Processos

Cadeias de Markov a tempo discreto com espaço de estados enumerável discreto
Seja $\{X_n, \geq 0\}$, processo estocástico definido sob $(\Omega, \mathscr{F}, P)$
$X_n : \Omega \longrightarrow S$
$\omega \longrightarrow X_n(w) = i$
$S = 0, 1, 2, ...$ espaço de estados
Neste caso,
$X_n(w) = i$: o processo está no estado i, no tempo n (passo n).
Definição Cadeia de Markov
Um processo $X_n, n \geq 0$ com espaço de destados S=0,1,2,..., é uma cadeia de Markov, se

$$\forall i_0, i_1, ..., i_{n-1}, i, j$$

$$P(\underbrace{X_{n+1} = j}_{\text{passado}} | X_0 = i_0, X_1 = 0_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1}) = P(X_{n-1} = J | X_n = i)$$

Obs:
Quando $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$, as probabilidades de transicao independem do tempo n, diz-se que a cadeia de Markov é **Homogênea**.

Notação:

$P = (P_{ij})$: Matriz de transição de um passo da Cadeia de Markov.
$P_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$
A matriz P, é estocástica, pois $P_{ij} \geq 0$ e $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1$
$(X_0, X_1, X_2, ...)$ t.q $P_{ij} = (X_1 = j | X_0 = i) \iff P(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n)$

Exemplo 1
Supona que em qualquer tempo $n \geq 0$ passamos a associar uma v.a. aos estados chuva e seco, da seguinte forma:

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{se chove no tempo n} \\ 1, & \text{se não chove no tempo n} \end{cases}$$

Se hoje chove, amanha chovera com probabilidade 0.4 e se hoje não chove, amanha chovera com probabilidade 0.3. É $X_n, n \geq 0$ uma Cadeia de Markov? Determine P.

<u>Solução:</u>

Temos $X_n : \Omega \longrightarrow \{0,1\} = S$,

$X_n, n \geq 0$ é um processo estocástico com S={0,1}

$P(X_1 = 0|X_0 = 0) = 0.4 = P_{00}$

$P(X_1 = 0|X_0 = 1) = 0.3 = P_{10}$

$P(X_1 = 1|X_0 = 0) = 1 - P(X_1 = 0|X_0 = 0) = P_{01} = 0.6$

$P(X_1 = 1|X_0 = 1) = 1 - P(X_1 = 1|X_0 = 1) = P_{11} = 0.7$

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

Seja $\overline{X_n, n \geq 0}$ um processo em que $X_i's$ idd e S={0,1,....}, sendo $P(X_n = j) = P_j \geq 0$ t.q.
$\sum_{j=0}^{\infty} P_i = 1$. Mostre que $\{Xn, n \geq 0\}$ é Cadeia de Makov e determine P.

Sol:

Temos que:

$P(X_{n+1} = j|X_0 = i_0, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) \overbrace{=}^{indep.} P(X_{n+1} = j)(*)$
$P(X_{n+1} = j|X_n = j) = P(X_{n+1} = j(**)$
Então, de (*) e (**) a propriedade de Markov é satusfeita.
Além disso,

i, fixo : $P_{ij} = P(X_{n+1} = j) \overbrace{=}^{id.dist.} = P$

Exemplo 3: (do Jogador)
Suponha que:

$$\text{Jogador em cada jogada} = \begin{cases} \text{Ganha \$1,} & \text{Com prob p} \\ \text{Perde \$1,} & \text{Com prob 1-p} \end{cases}$$

Sol:
Defina,

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{Ganha \$1 na i-ésima jogada} \\ -1, & \text{Perde \$1 na i-ésima jogada} \end{cases}$$

$X_i's$ sao independentes com $P(x_i = 1) = p$
$P(X_i = -1) = q$ Além disso, seja
$S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$: Fortuna do jogar após a n-ésima jogada. Então $\{S_n, n \geq 0\}$ é um processo estocástico com S={0,1,...,N}
Como,
$P(S_{n+1}|S_n = i) = P(\sum_{i=0}^{n} X_i + X_{n+1} = j|S_n = i)$

$$= P(X_{n+1} = j - i|S_n = i) \overbrace{=}^{indep.} P(X_{n+1} = j - i)(*)$$

$$P(S_{n+1} = j|S_0 = i_0, ..., S_{n-1} = i_{n-1}, S_n = i) = P(X_{n+1} = j - i)(**)$$

De (*) e (**),

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j - i) = \begin{cases} p, & j - i = 1 \\ q, & j - i = -1 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{ij} = \begin{cases} p, & j = i + 1 \\ q, & j = i - 1 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

e $P_{00} = 1, PNN = 1$

Cadeia de Markov

Seja $\{X_n, n \geq 0\}$ uma C.M. com matriz de transição $P = (P_{ij})i, j \in S$, S é o espaço de estados da cadeia,isto é:

P_{ij} : probabilidade da cadeia pssar de i para j em um passo.
P: Matriz de transição de um passo da cadeia.

Objetivo:

Determinar a distribuição da cadeia, $(P(X_n = 0), P(X_n = 1), ...)$, ? com n um tempo qualquer

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \left| \begin{array}{cc} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{l} , 0 = \text{chuva} \\ , 1 = \text{seco} \end{array}$$

Equações de Chapman-Kolmogorov

Defina:
$P_{ij}^n = P(X_n = j|X_0 = i), n \geq 1$
$P_{ij}?^n$ é a probabilidade de transição de n passos da cadeia.
$P^{(n)} = (P_{ij}^n)\ i, j \in S$: Matriz de transição de n passos.
Note que $P^{(1)} = P$
Para calcular P_{ij}^n, primeiro lembre o seguinte:
Se X_1, X_2, Y v.a.'s definidas no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, então:
$\mathscr{F}_1 = \sigma(X_1), \mathscr{F}_2 = \sigma(X_1, X_2)$
$E(Y|\mathscr{F}_1) \overbrace{=}^{Prop.6} E[E(Y|\mathscr{F}_2)|\mathscr{F}_1]$
$\Rightarrow E(Y|X_1)(\omega) = E(Y|X_1 = x_1) =$
$E[\underbrace{E(Y|X_1 = x_1, X_2)}_{\Phi(X_2)}|X_1 = x_1] =$
$\Sigma E(Y|X_1 = x_1, X_2 = x_2) \cdot P(X_2 = x_2|X_1 = x_1)$

Se $Y = I_A$

$E(I_A, X_1 = x_1) = \sum_{x_2} E(I_A|X_1 = x_1, X_2 = x_2)P(X_2 = x_2|X_1 = x_1)$ ou
$P(A|X_1 = x_1) = \sum_{x_2} P(A|X_1 = x_1, X_2 = x_2)P(X_2 = x_2|X_1 = x_1)$

Agora,

$$P_{ij}^{n+m} = P(X_{n+m} = j | x_0 = i)\ ,\ n, m \geq 1\ =$$
$$\sum_{k \in S}^{\infty} P(X_{n+m} = j | x_0 = i, x_n = k) \cdot P(x_n = k | x_0 = i)$$
$$= \sum^{\infty} P_{kj}^{m} \cdot P_{ik}^{n} \iff P_{ij}^{n+m} = \underbrace{\sum_{k \in S} P_{ik}^{n} \cdot P_{kj}^{m}}_{\text{Equação de Chapman-Kolmogorov}}$$

Sendo P_{ij}^{n+m} a entrada da i,j-ésima matriz $P^{(n)} \cdot P^{(m)} = P^{(n+m)}$, ou seja:

$P^{(2)} = P^{(1)} \cdot P^{(1)} = P \cdot P = P^2$

$P^{(3)} = P^{(2)} \cdot P^{(1)} = P^2 \cdot P = P^3$

$P^{(n)} = P \underbrace{\cdot \ldots \cdot}_{n-vezes} P = P^n$

Assim, P_{ij}^{n} é a i,j-ésima entrada de P^n

Exemplo:
Considere uma Cadeia de markov com S=0,1,2 e a matriz de transição

$$\mathrm{P} = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Calcule P^2
Sol:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Em 2 dias a pessoa não tem chance de ficar feliz pois $P_{i2}^2 = 0 \ \forall \ i = 0, 1, 2 \ = P(X_2 = 2|X_0 = i)$

Para deternubar a distribuicao de $X_n, n \geq 0$, utilizar $\alpha = (P(X_0 = 1), P(X_0 = 1), ...) = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ a distribuição inicial da cadeia

Pois

$$P(X_n = j) = \sum_{i \in S} P(X_n = j|X_0 = i) \underbrace{P(X_0 = 1)}_{\alpha_i}$$

$$P(X_n = j) = \sum_{i \in S} \alpha_i P_{ij}^n$$

Corresponde à

$$\alpha \cdot P^n = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n, ..) \cdot \begin{bmatrix} P_{00}^n & P_{01}^n & \dots & P_{0j}^n & \dots \\ P_{10}^n & P_{11}^n & \dots & P_{1j}^n & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \\ P_{i0}^n & P_{i1}^n & \dots & P_{ij}^n & \dots \end{bmatrix}$$

Suponha que $\alpha = (0.5, 0.3, 0.2) =$
$(P(X_0 = 0), P(X_0 = 1), (P(X_0 = 2)) =$ informação inicial.

E como:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Então:
$\alpha \cdot P^2 = (0.725, 0.275, 0) =$
$(P(X_2 = 0), P(X_2 = 1), P(X_2 = 2))$

$$\underbrace{\alpha}_{dist.inicial} \cdot P^{(n)} = \Pi^n = (P(X_n = 0), P(X_n = 1), ...,)$$

Sem considerar α, podemos calcular

$$P^{(n)} \underbrace{\longrightarrow}_{n\to\infty} \Pi = \begin{bmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^n & \dots & \\ \lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^n & & \\ \vdots & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_0 & \Pi_1 & \dots & \\ \Pi_0 & \Pi_1 & \dots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

Seja $\{X_n, n \geq 0\}$ uma Cadeia de Markov com $P^{(n)}$ matriz de transição de n passos da cadeia,

$$P^{(n)} = (P_{ij}^n)_{i,j \in S}, \text{ S é o espaço de estados}$$

<u>Conceitos</u>

1. $i, j \in S,\ i \leftrightarrow j$ (i e j se comunicam)
Se $i \rightarrow j$ (i acessa j, $\exists\ n : P_{ij}^n > 0$) e $j \rightarrow i$.

2. Seja $C \subset S$,

$$\forall\ i \in C, j \notin C, i \rightarrow j \Rightarrow C \text{ é uma classe não fechada}$$

$$\forall\ i \in C, j \notin C, \underbrace{\nexists P_{ij}^n > 0}_{P_{ij}^n = 0}\ t.q.\ i \rightarrow j \Rightarrow C \text{ é uma classe fechada}$$

3. i,j $\in C \subset S$ e $i \leftrightarrow j \Rightarrow i, j$ são da mesma classe.

4. $S = C$ com C fechada $\Rightarrow S$ é irredutível.

5. $C = /i/$ classe fechada, $i \in S \quad \Rightarrow$ i é absorvente.

6. $i \in C \subset S$, $d(i) = mdcn\ \ P_{ii}^n > 0 \geq 1 \Rightarrow d(i)$ é o per/'iodo de i/
$d(i) = 1 \Rightarrow C$ é aperiódica
$(di) \geq 2 \Rightarrow C$ é períodico com período d(i)

Exemplos:

1) Seja

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

A matriz de transição de uma Cadeia de Markov com S={0,1,2,3} $S = C$ classe fechada única (irredutível)

$d(0) = mdc4, 8, ...$

$d(0) = 4 \geq 2$

$\Rightarrow S = C$ irredutível e periódica com período 4.

2) Seja P = $\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$

A matriz de transição de uma Cadeia de Markov com S={0,1,2,3}
Temos:
C1={0,1}: não fechada, periódica com período 2
C1={2,3}: fechada, periódica com período 2

3) Para uma Cadeia de Markov com S={0,1,2,...,N}, considere:

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ \vdots & q & & \ddots & p \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Temos:

$C_1 = \{0\}$, classe absorvente e aperiódica

$C_1 = \{N\}$, classe absorvente e aperiódica

$C_1 = \{1, 2, .., N - 1\}$, classe não fechada e periódica com período 2.

Definição. (Ergodicidade)

Uma Cadeia de Markov $\{x_n, n \geq 0\}$ com $P^{(n)} = (P^n_{ij}),\ i,j\ \in S$ é ergodica se :

$$\lim_{n\to\infty} P^n_{ij} = \Pi_j\ (independente\ de\ i)$$

e

$$\sum_{j\in S} \Pi_j = 1$$

A distribuição $\Pi = (\Pi_0, \Pi_1, ...)$ é chamada de distribuição limite da cadeia:

$$P^{(n)} \to (n \to \infty) \begin{pmatrix} \Pi \\ \Pi \\ . \\ . \\ . \\ \Pi \end{pmatrix}$$

Proposição: Se $\{x_n, n \geq 0\}$ é Cadeia de Markov com S, irredutível, aperiódico e recorrent, então a cadeia é ergódica e Π satisfaz:

$$\sum_{j\in S} \Pi_j = 1$$

e

$$\Pi = \Pi \cdot P (\Pi \text{ é estacionária})$$

Exemplos

(1) Considere a Cadeia de Markov com espaço de estados S={0,1}

$$P = \begin{array}{cc} 0 & \begin{array}{ccc} 0 & \quad 0 & \qquad\quad 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} ,\ 0 = \text{chuva} \\ \quad ,1 = \text{seco} \end{array} \end{array}$$

Estude a ergodicidade da cadeia.

Temos :
$S = C$: classe fechada $\Rightarrow$ irredutível, aperiódica, e recorrente (Pois S é finito).

Então, pela proposição anterior a cadeia é ergótica e tem $\Pi = (\Pi_0, \Pi_1)$
Determinar Π:

$$\begin{cases} \Pi = \Pi \cdot P \\ \sum\limits_{j=0}^{1} \Pi_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\Pi_1, \Pi_0) = (\Pi_1, \Pi_0) \cdot P \\ \Pi_0 + \Pi_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \Pi_0 = 0.4\Pi_0 + 0.3\Pi_1 & (1) \\ \Pi_1 = 0.6\Pi_0 + 0.7\Pi_1 & (2) \\ \Pi_0 + \Pi_1 = 1 & (3) \end{cases}$$

Re-escrevendo (1) e (2)

$$\iff \begin{cases} 0.6\Pi_0 - 0.3\Pi_1 = 0 \\ 0.6\Pi_0 - 0.3\Pi_1 = 0 & (4) \\ \Pi_0 + \Pi_1 = 1 & (5) \end{cases}$$

$$0.3(5) + 4$$

$$0.9\Pi_0 = 0.3 \iff \Pi_0 = 1/3 \quad (6)$$

Substituindo (6) em (5),

$$\Pi_1 = 2/3$$

$$\Rightarrow \Pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Ao longo do tempo o cima estará 1/3 chuvoso e 2/3 seco.

(2) Para uma Cadeia de Markov com S={0,1,2,...}, considere:

$$\text{Jogador em cada jogada} = \begin{cases} \text{Ganha \$1,} & \text{Com prob p} \\ \text{Perde \$1,} & \text{Com prob q} \end{cases}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Estude a ergodicidade da cadeia.

<u>Sol:</u>

S: irredutível, aperiódica,...

analisando a recorrência:
$d(0) = inf\{1, 2, 3, 4, ...\} = 1$
Suponha que $\Pi = (\Pi_0, \Pi_1, ...)$ existe, então:

$$(\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, ...) = (\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, ...) \cdot \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

e $\sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j = 1$

$$\iff \begin{cases} \Pi_0 = q\Pi_0 + q\Pi_1 \\ \Pi_1 = p\Pi_0 + q\Pi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty} \Pi_j = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \Pi_1 = \frac{p}{q}\Pi_0 \\ \Pi_2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Pi_0. \\ . \\ . \\ \Pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i \Pi_0. \end{cases} \text{e} \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j = 1$$

Usando as equações anteriores,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^i \Pi_0 = 1$$

$$\iff \Pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^i = 1$$

$$\iff \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^i = \frac{1}{\Pi_0} \text{ é uma série geométrica } \iff p < q$$

$$\iff \frac{1}{1-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\Pi_0} \iff \Pi_0 = 1 - \frac{p}{q}$$

logo,

$\Pi = \left(1 - \frac{p}{q}, \frac{p}{q}(1-\frac{p}{q}), \frac{p^2}{q^2}(1-\frac{p}{q}), ...\right) \iff p < q$

$\Pi = (0, 0, 0, ...) \iff p = q = \frac{1}{2}$

(3) Lista:

$$P_4 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Temos:

$C_1 = \{0, 1\}$: fechada, aperiódica
$C_2 =$4: transitórios
$C_3 =$3: transitório, aperiódico
$C_4 =$2: absorvente (fechada), aperiódica

Ergodicidade para S finito e não irredutível

Uma C.M. $\{x_n, n \geq 0\}$ com $P^{(n)} = (P_{ij}^n),\ i, j\ \in S$, t.q. :

$$S = C_R \cup C_T\ ,$$

$$C_R = \text{Classe de estados recorrentes}$$

$$C_T = \text{Classe de estados transitórios}$$

$$\Rightarrow Determinar \Pi :$$

(1) Reescrever P

$$P \to P^* = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C_R & C_T \end{array} \\ \begin{array}{c} C_R \\ C_T \end{array} & \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ R & T \end{pmatrix} \end{array}$$

(2) $\Pi = (\Pi^*, 0, ...)$

$$\forall j \in C_R, \lim_{n \to \infty} P_{ij}^n = \pi_j$$

$$\forall j \in C_T, \lim_{n \to \infty} P_{ij}^n = 0\ ,\ \pi^* = \pi^* \cdot P_1$$

Exemplo (anterior)

Considere

$$C_R = \{0,1\}$$

$$C_T = \{2,3,4\}$$

$$P^* = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} P_1 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} \pi^* = \pi^* P_1 \\ \sum \pi_j = 1 \\ j \in C_R \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3/4\pi_0 - 1/2\pi_1 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$$

$$2(1) + (2),$$

$$5\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = 2/5 \ , \pi_1 = 3/5$$

logo

$$\pi = (2/5, 3/5, 0, 0, 0)$$

11/09

Processos de Poisson

Def. (Processo de contagem)
Um processo estocástico a tempo contínuo, $\{N(t), t \geq 0\}$ com espaço de estados e numerável é um processo de contagem se:
$N(t) =$ número total de eventos ocorridos até t, (ocorridos em $(0, t\,])$.

$$N_t : \Omega \longrightarrow S \;\; enumervel$$

$$w \longleftrightarrow N_t(\omega) = n$$

Def1. (Processo de Poisson)
Um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ tais que satisfaz :
(i) N(0)=0
(ii)$\{N(t), t \geq 0\}$ tem incrementos independentes
(iii)$P\left(N(t+s) - N(t) = n\right) = \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^n}{n!}$ $\forall\; t, s \geq 0$
é chamado processo de poisson com taxa λ
OBS!!
1. de (iii), tem-se que $\{N(t), t \geq 0\}$ tem encrementos estacionários pois :

$$P(N(s) = n) = P\left(N(t+s) - N(0) = n\right) \underbrace{=}_{(iii)} \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^n}{n!}$$

Ou seja, $P(N(t+s) - N(t) = n) = P(N(s) = n), \forall t, s \geq 0.$
A distribuição depende to tamanho do intervalo.

2. Notação $\{N(t), t \geq 0\}$ é o processos de possion com taxa λ
$\iff$ $N(t) \sim Poisson(t)$
$\Rightarrow E[N(t)] = \lambda t$

Def 2,],.

(Exercíos para a prova 2, Capítulo 5)

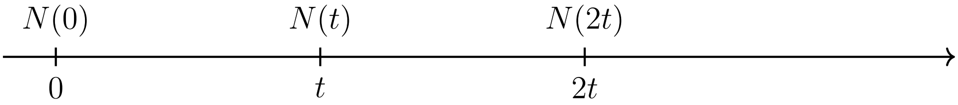
$35 - 43, 46, 47, 49, 53, 55, 59, 65, 68, 70, 78, 88$

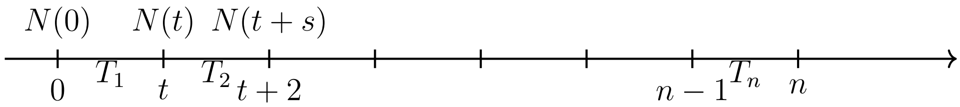
$$\textit{Processos de poisson}\begin{cases}\text{Não homogêneo}\\ \textit{Composto}\\ \textit{Misto}\end{cases}$$

$$\text{Processo Renovação}\begin{cases}\text{Taxa média de renovação}\\ \text{Tempo de renovação}\\ \text{distribuição número de renovação}\end{cases}$$

Processo de Poisson homogêneo

$\{N(t), t \geq 0\}$ Processo estocástico de contagem com espaço de estados S={0,1,...}
t.q $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$, tem incrementos independentes e estacionários e instantaneamente só pode chegar em um evento com taxa λ



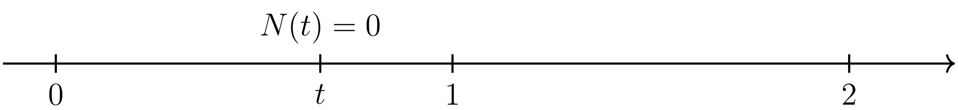


Proposição

$\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de Poisson com taxa λ se, e somente se, os tempos entre as chegadas dos eventos s são variáveis aleatórias i.i.d Exp(λ)
Prova

$\Rightarrow$ Sejam T_n variáveis aleatórias i.i.d.
T_n : v.a. tempo entre o $(n-1)$-ésima chegada e a n-ésima chegada,
$n = 1, 2, ...$
Temos que :

$$\cdot P(t_1 > t) = ?$$

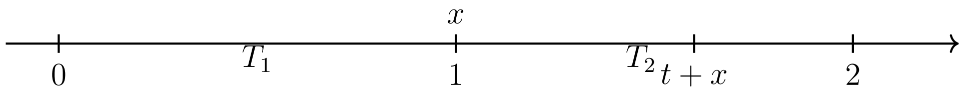


$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

Então,

$$P(T_1 \leq t) 1 - e^{-\lambda t}, \quad T_1 \sim Exp(\lambda)$$

$$\cdot P(t_2 > t) = ?$$



$$P(T_2 > t) = \int_0^\infty \underbrace{P(T_2 > t | T_1 = x)}_{E(I_{(T_2 > t)|T_1 = x})} f_{T_1}(x) dx$$

$$= \int_0^\infty P(N(t+x) - N(x) = 0) \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$\underbrace{=}_{hip.} \int_0^\infty P(N(t) = 0) \lambda e^{-\lambda x} dx$$

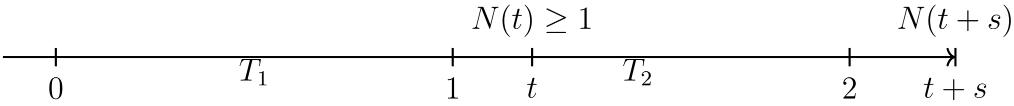
$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}$$

$\Rightarrow P(T_2 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow T_2 \sim Exp(\lambda)$

A prova para T_n segue por indução. A independência segue de:

$$P(T_1 \leq t, T_2 \leq s) = P(T_1 \leq t) \cdot P(T_2 \leq s | T_1 \leq t)$$

$$P(N(t) \geq 1) \cdot \underbrace{P(N(t+s) - N(t) \geq 1)}_{P(N(s) \geq 1)}$$



$\Rightarrow P(T_1 \leq t, T_2 \leq 2) = [1 - P(N(t) = 0)][1 - P(N(s) = 0)] = P(T_1 \leq t) P(T_2 \leq s)$

OBS!!!

$\{N(t), t \geq 0\}$ Processo de Poisson com taxa λ

$\Longleftrightarrow$

T_is v.a. i.i.d $Exp(\lambda)$ são os tempos entre as chegadas do processo.

Daí,

$$S_n = T_1 + T_2 + ... + T_{n-1} + T_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

O tempo até a n-ésima cheda é uma $Gamma(n, \lambda)$.

$$\{N(t) \geq n\} \iff \{S_n \leq t\}$$
$$\{N(t) = n\} \iff \{S_n \leq t\} \cap \{S_{n+1} > t\}$$

18/09 Processo de Poisson

$\{N(t), t \geq 0\}$ é o processo de poisson com taxa λ,

$$\iff N(t) \sim Poisson(\lambda t), \text{incrementos independentes e estacionários}$$

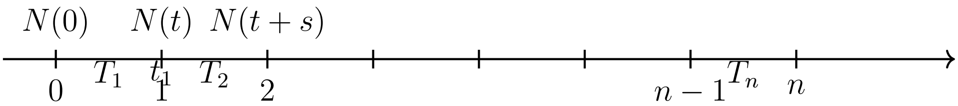
$$\iff E(N(t)) = \lambda t$$

$$\iff P(N(t) = 1) = \lambda t + 0(t)$$

$$\iff \lim_{t \to 0} \frac{P(N(t) = 1)}{t} = \lambda : \ taxa \ e \ P(n(t) \geq 2) = 0(t)$$

$\{T_i\}$ tempos entre chegadas, T_i variáveis aleatórias i.i.d $Exp(\lambda)$ e

$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i \sim Gama(n, \lambda)$: tempo até a n-ésima chegada.



Exemplo: Suponda que o número de chamadas telefónicas que ocorrem em uma central de atendimento é um processo de poisson com taxa 2 por minuto.
(a) Qual é o tempo esperado até a chegada da décima chamada telefónica?

(b)Qual é a probabilidade do tempo entre a décima e a décima chamada primeira chada ser superior o 1 minuto?

Solução:

(a) Temos:

$$N(t) \sim Poisson(2t)$$
$$\Rightarrow S_{10} = \sum \lim_{i=1}^{10} T_i \sim Gama(10, 2)$$
$$\Rightarrow E(S_{10}) = 5\ min$$

(b)

$$(*) P(T_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow P(T_i > t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$$
$$\Rightarrow P(T_{11} > 1) = e^{-2(1)} = e^{-2}$$

Exemplo 2:

$N(t) \sim Poisson(\lambda t)$: número de clientes que chegam na loja.

A Loja dá brinde a cada décimo terceiro cliente. Qual é a densidade do tempo entre dois ganhadores de brindes?

Solução:

$$P(\{N(t) \geq 13\}) \iff P(\{S_{13} \leq t\}),\ S_{13} \sim Gama(13, \lambda)$$

Derivando,

$$f_{13}(t) = \frac{\lambda^{13} t^{12} e^{-\lambda t}}{\Gamma(13)},\ t \geq 0$$

18/09 Processo de Poisson de dois tipos

Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo de Poisson com taxa λ, em que a cada chegada no instante $\underline{\underline{s}}$ o processo é classificado como:

Tipo I com probabilidade P(s)=P(evento tipo I |chegou em s)

Tipo II com probabilidade 1-P(s)

Então:

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t) \sim Poisson(\lambda t)$$

sendo

$$N_1(t) : \text{número de chegadas do tipo I até t}$$

$$N_2(t) : \text{número de chegadas do tipo II até t}$$

<u>Proposição:</u> Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo de Poisson com taxa λ e $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ sendo $N_i(t)$ o número de chegadas do tipo i até o tempo t, $i = 1, 2, ...$ Então:

$$N_1(t) \sim Poisson(\lambda pt) \ e \ N_2(t) \sim Poisson(\lambda(1-p)t)$$

São independentes com

$$p = \frac{1}{t}\int_0^1 P(s)ds \ \text{ a probabilidade de ocorrer o evento tipo 1}$$

Exemplo:

Suponha que imigrantes chegam a uma área A de acordo com um processo de poisson com taxa de 10 pessoas por dia e cada imigrnte é descedente de inglês com probabilidade $\frac{1}{12}$.
Qual é a probabilidade que nenhum descendente de inglês migre para a área A em um certo dia.

Solução:

$$N(t) \sim Poisson(10t) : \text{ imigrantes para a área A}$$

$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$
Sendo:

$N_1(t)$: número de imigrantes descendentes de inglês até t.

$N_2(t)$: número de imigrantes não-descendentes de inglês até t.

Então:

$$N_1(t) \sim Poisson(10pt)$$

Queremos calcular $P(N_1(t) = 0)$

$p = \frac{1}{t} \int_0^1 P(s)ds = \frac{1}{12}$ por hipótese.

Então:

$$N_1(t) \sim Poisson(\frac{10}{12}t) e P(N_1(1) = 0) = e^{-\frac{5}{6}} \textit{ por dia.}$$

$$P(N_1(7) = 0) = e^{-\frac{35}{6}} \textit{ por semana.}$$

OBS

$\cdot E(N_1(t)) = \frac{5}{6}t$
$\cdot N_2(t) \sim Poisson(\underbrace{\frac{55}{6}t}_{\lambda(1-p)t})$
$E(N_2(t)) = \frac{55}{6}t$

27/09 Processo de Poisson não-homogêneo

Um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ t.q.:

(i)$N(0) = 0$;

(ii)Tem incrementos independentes;

(iii)$P(N(t+s) - N(s) \geq 2) = 0(t)(\iff \lim\limits_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0)$;

(iv) (iii)$P(N(t+s) - N(s=1) = \lambda(t) + 0(t)$
$\lim\limits_{t \to 0} \frac{P(N(t+s)-N(s=1)=\lambda(t)+0(t)}{t}) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\lambda(t)t}{t} + \frac{0(t)}{t} = \lambda(t)$

É chamado processo de poisson não homogêneo com <u>função de intensidade</u> $\lambda(t)$

OBS:

(1) $\{N(t), t \geq 0\}$ com f.i. $\lambda(t)$, tem média $m(t) = E(N(t)) = \int\limits_0^t \lambda(s) ds$

(2) $\{N(t), t \geq 0\}$ Poisson homogêneo <u>com taxa λ</u> $\iff N(t) \sim Poisson(\lambda t)$
$m(t) = E(N(t)) = \lambda t = \int\limits_0^t \lambda ds \iff \lambda(t) \lambda$

(3)$\{N(t), t \geq 0\}$ com f.i. $\lambda(t)$

$$\iff \begin{cases} N(t) = \text{número dechegadas no tempo(0,t]} \\ m(t) = E(N(t)) : \text{número médio de chegadas em (0,t]} \\ N(t+s) - N(s) : \underset{\neq \text{número de chegadas em (0,t]}}{\text{número de chegadas em (s,t+s]}} \\ m(t+s) - m(s) : \text{número médio de chegadas em (s,t+s]} \end{cases}$$

$$N(t+s) - N(s) \sim Poisson\left(m(t+s) - m(s)\right), \ m(s) = \int\limits_0^s \lambda(u) du$$

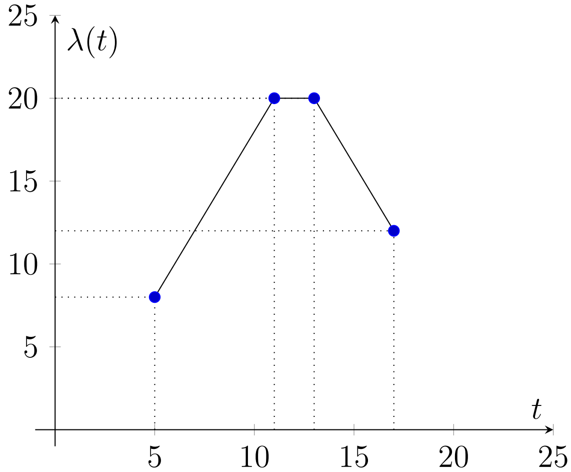
$$m(t+s) - m(s) = \int\limits_0^{t+s} \lambda(u) du - \int\limits_0^s \lambda(u) du = \int\limits_s^{t+s} \lambda(u) du$$

Daí,

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{e^{-[m(t+s)-m(s)]}[m(t+s) - m(s)]^n}{n!}$$

Exemplo 1 :

Considere que clientes chegam a uma lanchonete das 8h até ás 17h, conforme uma f.i. no gráfico abaixo:



$$\lambda(t) \begin{cases} 5 + 5(t-8), & 8 \leq t \leq 11 \\ 20, & 11 \leq t \leq 13 \\ 20 - 2(t-13), & 13 \leq t \leq 17 \end{cases}$$

(a) Dê um modelo probabilístico para o problema;

(b) Qual é o número médio de chegadas no período das 8h30 ás 9h30?

(c)Qual é a probabilidade de não chegar clientes no período das 8h30 ás 9h30?

Sol:

(a) Seja $\{N(t), t \geq 0\}$, N(t)= número de clientes que chegam em (0,t] e assuma que N(t) independe de (0,t]

(b) $\{N(t), t \geq 0\}$ é Poisson não homogêneo com f.i. $\lambda(t)$=?

$m(9:30) - m(8:30) = m(9.5) - m(8.5) = \int\limits_{8.5}^{9.5} (5t - 35)dt = 10$ clientes

(c)$P(N(9.5) - N(8.5) = 0) = \frac{e^{-10}10^0}{0!} = e^{-10}$

$\underline{\text{Exemplo 2:}}$
$M/G/\infty$

$$\underbrace{\xrightarrow[chegadas]{}}_{N(t)\sim Poisson(\lambda t)} \qquad T \sim G \qquad \xrightarrow[saidas]{}$$

Vimos $N_1(t)$ número de clientes atendidos em (0,t] dado que chegaram em S

$$\Rightarrow N_1(t) \sim Poisson(\lambda tp), \quad p = \int_0^t G(y)dy$$

$\Leftrightarrow N_1(t) \sim Poisson(\lambda \int_0^t G(y)dy) = Poisson(\int_0^t \lambda G(y)dy) = Poisson(m(t))$

$\Leftrightarrow m(t) \int_0^t \lambda$
$\Leftrightarrow \lambda(t) = \lambda G(t)$
$\therefore \{N_1(t)\}$ é não homogêneo com $f.i.$ $\lambda G(t) = \lambda(t)$

$T \sim Exp(10)$	$T \sim U[0,t] = G$
$G(t) = 1 - e^{-10t}$	$G(t) = t$
$\lambda(t) = (1 - e^{-10t})\lambda$	$\lambda(t) = \lambda t$

02/10 Processo de Poisson Composto

Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo de poisson homogêneo e $\{Y_i, i \geq 0\}$ um processo independente de $\{N(t), t \geq 0\}$. Então $\{X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,\ t \geq 0\}$ é chamado de <u>Processo de Poisson Composto</u>.

OBS:
Exemplo (1):
$\{N(t), t \geq 0\}, \quad N(t) \sim Poisson(\lambda t)$

$N(t)$: número de pessoas que fazem compras em um supermercado em $(0, t]$.

Y_i: quantia gasta pelo i-ésimo cliente.
$\Rightarrow X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$: quantia total de vendas em $(0, t]$.

Exemplo (2):
$\{N(t), t \geq 0\}, \quad N(t) \sim Poisson(\lambda t)$

$N(t)$: número de clientes que contratam um seguro em uma companhia em $(0, t]$.

Y_i: valor pago ao i-ésimo cliente pela seguradora.

$$\Rightarrow \underset{\text{Probabilidade de ruína}}{\Psi(t)} = P\left(\underset{\text{capital inicial}}{\omega} \cdot t + \overset{\text{valor da apólice}}{a} \cdot t - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \leq 0 \right)$$

(3) Seja $\{X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,\ t \geq 0\}$ um processo de poisson composto em que $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$ Então:

$$(\text{i})E(X(t)) = E[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i] = E[\underbrace{E[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i|N(t)]}_{N(t)\cdot E(Y_i)}]$$

$$E[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i|N(t) = E[\sum_{i=1}^{n} Y_i|N(t) \stackrel{indep}{=} E[\sum_{i=1}^{n} Y_i] = n \cdot E(Y_i)$$

$$\Rightarrow E[X(t)] = E[N(t)] \cdot E(y_i)$$

$$(\text{ii})\ Var[X(t)] = E[X(t)^2] - (E[X(t)])^2$$

$$E[X(t)^2] = E[\sum_{i=1}^{n} Y_i^2] = Var[\sum_{i=1}^{n} Y_i] + [E(\sum_{i=1}^{n} Y_i)]^2$$
$$= n \cdot Var(Y_i) + n^2[E(Y_i)]^2$$

$$E[\sum_{i=1}^{N(t)} X(t)^2|N(t)] = N(t) \cdot Var(Y_i) + [N(t)]^2[E(Y_i)]^2$$
$$E[\sum_{i=1}^{N(t)} X(t)^2] = E[N(t)] \cdot Var(Y_i) + E[N(t)]^2[E(Y_i)]^2$$
$$Var[X(t)] =$$

$$E[N(t)]Var(Y_i) + E[N(t)]^2[E(Y_i)]^2 - [E[N(t)]]^2[E(y_i)]^2$$
$$= E[N(t)]Var(Y_i) + [E(y_i)]^2 Var[N(t)]$$

Como na Poisson $Var(X) = E(X)$:

$$E[N(t)]Var(Y_i) + [E(y_i)]^2 E[N(t)] = E[N(t)]\left[E[Y_i^2] - [E[Y_i]]^2 + [E[Y_i]]^2\right] =$$
$$E[N(t)]E[Y_i^2]$$

$$\therefore X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,\ \{Y_i\} \text{ i.i.d independentes de } \{N(t)\}$$

$$E[X(t)] = (\lambda t)E(y_i)$$

$$Var[X(t)] = (\lambda t)E[Y_i^2]$$

$P\left(X(t) \leq x\right) = ? \quad x \in \mathbb{R}$

Pelo T.L.C para o processo de Poisson, tem-se que:

$E[Y_i] < \infty, \ \ Var[Y_i] < \infty$
e $N(t) \to \infty$ para algum t $\Rightarrow X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sim N(\underbrace{\lambda t E[Y_i]}_{E[X(t)]}, \underbrace{\lambda t E[Y_i^2]}_{Var[X(t)]})$

$$\Leftrightarrow P(X(t) \leq x) \approx \phi\left(\frac{x - \lambda t E[Y_i]}{\sqrt{\lambda t E[Y_i^2]}}\right)$$

04/10

+ Exercícios 85 e 86

Pg. 368 Exercício 88.

$N(t) Poisson(12t)$: número de transações em $(0, t]$ (horas)
$Y_i, \quad i = 1, 2, ..., $ Variável aleatória com $E[Y_i] = 30$, $Var[Y_i] = 50$ (dólares)

O valor total das transações é:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t} Y_i \quad , \quad P(X_{(12)} \leq 6000)?$$

$$\sim N(E[X(t)], Var[X(t)] \Rightarrow N(\lambda t E[Y_i], \lambda t E[Y_i^2])$$

$$P(X(t) \leq x) \approx \phi\left(\frac{x - \lambda t E[Y_i]}{\sqrt{\lambda t E[Y_i^2]}}\right)$$

$$\Rightarrow P(X_{(15)} \leq 6000) \approx \phi\left(\frac{6000 - 12(15)(30)}{\sqrt{12(15)[50 + 30^2]}}\right)$$

$$\Rightarrow P(X_{(15)} \leq 6000) \approx \phi\left(\frac{600}{158.745}\right)$$

$$\Rightarrow P(X_{(15)} \leq 6000) \approx \phi\left(\frac{600}{413.52}\right) \approx \phi(1.4509) \approx 0.92$$

04/10 Processo de Poisson composto de 2 tipos

Sejam $\{X_{(t),t\geq 0}\}$ e $\{Y_{(t),t\geq 0}\}$ processos de Poisson compostos independentes em que

$$X_{(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad e \quad Y_{(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

Com X_i variáveis aleatórias i.i.d F_1 e Y_i variáveis aleatórias i.i.d F_2.

Então $\{Z(t) = X(t) + Y(t), t \geq 0\}$ é um processos de Poisson composto e

$$Z_{(t)} = \sum_{i=1}^{N_1(t)+N_2(t)=N(t)} Z_i$$

Sendo

$N(t) = N_1(t) + N_2(t) \sim Poisson\,((\lambda_1 + \lambda_2)t)$
$N_1(t)$: o número de chegadas do tipo 1, no sistema, em $(0, t]$
$N_2(t)$: o número de chegadas do tipo 2, no sistema, em $(0, t]$
e
$Z_i \sim F$
$F(X) = P(Z_i \leq x|\text{chegadas do tipo 1})P(tipo\,1)+P(Z_i \leq x|\text{chegadas do tipo 2})P(tipo\,2)$
$= P(X_i \leq x) \cdot P(tipo\ 1) + P(Y_i \leq x) \cdot P(tipo\ 2)$
$\Rightarrow F(x) = F_1(x)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right) + F_2(x)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$
Pois
p=Prob tipo 1 $= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \Leftrightarrow Poisson(\lambda pt) = Poisson\left(\lambda\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)t\right) = Poisson(\lambda_1 t)$

(*) $\lambda_1 = \lambda p \Leftrightarrow p = \frac{\lambda 1}{\lambda}$
(**) $\lambda_2 = \lambda(1-p) \Leftrightarrow 1 - p = \frac{\lambda 2}{\lambda} \Rightarrow p = 1 - \frac{\lambda 2}{\lambda}$
(*)=(**),
$\frac{\lambda 1}{\lambda} = 1 - \frac{\lambda 2}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

04/10 Exercício 59

$N_1(t)$: o número de reclamações do tipo 1 com taxa $\lambda_1 = 10$
$N_2(t)$: o número de reclamações do tipo 2 com taxa $\lambda_1 = 1$

$$X_{(t)} = \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i, \qquad X_i \sim i.i.d\ Exp(\frac{1}{1000})$$

$$Y_{(t)} = \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i, \qquad Y_i \sim i.i.d\ Exp(\frac{1}{5000})$$

$$Z_{(t)} = \sum_{i=1}^{N_1(t)+N_2(t)=N(t)} Z_i, \quad Z_i \leq 4000$$

P(Reclamação tipo 1| $Z_i \leq 4000$) ?

<u>Sol.</u>

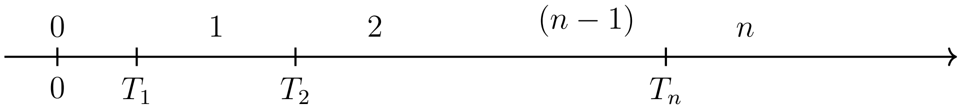
P(Reclamação tipo 1| $Z_i \leq 4000$) $=\frac{P\{\text{Reclamação tipo 1}\}\cap\{Z_i \leq 4000\}}{P(Z_1 \leq 4000)}$

$= \frac{P(Z_i \leq 4000|tipo\ 1)P(tipo\ 1)}{F_1(4000)\left(\frac{10}{11}\right)+F_2(4000)\left(\frac{1}{11}\right)} = \frac{F_1(4000\frac{10}{11})}{F_1(4000)\left(\frac{10}{11}\right)+F_2(4000)\left(\frac{1}{11}\right)}$
$\frac{\left[1-e^{-\frac{4000}{1000}}\right]\frac{10}{11}}{[1-e^{-4}]\frac{10}{11}+\left[1-e^{-\frac{4}{5}}\right]\frac{1}{11}}$

09/10 Processo de Renovação

Um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ Em que os tempos entre chagdas $\{T_n, n \geq 1,\}$ Em que os tempos entre chegadas são variáveis aleatórios i.i.d F qualquer é um processo de renovação.

$N(t)$: número de renovações no sistema até t (em$(0, t]$)
T_n : Tempo entre a (n-1)-ésima e n-ésima renovação.



Neste caso,
$m(t) = E[N(t)]$: número médio de renovações até t, é chamado de função de renovação.

Além disso,

$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$: tempo até a n-ésima renovação, caracteria o processo, pois:

$$\{N(t) \geq n\} \iff \{S_n \leq t\}$$

$$\{N(t) = n\} \iff \{S_n \leq t\} \cap \{S_{n+1} > t\}$$

$$\therefore$$

O processo de renovação pode ser escrito por:

$$\{N(t), t \geq 0\} \quad ou \quad \{S_n, n \geq 1\}$$

Cuja função de renovação é $m(t) = E[N(t)]$

OBS 1

Se $\{N(t), t \geq 0\}$ For processo de poisson com taxa λ
$\iff T_n \sim Exp(\lambda)$ variáveis aleatória i.i.d, $n \geq 1$
$\iff \{\underbrace{S_n}_{Gama(n,\lambda)}, n \geq 1\}$ é processo de renovação
com função de renovação $E(N(t)) = \lambda t = m(t)$

$$N(t) \sim Poisson(\lambda t) \quad ou \quad S_n \sim Gama(n, \lambda)$$

9/10

OBS 2

$\{N(t), t \geq 0\}$ ou $\{S_n \geq 1\}$ processo de renovação com função de renovação $m(t) = E(N(t))$, em que:

$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ T_i v.a's i.i.d F

$N(t) = sup\{n : s_n \leq t\}$

Temos que:

$$\begin{aligned} P(S_n \leq t) &= P(T_1 + ... + T_n \leq t) \\ &= \underbrace{F \cdot F \cdot ... \cdot F}_{n \quad vezes}(t) \\ &= F_n^*(t) \iff S_n \sim F_n^* \end{aligned}$$

n=2

$$P(S_2 \leq t) = P(T_1 + T_2 \leq t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} P(T_1 + T_2 \leq t | T_1 = x) f_{T_1}(x) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} P(T_2 \leq t - x) dF(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}} F(t - x) dF(x) = F \cdot F(t) = F_2^*(t)$$

$$= \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} F(t-x) f_{T_1}(x) dx, & T_i \ cont \\ \sum_{x} F(t-x) P(T_1 = x), & T_i \ discreta \end{cases}$$

$9/10$

Coisa

$$E(X) = E[E(X|Y)]$$

$$X^{(\omega)} = I_{(S_2 \leq x)^{(\omega)}} = \begin{cases} 1, & S_2(\omega) \leq x \\ 0, & S_2(\omega) > x \end{cases}$$

$$P(S_2 \leq x) = E[P(S_2 \leq x|Y)] = \int P(S_2 \leq s|Y = y) dF_Y(y)$$

$$E(X) = 1 \cdot P(S_2 \leq x)$$

9/10 Exercícios 2 Pg. 479

Suponha $T_i \sim Poisson(\mu), n \geq$ variáveis aleatórias i.i.d

(a) $S \sim ?$
(b $N(t) \sim ?$

<u>Solução:</u>

(a)$P(T_i = x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, \quad i = 1, 2, ...$

$$P(S_2 = t) = \sum_{x=0}^{t} P(S_2 = t | T_1 = x) P(T_1 = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{t} P(T_2 = t - x) P(T_1 = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{t} \frac{e^{-\mu}\mu^{t-x}}{(t-x)!} \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} = e^{-2\mu} \sum_{x=0}^{t} \frac{\mu^t}{(t-x)!} \frac{t!}{t!x!}$$

$$\frac{e^{-2\mu}\mu^t}{t!} \left(\sum_{x=0}^{t} \binom{t}{x} \right)$$

BInômio de newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^n$$

Então:

$$\frac{e^{-2\mu}\mu^t}{t!} \left(\sum_{x=0}^{t} \binom{t}{x} \right) = \frac{e^{-2\mu}\mu^t 2^t}{t!}, a = 1 \ , \ b = 1$$

$$\therefore$$

$$P(S_2 = t) \frac{e^{-2\mu}(2\mu)^t}{t!} \iff S_2 \sim Poisson(2\mu)$$

Em geral,

$$S_n \sim Poisson(n\mu)$$

(b)

$$P(N(t) = n) = P(s_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$$

$$= \sum_{j=0}^{t} \frac{e^{-n\mu}(n\mu)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{t} \frac{e^{-(n+1)\mu}((n+1)\mu)^j}{j!}$$

16/10 Processos de Renovação (Teoremas Limite)

$$\lambda(t) - \lambda_0(t) = m(t - t_0)$$

$$50 - 6 = m(14 - 11) \Rightarrow m = \frac{44}{3} \Rightarrow \lambda(t) = \frac{44}{3}(t - 11) + 6$$