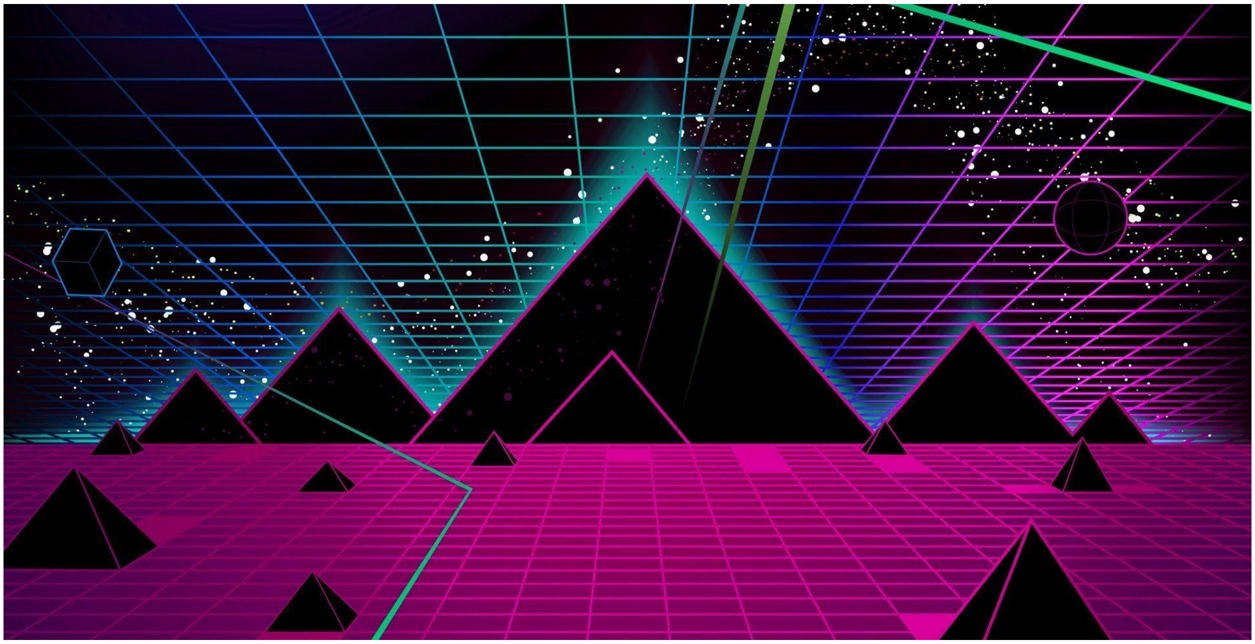
Simulate Research

Manual de Sistema

Gustavo Rivero, Jesús Manzano
09 de enero de 2023



El presente manual está asociado al sistema Simulate Research, el cual representa un sistema de simulaciones en el campo de Investigación de Operaciones. En el manual, se encuentran definiciones claves para la fácil comprensión del tema y asimismo, una breve explicación mediante ejemplos del uso del sistema Simulate Research.

Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Ingeniería en Informática

Departamento de Investigación de Operaciones y Estadísticas
Investigación de Operaciones III - 9543
Barquisimeto, Estado Lara

Tabla de contenido

Simulaciones

Existen diversas interpretaciones cuando se refiere a “simulación”, sin embargo, surgen varias dudas cuando se busca conocer su verdadero significado, ¿qué es? ¿cuándo se originó? Para responder a estas inquietudes, se procede a conocer el origen de esta práctica.

Sus orígenes recaen en plena Segunda Guerra Mundial, cuando los matemáticos John von Neumann y Stanisław Ulam tenían como reto resolver un problema complejo relacionado con el comportamiento de los neutrones para el Proyecto Manhattan. Los experimentos basados en prueba y error representaban un alto costo económico, aunado a que el problema era demasiado complejo como para abordarlo mediante técnicas analíticas. Sin embargo, la solución ante esta situación fue una aproximación que se basa en la utilización de números aleatorios y distribuciones de probabilidad, dándole por nombre el “método de Montecarlo”.

Asimismo, tras acabar la guerra y dar inicio al evento de la Guerra Fría, el uso de la simulación para resolver problemas de interés militar fue en aumento; desde la trayectoria y dinámicas de satélites como guías para misiles, entre otros ejemplos. Para resolver estos problemas, se comenzó a implementar ordenadores análogos que usaron para facilitar la resolución de las operaciones matemáticas. Pero no fue hasta la década de los 60 que se comenzó a utilizar programas de simulación para un propósito de ámbito civil, mediante sistemas como el GPSS o el SIMSCRIPT, siendo utilizados para estudiar problemas de fabricación de procesos, logística, transporte, comunicaciones y servicios.

Con el pasar de los años, más específicamente en la década de los 80, la simulación por ordenador se generalizó en ámbitos de ciencia e ingeniería, como sería para la predicción de tiempo o entrenamiento de pilotos de aviación. Hasta llegar a los años más recientes, en el que el uso de la simulación se ha amplificado hasta ser aplicado en el sector de ocio y ámbito familiar, aprovechando los recursos de gráficos potentes, bases de datos, computación intensiva, etc, dando pie a simuladores populares como el NASCAR Racing, The Sims, Civilization, entre otros.

Sin embargo, aunque se ha implementado en los párrafos previos la palabra "simulación", ¿qué es? Para responder a esta interrogante, el libro *Simulación. Un enfoque práctico* de Raúl Cross Bu, brinda varias definiciones dadas por algunos especialistas en el área de Investigación de Operaciones. Entre ellas tenemos a Thomas Herbert Naylor, quien define simulación como:

> *Simulación es una técnica numérica para conducir experimentos en una computadora digital. Estos experimentos comprenden ciertos tipos de relaciones matemáticas y la estructura de sistemas complejos del mundo real a través de largos períodos de tiempo.*

Aunque Thomas H. Naylor define simulación en un aspecto bastante amplio, su contraparte dada por H. Maisel y G. Gnugnoli, definen simulación como:

> *Simulación es una técnica numérica para realizar experimentos en una computadora digital. Estos experimentos involucran ciertos tipos de modelos matemáticos y lógicos que describen el comportamiento de sistemas de negocios, económicos, sociales, biológicos, físicos o químicos a través de largos periodos de tiempo.*

De igual manera, Robert E. Shannon, en su libro *Systems Simulation: The Art and Science* a la simulación como:

> *Es un proceso de diseñar y desarrollar un modelo computarizado de un sistema o proceso y conducir experimentos con este modelo con el propósito de entender el comportamiento del sistema o evaluar varias estrategias con las cuales su puede operar el sistema.*

De todas estas definiciones, se puede concluir que la simulación es un medio mediante el cual tanto nuevos procesos como procesos ya existentes pueden proyectarse, evaluarse y contemplarse sin correr el riesgo asociado a experiencias llevadas a cabo en un sistema real. Es decir, permite a las organizaciones estudiar sus procesos desde una perspectiva sistemática procurando una mejor comprensión de la causa y efecto entre ellos además de permitir una mejor predicción de ciertas situaciones. La teoría de la simulación permite valorar, replantear y medir, por ejemplo, la satisfacción del cliente ante un nuevo proceso, la utilización de recursos en el nuevo proceso o incluso el tiempo para minimizarlo. Todas estas posibilidades hacen de la simulación un instrumento ideal para un esfuerzo de replanteamiento de la empresa.

Etapas de la simulación

Cada autor posee una forma y define sus pasos para llevar a cabo un experimento de simulación, sin embargo, todos coinciden en los pasos básicos para ellos, los cuales son:

Definición del sistema

En este apartado, se busca realizar un alcance del sistema que se desea simular, atendiendo desde un análisis preliminar del planteamiento hasta las interacciones del sistema con otros sistemas, restricciones, variables que interactúan dentro del sistema, interrelaciones, medidas de efectividad y resultados que se esperan obtener con el estudio.

Formulación del modelo

Una vez definido qué resultados se esperan obtener con el estudio, la siguiente etapa consiste en definir y construir el modelo con el que se obtendrán dichos resultados. Cabe destacar que en esta etapa es necesario definir todas las variables que forman parte del modelo, sus relaciones lógicas y diagramas de flujo que describan de forma lógica y completa al modelo.

Colección de datos

La forma de obtener los datos y su dificultad puede influir en el desarrollo y formulación del modelo. Es por ello que, es importante definir la claridad y exactitud de los datos que el modelo va a requerir para producir los resultados.

Implementación del modelo en un computador

Una vez se haya definido el modelo, el siguiente paso es decidir si se desarrollará el sistema desde cero o si se implementará algún paquete ya diseñado como GPSS, SIMSCRIPT, u otro. En el caso de desarrollar el sistema desde cero, definir el lenguaje de programación a utilizar para elaborar el sistema y así, una vez se tenga este sistema, procesar los datos obtenidos y visualizar los resultados generados.

Validación

Una vez se tengan los resultados, es necesario verificar que los datos sean correctos y así, detallar deficiencias en la formulación del modelo o en los datos utilizados para el mismo. Entre los diferentes métodos más comunes para validar un modelo, se tienen:

- La opinión de expertos sobre los resultados generados.
- La exactitud con que se predicen datos históricos.
- La exactitud en la predicción del futuro.
- La comprobación de falla del modelo de simulación al utilizar datos que hacen fallar al sistema real.
- La aceptación y confianza en el modelo de la persona que hará uso de los resultados que arroje el experimento de simulación.

Experimentación

Una vez el modelo ha sido validado, se continúa con la experimentación en el mismo. Esta etapa consiste en generar los datos deseados y en realizar análisis de sensibilidad de los índices requeridos.

Interpretación

Tras visualizar los resultados deseados generados por el sistema, es necesario interpretar esta información arrojada por la simulación y, de esta forma, tomar una decisión. Es claro que los sistemas no toman decisiones por sí mismos, sin embargo, son de soporte para que el usuario lo haga en base los resultados que dichos sistemas generan.

Documentación

Luego de culminar el resto de etapas, se concluye este proceso con la documentación del modelo de simulación, el cual se divide en dos tipos de documentación necesarios. El primero consiste en documentación técnica dirigida al departamento de procesamiento de datos. Mientras que el segundo corresponde al manual de usuario, con el fin de facilitar la interacción y uso del modelo en cuestión.

Ventajas en el uso de la simulación

Tal y como se expresa en el libro de *Simulación. Un enfoque práctico* de Raúl Cross Bu, aunque la técnica de la simulación pueda requerir equipo computacional y recursos humanos costosos, como también un lapso considerable para que el modelo de simulación sea entrenado y perfeccionado, esta técnica posee numerosas ventajas, por lo que es la herramienta más ampliamente usada en el análisis de sistemas. Entre las ventajas más resaltantes de esta técnica, se tienen las siguientes:

- Es posible el estudio de efectos de cambios internos y/o externos de un sistema por medio de alteraciones en el modelo asociado al sistema y comprobando los efectos que provocan estos cambios en el comportamiento de la simulación.
- Por medio de observación detallada a la simulación, es posible comprender con mayor entendimiento al sistema y, por consiguiente, sugerir estrategias que mejoren la operación y eficiencia del sistema.
- Puede ser implementada como técnica didáctica para enseñar habilidades básicas en análisis estadístico, análisis teórico, etc.
- El análisis de simulaciones de sistemas complejos puede ayudar con la comprensión del sistema y, al mismo tiempo, detectar las variables más resaltantes que interactúan en el sistema.
- Permite experimentar nuevas situaciones sobre las que se tiene poca o ninguna información. Esto permite anticipar mejor a posibles resultados no previstos.

- Es utilizada para entrenamiento de personal.
- Puede ser utilizada para anticipar problemas como cuello de botella en la introducción de nuevas variables en el sistema.

Generación de números rectangulares

Un número rectangular es aquel donde se generan variables aleatorias, es decir, que todo número que tenga la misma probabilidad de ser elegido y, que la elección de uno no dependa de la elección de otro. Estos números se generan a partir de tener los números aleatorios, utilizar algún aditamento especial del computador capaz de registrar los resultados y, el más aceptable, implica la generación de estos números rectangulares a través de una relación de recurrencia.

En todos los experimentos de simulación existe la necesidad de generar valores de variables aleatorias que representan a una cierta distribución de probabilidad. El proceso de generar un valor de la variable aleatoria de una distribución particular, puede repetirse tantas veces como se desee y tantas veces como distribuciones de probabilidad existan en el experimento. Este proceso de generar variables aleatorias se hace por medio de la generación de números rectangulares.

Un número rectangular es aquel donde se generan variables aleatorias, es decir, que todo número que tenga la misma probabilidad de ser elegido y, que la elección de uno no dependa de la elección de otro. Estos números se generan a partir de tener los números aleatorios, utilizar algún aditamento especial del computador capaz de registrar los resultados y, el más aceptable, implica la generación de estos números rectangulares a través de una relación de recurrencia.

La importancia de los números rectangulares radica en el uso para la generación de variables aleatorias más complicadas, las cuales son requeridas en los experimentos de simulaciones. Algunos autores, como Tocher, sugieren tres formas de obtener estos números: La provisión externa, la generación interna a partir de un proceso físico al azar y la generación interna de sucesiones de dígitos por medio de una relación de recurrencia. El primer método implica tener los números aleatorios y tratar estos números como datos de entrada en el sistema. El segundo implica utilizar algún aditamento especial por parte de algún computador capaz de registrar los resultados del proceso y reduzca esos resultados a sucesiones de dígitos. Por último, el tercer método, siendo el más aceptado, implica la generación de estos números rectangulares a través de una relación de recurrencia.

Indiferentemente del método, los números rectangulares deben tener ciertas características que aseguren o aumenten su confiabilidad en la obtención de resultados dentro de la simulación. Estas características son:

- Uniformemente distribuidos.
- Estadísticamente independientes.
- Reproducibles.
- Período largo.
- Generados a través de un método rápido.
- Generados a partir de un método que no requiera mucha capacidad de almacenamiento cómputo.

Asimismo, hay quienes relacionan los números rectangulares generados a través de relaciones de recurrencia con números pseudoaleatorios[1]. Actualmente, casi todas las computadoras incluyen algunos programas de biblioteca o alguna variante de los métodos congruenciales sugeridos por Derrick Henry Lehmer, siendo estos los generadores congruenciales lineales, los cuales pueden ser congruencial mixto y congruencial multiplicativo.

Los generadores congruenciales lineales, generan una secuencia de números pseudoaleatorios en la cual el próximo número pseudoaleatorio es determinado a partir del

[1] Un número pseudoaleatorio es un número generado en un proceso que parece producir números al azar, pero no lo hace realmente. Las secuencias de números pseudoaleatorios no muestran ningún patrón o regularidad aparente desde un punto de vista estadístico, a pesar de haber sido generadas por un algoritmo completamente determinista, en el que las mismas condiciones iniciales producen siempre el mismo resultado.

último número generado, es decir, el número pseudoaleatorio X_{n+1} es derivado a partir del número pseudoaleatorio X_n.

Congruencial mixto

Para el caso particular del generador congruencial mixto, la relación de recurrencia es la siguiente:

$$X_{n+1} = \left(aX_n + c\right) mod\, m$$

dónde:

X_0: La semilla $\left(X_0 > 0\right)$
a: Multiplicador $(a > 0)$
c: Constante aditiva $(c > 0)$
m: Módulo $\left(m > X_0,\ m > a\, y\, m > c\right)$

Esta operación corresponde a que X_{n+1} es el residuo de dividir $aX_n + c$ entre el módulo. Esto significa que, los valores posibles de X_{n+1} son $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m - 1$, es decir, m representa el número posible de valores diferentes que pueden ser generados.

Con el propósito de ilustrar esta generación de números pseudoaleatorios a través de este método, suponga que se tiene el generador en el cual los valores de sus parámetros son los siguientes:

$a = 5$
$c = 7$
$X_0 = 4$
$m = 8$

De esta manera, se logra un período completo debido a los valores asignados a todos sus parámetros, por lo que los valores generados son:

n	X_n	$(5X_n + 7)\ mod\ 8$	X_{n+1}	***Números uniformes***
0	4	$(5 \cdot 4 + 7)\ mod\ 8$	3	$3/8$
1	3	$(5 \cdot 3 + 7)\ mod\ 8$	6	$6/8$
2	6	$(5 \cdot 6 + 7)\ mod\ 8$	5	$5/8$
3	5	$(5 \cdot 5 + 7)\ mod\ 8$	0	0
4	0	$(5 \cdot 0 + 7)\ mod\ 8$	7	$7/8$
5	7	$(5 \cdot 7 + 7)\ mod\ 8$	2	$2/8$
6	2	$(5 \cdot 2 + 7)\ mod\ 8$	1	$1/8$
7	1	$(5 \cdot 1 + 7)\ mod\ 8$	4	$4/8$

Sin embargo, hay casos donde el período es menor a m. Es por ello que es necesario establecer ciertas reglas que puedan ser utilizadas en la selección de los valores de los parámetros, para que el generador resultante tenga periodo completo. Estas reglas son:

1. La selección de m.

   Existen dos opciones para seleccionar el valor apropiado del módulo:

   - Seleccionar m de modo que sea el número primo más grande posible y que a su vez sea menor que p^d, donde p es la base del sistema (binario, decimal, hexadecimal, etc.) que se está utilizando y d el número de bits que tiene una palabra de computadora de ese sistema.
   - Seleccionar m como p^d. Cuando m toma este valor se facilita el cálculo del número rectangular $\left(U_m = X_n/m\right)$, ya que sólo se corre el punto binario o decimal a la izquierda del número. Sin embargo, se ha comprobado que cuando el

módulo toma este valor, los últimos dígitos del número pseudoaleatorio generado no se comportan en forma aleatoria.

2. La selección de a.

   El valor seleccionado de a debe ser entero impar, y además, no debe ser divisible por 3 o 5. Sin embargo, si se quiere asegurar que el generador tenga período completo, el valor de a se debe seleccionar de acuerdo al siguiente criterio:

   $(a - 1)\, mod\, 4 = 0$ si 4 es un factor de m.
   $(a - b)\, mod\, b = 0$ si b es un factor primo de m.

   Usualmente se selecciona a como $2^k + 1$ cuando se trabaja en sistema binario y $10^k + 1$ cuando se trabaja en sistema decimal. En ambos casos el valor de k debe ser mayor o igual a 2.

3. La selección de c.

   El valor seleccionado para este parámetro puede ser cualquier constante. Sin embargo, si se desea asegurar buenos resultados el valor de c debe ser $c\, mod\, 8 = 5$ si se trabaja en sistema binario y c como $mod\, 200 = 21$ si se trabaja en sistema decimal. Más específicamente, el valor de c debe ser un entero impar y relativamente primo a m.

4. La selección de X_0.

   El valor de la semilla es irrelevante, es decir, el valor de este parámetro suele tener poca o ninguna influencia sobre las propiedades estadísticas de las sucesiones.

Teniendo en cuenta todo esto, existen otras formas matemáticas para representar tales cambios. Tal que:

1. $X_n = \left\{a^n X_0 + c\left\{\frac{a^n - 1}{a-1}\right\}\right\} mod\, m$
2. $X_{n+k} = \left\{a^n X_k + c\left\{\frac{a^n - 1}{a-1}\right\}\right\} mod\, m$

Con la primera expresión el n-ésimo número pseudoaleatorio se obtiene a partir de la semilla. Con la siguiente expresión el $n + k$-ésimo número pseudoaleatorio se obtiene a partir del k-ésimo número, es decir, si por ejemplo $n + k = 10$ y $k = 4$, entonces significa que el número pseudoaleatorio 10 se va a obtener a partir del número 4.

Congruencial multiplicativo

Al igual que el generador congruencial mixto, el generador congruencial multiplicativo trabaja con la relación de recurrencia:

$$X_{n+1} = aX_n \, mod \, m$$

De igual que el congruencial mixto, se recomienda seleccionar valores adecuados para los parámetros a, X_0 y m, con el objetivo de asegurar un período máximo para las sucesiones generadas. Cabe destacar que, estos valores dependen del sistema en el que se trabaje, sea binario o decimal.

A. Sistema decimal.

Si se trabaja en sistema decimal, los valores de los parámetros deben ser seleccionados según a los siguientes criterios:

1. El valor de la semilla puede ser cualquier entero impar no divisible entre 2 o 5 y debe ser relativamente primo a m.
2. El valor seleccionado de a debe ser obtenido de acuerdo a la identidad $a = 200t \pm p$, donde t es cualquier entero y p es cualquiera de los siguientes valores: $3, 11, 13, 19, 21, 27, 29, 37, 53, 59, 61, 67, 69, 77, 83, 91$.
3. El valor seleccionado de m puede ser 10^d. Si $m = 10$ y $d \geq 5$ el período del generador es $5 \times 10^{d-2}$.
    i. Sin embargo, si 10^d. Si $m = 10$ y $d < 5$, entonces el período del generador se obtiene de acuerdo a la siguiente expresión:

$$Período^{*} = Mínimo\ común\ múltiplo \left\{ \lambda\left(P_1^{d_1}\right),\ \lambda\left(P_2^{d_2}\right),\ \ldots,\ \lambda\left(P_n^{d_n}\right) \right\}$$

dónde:

$\lambda(2) = 1, \lambda(4) = 2$

$\lambda\left(2^{d}\right) = 2^{d-2}$ si $d \geq 3$

$\lambda\left(p^{d}\right) = p^{d-1}(p - 1)$ si $p \geq 2$

$^{*}P$, es un factor primo de m.

B. Sistema binario.

En el caso de trabajar con un sistema binario, los valores de los parámetros deben ser seleccionados de acuerdo a las siguientes condiciones:

1. El valor de la semilla puede ser cualquier entero impar relativamente primo a m.
2. El valor seleccionado de a debe ser obtenido a partir de la expresión $a = 8t \pm 3$, donde t es cualquier entero.
3. El valor seleccionado de m puede ser 2^{d}. Si $m = 2^{d}$ el periodo del generador es 2^{d-2} o $m/4$.

Generación de variables aleatorias no-uniformes

Todo modelo de simulación tiene consigo variables aleatorias interactuando, sea una o varias. Generalmente, estas variables siguen distribuciones de probabilidad teóricas o empíricas diferentes a la distribución uniforme. Dicho esto, para simular este comportamiento, es necesario hacer uso de un generador de números uniformes y una función que a través de un método en específico, transforme estos números en valores de la distribución de probabilidad deseada. Entre estos métodos más comunes y difundidos se pueden mencionar:

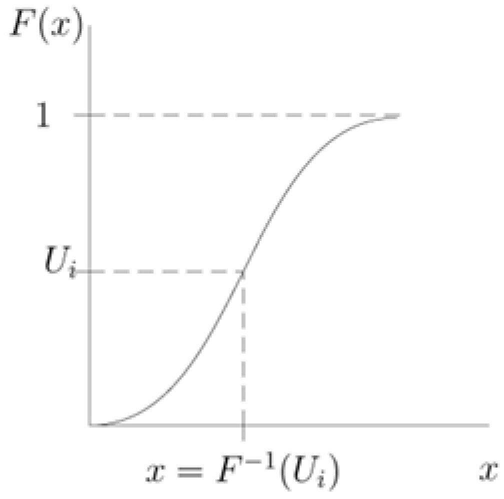
- Método de la transformada inversa.
- Método de rechazo.

- Método de composición.
- Procedimientos especiales.

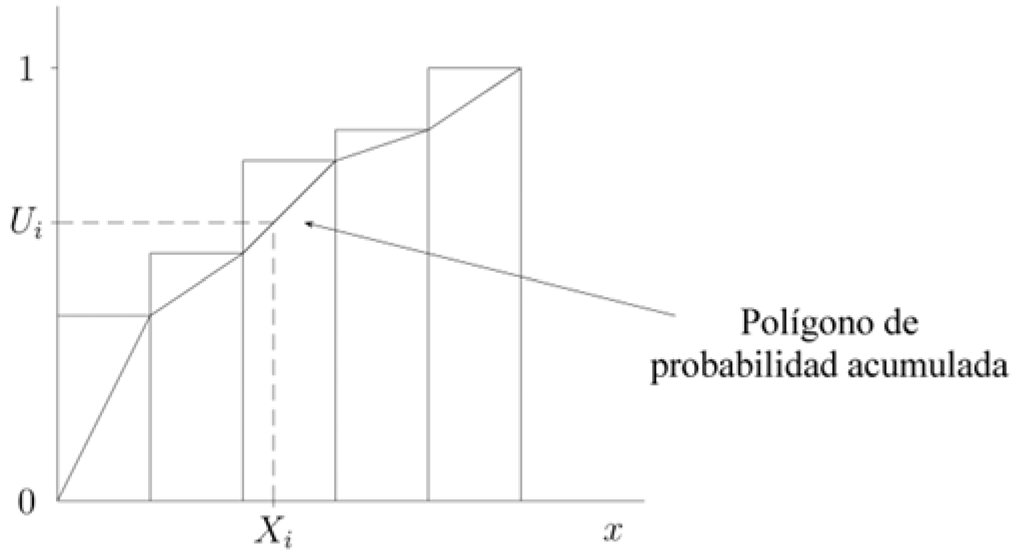
Sin embargo, en este documento se detalla únicamente el método de la transformada inversa.

Método de la transformada inversa

El método de la transformada inversa utiliza la distribución acumulada $F(x)$ de la distribución que se va a simular. Puesto que $F(x)$ está definida en el intervalo $(0;\ 1)$, se puede generar un número aleatorio aleatorio uniforme R y tratar de determinar el valor de la variable aleatoria para la cual su distribución acumulada es igual a R, es decir, el valor simulado de la variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad $f(x)$, se determina al resolver la ecuación $F(x) = R$ o $x = F^{-1}(R)$.



La dificultad principal de este método descansa en el hecho de que algunas ocasiones es difícil encontrar la transformada inversa. Sin embargo, si esta función inversa ya ha sido establecida, generando números aleatorios uniformes se podrán obtener valores de la variable aleatoria que sigan la distribución de probabilidad deseada.



Distribución exponencial

Un ejemplo de esto, con la distribución exponencial sería generar números al azar que sigan la siguiente distribución de probabilidad.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & si\ x \geq 0 \\ 0, & si\ x < 0 \end{cases}$$

La distribución acumulada de esta distribución es;

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

Utilizando la ecuación para transformada inversa $F(x) = R$ o $x = F^{-1}(R)$, es decir, igualando la distribución acumulada con el número uniforme R, se obtiene:

$$1 - e^{-\lambda x} = R$$
$$e^{-\lambda x} = 1 - R$$

Pero, si R sigue una distribución uniforme, entonces $1 - R$ también sigue esta distribución. Por consiguiente;

$$e^{-\lambda x} = R$$

$$x = -\frac{1}{\lambda} Ln(R)$$

Distribución uniforme

Para el caso de generar números al azar que sigan la siguiente distribución de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & si\ a \leq x \leq b \\ 0, & si\ a > x > b \end{cases}$$

La distribución acumulada de esta distribución es:

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$$

Tras igualar esta expresión con el número uniforme R, se obtiene:

$$\frac{x-a}{b-a} = R$$

$$x = a + (b - a)R$$

Distribución empírica

Por otra parte, con el caso en el que se desee generar números al azar que sigan la distribución de probabilidad empírica:

$$f(x) = \begin{cases} x, & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & si\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

La distribución acumulada para esta distribución es:

$$F(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} \text{ si } 0 \le x \le 1 \text{ y } F(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{1}{2} dt = \frac{x}{2} \text{ si } 1 < x \le 2$$

Puesto que la distribución acumulada de la función tiene un valor de $\frac{1}{2}$ cuando $x = 1$, entonces el valor de la variable aleatoria x se determina de acuerdo a la siguiente expresión:

$$x = \begin{cases} \sqrt{2R}, & si\ R \le \dfrac{1}{2} \\ 2R, & si\ R > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Distribución de poisson

Al igual que en situaciones previas, para el caso de generar números al azar que sigan la siguiente distribución de probabilidad:

$$f(x) = \frac{e^{-5}5^x}{x!},\ x = 0,\ 1,\ 2,\ . . .$$

Puesto que esta distribución de probabilidad es discreta, es necesario evaluar $f(x)$ para cada valor de x, y entonces determinar la distribución acumulada $F(x)$. Tanto la distribución de probabilidad como la distribución acumulada de esta variable, se presentan en las siguientes tablas:

Distribución de probabilidad y distribución acumulada de la función $e^{-5}5^x/x!$

x	***Distribución de probabilidad***	***Distribución acumulada***
0	0.0067	0.0067
1	0.0337	0.0404
2	0.0842	0.1246

3	0.1404	0.2650
4	0.1755	0.4405
5	0.1755	0.6160
6	0.1462	0.7622
7	0.1044	0.8666
8	0.0653	0.9319
9	0.0363	0.9682
10	0.0181	0.9863
11	0.0082	0.9945
12	0.0034	0.9979
13	0.0013	0.9992
14	0.0005	0.9997
15	0.0002	0.9999

Transformada inversa de la función $e^{-5}5^{x}/x!$

Transformada inversa
Si $0.0000 \leq R < 0.0067$, entonces $x = 0$
Si $0.0067 \leq R < 0.0404$, entonces $x = 1$
Si $0.0404 \leq R < 0.1246$, entonces $x = 2$
Si $0.1246 \leq R < 0.2650$, entonces $x = 3$
Si $0.2650 \leq R < 0.4405$, entonces $x = 4$
Si $0.4405 \leq R < 0.6160$, entonces $x = 5$
Si $0.6160 \leq R < 0.7622$, entonces $x = 6$
Si $0.7622 \leq R < 0.8666$, entonces $x = 7$

Si $0.8666 \leq R < 0.9319$, entonces $x = 8$
Si $0.9319 \leq R < 0.9682$, entonces $x = 9$
Si $0.9682 \leq R < 0.9863$, entonces $x = 10$
Si $0.9863 \leq R < 0.9945$, entonces $x = 11$
Si $0.9945 \leq R < 0.9979$, entonces $x = 12$
Si $0.9979 \leq R < 0.9992$, entonces $x = 13$
Si $0.9992 \leq R < 0.9997$, entonces $x = 14$
Si $0.9997 \leq R < 0.9999$, entonces $x = 15$

Dicho esto, de acuerdo a esta distribución acumulada en la tabla de transformada inversa de la función, se muestra el valor que tomará la variable aleatoria x dependiendo del intervalo al cual pertenece el número uniforme R.

Ejercicio propuesto

Ejercicio resuelto

Análisis de los resultados

Métodos de estimación

Ejemplo

Aspectos a resaltar