Oscilações: o pêndulo simples

IF/UnB - Física 2 Experimental

Objetivo: Caraterizar o movimento oscilatório de um pêndulo real e as condições em que ele pode ser considerado um pêndulo simples. Descrever matematicamente as variáveis relevantes de um sistema oscilante por meio de uma análise dos dados coletados.

Conhecimentos explorados: Leis de Newton, momento de inércia, forças características em sistemas oscilantes, ferramentas gráficas e de aquisição de dados.

MATERIAIS

- Pêndulo fisico com duas massas acoplado a sensor de ângulo,
- Placa de aquisição de dados DrDaq (Pico Technology),
- Software de aquisição de dados DrDaq,
- Computador,
- Balança de precisão (0.1 g),
- Régua milimetrada.

INTRODUÇÃO

A quase totalidade dos fenômenos fisicos no mundo envolve direta ou indiretamente algum tipo de oscilação. Conseqüentemente, a física das oscilações é um tópico de suma importância e entendê-la bem significa estar a meio caminho de entender uma boa parte da fenomenologia da maioria dos processos físicos. Historicamente, pode-se dizer que o pêndulo representa o início do estudo das oscilações e nos dedicaremos a entendê-lo com cuidado. Vamos reproduzir aqui a descrição matemática do movimento de um pêndulo.

Considere o pêndulo simples descrito na figura 1, que também mostra as forças envolvidas em um dado instante da oscilação. Para que um movimento seja oscilatório é necessário existir uma força de restauração, que cresce na medida em que se afasta de uma determinada posição e aponta sempre em direção a essa posição, conhecida como posição de equilíbrio. Se a força crescer proporcionalmente com a distância de afastamento da posição de equilíbrio do sistema, o resultado é conhecido como movimento harmônico simples. No caso do pêndulo, a variável que oscila é o ângulo θ em torno da linha vertical e sobre o objeto oscilante atuam a força peso e a tensão da corda que o sustenta.

A componente da força tangencial à trajetória é a força restauradora. A distancia percorrida pelo objeto pode ser descrita por $L\theta$, em que θ é medido em radianos. Assim, pode-se escrever a seguinte equação

$$F = ma = m\frac{d^2(L\theta)}{dt^2} = -mg\sin\theta, \tag{1}$$

ou, resumidamente,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta. \tag{2}$$

Essa é a equação de movimento. A solução exata dessa equação é difícil, mas pode-se obter uma boa aproximação para ângulos pequenos que a torna muito mais simples. Para isso basta notar que o seno do ângulo é dado pela seguinte série de Taylor:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \tag{3}$$

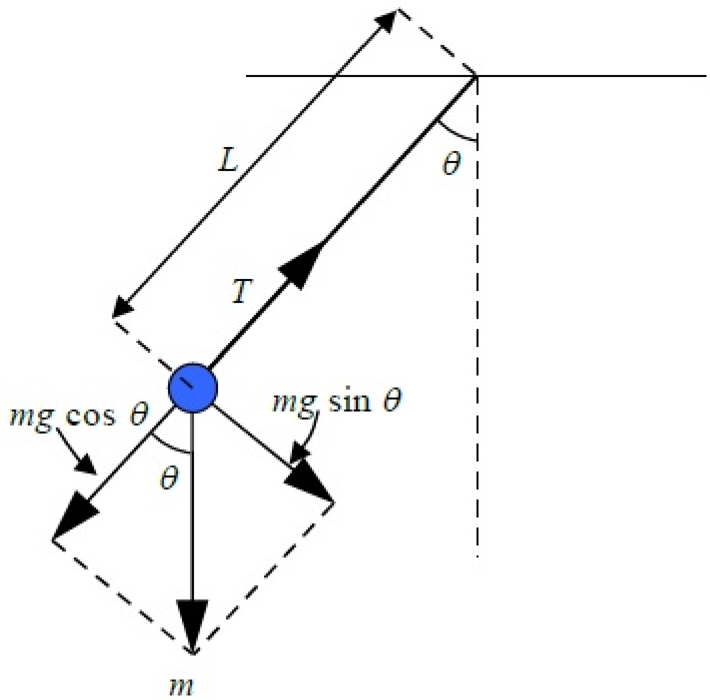


Figura 1. Diagrama de forças do pêndulo simples.

Para ângulos bem pequenos, o termo cúbico é muito menor que o termo linear e pode ser desprezado com boa precisão. Para se ter uma idéia, um ângulo de 10º corresponde a 0,1745 radianos. O seno desse ângulo é

$$\sin(0,1745\,rad) = 0,1736,$$

ou seja, até cerca de 10º comete-se um erro de cerca de 0,5% ao assumir que $\sin\theta = \theta$. Assim, mantendo-se apenas o primeiro termo, a equação de movimento fica simplificada,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta, \tag{4}$$

e agora possui solução exata. Se no instante $t = 0\,s$ o pêndulo estiver deslocado da posição de equilíbrio de um ângulo θ_0, então é fácil verificar que a solução para essa equação é dada por

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t + \phi), \tag{5}$$

em que ϕ é um ângulo arbitrario que serve para ajustar a posição do tempo $t = 0$. Substituindo (5) em (4), pode-se mostrar que a frequência angular ω, em rad.s^{-1}, é dada por

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}}, \tag{6}$$

de onde se deduz que o período de um pêndulo simples no limite de pequenas amplitudes, ou seja, θ_0 pequeno, não depende da amplitude e é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{7}$$

Na medida em que o ângulo de oscilação aumenta, o período deixa de ser constante e passa a depender da própria amplitude de oscilação. A condição para se ter um período independente da posição é a de que a força restauradora seja sempre proporcional ao afastamento da posição de equilíbrio. Digamos que se queira iniciar a oscilação com $\theta = 90^\circ = \pi/2$ rad. Para esse ângulo, a força restauradora é igual ao próprio peso mg. Por outro lado, se fossemos

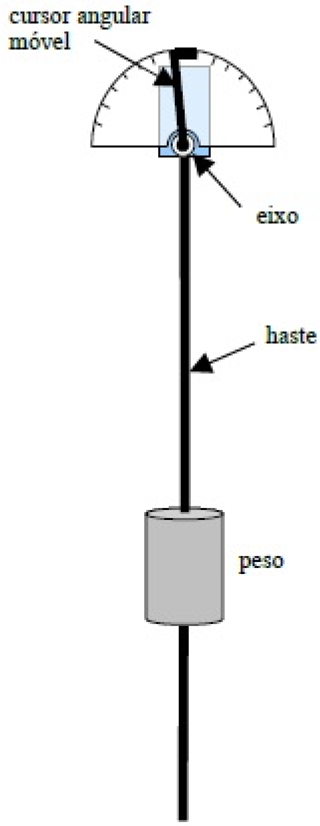


Figura 2. Pêndulo utilizado no experimento.

obedecer à regra de que o afastamento é proporcional ao deslocamento, deveríamos ter uma força restauradora igual a θmg, ou seja, $1,72 \times mg$, cerca de 70% superior ao valor real. Assim, para esses grandes ângulos, a força restauradora é menor que a força que deveria existir para um movimento harmônico simples. Conseqüentemente, o objeto é menos acelerado de volta à sua posição de equilíbrio do que seria esperado, resultando em um aumento do tempo gasto para retornar à posição de equilíbrio. Em outras palavras, o período aumenta com o ângulo de oscilação.

A dependência do período com a amplitude pode ser estimada levando-se em consideração a expansão em série de Taylor do seno do ângulo ou por considerações de energia. É possível mostrar que a solução aproximada para o período do pêndulo é dada por

$$\begin{aligned} T(\theta_0) &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \ldots\right) \\ &= T_0\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \ldots\right), \end{aligned} \tag{8}$$

em que θ_0 é o ângulo de lançamento do pêndulo, ou seja, o ângulo máximo, e $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ é o limite do período para pequenas amplitudes. O resultado algébrico mostra que, como esperado, o período cresce com o ângulo.

O PÊNDULO DO LABORATORIO

Descrição: A figura 2 é uma ilustração do pêndulo que será utilizado neste experimento. Ele é constituído de um eixo de sustentação, uma haste de aço (densidade = 0,384 g/cm) de 2 mm de diâmetro e 90 cm de comprimento e um peso de ferro. Pode-se mover a posição desse peso pela haste, o que permite investigar a dependência do período do pêndulo em função da distância desse peso ao eixo de sustentação. Um segundo peso será introduzido mais à frente, quando tratarmos do pêndulo físico com duas massas. A leitura manual do ângulo pode ser feita a partir do cursor angular que se move junto com o pêndulo sobre um transferidor graduado feito de aço.

Colocando-o em movimento: É importante que o pêndulo oscile em um plano fixo, perpendicular ao eixo móvel. Para mantê-lo oscilando nesse plano, evite coloca-lo em movimento segurando-o ou empurrando-o pelo peso. Coloque-o em movimento empurrando-o junto ao eixo, pouco a pouco, como em um balanço. Dessa forma o plano de oscilação é facilmente mantido.

Medindo o periodo de oscilação manualmente: O período pode ser medido utilizando-se um cronômetro ou utilizando o sistema de aquisição de dados ligado ao computador. Este último, discutido mais à frente, será a forma como os dados serão coletados no experimento, mas é interessante fazer uma comparação. Assim, a título de comparação, posicione o peso no extremo da haste, prenda-o, coloque-o para oscilar como descrito acima e, com o cronômetro (existe um cronômetro disponível na sua área de trabalho (Desktop) no computador da bancada que pode ser usado para esse fim), meça o tempo gasto para que ele realize 10 oscilações completas. Divida o resultado por 10 e anote o resultado para futuras comparações.

Medindo o ângulo de oscilação com o sistema de aquisição de dados: O eixo de sustentação do pêndulo está acoplado a um sensor angular (desenvolvido aqui mesmo no laboratório), que permite ao computador fazer uma leitura da posição angular do pêndulo (em graus). Entretanto, para fazer essa leitura, é necessário primeiramente informar ao computador dois ângulos iniciais para que se possa definir uma escala angular. Em outras palavras é preciso calibrar o sistema e esse procedimento será descrito a seguir.

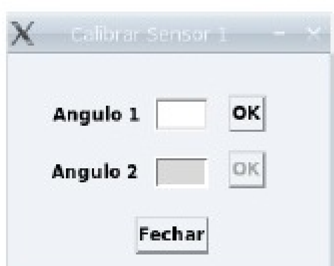
Calibrando a escala angular usando o software de aquisição de dados: Para fazer uma aquisição de dados é necessário ativar o programa responsável pela leitura dos dados. Para tanto, clique no ícone

(se por acaso no seu desktop o ícone não aparecer, então abra um console - no canto inferior esquedo, clique no lançador de aplicativos do Mageia (botão azul escuro), e escolha a opção ”Executar comando”, a segunda de baixo para cima. Na janela que se abrirá digite ”drdaq”, terminando a linha teclando ”Enter”).

O programa DrDAQ abrirá uma janela de diálogo para que seja configurada a forma como os dados devem ser adquiridos. Verifique que o sensor angular esteja conectado à interface DrDAQ na saída EXT1 e escolha na caixa de diálogo (mostrada na figura a seguir) os seguintes parâmetros:

- Sensor 1
- Tipo: Pendulo
- Conector: Ext 1

Em seguida clique no botão ”calibrar”e a seguinte janela se abre:



Para calibrar o sensor, primeiramente, deixe o pêndulo na posição vertical. Segurando-o nessa posição, mexa no cursor angular até que ele esteja alinhado com a marca de 90 graus, como mostrado nas fotos abaixo. Nesse caso, estamos dizendo que a leitura de 90° corresponde ao pêndulo na vertical. Por simplicidade na análise que se segue, sugerimos que esse ângulo seja considerado o ângulo zero e assim, para saber qual é o ângulo que o pêndulo faz com a vertical, basta subtrair 90 da leitura direta do cursor angular.

Segurando a haste, gire o pêndulo até a posição correspondente a 45°. Mantenha-o fixo nessa posição enquanto um colega digita na janela indicada “Angulo 1” o valor 45, terminando com um clique em OK. Depois, mova o pêndulo para o outro lado, para a posição 135°, que na verdade corresponde a um ângulo de -45° em relação à vertical, segure-o nessa posição e digite -45 na janela indicada “Angulo 2” (por uma característica do software será necessário digitar o número primeiro e depois o sinal de menos) e clique OK.

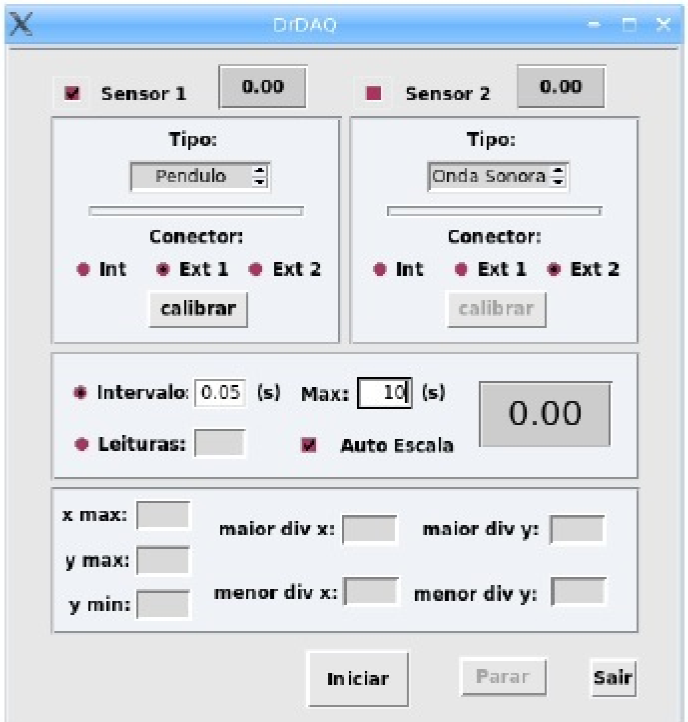


Figura 3. Ambiente do DrDaq.

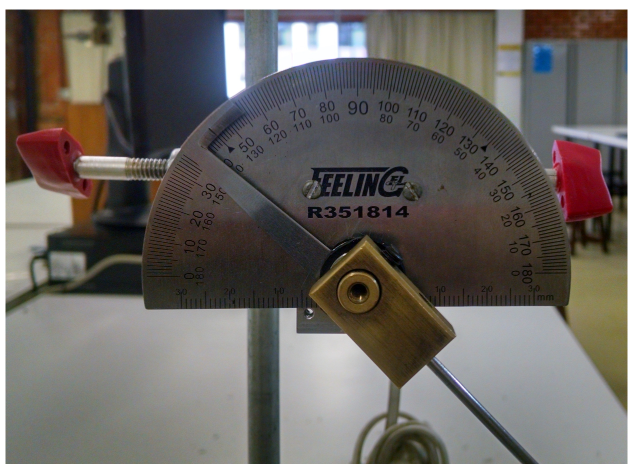


Figura 4. Calibração do sensor do pêndulo.

Pronto, o sistema está agora calibrado. Tipicamente, a precisão da leitura angular é de aproximadamente ± 1 grau (um bom exercício é verificar isso). Para calibrar novamente, é só clicar no botão de calibração e repetir esse procedimento.

Para deixar o sistema pronto para fazer as leituras é necessário terminar de preencher os dados da janela de diálogo do DrDaq, escolhendo os seguintes parâmetros:

- Auto Escala
- Intervalo: 0.05 (s)
- Max: 10s

Esses parâmetros indicam que será feita uma leitura a cada 0,05 s durante 10 s.

Coloque o pêndulo para oscilar como indicado no tópico **Colocando-o em movimento**, mais acima. Em seguida clique em "Iniciar". O programa DrDaq abre então o programa GRACE e repassa os vlaores lidos diretamente para ele, atualizando o gráfico enquanto os dados são lidos.

ANALISANDO OS DADOS COLETADOS

Os dados coletados correspondem à variação do ângulo θ com o tempo. Como o pêndulo oscila, é natural que a função que descreve a oscilação seja dada por uma função oscilatória no tempo, do tipo

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi). \tag{9}$$

O período de oscilação T está relacionado com a freqüência angular por $\omega = 2\pi/T$. Lembramos que no tempo $t = 0$, o pêndulo pode se encontrar em uma posição arbitrária. Essa posição arbitrária pode ser ajustada através do ângulo de fase ϕ . Escrevendo-se $\phi = 2\pi t_0/T$, a expressão 9 assume a forma:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right), \tag{10}$$

em que t_0 corresponde ao tempo que se deve aguardar, desde o instante em que foi iniciada a aquisição, para que o pêndulo chegue à posição de ângulo máximo.

Essa expressão apresenta um inconveniente quando se trata de dados experimentais: quando o pêndulo está parado na vertical, espera-se que o ângulo medido seja igual a 0 (zero). Entretanto, caso tenha ocorrido erro no posicionamento da base do pêndulo, a linha vertical pode não corresponder exatamente ao ângulo zero. Isso fará com que os dados medidos não fiquem simétricos em torno do zero, ou seja, o tamanho da oscilação medida não é igual em torno do ângulo zero. Por esse motivo, optamos por descrever um resultado genérico das medidas pela expressão:

$$\theta(t) = A_0 + A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right), \tag{11}$$

em que o parâmetro A_0 representa a correção angular da posição vertical, ou seja, um ângulo fixo que deve ser somado para fazer com que a oscilação seja simétrica em torno desse valor. Para analisar os dados, é necessário procurar os parâmetros A_0, A_1, T e t_0 (ou ϕ) que fazem com que a expressão esperada descreva o melhor possível a situação encontrada. Para encontrar esses parâmetros, no GRACE clique em "Data", depois "Transformation", e depois "Non-linear curve fitting". Escolha 4 parâmetros para ajustar e digite a expressão no espaço apropriado (veja figura):

$$A0 + A1 * \cos(2 * pi/A2 * (x - A3)) \tag{12}$$

Para entender melhor o que cada um desses parâmetros controla na função, clique nas setas ao lado do espaço correspondente a "iterations", alterando o valor para 0 (zero). Isso faz que o GRACE mostre o resultado das suas escolhas de parâmetros sem procurar por uma melhor. Procure entender o que significam os parâmetros A0, A1, A2 e A3, escolha um valor que você considera razoável para cada um desses parâmetros e entre a sua escolha nos espaços correspondentes. Após a sua escolha termine com "apply". Modifique aos poucos cada parâmetro, e siga observando como o gráfico gerado pela função de ajuste se modifica com os parâmetros que você escolheu.

Agora, escolha um conjunto de parâmetros que se adapta razoavelmente aos dados, entre com 10 no espaço relativo a iterations e clique em "apply". O melhor enquadramento que o programa GRACE consegue obter é aquele em que o Chi-square (χ^2 – desvio quadrático entre os dados experimentais e a função teórica) é o mínimo. Clique em apply algumas vezes até que o χ^2 pare de se alterar. Quando isso acontecer você terá obtido os melhores valores possíveis para os parâmetros, ou seja, aqueles em que os parâmetros ajustados tornam mínima a discrepância entre os dados obtidos e a função que os descreve.

Lembramos que ao final desse procedimento, o parâmetro A0 será o valor médio do ângulo em torno do qual os valores oscilam, ou seja, deve corresponder ao valor do ângulo igual ao que for considerada a posição vertical. A1 será a amplitude em graus e A2 será o período do pêndulo, em segundos. A3 é a diferença de tempo (em segundos) entre o ponto onde se iniciou a aquisição e o valor de máxima amplitude.

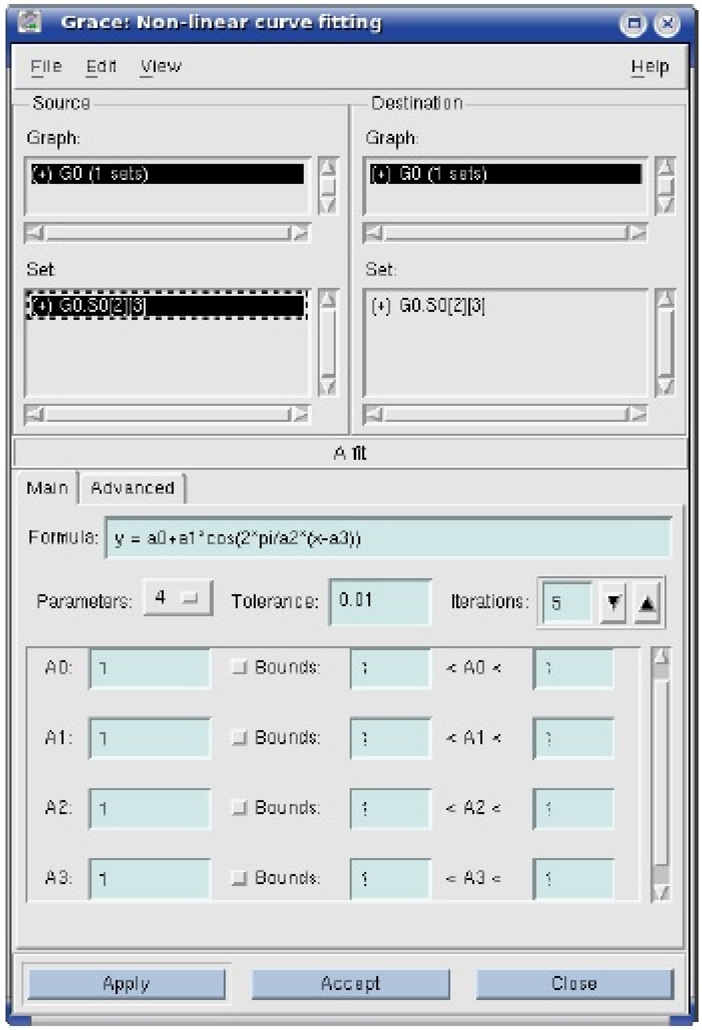


Figura 5. Ambiente da regressão não linear.

PROCEDIMENTOS DE MEDIDA

a) Efeito da amplitude θ_0 no período de oscilação T (medida de T em função de θ_0).
Esse procedimento visa mostrar que o período do pêndulo aumenta com a amplitude de oscilação.

1. Coloque uma das massas na haste e ponha o pêndulo para oscilar, conforme mostrado anteriormente, até atingir uma amplitude próxima de 45°, como observado pelo cursor angular sobre o transferidor.

2. Inicie uma aquisição de dados quando o pêndulo estiver próximo da amplitude máxima.

3. Enquanto ele oscila, salve os dados para fazer o ajuste dos dados e registre na sua ata o valor da amplitude, em graus, e o valor do período ajustado.

4. Enquanto o pêndulo continua oscilando, inicie uma nova aquisição e repita o passo 3, anotando os valores da amplitude e período correspondente, até quando a amplitude ficar menor que 5°.

5. Faça um gráfico do período em função do seno ao quadrado da metade da amplitude, ou seja, T vs $\sin^2(\theta_0/2)$ e compare o seu resultado com a expressão (8) (obs: lembre-se que o ângulo usado no argumento de funções trigonométricas é radiano. Assim, dependendo do instrumento usado para calcular o seno, pode ser necessária uma conversão). Faça uma regressão linear dos dados e verifique se o coeficiente angular da reta é igual a $T_0/4$, como predito em (8) (ou equivalentemente, que a razão entre o coeficiente angular e o ponto de corte é igual a 1/4).

b) Efeito da distância L, do peso ao eixo, no periodo de oscilação (T em função de L).
Com esse procedimento, esperamos que seja possível observar o efeito que a barra de aço introduz na medida quando a posição da massa se encontra próxima do eixo de rotação (L pequeno).

1. Meça a distância entre o centro de massa do peso e o eixo de sustentação.
2. Coloque o pêndulo para oscilar e, quando sua amplitude estiver em torno de 10 graus, inicie uma aquisição de dados por 10 segundos.
3. Meça o periodo de oscilação.
4. Levante o peso em cerca de 5 cm e repita desde o procedimento 1, até que o peso fique o mais próximo possível do eixo de giro do pêndulo.
5. Faça um gráfico do período T em função de $\sqrt{L}$ e verifique que **o resultado não obedece à expressão (7).** (Alternativamente, pode-se fazer um gráfico de T em função de L e sobrepor a função que seria esperada para um pêndulo simples) Porque a expressão (7) não é obedecida? Que erro sistemático existe nessa medida?

BIBLIOGRAFIA

Halliday, Resnick e Walker, *Fundamentos de Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.