^2
45. *(a)* 3.08 kN/m
    (b) 4.16 Hz
    (c) 0.240 s
47. *(a)* 0.438 m/s
    (b) 0.379 m/s; 120 m/s^2
    (c) 95.5 ms
49. 0.262 s
51. 10.1 kJ
53. *(a)* 0.997 Hz
    (b) 0.502 s
    (c) 0.294 N
55. *(a)* 46.66 cm
    (b) 0.261 s
    (c) 0.767 m/s
57. *(a)* 0.270 J
    (b) −0.736 J
    (c) 1.01 J
    (d) 0.270 J
59. *(a)* 1.90 cm
    (b) 0.0542 J
    (c) ±0.224 J
    (d) 0.334 J
61. 12.2 s
63. 11.7 s
65. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g(1 - \sin\theta)}}$
67. 1.10 s
69. 0.504 kg·m^2
71. *(b)* 3.17 s
73. 21.1 cm from the center of the meter stick
77. *(a)* 1.63572 m
    (b) 14.5 mm, upward
79. 13.5°

81. 3.14%

85. *(a)* 0.314

(b) -3.13×10^{-2} percent

87. *(a)* 1.57%

(c) $0.430E_0$

89. *(a)* 1.01 Hz

(b) 2.01 Hz

(c) 0.352 Hz

91. *(a)* 4.98 cm

(b) 14.1 rad/s

(c) 35.4 cm

(d) 1.00 rad/s

93. *(a)* 0

(b) 4.00 m/s

95. *(a)* 14.1 cm; 0.444 s

(b) 23.1 cm; 0.363 s

(c) $(14.1\text{ cm})\sin[(14.1\text{ s}^{-1})t]$; $(23.1\text{ cm})\sin[(17.3\text{ s}^{-1})t]$

97. *(a)* $v = -(1.2\text{ m/s})\sin\left[(3\text{ rad/s})t + \frac{\pi}{4}\right]$

(b) -0.849 m/s

(c) 1.20 m/s

(d) 1.31 s

99. *(a)* The normal force is identical to the tension in a string of length r that keeps the particle moving in a circular path and a component of mg provides, for small displacements θ_0 or s_2, the linear restoring force required for oscillatory motion.

(b) The particles meet at the bottom. Because s_1 and s_2 are both much smaller than r, the particles behave like the bobs of simple pendulums of equal length and, therefore, have the same periods.

101. 1.62 s

103. 3.86×10^{-7} N·m/rad

105. g' is closer to g than is g''. Thus the error is greater if the clock is elevated.

107. *(a)* $\mu_s = \frac{Ak}{(m_1 + m_2)g}$

(b) A is unchanged. E is unchanged since $E = \frac{1}{2}kA^2$. ω is reduced by increasing the total mass of the system and T is increased.

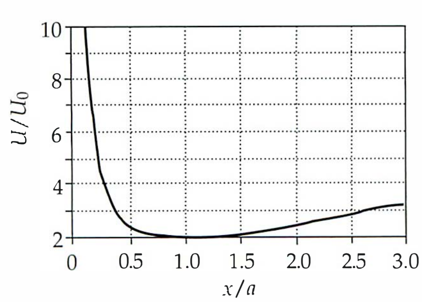
109. *(b)* 2.04 cm/s^2

113. *(a)* $x = 0$

(b) $v_s = x_0\sqrt{\frac{k}{m_b + m_p}}$

(c) $x_f = x_0\sqrt{\frac{m_p}{m_b + m_p}}$

115. *(a)*



(b) $x_0 = a$ or $\alpha_0 = 1$

(c) $U(x_0 + \varepsilon) = U_0[1 + \beta + (1 + \beta)^{-1}]$

(d) $U(x_0 + \varepsilon) = \text{constant} + U_0\frac{\varepsilon^2}{a^2}$

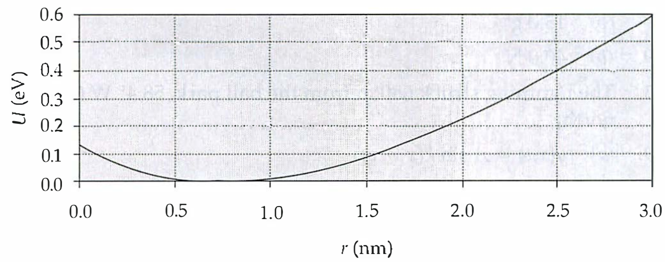
119. 6.44×10^{13} rad/s

121. $7.78\sqrt{\frac{R}{g}}$

123. *(a)* 0.0478

(b) 0.00228

127. *(a)*



(b) $r = r_0$; $k = 2\beta^2 D$

(c) $\omega = 2\beta\sqrt{\frac{D}{m}}$

Chapter 15

1. The speed of a transverse wave on a rope is given by $v = \sqrt{F/\mu}$ where F is the tension in the rope and μ is its linear density. The waves on the rope move faster as they move up because the tension increases due to the weight of the rope below.

3. True

5. The speed of the wave v on the bullwhip varies with the tension F in the whip and its linear density μ according to $v = \sqrt{F/\mu}$. As the whip tapers, the wave speed in the tapered end increases due to the decrease in the mass density, so the wave travels faster.

7. No; Because the source and receiver are at rest relative to each other, there is no relative motion of the source and receiver and there will be no Doppler shift in frequency.

9. The light from the companion star will be shifted about its mean frequency periodically due to the relative approach to and recession from the earth of the companion star as it revolves about the black hole.

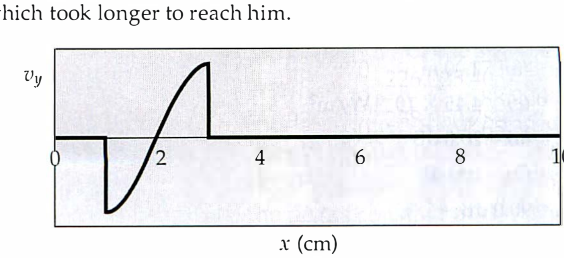
11. *(a)* True

(b) False

(c) False

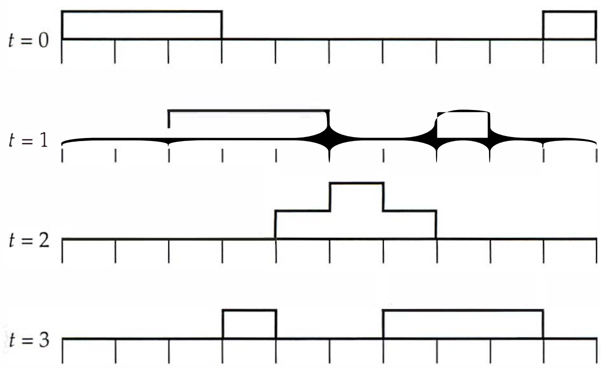
13. There was only one explosion. Sound travels faster in water than air. Abel heard the sound wave in the water first, then, surfacing, heard the sound wave traveling through the air, which took longer to reach him.

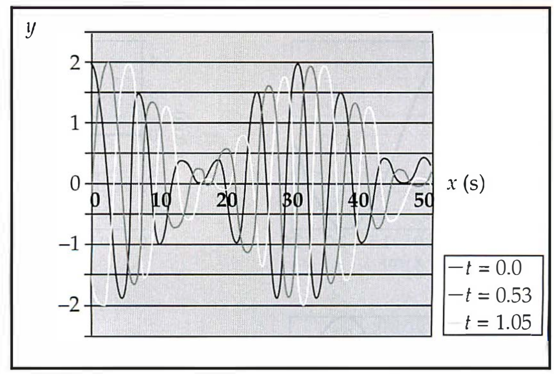
15.



17. Path C. Because the wave speed is highest in the water, and more of path C is underwater than A or B, the sound wave will spend the least time on path C.
19. (*a*) 78.5 m
 (*b*) 69.7 m
 (*c*) 70.5 m . . . about 1% larger than our result in part (*b*) and 11% smaller than our first approximation in (*a*).
21. 270 m/s; 20.6%
23. 1.32 km/s
25. 19.6 g
27. (*a*) 265 m/s
 (*b*) 15.0 g
29. (*b*) 40.0 N
33. The lightning struck 680 m from the ball park, 58.4° W (or E) of north.
39. (*a*) $y(x,t) = A \sin k(x - vt)$
 (*b*) $y(x,t) = A \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)$
 (*c*) $y(x,t) = A \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{1}{T}t\right)$
 (*d*) $y(x,t) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$
 (*e*) $y(x,t) = A \sin 2\pi f\left(\frac{x}{v} - t\right)$
41. 9.87 W
43. (*a*) The wave is traveling in the $-x$ direction.; 5.00 m/s
 (*b*) 10.0 cm; 50.0 Hz; 0.0200 s
 (*c*) 0.314 m/s
45. (*a*) 6.82 J
 (*b*) 44.0 W
47. (*a*) 79.0 mW
 (*b*) Increasing f by a factor of 10 would increase P_{av} by a factor of 100. Increasing A by a factor of 10 would increase P_{av} by a factor of 100. Increasing F by a factor of 10^4 would increase v by a factor of 100 and P_{av} by a factor of 100.
 (*c*) Depending on the adjustability of the power source, increasing f or A would be the easiest.
49. (*a*) 0.750 Pa
 (*b*) 4.00 m
 (*c*) 85.0 Hz
 (*d*) 340 m/s
51. (*a*) 3.68×10^{-5} m
 (*b*) 8.27×10^{-2} Pa
53. (*a*) The displacement s is zero.
 (*b*) 3.68 μm
55. (*a*) 138 Pa
 (*b*) 21.7 W/m^2
 (*c*) 0.217 W
57. (*a*) 50.3 W
 (*b*) 2.00 m
 (*c*) 4.45×10^{-3} W/m^2
59. (*a*) 20.0 dB
 (*b*) 100 dB
61. 90.0 dB
65. (*a*) 100 m
 (*b*) 0.126 W
67. (*a*) 100 dB
 (*b*) 50.3 W
 (*c*) 2.00 m
 (*d*) 96.5 dB
69. (*a*) 81.1 dB
 (*b*) 80.0 dB; Eliminating the two least intense sources does not reduce the intensity level significantly.
71. 87.8 dB
73. 57.0 dB
75. (*a*) 260 m/s
 (*b*) 1.30 m
 (*c*) 262 Hz
77. (*a*) 1.70 m
 (*b*) 247 Hz
79. 153 Hz
81. 1021 Hz or a fraction increase of 2.06%; Because this fractional change in frequency is less than the 3% criterion for recognition of a change in frequency, it would be *impossible* to use your sense of pitch to estimate your running speed.
83. 349 mi/h
85. 7.78 kHz
87. 15.0 km west of P
89. (*a*) $f' = (1 - u_r/v)(1 - u_s/v)^{-1} f_0$
91. 1.33 m/s
93. (*a*) 824 Hz
 (*b*) 849 Hz
95. 184 m
97. -2.07×10^{-5} nm; 99 2.25×10^8 m/s
99. 2.25 × 10^8 m/s . . . where the upper arrow means the 8 is an exponent.
101. 20.8 cm
103. 3.42 m/s
105. 529 Hz; 474 Hz
107. 7.99 m
109. (*a*) 55.1 N/m^2
 (*b*) 3.46 W/m^2
 (*c*) 0.109 W
111. 77.0 kN
113. 204 m
115. 24.0 cm
117. (*b*) $v_0 = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$
 (*c*) As seen by an observer at rest, the pulse remains at the same position because its speed along the chain is the same as the speed of the chain. With respect to a fixed point on the chain, the pulse travels through 360°.
119. (*b*) 2.21 s

Chapter 16

1. 

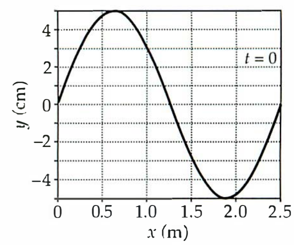
3. *(c)*
5. *(b)*
7. *(a)*
9. since $v \propto T$, increasing the temperature increases resonant frequencies.
11. No; the wavelength of a wave is related to its frequency and speed of propagation ($\lambda = v/f$). The frequency of the plucked string will be the same as the wave it produces in air, but the speeds of the waves depend on the media in which they are propagating. Since the velocities of propagation differ, the wavelengths will not be the same.
13. When the edges of the glass vibrate, sound waves are produced in the air in the glass. The resonance frequency of the air columns depends on the length of the air column, which depends on how much water is in the glass.
15. *(b)*
17. The pitch is determined mostly by the resonant cavity of the mouth, and the frequency of sounds he makes is directly proportional to their speed. Since $v_{He} > v_{air}$ (see Equation 15-5), the resonance frequency is higher if helium is the gas in the cavity.
19. Pianos are tuned by ringing the tuning fork and the piano note simultaneously and tuning the piano string until the beats are far apart (i.e., the time between beats is very long). If we assume that 2 s is the maximum detectable period for the beats, then one should be able to tune the piano string to at least 0.5 Hz.
21. 34.0 Hz; Because $v \propto T$, the frequency will be somewhat higher in the summer.
23. 7.07 cm
25. *(a)* 90.0°
    (b) $\sqrt{2}A$
27. *(a)* 0
    (b) $2I_0$
    (c) $4I_0$
29. *(a)* $\frac{1}{4}\lambda$
    (b) $\frac{1}{4}\lambda$
31. *(a)* 60.0 cm
    (b) $\dfrac{2\pi}{5}$
    (c) 24.0 m/s
33. 4726 Hz; 9452 Hz
35. *(b)* 

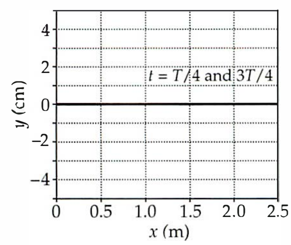
    (c) 0.500 m/s
37. 1.81; 51.5°
39. *(a)* 0.279 m
    (b) 1.22 kHz
    (c)

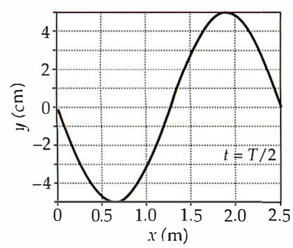
m	θ_m
	(rad)
3	0.432
4	0.592
5	0.772
6	0.992
7	1.354
8	undefined

    (d) 0.0698 rad
41. 1.98 rad or 113°
43. *(a)* 70.5 Hz
    (b) The person on the street hears no beat frequency as the sirens of both ambulances are Doppler shifted up by the same amount (approximately 35 Hz).
45. *(a)* 2.00 m; 25.0 Hz
    (b) $y_3(x,t) = (4\text{ mm})\sin kx \cos \omega t$, where $k = \pi\text{ m}^{-1}$ and $\omega = 50\pi\text{s}^{-1}$.
47. *(a)* 521 m/s
    (b) 2.80 m; 186 Hz
    (c) 372 Hz; 558 Hz
49. 141 Hz
51. *(a)* 31.4 cm; 47.7 Hz
    (b) 15.0 m/s
    (c) 62.8 cm

53. *(a)*







(b) 12.6 ms

(c) Since the string is moving either upward or downward when $y(x) = 0$ for all x, the energy of the wave is entirely kinetic energy.

55. *(a)* 70.8 Hz

(b) 4.89 Hz

(c) 35

57. 452 Hz; It would be better to have the pipe expand so that v/L, where L is the length of the pipe, is independent of temperature.

59. *(a)* 80 cm

(b) 480 N

(c) You should place your finger 9.23 cm from the scroll bridge.

61. *(a)* 75.0 Hz

(b) The harmonics are the 5th and 6th.

(c) 2.00 m

63. *(a)* 0.574 g/m

(b) 1.29 g/m; 2.91 g/m; 6.55 g/m

65. *(a)* The two sounds produce a beat because the third harmonic of the A string equals the second harmonic of the E string, and the original frequency of the E string is slightly greater than 660 Hz. If $f_E = (660 + \Delta f)$Hz, a beat of $2\Delta f$ will be heard.

(b) 661.5 Hz

(c) 79.6 N

69. 76.8 N; 19.2 N; 8.53 N

71. *(a)* N/f_0

(b) $\Delta x/N$

(c) $2\pi N/\Delta x$

(d) N is uncertain because the waveform dies out gradually rather than stopping abruptly at some time; hence, where the pulse starts and stops is not well defined.

73. *(a)* 3.40 kHz; 10.2 kHz; 17.0 kHz

(b) Frequencies near 3400 Hz will be most readily perceived.

75. $\frac{1}{3}\lambda$

77. 6.62 m

79. *(a)* 1.90 cm; 3.59 m/s

(b) 0; 0

(c) 1.18 cm; 2.22 m/s

(d) 0; 0

81. *(a)* At resonance, standing waves are set up in the tube. At a displacement antinode, the powder is moved about; at a node the powder is stationary, and so it collects at the nodes.

(b) $2fD$

(c) If we let the length L of the tube be 1.2 m and assume that $v_{air} = 344$ m/s (the speed of sound in air at 20°C), then the 10th harmonic corresponds to $D = 25.3$ cm and a driving frequency of 680 Hz.

(d) If $f = 2$ kHz and $v_{He} = 1008$ m/s (the speed of sound in helium at 20°), then D for the 10th harmonic in helium would be 25.3 cm, and D for the 10th harmonic in air would be 8.60 cm. Hence, neglecting end effects at the driven end, a tube whose length is the least common multiple of 8.60 cm and 25.3 cm (218 cm) would work well for the measurement of the speed of sound in either air or helium.

83. *(a)* The pipe is closed at one end.

(b) 262 Hz

(c) 32.4 cm

85. *(a)* $y_1(x,t) = (0.01\text{ m})\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}\text{ m}^{-1}\right)x - (40\pi\text{ s}^{-1})t\right]$;

$y_2(x,t) = (0.01\text{ m})\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}\text{ m}^{-1}\right)x + (40\pi\text{ s}^{-1})t\right]$;

(b) 2.00 m

(c) $v_y(1\text{ m},t) = -(2.51\text{ m/s})\sin(40\pi\text{ s}^{-1})t$

(d) $a_y(1\text{ m},t) = -(316\text{ m/s}^2)\cos(40\pi\text{ s}^{-1})t$

87. $y_{res}(x,t) = 0.1\sin(kx - \omega t)$

89. *(b)* 203 Hz

91. *(a)* What you hear is the fundamental mode of the tube and its overtones. A more physical explanation is that the echo of the finger snap moves back and forth along the tube with a characteristic time of $2L/c$, leading to a series of clicks from each echo. Since the clicks happen with a frequency of $c/2L$, the ear interprets this as a musical note of that frequency.

(b) 38.6 cm

93. *(a)* Since no conditions were placed on its derivation, this expression is valid for all harmonics.

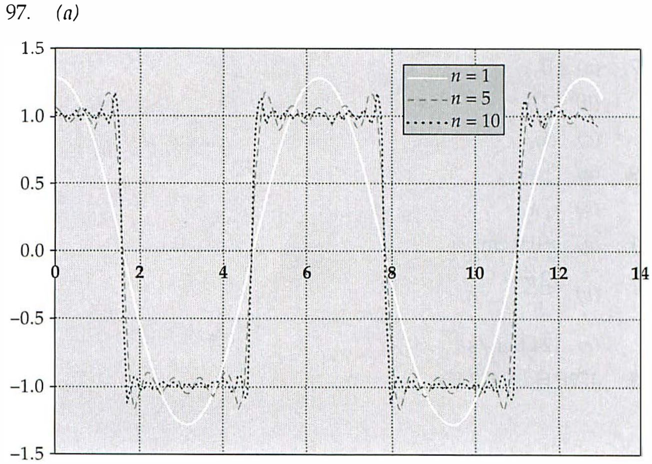
(b) 1.54%

95. *(a)* $v_y(x,t) = -\omega_1 A_1 \sin\omega_1 t \sin k_1 x - \omega_2 A_2 \sin\omega_2 t \sin k_2 x$

(b) $dK = \frac{1}{2}\mu\left[\omega_1^2 A_1^2 \sin^2\omega_1 t \sin^2 k_1 x + 2\omega_1\omega_2 A_1 A_2 \sin\omega_1 t \sin k_1 x \sin\omega_2 t \sin k_2 x + \omega_2^2 A_2^2 \sin^2\omega_2 t \sin^2 k_2 x\right]dx$

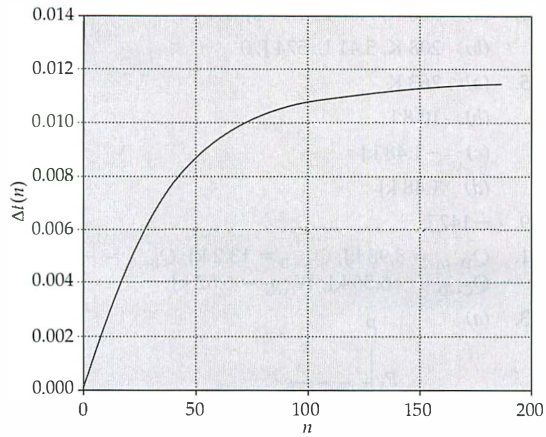
(c) $K = \frac{1}{4}m\omega_1^2 A_1^2 \sin^2\omega_1 t + \frac{1}{4}m\omega_2^2 A_2^2 \sin^2\omega_2 t$

97. *(a)*



(b) $f(2\pi) = 1$ which is equivalent to the Liebnitz formula.

99. (b)



(c) The frequency heard at any time is $1/\Delta t_n$, so because Δt_n increases over time, the frequency of the culvert whistler decreases.; 7.65 kHz

Chapter 17

1. (a) False
   (b) False
   (c) True
   (d) False
3. Mert's room was colder.
5. From the ideal-gas law we have $P = nRT/V$. In the process depicted, both the temperature and the volume increase but the temperature increases faster than does the volume. Hence the pressure increases.
7. True
9. K_{av} increases by a factor of 2; K_{av} is reduced by a factor of $\frac{1}{2}$.
11. False
13. Since $10^7 >> 273$, it does not matter.
15. (b)
17. (d)
19. The ratio of the rms speeds is inversely proportional to the square root of the ratio of the molecular masses. The kinetic energies of the molecules are the same.
21. Because the temperature remains constant, the average speed of the molecules remains constant. When the volume decreases, the molecules travel less distance between collisions, so the pressure increases because the frequency of collisions increases.
23. The average molecular speed of He gas at 300 K is about 1.4 km/s, so a significant fraction of He molecules have speeds in excess of earth's escape velocity (11.2 km/s), and thus "leak" away into space. Over time, the He content of the atmosphere decreases to almost nothing.
25. (a) 3.61×10^3 K
   (b) 225 K
   (c) If $v_{rms} > \frac{1}{5}v_e$ or $T \geq 25T_{atm}$, H_2 molecules escape. Therefore, the more energetic H_2 molecules escape from the upper atmosphere.
   (d) 164 K; 10.3 K; If we assume that the temperature on the moon with an atmosphere would have been approximately 1000 K, then all O_2 and H_2 would have escaped during the time since the formation of the moon to the present.
27. (a) 1.24 km/s
   (b) 310 m/s
   (c) 264 m/s
   (d) O_2, CO_2, and H_2 should be found on Jupiter.
29. 1063°C
31. (a) 8.40 cm
   (b) 107°C
33. −319°F
35. (a) 54.9 torr
   (b) 3704 K
37. −40°C = −40°F
39. −183°C; −297°F
41. (a) $B = 3.94 \times 10^3$ K; $R_0 = 3.97 \times 10^{-3}\ \Omega$
   (b) 1.31 kΩ
   (c) −389 Ω/K; −433 Ω/K
   (d) The thermistor is more sensitive (i.e., has greater sensitivity, at lower temperatures).
43. 1.79 mol; 1.08×10^{24} molecules
45. −83.2 *glips*
47. (a) 3.66×10^3 mol
   (b) 60.0 mol
49. 10.0 atm
51. 1.19 kg/m³
53. 2.56 N
55. (a) 276 m/s
   (b) 872 m/s
57. 499 km/s; 2.07×10^{-16} J
61. $K/\Delta U = 7.95 \times 10^4$
65. (a) 0.142 s
   (b) 0.143 s
67. (a) 122 K
   (b) 244 K
   (c) 1.43 atm
69. 111 mol; 55.5 mol
71. $7m_H$
73. 400.49 K
75. (a) 4.10×10^{-26} m
   (b) 4.28 nm; The mean free path is larger by approximately a factor of 1000.
77. (a) 48.9%
   (b) 70.6%

Chapter 18

1. $\Delta T_B = 4\Delta T_A$
3. (c)
5. Yes, if the heat adsorbed by the system is equal to the work done by the system.
7. $W_m + Q_m = \Delta E_{int}$; For an ideal gas, ΔE_{int} is a function of T only. Since $W = 0$ and $Q = 0$ in a free expansion, $\Delta E_{int} = 0$ and T is constant. For a real gas, ΔE_{int} depends on the density of the gas because the molecules exert weak attractive forces on each other. In a free expansion, these forces reduce the average kinetic energy of the molecules and, consequently, the temperature.
9. The temperature of the gas increases. The average kinetic energy increases with increasing volume due to the repulsive interaction between the ions.

Constantes físicas[a]

Constante de masa atómica	$m_u = \frac{1}{12}m(^{12}C)$	$1\ u = 1{,}660\ 538\ 73(13) \times 10^{-27}$ kg
Número de Avogadro	N_A	$6{,}022\ 141\ 99(47) \times 10^{23}$ partículas/mol
Constante de Boltzmann	$k = R/N_A$	$1{,}380\ 6503(24) \times 10^{-23}$ J/K
Magnetón de Bohr	$m_B = e\hbar/(2m_e)$	$9{,}274\ 008\ 99(37) \times 10^{-24}$ J/T $5{,}788\ 381\ 759(43) \times 10^{-5}$ eV/T
Constante de Coulomb	$k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$	$8{,}987\ 551\ 788\ldots \times 10^{9}\ N \cdot m^2/C^2$
Longitud de onda Compton	$\lambda_C = h/(m_e c)$	$2{,}426\ 310\ 215(18) \times 10^{-12}$ m
Carga fundamental	e	$1{,}602\ 1764\ 62(63) \times 10^{-19}$ C
Constante de los gases	R	$8{,}314\ 472(15)$ J/(mol · K) $1{,}987\ 2065(36)$ cal/(mol · K) $8{,}205\ 746(15) \times 10^{-2}$ atm · L/(mol · K)
Constante de la gravitación	G	$6{,}673(10) \times 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$
Masa del electrón	m_e	$9{,}109\ 381\ 88\ (72) \times 10^{-31}$ kg $0{,}510\ 998\ 902(21)\ MeV/c^2$
Masa del protón	m_p	$1{,}672\ 621\ 58(13) \times 10^{-27}$ kg $938{,}271\ 998(38)\ MeV/c^2$
Masa del neutrón	m_n	$1{,}674\ 927\ 16(13) \times 10^{-27}$ kg $939{,}565\ 330(38)\ MeV/c^2$
Permitividad del espacio libre	ε_0	$8{,}854\ 187\ 817\ldots \times 10^{-12}\ C^2/(N \cdot m^2)$
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\ N/A^2$
Constante de Planck	h	$6{,}626\ 068\ 76(52) \times 10^{-34}$ J · s $4{,}135\ 667\ 27(16) \times 10^{-15}$ eV · s
	$\hbar = h/(2\pi)$	$1{,}054\ 571\ 596(82) \times 10^{-34}$ J · s $6{,}582\ 118\ 89(26) \times 10^{-16}$ eV · s
Velocidad de la luz	c	$2{,}997\ 924\ 58 \times 10^{8}$ m/s
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5{,}670\ 400(40) \times 10^{-8}\ W/(m^2 \cdot K^4)$

[a]Los valores de estas y otras constantes pueden obtenerse de la dirección de Internet http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html. Los números entre paréntesis representan los errores en las dos últimas cifras. (Por ejemplo, 2,044 43(13) significa 2,044 43 ± 0,00013.) Los valores sin números entre paréntesis son exactos incluyendo aquellos con puntos suspensivos (como el valor de π que es exactamente 3,1415…)

Derivadas e integrales definidas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} ax = a\cos ax \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a} \qquad \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

En las seis integrales, a es una constante positiva.

$$\frac{d}{dx}\cos ax = -a\operatorname{sen} ax \qquad \int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}\,dx = \frac{4}{a^2}$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax} \qquad \int_0^\infty xe^{-ax^2}\,dx = \frac{2}{a} \qquad \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

Productos vectoriales

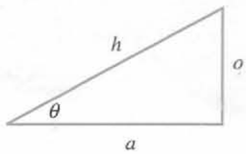
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta \qquad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB\operatorname{sen}\theta\mathbf{n}$ (**n** obtenido mediante la regla de la mano derecha)

Geometría y trigonometría

$C = \pi d = 2\pi r$	definición de π
$A = \pi r^2$	área de un círculo
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	volumen de una esfera
$A = dV/dr = 4\pi r^2$	área de la superficie esférica
$V = A_{\text{base}}L = \pi r^2 L$	volumen de un cilindro
$A = dV/dr = 2\pi r L$	área de la superficie cilíndrica

$o = h\,\text{sen}\ \theta$

$a = h\cos\theta$



$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$

$\text{sen}(A \pm B) = \text{sen}\,A\cos B \pm \cos A\ \text{sen}\,B$

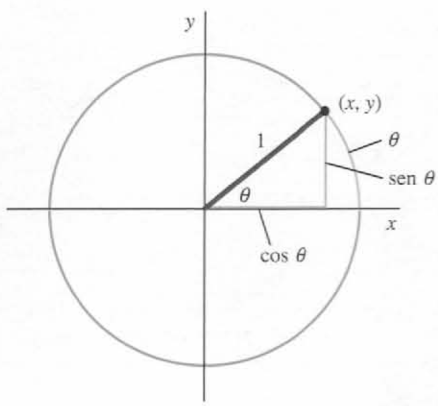
$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \text{sen}\,A\ \text{sen}\,B$

$\text{sen}\,A \pm \text{sen}\,B = 2\text{sen}[\frac{1}{2}(A \pm B)]\cos[\frac{1}{2}(A \mp B)]$

$\text{sen}\ \theta \equiv y$

$\cos\theta \equiv x$

$\text{tg}\ \theta \equiv \dfrac{y}{x}$



Si $|\theta| << 1$, entonces

$\cos\theta \approx 1$ y $\text{tg}\ \theta \approx \text{sen}\ \theta \approx \theta$ (θ en radianes)

La ecuación de segundo grado

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Desarrollo del binomio

Si $|x| < 1$, entonces $(1 + x)^n = 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$

Si $|x| << 1$, entonces $(1 + x)^n \approx 1 + nx$

Si $|\Delta x|$ es pequeño, entonces $\Delta F \approx \dfrac{dF}{dx}\,\Delta x$

Paul A. TIPLER - Gene MOSCA

física

5ª EDICIÓN

PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

La Física para la Ciencia y la Tecnología de Paul A. Tipler es una referencia obligada para los cursos de física universitarios por su impecable claridad y precisión. Paul A. TIPLER y Gene MOSCA desarrollan nuevas formas de exponer la física con la intención de no abrumar a los estudiantes sin simplificar en exceso el contenido.

Gene Mosca ha revisado escrupulosa y críticamente todas las explicaciones y ejemplos del texto desde la perspectiva de los estudiantes de los primeros cursos universitarios. Esta nueva edición incorpora además muchas herramientas y técnicas pedagógicas. El resultado es un texto que mantiene su solidez tradicional y que al mismo tiempo ofrece a los estudiantes las estrategias que necesitan para resolver los problemas y para conseguir una comprensión eficaz de los conceptos físicos.

ISBN 84-291-4411-0

9 788429 144116

EDITORIAL REVERTÉ S.A.
www.reverte.com