

Estatística Matemática

Sumário

1	Aula 13/03	3
1.1	Espaço de Probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$	3
2	Aula 18/03	4
3	Aula 20/03	5
3.1	Medida de Probabilidade	5
3.2	Propriedade da medida de Probabilidade	6
3.3	Cálculo de Probabilidade	7
4	Aula 25/03	9
4.1	Espaço de Probabilidade contínuo	9
4.2	Outras propriedades da medida de probabilidade	11
4.3	Limite Superior e inferior de Eventos	13
4.4	Aula 27/03	15
4.5	Probabilidade condicional	15
4.6	Variável aleatória	20
4.6.1	Imagem Inversa	20
5	03/04	24
5.1	Variável Aleatória	24
5.2	Tipos de Variáveis aleatórias	25
5.2.1	Fução de distribuição acumulada (f.d.a)	25
5.3	Função de variável aleatória	32
6	22/04	40
7	24/04	44
8	29/04	47
9	13/05	61
9.1	Propriedades	70
10	29/05 Algumas Desigualdades Importantes	74
10.1	Função Característica	77

Bibliografia Importante

kai Lai Chung: Introduction to Probability

Barry R. James: Probabilidade : um Curso Em Nível Intermediário

1 Aula 13/03

1.1 Espaço de Probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$

Experimento Aleatório(ε)

- Pode ser repetido infinitas vezes se for necessário;
- Permite descrever todos os possíveis resultados;
- Quando repetido um numero grande de vezes os resultados apresentam certa regularidade.(\Rightarrow Probabilidade resultante)

Exemplos:

- (1) Lançar um dado e observar sua face superior.
- (2) Lançar duas moedas honestas e observar suas faces superiores.
- (3) Retirar 6 bolas de uma urna com 60 bolas numeradas (Sem reposição e sem ordem).
- (4) Observar o valor de um retorno financeiro.
- (5) Contar o numero de carros que chegam a UnB no primeiro dia de aula.

Definição (Espaço Amostral)

Define-se como espaço amostral o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento.

Notação:

$\Omega = \{\omega : \omega \text{ é resultado de } \Omega\}$

Ω : Espaço amostral associado a ε .

ε : Experimento Aleatório.

Exemplos

$$\varepsilon_1 \rightarrow \Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad |\Omega_1| = 6$$

$$\varepsilon_2 \rightarrow \Omega_2 = \{(c, c), (c, \hat{c}), (\hat{c}, c), (\hat{c}, \hat{c})\}, \quad |\Omega_2| = 4$$

$$\varepsilon_2 \rightarrow \Omega'_2 = \{(i, j) : i, j \in \{c, \hat{c}\}\}, \quad |\Omega_2| = 4$$

$$\varepsilon_3 \rightarrow \Omega_3 = \{\{b_1, \dots, b_6\} : b_1, \dots, b_6 \in \{1, \dots, 60\}, b_i \neq b_j \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, 6\}, \\ |\Omega_3| = \binom{60}{6}$$

$$\varepsilon'_3 \rightarrow \Omega'_3 = \{(b_1, \dots, b_6) : b_1, \dots, b_6 \in \{1, \dots, 60\}, b_i \neq b_j \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, 6\}, \\ |\Omega_{3'}| = A_{60,6} = \frac{60!}{54!}$$

$$\varepsilon_3'' \rightarrow \Omega_3'' = \{\{b_1, \dots, b_6\} : b_1, \dots, b_6 \in \{1, \dots, 60\}\}$$

$$|\Omega_3''| = 60^6$$

$$\varepsilon_3''' \rightarrow \Omega_3''' = \{(b_1, \dots, b_6) : b_1, \dots, b_6 \in \{1, \dots, 60\}\}$$

$$|\Omega_3'''| = \frac{60^6}{6!}$$

$$\varepsilon_4 \rightarrow \Omega_4 = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

$$|\Omega_4| = \infty$$

$$\varepsilon_5 \rightarrow \Omega_5 = (-\infty, \infty) = \{r : r \in \mathbb{R}\}, r = P_t - P_{t-1}, P = \text{preço da ação}$$

2 Aula 18/03

Definição

Seja Ω um espaço amostral de ε . A coleção de eventos de Ω é uma σ -álgebra se satisfaz:

- i) $\mathcal{A} \neq \emptyset$
- ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Exemplo:

A = Sair o mesmo resultado = $\{(c, c), (\hat{c}, \hat{c})\}$

3 Aula 20/03

$$\varepsilon \rightarrow \Omega = \{\omega : \omega \text{ ponto amostral (resultado de } \varepsilon)\}$$

$\mathcal{A} = \{\text{Eventos de } \Omega\}$ Tal que:

- i) $\mathcal{A} \neq \emptyset$
- ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

σ -álgebra de eventos de Ω

3.1 Medida de Probabilidade

Seja \mathcal{A} uma σ -álgebra de eventos de Ω . A função $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ é uma medida de probabilidade se for não negativa e σ -aditiva, Isto é, satisfaz:

- i) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$
- ii) $P(\Omega) = 1$
- iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} (A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j) \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$: σ -aditividade

Notação: $\varepsilon \rightarrow (\Omega, \mathcal{A}, P)$ Espaço de probabilidade de ε

Observação: (Ω, \mathcal{A}, P)

- Ω enumerável $\Rightarrow (\Omega, \mathcal{A}, P)$ é discreto.
- Ω não enumerável $\Rightarrow (\Omega, \mathcal{A}, P)$ é contínuo.

Exemplo: Ω_5, Ω_6

3.2 Propriedade da medida de Probabilidade

- 1) $P(\emptyset) = 0$
 $\Omega \cup \emptyset = \Omega$
 $\Rightarrow P(\Omega) + P(\emptyset) = P(\Omega)$
 $\Rightarrow 1 + P(\emptyset) = 1 \Rightarrow P(\emptyset) = 0$
- 2) $P(A^c) = 1 - P(A)$
 $A \cup A^c = \Omega$
 $\Rightarrow P(A) + P(A^c) = P(\Omega) \Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c)$
- 3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$A \cup B = A \cup [B \setminus A \cap B] \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A \cap B) \quad (1)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} B &= [B \setminus A \cap B] \cup (A \cap B) \\ \Rightarrow P(B) &= P(B \setminus A \cap B) + P(A \cap B) \\ P(B \setminus A \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \quad (2) \end{aligned}$$

Substituindo 2 em 1, o resultado está provado.

$$4) P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \neq j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

Prova por indução:

$n = 2$: $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ é válida.

Hipótese de indução: $P\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i) - \sum_{i \neq j \leq k} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{k+1} P\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right)$

Supor que a hipótese é válida

Provar que: $P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i) - \sum_{i \neq j \leq k+1} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{k+2} P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right)$

Observação:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^3 A_i\right) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P([A_1 \cup A_2] \cap A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P([A_1 \cap A_3] \cup [A_2 \cap A_3]) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - \left\{ P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^3 P(A_i) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \sum_{i=1}^3 P(A_i) - \sum_{i \neq j \leq 3} P(A_i \cap A_j) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

3.3 Cálculo de Probabilidade

a) (Ω, \mathcal{A}, P) discreto com resultados equiprováveis e finito.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

$$\forall \omega_i \in \Omega, \quad P(\omega_i) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{n}$$

Então, $A = \{\omega_1, \dots, \omega_k\} \subset \Omega, k \leq n$

$$A = \bigcup_{i=1}^k \{\omega_i\} \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^k P(\omega_i) \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n} \text{ ou } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Exemplo:

- 1) De um lote de 100 computadores, no qual sabe-se que há 10 defeituosos, são escolhidos aleatoriamente 5 computadores sem reposição. Qual é a probabilidade de saírem 3 computadores defeituosos na amostra?

Solução:

$$\Omega = \left\{ \omega = \{c_1, \dots, c_5\} : c_i \in \{1, \dots, 100\}, c_i \neq c_j, \forall i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5 \right\}$$

$$|\Omega| = \binom{100}{5}$$

$$A = \left\{ \omega = \{c_1, \dots, c_5\} \in \Omega : 3c'_i \in \{10 \text{ defeituosos}\}, 2c'_i \in \{90 \text{ não defeituosos}\} \right\}$$

$$\Rightarrow |A| = \binom{10}{3} \cdot \binom{90}{2}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{10}{3} \binom{90}{2}}{\binom{100}{5}}$$

- 2) $\varepsilon_3 \rightarrow \omega_3, \mathcal{A} = P(\Omega_3) \quad |\Omega| = \binom{60}{6}$

- A = Obter os números sorteados na megasena.

$$|A| = \binom{6}{6} \binom{54}{0}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{\binom{60}{6}}$$

- B = Obter uma quina com os números sorteados da megasena

$$|B| = \binom{6}{5} \binom{54}{1}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{\binom{6}{5} \binom{54}{1}}{\binom{60}{6}}$$

b) (Ω, \mathcal{A}, P) discreto e infinito. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$

Tem-se que, $\forall \omega_i \in \Omega$,

$p_i = P(\omega_i)$ é tal que $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

Daí,

$A = \{\omega_1, \dots, \omega_k\} \in \Omega, k \in \mathbb{Z}^+$

então $P(A) = P(\bigcup_{i=1}^k \omega_i) = \sum_{i=1}^k p_i$

Exemplo:

$\varepsilon_4 \rightarrow \Omega_4 = \{0, 1, 2, \dots\}$

Suponha que os carros chegam conforme

$$P(\omega_i) = p_i = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}, \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Note que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} = 1$$

$A = \{\text{Chegam no mínimo 2 carros}\}$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P(\{0, 1\}) = 1 - [p_0 + p_1]$$

4 Aula 25/03

4.1 Espaço de Probabilidade contínuo

$\varepsilon \longrightarrow (\Omega, \mathcal{A}, P)$ Espaço de Probabilidade contínuo.

$P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ é medida de probabilidade se existir uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.q.

- a) Se: $\Omega \subseteq \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ e $\int_{\Omega} f(x)dx < \infty$ (f-Integrável ou f é mensurável com respeito á \mathcal{A}), $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) = \frac{\int_A f(x)dx}{\int_{\Omega} f(x)dx} = \int_A \left(\frac{f(x)}{\int_{\Omega} f(x)dx} \right) dx$,
 $f_1(x) = \frac{f(x)}{\int_{\Omega} f(x)dx} f.densidade$

Exemplo: Medida de probabilidade uniforme (Eventos equiprováveis)

$$\Omega = [a, b], a < b \in \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}([a, b]). \forall A \subset [a, b] = \Omega$$

$$P(A) = \frac{Com(A)}{comp(\Omega)} = \frac{\int_a^b 1dx}{\int_a^b dx}, f(x) \equiv 1$$

$$= \int_A \frac{1}{b-a} dx, f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a, b] \\ 0, c.c \end{cases}$$

- b) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, f é t.q. $f(x, y) \geq 0$ e $\iint_{\Omega} f(x, y) dxdy < \infty$.
 Então, $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$P(A) = \iint_A \frac{f(x, y)}{\iint_{\Omega} f(x, y)} dxdy$$

Exemplo:

$$\varepsilon_6 \rightarrow \Omega = S^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \mathcal{A} = \mathcal{B}(S^2), \forall A \in \mathcal{A},$$

$$P(A) = \frac{area(A)}{area(\Omega)} = \frac{area(A)}{\pi}$$

$$= \iint_A \frac{1}{\pi} dxdy, f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, (x, y) \in S^2 \\ 0, c.c \end{cases} = \frac{1}{4}$$

Pois,

$$\begin{aligned}
 P(A) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\theta - \frac{1}{2}(\sin 2\theta) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(0) \right) - (0 - 0) \right] = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

OBS: (Medida uniforme em \mathbb{R}^n)

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{A} = \mathcal{B}()$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Volume}(\Omega)}, & x \in \mathbb{R}^n \\ 0 & , c.c \end{cases}$$

$$A = \text{retângulo de } \mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i], a_i < b_i$$

4.2 Outras propriedades da medida de probabilidade

$$P_1 : A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

P_2 : Continuidade da probabilidade.

- a) Seja $\{A_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência crescente de eventos, t.q.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A(A_n \uparrow A)$, Então:

$$P(A) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Prova: Por hipótese, temos que:

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots \subset A$$

Então, temos que:

$$\begin{aligned} A_n &= A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup (A_3 \setminus A_2) \sqcup \dots \sqcup (A_n \setminus A_{n-1}) \\ A &= A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup \dots \sqcup (A_n \setminus A_{n-1}) \sqcup \dots \end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A,$$

Temos que:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) \\ P(A) &= P\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_{i-1})\right) \stackrel{\sigma\text{-aditividade}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \setminus A_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \setminus A_{i-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_{i-1})\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \end{aligned}$$

- b) Seja $\{A_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência crescente de eventos t.q.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A(A_n \downarrow A)$, Então:

$$P(A) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Exemplo:

ε : lançar um dado indefinidamente.

Qual a probabilidade de não sair 1 ou 6 em nenhum lançamento.

Solução:

\tilde{A} = não sair 1 ou 6 em nenhuma jogada.

Defina:

A_n = não sair 1 ou 6 até o n-ésima jogada.

Temos que:

$$P(A_n) = \left(\frac{4}{6}\right)^n$$

e

$$A_1 \supset A_2 \dots \supset A_n \supset \dots \supset \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A$$

Então, pela continuidade da probabilidade,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{6}\right)^n = 0$$

A^c : não sair 1 ou 6 em alguma jogada:

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1$$

4.3 Limite Superior e inferior de Eventos

Definição: Seja $\{A_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de eventos no espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) .
Definem-se os seguintes eventos:

$$\text{a) } \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) (= A_n \text{ infinitas vezes})$$

$$\text{b) } \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right) (= A_n \text{ algumas vezes})$$

Observação 1:

Se $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ então $\{A_n\}$ possui limite e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$$

Observação 2:

$$\begin{aligned} \omega \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) \\ \Rightarrow \omega &\in \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i, \forall n \geq 1 \\ \Rightarrow \omega &\in A_{i_{n_1}}, \forall n_1 \geq n \\ \Rightarrow \omega &\in \bigcup_{i=n_1+1}^{\infty} A_i, \\ \Rightarrow \omega &\in A_{i_{n_2}}, \forall n_2 > n_1 \\ \Rightarrow \omega &\in A_{i_{n_k}}, \forall n_k > \dots > n_2 > n_1 \end{aligned}$$

Ou seja

$$\omega \in A_{i_{n_1}}, A_{i_{n_2}}, \dots$$

ω está em infinitos eventos dessa sequência

$$\Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{A_n \text{ Infinitas vezes}\}$$

Observação 3:

•

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right), B_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$$

$$B_1 \supset B_2 \dots \supset B_n \supset \dots \supset \bigcap_{i=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

•

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right)$$

$$B_1 \subset B_2 \dots \subset B_n \supset \dots \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$$

4.4 Aula 27/03

Questões da prova

- Formular um espaço amostral para um experimento
- demonstrar alguma propriedade de probabilidade
- liminf ou limsup
- Probabilidade condicional

4.5 Probabilidade condicional

Seja (Ω, \mathcal{A}, P) o espaço de probabilidade.

Definição: Sejam $A, B \in \mathcal{A}$ tais que $P(B) > 0$, define-se a probabilidade condicional de A dado B como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observação: Note que $\forall B \in \mathcal{A}$, define-se:

$P_B : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ é uma medida de probabilidade,
 $A \longmapsto P_B(A)$

em que $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Pois P_B satisfaz (i)-(iii)

(i)

$$P_B(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$$

De fato,

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$$

Pois

$$P(A \cap B) \geq 0$$

(ii) $P_B(\Omega) = 1$

(iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ Eventos disjuntos

$$\Rightarrow P_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P_B(A_i)$$

Exemplo: ε : Lançar dois dados e observar as faces superiores

A = ambos resultados são diferentes

B = Um dos resultados é 6.

Calcule:

i)

$$P(A|B); P(B|A)$$

$$\Omega = \left\{ (i, j), \forall i, j \in \{1, \dots, 6\} \right\}$$

$$A = \{(i, j) \in \Omega : i \neq j\}$$

$$B = \{(i, j) \in \Omega : \{i, j\} \in 6 \cap \{i + j < 12\}\}$$

$$P(A) = \frac{30}{36}$$

$$P(B) = \frac{11}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{10}{36}$$

Proposição:

Seja (Ω, \mathcal{A}, P) o espaço de probabilidade e $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Então:

$$\begin{aligned} 1) \quad & P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

Prova:

Por indução:

$$\begin{aligned} h = 2 : \quad & P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \\ h = k : \quad & P(A_1 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1) \dots P(A_k|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) \\ & P(A_1 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1}) = P(A_1) \dots P(A_k|A_1 \cap \dots \cap A_k) \end{aligned}$$

Basta considerar

$$\begin{aligned} & P(\underbrace{A_1 \cap \dots \cap A_k}_A \cap A_{k+1}) \\ & \stackrel{n=2}{=} P(A_1 \cap \dots \cap A_k) \cdot P(A_{k+1}|A_1 \cap \dots \cap A_k) \\ & \stackrel{(H.I.)}{=} P(A_1) \dots P(A_k|A_1 \cap \dots \cap A_k) \cdot P(A_{k+1}|A_1 \cap \dots \cap A_k) \end{aligned}$$

2) Para $B \in \mathcal{A}$ e $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$, com A_i disjuntos.

Isto é, $\{A_i\}$ é uma partição de Ω , tem-se:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i)$$

3)

$$P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i)}$$

Exemplo:

Considere uma urna com 10 bolas em que 3 são brancas, 5 azuis e 2 vermelhas. Escolhem-se 4 bolas aleatoriamente, sem reposição. Qual a probabilidade de saírem 2 bolas azuis na amostra?

$A_i = \{\text{Obter duas bolas azuis}\}$

$$P(A) = \frac{\binom{2}{5} \binom{2}{5}}{\binom{4}{10}}$$

01/04

a) Os eventos $A, B \in \mathcal{A}$, são independentes se:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(A)P(B \setminus A)$$

b) Os eventos A_1, \dots, A_n são mutuamente independentes, se:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1) \dots P(A_k), \forall k \leq n$$

Exemplo, n=3:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Exemplo:

ε : Escolher um ponto no retângulo $[0, 1] \times [0, 1]$

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \{ (x, y) \in \mathbb{R} : 0 \leq x, y \leq 1 \}$$

A = a primeira componente é igual a segunda componente.. B = a distância da origem ao ponto escolhido é menor de 0.5.

A e B são independentes?

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{\pi}{16}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{\pi}{32} = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{16}$$

$\therefore A$ e B são independentes.

Exercícios:

(a) Dê um contra exemplo para a afirmação seguinte:

"Eventos independentes 2-2 são mutuamente independentes "

(b) ε lançar dados e observar suas faces superiores:

Defina:

A_1 = sair par no primeiro dado

A_2 = sair ímpar no primeiro dado

A_3 = soma dos resultados é par

São A_1, A_2, A_3 mutuamente independentes?

4.6 Variável aleatória

Considere (Ω, \mathcal{A}, P) um espaço de probabilidade.

Informalmente, diz-se que uma função

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é variável aleatória (v.a.)
 $\omega \longrightarrow X(\omega) = x$

$\{X = x\} = \{\omega : X(\omega) = x\}$ for um característico numérico de pontos de Ω .

Exemplo:

ε : Lançar 2 dados e observar suas faces superiores.

Se o interesse for de calcular a probabilidade associada á soma dos resultados, então:

$$|\Omega| = 36, X : \Omega \longrightarrow \{2, 3, \dots, 12\}$$

$\omega \longrightarrow X(\omega) = x$

X = soma dos resultados

$$\begin{aligned}\{X = 2\} &= \{\omega \in (i, j) \in \Omega : X(\omega) = 2\} \\ &= \{\omega = (i, j) \in \Omega : i + j = 2\} \\ &= \{(1, 1)\} \\ \{X = 3\} &= \{(1, 2), (2, 1)\}\end{aligned}$$

4.6.1 Imagem Inversa

$$f : \mathbb{R}_D \longrightarrow \mathbb{R}_I, \quad \forall B \subset \mathbb{R}_I,$$
$$\left[f(A) = B \right] \quad \text{ou} \quad f(B) = A$$

é o conjunto imagem inversa de B

Propriedades:

$$\text{a) } \left[f^{-1}(B) \right]^c = f^{-1}(B^c)$$

$$\text{b) } f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(B_i)$$

Definição: Variável aleatória

Seja (Ω, \mathcal{A}, P) um espaço de probabilidade. A função $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma variável aleatória, se:

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, sendo $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a σ -álgebra dos Borelianos de \mathbb{R}

Note que: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é σ -álgebra pois:

i) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supset \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$

ii) $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, sempre que $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

$$\Rightarrow \left[X^{-1}(B) \right]^c \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \left[X^{-1}(B^c) \right] \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

iii) Exercício*

Obs:

$$X : \underbrace{\Omega}_{A=X^{-1}(B) \in \mathcal{A}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$$

Definição 2: Variável aleatória Seja (Ω, \mathcal{A}, P) um espaço de probabilidade, a função $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é variável aleatória se:

$$\forall x \in \mathbb{R}, X^{-1}\left((-\infty, x]\right) \in \mathcal{A}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, B = (-\infty, x]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, X^{-1}\left((-\infty, x]\right) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x]\}$$

$$= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$$

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{A}$$

Exemplo:

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{A} = \left\{ \emptyset, \Omega, \underbrace{\{1, 2\}}_A, \underbrace{\{3, 4\}}_{A^c} \right\}$

Verifique se $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \in A^c \end{cases}$

e $I_B(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in B \\ 0, \omega \in B^c \end{cases}$, $B = \{1, 4\}$

São variáveis aleatórias.

Solução:

$$I_A^{-1}\left((-\infty, x]\right) = \begin{cases} \emptyset, x < 0 \\ A^c = X^{-1}(\{0\}), x \leq 0 < 1 \\ X^{-1}(\{0\}) \cup X^{-1}(\{1\}), x \geq 1 \end{cases} \in \mathcal{A}$$

$\therefore I_A$ é uma variável aleatória

$$I_B^{-1}\left((-\infty, x]\right) = \begin{cases} \emptyset, x < 0 \\ B^c = X^{-1}(\{0\}) = \{2, 3\}, x \leq 0 < 1 \\ B \cup B^c, x \geq 1 \end{cases} \notin \mathcal{A}$$

Obs:

- Se a σ -álgebra \mathcal{A} conter B e B^c , I_B seria variável aleatória
- Em geral, se $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ e $\mathcal{A} = P(\Omega)$, toda função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é variável aleatória.
- $\Omega = \mathbb{R}$ e X é uma função contínua então X é variável aleatória
- $\Omega = \mathbb{R}$, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é variável aleatória $\Leftrightarrow X$ é Borel Mensurável
- Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ variável aleatória e g Borel mensurável, então $X \circ g$ é uma variável aleatória
 $X \circ g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Definição: Medida de Probabilidade: Seja $(\Omega, \mathcal{A} = \sigma(x), P_X)$ o espaço de probabilidade. A função

$P_X : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ é medida de probabilidade.

Prova:

$$\text{i) } P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P\left([X \in B]\right) \geq 0, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\text{ii) } P_X(\mathbb{R}) = P\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right) = P(\Omega) = 1$$

$$\text{iii) } B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ disjuntos,}$$

$$P_X\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = P_X\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right)$$

$$P_X\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(B_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P_X(B_i)$$

Obs:

$$B = (-\infty, x] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow P_X(B) = P_X\left((-\infty, x]\right)$$

$$= P\left(X^{-1}\left(-\infty, x]\right)\right)$$

$$= P\left(x \in (-\infty, x]\right) = P(X \leq x) = F_X(x)$$

5 03/04

5.1 Variável Aleatória

Revisão:

$$(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

Uma função

$$X : \Omega \longrightarrow \underbrace{I}_{\text{conjunto de valores de X}} \subset \mathbb{R} \text{ é variável aleatória}$$

•

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A = X^{-1}(B) = [X \in B] \in \mathcal{A}$$

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$

$$\Rightarrow P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B) \quad \underline{f.d.a}$$

$$(\Omega, \underbrace{\mathcal{A}}_{A \in X^{-1}(B)}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R})}_{\in B}, p_x)$$

- $B = (-\infty, x]$, X é variável aleatória se $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$X^{-1}\left((-\infty, x]\right) = [X \leq x] \in \mathcal{A}, \Rightarrow P(X \leq x) = P_X\left((-\infty, x]\right) = F_X(x)$$

$$\begin{aligned} X^{-1}\left((-\infty, x]\right) &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x]\} \\ &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \end{aligned}$$

5.2 Tipos de Variáveis aleatórias

1. Uma variável aleatória X é discreta se o conjunto dos seus valores for enumerável

$$X : \Omega \longrightarrow \{x_1, x_2, \dots\}$$

$$\omega \longmapsto X(\omega) = x_i$$

Neste caso, $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$, satisfaz:

$$\text{i) } P_x(\{X_i\}) = P\left(X^{-1}(\{x_i\})\right) = P(X = x_i) \geq 0;$$

$$\text{ii) } \sum_{i \geq 1} P_X(\{x_i\}) = 1$$

Então P_x é conhecida como função de probabilidade da variável aleatória X .

Note que:

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i \geq 1} X^{-1}(\{x_i\})\right) = \sum_{i \geq 1} P_X(x_i)$$

ou

$$1 = P\left(\bigcup_{i \geq 1} X^{-1}(\{x_i\})\right) = \sum_{i \geq 1} P_X(x_i) = P\left(\bigcup_{i \geq 1} [X = x_i]\right) = P\left(X \in \{x_1, x_2, \dots\}\right) = \sum_{i \geq 1} P_X(x_i)$$

X é variável aleatória com valores $\{x_1, x_2, \dots\}$

$$\Leftrightarrow P\left(X \in \{x_1, x_2, \dots\}\right) = 1$$

5.2.1 Função de distribuição acumulada (f.d.a)

Seja X v.a. talve que $P\left(X \in \{x_1, x_2, \dots\}\right) = 1$

Então, $\forall b \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B) = \sum_{i: x_i \in B} P_X(x_i)$$

Em particular, $B = (-\infty, x], \forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_x(x) = P_X\left((-\infty, x]\right) = P\left(X^{-1}((-\infty, x])\right) = \sum_{i: x_i \in (-\infty, x]} P_X(x_i)$$

Exemplo:

E.1 $X \sim B(n, p), n \in \mathbb{N}, 0 < p < 1$

$$\varepsilon : \rightarrow \begin{cases} \text{Sucesso} = A, & P(A) = p \\ \text{Fracasso} = B, & P(B) = 1 - p \end{cases}$$

Cada repetição de ε = Prova de Bernoulli

a) $Y : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ é uma variável aleatória se:

$$P(X = 0) = P_X(\{0\}) = p$$

$$P(X = 1) = P_X(\{1\}) = 1 - p$$

Pois P_X é função de probabilidade.

Y é conhecida como variável aleatória *Bernoulli*(p)

b)

$$X : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$$

$$\omega \rightarrow X(\omega) = k$$

X = número de sucessos em n provas independentes de Bernoulli, p = P(sucesso)

Temos que:

$$P_X(k) = P\left(X^{-1}(\{k\})\right) = P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}\right) = P(X = k)$$

$$P\left(\left\{\omega = \underbrace{\{r_1, \dots, r_k\}}_{\in \{A\}}, \underbrace{r_{k+1}, \dots, r_n}_{\in A^c}\right\}\right)$$

$$\Omega = \left\{\omega = \{r_1, \dots, r_n\} : r_i \in \{A, A^c\}, i = 1, \dots, n\right\}$$

$$\Rightarrow P_X(k) = \binom{n}{k} \cdot P\left(\underbrace{(A, \dots, A)}_k, \underbrace{(A^c, \dots, A^c)}_{n-k}\right)$$

$$= \binom{n}{k} P(A) \dots P(A) \cdot P(A^c) \dots P(A^c)$$

$$\Rightarrow P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n \quad (*)$$

Como:

$$\sum_{k=0}^n P_X(k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \left[(1-p) + p\right]^n = 1$$

Então P_x dada em (*) é uma função de probabilidade de $X \sim B(n, p)$

Aplicação:

Suponha que para a megasena da Páscoa são vendidas 120 000 000 de cartelas.

a) Qual é a probabilidade da megasena da páscoa ser ganha por 10 pessoas?

b) Qual a probabilidade da megasena ser ganha por no máximo 10 pessoas ?

$$P(X \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = P\left(X^{-1}\left((-\infty, 10]\right)\right)$$

Solução:

$$p = \frac{1}{50063860}$$

$$\Rightarrow P(X = 10) = P(x^{-1}(10)) = \binom{n}{10} p^{10} (1-p)^{n-10}$$

Revisar as v.as

1. $X \sim Geo(p)$

$$P_X(k|p) = P(X^{-1}(k)) = P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}\right) = P(X = k)$$

$$P\left(\left\{\omega = \underbrace{\{f_1, f_2, \dots\}}_{\in A^c} \underbrace{\{s_1\}}_{\in A}\right\}\right)$$

$$\Omega = \left\{\omega = \{f_1, f_2, \dots, s_1\} : t_k \in \{A^c\}, k = 1, 2, \dots \quad s_1 \in \{A\}\right\}$$

$$\Rightarrow P_X(k) = P\left(\overbrace{A^c, A^c, \dots}^k, \overbrace{A}^1\right)$$

$$P(A) = p \Rightarrow P(A^c) = 1 - p$$

$$\Rightarrow P_X(k|p) = (1 - p)^k \cdot p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2. $X \sim Pascal(r, p)$

$$P_X(k|p) = P(X^{-1}(k)) = P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}\right) = P(X = k)$$

$$P\left(\left\{\omega = \underbrace{\{f_1, f_2, \dots\}}_{\in A^c} \underbrace{\{s_1, s_2, \dots\}}_{\in A}\right\}\right)$$

$$\Omega = \left\{\omega = \{f_1, f_2, \dots, s_1, s_2, \dots\} : f_k \in \{A^c\}, k = 1, 2, \dots \quad s_i \in \{A\}, i = 1, 2, \dots\right\}$$

$$\Rightarrow P_X(k) = P\left(\overbrace{A^c, A^c, \dots}^k, \overbrace{A, \dots, A}^i\right)$$

$$P(A) = p \Rightarrow P(A^c) = 1 - p$$

$$= \binom{i+k-1}{i} P(A) \cdots P(A) \cdot P(A^c) \cdots P(A^c)$$

$$\Rightarrow P_X(k) = \binom{i+k-1}{i} p^k (1-p)^i, \quad k = 0, 1, \dots \quad i = 1, 2, \dots$$

3. $X \sim \text{Hipergeo}(N, r, p)$

$$P_X(k|p) = P(X^{-1}(k)) = P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}\right) = P(X = k)$$

$$P\left(\omega = \left\{A_k \cap A_k^c : A_k = \{e_1, e_2, \dots, e_j, j = 0, 1, \dots, k\}, k = 0, 1, \dots, i\right\}, i = 0, 1, \dots, N\right)$$

$$K \leq N$$

$$\Omega = \left\{ \omega = (d_1, \dots, d_n) : d_i \in: \right\}$$

$$= \binom{i+k-1}{i} P(A) \cdots P(A) \cdot P(A^c) \cdots P(A^c)$$

$$\Rightarrow P_X(k) = \binom{i+k-1}{i} p^k (1-p)^i, k = 0, 1, \dots \quad i = 1, 2, \dots$$

4. $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

08/04

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_x) \Leftrightarrow P(A) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B) \text{ f.d.a}$$

1. Variável aleatória discreta, $P(X \in \{x_1, x_2, \dots\}) = 1, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
 $P(X \in B) = \sum_{i: x_i \in B} P_X(x_i), P_x P_X(x_i), \forall x_i \text{ é função de probabilidade } P(X = x_i)$

- $B = (-\infty, x], P(X \leq x) = \sum_{i: x_i \leq x} P(X = x_i) \text{ f.d.a}$

- $B = [a, b], a, b \in \mathbb{R}$

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{i: x_i=a}^b P(X = x_i)$$

2. Variável aleatória Absolutamente Contínua (a.c.)

X é a.c. se existir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Tais que $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$,

chamada de função de densidade de probabilidade (fdp).

Neste caso,

$$P(X \in B) = \int_{[X \in B] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B)} f(x) dx$$

- $(-\infty, x], \forall x \in \mathbb{R}$

$$P(X \leq x) = \int_{X^{-1}\left((-\infty, x]\right) = \left[X \in (-\infty, x]\right] = [X \leq x]} f(x) dx$$

- $B = [a, b]$

$$P(a \leq x \leq b) \int_a^b f(x) dx$$

Exemplos:

•

$$X \sim \text{Exp}(\beta) \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

•

$$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta) \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$$

$$\begin{cases} \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \\ \alpha = n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n) = n! \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \\ \Gamma(1) = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-bx^c} dx = \frac{\Gamma(\frac{a}{c})}{c b^{\frac{a}{c}}}$$

• $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

• $X \sim W(\alpha, \beta)$

• $X \sim \text{og}N(\mu, \sigma^2)$

• $X \sim \text{logistica}(\alpha)$

• $X \sim \text{Cauchy}(\alpha)$

5.3 Função de variável aleatória

Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ variável aleatória e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Borel Mensurável. Então $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $Y = g(X)$ é variável aleatória.

$$\Omega, \mathcal{A} \xrightarrow{X} \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Y é variável aleatória se $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), Y^{-1}(B) \in \mathcal{A}$,

$$Y^{-1}(B) = X^{-1}\left(g^{-1}(B)\right) = [y \in B] = [X \in g^{-1}(B)]$$

$$\Leftrightarrow P(y \in B) = P\left(X \in g^{-1}(B)\right)$$

Casos:

a) X discreta, $P(X \in \{x_1, x_2, \dots\}) = 1 \Rightarrow Y$ discreta

$$\Omega \xrightarrow{X} \{x_1, x_2, \dots\} \xrightarrow{g} \{y_1, y_2, \dots\}$$

$$Y = g(X)$$

Caracterizada por

$$P(Y = y) = P(Y \in \{y\}) = \sum_{\substack{i: \{x_i \in g^{-1}(\{y\})\} \\ x_i: g(x_i) = y}}^{\infty} P(X = x_i), \quad B = \{y\}$$

b) X a.c. com fdp $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow Y = g(X)$?

Temos que, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B = (-\infty, y]$

$$P(Y \leq y) = \int_{\substack{= [X \in g^{-1}((-\infty, y])] \\ [x: g(x) \in (-\infty, y)]}}^{\infty} f(x) dx$$

Y discreta

$$P(Y = y) = \int_{[x: g(x) = y]} f(x) dx$$

Y a.c.

fdp: $F'_Y(y) = f_Y(y) \forall y$

Em particular, se g for inversível:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P\left(g(X) \leq y\right) \\ &= P\left(X \leq g^{-1}(y)\right) \\ &= F_X\left(g^{-1}(y)\right) \Leftrightarrow F'_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \left| \frac{d}{dy} \left(g^{-1}(y)\right) \right| \end{aligned}$$

Exemplo:

- 1) Considere $X \sim B(n, 0.5)$: o número de caras que aparecem em n lançamentos de uma moeda honesta.

Um jogador lança a moeda e $\begin{cases} \text{ganha } 1, \text{ se sair cara} \\ \text{perde } 1, \text{ se sair coroa} \end{cases}$

Determine a distribuição do ganho do jogador

Solução:

$Y =$ Ganho do jogador após n lançamentos

$$Y = \underbrace{X}_{\text{Caras}} - \underbrace{(n - X)}_{\text{Coroas}} = 2X - n$$

$$\Omega \xrightarrow{X} \{0, 1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{g} \{-n, -n+2, \dots, n\}$$

$$Y = g(x)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad P(Y = y) = \sum_{x_i: g(x_i)=y} P(X = x_i)$$

$$g(x) = 2x - n = y \Rightarrow x = \frac{y + n}{2}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad P(Y = y) = \sum_{\{x_i: g(x_i)=y\}} P(X = x_i) = P(X = \frac{y+n}{2}) = \binom{n}{\frac{y+n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ou $P(Y = y) = P(2x - n = y) = P(X = \frac{y+n}{2})$ pois g é inversível

- 2) $X \sim \text{Binom}(3, \frac{1}{2})$ e $Y = |X - 1|$

Determine a distribuição de Y

Sol:

$$\Omega \xrightarrow{X} \{0, 1, 2, \dots, 3\} \xrightarrow{g} \{0, 1, 2\}$$

$$Y = g(x)$$

$$P(Y = 0) = P(X = 1)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad P(Y = 1) = \sum_{\{x_i: g(x_i)=1\}} P(X = x_i) = P(X = 0) + P(X = 2)$$

$$P(Y = 2) = P(X = 3)$$

3)

$$X \sim U[0, 1], \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

e $Y = g(x)$, Determine a distribuição de Y.

Sol:

$$\Omega \xrightarrow{X} [0, 1] \xrightarrow{g} \{0, 1\}$$

$$P(Y = 0) = \int_{x:g(x)=0} f(x)dx = \int_{0.5}^1 1dx = \frac{1}{2}$$

$$P(Y = 1) = \int_{x:g(x)=0} f(x)dx = \int_0^{0.5} 1dx = \frac{1}{2}$$

4) $X \sim U[0, 1]$ e $g(x) = -\log(x)$, $Y = g(x)$

Determine a distribuição de Y

Sol:

$$\Omega \xrightarrow{x} [0, 1] \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$Y = g(x)$$

$$f_Y(y) = f_x\left(g^{-1}(y)\right) \left| \frac{d}{dy} \left(g^{-1}(y) \right) \right|$$

$$-\log(x) = y \Leftrightarrow x = e^{-y} = g^{-1}(y)$$

Assim,

$$f_Y(y) = f_x\left(e^{-y}\right) \left| -e^{-y} \right|, \quad f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$x \in [0, 1] \Leftrightarrow y \geq 0 \Rightarrow f_Y(y) = e^{-y}$$

$$x \notin [0, 1] \Leftrightarrow y < 0 \Rightarrow f_Y(y) = 0$$

$$\therefore Y \sim \text{Exp}(1)$$

Função de Distribuição

Definição: uma função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de distribuição (f.d.), se

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, F é não decrescente;

$$x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$$

2. F é contínua à direita.

$$\{x_n\} \text{ é uma sequência t.q. } x_n \downarrow x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x)$$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x) = 1$ e $\lim_{n \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

Tipos:

1. F.d Discreta

uma f.d. F é discreta se existir uma função p t.q. $P(x_i) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1$,

$$x_i \in \mathbb{R}, i \geq 1$$

Então,

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{i: x_i \leq x} P(x_i)$$

2. F.d absolutamente contínua (a.c)

Uma f.d. é a.c. se existir uma função f t.q. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $\int_{\mathbb{R}} f(x) = 1$

Neste caso, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Daí,

$$F'(x) = f(x) \text{ f.d.p}$$

3. F.d Mista

$$F = F_d + F_c$$

F_d : Parte discreta

F_c : Parte contínua, $F_c = F_{a.c} + F_s$

Sendo $F_{a.c}$: parte a.c. e F_s : parte singular

$F_{a.c}$ é t.q. $F_{a.c} = f(x)$ f.d.p e $F'_s(x) = 0$

$$\therefore F = F_d + F_{a.c} + F_s$$

Passos:

1. Identificar os pontos de descontinuidade

$$F_j\left(\{x_1, x_2, \dots\}\right)$$

2. Calcular o tamanho do salto em cada x_i ,

$$b_{x_i} = F(x_i^+) - F(x_i^-) = F(x_i) - F(x_i^-)$$

3. Parte discreta:

$$F_d(x) = \sum_{i: x_i \leq x} b_{x_i}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

4. Parte a.c.

$$F'_{ac}(x) = f(x) = F'(x),$$

Pois

$$F'(x) = \cancel{F'_d(x)}^{\nearrow 0} + F'_{ac}(x) + \cancel{F'_s(x)}^{\nearrow 0}$$

$$\Rightarrow F_{ac}(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

5. Parte singular

$$F_S = F - (F_d + F_{ac})$$

Exemplo:

Seja $X \sim U[0, 1]$ e $Y = \min\left\{X, \frac{1}{2}\right\}$

- a) Determine a distribuição de Y
- b) Decomponha a distribuição em parte discreta e contínua.

Sol:

$$\text{a) } X \sim U[0, 1] \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$Y = \begin{cases} X, & X \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & X > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} & P\left(Y \leq y, X \leq \frac{1}{2}\right) + P\left(Y \leq y, X > \frac{1}{2}\right) \\ &= P\left(X = Y \leq y, X \leq \frac{1}{2}\right) + P\left(Y = \frac{1}{2}, Y \leq y, X > \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ \underbrace{P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) + P\left(X > \frac{1}{2}\right)}_{=1}, & y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

- b) i) Descontinuidade = $\{y_1 = \frac{1}{2}\}$
- ii) Tamanho do salto:

$$\begin{aligned} b_{x_1} &= F(y_1) - F(y_1^-) \\ &= F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}^-\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- iii) $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F_y(d) = \begin{cases} 0, & y \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

iv)

$$F'_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1, & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ 0, & y \geq \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < y < \frac{1}{2} \\ 0, & c.c \end{cases} = f(x)$$

$$\Rightarrow F_{ac}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \int_0^y 1dy & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ \int_0^{\frac{1}{2}} 1dy = \frac{1}{2}, & y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore F_{ac}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & y > \frac{1}{2} \end{cases}$$

v)

$$F_s(x) = F(y) - \left(F_d(y) - F_{ac}(y) \right)$$

$$F_d(y) - F_{ac}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ 1, & y \geq \frac{1}{2} \end{cases} = F(y) \Rightarrow F_s(y) \equiv 0$$

f.d. de variável aleatória:

X v.a.

$$\rightarrow F(x) = P_X\left((-\infty, x]\right), \quad \forall x \in \mathbb{R} = P(X \leq x) \quad f.d$$

Prova:

$$\begin{aligned} \text{i) } x < y &\Rightarrow (-\infty, x] \subset (-\infty, y] \\ P\left((-\infty, x]\right) &\leq P\left((-\infty, y]\right) \\ &\Rightarrow F(x) \leq F(y) \end{aligned}$$

ii) $\{x_n\}, x_n \downarrow x$

$$(-\infty, x_1] \subset (-\infty, x_2] \subset \dots \bigcup_{n \geq 1} (-\infty, x_n] = (-\infty, x]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_X\left((-\infty, x_n]\right)$$

Como $\{(-\infty, x_n]\}_{n \geq 1}$ é uma sequência decrescente de eventos, pela continuidade de probabilidade.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_X\left((-\infty, x_n]\right) &= P_X\left((-\infty, x]\right) = F(x) \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x) \end{aligned}$$

iii)

$$x_n \downarrow -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0$$

e

$$x_n \uparrow \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 1$$

6 22/04

Vetores Aleatórios

Seja X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias definidas sob (Ω, \mathcal{A}, P)
 Então, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \xrightarrow{\omega \rightarrow X(\omega)=\mathbf{x}} \mathbb{R}^n$ é um vetor aleatório se:

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, A = \underbrace{\mathbf{X}^{-1}\left((-\infty, \mathbf{x}]\right)}_{\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, \mathbf{x}]\}} \in \mathcal{A} = \sigma(X_1, \dots, X_n),$$

Sendo

$$\underbrace{(-\infty, \mathbf{x}]}_{\text{Retângulo de } \mathbb{R}^n} = (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n] \in \mathbb{R}^n$$

Então:

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \underbrace{P\left(\mathbf{X}^{-1}\left((-\infty, \mathbf{x})\right)\right)}_{\text{Função de distribuição Acumulada de } \mathbf{X}} = P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) \\ &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= \underbrace{P\left(X_1, \dots, X_n \in (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]\right)}_{\left\{\omega : \left(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\right) \in (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]\right\}} \end{aligned}$$

Casos Particulares

1. Vetor Aleatório discreto

$$\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \dots\}$$

Tal que:

$$P_{\mathbf{X}} : \sigma(X_1, \dots, X_n) \longrightarrow [0, 1]$$

Satisfaz:

$$\text{i) } \forall \mathbf{x}, \quad P_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) \geq 0$$

$$\text{ii) } \sum_{\mathbf{x}} P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \geq 0$$

e

$$\sum_{i_n} \dots \sum_{i_1} P(X_1 = x_{i_1}, \dots, X_n = x_{i_n}) = 1$$

$$\mathbf{x}_i = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}).$$

Neste caso, $P_{\mathbf{X}}$ é chamada de Função de probabilidade conjunta de X_1, \dots, X_n .

Assim,

$$\begin{aligned} \text{fda: } P_{\mathbf{x}}\left((-\infty, \mathbf{x}]\right) &= P\left(\mathbf{X}^{-1}((-\infty, \mathbf{x}])\right) = P\left(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}\right) \\ \Rightarrow F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) = \sum_{i_n \leq x_n} \cdots \sum_{i_1 \leq x_1} P\left(X_1 = x_{i_1}, \dots, X_n = x_{i_n}\right) \end{aligned}$$

Exemplo (E18):

$\bar{X} : \Omega \rightarrow \{1, 2, 3\}$: número da primeira bola retirada

$Y : \Omega \rightarrow \{1, 2, 3\}$: número da segunda bola retirada

$\mathbf{X} = (X, Y) : \Omega \xrightarrow{\omega \rightarrow \mathbf{X}(\omega)} I \subset \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$

$$I = \left\{ (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2) \right\}$$

$$\mathbf{X}(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$$

$$\text{a) } P(X = x, Y = y) = \frac{1}{A_{3,2}} = \frac{1}{6}, \forall (x, y)$$

Satisfaz:

$$P(X = x, Y = y) = \frac{1}{6} > 0$$

e

$$\sum_{(x,y) \in I} P(X = x, Y = y) = 1$$

$$\text{b) } P(X < Y) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2. Vetor aleatório absolutamente contínuo

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínuo se existir uma função, chamada de f.d.p conjunta,

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{i) } f(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{ii) } \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$

a f.d.a conjunta, é dada por:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= P\left(\mathbf{X}^{-1}\left((-\infty, \mathbf{x}]\right)\right) = P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) \\ &= \int_{-\infty}^x f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_1, \dots, dt_n \end{aligned}$$

Tem-se também que:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n)$$

Exemplos:

$$\text{(a) } \mathbf{X} = (X, Y)$$

$$P\left((X, Y) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]\right) = P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2)$$

$$\begin{cases} \sum_{a_2 \leq y \leq b_2} \sum_{a_1 \leq x \leq b_1} P(X = x, Y = y), & \mathbf{X} \text{ discreto} \\ \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx dy, & \mathbf{X} \text{ absolutamente contínuo} \end{cases}$$

Distribuição Marginal:

Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ um vetor aleatório com f.d.a $F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)$

Então:

$$\begin{aligned} & \lim_{x_k \rightarrow \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(X_1^{-1}\left((-\infty, x_1]\right), \dots, \underbrace{X_k^{-1}\left((-\infty, x_k]\right)}_{\Omega}, \dots, X_n^{-1}\left((-\infty, x_n]\right)\right) \\ &= \underbrace{F_{X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)}_{\text{Distribuição marginal de ordem n-1}} \end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (X, Y) \\ \underbrace{F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)}_{\text{f.d.a conjunta de X e Y}} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y) \\ &\Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \end{aligned}$$

São distribuições marginais de Y e X respectivamente.

- Distribuição marginais \nRightarrow Determina modelo conjunto
- Modelo conjunto \Rightarrow Distribuição marginais

Casos Particulares

- $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ Discreto
 $\Rightarrow P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ f.p conjunta
 As probabilidade marginais,

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = P\left(X_1^{-1}(\{x_1\}), \dots, X_{n-1}^{-1}(\{x_{n-1}\})\right)$$

$$\begin{aligned} & P(X = x, Y = y) \\ &\Rightarrow P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) \\ &\Rightarrow P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y) \end{aligned}$$

São funções de probabilidade marginal de X e Y, respectivamente, Pois:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= P\left(X^{-1}(\{x\})\right) = P\left(X^{-1}(\{x\}), \Omega\right) = P\left(X^{-1}(\{x\}), Y^{-1}\left(\bigcup_{y_i} \{y_i\}\right)\right) \\ &= \sum_{y_i} P\left(X^{-1}(\{x\}), Y^{-1}(\{y_i\})\right) = \sum_{y_i} P(X = x, Y = y) \end{aligned}$$

- $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ absolutamente contínuo \Leftrightarrow fdp conjunta $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$
As densidade marginais são:

$$f_{X_1, \dots, X_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_{\mathbb{R}} f(t_1, \dots, t_n) dt_n$$

n=2:

$f(x, y)$ f.d. conjunta e

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$$

São as densidades marginais de X e Y, respectivamente.

Definição: As variáveis aleatórias X_1, \dots, X_n são independentes, se:

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Em particular:

- X_1, \dots, X_n discretas são independentes, se:

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n)$$

•

- X_1, \dots, X_n abs contínuas são independentes, se:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

7 24/04

$$\begin{aligned} X \sim N(\mu, \sigma^2) &\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)'(\sigma^2)^{-1}(x - \mu) \right\} \end{aligned}$$

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu)'(\Sigma)^{-1}(\mathbf{x} - \mu) \right\}$$

$$\mathbf{X} \sim N(\mu, \Sigma)$$

$$\mathbf{X} = (X, Y) \sim N(\mu, \Sigma), \quad \mu = (\mu_1, \mu_2), \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{21} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1 - \rho_{12})^2} \exp \left\{ \frac{1}{2(1 - \rho_{12})^2} \left[\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho_{12} \left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{y - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{y - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$\therefore \mathbf{X} \sim N(\mu, \Sigma) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\Leftarrow \text{ valido, } \rho=0} \quad X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \quad i = 1, \dots, n$$

Por outro lado, correlação nula \nrightarrow variáveis aleatórias (componentes) são independentes

Função de distribuição multivariada

Definição: Uma função de distribuição $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ é uma função de distribuição n-dimensional, se satisfaz:

i) F é não decrescente em cada componente;

$$\forall x, y, \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow F(x_1, \dots, x, \dots, x_n) \leq F(x_1, \dots, y, \dots, x_n)$$

ii) F é contínua á direita em cada componente;

Dada $y_n \downarrow y$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, y_n, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, y, \dots, x_n)$$

iii)

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

e

$$\lim_{para \text{ algum } x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, \dots, y_n, \dots, x_n = 0)$$

iv) \forall retângulo de \mathbb{R}^n , $(a, b] = (a, b] \times \dots \times (a_n, b_n]$, $Vol_F((a, b]) \geq 0$

$$Vol_F((a, b]) = \Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} F(t_1, \dots, t_n)$$

Com

$$\Delta_{a_k}^{b_k} F(t_1, \dots, t_n) = F(t_1, \dots, b_k, \dots, t_n) - F(t_1, \dots, a_k, \dots, t_n)$$

Para n=2:

$$Vol_F((a, b]) = Vol_F((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) = \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} F(t_1, t_2)$$

$$\begin{aligned} Vol_F((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) &= \Delta_{a_2}^{b_2} [F(b_1, t_2) - F(a_1, t_2)] \\ &= F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) \geq 0 \end{aligned}$$

Proposição:

Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um vetor aleatório. Então $F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ definida por:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= P\left(\mathbf{X}^{-1}\left((-\infty, \mathbf{x}]\right)\right), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R} \\ &= P\left(\mathbf{X} \in (-\infty, \mathbf{x}]\right) = P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) \end{aligned}$$

É função de distribuição n-variada.

Prova:

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \in (-\infty, x_1], \dots, X_n \in (-\infty, x_n])$$

Provar seguindo prova para o caso n=1

$$Vol_F\left((a, b]\right) = \Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} F(t_1, \dots, t_n) = P(a_1 < X_1 \leq b_1, \dots, a_n < X_n \leq b_n) \geq 0$$

$$Vol_F\left((a, b]\right) = P(a_1 < X_1 \leq b_1, a_2 < X_2 \leq b_2)$$

$$= P(X_1 \leq b_1, a_2, X_2 \leq b_2) - P(X_1 \leq a_1, a_2 < X_2 \leq b_2)$$

8 29/04

Função de Vetor Aleatório Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ um vetor aleatório definido em (Ω, \mathcal{A}, P)

Então:

$$\mathbf{X}^{-1} \left(\begin{matrix} \Omega \\ g^{-1}(B) \end{matrix} \right) \in \mathcal{A} \xrightarrow{\mathbf{X}} \begin{matrix} \mathbb{R}^n \\ g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \end{matrix} \xrightarrow{g} \begin{matrix} \mathbb{R} \\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \end{matrix}$$

$$Z = g(\mathbf{X})$$

Se $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é Borel mensurável,

$Z = g(\mathbf{X}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma variável aleatória, Então:

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \\ Z^{-1}(B) &= [Z \in B] \\ &= \mathbf{X}^{-1} \left(g^{-1}(B) \right) \\ &= [\mathbf{X} \in g^{-1}(B)] \end{aligned}$$

Assim,

$$P \left(Z^{-1}(B) \right) = P(Z \in B) = P \left(\mathbf{X} \in g^{-1}(B) \right)$$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ é f.d.a de Z

Casos Particulares

1) \mathbf{X} é discreto $\Rightarrow Z = g(\mathbf{X})$ discreto.

$$\begin{aligned} P(Z \in B) &= P \left(\mathbf{X} \in g^{-1}(B) \right) \\ &= \sum_{\mathbf{x}_i : g(\mathbf{x}_i) \in B} P(\mathbf{X} = \mathbf{x}_i) \end{aligned}$$

Também:

f.p. :

$$P(Z = z) = \sum_{\mathbf{x}_i : g(\mathbf{x}_i) = z} P(\mathbf{X} = \mathbf{x}_i)$$

2) \mathbf{X} absolutamente contínuo $\Rightarrow Z = g(\mathbf{X}) \begin{cases} Discreta \\ Continua \end{cases}$

$$P(Z \in B) = P \left(\mathbf{X} \in g^{-1}(B) \right)$$

$$= \int_{\mathbf{x}:g(\mathbf{x}) \in B} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \stackrel{\mathbf{X}=(X,Y)}{=} \int_{(x,y):g(x,y) \in B} f_{(X,Y)}(x,y) dx dy$$

Método do Jacobiano (Teorema da função Implícita)

$$h : \begin{cases} \mu = x \\ v = g(x, y), \quad v = z \end{cases}$$

Se as derivadas parciais de μ e v existem, são contínuas e

$$|J(x, y)| = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \right|$$

Então pelo Teorema da função Implícita existe h^{-1} e:

$$h^{-1} : \begin{cases} x = \mu \\ y = y(\mu, v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = d\mu \\ dy = dh^{-1}(\mu, v) \\ dy = \frac{1}{J(\mu, v)} dv \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= \iint_{\{(x,y):g(x,y) \leq z\}} f_{X,Y}(x,y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\mu, y(\mu, v)) d\mu \right] \left| \frac{1}{J(\mu, v)} \right| dv \\ \therefore F_Z(z) = P(Z \leq z) &= \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\mu, y(\mu, v)) d\mu \left| \frac{1}{J(\mu, v)} \right| \right] dv \\ \Rightarrow F'_Z(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\mu, y(\mu, v)) \frac{1}{|J(\mu, v)|} d\mu = f_Z(v), \quad v = z = g(x, y) \end{aligned}$$

Exemplo:

Sejam X, Y i.i.d $U(0, 1)$. Determine a densidade de $Z = \frac{X}{Y}$

Solução:

Defina:

$$h : \begin{cases} u = x \\ v = \frac{x}{y}, & v = z \end{cases}$$

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \end{pmatrix}, \quad |J(x, y)| = \frac{-x}{y^2} \neq 0$$

$$h^{-1} : \begin{cases} x = uy = \frac{u}{v} \end{cases}$$

$$\frac{1}{J(\mu, v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{pmatrix} = -\frac{u}{v^2}$$

$$\Rightarrow f_Z(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(u, \frac{u}{v}\right) \frac{|u|}{v^2} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) \cdot f_Y\left(\frac{u}{v}\right) \frac{|u|}{v^2} du$$

$$f_Y\left(\frac{u}{v}\right) = \begin{cases} 1, & 0 < \frac{u}{v} < 1 \Leftrightarrow 0 < u < v \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$v < 0 \Rightarrow f_Z(v) = 0$$

$$0 < v < 1 \Rightarrow f_Z(v) = \int_{-0}^v 1 \cdot 1 \frac{u}{v^2} du = \frac{1}{v^2} \left(\frac{u^2}{2} \right) \Big|_0^v = \frac{1}{2}$$

$$v \geq 1 \Rightarrow f_Z(v) = \int_0^1 1 \cdot 1 \frac{u}{v^2} du = \frac{1}{2v^2}$$

$$\therefore f_Z(v) = \begin{cases} 0, & v < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq v < 1 \\ \frac{1}{2v^2}, & v \geq 1 \end{cases}$$

Exercício:

$$X \sim N(0, 1), \quad Y \sim \chi^2_{(n)}$$

Determina a densidade de $Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$

(X,Y) vetor aleatório $g(X,Y) = Z$, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_Z(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u, y(u,v)) \left| \frac{1}{J(u,v)} \right| du$$

$$g : \begin{cases} u = x \\ v = g(u, y) \end{cases} \Rightarrow \det \left(J(x, y) \right) \neq 0 \left(J_h(u, v) = \frac{1}{J(u,v)} \right)$$

$$\exists g^{-1}h : \begin{cases} x = u \\ y = y(u, v) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{J(u, v)} = \det \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right) = J_h(u, v)$$

Vetor aleatório de vetor aleatório

$$\Omega \xrightarrow{\mathbf{X}} \mathbb{R}^n_{g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$$

$$\mathbf{Z} = g(\mathbf{X}), \quad \mathbf{Z} = g(\mathbf{X}) = \left(g_1(X_1), \dots, g_n(X_n) \right)$$

1. \mathbf{X} abs. cont. e g inversível Defina

$$g : \begin{cases} z_1 = g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ z_n = g_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Se

$$\det(J(x_1, \dots, x_n)) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$$

e as derivadas são contínuas, então existe g^{-1} ,

$$h = g^{-1} : \begin{cases} x_1 = h_1(z_1, \dots, z_n) \\ \vdots \\ x_n = h_n(z_1, \dots, z_n) \end{cases}$$

e

$$J_h(z_1, \dots, z_n) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Daí

$$f_{Z'}(z') = f_{X'} \left(h_1(z_1, \dots, z_n), \dots, h_n(z_1, \dots, z_n) \right) \left| J_h(z_1, \dots, z_n) \right|$$

Note que para $n=2$:

$$f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = f_{X_1, X_2} \left(h_1(z_1, z_2), h_2(z_1, z_2) \right) \left| J_h(z_1, z_2) \right|$$

$$\Rightarrow f_{Z_1}(z_1) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1, X_2}(h_1, h_2) \cdot \left| J_h(z_1, z_2) \right| dz_2$$

$$f_{Z_2}(z_2) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1, X_2}(h_1, h_2) \cdot \left| J_h(z_1, z_2) \right| dz_1$$

Em geral, tem-se que:

$$F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = P(\mathbf{Z} \leq \mathbf{z}) = \int \cdots \int f_{\mathbf{X}} \left(h_1(t_1, \dots, t_n), \dots, h_n(t_1, \dots, t_n) \right) \left| J_h(t_1, \dots, t_n) \right| d\mathbf{t}$$

$$\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n), \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$$

Exemplo:

Considere (X, Y) com fdp conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 y^2}, & x \geq 1, y \geq 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Sema $Z_1 = X \cdot Y$ e $Z_2 = \frac{X}{Y}$

- (a) Determine a f.d.p conjunta de Z_1 e Z_2
- (b) Determine a densidade de $X \cdot Y = Z_1$

Sol:

$$g : \begin{cases} z_1 = x \cdot y \\ z_2 = \frac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \det(J(x, y)) = \det \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{2y} \end{pmatrix} = -\frac{2x}{y} \neq 0$$

$$\begin{aligned} g^{-1} = h : \begin{cases} x = (z_1 \cdot z_2)^{\frac{1}{2}} \\ y = \frac{z_1}{z_2} \end{cases} &\Rightarrow \det(J(x, y)) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(z_1 \cdot z_2)^{-\frac{1}{2}} z_2 & \frac{1}{2}(z_1 \cdot z_2)^{-\frac{1}{2}} z_1 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{z_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{-z_1}{z_2} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4z_2} - \frac{1}{4z_2} = -\frac{1}{2z_2} \\ &\Rightarrow \det(J(z_1, z_2)) = -\frac{1}{2z_2} \end{aligned}$$

Daí

a)

$$f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{1}{2z_1^2 \cdot z_2}, & \frac{1}{z_1} \leq z_2 \leq z_1, \quad z_1 \geq 1 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

$$f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = f_{X, Y} \left((z_1 \cdot z_2)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left| \frac{-1}{2z_2} \right|,$$

$$z_1 \geq 1, \text{ pois } x, y, \geq 1, z_2 = \frac{x}{y}$$

b)

$$\begin{aligned} f_{Z_1}(z_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X, Y} \left((z_1 \cdot z_2)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \frac{1}{2z_2} dz_2 \\ &= \int_{\frac{1}{z_1}}^{z_1} \left(\frac{z_2}{z_1 z_2 z_1} \right) \left(\frac{1}{2z_2} \right) dz_2 = \frac{1}{2z_1^2} \int_{\frac{1}{z_1}}^{z_1} \frac{1}{z_2} dz_2 \\ &\Rightarrow f_{X \cdot Y}(z_1) = \frac{1}{2z_1^2} \left[\ln(z_1) - \ln\left(\frac{1}{z_1}\right) \right] \\ &\Rightarrow f_{X \cdot Y}(z_1) = \frac{1}{z_1^2} \ln(z_1), \quad z_1 \geq 1 \end{aligned}$$

2. \mathbf{X} abs cont. e g qualquer (não inversível)

$$\mathbf{Z} = g(\mathbf{X}) \rightarrow f_{\mathbf{Z}}$$

08/05

Esperança

* Revisão (Integral de Riemann-Stiles)

Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ f.d.a e $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função borel-mensurável. A integral de R-S de ϕ com respeito a F é definida por:

$$\int_a^b \phi(x) dF(x) := \lim_{\|\tau\|} \sum_i \phi(y_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

Sendo a partição de $[a, b]$

$$= [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

$$\tau = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\} \quad e \quad y_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n$$

Note que:

$$F(x) = x$$

$$\text{Então } I = \int_a^b \phi(x) dx = \lim_{\|\tau\|} \sum_i \phi(y_i) \Delta x_i \quad \left(\text{Integral de Riemann} \right)$$

Integral de Lebesgue-Stieltjes

Seja:

$$I = \int_a^b \varphi(x) dF(x) \text{ Integral de R-S}$$

Resultado (Theorema de Caratheodory)

Dada uma f.d. F , existe uma medida de probabilidade $p_F : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ t.q.

$$F(x) = p_F\left((-\infty, x]\right)$$

em que \mathcal{A} é σ -algebra do espaço amostral Ω

Utilizando o resultado anterior, tem-se que:

$$\int_a^b \varphi(x) dF(x) = \int_{\Omega} \varphi d \underbrace{p_F}_{\text{medida de probabilidade}} \quad \left(\text{Integral de Lebesgue - Stieltjes} \right)$$

Propriedade da integral de R-S

1)

$$\begin{aligned}\int_a^b c\varphi(x)dx &= \lim_{\|\tau\|} \sum_{i=1}^n c\varphi(y_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ c \int_a^b \varphi(x)dx &= \lim_{\|\tau\|} \sum_{i=1}^n c\varphi(y_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= c \int_a^b \varphi(x)dF(x)\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\int_a^b [\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)]dF(x) \\ = \alpha \int_a^b \varphi_1(x)dF(x) + \beta \int_a^b \varphi_2(x)dF(x)\end{aligned}$$

3) F fx

- F discreta com descontinuidade $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, Então:

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)dF(x) &= \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)b_{x_i}\end{aligned}$$

Se X é uma variável aleatória tal que $X \sim F$, então

$$\int_a^b \varphi(x)dF(x) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)P(X = x_i)$$

- F absolutamente contínua com f.d.p f , então:

$$\int_a^b \varphi(x)dF(x) = \int_a^b \varphi(x)f(x)dx$$

- $F = F_d + F_{ac} + F_S$

$$\int_a^b \varphi(x)dF(x) = \sum_{x_i \text{ desc. de } F} \varphi(x_i)b_{x_i} + \int_a^b \varphi(x)f(x)dx$$

Definição de Esperança: Seja X uma variável aleatória definida sob o espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) e F sua f.d.a.

Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Borel mensurável. A esperança de $\varphi(x)$ é definida por:

$$E\left(\varphi(x)\right) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dF(x)$$

Sempre que ela existir

Obs:

$$E\left(\varphi(x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dF(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^a \varphi(x) dF(x)}_{(1)} + \underbrace{\int_a^{\infty} \varphi(x) dF(x)}_{(2)}$$

Existe, se:

- $(1) < \infty, (2) < \infty \Rightarrow E\left(\varphi(x)\right) < \infty$
- $(1) = -\infty, (2) < \infty \Rightarrow E\left(\varphi(x)\right) = -\infty$
- $(1) < \infty, (2) = +\infty \Rightarrow E\left(\varphi(x)\right) = +\infty$

Exemplo:

X v.a.

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x dF(x) = \begin{cases} \sum_i x_i P(X = x_i), & X \text{ discreto} \\ \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx, & X \text{ absolutamente contínuo} \end{cases}$$

$$E(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k dF(x) = \begin{cases} \sum_i x_i^k P(X = x_i), & X \text{ discreto} \\ \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx, & X \text{ absolutamente contínuo} \end{cases}$$

$$\text{var}(X) = E\left(X - E(X)\right)^2$$

Exercícios

Calcule a esperança e variância, se existir, de:

1)

$$X \sim \text{Cauchy}(1), \quad f(x) = \frac{1}{(1+x)^2\pi}, \quad x \in \mathbb{R}$$

2)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

3)

$$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$$

4)

$$X \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$$

5)

$$X \sim t_{(n)}$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} X &\sim \text{Exp}(\lambda), \quad Z = \min\{X, Y\} \\ E(Z) &= \int \min\{X, \lambda\} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} \min\{X, \lambda\} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\lambda} x \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_{\lambda}^{\infty} \lambda \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left(-x e^{-\lambda x} \right) \Big|_0^{\lambda} + \int_0^{\lambda} e^{-\lambda x} dx + \lambda \left(-e^{-\lambda x} \right) \Big|_{\lambda}^{+\infty} \\ &= -\lambda e^{-\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \left(e^{-\lambda^2} - 1 \right) + \lambda e^{-\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda^2} \right) \end{aligned}$$

Proposição:

X é uma variável aleatória definida em (Ω, \mathcal{A}, P) , Então:

$$E\left(\varphi(x)\right) = \int_0^{\infty} P(\varphi(X) > x) dx - \int_{-\infty}^0 P(\varphi(X) \leq x) dx$$

Obs:

1) X discreta com valores inteiros;

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k) \Leftrightarrow E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k)$$

9 13/05

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-bx^c} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{a}{c}\right)}{c(b)^{\frac{a}{c}}}$$

Exemplo:

$$X \sim \text{Exp}(p)$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} P(X > x) dx = \int_x^{\infty} e^{-\beta x} dx \\ &= \left(-\frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \right) \Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} P(X^2 > x) dx = \int_0^{\infty} P(X > \sqrt{x}) dx = \int_0^{\infty} e^{-\beta x^{\frac{1}{2}}} dx = \frac{\Gamma(2)}{\beta^{\frac{1}{2}}}$$

$X > 0$ discreta com valores $\{0, 1, 2, \dots\}$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$$

Exemplo:

$$X \sim \text{Geo}(p)$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

Exemplo: (E1, pg. 189)

X simétrica em torno de $\mu \Rightarrow E(X) = \mu$

Prova:

Hipótese: $P(X \geq x + \mu) = P(X \leq x - \mu)$

Sugestão: use (α) , para $\mu = 0$ e depois para $Y = X - \mu$ é imediato.

Esperança de função de vetor aleatório

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Borel mensurável

$\Rightarrow Z = g(\mathbf{X})$ é um vetor aleatório e

$$E(Z) = E\left(g(\mathbf{X})\right) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) dF(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{i_n} \cdots \sum_{i_1} g(\mathbf{x}_i) P(\mathbf{X} = \mathbf{x}_i) \\ \int_{i_n} \cdots \int_{i_1} g(\mathbf{x}_i) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) dx_n \end{cases}$$

Exemplo:

1) X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias e $a_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, n$, Então:

$$\begin{aligned} E(\underbrace{a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n}_{g(\mathbf{X})}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n) dF_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} a_1 x_1 \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) dx_1 + \cdots + \int_{\mathbb{R}^n} a_n x_n dx_n = a_1 E(X_1) + \cdots + a_n E(X_n) \end{aligned}$$

Isto é,

$$E(a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) = a_1 E(X_1) + \cdots + a_n E(X_n)$$

2)

$$\begin{aligned} E(X_1 \cdots X_2) &= \iint_{\mathbb{R}^n} x_1 x_2 dF_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \\ E\left(\frac{X_1}{X_2}\right) &= \iint_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1}{x_2} dF_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

3) X variável aleatória

$$E\left[X - E(X)\right]^2 = \text{var}(X)$$

$$\text{var}(X) = E\left[X^2 - 2XE(X) + \left(E(X)\right)^2\right]$$

$$\therefore \text{var}(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

4) Medidas de dependência linear (Pearson)

$$\rho_{X_1, X_2} = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{var(X_1)}\sqrt{var(X_2)}}$$

$$cov(X_1, X_2) = E\left[(X_1 - E(X_1)) \cdot (X_2 - E(X_2))\right]$$

$$cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$$

5) X_1, X_2 são independentes.

$$\Rightarrow \rho_{X_1, X_2} = 0$$

$$\text{Pois } cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$$

6) $\rho_{X_1, X_2} = 0 \Rightarrow X_1, X_2$ são independentes?

7) $X \sim B(n, p)$ Defina:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \begin{cases} X_i \sim \text{Bernoulli} \\ E(X_i) = p, var(X_i) = p(1-p) \\ X_i = \begin{cases} 1, \text{sucesso}, P(X_i = 1) = p \\ 0, \text{fracasso}, P(X_i = 0) = 1-p \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n p = np$$

$$var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = np(1-p)$$

Exercício:

$$X \sim \text{Hiper}(N, r, n)$$

Prover que:

$$E(X) = \frac{nr}{N}$$

$$\text{var}(X) = \frac{nr}{N} \frac{N-r}{N} \frac{N-n}{N-1}$$

Solução:

$$p_X(x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

•

$$E(X) = \sum_x x \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$x \binom{r}{x} = x \frac{r!}{(x)!(r-x)!} = \frac{r(r-1)!}{(x-1)!((r-1)-(x-1))!} = r \binom{r-1}{x-1}$$

$$\binom{N-r}{n-x} = \frac{(N-r)!}{(N-r-n+x)!(n-x)!} = \frac{\left((N-1)-(r-1)\right)!}{\left(N-r-n+x\right)! \left((n-1)-(x-1)\right)!}$$

$$= \binom{(N-1)-(r-1)}{(n-1)-(x-1)}$$

$$\binom{N}{n} = \frac{N}{n} \binom{N-1}{n-1}$$

$$\therefore E(X) = \frac{rn}{N} \sum_x \frac{\overbrace{\frac{\binom{r-1}{x-1} \binom{(N-1)-(r-1)}{(n-1)-(x-1)}}{\binom{N-1}{n-1}}}^1}{\underbrace{X \sim \text{Hiper}(N-1, r-1, n-1)}} \Rightarrow E(X) = \frac{rn}{N}$$

•

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Note que

$$E(X^2) = E(X(X-1) + X)$$

Utilizando uma argumentação similar a utilizada acima, tem-se:

$$\begin{aligned} x(x-1) \binom{r}{x} &= x(x-1) \frac{r!}{(x)!(r-x)!} = (x-1) \frac{r(r-1)!}{(x-1)!((r-1)-(x-1))!} \\ &= r(r-1) \frac{(r-2)!}{(x-2)!((r-2)-(x-2))!} = r(r-1) \binom{r-2}{x-2} \end{aligned}$$

$$\binom{N-r}{n-x} = \frac{(N-r)!}{(N-r-n+x)!(n-x)!} = \frac{\left((N-2)-(r-2)\right)!}{\left(N-r-n+x\right)! \left((n-2)-(x-2)\right)!}$$

$$\binom{N}{n} = \frac{N(N-1)}{n(n-1)} \binom{N-2}{n-2}$$

$$\therefore E(X(X-1) + X) = \frac{r(r-1)n(n-1)}{N(N-1)} \sum_x \underbrace{\frac{\binom{r-2}{x-2} \binom{(N-2)-(r-2)}{(n-2)-(x-2)}}{\binom{N-2}{n-2}}}_{X \sim \text{Hiper}(N-2, r-2, n-2)} + \frac{rn}{N}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \frac{r(r-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{rn}{N}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{r(r-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{rn}{N} - \left(\frac{rn}{N}\right)^2 = \frac{rn}{N} \left(\frac{(r-1)(n-1)}{(N-1)} + 1 - \frac{rn}{N} \right) \\ &= \frac{rn}{N} \left(\frac{N(r-1)(n-1)}{N(N-1)} + \frac{N(N-1)}{N(N-1)} - \frac{rn(N-1)}{N(N-1)} \right) \\ &= \frac{rn}{N} \left(\frac{N(rn - n - r + 1)}{N(N-1)} + \frac{N^2 - N}{N(N-1)} - \frac{rnN - rn}{N(N-1)} \right) \\ &= \frac{rn}{N} \left(\frac{Nrn - Nn - Nr + N}{N(N-1)} + \frac{N^2 - N}{N(N-1)} - \frac{Nrn - rn}{N(N-1)} \right) \\ &= \frac{rn}{N} \left(\frac{N^2 - Nn - Nr + rn}{N(N-1)} \right) = \frac{rn}{N} \frac{(N-r)(N-n)}{N(N-1)} \end{aligned}$$

20/05

Esperança

Seja (Ω, \mathcal{A}, P) espaço de probabilidade e $A \in \mathcal{A}$

$I_A : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$ função Indicadora de A
 $\omega \longrightarrow I_A(\omega)$

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(I_A = 1) = P(A) \\ P(I_A = 0) = P(A^c) \end{cases}$$
$$\Rightarrow E(I_A) = \int_{\mathbb{R}} x dF_{I_A}(x) = \sum_{x_i=0} x_i P(I_A = x_i)$$
$$\Rightarrow E(I_A) = P(A)$$

Esperança Condicional

i) Esperança condicional dado um evento

Seja (Ω, \mathcal{A}, P) um espaço de probabilidade e $A, B, \in \mathcal{A}$, Então:

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

Por outro lado, seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, uma variável aleatória, Então:

A esperança condicional de X dado B é a função definida por:

$$E(X|B) = \int_{\mathbb{R}} x dF_X(x|B), \quad (1)$$

Sendo

$$F_X(x|B) = P(X \leq x|B) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap B)}{P(B)}$$

A equação (1) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} E(X|B) &= \int_{\mathbb{R}} x \frac{dP(\{X \leq x\} \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{1}{P(B)} \int_B x dF_x(x) \\ &= \frac{1}{P(B)} E(X \cdot I_B) \quad (2) \\ \frac{1}{P(B)} &\begin{cases} \sum_{i: \{X=x_i\} \cap B} P(X = x_i), & X \text{ Discreto} \\ \int_B x f(x) dx, & X \text{ Continuo} \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplo:

Seja $X \sim U[0, 1]$ e $B_i = [\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}]$ com $\Omega = \bigcup_{i=1}^{10} B_i$

Determine $E(X|B_i)$.

Solução:

$\left(\underbrace{\Omega}_{[0,1]}, \mathcal{B}([0,1]), P \right)$, Sendo P Uniforme

$$E(X|B_i) = \frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} x f(x) dx = \frac{1}{\frac{1}{10}} \int_{\frac{i-1}{10}}^{\frac{i}{10}} x \cdot 1 dx$$

$$E(X|B) = \frac{2i-1}{20}, \quad i = 1, \dots, 10$$

Exemplo 2:

$X \sim U[-1, 1]$. Calcule $E(X|X > 0)$

Solução:

$$\begin{aligned} E(X|X > 0) &= \frac{1}{P(X > 0)} \int_{\{X>0\}} x f(x) dx = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 x \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pois

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}, P(X > 0) = \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}$$

ii) Esperança condicional dada uma variável aleatória discreta .

Sejam $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $Y : \Omega \longrightarrow \{y_1, y_2, \dots\}$.

Como

$$B_i = Y^{-1}(\{y_i\}) = \{Y = y_i\} \in \mathcal{A}, i = 1, \dots$$

Tal que $\bigcup_{i \geq 1} B_i = \bigcup_{i \geq 1} \{Y = y_i\} = \Omega$. Então a função $E(X|Y)$ chamada de esperança condicional de Y, é tal que:

$$E(X|Y)(\omega) = E(X|Y = y_i) = \frac{E\left(X \cdot I_{\{Y=y_i\}}\right)}{P(Y = y_i)}$$

Note que se X for discreta, $X : \Omega \longrightarrow \{x_1, x_2, \dots\}$

$$\begin{aligned} E(X|Y)(\omega) &= E(X|Y = y_i) = \frac{1}{P(Y = y_i)} \sum_j x_j P(X = x_j, Y = y_i) \\ &= \sum_j x_j \frac{P(X = x_j, Y = y_i)}{P(Y = y_i)} \end{aligned}$$

Questão:

X e Y são absolutamente contínuas, $E(X|Y) = ?$

$$E(X|Y)(\omega) = E(X|Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} dx$$

iii) σ -álgebra gerada por uma variável aleatória

- Considere

$Y : \Omega \longrightarrow \{y_1, y_2, \dots\}$ variável aleatória discreta, Então

$$B_i = Y^{-1}(\{y_i\}) = \{Y = y_i\} \in \mathcal{A}$$

e $\cup B_i = \Omega$. Uma σ -álgebra que contém a coleção $\mathcal{C} = \{B_1, B_2, \dots\}$

É chamada de σ -álgebra gerada por Y, denotada por $\sigma(Y)$.

Temos que $\sigma(Y)$ é a coleção de uniões e intersecções finitas de eventos de \mathcal{C} e seus complementares, Isto é:

$$\sigma(Y) = \left\{ \emptyset = \bigcup_{i \in I = \emptyset} \{Y = y_i\}, \dots, \mathcal{C}, \dots, \Omega = \bigcup_{i \in I = \mathbb{N}} \{Y = y_i\} \right\}$$

I = conjunto de índices. Além disso, $\forall a, b, \in \mathbb{R}$,

$$\overbrace{Y^{-1}\left((a, b]\right)}^{\text{Info de } Y} = \bigcup_{i: a < y_i \leq b} \{Y = y_i\} \in \sigma(y)$$

- $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ absolutamente contínua.

$\sigma(Y)$ contém a coleção de Borelianos do tipo,

$$\forall a, b, \in \mathbb{R}, Y^{-1}\left((a, b]\right) \in \sigma(Y)$$

- Y é uma variável aleatória qualquer definida em (Ω, \mathcal{A}, P)

$$\Rightarrow \sigma(Y) \subset \mathcal{A}$$

A informação de Y está contida em \mathcal{A}

iv) Esperança Condicional

Seja X uma variável aleatória definida em (Ω, \mathcal{A}, P) . Uma variável aleatória denotada por $W = E(X|\mathcal{A}_1)$, $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$, é a esperança condicional de X dado \mathcal{A}_1 , se :

- (a) $\sigma(W) \subset \mathcal{A}_1$
- (b) $E(X \cdot I_A) = E(W I_A)$, $\forall A \in \mathcal{A}_1$ quase certamente (Exceto, A t.q. $P(A)=0$)

* Se $E|X| < \infty$, tem-se que W existe e é única. Exemplos:

- 1) X variável aleatória e $Y : \Omega \longrightarrow \{y_1, y_2, \dots\}$

Temos que

$$\text{i) } W = E(X|Y) \text{ e } W(\omega) = E(X|Y = y_i) = g(y_i)$$

$$\Rightarrow W = g(Y) \Rightarrow \sigma(W) \subset \sigma(Y)$$

$$W = E(X|Y) = E(X|\sigma(Y))$$

- ii) Considere $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, I = índices. Temos que:

$$\begin{aligned} E(X \cdot I_A) &= E\left(X \cdot \sum_{i \in I} I_{\{Y=y_i\}}\right) \\ &= \sum_{i \in I} E(X \cdot I_{\{Y=y_i\}}) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} &E\left(\underbrace{W \cdot I_A}_{g(Y) \text{ discreta}}\right) \\ E(W \cdot I_A) &= \sum_i g(y_i) \cdot P(Y = y_i) \\ &= \sum_i E(X|Y = y_i) P(Y = y_i) \\ &= \sum_i \frac{E(X \cdot I_{\{Y=y_i\}})}{P(Y = y_i)} P(Y = y_i) \\ &= \sum_i E(X \cdot I_{\{Y=y_i\}}) \\ E(X I_A) &= E\left[E(X|\mathcal{A}_1) I_A\right] \end{aligned}$$

22/05

E1 :

$$Y : \Omega \longrightarrow \{y_1, y_2, \dots\}$$

$$E(X|\sigma(Y)) = E(X|Y) = W$$

Note que:

$$E(X|Y)(\omega) = E(X|Y = y_i) \begin{cases} \sum_j x_j \frac{P(X=x_j, Y=y_i)}{P(Y=y_i)}, & X \text{ Discreta} \\ \int_{\{Y=y_i\}} x_i \frac{f_X(x)dx}{P(Y=y_i)}, & X \text{ Abs. Cont} \end{cases}$$

E2:

$\Omega, A, B \in \mathcal{A}, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\mathcal{A}_B = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\} = \sigma(B)$

- $W = E(X|\sigma(B))$ é tal que:

$$W(\omega) = E(X|B) \text{ para } \omega \in B$$

$$W(\omega) = E(I_A|\sigma(B)) = P(A|\sigma(B))$$

- $X = I_A$

$$W = E(I_A|\sigma(B)) = P(A|\sigma(B))$$

Obs: X,Y variáveis aleatórias contínuas

$$\begin{aligned} E(X|Y)(\omega) &= E(X|Y = y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x dF_{X|Y}(x|y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} dx \end{aligned}$$

9.1 Propriedades

$$\left(X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, (\Omega, \mathcal{A}, P) \right)$$

P1. $E(X) = E[E(X|\mathcal{A}_1)]$, $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$

Prova segue pela definição.

EX1:

$$E(X) = E[E(X|Y)]$$

$$= \begin{cases} \sum_{y_i} E(X|Y = y_i)P(Y = y_i), & Y \text{ discreta} \\ \int_{\mathbb{R}} E(X|Y = y)f_Y(y)dy, & Y \text{ abs. Cont.} \end{cases}$$

EX2

Considere X e Y com densidade conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y}, x, y, > 0$$

Determine $E(X|Y)$

Solução

$$\begin{aligned} E(X|Y=y) &= \int_0^{\infty} x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} dx = \int_0^{\infty} x \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y e^{-y}} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{x}{y} e^{-\frac{x}{y}} dx = y \end{aligned}$$

$$\therefore E(X|Y=y) = y$$

$$\leftrightarrow E(X|Y) = Y \sim \text{Exp}(1)$$

P2. X_1, X_2 variáveis aleatórias definidas em (Ω, \mathcal{A}, P) , $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, Então:

$$E(c_1 X_1 + c_2 X_2 | \mathcal{A}_1) = c_1 E(X_1 | \mathcal{A}_1) + c_2 E(X_2 | \mathcal{A}_1)$$

P3. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então

$$E(X|\sigma(Y)) = E(X|Y) = E(X)$$

Em geral, se X e \mathcal{A}_1 são independentes,

$$E(X|\mathcal{A}_1) = E(X)$$

P4. Se $\sigma(X) \subset \mathcal{A}_1$, então

$$E(X|\mathcal{A}_1) = X$$

Neste caso, \mathcal{A}_1 fornece toda a estrutura de X (X se torna conhecida ou não aleatória)

Exemplo:

Seja $X = g(y)$, $\sigma(x) = \sigma(g(y)) \subset \sigma(Y)$

$$E\left(g(y)|\sigma(y)\right) = g(y)$$

p5. Se $\sigma(x) \subset \mathcal{A}_1$ e Z é uma variável aleatória qualquer, então

$$E(Z \cdot X | \mathcal{A}_1) = g(y) E(Z | \sigma(y))$$

Exemplo:

$$E(g(y)Z | \sigma(Y)) = g(y) E(Z | \sigma(y))$$

Exemplo: (X, Y) , $X \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)$ e $\forall x > 0$, $Y|X \sim U[0, x^2]$

a) Distribuições de $Y|X^2 = Z$

$$F_{Y|x=x} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{x^2} & 0 \leq t < x^2 \\ 1 & t \geq x^2 \end{cases}$$

$$F_{Y|X^2} = P(Y \leq y|X^2 = x) = P(Y \leq y|X = x^{\frac{1}{2}})$$

$$F_{Y|X=x^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y}{x}, & 0 \leq y < x \\ 1, & y > x \end{cases}$$

$$Y|X^2 = 2 \sim U[0, x] \Leftrightarrow Y|X \sim U[0, x]$$

b) $E(X) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$$E(Y) = E[E(Y|X^2)] = E\left[\frac{X}{2}\right] \frac{1}{2} E(X) = 1$$

$$E(XY) = E[E(XY|X^2)] \stackrel{P_5}{=} E(XE(Y|X^2))$$

$$= E\left[X \frac{X}{2}\right] = \frac{1}{2} E(X^2)$$

$$\frac{1}{2} \left[\text{var}(X) - E(X)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[4 + 4 \right] = 4$$

$$\therefore \text{Cov}(XY) = 4$$

Exemplo:

$$E(X|\sigma(Y))$$

X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

$$E(S_{n+1}|\mathcal{A}_n) = E(S_n + X_{n+1}|\mathcal{A}_n)$$

$$\stackrel{P2}{=} E(S_n|\mathcal{A}_n) + E(X_{n+1}|\mathcal{A}_n)$$

$$\stackrel{P3}{=} S_n + E(X_{n+1})$$

Se $E(X_{n+1}) = 0$

$$E(S_{n+1}|\mathcal{A}_n) = S_n$$

$\Leftrightarrow \{S_n, \mathcal{A}_n\}$ é uma Martingale.

10 29/05 Algumas Desigualdades Importantes

1. Desigualdade de Jensen

Seja X uma variável aleatória com $E(X) < \infty$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, então:

$$E(g(X)) \geq g(E(X))$$

Prova:

Temos que

$$\begin{aligned} g(x) &\geq L(x), \forall x \\ \Leftrightarrow g(x) &\geq g(x_0) + m(x - x_0) \quad (1) \end{aligned}$$

Como $E(X) < \infty$, tome $x_0 = E(X)$. Então, de (1), segue que:

$$g(X) \geq g(E(X)) + m(X - E(X)) \quad (2)$$

Aplicando esperança, em (2), obtem-se:

$$E(g(X)) \geq g(E(X)) + m(\cancel{E(X)} - \cancel{E(X)})$$

Exemplo:

$$g(x) = |x|^p, \quad p \geq 1 \quad \text{É convexa.}$$

$$\Rightarrow E(|X|^p) \geq |E(X)|^p$$

$$\Rightarrow |E(X)| \leq \left[E(|X|^p) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1 : \text{D-Holder}$$

$p=1$:

$$|E(X)| \leq E(|X|) \Leftrightarrow -E|X| \leq E(X) \leq E|X|$$

2. Desigualdade de Chebyshev

- Básica

Seja X uma variável aleatória com $E(X) < \infty$ e $X \geq 0$, então:

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}, \forall \varepsilon > 0$$

Prova:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} x dF(X) = \int_{\{x:x>\varepsilon\}} x dF(x) + \int_{\{x:x\leq\varepsilon\}} x dF(x) \\ &\Rightarrow E(X) \geq \int_{\{x:x>\varepsilon\}} x dF(x) > \int_{\{x:x>\varepsilon\}} \varepsilon dF(x) \\ &\Rightarrow E(X) \geq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{\{x:x>\varepsilon\}} dF(X) = \varepsilon P(X > \varepsilon) \end{aligned}$$

- Clássica

Seja X uma variável aleatória com $Var(X) < \infty$, então:

$$P\left(|X - E(X)| > \varepsilon\right) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}, \forall \varepsilon > 0$$

Prova:

Segue da Desigualdade Básica. Basta definir

$$Y = |X - E(X)|,$$

$$P\left(|X - E(X)| \geq \varepsilon\right) = P\left(|X - E(X)|^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{E\left(|X - E(X)|^2\right)}{\varepsilon^2}$$

Exemplo: Desigualdade de Markov

$$P\left(|X| > \varepsilon\right) \leq \frac{E\left(|X|^t\right)}{\varepsilon^t}, \text{ Para algum } t \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon > 0$$

Exemplo:

Se X é variável aleatória com $Var(X) = 0$, então $P(X = c) = 1$ e c é uma constante.

Prova:

Nota que se $P(X = c) = 1$, então $E(X) = c$. Isto é,

Provar que $P(X = c) = 1 \Leftrightarrow$ Provar que $P(X \neq E(X)) = 0$

De fato:

$$P(X \neq E(X)) = P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2} = 0$$

Para algum $\varepsilon > 0$.

10.1 Função Característica

Seja X uma variável aleatória definida em (Ω, \mathcal{A}, P) . A função

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itx}\right), i \in \mathbb{C} : i^2 = -1$$

é a função característica (f.c) de X .

Tem-se que:

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itx}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_X(x), \quad t \in \mathbb{R}$$

Além disso,

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \sum_k e^{itk} P(X = k), & X \text{ Discreta} \\ \int e^{itx} f_X(x) dx, & X \text{ Continua} \end{cases}$$

Observação

$$\begin{aligned} z &= e^{itx} = \cos(tx) + i \cdot \sin(tx) \\ \bar{z} &= e^{-itx} = \cos(tx) - i \cdot \sin(tx) \\ z \cdot \bar{z} &= |z| = \cos^2(tx) + \sin^2(tx) = 1 \\ \Rightarrow e^{itx} \cdot e^{-itx} &= \left| e^{itx} \right| = 1 \end{aligned}$$

Propriedades

(a)

$$\varphi_X(0) = E\left(e^{i(0)x}\right) = 1;$$

(b)

$$\begin{aligned} |\varphi_X(t)| &= \left| E(e^{itx}) \right| \leq E\left| e^{itx} \right| = 1 \\ |\varphi_X(t)| &\leq 1 \end{aligned}$$

(c)

$$\varphi_{aX+bY}(t) = E\left(e^{it(aX+bY)}\right) = E\left(e^{itax} \cdot e^{itby}\right)$$

Se X e Y são independentes, Então:

$$\begin{aligned} E\left(e^{itax} \cdot e^{itby}\right) &= E\left(e^{iatx}\right) \cdot E\left(e^{ibty}\right) \\ &= \varphi_X(at) \cdot \varphi_Y(bt) \end{aligned}$$

(d) Sejam X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes.

$$\Rightarrow \varphi_{X_1+\dots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdots \varphi_{X_n}(t)$$

Se X_1, \dots, X_n são i.d.,

$$\varphi_{X_1+\dots+X_n}(t) = \left[\varphi_{X_1}(t) \right]^n$$

(e) Linearidade

$$\begin{aligned} \varphi_{aF_1+bF_2}(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\left(aF_1(x) + bF_2(x)\right) \\ &= a \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_1(x) + b \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_2(x) = a\varphi_{F_1}(t) + b\varphi_{F_2}(t) \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-u}^u \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} \varphi_X(t) dt \end{aligned}$$

(f) Fórmula de Inversão:

Seja X uma variável aleatória, $X \sim F$. Então, $\forall x \leq y$,

$$\frac{F(y) + F(y^-)}{2} + \frac{F(x) + F(x^-)}{2}$$

Se X for absolutamente contínua:

$$F(y) - F(x) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-u}^u \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} \varphi_X(t) dt$$

Para $x=0$,

$$F(y) - F(0) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-u}^u \frac{1 - e^{-ity}}{it} \varphi_X(t) dt$$

Derivando,

$$f_X(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-ity} \varphi_X(t) dt$$