

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
Escola de Pós-Graduação em Economia
Métodos Numéricos - Lista 1
Professor: César Santos
Aluno: Gustavo Bulhões Carvalho da Paz Freire

Nessa lista trabalharemos com o seguinte processo estocástico AR(1):

$$z_t = \rho z_{t-1} + \epsilon_t$$

com $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. Assumiremos inicialmente $\rho = 0.95$ e $\sigma = 0.007$.

Questão 1

$$z = \begin{bmatrix} -0.0673 \\ -0.0504 \\ -0.0336 \\ -0.0168 \\ 0 \\ 0.0168 \\ 0.0336 \\ 0.0504 \\ 0.0673 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.7644 & 0.2347 & 0.0009 & 0.0000 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0592 & 0.7405 & 0.1997 & 0.0006 & 0.0000 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0.0747 & 0.7569 & 0.1679 & 0.0004 & 0.0000 & 0.0000 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 0.0001 & 0.0931 & 0.7669 & 0.1396 & 0.0002 & 0.0000 & 0.0000 & 0 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0002 & 0.1147 & 0.7702 & 0.1147 & 0.0002 & 0.0000 & 0 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0002 & 0.1396 & 0.7669 & 0.0931 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0004 & 0.1679 & 0.7569 & 0.0747 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0006 & 0.1997 & 0.7405 & 0.0592 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0009 & 0.2347 & 0.7644 \end{bmatrix}$$

Questão 2

$$\theta = \begin{bmatrix} -0.0634 \\ -0.0476 \\ -0.0317 \\ -0.0159 \\ 0 \\ 0.0159 \\ 0.0317 \\ 0.0476 \\ 0.0634 \end{bmatrix}$$

$$P_R = \begin{bmatrix} 0.8167 & 0.1675 & 0.0150 & 0.0008 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0209 & 0.8204 & 0.1469 & 0.0113 & 0.0005 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0005 & 0.0420 & 0.8231 & 0.1261 & 0.0081 & 0.0003 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0016 & 0.0630 & 0.8247 & 0.1051 & 0.0054 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0001 & 0.0032 & 0.0841 & 0.8253 & 0.0841 & 0.0032 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0054 & 0.1051 & 0.8247 & 0.0630 & 0.0016 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0003 & 0.0081 & 0.1261 & 0.8231 & 0.0420 & 0.0005 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0005 & 0.0113 & 0.1469 & 0.8204 & 0.0209 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0008 & 0.0150 & 0.1675 & 0.8167 \end{bmatrix}$$

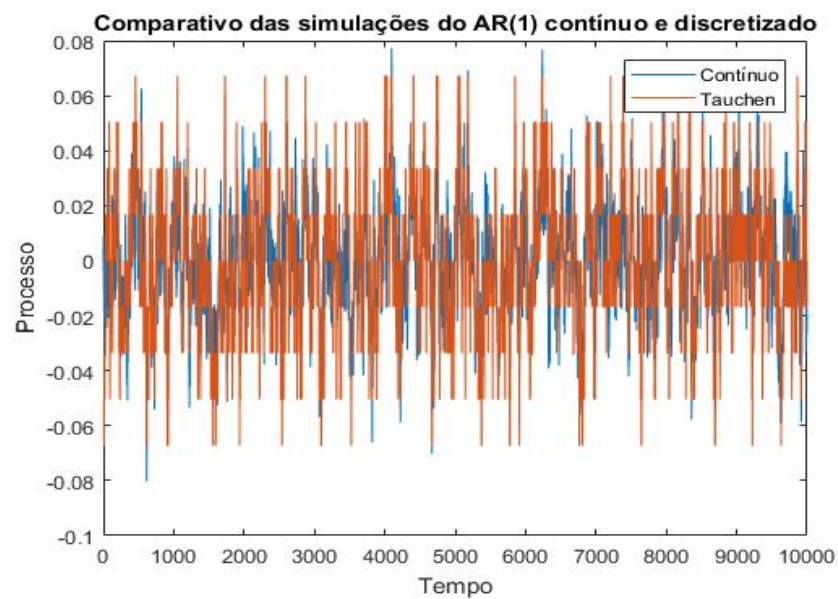
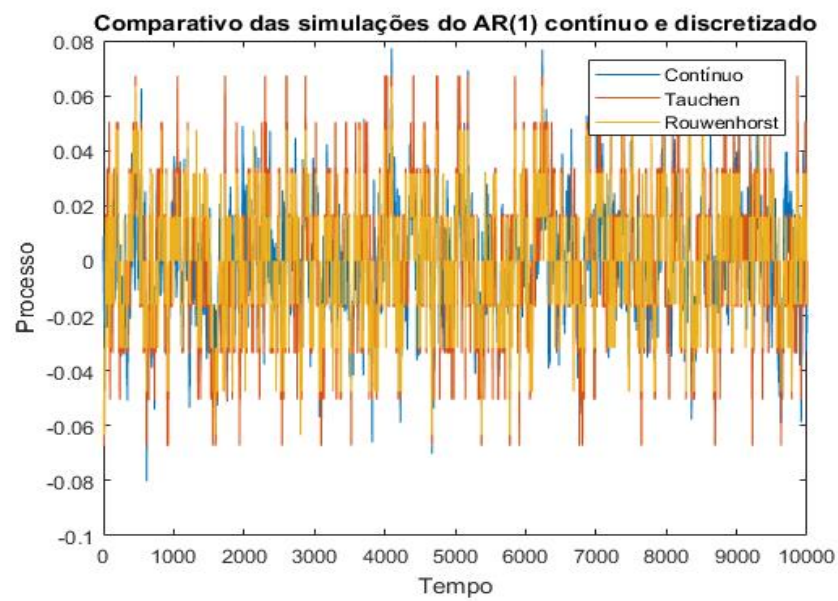
Questão 3

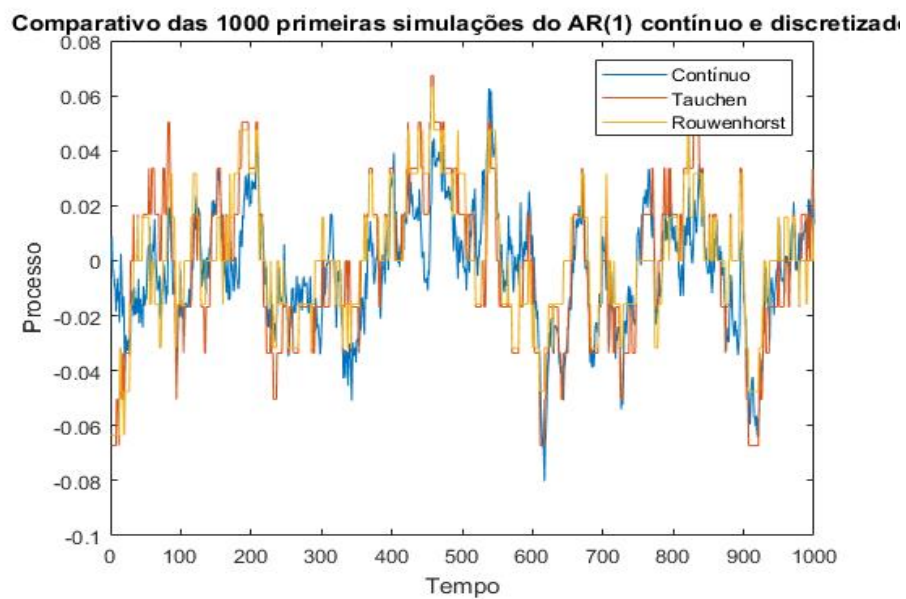
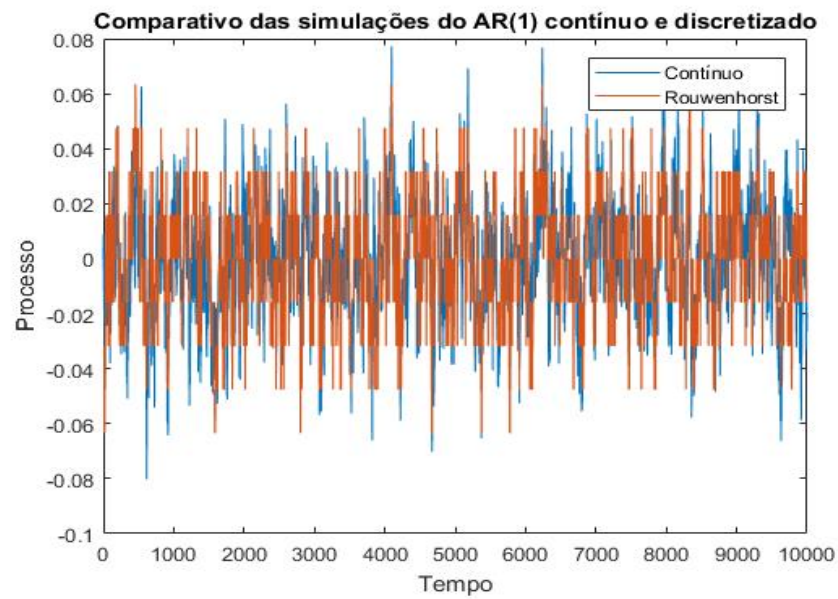
Plotando os 3 processos juntos, vemos que em geral as simulações dos métodos discretizados estão razoavelmente próximas do $\text{AR}(1)$ contínuo.

Comparando um processo discretizado de cada vez, nota-se que, para os valores dados dos parâmetros, o método de Tauchen parece aproximar melhor o processo contínuo do que o de Rouwenhorst.

Para vermos em mais detalhes, analisamos especificamente as 1000 primeiras simulações. A simulação do processo discretizado por Tauchen parece ser mais fina, mas não há superioridade clara de um método para o outro nesse gráfico.

As figuras seguem nas próximas páginas.





Questão 4

Estimando processos AR(1) com base nos dados simulados, temos os seguintes resultados para cada processo:

Tauchen:

$$\hat{\rho}_T = 0.9488$$

$$\hat{\sigma}_T = 0.0082$$

Rouwenhorst:

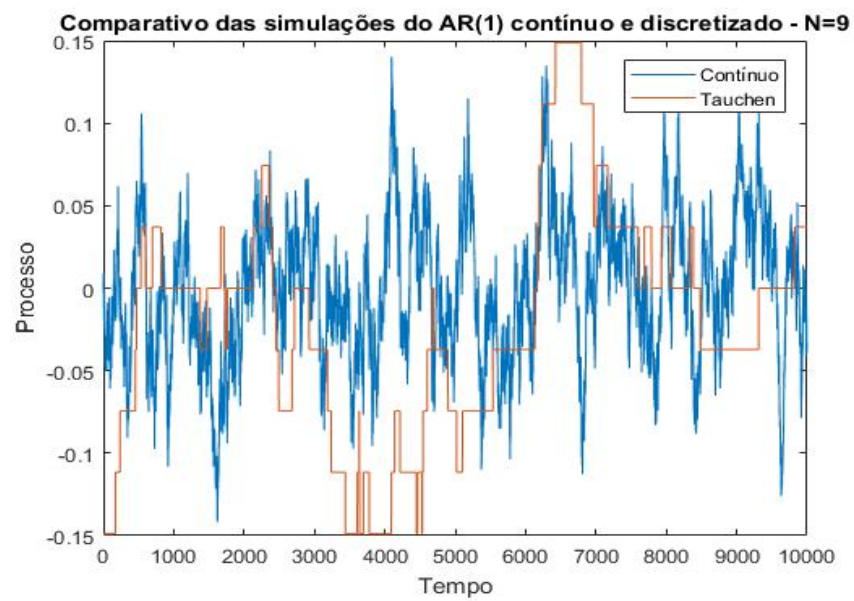
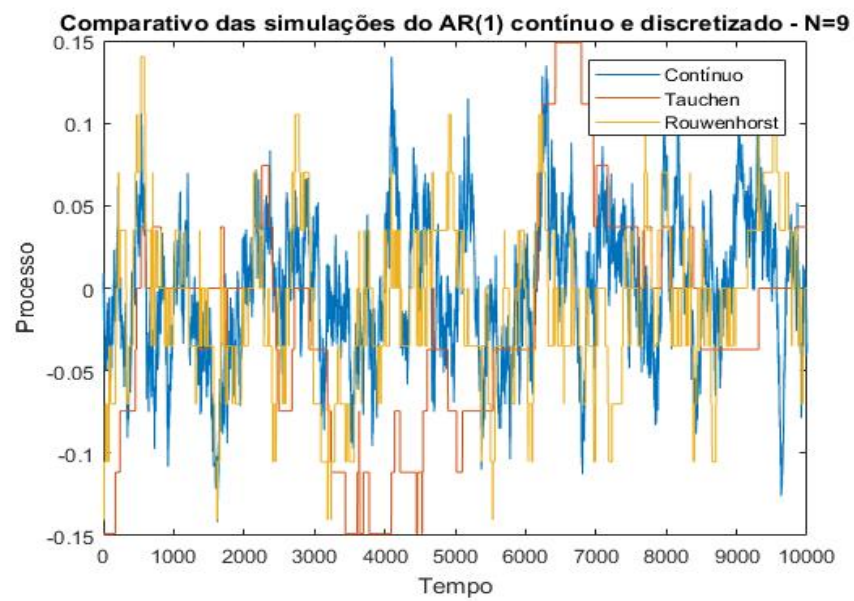
$$\hat{\rho}_R = 0.9494$$

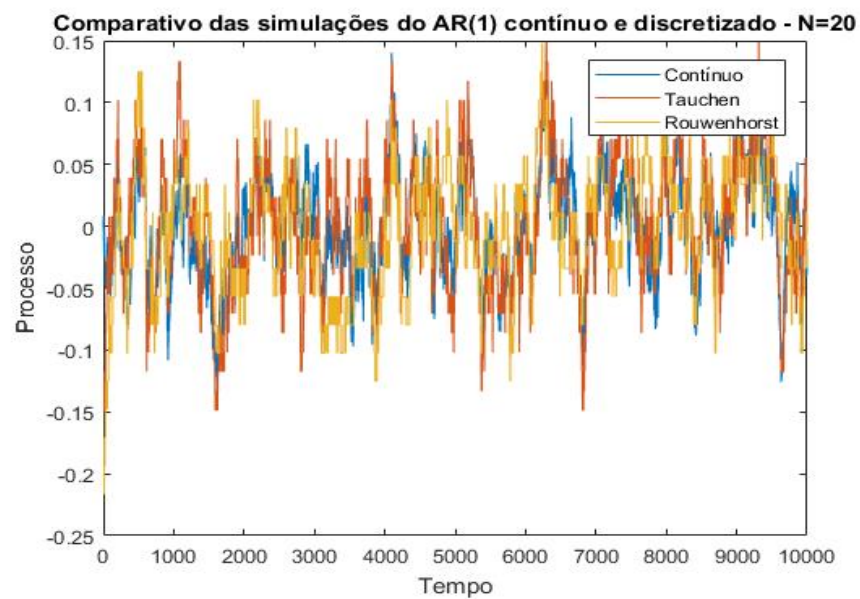
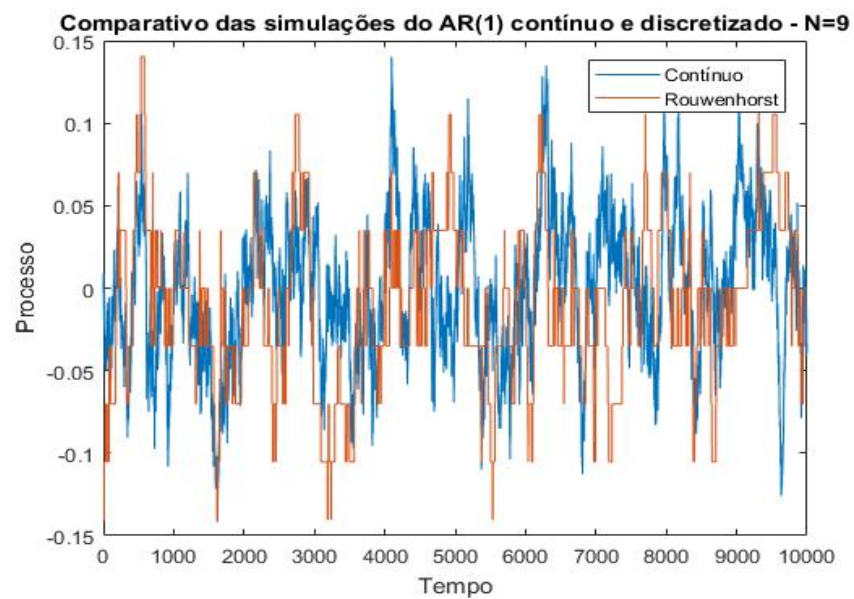
$$\hat{\sigma}_R = 0.0069$$

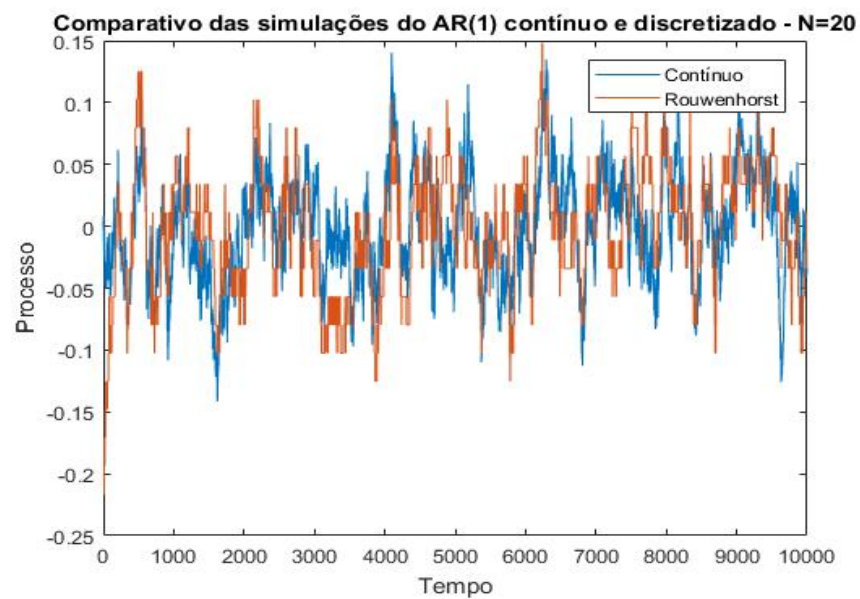
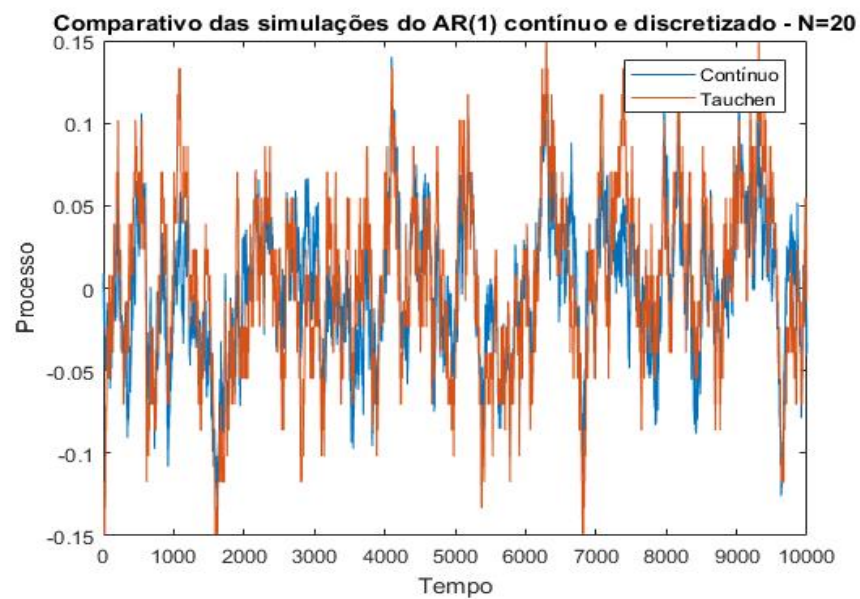
Nota-se que ambos estão próximos do processo gerador de dados real, porém os valores estimados com os dados simulados do método de Rouwenhorst estão mais perto dos parâmetros verdadeiros.

Questão 5

Iremos refazer as questões acima com $\rho = 0.99$. Para um grid de 9 pontos, as simulações dos processos discretizados ficaram muito distantes do processo contínuo, e a estimação do $\hat{\sigma}_T$ não ficou próxima do parâmetro verdadeiro. Por isso, vamos reportar também os gráficos e os valores estimados para um grid de 20 pontos. Para poupar espaço, omitiremos aqui os grids e matrizes de transição. De qualquer forma, no código estão os cálculos completos para ambos os grids.







Comparando

Para 9 pontos do grid, podemos observar que com $\rho = 0.99$ a performance dos métodos piorou consideravelmente. Porém, como esperado pelo valor de ρ ser próximo de 1, o método de Rouwenhorst aproxima melhor o processo contínuo do que o de Tauchen.

Tivemos os seguintes resultados para as estimações:

Tauchen:

$$\hat{\rho}_T = 0.9989$$

$$\hat{\sigma}_T = 0.0032$$

Rouwenhorst:

$$\hat{\rho}_R = 0.9901$$

$$\hat{\sigma}_R = 0.0070$$

A superioridade do método de Rouwenhorst para ρ próximo de 1 é confirmada pelas estimações baseadas nos dados simulados. Enquanto as estimações baseadas nos dados do método de Rouwenhorst chegam bem próximas aos valores reais dos parâmetros, $\hat{\sigma}_T$ está distante do valor verdadeiro.

Com 20 pontos no grid, o método de Tauchen melhorou consideravelmente e parece aproximar melhor o processo contínuo do que o de Rouwenhorst.

Tivemos os seguintes resultados para as estimações:

Tauchen:

$$\hat{\rho}_T = 0.9880$$

$$\hat{\sigma}_T = 0.0082$$

Rouwenhorst:

$$\hat{\rho}_R = 0.9894$$

$$\hat{\sigma}_R = 0.0072$$

As estimações baseadas nos dados simulados pelo método de Tauchen voltaram a ficar próximas, mas Rouwenhorst continua performando melhor nesse quesito, estando mais próximo dos valores reais dos parâmetros.