Exercícios Inferência Matemática
Barry R. James - Probabilidade: um curso em nível intermediário
Capítulo 2 e Capítulo 3

Sumário

Capítulo 1

Páginas 88 -

1.1 Questão 17

a)

$$P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1) = F(1,1) - F(1,0) - F(0,1) + F(0,0)$$
$$1 - e^{-2} - (1 - e^{-1}) - (1 - e^{-1}) + 1 = -2e^{-1} - e^{-1} \not> 0$$

Logo, a função não é função de distribuição de um vetor aleatório

b) Para demonstrar temos que avaliar que a função é não decrescente, absolutamente contínua, tem valor 0 quando x e y tendem a $-\infty$ e valor 1 quando x e y tendem a ∞ e provar que o retângulo gerado pela distribuição em $\mathbb{R}^2$ tem área maior ou igual a 0.

1.2 Questão 18

a) $P(X = x, Y = y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ \frac{1}{6}, & x \neq y \end{cases}, \qquad x, y = 1, 2, 3$

b) $P(X < Y) = \frac{1}{2}$

1.3 Questão 19

1.4 Questão 20

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -1 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & c.c \end{cases}$

b) $P(X > Y)$ Corresponde á metade inferior da área do circulo a partir da reta x=y, portanto, a probabilidade equivale a $\frac{1}{2}$. O mesmo é válido para $P(X < Y)$, que correndo a metade superior.

O caso onde P(X=Y) é uma reta e portanto não determina uma região a ser calculada, resultado em probabilidade 0

1.5 Questão 21

O problema trata do produto de duas variáveis uniformes contínuas, então:

a)

$$f_(X,Y)(x,y) = \begin{cases} 1, & x,y \in [0,1] \\ 0, & c.c \end{cases}$$

b)

$$P\Big(|\frac{Y}{X} - 1| \leq \frac{1}{2}\Big) = P\Big(\frac{1}{2}X \leq Y \leq \frac{3}{2}X\Big)$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{2}{3}} \int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{3x}{2}} 1dydx + \int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} \int\limits_{\frac{x}{2}}^{1} 1dydx$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{2}{3}} xdx + \int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} (1 - \frac{x}{2})dx = \frac{5}{12}$$

c)

$$P\Big(Y \geq X | Y \geq \frac{1}{2}\Big) = P\Big(\frac{P(Y \geq X, Y \geq \frac{1}{2})}{P(Y \geq \frac{1}{2})}\Big) = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{y} 1dxdy}{\frac{1}{2}} = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1} ydy}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

1.6 Questão 22

1.7 Questão 23

Por definição, o conjunto de 3 variáveis aleatórias é dito independente se:

- $P(X_i = x_i, X_j = x_j) = P(X_i = x_i)P(X_j = x_j), \forall i \neq j \;\; i,j = 1,2,3$
- $P(X_i = x_i, X_j = x_j, X_k = x_k) = P(X_i = x_i)P(X_j = x_j)P(X_k = x_k), \forall i \neq j \neq k \;\; i,j = 1,2,3$

Sendo assim, independência 2 a 2 não garante que as variáveis aleatórias são independentes.

1.8 Questão 24

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}), & x,y > 0 \\ 0, & cc \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x}e^{-y}, & x,y > 0 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int\limits_0^\infty e^{-x}e^{-y}dy = e^{-x} \therefore X \sim Exp(1)$$

$$f_Y(y) = \int\limits_0^\infty e^{-x}e^{-y}dx = e^{-y} \therefore Y \sim Exp(1)$$

X e Y são independentes pois o produto das marginais é igual a conjunta.

1.9 Questão 25

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ \frac{1}{6}, & x \neq y \end{cases}, \qquad x, y = 1, 2, 3$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x = 1,2,3 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

$$P(Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & y = 1,2,3 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

É fácil ver que o produto as marginais não vai ser igual a distribuição conjunta.

1.10 Questão 26

Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ um vetor aleatório com f.d.a $F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \dots, x_n)$
Então:

$$\lim_{x_k \to \infty} F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

$$= \lim_{n \to \infty} P\Bigg(X_1^{-1}\Bigg((-\infty, x_1]\Bigg), \dots, \underbrace{X_k^{-1}\Bigg((-\infty, \cancelto{\infty}{x_k}]\Bigg)}_{\Omega}, \dots, X_n^{-1}\Bigg((-\infty, x_n]\Bigg)\Bigg)$$

$$= \underbrace{F_{X_1 \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots X_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)}_{\text{Distribuição marginal de ordem n-1}}$$

Em particular,

$$\boldsymbol{X} = (X, Y)$$

$$\underbrace{F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)}_{\text{f.d.a conjunta de X e Y}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y)$$

$$\Rightarrow \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)$$

São distribuições marginais de Y e X respectivamente.

Tendo em vista que

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$$

A proposição está provada, pois:

$$\lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y) \Rightarrow \frac{\partial F_Y(y)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

$$\lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \Rightarrow \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

1.11 Questão 27

$$Xt^2 + Yt + Z = 0$$
$$\Delta = Y^2 - 4XZ \geq 0$$
$$P(\Delta \geq 0) = P(Y^2 - 4XZ \geq 0)$$
$$P(Y^2 \geq 4XZ) = P(XZ \leq \frac{Y^2}{4})$$

Utilizando a lei da probabilidade total

$$P(XZ \leq \frac{Y^2}{4}) = P(X \leq K, Z \leq \frac{Y^2}{4K})$$

Como X,Y,Z são independentes, temos:

$$P(X \leq K, Z \leq \frac{Y^2}{4K}) = P(X \leq K)P(Z \leq \frac{Y^2}{4K})$$

$$= K \int_0^{\frac{y^2}{4K}} dz = \int_0^{y} K \frac{y^2}{4K} dy = \frac{1}{12}$$

1.12 Questão 28

1.13 Questão 29

$$P(X=c, X=c) = P(X=c)P(X=c) = P(X=c) = \Big[P(X=c)\Big]^2$$

Logo, $P(X=c) = \begin{cases} 1, & x=c \\ 0, & x \neq c \end{cases}$

Logo, X é independente de si mesmo se, e somente se, for uma função indicadora.

1.14 Questão 30

a)

$$P(T<t) = P(T \leq t, T=T_1) + P(T \leq t, T = T_2)$$
$$P(T=t_1)P(T \leq t | T = t_1) + P(T=t_2)P(T \leq t|T=t_2)$$
$$= \frac{1}{2}P(T_1 \leq t) + \frac{1}{2}P(T_2 \leq t)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(1 - e^{t\lambda_1} + 1 - e^{t\lambda_2}\Big) = 1 - \frac{1}{2}\Big(e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2}\Big)$$

b)

$$P(T=t_1|T \geq 100) = \frac{P(T=t_1, T \geq 100)}{P(T \geq 100)} = \frac{P(T=t_1)P(T \geq 100|T=t_1)}{P(T \geq 100)}$$
$$= \frac{e^{-\lambda_1 \cdot 100}}{e^{-\lambda_1 \cdot 100} + e^{-\lambda_2 \cdot 100}}$$

c)

$$T \sim exp(\lambda)$$

Questão 31

$$P(T_1 > 2T_2) = \int_0^\infty P(T_1 > 2t | T_2 = t)dt$$
$$= \int_0^\infty \int_{2t_2}^\infty f(t_1, t_2)dt_1 dt_2 = \int_0^\infty \int_{2t_2}^\infty f(t_1)f(t_2)dt_1 dt_2$$
$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t_2} \int_{2t_2}^\infty \lambda e^{-\lambda t_1} dt_1 dt_2 = \int \lim_0^\infty \lambda e^{t_2 \lambda} e^{-2t_2} dt_2 = \frac{1}{3}$$

1.15 Questão 32

a) Nota-se que estamos tratando uma região (A) formada pela conjunto de duas distribuições de amplitude 2, sendo assim, a densidade é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \notin A \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \int\limits_{-1-x}^{x+1} \frac{1}{2} dy, & = 1 \leq x < 0 \\ \int\limits_{x-1}^{1-x} \frac{1}{2} dy, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 \leq x < 0 \\ 1 - x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Da mesma forma,

$$f(y) = \begin{cases} 1 + y, & -1 \leq y < 0 \\ 1 - y, & 0 \leq y < 1 \end{cases}$$

c) É fácil ver que o produto das marginais não resulta na distribuição conjunta.

1.16 Questão 33

a)

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & x = 1 \\ \frac{3}{5}, & x = 2 \\ \frac{1}{5}, & x = 3 \end{cases}$$

$$P(Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & y = 1 \\ \frac{3}{5}, & y = 2 \\ \frac{1}{5}, & y = 3 \end{cases}$$

b) Não não independentes, pois:

$$P(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{5} \neq P(X = 2)P(Y = 2) = \frac{9}{25}$$

1.17 Questão 34

$$Z = X - Y$$

$X = I_{[\theta-0.5,\theta+0.5]}$ e $-Y = I_{[-\theta-0.5,-\theta+0.5]}$

$$P(X - Y \leq z) = \begin{cases} \int\limits_{\theta-0.5}^{\theta+0.5+z} \int\limits_{x-z}^{\theta+0.5} 1dydx, & -1 < z < 0 \\ 1 - \int\limits_{z}^{\theta+0.5} \int\limits_{\theta-0.5}^{x-z} 1dydx, & 0 \leq z < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [\theta + 0.5 + z - (\theta - 0.5)][\theta + 0.5 - (\theta - 0.5 - z)] & -1 < z < 0 \\ 1 - [\theta + 0.5 - z - (\theta - 0.5)][\theta + 0.5 - (\theta - 0.5 + z)], & 0 \leq z < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{(1+z)^2}{2} & -1 < z < 0 \\ 1 - \frac{(1-z)^2}{2}, & 0 \leq z < 1 \end{cases}$$

Logo

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 + z, & -1 < z < 0 \\ 1 - z, & 0 \leq z < 1 \end{cases}$$

1.18 Questão 35

a)

$$P(X_i^2 \leq y) = P(X_i \leq \sqrt{y}) = \int\limits_0^{\sqrt{y}} \frac{t}{\theta^2} e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}} dt$$

$$= \int\limits_0^{y} \frac{1}{2\theta^2} e^{-\frac{\mu}{2\theta^2}} du = F_Y(y) : Y \sim Exp\bigg(\frac{1}{2\theta^2}\bigg)$$

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = \bigg(\frac{1}{2\theta^2}\bigg)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{2\theta^2}}, \forall y_i > 0, i = 1, \dots n$$

b)

$$P(U \leq u) = P(Min(\boldsymbol{X}) \leq u)) = 1 - P(\boldsymbol{X} > u)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > u) = 1 - [P(X_i > u)]^n$$

$$= 1 - \bigg[\int\limits_u^{\infty} \frac{x}{\theta^2} exp\bigg(-\frac{x^2}{2\theta^2}\bigg) dx\bigg]^n = 1 - \bigg[\int\limits_{u^2}^{\infty} \frac{1}{2\theta^2} exp\bigg(-\frac{t}{2\theta^2}\bigg) dt\bigg]^n$$

$$= 1 - \bigg(exp\bigg\{-\frac{\mu^2}{2\theta^2}\bigg\}\bigg)^n = 1 - exp\bigg\{-\frac{n\mu^2}{2\theta^2}\bigg\} \Rightarrow f_U(u) = \begin{cases} \frac{nu}{1\theta^2} e^{-\frac{nu}{2\theta^2}}, & u \geq 0 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

c)

$$P(Z \leq z) = P(X \leq zX_2) = \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{\frac{t}{z}}^{\infty} f_{X,Y}(s,t) dsdt$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{\frac{t}{z}}^{\infty} \frac{st}{\theta^4} exp\left\{ - \frac{s^2 + t^2}{2\theta^2} \right\} dsdt = \frac{z^2}{1 + z^2}, z \geq 0$$

1.19 Questão 36

a)

$$P(min(\boldsymbol{X}) \leq y) = 1 - P(min(\boldsymbol{X}) \geq y)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{\alpha_i y} dt = 1 - e^{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y} dt$$

$$\therefore Y \sim exp(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)$$