

RO202 - Initiation à la Recherche Opérationnelle

Zacharie Ales, Tiphaine GEORGE
2025 - 2026

EXERCICES 3 - Programmation linéaire

Exercise 1

Soit le programme linéaire suivant.

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \max 2x + y \\ \text{s.c. } \begin{aligned} y &\geq x - 4 \\ y &\leq 8 \\ 8x + 5y &\leq 56 \\ x, y &\in \mathbb{N} \end{aligned} \end{array} \right.$$

Ceci est un programme linéaire **en nombres entiers** car ses variables x et y doivent être entières.

Si on "oublie" que les variables sont entières en remplaçant $x, y \in \mathbb{N}$ par $x, y \in \mathbb{R}$, on obtient la **relaxation linéaire** de ce programme qui est généralement plus facile à résoudre.

1. Fonction objectif F
 - a) Résoudre la relaxation linéaire du programme graphiquement.
 - b) Que peut-on déduire de la solution obtenue pour le problème en nombres entiers associé?
2. Mêmes questions en remplaçant maintenant la fonction objectif par $G = \max x + 6y$
3. Ecrire la relaxation linéaire du problème d'origine sous forme standard.

Exercise 2

Soit le système suivant (forme standard) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z = \min 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ \text{s.c. } \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 4 & (C_1) \\ x_2 + 3x_3 + x_5 &= 6 & (C_2) \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_6 &= 7 & (C_3) \\ x_1, \dots, x_6 &\geq 0 & \end{aligned} \end{array} \right.$$

et soit la solution : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2, 0, 2, 0, 0, 1)$.

1. Vérifier que c'est une solution de base.
2. Mettre le tableau sous forme canonique. Est-ce que cette base est réalisable ? Quelle est la valeur de sa solution ? Est-ce une solution optimale ?
Remarque : Vous pourrez utiliser les tableaux à compléter figurant en fin de TD
3. Calculer une solution optimale en utilisant l'algorithme du simplexe et en prenant comme base initiale celle de la question précédente.

Exercise 3 Implémentation

L'objectif de cet exercice est d'implémenter la méthode `pivot()` de la classe `Tableau`.

Cette classe représente un programme linéaire sous forme normale. Elle contient, notamment, les attributs suivants :

- `n`, `m`, `A[][]`, `b[]`, `c[]` : décrivent le tableau;

- `basis[]` : indice des variables actuellement en base
(ou `[]` si la base n'est pas encore définie);
- `isMinimization` : `True` si on minimise l'objectif, `false` si on maximise.

ainsi que les méthodes :

- `pivot()` : effectue un pivot en utilisant la base figurant dans `basis` :
 1. met le tableau sous forme canonique;
 2. identifie la variable entrante et la variable sortante;
 3. retourne `True` si une nouvelle base est trouvée et `False` si l'optimum est atteint.
- `applySimplex()` : résout le problème en effectuant des pivots successifs;
- `tableauWithSlack()` : ajoute une variable d'écart à chaque contrainte et utilise ces variables pour définir une base.

Il existe deux façons d'utiliser cette classe pour résoudre un programme linéaire à partir d'un Tableau `t`:

1. `t.applySimplex()` : à utiliser quand le programme est sous forme normale ($Ax = b$) et qu'une base est connue;
2. `t.addSlackAndSolve()` : à utiliser quand le programme est sous la forme $Ax \leq b$.
1. Compléter la méthode `pivot()` du fichier `tableau.py` pour mettre le tableau sous forme canonique.
2. Identifier la nouvelle base
 - a) Identifier la variable sortante et l'afficher (pensez à prendre en compte l'attribut `isMinimization`).

Remarque : Les calculs de réels en informatique ne sont pas toujours exacts. C'est pourquoi un réel sera considéré positif s'il est supérieur à 10^{-6} et négatif s'il est inférieur à -10^{-6} .

- b) Identifier la variable sortante et l'afficher.
3. Vérifier la solution obtenue à l'exercice 1.
4. Vérifier la solution obtenue à l'exercice 2.

Exercice 4

Utiliser votre implémentation du simplexe afin de résoudre les problèmes suivants et donner leur solution optimale :

$$z = \max 8x_1 + 6x_2$$

$$\text{tel que } 5x_1 + 3x_2 \leq 30$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$z = \max x_1 + 2x_2$$

$$\text{tel que } -3x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Exercice 5

Soit le système suivant (forme canonique) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min z(x) = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c. } 2x_1 + x_2 \geq 3 \quad (C_1) \\ \quad 2x_1 - x_2 \geq 5 \quad (C_2) \\ \quad x_1 + 4x_2 \geq 6 \quad (C_3) \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \quad (C_4) \end{array} \right.$$

1. Ecrire le dual et les "contraintes des écarts complémentaires".
2. La solution $x_1 = 3, x_2 = 1$ est-elle réalisable ? de base ? optimale ?
3. La solution $x_1 = \frac{26}{9}, x_2 = \frac{7}{9}$ est-elle réalisable ? de base ? optimale ?

Aide pour l'exercice 2

Tableau initial

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
(C_1)						
(C_2)						
(C_3)						
(Obj)						

Première étape de mise en forme canonique
pour la base $\{x_1, x_3, x_6\}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
$(C_1) \leftarrow (C_1)$						
$(C_2) \leftarrow (C_2)/3$						
$(C_3) \leftarrow (C_3) - 2(C_1)$						
$(Obj) \leftarrow (Obj) - 2(C_1)$						

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
$(C_1) \leftarrow$						
$(C_2) \leftarrow$						
$(C_3) \leftarrow$						
$(Obj) \leftarrow$						

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
$(C_1) \leftarrow$						
$(C_2) \leftarrow$						
$(C_3) \leftarrow$						
$(Obj) \leftarrow$						

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
$(C_1) \leftarrow$						
$(C_2) \leftarrow$						
$(C_3) \leftarrow$						
$(Obj) \leftarrow$						