Estatística Matemática

Sumário

Biliografia Importante

kai Lai Chung: Introduction to Probability
Barry R. James: Probabilidade : um Curso Em Nível Intermediário

1 Aula 13/03

1.1 Espaço de Probabilidade $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$

Experimento Aleatório(ε)

- Pode ser repetido infinitas vezes se for necessário;
- Permite descrever todos os possíveis resultados;
- Quando repetido um numero grande de vezes os resultados apresentam certa regularidade.($\Rightarrow$ Probabilidade resultante)

Exemplos:

(1) Lancar um dado e observar sua face superior.

(2) Lancar duas moedas honestas e observar suas faces superiores.

(3) Retirar 6 bolas de uma urna com 60 bolas numeradas (Sem reposição e sem ordem).

(4) Observar o valor de um retorno financeiro.

(5) Contar o numero de carros que chegam a UnB no primeiro dia de aula.

Definição (Espaço Amostral)

Define-se como espaço amostral o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento.

Notação:

$\Omega = \{\omega : \omega \text{ é resultado de } \Omega\}$
Ω: Espaço amostral associado a ε.
ε: Experimento Aleatório.

Exemplos

$\varepsilon_1 \to \Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \qquad |\Omega_1| = 6$

$\varepsilon_2 \to \Omega_2 = \{(c, c), (c, \hat{c}), (\hat{c}, c), (\hat{c}, \hat{c})\}, \qquad |\Omega_2| = 4$

$\varepsilon_2 \to \Omega_2' = \{(i, j) : i, j \in \{c, \hat{c}\}\}, \qquad |\Omega_2| = 4$

$\varepsilon_3 \to \Omega_3 = \{\{b_1, \ldots, b_6\} : b_1, \ldots, b_6 \in \{1, .., 60\}, b_i \neq b_j \forall i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, 6\}$,
$|\Omega_3| = \binom{60}{6}$

$\varepsilon_3' \to \Omega_3' = \{(b_1, \ldots, b_6) : b_1, \ldots, b_6 \in \{1, .., 60\}, b_i \neq b_j \forall i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, 6\}$,
$|\Omega_{3'}| = A_{60,6} = \frac{60!}{54!}$

$\varepsilon_3'' \to \Omega_3'' = \{\{b_1, \ldots, b_6\} : b_1, \ldots, b_6 \in \{1, .., 60\}\}$
$|\Omega_{3''}| = 60^6$

$\varepsilon_3''' \to \Omega_3''' = \{(b_1, \ldots, b_6) : b_1, \ldots, b_6 \in \{1, .., 60\}\}$
$|\Omega_{3'''}| = \frac{60^6}{6!}$

$\varepsilon_4 \to \Omega_4 = \{0, 1, 2, \ldots, \} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$
$|\Omega_4| = \infty$

$\varepsilon_5 \to \Omega_5 = (-\infty, \infty) = \{r : r \in \mathbb{R}\}, r = P_t - P_{t-1}, P =$ preço da ação5

2 Aula 18/03

Definição

Seja Ω um espaço amostral de ε. A colecao de eventos de Ω é uma $\sigma-$algebra se satisfaz:

i) $\mathscr{A} \neq \emptyset$

ii) $A \in \ \Rightarrow A^c = \Omega \backslash A \in \mathscr{A}$

iii) $A_1, A_2, \ldots, \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$

Exemplo:

A= Sair o mesmo resultado $= \{(c, c,), (\hat{c}, \hat{c})\}$

3 Aula 20/03

$$\varepsilon \to \Omega = \{\omega : \quad \omega \text{ ponto amostral (resultado de } \varepsilon)\}$$

$\mathscr{A}$={ Eventos de Ω } Tal que:

i) $\mathscr{A} \neq \emptyset$

ii) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$

iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$

σ-algebra de eventos de Ω

3.1 Medida de Probabilidade

Seja $\mathscr{A}$ uma σ-algebra de eventos de Ω. A função $P : \mathscr{A} \to [0, 1]$ é uma <u>medida de probabilidade</u> se for não negativa e σ-aditiva, Isto é, satisfaz:

i) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathscr{A}$

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}(A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j) \Rightarrow P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$: σ-aditividade

<u>Notação</u>: $\varepsilon \longrightarrow (\Omega, \mathscr{A}, P)$ Espaço de probabilidade de ε

<u>Observação</u>: $(\Omega, \mathscr{A}, P)$

- Ω enumerável $\Rightarrow (\Omega, \mathscr{A}, P)$ é discreto.
- Ω não enumerável $\Rightarrow (\Omega, \mathscr{A}, P)$ é contínuo.

<u>Exemplo:</u> Ω_5, Ω_6

3.2 Propriedade da medida de Probabilidade

1) $P(\emptyset) = 0$
$\Omega \cup \emptyset = \Omega$
$\Rightarrow P(\Omega) + P(\emptyset) = P(\Omega)$
$\Rightarrow 1 + P(\emptyset) = 1 \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

2) $P(A^c) = 1 - P(A)$
$A \cup A^c = \Omega$
$\Rightarrow P(A) + P(A^c) = P(\Omega) \Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c)$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$A \cup B = A \cup [B \backslash A \cap B] \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B \backslash A \cap B) \qquad (1)$$

Por outro lado,
$B = [B \backslash A \cap B] \cup (A \cap B)$
$\Rightarrow P(B) = P(B \backslash A \cap B) + P(A \cap B)$
$P(B \backslash A \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \qquad (2)$
Substituindo 2 em 1, o resultado está provado.

4) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$
Prova por indução:

$n = 2:\ P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ é válida.
Hipótese de indução: $P(\bigcap_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i \neq j \leq k} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{k+1} P(\bigcap_{i=1}^{k} A_i)$
Supor que a hipótese é válida

Provar que: $P(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i) = \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i) - \sum_{i \neq j \leq k+1} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{k+2} P(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i)$
Observação:

$$P(\bigcup_{i=1}^{3} A_i) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P([A_1 \cup A_2] \cap A_3)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P([A_1 \cap A_3] \cup [A_2 \cap A_3])$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - \left\{ P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{i \neq j \leq 3} P(A_i \cap A_j) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

3.3 Cálculo de Probabilidade

a) $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ discreto com resultados equiprováveis e finito.
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$
$\forall \omega_i \in \Omega, \quad P(\omega_i) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{n}$
Então, $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\} \subset \Omega, k \leq n$
$A = \bigcup_{i=1}^{k} \{\omega_i\} \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(\omega_i) \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$ ou $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Exemplo:

1) De um lote de 100 computadores, no qual sabe-se que há 10 defeituosos, são escolhidos aleatoriamente 5 computadores sem reposição. Qual é a probabilidade de sairem 3 computadores defeituosos na amostra?

Solução:

$$\Omega = \left\{\omega = \{c_1, \ldots, c_5\} : c_i \in \{1, \ldots, 100\}, c_i \neq c_j, \forall i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5\right\}$$

$$|\Omega| = \binom{100}{5}$$

$$A = \left\{\omega = \{c_1, \ldots, c_5\} \in \Omega : 3c_i's \in \{10\, defeituosos\}, 2c_i's \in \{90\, nao\, defeituosos\}\right.$$

$$\Rightarrow |A| = \binom{10}{3} \cdot \binom{90}{2}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{10}{3}\binom{90}{2}}{\binom{100}{5}}$$

2) $\varepsilon_3 \to \omega_3, \mathscr{A} = P(\Omega_3)$ $|\Omega| = \binom{60}{6}$

- A $=$Obter os números sorteados na megasena.

$$|A| = \binom{6}{6}\binom{54}{0}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{\binom{60}{6}}$$

- B $=$ Obter uma quina com os números sorteados da megasena

$$|B| = \binom{6}{5}\binom{54}{1}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{\binom{6}{5}\binom{54}{1}}{\binom{60}{6}}$$

b) $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ discreto e infinito. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$
Tem-se que, $\forall \omega_i \in \Omega$,
$p_i = P(\omega_i)$ é tal que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$
Daí,
$A = \{w_1, \ldots, w_k\} \in \Omega, k \in \mathbb{Z}^+$
então $P(A) = P(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \omega_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i$

<u>Exemplo:</u>
$\varepsilon_4 \to \Omega_4 = \{0, 1, 2, \ldots\}$
Suponha que os carros chegam conforme

$$P(\omega_i) = p_i = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}, \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Note que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = 1$$

A $=$ {Chegam no mínimo 2 carros}

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P(\{0, 1\}) = 1 - \Big[p_0 + p_1\Big]$$

4 Aula 25/03

4.1 Espaço de Probabilidade contínuo

$\varepsilon \longrightarrow (\Omega, \mathscr{A}, P)$ Espaço de Probabilidade contínuo.

$P : \mathscr{A} \longrightarrow [0,1]$ é medida de probabilidade se existir uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q.

a) Se: $\Omega \subseteq \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ e $\int\limits_{\Omega} f(x)dx < \infty$ (f-Integrável ou f é mensurável com respeito á $\mathscr{A}$), $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\forall A \in \mathscr{A}$, $P(A) = \frac{\int\limits_A f(x)dx}{\int\limits_{\Omega} f(x)dx} = \int\limits_A \left(\frac{f(x)}{\int\limits_{\Omega} f(x)dx} \right) dx$, $f_1(x) = \frac{f(x)}{\int\limits_{\Omega} f(x)dx} f.densidade$

<u>Exemplo</u>: Medida de probabilidade uniforme (Eventos equiprováveis)

$\Omega = [a,b], a < b \in \mathbb{R}, \mathscr{A} = \mathscr{B}\Big([a,b]\Big).\forall A \subset [a,b] = \Omega$

$P(A) = \frac{Com(A)}{comp(\Omega)} = \frac{\int\limits_A 1dx}{\int\limits_a^b dx}, f(x) \equiv 1$

$= \int\limits_A \frac{1}{b-a}dx, f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a,b] \\ 0 \quad\ , c.c \end{cases}$

b) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, f é t.q. $f(x,y) \geq 0$ e $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy < \infty$.

Então, $\forall A \in \mathscr{A}$,

$$P(A) = \iint\limits_A \frac{f(x,y)}{\iint\limits_{\Omega} f(x,y)} dxdy$$

<u>Exemplo</u>:

$$\varepsilon_6 \to \Omega = S^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}\ \mathscr{A} = \mathscr{B}(S^2), \forall A \in \mathscr{A},$$

$$P(A) = \frac{area(A)}{area(\Omega)} = \frac{area(A)}{\pi}$$

$$= \iint\limits_A \frac{1}{\pi}dxdy, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, (x,y) \in S^2 \\ 0 \quad\ , c.cc \end{cases} \qquad = \frac{1}{4}$$

Pois,

$$P(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{pi}{2}} cos\theta \cdot \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{pi}{2}} cos^2(\theta)d\theta$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\theta - \frac{1}{2}(sen2\theta)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(0)\right) - (0-0)\right] = \frac{1}{4}$$

<u>OBS</u>: (Medida uniforme em $\mathbb{R}^n$)

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n, \mathscr{A} = \mathscr{B}()$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{Volume(\Omega)}, x \in \mathbb{R}^n \\ 0 \qquad\qquad , c.c \end{cases}$$

A = retângulo de $\mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i], a_i < b_i$

4.2 Outras propriedades da medida de probabilidade

$P_1 : A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

P_2 : Continuidade da probabilidade.

a) Seja $\{A_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência crescente de eventos, t.q. $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A(A_n \uparrow A)$, Então:

$$P(A) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

<u>Prova:</u> Por hipótese, temos que:

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \subset A$$

Então, temos que:

$$A_n = A_1 \sqcup (A_2 \backslash A_1) \sqcup (A_3 \backslash A_2) \sqcup \ldots \sqcup (A_n \backslash A_{n-1})$$
$$A = A_1 \sqcup (A_2 \backslash A_1) \sqcup \ldots \sqcup (A_n \backslash A_{n-1}) \sqcup \ldots$$

Por outro lado, como

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A,$$

Temos que:

$$P(A) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

$$P(A) = P\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty}(A_i \backslash A_{i-1})\right) \overbrace{=}^{\sigma-aditivdade} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \backslash A_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \backslash A_{i-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty}(A_i \backslash A_{i-1})\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

b) Seja $\{A_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência crescente de eventos t.q. $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A(A_n \downarrow A)$, Então:

$$P(A) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

<u>Exemplo:</u>

ε: lançar um dado indefinidamente.

Qual a probabilidade de não sair 1 ou 6 em nenhum lançamento.

<u>Solução:</u>
A = não sair 1 ou 6 em nenhuma jogada.

Defina:
$A_n =$ não sair 1 ou 6 até o n-ésima jogada.
Temos que:

$$P(A_n) = \left(\frac{4}{6}\right)^n$$

e

$$A_1 \supset A_2 \ldots \supset A_n \supset \ldots \supset \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A$$

Então, pela continuidade da probabilidade,

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{6}\right)^n = 0$$

A^c : não sair 1 ou 6 em alguma jogada:

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1$$

4.3 Limite Superior e inferior de Eventos

Definição: Seja $\{A_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de eventos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Definem-se os seguintes eventos:

a) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i\right)$ $(= A_n$ infinitas vezes)

b) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{i=n}^{\infty} A_i\right)$ $(= A_n$ algumas vezes)

Observação 1:

Se $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ então $\{A_n\}$ possui limite e

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$$

Observação 2:

$$\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right)$$

$$\Rightarrow \omega \in \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i, \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \omega \in A_{i_{n_1}}, \forall n_1 \geq n$$

$$\Rightarrow \omega \in \bigcup_{i=n_1+1}^{\infty} A_i,$$

$$\Rightarrow \omega \in A_{i_{n_2}}, \forall n_2 > n1$$

$$\Rightarrow \omega \in A_{i_{n_k}}, \forall n_k > \ldots > n2 > n_1$$

Ou seja

$$\omega \in A_{i_{n_1}}, A_{i_{n_2}}, \ldots$$

ω está em infinitos eventos dessa sequência

$$\Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} A_n = \{A_n \text{ Infinitas vezes}\}$$

Observação 3:

- $$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right), B_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$$

$$B_1 \supset B_2 \ldots \supset B_n \supset \ldots \supset \bigcap_{i=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

- $$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right)$$

$$B_1 \subset B_2 \ldots \subset B_n \supset \ldots \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right) = \liminf_{n\to\infty} A_n$$

4.4 Aula 27/03

Questões da prova

- Formular um espaço amostral para um experimento
- demonstrar alguma propriedade de probabilidade
- liminf ou limsup
- Probabilidade condicional

4.5 Probabilidade condicional

Seja $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ o espaço de probabilidade.

Definição: Sejam $A, B \in \mathscr{A}$ tais que $P(B) > 0$, define-se a probabilidade condicional de A dado B como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observação: Note que $\forall B \in \mathscr{A}$, define-se:

$P_B : \mathscr{A} \underset{A \longrightarrow P_B(A)}{\longrightarrow} [0,1]$ é uma medida de probabilidade,
em que $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Pois P_B satisfaz (i)-(iii)

(i)
$$P_B(A) \geq 0, \forall A \in \mathscr{A}$$

De fato,
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$$

Pois
$$P(A \cap B) \geq 0$$

(ii) $P_B(\Omega) = 1$

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ Eventos disjuntos

$$\Rightarrow P_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P_B(A_i)$$

<u>Exemplo</u>: ε: Lançar dois dados e observar as faces superiores

A = ambos resultados são diferentes

B= Um dos resultados é 6.

Calcule:

i)

$$P(A|B); P(B|A)$$

$$\Omega = \Big\{(i,j), \forall i,j \in \{1,\ldots,6\}\Big\}$$

$$A = \{(i,j) \in \Omega : i \neq j\}$$

$$B = \{(i,j) \in \Omega : \{i,j\} \in 6 \cap \{i+j < 12\}\}$$

$$P(A) = \frac{30}{36}$$

$$P(B) = \frac{11}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{10}{36}$$

Proposição:

Seja $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ o espaço de probabilidade e $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$. Então:

1) $P(A_1 \cap, \ldots, \cap A_{n-1} \cap A_n)$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Prova:

Por indução:

$$h = 2: \quad P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$$
$$h = k: \quad P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1) \ldots P(A_k|A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1})$$
$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}) = P(A_1) \ldots P(A_k|A_1 \cap \ldots \cap A_k)$$

Basta considerar

$$P(\underbrace{A_1 \cap \ldots \cap A_k}_{A} \cap A_{k+1})$$

$$\overset{n=2}{=} P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) \cdot P(A_{k+1}|A_1 \cap \ldots \cap A_k)$$

$$\overset{(H.I.)}{=} P(A_1) \cdots P(A_k|A_1 \cap \ldots \cap A_k) \cdot P(A_{k+1}|A_1 \cap \ldots \cap A_k)$$

2) Para $B \in \mathscr{A}$ e $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, com A_i disjuntos.

Isto é, $\{A_i\}$ é uma partição de Ω, tem-se:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i)$$

3)

$$P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i)}$$

Exemplo:

Considere uma urna com 10 bolas em que 3 são brancas, 5 azuis e 2 vermelhas. Escolhem-se 4 bolas aleatoriamente, sem reposição. Qual a probabilidade de saírem 2 bolas azuis na amostra?

$A_i = \{$Obter duas bolas azuis $\}$

$$P(A) = \frac{\binom{2}{5}\binom{2}{5}}{\binom{4}{10}}$$

01/04

a) Os eventos $A, B \in \mathscr{A}$, são independentes se:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(A)P(B \backslash A)$$

b) Os eventos $A_1, \ldots, A_n$ são mutuamente independentes,se:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1) \ldots P(A_k), \forall k \leq n$$

Exemplo, n=3:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Exemplo:

ε: Escolher um ponto no retângulo $[0, 1] \times [0, 1]$

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1]\{(x, y) \in \mathbb{R} : a \leq x, y \leq 1\}$$

A = a primeira componente é igual a segunda componente.. B = a distância da origem ao ponto escolhido é menor de 0.5.

A e B são independentes?

$$P(A) = \frac{1}{2}$$
$$P(B) = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{pi}{16}$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{\pi}{32} = P(A)P(B) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{16}$$

$\therefore$ A e B são independentes.

Exercícios:

(a) Dê um contra exemplo para a afirmação seguinte:
"Eventos independentes 2-2 são mutuamente independentes "

(b) ε lançar dados e observar suas faces superiores:
Defina:

A_1 = sair par no primeiro dado
A_2 = sair ímpar no primeiro dado
A_3 = soma dos resultados é par
São A_1, A_2, A_3 mutuamente independentes?

4.6 Variável aleatória

Considere $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ um espaço de probabilidade.
Informalmente, diz-se que uma função

$X : \underset{\omega \longrightarrow X(\omega)=x}{\Omega \longrightarrow \mathbb{R}}$ é variável aleatória (v.a.)

$\{X = x\} = \{\omega : X(\omega) = x\}$ for um característico numérico de pontos de Ω.

Exemplo:

ε : Lançar 2 dados e observar suas faces superiores.
Se o interesse for de calcular a probabilidade associada á soma dos resultados, então:

$$|\Omega| = 36, X : \underset{\omega \longrightarrow X(\omega)=x}{\Omega \longrightarrow \{2, 3, \dots, 12\}}$$

$X=$ soma dos resultados

$$\{X = 2\} = \{\omega \in (i, j) \in \Omega : X(\omega) = 2\}$$

$$= \{\omega = (i, j) \in \Omega : i + j = 2\}$$

$$= \{(1, 1)\}$$

$$\{X = 3\} = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

4.6.1 Imagem Inversa

$$f : \mathbb{R}_D \longrightarrow \mathbb{R}_I, \ \forall B \subset \mathbb{R}_I,$$

$$\Big[f(A) = B\Big] \quad ou \quad f(B) = A$$

é o conjunto imagem inversa de B

Propriedades:

a) $\Big[f^{-1}(B)\Big]^c = f^{-1}(B^c)$

b) $f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(B_i)$

Definição: Variável aleatória

Seja $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ um espaço de probabilidade. A função $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma variável aleatória, se:

$\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(B) \in \mathscr{A}$, sendo $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ a σ-algebra dos Borelianos de $\mathbb{R}$

Note que: $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ é σ-algebra pois:

i) $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \supset \mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$

ii) $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, sempre que $X^{-1}(B) \in \mathscr{A}$

$$\Rightarrow \Big[X^{-1}(B)\Big]^c \in \mathscr{A}$$

$$\Rightarrow \Big[X^{-1}(B^c)\Big] \in \mathscr{A}$$

$$\Rightarrow B^c \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

iii) Exercício*

Obs:

$$X : \underbrace{\Omega}_{A=X^{-1}(B)\in\mathscr{A}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})}$$

Definição 2: Variável aleatória Seja $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ um espaço de probabilidade, a função $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é variável aleatória se:

$$\forall x \in \mathbb{R}, X^{-1}\Big((-\infty.x]\Big) \in \mathscr{A}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, B = (-\infty, x]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, X^{-1}\Big((-\infty.x]\Big) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x]\}$$

$$= \{\omega \in \Omega : X(w) \leq x\}$$

$$\{X \leq x\} \in \mathscr{A}$$

Exemplo:

Seja $\Omega = \{1,2,3,4\}$ e $\mathscr{A} = \left\{\emptyset, \Omega, \underbrace{\{1,2\}}_{A}, \underbrace{\{3,4\}}_{A^c}\right\}$

Verifique se $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \in A^c \end{cases}$

e $I_B(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in B \\ 0, \omega \in B^c \end{cases}$, $B = \{1,4\}$

São variáveis aleatórias.

Solução:

$$I_A^{-1}\Big((-\infty, x]\Big) = \begin{cases} \emptyset, x < 0 \\ A^c = X^{-1}(\{0\}), x \leq 0 < 1 \\ X^{-1}(\{0\}) \cup X^{-1}(\{1\}), x \geq 1 \end{cases} \quad \in \mathscr{A}$$

$\therefore$ I_A é uma variável aleatória

$$I_B^{-1}\Big((-\infty, x]\Big) = \begin{cases} \emptyset, x < 0 \\ B^c = X^{-1}(\{0\}) = \{2,3\}, x \leq 0 < 1 \\ B \cup B^c, x \geq 1 \end{cases} \quad \notin \mathscr{A}$$

Obs:

- Se a σ-algebra $\mathscr{A}$ conter B e B^c, I_B seria variável aleatória
- Em geral, se $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ e $\mathscr{A} = P(\Omega)$, toda função $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é variável aleatória.
- $\Omega = \mathbb{R}$ e X é uma função contínua então X é variável aleatória
- $\Omega = \mathbb{R}$, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é variável aleatória $\Leftrightarrow$ X é Borel Mensurável
- Seja $X : \Omega$ $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ variável aleatória e g Borel mensurável, então $X \circ g$ é uma variável aleatória
  $X \circ g : \Omega$ $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Definição:Medida de Probabilidade: Seja $(\Omega, \mathscr{A} = \sigma(x), P_X)$ o espaço de probabilidade. A função
$P_X : \mathscr{A} \longrightarrow [0,1]$ é medida de probabilidade.

Prova:

i) $P_X(B) = P\Bigg(X^{-1}(B)\Bigg) = P\Bigg([X \in B]\Bigg) \geq 0, \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

ii) $P_X(\mathbb{R}) = P\Bigg(X^{-1}(\mathbb{R}\Bigg) = P(\Omega) = 1$

iii) $B_1, B_2, \ldots \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ disjuntos,

$$P_X\Bigg(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Bigg) = P_X\Bigg(X^{-1}\Bigg(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Bigg)\Bigg)$$

$$P_X\Bigg(\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}\Bigg(B_i\Bigg)\Bigg)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P_X(B_i)$$

Obs:

$$B = (-\infty, x] \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow P_X(B) = P_X\Bigg((-\infty, x])\Bigg)$$

$$= P\Bigg(X^{-1}\Bigg(-\infty, x]\Bigg)\Bigg)$$

$$= P\Bigg(x \in (-\infty, x]\Bigg) = P(X \leq x) = F_X(x)$$

5 03/04

5.1 Variável Aleatória

Revisão:

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$
Uma função

$$X : \Omega \longrightarrow \underbrace{I}_{\text{conjunto de valores de X}} \subset \mathbb{R} \text{ é variável aleatória}$$

- $$\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),\ A = X^{-1}(B) = [X \in B] \in \mathscr{A}$$
  $$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$
  $$\Rightarrow P\bigg(X^{-1}(B)\bigg) = P(X \in B) \quad \underline{f.d.a}$$
  $$(\Omega, \underbrace{\mathscr{A}}_{A \in x^{-1}(B)}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \underset{\in B}{\mathscr{B}(\mathbb{R})}, p_x)$$

- $B = (-\infty, x]$, X é variável aleatória se $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$X^{-1}\bigg((-\infty, x]\bigg) = [X \leq x] \in \mathscr{A}, \Rightarrow P(X \leq x) = P_X\bigg((-\infty, x]\bigg) = F_X(x)$$

$$X^{-1}\bigg((-\infty, x]\bigg) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x]\}$$
$$= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$$

5.2 Tipos de Variáveis aleatórias

1. Uma variável aleatória X é discreta se o conjunto dos seus valores for enumerável

$$X : \Omega \underset{\omega : \longrightarrow X(\omega) = x_i}{\longrightarrow} \{x_1, x_2, \ldots\}$$

Neste caso, $P_X : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$, satisfaz:

i) $P_x(\{X_i\}) = P\Big(X^{-1}(\{x_i\})\Big) = P(X = x_i) \geq 0;$

ii) $\sum\limits_{i \geq 1} P_X(\{x_i\}) = 1$

Então P_x é conhecida como função de probabilidade da variável aleatória X.

Note que:

$1 = P(\Omega) = P\Big(\bigcup\limits_{i\geq 1} X^{-1}(\{x_i\})\Big) = \sum\limits_{i\geq 1} P_X(x_i)$
ou
$1 = P\Big(\bigcup\limits_{i\geq 1} X^{-1}(\{x_i\})\Big) = \sum\limits_{i\geq 1} P_X(x_i) = P\Big(\bigcup\limits_{i\geq 1} [X = x_i]\Big) = P\Big(X \in \{x_1, x_2, \ldots\}\Big) = \sum\limits_{i\geq 1} P_X(x_i)$
X é variável aleatória com valores $\{x_1, x_2, \ldots\}$

$$\Leftrightarrow P\Big(X \in \{x_1, x_2, \ldots\}\Big) = 1$$

5.2.1 Fução de distribuição acumulada (f.d.a)

Seja X v.a. talve que $P\Big(X \in \{x_1, x_2, \ldots\}\Big) = 1$
Então, $\forall b \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,

$$P_X(B) = P\Big(X^{-1}(B)\Big) = P(X \in B) = \sum_{i : x_i \in B} P_X(x_i)$$

Em particular, $B = (-\infty, x], \forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_x(x) = P_X\Big((-\infty, x]\Big) = P\Big(X^{-1}((-\infty, x])\Big) = \sum_{i : x_i \in (-\infty, x]} P_X(x_i)$$

Exemplo:

E.1 $X \sim B(n,p), n \in \mathbb{N}, 0 < p < 1$

$$\varepsilon :\rightarrow \begin{cases} Sucesso = A, & P(A) = p \\ Fracasso = B, & P(B) = 1-p \end{cases}$$

Cada repetição de ε = Prova de Bernoulli

a) $Y : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ é uma variável aleatória se:

$$P(X=0) = P_X(\{0\}) = p$$

$$P(X=1) = P_X(\{1\}) = 1-p$$

Pois P_X é função de probabilidade.

Y é conhecida como variável aleatória $Bernoulli(p)$

b)

$$X : \Omega \underset{\omega \longrightarrow X(\omega)=k}{\longrightarrow} \{0, 1, \ldots, n\}$$

X = número de sucessos em n provas independentes de Bernoull, p = P(sucesso)

Temos que:

$$P_X(k) = P\Big(X^{-1}(\{k\})\Big) = P\Big(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}\Big) = P(X=k)$$

$$P\Bigg(\Big\{\omega = \{\underbrace{r_1, \ldots, r_k}_{\in\{A\}}, \underbrace{r_{k+1}, \ldots, r_n}_{\in A^c}\}\Big\}\Bigg)$$

$$\Omega = \Big\{\omega = \{r_1, \ldots, r_n\} : r_i \in \{A, A^c\}, i = 1, \ldots, n\Big\}$$

$$\Rightarrow P_X(k) = \binom{n}{k} \cdot P\Big((\overbrace{A, \ldots, A}^{k}, \overbrace{A^c, \ldots, A^c}^{n-k})\Big)$$

$$= \binom{n}{k} P(A) \cdots P(A) \cdot P(A^c) \cdots P(A^c)$$

$$\Rightarrow P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n \qquad (*)$$

Como:

$$\sum_{k=0}^{n} P_X(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \Big[(1-p)+p\Big]^n = 1$$

Então P_x dada em (*) é uma função de probabilidade de $X \sim B(n,p)$

Aplicação:

Suponha que para a megasena da Páscoa são vendidas 120 000 000 de cartelas.

a) Qual é a probabilidade da megasena da páscoa ser ganha por 10 pessoas?

b) Qual a probabilidae da megasena ser ganha por no maximo 10 pessoas ?

$$P(X \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = P\Big(X^{-1}\Big((-\infty, 10]\Big)\Big)$$

Solução:

$$p = \frac{1}{50063860}$$

$$\Rightarrow P(X = 10) = P(x^{-1}(10)) = \binom{n}{10} p^{10} (1-p)^{n-10}$$

Revisar as v.as

1. $X \sim Geo(p)$

$$P_X(k|p) = P(X^{-1}(k)) = P\Bigg(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}\Bigg) = P(X = k)$$

$$P\Bigg(\Bigg\{\omega = \underbrace{\{f_1, f_2, \ldots}_{\in A^c} \underbrace{s_1}_{\in A}\}\Bigg\}\Bigg)$$

$$\Omega = \Bigg\{\omega = \{f_1, f_2, \ldots, s_1\} : t_k \in \{A^c\}, k = 1, 2, \ldots \quad s_1 \in \{A\}\Bigg\}$$

$$\Rightarrow P_X(k) = P\Bigg(\overbrace{A^c, A^c, \ldots,}^{k} \overbrace{A}^{1}\Bigg)$$

$$P(A) = p \Rightarrow P(A^c) = 1 - p$$

$$\Rightarrow P_X(k|p) = (1-p)^k \cdot p, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots$$

2. $X \sim Pascal(r, p)$

$$P_X(k|p) = P(X^{-1}(k)) = P\Bigg(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}\Bigg) = P(X = k)$$

$$P\Bigg(\Bigg\{\omega = \underbrace{\{f_1, f_2, \ldots,}_{\in A^c} \underbrace{s_1, s_2, \ldots}_{\in A}\}\Bigg\}\Bigg)$$

$$\Omega = \Bigg\{\omega = \{f_1, f_2, \ldots, s_1, s_2, \ldots\} : f_k \in \{A^c\}, k = 1, 2, \ldots \quad s_i \in \{A\}, i = 1, 2 \ldots\Bigg\}$$

$$\Rightarrow P_X(k) = P\Bigg(\overbrace{A^c, A^c, \ldots,}^{k} \overbrace{A, \ldots, A}^{i}\Bigg)$$

$$P(A) = p \Rightarrow P(A^c) = 1 - p$$

$$= \binom{i+k-1}{i} P(A) \cdots P(A) \cdot P(A^c) \cdots P(A^c)$$

$$\Rightarrow P_X(k) = \binom{i+k-1}{i} p^k (1-p)^i, k = 0, 1, \ldots \quad i = 1, 2, \ldots$$

3. $X \sim Hipergeo(N, r, p)$

$$P_X(k|p) = P(X^{-1}(k)) = P\Bigg(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}\Bigg) = P(X = k)$$

$$P\Bigg(\omega = \Bigg\{A_k \cap A_k^c : A_k = \{e_1, e_2, \ldots, e_j,\ j = 0, 1, \ldots, k\}, k = 0, 1, \ldots, i\Bigg\}, i = 0, 1, \ldots, N\Bigg)$$

$$K \leq N$$

$$\Omega = \Bigg\{\omega = (d_1, \ldots, d_n) : d_i \in : \Bigg\}$$

$$= \binom{i+k-1}{i} P(A) \cdots P(A) \cdot P(A^c) \cdots P(A^c)$$

$$\Rightarrow P_X(k) = \binom{i+k-1}{i} p^k (1-p)^i, k = 0, 1, \ldots \quad i = 1, 2, \ldots$$

4. $X \sim Poisson(\lambda)$

08/04

$(\Omega, \mathscr{A}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), P_x) \Leftrightarrow P(A) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B)\ f.d.a$

1. Variável aleatória discreta, $P(X \in \{x_1, x_2, \ldots\}) = 1, \forall B in \mathscr{B}(\mathbb{R})$
   $P(X \in B) = \sum_{i:x_i \in B} P_X(x_i), P_x\ P_X(x_i), \forall x_i$ é função de probabilidade $P(X = x_i)$

   - $B = (-\infty, x]$, $P(X \leq x) = \sum_{i:x_i \leq x} P(X = x_i)$ f.d.a
   - $B = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$

   $$P(a \leq X \leq b) = \sum_{i:x_i = a}^{b} P(X = x_i)$$

2. Variável aleatória Absolutamente Contínua (a.c.)
   X é a.c. se existir $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   Tais que $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$,
   chamada de função de densidade de probabilidade (fdp).
   Neste caso,

   $$P(X \in B) = \int_{[X \in B] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \in B\} = X^{-1}(B)} f(x)dx$$

   - $(-\infty, x], \forall x \in \mathbb{R}$

   $$P(X \leq x) = \int_{X^{-1}\left((-\infty, x]\right) = \left[X \in (-\infty, x]\right] = [X \leq x]}$$

   - $B = [a, b]$

   $$P(a \leq x \leq b) \int_a^b f(x)dx$$

Exemplos:

- $$X \sim Exp(\beta) \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

- $$X \sim Gamma(\alpha, \beta) \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$$

$$\begin{cases} \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \\ \alpha = n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n) = n! \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \\ \Gamma(1) = 1 \end{cases}$$

$\int\limits_0^\infty x^{a-1} e^{-bx^c} dx = \frac{\Gamma(\frac{a}{c})}{c \cdot b^{\frac{a}{c}}}$

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- $X \sim W(\alpha, \beta)$
- $X \sim ogN(\mu, \sigma^2)$
- $X \sim logistica(\alpha)$
- $X \sim Cauchy(\alpha)$

5.3 Função de variável aleatória

Seja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ variável aleatória e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
Borel Mensurável. Então $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, $Y = g(x)$ é variável aleatória.

$$\Omega, \mathscr{A} \xrightarrow{X} \mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}) \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

Y é variável aleatória se $\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),\ Y^{-1}(B) \in \mathscr{A}$,

$$Y^{-1}(B) = X^{-1}\Big(g^{-1}(B)\Big) = [y \in B] = [X \in g^{-1}(B)]$$

$$\Leftrightarrow P(y \in B = P\Big(X \in g^{-1}(B)\Big)$$

Casos:

a) X discreta, $P(X \in \{x_1, x_2, \ldots\}) = 1 \Rightarrow$ Y discreta

$$\Omega \xrightarrow{X} \{x_1, x_2, \ldots\} \xrightarrow{g} \{y_1, y_2, \ldots\}$$

$$Y = g(X)$$

Caracterizada por

$$P(Y = y) = P(Y \in \{y\}) = \sum_{\substack{=i:\{x_i \in g^{-1}(\{y\})\} \\ x_i : g(x_i) = y}}^{\infty} P(X = x_i), \quad B = \{y\}$$

b) X a.c. com fdp $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow Y = g(x)$?
Temos que, $\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $B = (-\infty, y]$

$$P(Y \leq y) = \int_{\substack{=[X \in g^{-1}((-\infty, x]))] \\ [x : g(x) \in (-\infty, x]}}^{\infty} f(x)dx$$

Y discreta

$$P(Y = y) = \int_{[x : g(x) = y]} f(x)dx$$

Y a.c.
fdp: $F_Y'(y) = f_Y(y) \forall y$
Em particular, se g for inversível:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

$$= P\Big(g(X) \leq y\Big)$$

$$= P\Big(X \leq g^{-1}(y)\Big)$$

$$= F_X\Big(g^{-1}(y)\Big) \Leftrightarrow F_y'(y) = f_x\Big(g^{-1}(y)\Big) \left| \frac{d}{dy}\Big(g^{-1}(y)\Big) \right|$$

Exemplo:

1) Considere $X \sim B(n, 0.5)$: o número de caras que aparecem em n lançamentos de uma moeda honesta.

Um jogador lança a moeda e $\begin{cases} ganha\ 1, se\ sair\ cara \\ perde\ 1, se\ sair\ coroa \end{cases}$

Determine a distribuição do ganho do jogador

Solução:
Y = Ganho do jogador após n lançamentos

$$Y = \underbrace{X}_{Caras} - \underbrace{(n - X)}_{Coroas} = 2X - n$$

$$\Omega \xrightarrow{X} \{0, 1, 2, \ldots, \} \xrightarrow{g} \{-n, 2-n, \ldots, n\}$$

$$Y = g(x)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad P(Y = y) = \sum_{x_i : g(x_i) = y} P(X = x_i)$$

$$g(x) = 2x - n = y \Rightarrow x = \frac{y+n}{2}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad P(Y = y) = \sum_{\{x_i : g(x_i) = y\}} P(X = x_i) = P(X = \frac{y+n}{2}) = \binom{n}{\frac{y+n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ou $P(Y = y) = P(2x - n = y) = P(X = \frac{y+n}{2})$ pois g é inversível

2) $X \sim Binom(3, \frac{1}{2})$ e $Y = |X - 1|$
Determine a distribuição de Y
Sol:

$$\Omega \xrightarrow{X} \{0, 1, 2, \ldots\} \xrightarrow{g} \{0, 1, 2\}$$

$$Y = g(x)$$

$$P(Y = 0) = P(X = 1)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad P(Y = 1) = \sum_{\{x_i : g(x_i) = 1\}} P(X = 0) + P(X = 2)$$

$$P(Y = 2) = P(X = 3)$$

3)

$$X \sim U[0,1], \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

e $Y = g(x)$, Determine a distribuição de Y.

Sol:

$$\Omega \xrightarrow{X} [0,1] \xrightarrow{g} \{0,1\}$$

$$P(Y=0) = \int\limits_{x:g(x)=0} f(x)dx = \int\limits_{0.5}^{1} 1dx = \frac{1}{2}$$

$$P(Y=1) = \int\limits_{x:g(x)=0} f(x)dx = \int\limits_{0}^{0.5} 1dx = \frac{1}{2}$$

4) $X \sim U[0,1]$ e $g(x) = -log(x)$, $Y = g(x)$

Determine a distribuição de Y

Sol:

$$\Omega \xrightarrow{x} [0,1] \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$Y = g(x)$$

$$f_Y(y) = f_x\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}\left(g^{-1}(y)\right)\right|$$

$$-log(x) = y \Leftrightarrow x = e^{-y} = g^{-1}(y)$$

Assim,

$$f_Y(y) = f_x\left(e^{-y}\right)\left| - e^{-y}\right|, \quad f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$x \in [0,1] \Leftrightarrow y \geq 0 \Rightarrow f_Y(y) = e^{-y}$$

$$x \notin [0,1] \Leftrightarrow y < 0 \Rightarrow f_Y(y) = 0$$

$$\therefore Y \sim Exp(1)$$

Função de Distribuição

Definição: uma função $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é unfção de distribuição (f.d.), se

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, F é não decrescente;
$$x < y \Rightarrow F(X) \leq F(y)$$
2. F é contínua a direit.
$\{x_n\}$ é uma sequencia t.q. $x_n \downarrow x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} F(X_n) = F(x)$
3. $\lim_{n\to\infty} F(x) = 1$ e $\lim_{n\to-\infty} F(x) = 0$

Tipos:

1. F.d Discreta
uma f.d. F é discreta se existir uma função p t.q. $P(x_i) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1$, $x_i \in \mathbb{R}, i \geq 1$
Então,
$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{i:x_i \leq x} P(x_i)$
2. F.d absolutamente contínua (a.c)
Uma f.d. é a.c. se existir uma função f t.q. $f(x)\ ge0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $\int_{\mathbb{R}} f(x) = 1$
Neste caso, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$
Daí,
$$F'(x) = f(x)\ f.d.p$$
3. F.d Mista
$$F = F_d + F_c$$
F_d: Parte discreta
F_c: Parte contínua, $F_c = F_{a.c} + F_s$
Sendo F_{ac}: parte a.c. e F_s: parte singular
F_{ac} é t.q. $F_{ac} = f(x)$ f.d.p e $F_s'(x) = 0$
$$\therefore F = F_d + F_{ac} + F_s$$

Passos:

1. Identificar os pontos de descontinuidade

$$F_j\Bigg(\{x_1, x_2, \ldots\}\Bigg)$$

2. Calcular o tamanho do salto em cada x_i,

$$b_{x_i} = F(x_i^+) - F(x_i^-) = F(x_i) - F(x_i^-)$$

3. Parte discreta:

$$F_d(x) = \sum_{i:x_i \leq x} b_{x_i}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

4. Parte a.c.

$$F'_{ac}(x) = f(x) = F'(x),$$

Pois

$$F'(x) = \cancelto{0}{F'_d(x)} + F'_{ac}(x) + \cancelto{0}{F'_s(x)}$$

$$\Rightarrow F_{ac}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

5. Parte singular

$$F_S = F - (F_x + F_{ac})$$

Exemplo:

Seja $X \sim U[0,1]$ e $Y = min\left\{X, \frac{1}{2}\right\}$

a) Determine a distribuição de Y

b) Decomponha a distribuição em parte discreta e contínua.

Sol:

a) $X \sim U[0,1] \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$ e

$$Y = \begin{cases} X, & X \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & X > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R},$$

$$P\left(Y \leq y, X \leq \frac{1}{2}\right) + P\left(Y \leq y, X > \frac{1}{2}\right)$$

$$= P\left(X = Y \leq y, X \leq \frac{1}{2}\right) + P\left(Y = \frac{1}{2}, Y \leq y, X > \frac{1}{2}\right)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ \underbrace{P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) + P\left(X > \frac{1}{2}\right)}_{=1}, & y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) i) Descontinudade $= \{y_1 = \frac{1}{2}\}$

ii) Tamanho do salto:

$$b_{x_1} = F(y_1) - F(y_1^-)$$
$$= F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}^{-1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

iii) $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F_y(d) = \begin{cases} 0, & y \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

iv)

$$F'_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1, & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ 0, & y \geq \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < y < \frac{1}{2} \\ 0, & c.c \end{cases} = f(x)$$

$$\Rightarrow F_{ac}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \int\limits_0^y 1dy & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ \int\limits_0^{\frac{1}{2}} 1dy = \frac{1}{2}, & y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore F_{ac}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & y > \frac{1}{2} \end{cases}$$

v)

$$F_s(x) = F(y) - \left(F_d(y) - F_{ac}(y) \right)$$

$$F_d(y) - F_{ac}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ 1, & y \geq \frac{1}{2} \end{cases} = F(y) \Rightarrow F_S(y) \equiv 0$$

f.d. de variável aleatória:
X v.a.

$$\to F(x) = P_X\Big((-\infty, x]\Big), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad = \quad P(X \leq x) \quad f.d$$

Prova:

i) $x < y \Rightarrow (-\infty, x] \subset (-\infty, x]$
   $P\Big((-\infty, x]\Big) \leq P\Big((-\infty, x]\Big)$

$$\Rightarrow F(x) \leq F(y)$$

ii) $\{x_n\}$, $x_n \downarrow x$

$$(-\infty, x_1] \subset (-\infty, x_2] \subset \ldots \bigcup_{n \geq 1} A_i (-\infty, x_n] = (-\infty, x]$$

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} P_X\Big((-\infty, x]\Big)$$

Como $\{(-\infty, x]\}_{n\geq 1}$ é uma sequencia decrescente de eventos, pela continuidade de probabilidade.

$$\lim_{n\to\infty} P_X\Big((-\infty, x_n]\Big) = P_X\Big((-\infty, x]\Big) = F(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$$

iii)

$$x_n \downarrow -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0$$

e

$$x_n \uparrow \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} F(x) - 1$$

6 22/04

Vetores Aleatórios

Seja$X_1, \ldots, X_n$ variaveis aleatorias definidas sob $(\Omega, \mathscr{A}, P)$
Então, $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n) : \underset{\omega \longrightarrow X(\omega)=\boldsymbol{x}}{\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n}$ é um vetor aleatório se:

$\forall \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $A = \underbrace{\boldsymbol{X}^{-1}\Big((-\infty, \boldsymbol{x}]\Big)}_{\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, \boldsymbol{x}]\}} \in \mathscr{A} = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$,

Sendo
$\underbrace{(-\infty, \boldsymbol{x}]}_{\text{Retângulo de } \mathbb{R}^n} = (-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n] \in \mathbb{R}^n$
Então:

$$\underbrace{P_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = P\Bigg(\boldsymbol{X}^{-1}\Big((-\infty, \boldsymbol{x})\Big)\Bigg) = P\Big(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}\Big)}_{\text{Função de distribuição Acumuladada de } \boldsymbol{X}}$$

$$= P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$$

$$= \underbrace{P\Big(X_1, \ldots, X_n) \in (-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n]\Big)}_{\left\{\omega : \left(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\right) \in (-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n]\right\}}$$

Casos Particulares

1. Vetor Aleatório discreto

$$\boldsymbol{X} : \Omega \longrightarrow \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \ldots\}$$

Tal que:

$$P_X : \ \sigma(X_1, \ldots, X_2) \longrightarrow [0, 1]$$

Satisfaz:

i) $\forall \boldsymbol{x}, \quad P_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) \geq 0$

ii) $\sum_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) = 1$
$\Leftrightarrow P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \geq 0$
e
$\sum_{i_n} \cdots \sum_{i_1} P\Big(X_1 = x_{i1}, \ldots, X_n = x_{in}\Big) = 1$
$\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, \ldots x_{in})$.
Neste caso, P_X é chamada de Função de probabilidade conjunta de $X_1, \ldots, X_n$.

Assim,

fda: $P_{\boldsymbol{x}}\Big((-\infty,\boldsymbol{x}]\Big) = P\Big(\boldsymbol{X}^{-1}(\infty,\boldsymbol{x}]\Big) = P\Big(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}\Big)$

$$\Rightarrow F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}) = \sum_{i_n \leq x_n} \cdots \sum_{i_1 \leq x_1} P\Big(X_1 = x_{i1}, \ldots, X_n = x_{in}\Big)$$

Exemplo (E18):
$X : \Omega \to \{1,2,3\}$: número da primeira bola retirada
$Y : \Omega \to \{1,2,3\}$: número da segunda bola retirada
$\boldsymbol{X} = (X,Y) : \Omega \underset{\omega \longrightarrow \boldsymbol{X}(\omega)}{\longrightarrow} I \subset \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$
$I = \Big\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\Big\}$
$\boldsymbol{X}(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$

a) $P(X = x, Y = y) = \frac{1}{A_{3,2}} = \frac{1}{6}, \forall (x,y)$
Satisfaz:
$P(X = x.Y = y) = \frac{1}{6} > 0$
e
$\sum\limits_{(x.y)\in I} P(X = x, Y = y) = 1$

b) $P(X < Y) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2. Vetor aleatório absolutamente contínuo
$\boldsymbol{X} = (X_1 \ldots, X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínuo se existir uma função, chamda de f.d.p conjunta,

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

i) $f(\boldsymbol{x}) \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$

ii) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\mathbb{R}} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = 1$

a f.d.a conjunta, é dada por:

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = P\Big(\boldsymbol{X}^{-1}\Big((-\infty, x]\Big)\Big) = P(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x})$$

$$= \int_{-\infty}^{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t} = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n) dt_1, \ldots, dt_n$$

Tem-se também que:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} = f(x_1, \ldots, x_n)$$

Exemplos:

(a) $\boldsymbol{X} = (X,Y)$
$P\Big((X,Y) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]\Big) = P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2)$

$$\begin{cases} \sum\limits_{a_2 \leq y \leq b_2} \sum\limits_{a_1 \leq x \leq b_1} P(X = x, Y = y), & \boldsymbol{X} \textit{ discreto} \\ \int\limits_{a_2}^{b_2} \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y) dx dy, & \boldsymbol{X} \textit{ absolutamente continuo} \end{cases}$$

Distribuição Marginal:

Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ um vetor aleatório com f.d.a $F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n)$

Então:

$$\lim_{x_k \to \infty} F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

$$= \lim_{n \to \infty} P\Bigg(X_1^{-1}\Big((-\infty, x_1]\Big), \ldots, \underbrace{X_k^{-1}\Big((-\infty, \cancelto{\infty}{x_k}]\Big)}_{\Omega}, \ldots, X_n^{-1}\Big((-\infty, x_n]\Big)\Bigg)$$

$$= \underbrace{F_{X_1 \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)}_{\text{Distribuição marginal de ordem n-1}}$$

Em particular,

$$\boldsymbol{X} = (X, Y)$$

$$\underbrace{F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)}_{\text{f.d.a conjunta de X e Y}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y)$$

$$\Rightarrow \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)$$

São distribuições marginais de Y e X respectivamente.

- Distribuição marginais $\not\Rightarrow$ Determina modelo conjunto
- Modelo conjunto $\Rightarrow$ Distribuição marginais

Casos Particulares

- $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ Discreto
  $\Rightarrow P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$ f.p conjunta
  As probabilidade marginais,

  $$P(X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = P\Bigg(X_1^{-1}(\{x_1\}), \ldots, X_{n-1}^{-1}(\{x_{n-1}\})\Bigg)$$

  $$P(X = x, Y = y)$$

  $$\Rightarrow P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

  $$\Rightarrow P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y)$$

  São funções de probabilidade marginal de X e Y, respectivamente, Pois:

  $$P(X = x) = P\Big(X^{-1}(\{x\})\Big) = P\Big(X^{-1}(\{x\}), \Omega\Big) = P\Bigg(X^{-1}(\{x\}), Y^{-1}\Big(\bigcup_{y_i}\{y_i\}\Big)\Bigg)$$

  $$= \sum_{y_i} P\Big(X^{-1}(\{x\}), Y^{-1}(\{y_i\})\Big) = \sum_{y_i} P\Big(X = x, Y = y\Big)$$

- $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ absolutamente continuo $\Leftrightarrow$ fdp conjunta $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$
  As densidade marginais são:

$$f_{X_1,\ldots,X_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t_1, \ldots, t_n) dt_n$$

  n=2:
  $f(x, y)$ f.d. conjunta e

$$f_X(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x, y) dy, \qquad f_Y(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$$

  São as densidades marginais de X e Y, respectivamente.

<u>Definição:</u> As variaveis aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ são independentes, se:

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

Em particular:

- $X_1, \ldots, Xn$ discretas são independentes, se:

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n)$$

-

- $X_1, \ldots, Xn$ abs continuas são independentes, se:

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

7 24/04

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\ (x-\mu)'(\sigma^2)^{-1}(x-\mu) \right\}$$

$$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n) \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\ (\boldsymbol{x}-\mu)'(\sigma^2)^{-1}(\boldsymbol{x}-\mu) \right\}$$

$$\boldsymbol{X} \sim N(\mu, \Sigma)$$

$$\boldsymbol{X} = (X, Y) \sim N(\mu, \Sigma), \quad \mu = (\mu_1, \mu_2), \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{21} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho_{12})^2} \exp\left\{ \frac{1}{2(1-\rho_{12})^2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho_{12}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right] \right\}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right\}$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2 \right\}$$

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$\therefore \boldsymbol{X} \sim N(\mu, \Sigma) \underbrace{\Rightarrow}_{\Leftarrow\ valido,\quad \rho=0} X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \quad i = 1, \ldots, n$$

Por outro lado, correlação nula $\not\Rightarrow$ variáveis aleatórios (componentes) são independentes

Função de distribuição multivariada

Definição: Uma função de distribuição $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ é uma função de distribuição n-dimensional, se satisfaz:

i) F é não decrescente em cada componente;

$$\forall x, y, \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow F(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n) \leq F(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n)$$

ii) F é contínua á direita em cada componente;

Dada $y_n \downarrow y$,

$$\lim_{n \to \infty} F(x_1, \ldots, y_n, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n)$$

iii)

$$\lim_{x_i \to \infty} F(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = 1, \qquad i = 1, \ldots, n$$

e

$$\lim_{para\ algum\ x_i \to -\infty} F(x_1, \ldots, y_n, \ldots, x_n = 0)$$

iv) $\forall$ retângulo de $\mathbb{R}^n$, $(a,b] = (a,b] \times \ldots \times (a_n, b_n]$, $Vol_F\Big((a,b]\Big) \geq 0$

$$Vol_F\Big((a,b]\Big) = \Delta_{a_n}^{b_n} \ldots \Delta_{a_1}^{b_1} F(t_1, \ldots, t_n)$$

Com

$$\Delta_{a_k}^{b_k} F(t_1, \ldots, t_n) = F(t_1, \ldots, b_k, \ldots, t_n) - F(t_1, \ldots, a_k, \ldots, t_n)$$

Para n=2:

$$Vol_F\Big((a,b]\Big) = Vol_F\Big((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]\Big) = \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} F(t_1, t_2)$$

$$Vol_F\Big((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]\Big) = \Delta_{a_2}^{b_2} \Big[F(b_1, t_2) - F(a_1, t_2)\Big]$$
$$= F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) \geq 0$$

Proposição:

Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um vetor aleatório. Então $F_{\boldsymbol{X}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ definida por:

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = P\Bigg(\boldsymbol{X}^{-1}\Bigg((-\infty, \boldsymbol{x}]\Bigg)\Bigg), \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$

$$= P\Bigg(\boldsymbol{X} \in (-\infty, \boldsymbol{x}]\Bigg) = P(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x})$$

É função de distribuição n-variada.

Prova:

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \in (-\infty, x_1], \dots, X_n \in (-\infty, x_n])$$

Provar seguindo prova para o caso n=1

$$Vol_F\Bigg((a,b]\Bigg) = \Delta_{an}^{bn} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} F(t_1, \dots, t_n) = P(a_1 < X_1 \leq b_1, \dots, a_n < X_n \leq b_n) \geq 0$$

$$Vol_F\Bigg((a,b]\Bigg) = P(a_1 < X_1 \leq b_1, a_2 < X_2 \leq b_2)$$

$$= P(X_1 \leq b_1, a_2, X_2 \leq b_2) - P(X_1 \leq a_1, a_2 < X_2 \leq b_2)$$

8 29/04

<u>Função de Vetor Aleatório</u> Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots X_n)$ um vetor aleatório definido em $(\Omega, \mathscr{A}, P)$
Então:

$$\underset{\boldsymbol{X}^{-1}\left(g^{-1}(B)\right)\in\mathscr{A}}{\Omega} \xrightarrow{\boldsymbol{X}} \underset{g^{-1}(B)\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)}{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{g} \underset{B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})}{\mathbb{R}}$$

$$Z = g(\boldsymbol{X})$$

Se $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é Borel mensurável,

$Z = g(\boldsymbol{X}) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma variável aleatória, Então:

$$\begin{aligned} &\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \\ Z^{-1}(B) &= [Z \in B] \\ &= \boldsymbol{X}^{-1}\left(g^{-1}(B)\right) \\ &= [\boldsymbol{X} \in g^{-1}(B)] \end{aligned}$$

Assim,

$$P\left(Z^{-1}(B)\right) = P(Z \in B) = P\left(\boldsymbol{X} \in g^{-1}(B)\right)$$

$\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ é f.d.a de Z

<u>Casos Particulares</u>

1) $\boldsymbol{X}$ é discreto $\Rightarrow Z = g(\boldsymbol{X})$ discreto.

$$\begin{aligned} P(Z \in B) &= P\left(\boldsymbol{X} \in g^{-1}(B)\right) \\ &= \sum_{\boldsymbol{x}_i : g(\boldsymbol{x}_i) \in B} P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}_i) \end{aligned}$$

Também:

f.p. :

$$P(Z = z) = \sum_{\boldsymbol{x}_i = g(\boldsymbol{x}_i) = z} P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}_i)$$

2) $\boldsymbol{X}$ absolutamente contínuo $\Rightarrow Z = g(\boldsymbol{X}) \begin{cases} Discreta \\ Continua \end{cases}$

$$P(Z \in B) = P\left(\boldsymbol{X} \in g^{-1}(B)\right)$$

$$= \int\limits_{\boldsymbol{x}:g(\boldsymbol{x}\in B} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})dx \overset{\boldsymbol{X}=(X,Y)}{=} \int\limits_{(x,y):g(x,y)\in B} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy$$

<u>Método do Jacobiano</u> (Teorema da função Implícita)

$$h : \begin{cases} \mu = x \\ v = g(x,y), \qquad v = z \end{cases}$$

Se as derivadas parciais de μ e v existem, são contínuas e

$$|J(x,y)| = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial\mu}{\partial x} & \frac{\partial\mu}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \right|$$

Então pelo Teorema da função Implícita existe h^{-1} e:

$$h^{-1} : \begin{cases} x = \mu \\ y = y(\mu,v) \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} dx = d\mu \\ dy = dh^{-1}(\mu,v) \\ dy = \frac{1}{J(\mu,v)}dv \end{cases}$$

Logo,

$$P(Z \leq z) = \iint\limits_{\{(x,y):g(x,y)\leq z\}} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\Big(\mu, y(\mu,v\Big)d\mu\right] \left|\frac{1}{J(\mu,v)}\right| dv$$

$$\therefore F_Z(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\Big(\mu, y(\mu,v\Big)d\mu \left|\frac{1}{J(\mu,v)}\right|\right] dv$$

$$\Rightarrow F'_Z(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\Big(\mu, y(\mu,v)\Big)\frac{1}{|J(\mu,v)|}d\mu = f_Z(v), \qquad v = z = g(x,y)$$

Exemplo:

Sejam X, Y i.i.d $U(0,1)$. Determine a densidade de $Z = \frac{X}{Y}$

Solução:
Defina:

$$h: \begin{cases} u = x \\ v = \frac{x}{y}, \qquad v = z \end{cases}$$

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \end{pmatrix}, \qquad |J(x,y)| = \frac{-x}{y^2} \neq 0$$

$$h^{-1}: \begin{cases} x = uy = \frac{u}{v} \end{cases}$$

$$\frac{1}{J(\mu,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{pmatrix} = -\frac{u}{v^2}$$

$$\Rightarrow f_Z(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(u, \frac{u}{v}\right) \frac{|u|}{v^2} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) \cdot f_Y\left(\frac{u}{v}\right) \frac{|u|}{v^2} du$$

$$f_Y\left(\frac{u}{v}\right) = \begin{cases} 1, & 0 < \frac{u}{v} < 1 \Leftrightarrow 0 < u < v \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$v < 0 \Rightarrow f_Z(v) = 0$$

$$0 < v < 1 \Rightarrow f_Z(v) = \int_{-0}^{v} 1 \cdot 1 \frac{u}{v^2} du = \frac{1}{v^2} \left(\frac{u^2}{2}\right)\Big|_0^v = \frac{1}{2}$$

$$v \geq 1 \Rightarrow f_Z(v) = \int_{0}^{1} 1 \cdot 1 \frac{u}{v^2} du = \frac{1}{2v^2}$$

$$\therefore f_Z(v) = \begin{cases} 0, & v < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq v < 1 \\ \frac{1}{2v^2}, & v \geq 1 \end{cases}$$

Exercício:

$$X \sim N(0,1), \qquad Y \sim \chi^2_{(n)}$$

Determina a densidade de $Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$

(X,Y) vetor aleatório $g(X,Y) = Z,\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_Z(v) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u, y(u,v)) \left| \frac{1}{J(u,v)} \right| du$$

$$g : \begin{cases} u = x \\ v = g(u,y) \end{cases} \Rightarrow det\Big(J(x,y)\Big) \neq 0 \Big(J_h(u,v) = \tfrac{1}{J(u,v)}\Big)$$

$$\exists g^1 h : \begin{cases} x = u \\ y = y(u,v) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{J(u,v)} = det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = J_h(u,v)$$

Vetor aleatório de vetor aleatório

$$\Omega \xrightarrow{\boldsymbol{X}} \underset{g^{-1}(B)\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)}{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{\boldsymbol{g}} \underset{B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})}{\mathbb{R}^n}$$

$$\boldsymbol{Z} = g(\boldsymbol{X}), \qquad \boldsymbol{Z} = g(\boldsymbol{X}) = \Big(g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)\Big)$$

1. $\boldsymbol{X}$ abs. cont. e g inversível Defina

$$g : \begin{cases} z_1 = g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ z_n = g_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Se

$$det(J(x_1, \dots, x_n)) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \dots & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \dots & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$$

e as derivadas são contínuas, então existe g^{-1},

$$h = g^{-1} : \begin{cases} x_1 = h_1(z_1, \dots, z_n) \\ \vdots \\ x_n = h_n(z_1, \dots, z_n) \end{cases}$$

e

$$J_h(z_1, \dots, z_n) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \dots & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \dots & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Daí

$$f_{Z'}(z') = f_{X'}\Big(h_1(z_1, \dots, z_n), \dots, h_n(z_1, \dots, z_n)\Big)\Big|J_h(z_1, \dots, z_n)\Big|$$

Note que para n=2:

$$f_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2) = f_{X_1,X_2}\Big(h_1(z_1, z_2), h_2(z_1, z_2)\Big)\Big|J_h(z_1, z_2)\Big|$$

$$\Rightarrow f_{Z_1}(z_1) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{X_1,X_2}(h_1, h_2) \cdot \Big|J_h(z_1, z_2)\Big| dz_2$$

$$f_{Z_2}(z_2) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{X_1,X_2}(h_1, h_2) \cdot \Big|J_h(z_1, z_2)\Big| dz_1$$

Em geral, tem-se que:

$$F_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}) = P(\boldsymbol{Z} \leq \boldsymbol{z}) = \int \cdots \int f_{\boldsymbol{X}}\Big(h_1(t_1, \dots, t_n), \dots, h_n(t_1, \dots, t_n)\Big)\Big|J_h(t_1, \dots, t_n)\Big| d\boldsymbol{t}$$

$$\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_n), \boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_n)$$

Exemplo:

Considere (X,Y) com fdp conjunta

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x^2y^2}, & x\geq 1, y\geq 1\\ 0, & c.c.\end{cases}$$

Sema $Z_1=X\cdot Y$ e $Z_2=\frac{X}{Y}$

(a) Determine a f.d.p conjunta de Z_1 e Z_2

(b) Determine a densidade de $X\cdot Y=Z_1$

Sol:

$$g:\begin{cases}z_1=x\cdot y\\ z_2=\frac{x}{y}\end{cases}\quad\Rightarrow det\Big(J(x,y)\Big)=det\begin{pmatrix}y & x\\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{2y}\end{pmatrix}=-\frac{2x}{y}\neq 0$$

$$g^{-1}=h:\begin{cases}x=(z_1\cdot z_2)^{\frac{1}{2}}\\ y=\frac{z_1}{z_2}^{\frac{1}{2}}\end{cases}\quad\Rightarrow det\Big(J(x,y)\Big)=det\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(z_1\cdot z_2)^{-\frac{1}{2}}z_2 & \frac{1}{2}(z_1\cdot z_2)^{-\frac{1}{2}}z_1\\ \frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{z_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{-z_1}{z_2}\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4z_2}-\frac{1}{4z_2}=\frac{1}{2z_2}$$

$$\Rightarrow det\Big(J(z_1,z_2)=-\frac{1}{2z_2}\Big)$$

Daí

a)

$$f_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2)=\begin{cases}\frac{1}{2z_1^2\cdot z_2}, & \frac{1}{z_1}\leq z_2\leq z_1,\quad z_1\geq 1\\ 0, c.c\end{cases}$$

$$f_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2)=f_{X,Y}\left((z_1\cdot z_2)^{\frac{1}{2}},\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left|\frac{-1}{2z_2}\right|,$$

$z_1\geq 1$, pois $x,y,\geq 1$, $z_2=\frac{x}{y}$

b)

$$f_{Z_1}(z_1)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}\left((z_1\cdot z_2)^{\frac{1}{2}},\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2z_2}dz_2$$

$$=\int_{\frac{1}{z_1}}^{z_1}\left(\frac{z_2}{z_1z_2z_1}\right)\left(\frac{1}{2z_2}\right)dz_2=\frac{1}{2z_1^2}\int_{\frac{1}{z_1}}^{z_1}\frac{1}{z_2}dz_2$$

$$\Rightarrow f_{X\cdot Y}(z_1)=\frac{1}{2z_1^2}\left[ln(z_1)-ln(\frac{1}{z_1})\right]$$

$$\Rightarrow f_{X\cdot Y}(z_1)=\frac{1}{z_1^2}ln(z_1),\quad z_1\geq 1$$

2. $\boldsymbol{X}$ abs cont. e g qualquer (não inversível)

$$\boldsymbol{Z} = g(\boldsymbol{X}) \to f_{\boldsymbol{Z}}$$

08/05

Esperança

* Revisão (Integral de Riemann-Stiles)

Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ f.d.a e $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função borel-mensurável. A integral de R-S de φ com respeito a F é definida por:

$$\int_a^b \varphi(x)dF(x) := \lim_{||\tau||} \sum_i \varphi(y_i)[F(x_i) - F(x_i - 1)]$$

Sendo a partição de [a,b]

$$= [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

$$\tau = \underset{1 \leq i \leq n}{max} \{x_i - x_{i-1}\} \quad e \quad y_i \in [x_{i-1}, x_i], \ i = 1, \ldots, n$$

Note que:

$$F(x) = x$$

Então $I = \int\limits_a^b \varphi(x)dx = \lim\limits_{||\tau||} \sum\limits_i \varphi(y_i)\Delta_{x_i} \ \Big(\text{Integral de Riemann} \Big)$

Integral de Lebesgue-Stieltjes

Seja:

$I = \int\limits_a^b \varphi(x) dF(x)$ Integral de R-S

Resultado (Theorema de Caratheodory)

Dada uma f.d. F, existe uma medida de probabilidade $p_F : \mathscr{A} \longrightarrow [0,1]$ t.q.

$$F(x) = p_F\Big((-\infty, x]\Big)$$

em que $\mathscr{A}$ é σ-algebra do espaço amostral Ω

Utilizando o resultado anterior, tem-se que:

$$\int\limits_a^b \varphi(x) dF(x) = \int\limits_\Omega \varphi d \underbrace{p_F}_{medida\ de\ probabilidade} \qquad \Big(Integral\ de\ Lebesgue - Stieltjes\Big)$$

Propriedade da integral de R-S

1)

$$\int_a^b c\varphi(x)dx = \lim_{||\tau||} \sum_{i=1}^{n} c\varphi(y_i)[F(x_i) - F(x_i - 1)]$$

$$c\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{||\tau||} \sum_{i=1}^{n} c\varphi(y_i)[F(x_i) - F(x_i - 1)]$$

$$= c\int_a^b \varphi(x)dF(x)$$

2)

$$\int_a^b [\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)]dF(x)$$

$$= \alpha\int_a^b \varphi_1(x)dF(x) + \beta\int_a^b \varphi_2(x)dF(x)$$

3) F fx

- F discreta com descontinuidade $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, Então:

$$\int_a^b \varphi(x)dF(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)[F(x_i) - F(x_i - 1)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)b_{x_i}$$

Se X é uma variável aleatória tal que $X \sim F$, então

$$\int_a^b \varphi(x)dF(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)P(X = x_i)$$

- F absolutamente contínua com f.d.p f, então:

$$\int_a^b \varphi(x)dF(x) = \int_a^b \varphi(x)f(x)dx$$

- $F = F_d + F_{ac} + F_S$

$$\int_a^b \varphi(x)dF(x) = \sum_{x_i \ desc.deF} \varphi(x_i)b_{x_i} + \int_a^b \varphi(x)f(x)dx$$

Definição de Esperança: Seja X uma variável aleatória definida sob o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ e F dua f.d.a.

Seja $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função Borel mensurável. A esperança de $\varphi(x)$ é definida por:

$$E\Big(\varphi(x)\Big) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) dF(x)$$

Sempre que ela existir

Obs:

$$E\Big(\varphi(x)\Big) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dF(x) = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{a} \varphi(x) dF(x)}_{(1)} + \underbrace{\int\limits_{a}^{\infty} \varphi(x) dF(x)}_{(2)}$$

Existe, se:

- $(1) < \infty$, $(2) < \infty \Rightarrow E\Big(\varphi(x)\Big) < \infty$
- $(1) = -\infty$, $(2) < \infty \Rightarrow E\Big(\varphi(x)\Big) = -\infty$
- $(1) < \infty$, $(2) = +\infty \Rightarrow E\Big(\varphi(x)\Big) = +\infty$

Exemplo:

X v.a.

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x dF(x) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i P(X = x_i), & X\ dicreto \\ \int\limits_{\mathbb{R}} x f(x) dx, & X\ absolutamente\ continuo \end{cases}$$

$$E(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k dF(x) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^k P(X = x_i), & X\ dicreto \\ \int\limits_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx, & X\ absolutamente\ continuo \end{cases}$$

$$var(X) = E\Big(X - E(X)\Big)^2$$

Exercícios

Calculdae a esperança e variância, se existir, de:

1)

$$X \sim Cauchy(1), \quad f(x) = \frac{1}{(1+x)^2\pi}, \ x \in \mathbb{R}$$

2)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

3)

$$X \sim Gamma(\alpha, \beta)$$

4)

$$X \sim Weibull(\alpha, \beta)$$

5)

$$X \sim t_{(n)}$$

Exemplo:

$$X \sim Exp(\lambda), \qquad Z = min\{X, Y\}$$

$$E(Z) = \int min\{X, \lambda\} f_X(x)dx = \int_0^{\infty} min\{X, \lambda\} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \int_0^{\lambda} x\lambda e^{-\lambda x} dx + \int_{\lambda}^{\infty} \lambda \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \left(- xe^{-\lambda x} \right)\Bigg|_0^{\lambda} + \int_0^{\lambda} e^{-\lambda x} dx + \lambda \left(- e^{-\lambda x} \right)\Bigg|_{\lambda}^{+\infty}$$

$$= -\lambda e^{-\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda^2} - 1 \right) + \lambda e^{-\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda^2} \right)$$

Proposição:

X é uma variável aleatória definida em $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, Então:

$$E\Big(\varphi(x)\Big) = \int_0^{\infty} P(\varphi(X) > x)dx - \int_{-\infty}^{0} P(\varphi(X) \leq x)dx$$

Obs:

1) X discreta com valores inteiros:,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k) \Leftrightarrow E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k)$$

9 13/05

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-bx^c} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{a}{c}\right)}{c(b)^{\frac{a}{c}}}$$

Exemplo:

$$X \sim Exp(p)$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} P(X > x) dx = \int_x^{\infty} e^{-\beta x} dx$$

$$= \left(-\frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \right)\Big|_0^{\infty}$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} P(X^2 > x) dx = \int_0^{\infty} P(X > \sqrt{x}) dx = \int_0^{\infty} e^{-\beta x^{\frac{1}{2}}} dx = \frac{\Gamma(2)}{\beta^2 \frac{1}{2}}$$

X > 0 discreta com valores {0,1,2,...}

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$$

Exemplo:

$$X \sim Geo(p)$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

Exemplo: (E1, pg. 189)

X simétrica em torno de $\mu \Rightarrow E(X) = \mu$

Prova:

Hipótese: $P(X \geq x + \mu) = P(X \leq x - \mu)$

Sugestão: use (α), para $\mu = 0$ e depois para $Y = X - \mu$ é imediato.

Esperança de função de vetor aleatório

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Borel mensurável

$\Rightarrow Z = g(\boldsymbol{X})$ é um vetor aleatório e

$$E(Z) = E\Big(g(\boldsymbol{X})\Big) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x}) dF(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \sum\limits_{i_n} \cdots \sum\limits_{i1} g(\boldsymbol{x}_i) P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}_i) \\ \int\limits_{i_n} \cdots \int\limits_{i1} g(\boldsymbol{x}_i) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_i) dx_n \end{cases}$$

Exemplo:

1) $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias e $a_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \ldots, n$, Então:

$$E(\underbrace{a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n}_{g(\boldsymbol{X})}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(a_1 x_1 + \cdots a_n x_n\Big) dF_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} a_1 x1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \cdots \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_n\Big) dx_1 + \cdots + \int\limits_{\mathbb{R}^n} a_n x_n dx_n = a_1 E(X_1) + \cdots + a_n E(X_n)$$

Isto é,

$$E(a_1, X_1 + \cdots a_n X_n) = a_1 E(X_1) + \cdots + a_n E(X_n)$$

2)

$$E(X_1 \cdots X_2) = \iint\limits_{\mathbb{R}^n} x_1 x_2 dF_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$$

$$E\left(\frac{X_1}{X_2}\right) = \iint\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1}{x_2} dF_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$$

3) X variável aleatória

$$E\Big[X - E(X)\Big]^2 = var(X)$$

$$var(X) = E\Big[X^2 - 2XE(X) + \Big(E(X)\Big)^2\Big]$$

$$\therefore var(X) = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2$$

4) Medidas de dependência linear (Pearson)

$$\rho_{X_1,X_2} = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{var(X_1)}\sqrt{var(X_2)}}$$

$$cov(X_1, X_2) = E\Bigg[(X_1 - E(X_1)) \cdot (X_1 - E(X_2))\Bigg]$$

$$cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$$

5) X_1, X_2 são independentes.

$$\Rightarrow \rho_{X_1,X_2} = 0$$

Pois $cov(X_1, X_2) = E(X1, X_2) - E(X_1)E(X_2)$

6) $\rho_{X_1,X_2} = 0 \Rightarrow X_1, X_2$ são independentes?

7) $X \sim B(n, p)$ Defina:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \begin{cases} X_i \sim Bernoulli \\ E(X_i) = p, var(X_i) = p(1-p) \\ X_i = \begin{cases} 1, sucesso, P(X_i = 1) = p \\ 0, fracasso, P(X_i = 0) = 1 - p \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

$$var\Bigg(\sum_{i=1}^{n} X_i\Bigg) = np(1-p)$$

Exercício:

$$X \sim Hiper(N, r, n)$$

Prover que:

$$E(X) = \frac{nr}{N}$$

$$var(X) = \frac{nr}{N}\frac{N-r}{N}\frac{N-n}{N-1}$$

Solução:

$$p_X(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

- $$E(X) = \sum_x x\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$x\binom{r}{x} = x\frac{r!}{(x)!(r-x)!} = \frac{r(r-1)!}{(x-1)!((r-1)-(x-1))!} = r\binom{r-1}{x-1}$$

$$\binom{N-r}{n-x} = \frac{(N-r)!}{(N-r-n+x)!(n-x)!} = \frac{\Big((N-1)-(r-1)\Big)!}{\Big(N-r-n+x\Big)!\Big((n-1)-(x-1)\Big)!}$$

$$= \binom{(N-1)-(r-1)}{(n-1)-(x-1)}$$

$$\binom{N}{n} = \frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}$$

$$\therefore E(X) = \frac{rn}{N}\overbrace{\sum_x \underbrace{\frac{\binom{r-1}{x-1}\binom{(N-1)-(r-1)}{(n-1)-(x-1)}}{\binom{N-1}{n-1}}}_{X\sim Hiper(N-1,r-1,n-1)}}^{1} \Rightarrow E(X) = \frac{rn}{N}$$

- $$Var(X) = E(X^2) - E(X^2)$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Note que

$$E(X^2) = E(X(X-1) + X)$$

Utilizando uma argumentação similar a utilizada acima, tem-se:

$$x(x-1)\binom{r}{x} = x(x-1)\frac{r!}{(x)!(r-x)!} = (x-1)\frac{r(r-1)!}{(x-1)!((r-1)-(x-1))!}$$

$$= r(r-1)\frac{(r-2)!}{(x-2)!((r-2)-(x-2))!} = r(r-1)\binom{r-2}{x-2}$$

$$\binom{N-r}{n-x} = \frac{(N-r)!}{(N-r-n+x)!(n-x)!} = \frac{\Big((N-2)-(r-2)\Big)!}{\Big(N-r-n+x\Big)!\Big((n-2)-(x-2)\Big)!}$$

$$\binom{N}{n} = \frac{N(N-1)}{n(n-1)}\binom{N-2}{n-2}$$

$$\therefore E(X(X-1)+X) = \frac{r(r-1)n(n-1)}{N(N-1)}\overbrace{\underbrace{\sum_x \frac{\binom{r-2}{x-2}\binom{(N-2)-(r-2)}{(n-2)-(x-2)}}{\binom{N-2}{n-2}}}_{X\sim Hiper(N-2,r-2,n-2)}}^{1} + \frac{rn}{N}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \frac{r(r-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{rn}{N}$$

$$Var(X) = \frac{r(r-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{rn}{N} - \left(\frac{rn}{N}\right)^2 = \frac{rn}{N}\left(\frac{(r-1)(n-1)}{(N-1)} + 1 - \frac{rn}{N}\right)$$

$$= \frac{rn}{N}\left(\frac{N(r-1)(n-1)}{N(N-1)} + \frac{N(N-1)}{N(N-1)} - \frac{rn(N-1)}{N(N-1)}\right)$$

$$= \frac{rn}{N}\left(\frac{N(rn-n-r+1)}{N(N-1)} + \frac{N^2-N}{N(N-1)} - \frac{rnN-rn}{N(N-1)}\right)$$

$$= \frac{rn}{N}\left(\frac{\cancel{Nrn} - Nn - Nr\cancel{+N}}{N(N-1)} + \frac{N^2\cancel{-N}}{N(N-1)} - \frac{\cancel{Nrn}-rn}{N(N-1)}\right)$$

$$= \frac{rn}{N}\left(\frac{N^2 - Nn - Nr + rn}{N(N-1)}\right) = \frac{rn}{N}\frac{(N-r)(N-n)}{N(N-1)}$$

20/05

Esperança

Seja $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ espaço de probabilidade e $A \in \mathscr{A}$

$\mathrm{I}_A : \underset{\omega \longrightarrow \mathrm{I}_A(\omega)}{\Omega \longrightarrow} \{0,1\}$ função Indicadora de A

$$\mathrm{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(\mathrm{I}_A = 1) = P(A) \\ P(\mathrm{I}_A = 0) = P(A^c) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(I_A) = \int_{\mathbb{R}} x dF_{\mathrm{I}_A}(x) = \sum_{x_i=0} x_i P(\mathrm{I}_A = x_i)$$

$$\Rightarrow E(\mathrm{I}_A) = P(A)$$

Esperança Condicional

i) Esperança condicional dado um evento
Seja $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ um espaço de probabilidade e $A, B, \in \mathscr{A}$, Então:

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

Por outro lado, seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, uma variável aleatória, Então:

A esperança condicional de X dado B é a função definida por:

$$E(X|B) = \int_{\mathbb{R}} x dF_X(x|B), \qquad (1)$$

Sendo

$$F_X(x|B) = P(X \leq x|B) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap B)}{P(B)}$$

A equação (1) pode ser reescrita como:

$$E(X|B) = \int_{\mathbb{R}} x \frac{dP(\{X \leq x\} \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{1}{P(B)} \int_B x dF_x(x)$$

$$= \frac{1}{P(B)} E(X \cdot I_B) \qquad (2)$$

$$\frac{1}{P(B)} \begin{cases} \sum\limits_{i:\{X=x_i\}\cap B} P(X = x_i), & X \ Discreto \\ \int\limits_B x f(x) dx, & X \ Continuo \end{cases}$$

Exemplo:

Seja $X \sim U[0,1]$ e $B_i = [\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}]$ com $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{10} B_i$

Determine $E(X|B_i)$.]

Solução:

$\left(\underbrace{\Omega}_{[0,1]}, \mathscr{B}([0,1]), P\right)$, Sendo P Uniforme

$$E(X|B_i) = \frac{1}{P(B_i)} \int\limits_{B_i} xf(x)dx = \frac{1}{\frac{1}{10}} \int\limits_{\frac{i-1}{10}}^{\frac{i}{10}} x \cdot 1dx$$

$$E(X|B) = \frac{2i-1}{20}, \quad 1 = 1, \ldots, 10$$

Exemplo 2:
$X \sim U[-1,1]$. Calcule $E(X|X>0)$

Solução:

$$E(X|X>0) = \frac{1}{P(X>0)} \int\limits_{\{X>0\}} xf(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} \int\limits_0^1 x\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}$$

Pois

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1,1] \\ 0, & c.c \end{cases}, P(X>0) = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}$$

ii) Esperança condicional dada uma variável aleatória discreta .

Sejam $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $Y : \Omega \longrightarrow \{y_1, y_2, \ldots\}$.

Como

$$B_i = Y^{-1}(\{y_i\}) = \{Y = y_i\} \in \mathscr{A}, i = 1, \ldots$$

Tal que $\bigcup_{i\geq 1} B_i = \bigcup\limits_{i\geq 1}\{Y = y_i\} = \Omega$. Então a função $E(X|Y)$ chamada de esperança condicional de Y, é tal que:

$$E(X|Y)(\omega) = E(X|Y = y_i) = \frac{E\Big(X \cdot I_{\{Y=y_i\}}\Big)}{P(Y = y_i)}$$

Note que se X for discreta, $X : \Omega \longrightarrow \{x_1, x_2, \ldots\}$

$$E(X|Y)(\omega) = E(X|Y = y_i) = \frac{1}{P(Y = y_i)} \sum_j x_j P(X = x_i, Y = y_i)$$
$$= \sum_j x_j \frac{P(X = x_j, Y = y_i)}{P(Y = y_i)}$$

<u>Questão:</u>

X e Y são absolutamente contínuas, $E(X|Y) =?$

$$E(X|Y)(\omega) = E(X|Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} dx$$

iii) σ-algebra gerada por uma variável aleatória

- Considere

  $Y : \Omega \longrightarrow \{y_1, y_2, \ldots\}$ variável aleatória discreta, Então

  $$B_i = y^{-1}(\{y_i\}) = \{Y = y_i\} \in \mathscr{A}$$

  e $\cup B_i = \Omega$. Uma σ-algebra que contém a coleção $\mathscr{C} = \{B_1, B_2, \ldots\}$
  É chamada de σ-algebra gerada por Y, denotada por $\sigma(Y)$.
  Temos que $\sigma(Y)$ é a coleção de uniões e intersecções finitas de eventos de $\mathscr{C}$ e seus complementares, Isto é:

  $$\sigma(Y) = \left\{\emptyset = \bigcup_{i \in I = \emptyset} \{Y = y_i\}, \ldots, \mathscr{C}, \ldots, \Omega = \bigcup_{i \in I = \mathbb{N}} \{Y = y_i\}\right\}$$

  I = conjunto de índices. Além disso, $\forall a, b, \in \mathbb{R}$,

  $$\overbrace{Y^{-1}\Big((a, b]\Big)}^{Info\ de\ Y} = \bigcup_{i : a < y_i \leq b} \{Y = y_i\} \in \sigma(y)$$

- $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ absolutamente contínua.
  $\sigma(Y)$ contém a coleção de Borelianos do tipo,

  $$\forall a, b, \in \mathbb{R}, Y^{-1}\Big((a, b]\Big) \in \sigma(Y)$$

- Y é uma variável aleatória qualquer definida em $(\Omega, \mathscr{A}, P)$

$$\Rightarrow \sigma(Y) \subset \mathscr{A}$$

A informação de Y está contida em $\mathscr{A}$

iv) <u>Esperança Condicional</u>

Seja X uma variável aleatória definida em $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Uma variável aleatória denotada por $W = E(X|\mathscr{A}_1)\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$,, é a esperança condicional de X dado $\mathscr{A}_1$, se :

(a) $\sigma(W) \subset \mathscr{A}_1$

(b) $E(X \cdot I_A) = E(WI_A), \forall A \in \mathscr{A}_1$ quase certamente (Exceto, A t.q. P(A)=0)

* Se $E|X| < \infty$, tem-se que W existe e é única. <u>Exemplos</u>:

1) X variável aleatória e $Y : \Omega \longrightarrow \{y_1, y_2, \ldots\}$
Temos que

i) $W = E(X|Y)$ e $W(\omega) = E(X|Y = y_i) = g(y_i)$

$$\Rightarrow W = g(Y) \Rightarrow \sigma(W) \subset \sigma(Y)$$

$$W = E(X|Y) = E(X|\sigma(Y))$$

ii) Considere $A = \bigcup\limits_{i \in I}$, I = índices. Temos que:

$$E(X \cdot I_A) = E\left(X \cdot \sum_{i \in I} I_{\{Y=y_i\}}\right)$$

$$= \sum_{i \in I} E(X \cdot I_{\{Y=y_i\}})$$

Por outro lado,

$$E(\underbrace{W \cdot I_A}_{g(Y)\ discreta})$$

$$E(W \cdot I_A) = \sum_i g(y_i) \cdot P(Y = y_i)$$

$$\sum_i E(X|Y = y_i)P(Y = y_i)$$

$$\sum_i \frac{PE(X \cdot I_{\{Y=y_i\}})}{\cancel{P(Y = y_i)}} \cancel{P(Y = y_i)}$$

$$= \sum_i E(X \cdot I_{\{Y=y_i\}})$$

$$E(XI_A) = E\Big[E(X|\mathscr{A}_1)I_A\Big]$$

22/05

E1 :

$$Y : \Omega \longrightarrow \{y_1, y_2, \ldots\}$$

$$E(X|\sigma(Y)) = E(X|Y) = W$$

Note que:

$$E(X|Y)(\omega) = E(X|Y = y_i) \begin{cases} \sum\limits_j x_j \frac{P(X=x_i, Y=y_i)}{P(Y=y_i)}, & X\ Discreta \\ \int\limits_{\{Y=y_i\}} x_i \frac{f_X(x)dx}{P(Y=y_i)}, & X\ Abs.\ Cont \end{cases}$$

E2:
Ω, $A, B \in \Omega$, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\mathscr{A}_B = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\} = \sigma(B)$

- $W = E(X|\sigma(B))$ é tal que:
  $W(\omega) = E(X|B)$ para ωinB
  $W(\omega) = E(I_A|\sigma(B)) = P(A|\sigma(B))$
- $X = I_A$

$$W = E(I_A|\sigma(B)) = P(A|\sigma(B))$$

Obs: X,Y variáveias aleatórias contínuas

$$E(X|Y)(\omega) = E(X|Y = y)$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} x dF_{X|Y}(x|y)$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} dx$$

9.1 Propriedades

$$\Big(X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, (\Omega, \mathscr{A}, P)\Big)$$

P1. $E(X) = E[E(X|\mathscr{A}_1)]$, $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$
Prova segue pela definição.
EX1:

$$E(X) = E[E(X|Y)]$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{y_i} E(X|Y = y_i)P(Y = y_i), & Y\ discreta \\ \int\limits_{\mathbb{R}} E(X|Y = y) f_Y(y) dy, & Y\ ads.\ Cont. \end{cases}$$

EX2
Considere X e Y com densidade conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}, x, y, > 0$$

Determine $E(X|Y)$
<u>Solução</u>

$$E(X|Y=y) = \int_0^\infty x\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}dx = \int_0^\infty x\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{ye^{-y}}dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx = y$$

$$\therefore E(X|Y=y) = y$$

$$\leftrightarrow E(X|Y) = y \sim Exp(1)$$

P2. X_1, X_2 variáveis aleatórias definidas em $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, Então:

$$E(c_1X_1 + c_2X_2|\mathscr{A}_1) = c_1E(X_1|\mathscr{A}_1) + c_2E(X_2|\mathscr{A}_1)$$

P3. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então

$$E(X|\sigma(Y)) = E(X|Y) = E(X)$$

Em geral, se X e $\mathscr{A}_1$ são independentes,

$$E(X|\mathscr{A}_1) = E(X)$$

P4. Se $\sigma(X) \subset \mathscr{A}_1$, então

$$E(X|\mathscr{A}_1) = X$$

Neste caso, $\mathscr{A}_1$ fornece toda a estrutura de X (<u>X se torna conhecida ou não aleatória</u>)
<u>Exemplo</u>:
Seja $X = g(y)$, $\sigma(x) = \sigma(g(y)) \subset \sigma(Y)$

$$E\Bigg(g(y)|\sigma(y)\Bigg) = g(y)$$

p5. Se $\sigma(x) \subset \mathscr{A}_1$ e Z é uma variável aleatória qualquer, então

$$E(Z \cdot X|\mathscr{A}_1) = g(y)E(Z|\sigma(y))$$

<u>Exemplo</u>:

$$E(g(y)Z)|\sigma(Y)) = g(y)E(Z|\sigma(y))$$

Exemplo: (X,Y), $X \sim Exp\left(\frac{1}{2}\right)$ e $\forall x > 0$, $Y|X \sim U[0,x^2]$

a) Distribuições de $Y|X^2 = Z$

$$F_{Y|x=x} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{x^2} & 0 \leq t < x^2 \\ 1 & t \geq x^2 \end{cases}$$

$$F_{Y|X^2} = P(Y \leq y|X^2 = x) = P(Y \leq y|X = x^{\frac{1}{2}})$$

$$F_{Y|X=x^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y}{x}, & 0 \leq y < x \\ 1, & y > x \end{cases}$$

$$Y|X^2 = 2 \sim U[0,x] \Leftrightarrow Y|X \sim U[0,x]$$

b) $E(X) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$$E(Y) = E[E(Y|X^2)] = E[\frac{X}{2}]\frac{1}{2}E(X) = 1$$

$$E(XY) = E[E(XY|X^2)] \underset{P5}{=} E(XE(Y|X^2))$$

$$= E[X\frac{X}{2}] = \frac{1}{2}E(X^2)$$

$$\frac{1}{2}\left[var(X) - E(X)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[4 + 4\right] = 4$$

$$\therefore Cov(XY) = 4$$

Exemplo:

$$E(X|\sigma(Y))$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\begin{aligned} E(S_{n+1}\mathscr{A}_n) &= E(S_n + X_{n+1}|\mathscr{A}_n) \\ &\overset{P2}{=} E(S_n|\mathscr{A}_n) + E(X_{n+1}|\mathscr{A}_n) \\ &\overset{P3}{=} S_n + E(X_{n+1}) \end{aligned}$$

Se $E(X_{n+1}) = 0$

$$E(S_{n+1}|\mathscr{A}_n) = S_n$$

$\Leftrightarrow \{S_n, \mathscr{A}\}$ é uma Martingale.

10 29/05 Algumas Desigualdades Importantes

1. Desigualdade de Jensen

   Seja X uma variável aleatória com $E(X) < \infty$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, então:

   $$E\Big(g(x)\Big) \geq g\Big(E(X)\Big)$$

   <u>Prova:</u>

   Temos que

   $$g(x) \geq L(x), \forall x$$
   $$\Leftrightarrow g(x) \geq g(x_0) + m(x - x_0) \qquad (1)$$

   Como $E(X) < \infty$, tome $x_0 = E(X)$. Então, de (1), segue que:

   $$g(X) \geq g\Big(E(X)\Big) + m\Big(X - E(X)\Big) \qquad (2)$$

   Aplicando esperança, em (2), obtem-se:

   $$E\Big(g(X)\Big) \geq g\Big(E(X)\Big) + m\cancel{\Big(E(X) - E(X)\Big)}$$

   <u>Exemplo:</u>

   $$g(x) = |x|^p, \quad p \geq 1 \quad \text{É convexa.}$$

   $$\Rightarrow E\Big(|X|^p\Big) \geq \Big|E(X)\Big|^p$$

   $\Rightarrow \Big|E(X)\Big| \leq \Big[E(|X|^b)\Big]^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$: D-Holder

   p=1:

   $$\Big|E(X)\Big| \leq E\Big(|X|\Big) \Leftrightarrow -E|X| \leq E(X) \leq E|X|$$

2. Desigualdade de Chebyschev

- Básica

  Seja X ima variável aleatória com $E(X) < \infty$ e X>0 , então:

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}, \forall \varepsilon > 0$$

  Prova:

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xdF(X) = \int_{\{x:x>\varepsilon\}} xdF(x) + \int_{\{x:x<\varepsilon\}} xdF(x)$$

$$\Rightarrow E(X) \geq \int_{\{x:x>\varepsilon\}} xdF(x) > \int_{\{x:x>\varepsilon\}} \varepsilon dF(x)$$

$$\Rightarrow E(X) \geq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{\{x:x>\varepsilon\}} dF(X) = \varepsilon P(X > \varepsilon)$$

- Clássica

  Seja X uma variável aleatória com $Var(X) < \infty$, então:

$$P\bigg(|X - E(X)| > \varepsilon\bigg) \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}, \forall \varepsilon > 0$$

  Prova:

  Segue da Desigualdade Básica. Basta definir

$$Y = |X - E(X)|,$$

$$P\bigg(|X - E(X)| \geq \varepsilon\bigg) = P\bigg(|X - E(X)|^2 > \varepsilon^2\bigg) \leq \frac{E\bigg(|X - E(X)|^2\bigg)}{\varepsilon^2}$$

  Exemplo: Desigualdade de Markov

$$P\bigg(|X| > \varepsilon\bigg) \leq \frac{E\bigg(|X|^t\bigg)}{\varepsilon^t}, \text{ Para algum } t \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon > 0$$

Exemplo:

Se X é variável aleatória com $Var(X) = 0$, então $P(X = c) = 1$ e c é uma constante.

Prova:

Nota que se $P(X = c) = 1$, então $E(X) = c$. Isto é,

Provar que $P(X = c) = 1 \Leftrightarrow$ Provar que $P\Bigg(X \neq E(X) \Bigg) = 0$

De fato:

$$P(X \neq E(X)) = P\Bigg(|X - E(X)| > \varepsilon \Bigg) \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2} = 0$$

Para algum $\varepsilon > 0$.

10.1 Função Característica

Seja X uma varável aleatória definida em $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. A função

$$\varphi_X(t) = E\Bigg(e^{itx}\Bigg), i \in \mathbb{C} : i^2 = -1$$

é a função característica (f.c) de X.
Tem-se que:

$$\varphi_X(t) = E\Bigg(e^{itx}\Bigg) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_X(x), \quad t \in \mathbb{R}$$

Além disso,

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \sum\limits_k e^{itk} P(X = k), & X\ Discreta \\ \int e^{itx} f_X(x) dx, & X Continua \end{cases}$$

<u>Observação</u>

$$z = e^{itx} = cos(tx) + i \cdot sen(tx)$$
$$\bar{z} = e^{-itx} = cos(tx) - i \cdot sen(tx)$$
$$z \cdot \bar{z} = |z| = cos^2(tx) + sen^2(tx) = 1$$
$$\Rightarrow e^{itx} \cdot e^{-itx} = \Bigg|e^{itx}\Bigg| = 1$$

<u>Propriedades</u>

(a)

$$\varphi_X(0) = E\Bigg(e^{i(0)x}\Bigg) = 1;$$

(b)

$$|\varphi_X(t)| = \Bigg|E(e^{itx})\Bigg| \overbrace{\leq}^{D-J} E\Bigg|e^{itx}\Bigg| = 1$$

$$|\varphi_X(t)| \leq 1$$

(c)

$$\varphi_{aX+bY}(t) = E\Bigg(e^{it(aX+bY)}\Bigg) = E\Bigg(e^{itax} \cdot e^{itby}\Bigg)$$

Se X e Y são independentes, Então:

$$E\Bigg(e^{itax} \cdot e^{itby}\Bigg) = E\Bigg(e^{iatx}\Bigg) \cdot E\Bigg(e^{ibty}\Bigg)$$
$$= \varphi_X(at) \cdot \varphi_Y(bt)$$

(d) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes.

$$\Rightarrow \varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)\cdots\varphi_{X_n}(t)$$

Se $X_1, \ldots, X_n$ são i.d.,

$$\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \Big[\varphi_{X_1}(t)\Big]^n$$

(e) Linearidade

$$\varphi_{aF_1+xF_2}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\Big(aF_1(x) + bF_2(x)\Big)$$

$$= a\int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_1(x) + b\int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_2(x) = a\varphi_{F_1}(t) + b\varphi_{F_2}(t)$$

$$= \lim_{u\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-u}^{u} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it}\varphi_X(t)dt$$

(f) Fórmula de Inversão:
Seja X uma variável aleatória, $X \sim F$. Então, $\forall x \leq y$,

$$\frac{F(y) + F(y^-)}{2} + \frac{F(x) + F(x^-)}{2}$$

Se X for absolutamente contínua:

$$F(y) + F(x) = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-u}^{u} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it}\varphi_X(t)dt$$

Para x=0,

$$F(y) + F(0) = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-u}^{u} \frac{1 - e^{-ity}}{it}\varphi_X(t)dt$$

Derivando,

$$f_X(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-it}\varphi_X(t)dt$$

11 05/06

11.1 Tipos de Convergência

Sejam $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e X variáveis aleatórias definidas em $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Motivação

$$X_n \xrightarrow{q.c.} X$$

$$X_n \xrightarrow{Em\ Mdia} X$$

$$X_n \xrightarrow{p} X$$

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$$

Definição 1 (Convergência quase certa (q.c.))

Uma sequência $\{X_n\}_{n\geq 0}$ converge quase certamente para X; $X_n \xrightarrow{q.c.} X$, se:

$$P\bigg(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\bigg) = 1$$

ou

$$P\bigg(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}\bigg) = 0$$

Exemplo 1:

$\{X_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência definida no espaço uniforme $\bigg([0,1], \mathscr{B}([0,1]), P\bigg)$

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 0 < \omega < 1 \\ 0, & c.c \end{cases} \bigg(\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq 0\ Unif\bigg)$$

Temos que (Intuitivamente):

$$X_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0, & 0 < \omega < 1 \\ 1, & \omega = 0, 1 \end{cases}$$

Como

$$P\bigg(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0\}\bigg)$$

$$= P\bigg((0,1)\bigg)$$

$$= 1$$

Então: $X_n \xrightarrow{q.c.} 0, n \to \infty$

Exemplo 2: $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é uma sequência definida em $\Big([0,1], \mathscr{B}([0,1]), P\Big)$ Uniforme:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < \omega < 1 \end{cases} \qquad \text{Se n é par}$$

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1, & 1 - \frac{1}{n} \leq \omega \leq 1 \\ 0, & c.c \end{cases} \qquad \text{Se n é ímpar}$$

Determine a convergência quase certa da sequência.

$$X_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq 0 \\ 0, & 0 < \omega \leq 1 \end{cases} \qquad \text{Se n é par}$$

$$X_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1, & 1 \leq \omega \leq 1 \\ 0, & 0 \leq \omega < 1 \end{cases} \qquad \text{Se n é ímpar}$$

$$P\Big(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0\}\Big) = \begin{cases} P\Big((0,1)\Big) = 1, & n\ par \\ P\Big([0,1)\Big) = 1, & n\ impar \end{cases}$$
$$= 1$$

11.2 Convergência em probabilidade

Uma sequência $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge em probabilidade para X, $X_n \xrightarrow{p} X, n \to \infty$, se $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\Bigg(\{\omega : \Big|X_n(\omega) - X(\omega)\Big| \leq \varepsilon\}\Bigg) = 1$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} P\Bigg(\{\omega : \Big|X_n(\omega) - X(\omega)\Big| > \varepsilon\}\Bigg) = 0$$

<u>Exemplo</u>: Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência definida em $\Bigg([0,1], \mathscr{B}([0,1]), P\Bigg)$ Uniforme tal que:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \frac{k}{n-k} \leq \omega \leq \frac{k+1}{n-k} \\ 0, & c.c. \end{cases}, k \in \mathbb{Z}^+, k < n$$

$$X_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 1, & \omega = 0 \\ 0, & 0 < \omega \leq 1 \end{cases}$$

Porém, $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\Bigg(\{\omega : \Big|X_n(\omega) - 0\Big| > \varepsilon\}\Bigg)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\Bigg(\{\omega : \Big|X_n(\omega)\Big| \neq 0\}\Bigg)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\Bigg(\left[\frac{k}{n-k}, \frac{k+1}{n-k}\right]\Bigg) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-k} = 0$$

Então $X_n \xrightarrow{p} 0$.

<u>Observação</u> Mostra-se que:

$$X_n \xrightarrow{q.c.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$$

11.3 Convergência em Distribuição

Uma sequência $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge em distribuição para X, $X_n \xrightarrow{D} X$,se

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \quad \forall x \in \mathscr{C}(F_x)$$

$\mathscr{C}(F_x)$ = conjuntos de pontos da continuidade de F.

Exemplo:

Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência definida em $\Big([0,1], \mathscr{B}([0,1]), P\Big)$ uniforme tal que:

$$X_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \leq \omega \leq 1 \\ 0, & 0 \leq \omega < \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{Se n é par}$$

$$X_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < \omega < 1 \end{cases} \qquad \text{Se n é ímpar}$$

Temos que:

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x) = \begin{cases} P(\emptyset) = 0, & x < 0 \\ P(X_n = 0) = P([0, 0.5]), & 0 \leq x < 1 \\ P(X_n = 1) + P(X_n = 1) = 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ P\Bigg((\frac{1}{2}, 1) = \Bigg)\frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Isto é,

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \longrightarrow F_X(x) \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \Rightarrow X \sim Bernoulli\left(\frac{1}{2}\right) \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

12 10/06

12.1 Convergência em momentos

Uma sequência $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge no r-ésimo momento para X, $X_n \xrightarrow{(r)} X, n \to \infty$, se:

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^r = 0$$

Exemplo: $X_n(\omega) = \begin{cases} n, & 0 < \omega < \frac{1}{n} \\ 0, & c.c. \end{cases}$

Determine o limite de $\{X_n\}$, em momentos

Sol:

$X_n \xrightarrow{(r)} 0?$

$$E|X_n - 0|^r = E|X_n|^r$$
$$n^r P(X_n = n) + 0^r P(X_n = 0)$$
$$n^r P\left((0, \frac{1}{n})\right) = \frac{n^r}{n} = n^{r-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} E|X_n - 0|^r = 0 \Leftrightarrow r - 1 < 0$$

$$\therefore X_n \xrightarrow{(r)} 0, r < 1$$

Exercício: Discuta os outros três tipos de convergência para essa sequência.

12.2 Caracterização de convergências

1) Em Distribuição

Teorema 1 (Helly - Bray)

Seja $\{F_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de distribuições tais que $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ e seja g uma função contínua e limitada, então:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x)dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)dF(x)$$

Aplicação

Seja $X_n \sim F_n$, $X \sim F$ e $g(x) = eitx$ é contínua e $|g(x)| \leq 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{F_n}(t) = \varphi_F(t)$$

Teorema 2 (Continuidade de Lévy)

Sejam $\{F_n\}_{n\geq 1}$ sequências de distribuições e $\{\varphi_n(t)\}_{n\geq 1}$ suas respectivas funções características. Se:

$$\varphi_n(t) \longrightarrow \varphi(t), n \to \infty$$

e φ é contínua em 0. Então:

a) $\exists F : \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \forall x \in \mathscr{C}(F)$

b) φ é função característica de F

Aplicação

$\{X_n\}_{n\geq 1}$, $X_n \sim F_n$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{F_n} = \varphi(t) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t) \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{D} X, n \to \infty$$

$$t.q.\ \ \varphi_{X_n} = \varphi_{F_n}\ e\ \varphi = \varphi_F$$

Exemplo:

Suponha que as funções caraterísticas de $\{X)n\}_{n\geq 1}$ são $\varphi_{X_n}(t) = e^{-\frac{nt^2}{2(n+5)}}, t \in \mathbb{R}$

Determine a distribuição limite de X_n

Sol:

$$X_n \xrightarrow{D} X?$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{nt^2}{2(n+5)}} = e^{\frac{t^2}{2}} = \varphi_Z(t), \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow{D} Z \ \ \left(\underset{n\to\infty}{X_n} \sim N(0,1)\right)$$

Observação:

$$X_n \xrightarrow{D} X, n \to \infty \Leftrightarrow$$

- $\{X_n\}$ Discretas $P(X_n = k) \to P(X = k), \forall k$ (função de probabilidade)
- $\{X_n\}$ absolutamente contínua

$$\underset{n\to\infty}{f_{X_n}(x)} \to f_X(x), \forall x \in \mathscr{C}(f_X)$$

Exemplo:

$X_n \sim Binomial(n, p)$, p é pequeno.

Mostre que $X_n \xrightarrow{D} X, n \to \infty$

$$X \sim Poisson(\lambda), \lambda = np$$

Prova

$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = P(X = k)$

Exercício:

(a) Mostre que $X_n \sim \chi^2_{(n)}, n \geq 1$

$$X_n \xrightarrow{D} X, n \to \infty$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

(b) Mosrte que $X_n \sim t_{(n)}, n \geq 1$

$$X_n \xrightarrow{D} X, n \to \infty$$

$$X \sim N(0, \sigma^2)$$