Exercícios Inferência Matemática

Barry R. James - Probabilidade: um curso em nível intermediário

Capítulo 1 e Capítulo 2

Sumário

Capítulo 1

Páginas 26 - 32

1.1 Questão 1

(a) $\equiv (ii)$

(b) $\equiv (iii)$

(c) $\equiv (iv)$

(d) $\equiv (i)$

1.2 Questão 2

$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$
Se os subconjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_n \subset B$ são disjuntos, então:
$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$ (σ-Aditividade)
Podemos construir B de tal forma que:

$$B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$$

Podemos também escrever os subconjuntos A_n de tal forma que eles sejam disjuntos:

$$B_n = A_n - \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m \Rightarrow B_n \subset A_n, \quad n > 1$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

$\therefore$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

1.3 Questão 3

(a) Note que:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c$$

Então:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)$$

(b)

$$P(A_k) \geq 1 - \varepsilon$$

‘

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \geq \sum_{i=1}^{n} (1-\varepsilon) = n - n\varepsilon$$

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \geq P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k^c) \geq P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^c$$

$$n - \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \geq 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{n} A_k\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leq -1 + n + P\left(\bigcap_{n=1}^{n} A_k\right)$$

$$n - n\varepsilon \leq -1 + n + P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

$$1 - n\varepsilon \leq P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

(c)

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c)$$

Sabemos que

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{n} P(A_k)$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{n} A_n^c\right) \leq \sum_{n=1}^{n} P(A_n^c)$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \leq \sum_{n=1}^{n} P(A_n^c)$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{n} P(A_n^c)$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c)$$

1.4 Questão 4

a)

$$P(A_n) = 0$$

Sabemos que:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 0$$

Note que por hipótese $\bigcup_{n=1}^{n} A_n \geq 0$ pois se tratam de eventos aleatórios de Ω. Então:

$$0 \geq P\left(\bigcup_{n=1}^{n} A_n\right) \leq 0 \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{n} A_n\right) = 0$$

b)

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \qquad (*)$$

Note que pelo teorema anterior:

$$1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \leq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}(1 - P(A_n)) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}(1-1) = 1$$

$$\therefore 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \leq 1 \underset{(*)}{\Rightarrow} P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq 1$$

Porém essa expressão é limitada superiormente pois $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \Omega$ e $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \Omega = 1$

Logo:

$$1 \geq P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq 1$$

$$\therefore P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$$

1.5 Questão 5

É fácil ver que $P(A_n) \longrightarrow 1 \Leftrightarrow A_n = \Omega$. Além disso, sabemos que $P(B \cap \Omega) = B, \forall B \subseteq \Omega$.
Então, $P(A_n \cap B_n) \to p$ quando $B_n \to p$

1.6 Questão 6

a) Para provarmos que $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ é σ-algebra de Ω, basta mostrar que essa intersecção satisfaz as 3 propriedades de uma σ-algebra.

- $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} \neq \emptyset$ pois por definição $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são não vazios.
- $(\mathscr{A} \cap \mathscr{B})^c = \mathscr{A}^c \cup \mathscr{B}^c$. Por hipótese, $\mathscr{A}^c$ e $\mathscr{B}^c$ pertencem ao subconjunto de partes de Ω e pela propriedade 3 a união desses dois elementos também pertence ao subconjunto de partes de Ω.
-

b) Sejam A_n σ-algebras contendo $\mathscr{C}$. Entao $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n$ é uma σ-algebra minimal que contem $\mathscr{C}$.

<u>Sol</u>:

Por hipotese, tem-se que:

$\mathscr{A}_n, n = 1, 2, \ldots,$ e σ-algebra contendo $\mathscr{C}$.

Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n \subset \mathscr{A}$ para algum n, entao $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n$ contem $\mathscr{C}$. Entao basta mostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n$ é σ-algebra.

De fato:
Temos que $\mathscr{C} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n$, então (i) e satisfeito.
Por outro lado,
(ii) Se $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n$ entao $A \in \mathscr{A}_n, \forall n$. Sendo $\mathscr{A}_n$ σ-algebra, temos que:

$A^c \in \mathscr{A}_n, \forall n$
Dai, $A^c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n$
(iii) Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos de $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n$.

Então $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}, \forall n = 1, \ldots$
Daí $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}_n, \forall n = 1, 2, \ldots$
Assim, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n$

1.7 Questão 7

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = A, A = \lim_{n\to\infty} A_n$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$$

Seja:

a) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$
Defina

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} \right)}_{B_n}$$

$$B_1 \supset B_2 \ldots \supset B_n \supset \ldots \supset \bigcap_{i=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) = \limsup_{n\to\infty} A_n = A,$$

Então, pela continuidade da probabilidade, tem-se que:

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(A)$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) = P(A) \qquad (1)$$

Por outro lado,

$$A_n \subset \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$$

Assim,

$$P(A_n) \leq P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) \overset{(1)}{=} P(A)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(A) \qquad (2)$$

b) Se $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$,
Então

$$\lim_{n\to\infty} A_n \geq P(A) \qquad (3)$$

A prova está completa a partir de (2) e (3)

1.8 Questão 8

$$\Omega : \Bigg\{ \omega = d_1, d_2) : d_1, d_2 \in \{1,2,3,4,5,6\} \Bigg\}$$

Vitória 1 : $V_1 = \Bigg\{ (d_1, d_2) : d_1 + d_2 \in \{7, 11\} \Bigg\}$

Derrota 1 : $D_1 = \Bigg\{ (d_1, d_2) : d_1 + d_2 \in \{2, 3, 12\} \Bigg\}$

Continuação: $C = \Bigg\{ 4, 5, 6, 8, 9, 10 \Bigg\}$

A partir daqui, a probabilidade de vitória está condicionada ao valor obtido em C, caso o jogador obtenha o mesmo resultado em dois lançamentos consecutivos ele ganha, caso contrário, ele perde. Note que o jogo continua até o jogador ganhar ou perder, podendo ter potencialmente um numero elevado de jogadas de dados, então, é interessante incorporamos o final do jogo na medida de probabilidade.

Podemos considerar que a vitória se dá quando o jogador consegue atingir a condição de vitória antes da condição de derrota, que é probabilisticamente análogo considerar que a foi alcançada a vitória ou a derrota.

Utilizando o teorema de Bayes:

$$P\Bigg(\{s = x\} | \{s = x\} \cup \{s = 7\} \Bigg) = \frac{P\Bigg(\{s = x\} \cap \Bigg\{ \{s = x\} \cup \{s = 7\} \Bigg\} \Bigg)}{P\Bigg(\Bigg\{ \{s = x\} \cup \{s = 7\} \Bigg\} \Bigg)}$$

$$\therefore P\Bigg(\{s = x\} | \{s = x\} \cup \{s = 7\} \Bigg) = \frac{P\Bigg(\{s = x\} \Bigg)}{P\Bigg(\Bigg\{ \{s = x\} \cup \{s = 7\} \Bigg\} \Bigg)}$$

Sendo assim, tomando $s = d_1 + d_2$ o evento em que a soma dos números nas faces superiores dados leva a vitória, temos que a probabilidade de vitória dado que a $s \in C$ pode ser expressa por:

$\overbrace{P(\{s = 4\})}^{\text{Primeiro lançamento}} \cdot P(\{s = 7\} | \{s = 4\} \cup \{s = 7\})) = \frac{3}{36} \cdot \frac{\frac{3}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{3}{36} \cdot \frac{3}{9}$

$P(\{s = 5\}) \cdot P(\{s = 5\} | \{s = 5\} \cup \{s = 7\}) = \frac{4}{36} \cdot \frac{\frac{4}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{4}{36} \cdot \frac{4}{10}$

$P(\{s = 6\}) \cdot P(\{s = 6\} | \{s = 6\} \cup \{s = 7\}) = \frac{5}{36} \cdot \frac{\frac{5}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{5}{36} \cdot \frac{5}{11}$

$P(\{s = 8\}) \cdot P(\{s = 8\} | \{s = 8\} \cup \{s = 7\}) = \frac{5}{36} \cdot \frac{\frac{5}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{5}{36} \cdot \frac{5}{11}$

$P(\{s = 9\}) \cdot P(\{s = 9\} | \{s = 8\} \cup \{s = 7\}) = \frac{4}{36} \cdot \frac{\frac{4}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{4}{36} \cdot \frac{4}{10}$

$P(\{s = 10\}) \cdot P(\{s = 10\} | \{s = 10\} \cup \{s = 7\}) = \frac{3}{36} \cdot \frac{\frac{3}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{3}{36} \cdot \frac{3}{9}$

Logo, a probabilidade de vitória é dada por:

$$P(\{G\}) = \frac{8}{36} + 2\Bigg(\frac{3}{36} \cdot \frac{3}{9} + \frac{4}{36} \cdot \frac{4}{10} + \frac{5}{36} \cdot \frac{5}{11} \Bigg) = 0.4929293$$

Analogamente, se considerarmos a probabilidade de derrota, temos:

$$P\Bigg(\{s=7\}|\{s=x\}\cup\{s=7\}\Bigg)=\frac{P\Bigg(\{s=7\}\Bigg)}{P\Bigg(\Bigg\{\{s=x\}\cup\{s=7\}\Bigg\}\Bigg)}$$

endo assim, tomando $s=d_1+d_2$ o evento em que a soma dos números nas faces superiores dados leva a derrota, temos que a probabilidade de derrota dado que a $s\in C$ pode ser expressa por:

$P(\{s=4\})\cdot P(\{s=7\}|\{s=4\}\cup\{s=7\})=\frac{3}{36}\cdot\frac{\frac{6}{36}}{\frac{9}{36}}=\frac{3}{36}\cdot\frac{6}{9}$
$P(\{s=5\})\cdot P(\{s=7\}|\{s=5\}\cup\{s=7\})=\frac{4}{36}\cdot\frac{\frac{6}{36}}{\frac{10}{36}}=\frac{4}{36}\cdot\frac{6}{10}$
$P(\{s=6\})\cdot P(\{s=7\}|\{s=6\}\cup\{s=7\})=\frac{5}{36}\cdot\frac{\frac{6}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{5}{36}\cdot\frac{6}{11}$
$P(\{s=8\})\cdot P(\{s=7\}|\{s=8\}\cup\{s=7\})=\frac{5}{36}\cdot\frac{\frac{6}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{5}{36}\cdot\frac{6}{11}$
$P(\{s=9\})\cdot P(\{s=7\}|\{s=8\}\cup\{s=7\})=\frac{4}{36}\cdot\frac{\frac{6}{36}}{\frac{10}{36}}=\frac{4}{36}\cdot\frac{6}{10}$
$P(\{s=10\})\cdot P(\{s=7\}|\{s=10\}\cup\{s=7\})=\frac{3}{36}\cdot\frac{\frac{6}{36}}{\frac{9}{36}}=\frac{3}{36}\cdot\frac{6}{9}$

Logo, a probabilidade de derrota é dada por:

$$P(\{G\})=\frac{4}{36}+2\Bigg(\frac{3}{36}\cdot\frac{6}{9}+\frac{4}{36}\cdot\frac{6}{10}+\frac{5}{36}\cdot\frac{6}{11}\Bigg)=0.5146605$$

1.9 Questão 9

Podemos fixar a sorvetes do sabor A e b sorvetes do sabor B de acordo com as preferências, sendo assim, resta distribuir $(n-a)$ e $(n-b)$ sorvetes entre as $2n-a-b$ pessoas restantes, que são indiferentes ao sabor. Além disso, existem $\binom{2n}{n}$ maneiras de distribuir os 2n entre os indivíduos.

Logo, a probabilidade do evento de interesse ocorrer é:

$$P(A) = \frac{\binom{2n-a-b}{n-a}}{\binom{2n}{n}}$$

1.10 Questão 10

Seja x o número de retiradas até obter uma carta de número par do conjunto de cartas enumeradas de 1 a 10, um modelo probabilístico possível é:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{5}{10}, & x = 1 \\ \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9}, & x = 2 \\ \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{8}, & x = 3 \\ \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{7}, & x = 4 \\ \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{6}, & x = 5 \\ \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{5}, & x = 6 \end{cases}$$

=

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 1 \\ \frac{5}{18}, & x = 2 \\ \frac{5}{36}, & x = 3 \\ \frac{5}{84}, & x = 4 \\ \frac{5}{252}, & x = 5 \\ \frac{5}{1260}, & x = 6 \end{cases}$$

1.11 Questão 11

a)

$$\Omega = \Big\{(x, y) : x, y \in [0, 1]\Big\}$$

O espaço de probabilidade pode ser definido por:

$$(\Omega, \mathscr{B}^2, p_x)$$

Onde $\mathscr{B}^2$ é a sigma algebra de borel do quadrado definido em $\mathbb{R}^2$ e p_x é a medida de probabilide de Lebesgue.

b)

$$\Omega = \Big\{\omega = \{r_1, r_2, \ldots\} : r_i \in \{A1, A2, \ldots, K4\}, i = 1, 2 \ldots,\Big\}$$

$$P(r = k) = \frac{4}{52}\left(\frac{48}{52}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

c)

$$\Omega = \Big\{(r_1, r_2, \ldots, r_15) : r_i \in \{p, p, p, p, p, p, p, p, p, v, v, v, v, v, b\}, i = 1, \ldots, 15\Big\}$$

$$P(p, v, b) = \frac{15!}{p! \cdot v! \cdot b!}\left(\frac{9}{15}\right)^p\left(\frac{5}{15}\right)^v\left(\frac{1}{15}\right)^b$$

d)

$$\Omega = \Big\{(r_1, r_2, \ldots, r_{15}) : r_i \in \{p, p, p, p, p, p, p, p, p, v, v, v, v, v, b\}, i = 1, \ldots, 15\Big\}$$

$$P(p, v, b) = \frac{\binom{9}{p}\binom{5}{v}\binom{1}{b}}{\binom{15}{p+v+b}} = 1$$

1.12 Questão 12

a)

$$P_X(k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{48}{4-k}}{\binom{52}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

b)

$$P_X(k) = \binom{4}{k}\left(\frac{4}{52}\right)^k\left(\frac{48}{52}\right)^{4-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

c) É fácil ver que é mais fácil obter 4 reis no caso com reposição pois a probabilidade de retirada do rei é sempre maior ou igual do que no caso sem reposição.

1.13 Questão 13

a) Sejam A ,B e C eventos de Ω.
Podemos definir a união dos eventos como, tomando $D = B \cup C$:

$$A \cup D = (A - D) \cup (A \cap D) \cup (D - A)$$

Aplicando probabilidade, temos:

$$P(A \cup D) = P(A - D) + P(A \cap D) + P(D - A)$$

$$P(A \cup D) = P(A) - P(A \cap D) + P(A \cap D) + P(D) - P(A \cap D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D)$$

Substituindo

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C))$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap (B \cup C))$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)]$$

$$\therefore P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)]$$

b)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}\right)$$

c) i) Primeira desigualdade :

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} P(A_i \cap A_j) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} P(A_i \cap A_j) \leq \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}\right)$$

É fácil ver que as duas equações são iguais para os casos onde $n \leq 2$e todas as intersecções $(n+2)$ á $(n+2)$ são vazias. Caso contrário, a primeira equação é sempre menor.

Segunda desigualdade:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i\leq j\leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leq i\leq j\leq k\leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_k\leq n} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i\leq j\leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leq i\leq j\leq k\leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

Utilizando uma argumentação semelhante ao item anterior, podemos notar que a segunda equação contabiliza apenas intersecções até 3 elementos, entretanto, se observarmos o primeiro termo da primeira equação, $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+1}$, ela apresenta sinal negativo para valores de $k > 4$

Então, levando em consideração os fatos de que $\sum_{k=4}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_k\leq n} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}\right) \leq 0$ e que as duas equações são iguais para casos onde $k \leq 3$ ou as intersecções $(n+3)$ á $(n+3)$ são vazias , a desigualdade está provada.

ii)

1.14 Questão 14

a) Tendo em vista que o evento A_i denota acerta acertar a i-ésima frase, temos que a probabilidade de acertar ao menos uma se da pela união de todos os eventos.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = \sum_{k=1}^{4}(-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq 4} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}\right)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = 4 \cdot \frac{1}{4} - \frac{\binom{4}{2}}{4 \cdot 3} + \frac{\binom{4}{3}}{4 \cdot 3 \cdot 2} - \frac{\binom{4}{4}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{15}{24} = 0.625$$

Os termos da equação acima denotam, respectivamente:

- A soma das probabilidades de se acertar todas as frases.
- A probabilidade de se acertar quaisquer duas frases.
- A probabilidade de se acertar quaisquer três fases.
- A probabilidade de se acertar todas as frases.

b) Generalizando a equação acima, temos:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = n \cdot \frac{1}{n} - \frac{\binom{n}{2}}{\frac{n!}{(n-2)!}} + \frac{\binom{n}{3}}{\frac{n!}{(n-3)!}} - \ldots + \frac{\binom{n}{n}}{\frac{n!}{(n-n)!}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{(i-1)}}{i!}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{(i-1)}}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)}}{i!} = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i}}{i!} = 1 - e^{-1} = 0.6321206$$

1.15 Questão 15

A resposta é a mesma pois os dois experimentos são análogos. (*Matching problem*)

1.16 Questão 16

a)

$$P(B|\cup A_n) = \frac{P(B \cap (\cup A_n))}{P(\cup A_n)} = \frac{\overbrace{P(\cup(B \cap A_n))}^{A_n\ disjuntos}}{P(\cup A_n)} = \frac{\sum P(B \cap A_n)}{P(\cup A_n)}$$

Note que:

$$P(B|A_n) = \frac{P(B \cap A_n)}{P(A_n)} \geq c \Rightarrow P(B \cap A_n) \geq P(A_n) \cdot c$$

Então:

$$\frac{\sum P(B \cap A_n)}{P(\cup A_n)} \geq \frac{c\cancel{\sum P(A_n)}}{\cancel{\sum P(A_n)}} = c$$

b) Supondo $P(B|A_n) = c$

$$P(B|A_n) = \frac{P(B \cap A_n)}{P(A_n)} = c \Rightarrow P(B \cap A_n) = P(A_n) \cdot c$$

$$P(B|\cup A_n) = \frac{\sum P(B \cap A_n)}{\sum P(A_n)} = \frac{c\cancel{\sum P(A_n)}}{\cancel{\sum P(A_n)}} = c$$

c) Sequência decrescente de eventos.

$$P(A_{n+1}|A_n) = \frac{P(A_{n+1} \cap A_n)}{P(A_n)} = \frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow P(A_{n+1}) \leq \frac{P(A_n)}{2}$$

Note que:

$$\frac{P(A_1)}{2} \geq P(A_2)$$

$$\frac{P(A_2)}{2} \geq P(A_3) \Rightarrow \frac{P(A_3)}{2^2} \geq P(A_1)$$

$$\vdots$$

$$P(A_n) \geq \frac{P(A_1)}{2^{n+1}}$$

Logo:

$$P(A_n) \geq \frac{P(A_1)}{2^{n+1}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

d) Assim como nos itens anteriores,

$$P(B|\cup A_n) = \frac{\sum P(B \cap A_n)}{P(\cup A_n)} = \frac{\sum P(C \cap A_n)}{P(\cup A_n)} = \frac{P(\cup(C \cap A))}{P(\cup A_n)} = P(C|\cup A_n)$$

e) Note que se $\cup A_n = \Omega$ então se $B \in \Omega \Rightarrow B \cap \cup A_n = B$

$$B \cap C = (\cup A_n) \cap (B \cap C) = \overbrace{\cup(A_n \cap B \cap C)}^{A_n \ disjuntos}$$

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\sum P(A_n \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{\sum \cancel{P(C)} P(A_n|C)P(B|A_n \cap C)}{\cancel{P(C)}}$$

$$\therefore P(B|C) = \sum P(A_n|C)P(B|A_n \cap C)$$

1.17 Questão 17

D_1: {Chover hoje.}
D_2: {Chover amanhã.}
D_3: {Chover depois de amanhã.}

$$P(D_1) = 1$$
$$P(D_2) = 0.7$$
$$P(D_2^c) = 0.3$$
$$P(D_3|D_2) = 0.7$$
$$P(D_3|D_2^c) = 0.4$$
$$P(D_3) = P(D_3 \cap D_2) + P(D_3 \cap D_2^c) = P(D_3|D_2) \cdot P(D_2) + P(D_3|D_2^c) \cdot P(D_2^c) = 0.7 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.3 = 0.61$$

1.18 Questão 18

A: { Evento onde o números observados são diferentes }

a) E_1: {Ao menos um dos números ser 6}

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{1}{3}$$

b) E_2: {A soma dos números é 8}

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{2}{15}$$

1.19 Questão 19

$$\Omega = \{SR\}U\{SR^c\}$$
$$P(SR) = p$$

$$P(C) = P(C \cap SR) + P(C \cap SR^c)$$
$$P(C) = p + (1-p) \cdot \frac{1}{m}$$
$$P(SR|C) = \frac{P(SR \cap C)}{P(C)} = \frac{p}{p + \frac{1-p}{m}}$$

i)

$$\lim_{m\to\infty} \frac{P(SR \cap C)}{P(C)} = \frac{p}{p + \frac{1-p}{m}} = 1$$

ii)

$$\lim_{p\to 0} \frac{P(SR \cap C)}{P(C)} = \frac{p}{p + \frac{1-p}{m}} = 0$$

1.20 Questão 20

C :{Chove em novembro}
F :{Fluminense ganha}

$$P(C) = 0.3$$
$$P(F|C) = 0.4$$
$$P(F|C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|F)P(F)}{P(C)}$$
$$\frac{P(C|F)P(F)}{P(C)} = P(F|C)$$
$$P(C|F) = \frac{P(F|C)P(C)}{P(F)} = \frac{0.4 \cdot 0.3}{P(F)}$$
$$P(F) = P(F|C)P(C) + P(F|C^c)P(C^c) = 0.4 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.7$$
$$\therefore P(C|F) = \frac{P(F|C)P(C)}{P(F)} = \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.4 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.7} = 0.2222$$

1.21 Questão 21

A :{Pedro escreve a carta}
B :{Correio não perde a carta}
C :{Carteiro entrega a carta}
M : {Marina não recebe}

$$P(A) = 0.8$$

$$P(B) = 0.9$$

$$P(C) = 0.9$$

$$P(M) = 0.2 + 0.8 \cdot 0.1 + 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 0.352$$

$$P\left(A^c | M\right) = \frac{P(A^c \cap M)}{P(M)} = \frac{0.2}{0.352} \approx 0.5681$$

1.22 Questão 22

a) E_1 :{Não ocorre nenhum dos A_k }

$$P(A_k) = p_k \Rightarrow P(A_K^c) = 1 - p_k$$

$$\therefore P(E_1) = P\left(\bigcap A_k^c\right) = \prod_{k=1}^{n}(1 - p_k)$$

b) E_2 :{Ocorre pelo menos um dos A_k }

$$P(E_2) = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - p_k)$$

c) E_3 :{Ocorre qualquer um dos A_k uma vez}

$$P(E_3) = p_1 \cdot \prod_{k=2}^{n}(1 - p_k) + p_2 \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq 2}}^{n}(1 - p_k) + \ldots + p_n \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{n}(1 - p_k)$$

$$\therefore P(E_3) = \sum_{i=1}^{n}\left[p_i \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n}(1 - p_k)\right]$$

d) E_4 :{Ocorrem qualquer dois dos A_k uma vez}

$$P(E_4) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left[p_i \cdot p_j \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{n}(1 - p_k)\right]$$

e) E_5 :{Ocorrem todos dos A_k }

$$P(E_5) = \prod_{k=1}^{n} p_k$$

f) E_6:{Ocorrem no máximo $n - 1$ dos A_k}
E_6^c:{Ocorrem no mínimo n dos A_k, ou seja, todos os A_k}

$$P(E_6) = 1 - \prod_{k=1}^{n} p_k$$

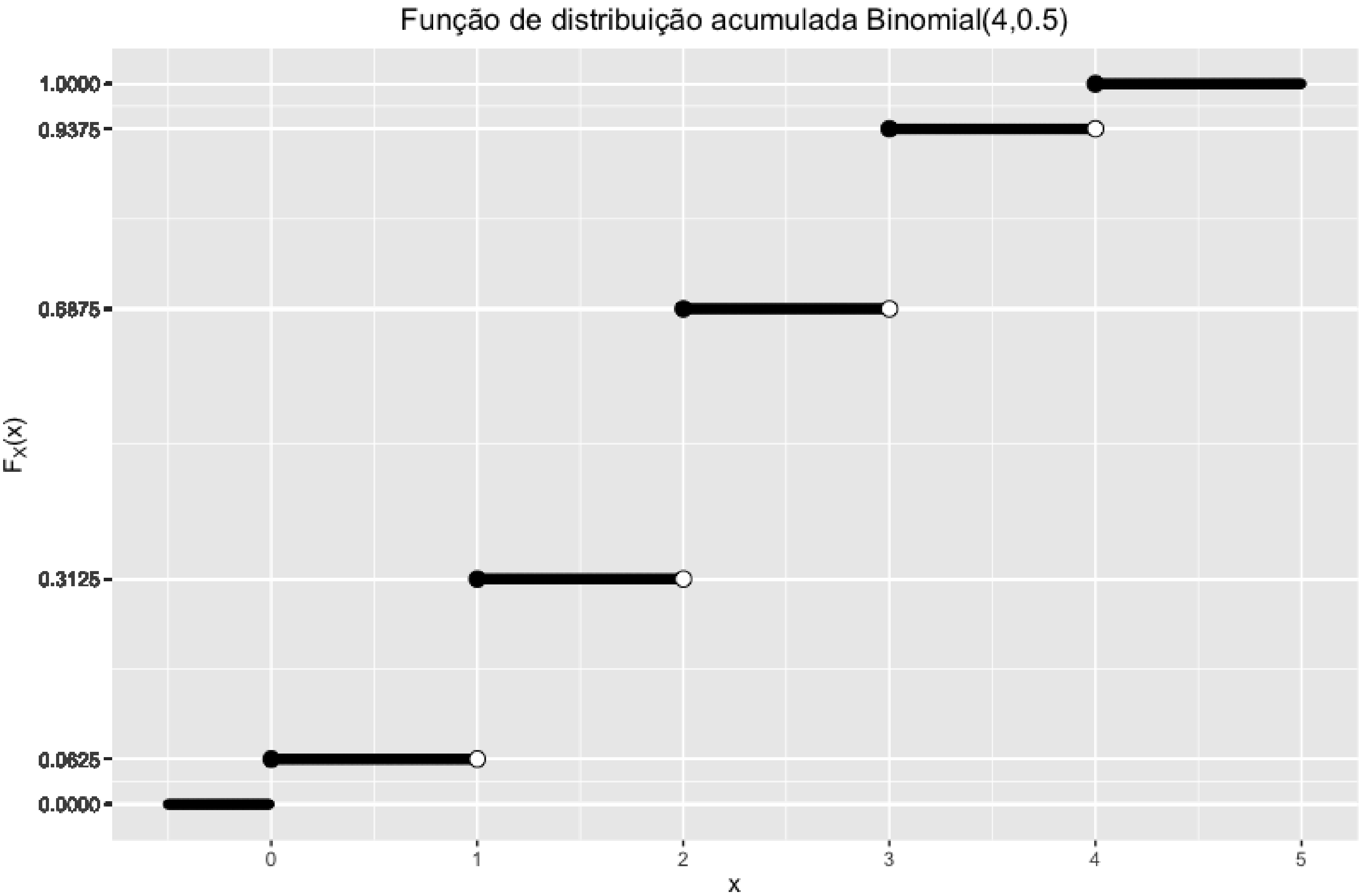
1.23 Questão 23

1.24 Questão 24

Capítulo 2

Páginas 86-89

2.1 Questão 1



2.2 Questão 2

2.3 Questão 3

2.4 Questão 4

2.5 Questão 5

2.6 Questão 6

2.7 Questão 7

2.8 Questão 8

2.9 Questão 9

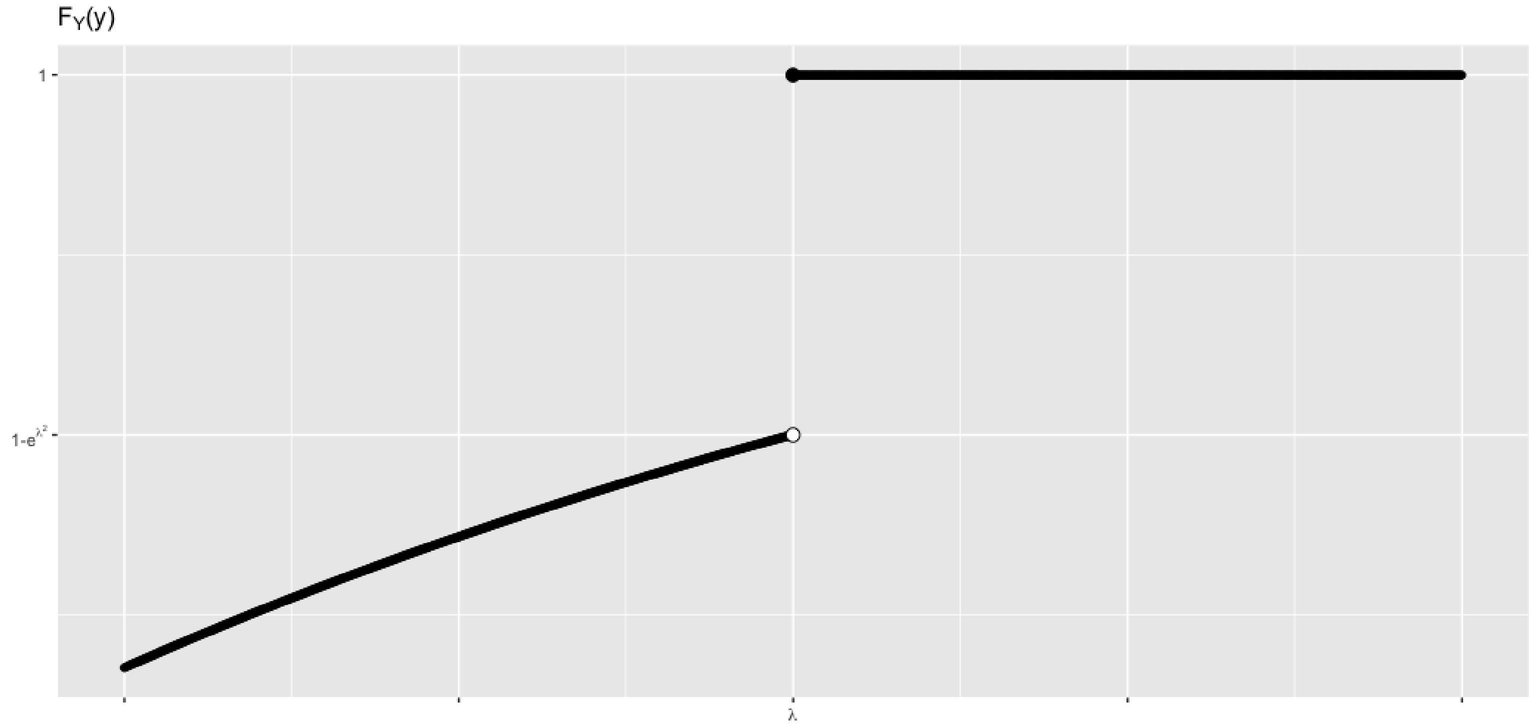
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, x > 0 \\ 0 \qquad , x < 0 \end{cases}$$

$$Y = max(X, c) = \begin{cases} X, X > c \\ c, X \leq c \end{cases}$$

$$P(X = Y \leq y, X > c) + P(Y = c, Y \leq y, X \leq c)$$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{x}{(1+x)}, x > c \end{cases}$$

2.10 Questão 10



,

$$Y = \begin{cases} 1, X > 1 \\ X, X < 1 \end{cases}$$

se y<0 então FY = 0 pois X só assume valores no intervalo [0,1]
Se y< X , então $F_Y(x^-) = F_z : Z \sim U[0, x]$
se x<y<1
F_Y

$$F_y = \begin{cases} 0, y < 0 \\ x/2, y < x < 1 \\ 1, x > 1 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} X, X > 2 \\ 2.X < 2 \end{cases}$$

$y < 0, F_y = 0$
$0 < y < 2$,Fy = 0
y>=2 , FY = 1- exp(-2y)

$$F_y = \begin{cases} 0, y < 0 \\ 1 - e^{-2y}, y \geq 2 \end{cases}$$

$$F_{ac} = \begin{cases} 0, y < 2 \\ e^{-4} - e^{-2y}, y \geq 2 \end{cases}$$

$$F_d = \begin{cases} 0, y < 2 \\ 1 - e^{-4}, y \geq 2 \end{cases}$$