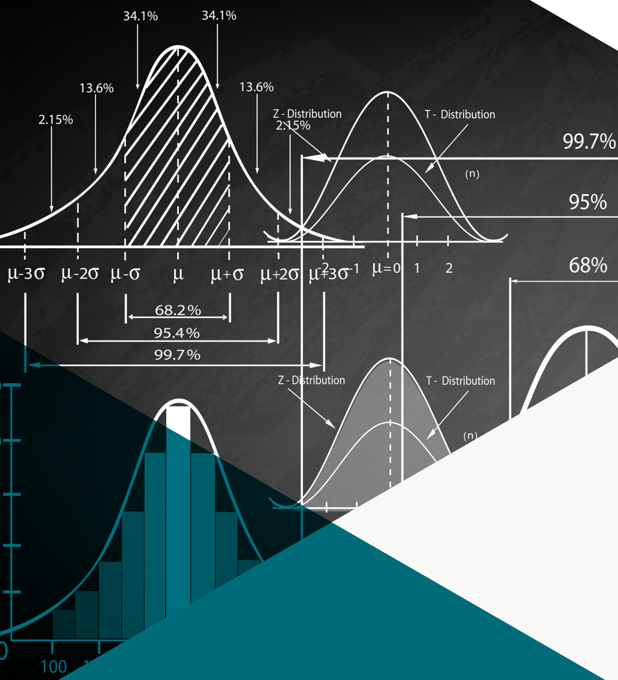
Laboratório Nacional de Computação Científica

UNIDADE DE PESQUISA DO MCTI



Variáveis aleatórias e medidas de dispersão

Modelos Compartimentais em Epidemiologia e Inferência Bayesiana

Gustavo Libotte e Regina Almeida

7 de janeiro de 2022

Medidas de dispersão

- Existem algumas maneiras de se quantificar a **localização** e a **dispersão** de um conjunto de dados observados. Essas medidas podem proporcionar uma visão mais favorável de um conjunto de valores amostrais.
- Suponha que X é uma variável aleatória e n amostras de X, denotadas por x_i, estão disponíveis.
- A **média** amostral de X, que de certa forma inclui a tendência principal dos dados, denotada por $\bar{x}$, é calculada através de

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- A **variância** amostral de X, que reflete a dispersão dos dados em torno da média amostral, denotada como $\mathrm{Var}\left(X\right)$, é uma média do desvio quadrático das amostras aleatórias em relação à sua média amostral.
- A variância de uma variável aleatória X pode ser calculada por meio de

$$\mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \qquad (1)$$

Medidas de dispersão

- Um fato importante sobre a variância amostral é que o seu resultado não é expresso na mesma unidade dos dados amostrais e de sua média.
- Essa diferença pode ser evitada, calculando-se a **raiz quadrada da variância amostral**.
- Esta medida, conhecida como **desvio-padrão** e denotada por σ_X, é calculada por

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}\,(X)}$$

- Como a média e o desvio-padrão amostrais são expressos na mesma unidade, um termo não-dimensional pode ser introduzido, através do cálculo da razão entre ambos. Essa medida é chamada de **coeficiente de variação** e é calculada através de

$$\mathrm{CV}\,(X) = \frac{\sigma_X}{\bar{x}}$$

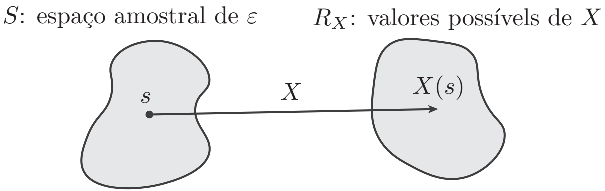
- O seu resultado exprime a **extensão da variabilidade** dos dados em relação à média.

Variáveis aleatórias

- Ao descrever o espaço amostral de um experimento não especificamos que um resultado individual necessariamente seja um número.
- De fato, apresentamos alguns exemplos nos quais os resultados do experimento não eram uma quantidade numérica.
- Por exemplo, ao descrever uma peça manufaturada, podemos empregar apenas as categorias "defeituosa" e "não defeituosa".
- Contudo, em muitas situações experimentais, estaremos interessados na mensuração de alguma coisa e no seu registro como um **número**.
- Por exemplo, poderíamos registrar a temperatura máxima do dia, ou a temperatura mínima, ou a média das temperaturas máxima e mínima.
- Trata-se de uma classe muito geral de problemas: em muitas situações experimentais, desejamos **atribuir um número real** x a todo **elemento** s do **espaço amostral** S.
- Isto é, $x = X(s)$ é o valor de uma função X do espaço amostral no espaço dos números reais.

Variáveis aleatórias

- Seja ε um experimento e S um espaço amostral associado ao experimento, isto é, o conjunto de todos os potenciais resultados do experimento. Uma função X que associe a cada elemento $s \in \mathcal{S}$ um número real, $X(s)$, é denominada **variável aleatória**.
- O espaço R_X, conjunto de todos os valores possíveis de X, é algumas vezes denominado **contradomínio**.
- O espaço amostral (original) S corresponde ao resultado (possivelmente não numérico) do experimento, enquanto R_X é o espaço amostral associado à variável aleatória X.
- Em resumo: se for $X(s) = s$, teremos $S = R_X$.



Variáveis aleatórias discretas
Definição e exemplo

- Seja X uma variável aleatória. Se o número de valores possíveis de X (isto é, R_X, o contradomínio) for finito ou infinito numerável, denominaremos X de **variável aleatória discreta**.
- Isto é, os valores possíveis X, podem ser postos em lista como $x_1, x_2, \ldots, x_n$. No caso finito, a lista acaba, e no caso infinito enumerável, a lista continua indefinidamente.
- **Exemplo:** Uma fonte radioativa está emitindo partículas α. A emissão dessas partículas é observada em um dispositivo contador, durante um período de tempo especificado. A variável aleatória seguinte é a que interessa:

$$X = \text{número de partículas observadas}$$

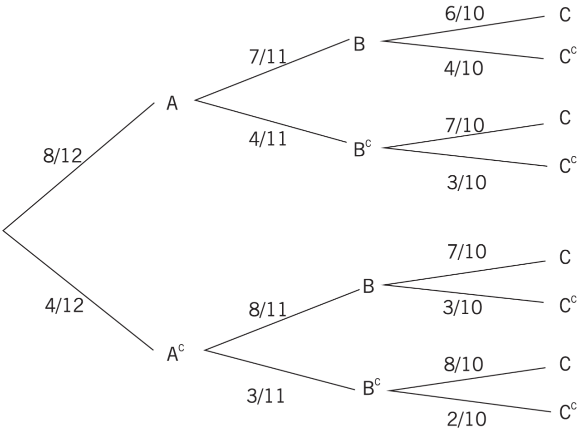
- Quais são os valores possíveis de X?
- Admitiremos que esses valores são todos os inteiros não negativos, isto é, $R_X = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

Variáveis aleatórias discretas
Outro exemplo

- **Problema**: Deseja-se aumentar a capacidade de memória RAM de um microcomputador.
- A placa mãe do PC permite a instalação de **até quatro pentes** de memória e **atualmente só possui um** pente.
- Solicita-se a compra e instalação de **mais três** pentes de memória, idênticos ao atual.
- Na loja há **12 pentes** com essa característica, mas **4 pentes estão defeituosos**.
- Se os três pentes novos forem escolhidos **ao acaso**, qual a probabilidade de que:
  - a capacidade de memória do PC realmente aumente?
  - o PC continue com a capacidade de memória original?
- **Cenário**: A capacidade de memória do PC realmente aumentará **se pelo menos um dos três pentes novos for perfeito** e não aumentará **se todos os três forem defeituosos**.
- Considere os eventos:
  - A = o primeiro pente selecionado é perfeito (não defeituoso).
  - B = o segundo pente é perfeito.
  - C = o terceiro pente é perfeito.

Variáveis aleatórias discretas
Outro exemplo

- Assim, teremos um espaço amostral não uniforme, dado por
$$S = \{ABC, ABC^c, AB^cC, A^cBC, AB^cC^c, A^cBC^c, A^cB^cC, A^cB^cC^c\}$$



Variáveis aleatórias discretas
Outro exemplo

- O foco principal desse exemplo é o **número de pentes não defeituosos**, entre os três selecionados. Denotando esse número por X, vemos que os valores possíveis de X são 0, 1, 2 e 3.
- Seguindo esse enfoque, vemos que $X = 3$ corresponde ao evento $\{ABC\}$, cuja probabilidade é

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=\mathrm{P}(\mathrm{ABC})=\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}=\frac{336}{1320}=0,255$$

- Analogamente, $X = 2$ se e somente se são selecionados **dois pentes perfeitos e um defeituoso**, ou seja, se e somente se o evento $\{ABC^c, AB^cC, A^cBC\}$ ocorrer. Portanto:

$$P(X=2)=P\left(ABC^c, AB^cC, A^cBC\right)=P\left(ABC^c\right)+P\left(AB^cC\right)+P\left(A^cBC\right)$$

- Temos:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{ABC^c}\right)=\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}\times\frac{4}{10}=\frac{224}{1320}$$
$$\mathrm{P}\left(\mathrm{AB^cC}\right)=\frac{8}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{7}{10}=\frac{224}{1320}$$
$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A^cBC}\right)=\frac{4}{12}\times\frac{8}{11}\times\frac{7}{10}=\frac{224}{1320}$$

Variáveis aleatórias discretas
Outro exemplo

- Logo,

$$P(X=2)=P\left(ABC^c, AB^cC, A^cBC\right)=P\left(ABC^c\right)+P\left(AB^cC\right)+P\left(A^cBC\right)=3\times\frac{224}{1320}=0,509$$

- Teremos $X=1$ se e somente se forem selecionados **um pente perfeito e dois defeituosos**, ou seja, se ocorrer $\{AB^cC^c, A^cBC^c, A^cB^cC\}$. Portanto:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=\mathrm{P}\left(\mathrm{AB^cC^c}, \mathrm{A^cBC^c}, \mathrm{A^cB^cC}\right)=3\times\frac{96}{1320}=0,218$$

- Finalmente, $X=0$ corresponde à ocorrência do evento $\{A^cB^cC^c\}$. Dessa maneira,

$$P(X=0)=P\left(A^cB^cC^c\right)=\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{2}{10}=\frac{24}{1320}=0,018$$

Variáveis aleatórias discretas
Outro exemplo

Em S	$\{A^cB^cC^c\}$	$\{AB^cC^c, A^cBC^c, A^cB^cC\}$	$\{ABC^c, AB^cC, A^cBC\}$	$\{ABC\}$
k = peças não defeituosas	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,018	0,218	0,509	0,255

- No item (a), a capacidade de memória realmente aumentará **se houver pelo menos um pente novo não defeituoso**, ou seja, se $X \geq 1$, ou ainda, se $X = 1$ ou $X = 2$ ou $X = 3$. Daí, $\mathrm{P}(X \geq 1) = \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2) + \mathrm{P}(X = 3) = 0,982$.
- No item (b), observamos que a capacidade de memória não será alterada **se nenhum dos pentes novos for perfeito**, ou seja, se $X = 0$. Assim, a probabilidade de que a memória do PC não seja alterada é $P(X = 0) = 0,018$.

Em resumo

X pode ser visto como uma variável que *admite certos valores aleatoriamente, com uma probabilidade conhecida de admitir cada valor*. Por esse motivo ela é chamada de **variável aleatória**, onde

$$S = \{\mathrm{ABC}, \mathrm{ABC^c}, \mathrm{AB^cC}, \mathrm{A^cBC}, \mathrm{AB^cC^c}, \mathrm{A^cBC^c}, \mathrm{A^cB^cC}, \mathrm{A^cB^cC^c}\} \qquad R_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

Variáveis aleatórias discretas
Medidas de dispersão

- Se X é uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, x_3, \ldots$ com probabilidades $p(x_1), p(x_2), p(x_3), \ldots$, respectivamente, então sua **média** ou **esperança** é:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

- Se X é uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, x_3, \ldots$ com probabilidades $p(x_1), p(x_2), p(x_3), \ldots$ respectivamente, e se $\mathbb{E}(X)$ é finito, então sua **variância** é calculada por:

$$\operatorname{Var}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2 p(x_i)$$

- O **desvio padrão** de uma variável aleatória discreta é igual à raiz quadrada não negativa da sua variância: $\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}$.
- O **coeficiente de variação** de uma variável aleatória é igual ao quociente entre o desvio padrão e a média: $\operatorname{CV}(X) = \dfrac{\sigma_X}{\mathbb{E}(X)}$.

Medidas de dispersão
Alguns exemplos

- Consideremos novamente a variável aleatória X (número de pentes não defeituosos) do exemplo anterior.
- A **média** da variável aleatória X é $\mathbb{E}(X) = 0 \times 0,018 + 1 \times 0,218 + 2 \times 0,509 + 3 \times 0,255 = 2,0$.
- Isto significa que se o mesmo experimento for repetido um **número muito grande** de vezes sob as mesmas condições, em média serão selecionados 2 pentes não defeituosos.
- O simples conhecimento da média de uma variável aleatória X, em geral, **não é suficiente** para se ter uma ideia clara da distribuição de X.
- Suponha que sabemos que a média de mensagens via e-mail recebidas diariamente por uma pessoa é de 20. Isso pode significar que a pessoa recebe todos os dias um número de mensagens próximo de 20—digamos, entre 18 e 22.
- Ou então, que ela recebe muitas mensagens em alguns dias—digamos, ao redor de 50—, e em outros dias um número muito pequeno—por exemplo, em torno de cinco—, perfazendo igualmente uma média de 20.
- Para casos como este, precisamos também da informação da **variância**.

Medidas de dispersão
Alguns exemplos

- Consideremos as variáveis aleatórias X e Y com suas correspondentes funções de probabilidade:

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$p(x_i)$	0,01	0,01	0,30	0,36	0,30	0,01	0,01

y_i	1	2	3	4	5	6	7
$p(y_i)$	0,47	0,02	0,01	0,00	0,01	0,02	0,47

- Podemos verificar que $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}(\mathrm{Y}) = 4$.
- Contudo, é fácil ver que X e Y têm distribuições bem diferentes. A variável aleatória X tem como **valores mais prováveis** os valores centrais 3, 4 e 5, com probabilidades muito pequenas para os demais valores, enquanto que para a variável aleatória Y, os valores extremos 1 e 7 são os **mais prováveis**.

Medidas de dispersão
Alguns exemplos

- Vejamos como essa diferença se expressa nos termos das suas variâncias.

$$\mathrm{Var}(X) = 1^2(0,01) + 2^2(0,01) + 3^2(0,30) + 4^2(0,36) + 5^2(0,30) + 6^2(0,01) + 7^2(0,01) - 4^2 = 0,86$$

$$\mathrm{Var}(Y) = 1^2(0,47) + 2^2(0,02) + 3^2(0,01) + 4^2(0) + 5^2(0,01) + 6^2(0,02) + 7^2(0,47) - 4^2 = 8,64$$

- Observamos que, como era de se esperar, $\mathrm{Var}(Y)$ é **muito maior** que $\mathrm{Var}(X)$, já que os valores de Y são bem mais dispersos em relação à média do que os valores de X.
- Também temos: $\sigma_X = \sqrt{0,86} = 0,93$ e $\sigma_Y = \sqrt{8,64} = 2,94$.
- Dessa maneira podemos usar a variância ou o desvio padrão para **quantificar o grau de dispersão de uma variável aleatória em torno da sua média**.
- $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 4; \quad \sigma_X = 0,93; \quad \sigma_Y = 2,94$. Assim sendo,

$$\mathrm{CV}(X) = \frac{0,93}{4} = 0,2325 \text{ (ou } 23,25\%) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{CV}(Y) = \frac{2,94}{4} = 0,735 \text{ (ou } 73,5\%)$$

Variáveis aleatórias discretas
Probabilidade

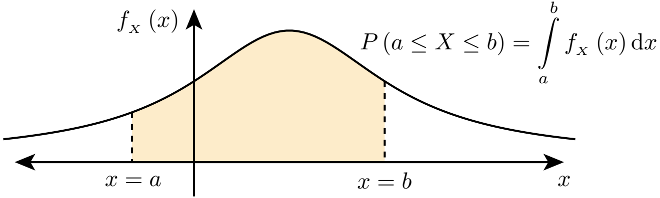
- Seja X uma variável aleatória discreta. Portando, R_X, o contradomínio de X, será formado no máximo por um número infinito numerável de valores $x_1, x_2, \ldots$
- A cada possível resultado x_i associaremos um número $p\left(x_i\right) = P\left(X = x_i\right)$, denominado probabilidade de x_i. Os números $p\left(x_i\right)$, para $i = 1, 2, \ldots,$ devem satisfazer às seguintes condições:
  - $p\left(x_i\right) \geq 0$, para todo i,
  - $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p\left(x_i\right) = 1$
- A função p, definida acima, é denominada **função de probabilidade** (ou **função de probabilidade no ponto**) da variável aleatória discreta X.
- A coleção de pares $\{x_i, p\left(x_i\right)\}$, para $i = 1, 2, \ldots,$ é denominada **distribuição de probabilidade** de X.

Variáveis aleatórias contínuas
Função densidade de probabilidade

- Diz-se que X é uma variável aleatória contínua, se existir uma função $f_X(x)$, denominada **função densidade de probabilidade** de X, que satisfaça às seguintes condições:
  - A função $f_X(x) \geq 0$, para todo x.
  - A integral $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
  - Para quaisquer valores de $a,\ b \in (-\infty,\ \infty)$, tem-se que a probabilidade da variável aleatória X assumir um valor entre a e b é dada por $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}x$.
- Quando X é uma variável aleatória contínua, a probabilidade de ocorrência de qualquer valor é nula, isto é, $\mathrm{P}(X = x) = 0$.
- A função densidade de probabilidade **não fornece** informações diretas sobre a probabilidade da variável aleatória X assumir um determinado valor. Isto claro, **não significa** que o evento $(X = x)$ seja impossível.

Variáveis aleatórias contínuas
Função densidade de probabilidade

- Estaremos essencialmente dizendo que X é uma variável aleatória contínua, se X puder tomar todos os valores em algum intervalo (a, b), onde a e b podem ser $-\infty$ e $+\infty$, respectivamente.
- A probabilidade $P(a \leq X \leq b)$ representa a área sob a curva no gráfico da figura abaixo, da função densidade de probabilidade $f_X(x)$ entre $x = a$ e $x = b$.



Função de distribuição acumulada
Variáveis aleatórias discretas e contínuas

- Uma maneira alternativa de se descrever a distribuição de probabilidade de variáveis aleatórias discretas e contínuas é através do cálculo da função de distribuição acumulada, como definida abaixo.
- Seja X uma variável aleatória, discreta ou contínua. A função $F_X(x)$, chamada de **função de distribuição acumulada** da variável aleatória X, é definida por $F_X(x) = P(X \leq x)$.
  - Se X for uma variável aleatória contínua com a função densidade de probabilidade $f_X(x)$, então

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\,\mathrm{d}s$$

  - Se X for uma variável aleatória discreta, então

$$F_X(x) = \sum_{j} p(x_j) \ ,$$

onde o somatório é estendido a todos os índices j que satisfaçam à condição $x_j \leq x$.

Função de distribuição acumulada
Variáveis aleatórias contínuas

- Para variáveis aleatórias **contínuas**, a função densidade de probabilidade equivale à primeira derivada da função de distribuição acumulada, uma vez que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

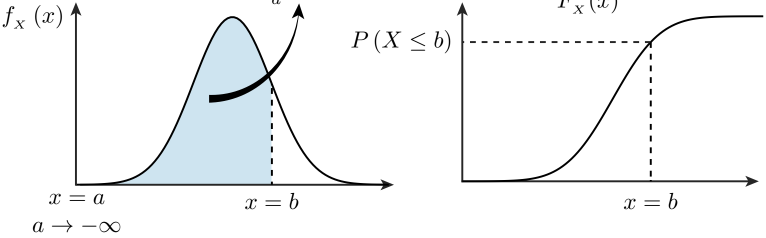
$$\frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} = f_X(x)$$

- Além desta característica, é importante observar algumas propriedades relevantes de funções de distribuição acumulada:
  - Tem-se que $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.
  - A função de distribuição acumulada é sempre maior ou igual a zero e apresenta um comportamento não-decrescente, ou seja, se $x_1 \leq x_2$, então $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.

Função de distribuição acumulada
Variáveis aleatórias contínuas

- A função de distribuição acumulada é importante por muitas razões. Isto é particularmente verdadeiro quando temos uma variável aleatória contínua, porque nesse caso **não poderemos** estudar o comportamento probabilístico de X através do cálculo de $P(X = x)$.
- Essa probabilidade é sempre **igual a zero** no caso contínuo. Contudo, poderemos analisar $P(X \leq x)$.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}x$$



Medidas de dispersão

Definições gerais para descrição de incertezas

- A **média** ou **esperança** de uma variável aleatória está relacionada à "tendência central" (ou localização) desta variável, isto é, pode ser compreendida como a média ponderada dos valores que X pode assumir, com pesos fornecidos pela função densidade de probabilidade.
- Portanto, a média ou valor esperado de uma variável aleatória contínua X, em relação à função densidade de probabilidade, denotada como $f_X(x)$, é definida por

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

- Como já foi definido, uma variável aleatória X mapeia o espaço amostral S no conjunto dos números reais, isto é, $X : S \rightarrow \mathbb{R}$.
- Seja $g(x)$ uma função arbitrária de x. Pode-se verificar que o **valor esperado** de $g(X)$ é dado por

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Medidas de dispersão
Definições gerais para descrição de incertezas

- Por sua vez, a variância de uma variável aleatória contínua é definida de forma similar à variância amostral, apresentada na Eq. (1).
- O somatório da referida equação é transformado na integração da variável aleatória.
- Portanto, a variância correspondente a X, denotada como $\mathrm{Var}\left[X\right]$, é definida como

$$\mathrm{Var}\left(X\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \mathbb{E}\left(X\right)\right)^2 f_X\left(x\right) \mathrm{d}x \tag{3}$$

Se os termos polinomiais forem expandidos, a Eq. (3) assume a forma

$$\mathrm{Var}\left(X\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X\left(x\right) \mathrm{d}x - 2\mathbb{E}\left[X\right] \int_{-\infty}^{\infty} x f_X\left(x\right) \mathrm{d}x + \left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(x\right) \mathrm{d}x$$

Medidas de dispersão

Definições gerais para descrição de incertezas

- Através da Eq. (2) e da **segunda condição** imposta pela definição de funções densidade de probabilidade, temos

$$\mathrm{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2 \ . \tag{4}$$

  Neste caso, o desvio-padrão também é definido como

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}\left(X\right)}$$

- De um ponto de vista prático, pode ser necessário considerar **mais de uma variável aleatória** na formulação de determinado problema.
- Há casos em que existe o interesse em se observar **dois ou mais eventos** simultaneamente.

Variáveis aleatórias contínuas
Alguns exemplos

- O tempo de vida útil (em anos) de um equipamento eletrônico de determinado tipo pode ser expresso por uma variável aleatória contínua X, cuja função de densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp(-x/2), & \text{para } x \geq 0 \\ 0, & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

- Determine a probabilidade de que o equipamento dure: a) mais de três anos; b) entre seis e 18 meses.

- Primeiramente, vamos verificar que a função dada é uma legítima função de densidade. Notemos que $f(x) \geq 0$ para todo x real e que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-x/2}dx = 1$$

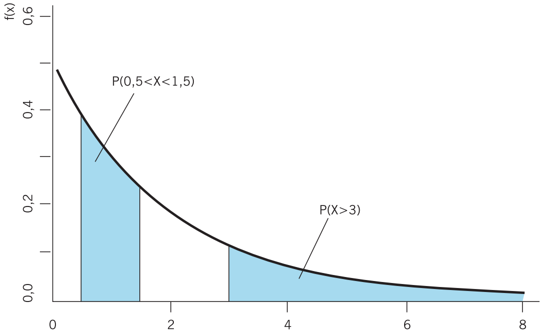
Variáveis aleatórias contínuas
Alguns exemplos

- a)

$$P(X > 3) = \int_3^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = e^{-3/2} = 0,2231$$

- b)

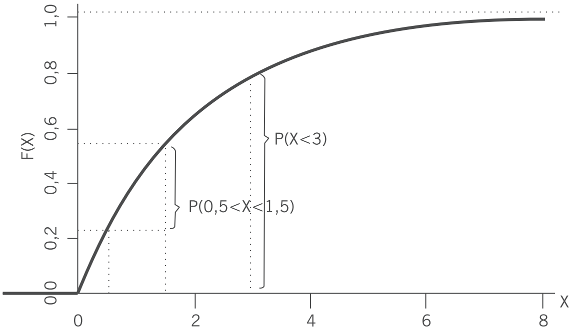
$$P(0,5 \leq X \leq 1,5) = \int_{0,5}^{1,5} \frac{1}{2} e^{-x/2}\, dx = e^{-0,5/2} - e^{-1,5/2} = 0,3064$$



Variáveis aleatórias contínuas
Alguns exemplos

- Ao calcularmos a função densidade de probabilidade da variável aleatória X, observamos que:
- a) Se $x < 0, f(x) = 0$ e $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$
- b) Se $x \geq 0, F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-t/2}dt = 1 - e^{-x/2}$, se $x \geq 0$
- Em resumo:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ 1 - e^{x/2}, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$



Variáveis aleatórias contínuas

Alguns exemplos

- Note que as probabilidades ali obtidas podem ser recalculadas usando a função densidade de probabilidade.

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \left(1 - e^{-3/2}\right) = e^{-1,5} = 0,2231$$

$$P(0,5 \leq X \leq 1,5) = F(1,5) - F(0,5) = \left(1 - e^{-1,5/2}\right) - \left(1 - e^{-0,5/2}\right) = e^{-0,25} - e^{-0,75} = 0,3064$$

- Para a variável aleatória X deste exemplo, temos:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \, dx + \int_{0}^{\infty} x \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = 2$$

após integração por partes. Ou seja, o equipamento dura em **em média** dois anos.

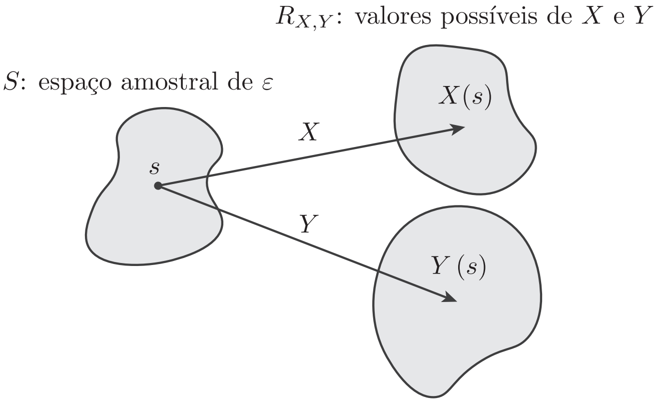
- Além disso,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 dx + \int_{0}^{\infty} x^2 \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = 8$$

Logo, $\mathrm{Var}(X) = 8 - 2^2 = 4$ “anos^2”. Daí, $\sigma_X = 2$ anos e $\mathrm{CV}(X) = 1$.

Variáveis aleatórias múltiplas

- Sejam ε um experimento estocástico e S um espaço amostral associado a ε. Sejam $X = X(s)$ e $Y = Y(s)$ duas funções, cada uma associando um número real a cada resultado $s \in \mathcal{S}$. Denomina-se (X, Y) uma **variável aleatória bidimensional**.



Variáveis aleatórias múltiplas

- (X, Y) será uma variável aleatória **discreta bidimensional** se os valores de (X, Y) forem finitos ou infinitos numeráveis, isto é, se os valores possíveis de (X, Y) possam ser representados por $\left(x_i, y_j\right)$, para $i = 1, \ldots, n, \ldots$ e $j = 1, \ldots, m, \ldots$.
- (X, Y) será uma variável aleatória **contínua bidimensional** se (X, Y) puder tomar todos os valores em algum conjunto não-numerável do plano euclidiano.
  - Por exemplo, se (X, Y) puder tomar todos os valors no retângulo $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.
- Se $X_1 = X_1(s), X_2 = X_2(s), \ldots, X_n = X_n(s)$ forem n funções, cada uma associando um número real a cada resultado $s \in S$, denominaremos $(X_1, \ldots, X_n)$ uma **variável aleatório n-dimensional**.
- Os conceitos serão apresentadas para o caso de duas variáveis aleatórias, uma vez que a extensão da maioria dos conceitos e definições ocorre de maneira natural.

Variáveis aleatórias múltiplas

- Seja $(X,\ Y)$ uma variável aleatória *discreta* bidimensional. A cada resultado possível $\left(x_i, y_j\right)$ associaremos um número $p\left(x_i, y_j\right)$ representando $P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$ e satisfazendo às seguintes condições:
  1. $p\left(x_i, y_j\right) \geq 0$, para todo $\left(x_i, y_j\right)$.
  2. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} p\left(x_i, y_j\right) = 1$.
- Seja $(X,\ Y)$ uma variável aleatória *contínua* bidimensional tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano. Uma **função densidade de probabilidade conjunta** $f_{X,Y}(x,\ y)$ é uma função que satisfaz às seguintes condições:
  1. A função $f_{X,Y}(x,\ y) \geq 0$, para todo $(x,\ y) \in \mathbb{R}$.
  2. A integral $\iint\limits_R f_{X,Y}(x,\ y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$.

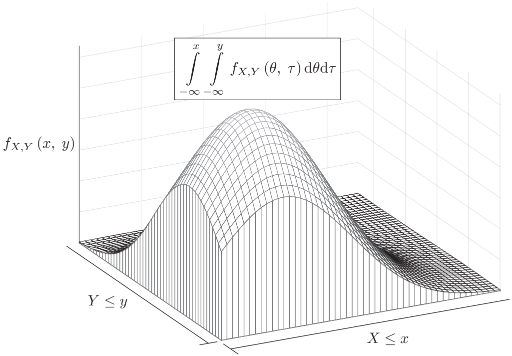
Variáveis aleatórias múltiplas

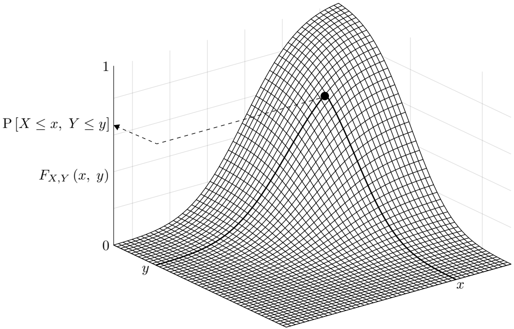
- Seja $(X,\ Y)$ uma variável aleatória contínua bidimensional. A *função de distribuição acumulada conjunta* $F_{X,Y}(x,\ y)$ dessa variável aleatória é dada por $F_{X,Y}(x,\ y) = \mathrm{P}[X \leq x,\ Y \leq y]$, tal que, se $f_{X,Y}(x,\ y)$ representa a função densidade de probabilidade conjunta da variável aleatória $(X,\ Y)$, então

$$F_{X,Y}(x,\ y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(\theta,\ \tau)\, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\tau$$

- As funções conjuntas também possuem características similares às unidimensionais:
  - Tem-se que $\lim_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x,\ y) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,\ y) = F_Y(y)$.
  - De forma análoga para y, $\lim_{y \to -\infty} F_{X,Y}(x,\ y) = 0$ e $\lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,\ y) = F_X(x)$.
  - Além disso, $\lim_{x,y \to -\infty} F_{X,Y}(x,\ y) = 0$ e $\lim_{x,y \to \infty} F_{X,Y}(x,\ y) = 1$.
  - A função de distribuição acumulada conjunta sempre assume valor maior ou igual a zero e exibe comportamento não-decrescente.

Variáveis aleatórias múltiplas





Variáveis aleatórias múltiplas
Covariância

- É preciso determinar uma maneira de medir o **nível de interferência** entre as variáveis aleatórias, isto é, estabelecer um parâmetro capaz de avaliar o **grau de associação** entre elas.
- Isso pode ser feito por meio da análise da **covariância** e **correlação**.
- A **covariância** de uma variável aleatória bidimensional $(X,\ Y)$, a qual é denotada por $\text{Cov}\left[X,\ Y\right]$, indica o nível de relação linear entre os seus componentes.

$$\text{Cov}\left[X,\ Y\right] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left[X\right]\right)\left(Y - \mathbb{E}\left[Y\right]\right)\right]$$

- A **covariância** representa o valor esperado do produto entre as diferenças de cada uma das componentes da variável aleatória e sua respectiva média.
- Se X e Y forem estatisticamente independentes, isto é, se o conhecimento do resultado de X não afetar a distribuição de Y, o cálculo da covariância irá resultar em $\text{Cov}\left[X,\ Y\right] = 0$, o que significa que **os dados não têm relação linear entre si**.

Variáveis aleatórias múltiplas
Coeficiente de correlação

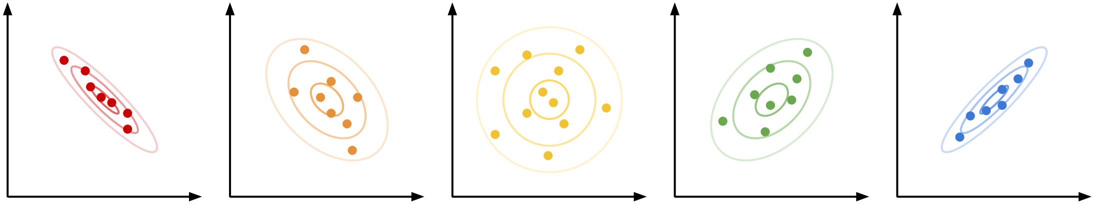
- Os valores calculados por $\text{Cov}\left[X,\ Y\right]$ têm unidade de medida igual ao quadrado da unidade do valor esperado.
- A obtenção de resultados adimensionais é realizada por meio do cômputo do **coeficiente de correlação**, representado por $\rho_{X,Y}$ e calculado como

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}\left[X,\ Y\right]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Este valor é conhecido como **coeficiente de correlação de Pearson**.
- σ_X e σ_Y representam o **desvio-padrão** de cada componente da variável aleatória bidimensional.
- Os valores do coeficiente de correlação **variam entre** $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$.

Variáveis aleatórias múltiplas
Coeficiente de correlação

- Em um espaço amostral típico, *dificilmente* o coeficiente de correlação assumirá os valores extremos desse intervalo, uma vez que essa ocorrência só se dá quando **uma reta passa por todos os pontos do domínio amostral**, com o sinal do resultado dependente da inclinação da reta.
- No caso em que $\rho_{X,Y}$ é próximo de zero, as componentes X e Y da variável aleatória têm pouco relação linear entre si e, portanto, são chamadas de **não-correlacionadas**.



$\rho = -0{,}9$ $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}9 \\ -0{,}9 & 1 \end{pmatrix}$

$\rho = -0{,}5$ $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$

$\rho = 0$ $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\rho = 0{,}5$ $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$

$\rho = 0{,}9$ $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 1 \end{pmatrix}$