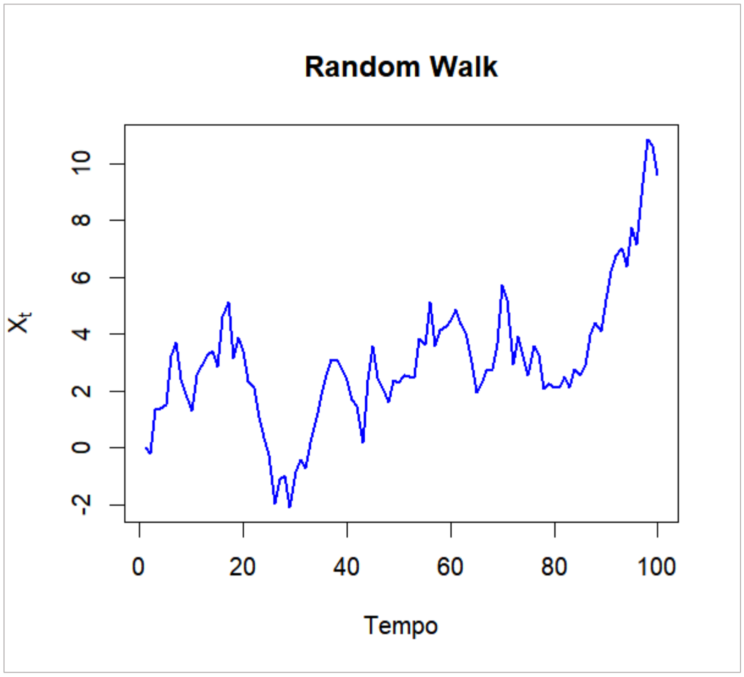
Random Walk

Prof. Renzo Flores-Ortiz

- **Random Walk** (ou caminhada aleatória) é um modelo estocástico de série temporal em que cada valor da série é obtido a partir do valor imediatamente anterior, somado a um termo de erro aleatório.

- **Fórmula do modelo**: $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$
- X_t: valor da série no tempo t
- X_{t-1}: valor da série no tempo anterior, $t-1$
- ε_t: termo de erro aleatório (assumido como ruído branco), com:
  - $E[\varepsilon_t] = 0$,
  - $Var[\varepsilon_t] = \sigma^2$
  - $Cov[\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}] = 0 \ para\ todo\ h \neq 0$

- **Características importantes**:
  - Imprevisibilidade: as variações nos valores da série são imprevisíveis e não sistemáticas.
  - Ausência de memória: o comportamento passado não ajuda a prever o futuro.
  - Sob esse modelo, a variância de X_t cresce linearmente com o tempo, caracterizando o Random Walk como um processo estocástico não estacionário — isto é, suas propriedades estatísticas, como a variância, mudam ao longo do tempo.



Erro aleatório do tipo ruído branco

- **Erro aleatório**:
  - É a componente estocástica de um modelo estatístico, caracterizada como a diferença entre o valor observado e o valor esperado segundo a parte determinística do modelo.
  - É a fonte de incerteza e aleatoriedade na evolução de uma série temporal.
  - Notação comum: ε_t ou ω_t

- **Ruído branco**: É um processo estocástico caracterizado por:
  - Média zero: $E[\varepsilon_t] = 0$

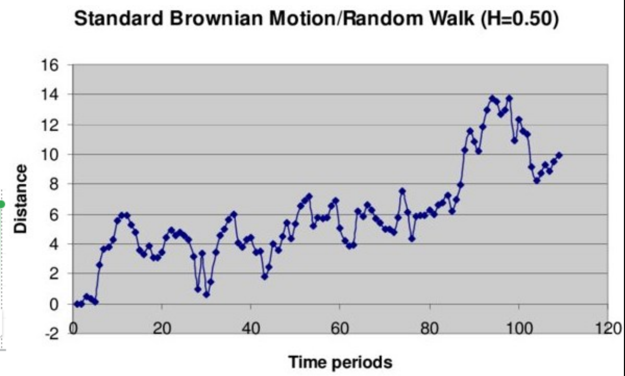
    O erro não tende a aumentar nem a diminuir a série sistematicamente.
  - Variância constante: $Var[\varepsilon_t] = \sigma^2$

    O erro mantém a mesma variabilidade ao longo do tempo.
  - Sem autocorrelação: Não há correlação linear entre os erros.

$$Cov[\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}] = 0 \ \ para\ todo\ h \neq 0$$

Aplicações do modelo Random Walk

- O modelo **Random Walk** pode ser utilizado para descrever fenômenos cuja evolução ao longo do tempo é **imprevisível** e **acumulativa**, como, por exemplo, o comportamento de preços de ações ou o deslocamento aleatório de partículas suspensas em um fluido (movimento browniano).



Uma série que se comporta como o modelo Random Walk é estacionária?

- Modelo Random Walk: $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$

Com $E[\varepsilon_t] = 0$, $Var[\varepsilon_t] = \sigma^2$ e $Cov[\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}] = 0 \;\; para\ todo\ h \neq 0$

- Expressando X_t em função de X_0:

$$Se\ X_t = X_3\ temos\ que\!:\ \ X_3 = X_2 + \varepsilon_3 = X_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = X_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = X_0 + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i$$

$$Generalizando\ para\ X_t\!:\quad X_t = X_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

Uma série que se comporta como o modelo Random Walk é estacionária?

- X_t em função de X_0:

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

- Cálculo da **média** de X_t:

$$E[X_t] = E\left[X_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i\right] = E[X_0] + E\left[\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i\right] = E[X_0] + \sum_{i=1}^{t} E[\varepsilon_i] = X_0 + \sum_{i=1}^{t} E[\varepsilon_i] = X_0$$

- A média de X_t permanece constante ao longo do tempo e igual ao valor inicial X_0.

Uma série que se comporta como o modelo Random Walk é estacionária?

- X_t em função de X_0:

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

- Cálculo da **variância** de X_t:

$$Var[X_t] = Var\left[X_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i\right] = Var[X_0] + Var\left[\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i\right] = 0 + \sum_{i=1}^{t} Var[\varepsilon_i] = t\sigma^2$$

- A variância de X_t cresce linearmente com o tempo → quanto maior t, maior a incerteza.

Uma série que se comporta como o modelo Random Walk é estacionária?

Propriedade	Comportamento no Random Walk
Média	Constante: $E[X_t] = X_0$
Variância	Cresce indefinidamente: $Var[X_t] = t\sigma^2$

- **A série é não estacionária** → variância depende do tempo.
- A trajetória se afasta do valor inicial ao longo do tempo com uma incerteza crescente.
- O processo é acumulativo: cada novo valor da série é obtido somando o valor anterior e mais um erro.
- A maioria dos modelos clássicos de séries temporais (como ARMA) **só funciona com séries estacionárias**. Como a Random Walk **não é estacionária**, não podemos aplicar esses modelos diretamente.
- <u>Como tornar uma série que se comporta como Random Walk em estacionária?</u>

Diferenciação

- A diferenciação consiste em transformar uma série X_t na série das diferenças entre os valores consecutivos:

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$$

- É utilizado principalmente para remover tendências e tornar uma série estacionária.

Diferenciação numa série que se comporta como Random Walk

- O modelo do Random Walk: $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$

- Reescrevendo: $X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t \Longrightarrow \Delta X_t = \varepsilon_t$

- Ou seja:
  - A primeira diferença de um Random Walk é o próprio erro aleatório.
  - Esse erro, ε_t, é usualmente modelado como ruído branco, que é estacionário: tem média, variância constantes e ausência de autocorrelação.