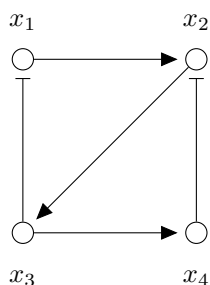


Lista de exercícios de Introdução à Redes Booleanas Probabilísticas

Gustavo Estrela de Matos

19 de dezembro de 2017

Exercício 1. Dada a rede booleana abaixo:



(1) Monte a matriz de interação.

R:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \end{array}$$

(2) Para cada gene, encontre sua expressão booleana

R:

Para x_1 :

$x_1(t)$	$x_3(t)$	$x_1(t+1)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Portanto, $x_1(t+1) = x_1(t)\bar{x}_3(t)$

Para x_2 :

$x_2(t)$	$x_1(t)$	$x_4(t)$	$x_2(t+1)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\begin{aligned} \text{Portanto, } x_2(t+1) &= x_1(t)\bar{x}_2(t)\bar{x}_4(t) \\ &+ \bar{x}_1(t)x_2(t)\bar{x}_4(t) \\ &+ x_1(t)x_2(t)\bar{x}_4(t) \\ &+ x_1(t)x_2(t)x_4(t) \end{aligned}$$

Para x_3 :

$x_3(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t+1)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$\text{Portanto, } x_3(t+1) = x_2(t) + x_3(t)$$

Para x_4 :

$x_4(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t+1)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$\text{Portanto, } x_4(t+1) = x_3(t) + x_4(t)$$

Exercício 2. Monte a tabela de probabilidade condicional para a rede do exercício 1 usando o modelo de PBNs de α s e β s

R:

Para x_1 :

$x_1(t)$	$x_3(t)$	$P(x_1(t+1) = 0 x_1(t), x_3(t))$	$P(x_1(t+1) = 1 x_1(t), x_3(t))$
X	1	$\frac{e^\beta}{e^\beta + e^{-\beta}}$	$\frac{e^{-\beta}}{e^\beta + e^{-\beta}}$
0	0	$\frac{1}{1 + e^{-\alpha}}$	$\frac{e^{-\alpha}}{1 + e^{-\alpha}}$
1	0	$\frac{e^{-\alpha}}{1 + e^{-\alpha}}$	$\frac{1}{1 + e^{-\alpha}}$

Para x_2 :

$x_2(t)$	$x_1(t)$	$x_4(t)$	$P(x_2(t+1) = 0 x_1(t), x_2(t), x_4(t))$	$P(x_2(t+1) = 1 x_1(t), x_2(t), x_4(t))$
X	1	0	$\frac{e^{-\beta}}{e^\beta + e^{-\beta}}$	$\frac{e^\beta}{e^\beta + e^{-\beta}}$
X	0	1	$\frac{e^\beta}{e^\beta + e^{-\beta}}$	$\frac{e^{-\beta}}{e^\beta + e^{-\beta}}$
0	0	0	$\frac{1}{1 + e^{-\alpha}}$	$\frac{e^{-\alpha}}{1 + e^{-\alpha}}$
1	0	0	$\frac{e^{-\alpha}}{1 + e^{-\alpha}}$	$\frac{1}{1 + e^{-\alpha}}$
0	1	1	$\frac{1}{1 + e^{-\alpha}}$	$\frac{e^{-\alpha}}{1 + e^{-\alpha}}$
1	1	1	$\frac{e^{-\alpha}}{1 + e^{-\alpha}}$	$\frac{1}{1 + e^{-\alpha}}$

Para x_3 :

$x_3(t)$	$x_2(t)$	$P(x_3(t+1) = 0 x_2(t), x_3(t))$	$P(x_3(t+1) = 1 x_2(t), x_3(t))$
X	1	$\frac{e^{-\beta}}{e^{\beta}+e^{-\beta}}$	$\frac{e^{\beta}}{e^{\beta}+e^{-\beta}}$
0	0	$\frac{1}{1+e^{-\alpha}}$	$\frac{e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}}$
1	0	$\frac{e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}}$	$\frac{1}{1+e^{-\alpha}}$

Para x_4 :

$x_4(t)$	$x_3(t)$	$P(x_4(t+1) = 0 x_3(t), x_4(t))$	$P(x_4(t+1) = 1 x_3(t), x_4(t))$
X	1	$\frac{e^{-\beta}}{e^{\beta}+e^{-\beta}}$	$\frac{e^{\beta}}{e^{\beta}+e^{-\beta}}$
0	0	$\frac{1}{1+e^{-\alpha}}$	$\frac{e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}}$
1	0	$\frac{e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}}$	$\frac{1}{1+e^{-\alpha}}$

Exercício 3. Mostre a tabela de transição de estados para a PBN do último exercício

R:

	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0000	0.82	0.041	0.041	2.04e-03	0.041	2.04e-03	2.04e-03	1.02e-04	0.041	2.04e-03	2.04e-03	1.02e-04	2.04e-03	1.02e-04	1.02e-04	5.06e-06
0001	0.043	0.86	2.14e-03	0.043	1.06e-04	2.14e-03	5.30e-06	1.06e-04	2.14e-03	0.043	1.06e-04	2.14e-03	5.30e-06	1.06e-04	2.64e-07	5.30e-06
0010	1.11e-04	0.045	2.24e-03	0.9	5.55e-06	2.24e-03	1.11e-04	0.045	2.76e-07	1.11e-04	5.55e-06	2.24e-03	1.38e-08	5.55e-06	2.76e-07	1.11e-04
0011	1.17e-04	0.047	2.34e-03	0.95	2.89e-07	1.17e-04	5.81e-06	2.34e-03	2.89e-07	1.17e-04	5.81e-06	2.34e-03	7.17e-10	2.89e-07	1.44e-08	5.81e-06
0100	1.06e-04	5.30e-06	0.043	2.14e-03	2.14e-03	1.06e-04	0.86	0.043	5.30e-06	2.64e-07	2.14e-03	1.06e-04	1.06e-04	5.30e-06	0.043	2.14e-03
0101	1.11e-04	2.24e-03	0.045	0.9	2.76e-07	5.55e-06	1.11e-04	2.24e-03	5.55e-06	1.11e-04	2.24e-03	0.045	1.38e-08	2.76e-07	5.55e-06	1.11e-04
0110	2.89e-07	1.17e-04	1.17e-04	0.047	5.81e-06	2.34e-03	2.34e-03	0.95	7.17e-10	2.89e-07	2.89e-07	1.17e-04	1.44e-08	5.81e-06	5.81e-06	2.34e-03
0111	6.08e-06	2.45e-03	2.45e-03	0.99	1.51e-08	6.08e-06	6.08e-06	2.45e-03	1.51e-08	6.08e-06	6.08e-06	2.45e-03	3.74e-11	1.51e-08	1.51e-08	6.08e-06
1000	1.06e-04	5.30e-06	5.30e-06	2.64e-07	0.043	2.14e-03	2.14e-03	1.06e-04	2.14e-03	1.06e-04	1.06e-04	5.30e-06	0.86	0.043	0.043	2.14e-03
1001	2.04e-03	0.041	1.02e-04	2.04e-03	1.02e-04	2.04e-03	5.06e-06	1.02e-04	0.041	0.82	2.04e-03	0.041	2.04e-03	0.041	1.02e-04	2.04e-03
1010	2.89e-07	1.17e-04	5.81e-06	2.34e-03	1.17e-04	0.047	2.34e-03	0.95	7.17e-10	2.89e-07	1.44e-08	5.81e-06	2.89e-07	1.17e-04	5.81e-06	2.34e-03
1011	1.11e-04	0.045	2.24e-03	0.9	5.55e-06	2.24e-03	1.11e-04	0.045	2.76e-07	1.11e-04	5.55e-06	2.24e-03	1.38e-08	5.55e-06	2.76e-07	1.11e-04
1100	2.76e-07	1.38e-08	1.11e-04	5.55e-06	1.11e-04	5.55e-06	0.045	2.24e-03	5.55e-06	2.76e-07	2.24e-03	1.11e-04	2.24e-03	1.11e-04	0.9	0.045
1101	2.64e-07	5.30e-06	1.06e-04	2.14e-03	5.30e-06	1.06e-04	2.14e-03	0.043	5.30e-06	1.06e-04	2.14e-03	0.043	1.06e-04	2.14e-03	0.043	0.86
1110	1.51e-08	6.08e-06	6.08e-06	2.45e-03	6.08e-06	2.45e-03	2.45e-03	0.99	3.74e-11	1.51e-08	1.51e-08	6.08e-06	1.51e-08	6.08e-06	6.08e-06	2.45e-03
1111	2.89e-07	1.17e-04	1.17e-04	0.047	5.81e-06	2.34e-03	2.34e-03	0.95	7.17e-10	2.89e-07	2.89e-07	1.17e-04	1.44e-08	5.81e-06	5.81e-06	2.34e-03

Exercício 4. Faça um programa que recebe $n > 0$, α , β e a matriz de que representa a rede e devolva a matriz de transição.

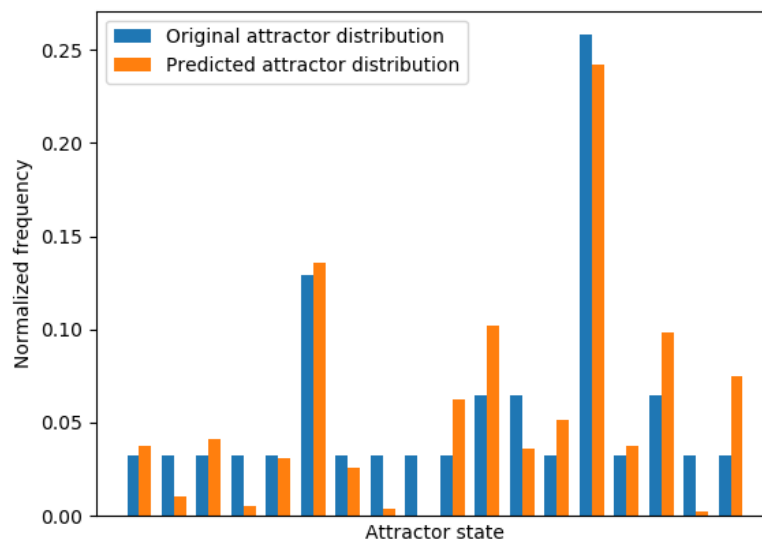
Exercício 5. Faça um programa que recebe $n > 0$, uma probabilidade de inversão de bits p e a matriz de que representa a rede e devolva a matriz de transição.

Exercício 6. Faça um programa que receba a matriz de transição e devolva a matriz estacionária.

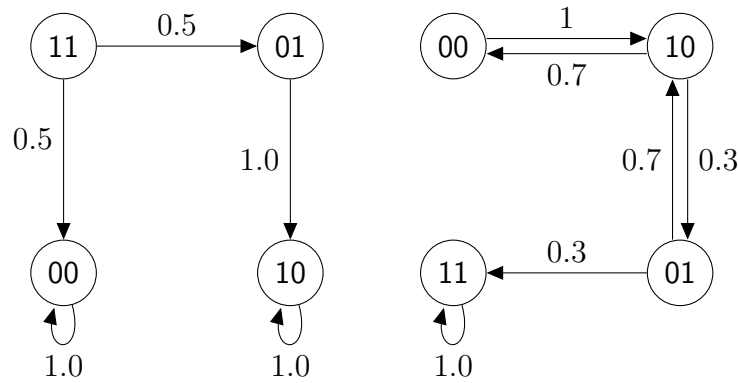
Exercício 7. Faça um programa que receba a matriz de transição e devolva as probabilidades de fluxo.

Exercício 8. Faça um programa que receba $n > 0$, α , β e a matriz que representa a rede e devolva a matriz de fluxo total.

Exercício 9. Reproduza os resultados do paper "Generating Boolean networks with a prescribed attractor structure".



Exercício 10. Considere um modelo de rede Booleana para representar a saúde de um paciente que descreve o estado de dois genes. Suponha que os estados 00 e 10 correspondem respectivamente ao paciente no estado saudável e doente. Dadas os diagramas abaixo, que representam respectivamente a dinâmica dos genes quando o paciente não faz tratamento e quando faz, dê a tabela de planejamento para uma janela de tempo de tamanho 3.



Primeiro, escolhemos o custo dos estados finais do sistema afim de encontrar políticas que reduzem este custo.

X	$C_3(X)$
00	10
01	10000
10	10000
11	5000

Definimos μ_i como uma variável que indica se houve tratamento no tempo i , e também definimos uma função J_i com os custos parciais no tempo i .

$$J_i(X_i, \mu = 1) = 20 + 10 * i + E[J_{i+1}(X_{i+1}) | X_i, \mu = 1]$$

$$J_i(X_i, \mu = 0) = 10 + E[J_{i+1}(X_{i+1}) | X_i, \mu = 0]$$

$$J_i(X_i) = \min\{J_i(X_i, \mu = 0), J_i(X_i, \mu = 1)\}$$

Também definimos $J_3(X) = C_3(X)$ e $u_i^*(X_i)$ como 1 se $J_i(X_i, \mu = 0) > J_i(X_i, \mu = 1)$ e como 0 caso contrário.

Desta maneira, temos que:

- No tempo $i = 2$

$$J_2(00, \mu = 0) = 10 + 1.0 * J_3(00) = 20$$

$$J_2(00, \mu = 1) = 40 + 1.0 * J_3(10) = 10040$$

$$\text{portanto, } J_2(00) = 20 \text{ e } \mu_2^*(00) = 0$$

$$J_2(01, \mu = 0) = 10 + 1.0 * J_3(10) = 10010$$

$$J_2(01, \mu = 1) = 40 + 0.7 * J_3(10) + 0.3 * J_3(11) = 8540$$

$$\text{portanto, } J_2(01) = 8450 \text{ e } \mu_2^*(01) = 1$$

$$J_2(10, \mu = 0) = 10 + 1.0 * J_3(10) = 10010$$

$$J_2(10, \mu = 1) = 40 + 0.7 * J_3(00) + 0.3 * J_3(01) = 3047$$

$$\text{portanto, } J_2(10) = 3047 \text{ e } \mu_2^*(10) = 1$$

$$J_2(11, \mu = 0) = 10 + 0.5 * J_3(01) + 0.5 * J_3(00) = 5015$$

$$J_2(11, \mu = 1) = 40 + 1 * J_3(11) = 5040$$

$$\text{portanto, } J_2(11) = 5015 \text{ e } \mu_2^*(11) = 0$$

- No tempo $i = 1$

$$J_1(00, \mu = 0) = 10 + 1.0 * J_2(00) = 30$$

$$J_1(00, \mu = 1) = 30 + 1.0 * J_2(10) = 3077$$

$$\text{portanto, } J_1(00) = 30 \text{ e } \mu_1^*(00) = 0$$

$$J_1(01, \mu = 0) = 10 + 1.0 * J_2(10) = 3057$$

$$J_1(01, \mu = 1) = 30 + 0.7 * J_2(10) + 0.3 * J_2(11) = 3667.4$$

$$\text{portanto, } J_1(01) = 3057 \text{ e } \mu_1^*(01) = 0$$

$$J_1(10, \mu = 0) = 10 + 1.0 * J_2(10) = 3057$$

$$J_1(10, \mu = 1) = 30 + 0.7 * J_2(00) + 0.3 * J_2(01) = 2579$$

$$\text{portanto, } J_1(10) = 2579 \text{ e } \mu_1^*(10) = 1$$

$$J_1(11, \mu = 0) = 10 + 0.5 * J_2(01) + 0.5 * J_2(00) = 4245$$

$$J_1(11, \mu = 1) = 30 + 1 * J_2(11) = 5045$$

$$\text{portanto, } J_1(11) = 4245 \text{ e } \mu_1^*(11) = 0$$

- No tempo $i = 0$

$$J_0(00, \mu = 0) = 10 + 1.0 * J_1(00) = 40$$

$$J_0(00, \mu = 1) = 20 + 1.0 * J_1(10) = 2599$$

$$\text{portanto, } J_0(00) = 40 \text{ e } \mu_0^*(00) = 0$$

$$J_0(01, \mu = 0) = 10 + 1.0 * J_1(10) = 2589$$

$$J_0(01, \mu = 1) = 20 + 0.7 * J_1(10) + 0.3 * J_1(11) = 3098.8$$

$$\text{portanto, } J_0(01) = 2589 \text{ e } \mu_0^*(01) = 0$$

$$J_0(10, \mu = 0) = 10 + 1.0 * J_1(10) = 2589$$

$$J_0(10, \mu = 1) = 20 + 0.7 * J_1(00) + 0.3 * J_1(01) = 958.1$$

$$\text{portanto, } J_0(10) = 958.1 \text{ e } \mu_0^*(10) = 1$$

$$J_0(11, \mu = 0) = 10 + 0.5 * J_1(01) + 0.5 * J_1(00) = 1553.5$$

$$J_0(11, \mu = 1) = 20 + 1 * J_1(11) = 4265$$

$$\text{portanto, } J_0(11) = 1553.5 \text{ e } \mu_0^*(11) = 0$$

Portanto, a tabela de planejamento é dada por:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array} \end{array}$$