7 Análise de covariância (ANCOVA)

7.1 Introdução

Em alguns experimentos, pode ser muito difícil e até impossível obter unidades experimentais semelhantes. Por exemplo, pode-se não ter cobaias de mesmo peso, motores com o mesmo tempo de funcionamento, corpos de prova com mesmo tamanho etc. Mas, em todos estes casos, quando a condição inicial da unidade experimental for conhecida e puder ser medida, e ainda, que seja conhecido que esta condição inicial (uma variável) tenha influência sobre a variável resposta, pode-se utilizar esta informação para corrigir a variável resposta. Tal, procedimento pode ser feito utilizando-se da técnica de análise de covariância.

A variável medida na condição inicial da unidade experimental é chamada de *covariável* (ou ainda, variável auxiliar, variável concomitante). Em um mesmo experimento, pode haver mais de uma covariável.

A covariável complementa o controle local e na grande maioria das situações simplesmente o substitui.

Obviamente, a covariável necessita estar correlacionada com a variável resposta para que se possa fazer uso de tal análise.

Quando a Análise de Variância é realizada com uma ou mais covariáveis, usa-se chamar a análise de ANCOVA[2]. A ANCOVA permite que se faça um "ajuste"do efeito de uma variável resposta que sofreu influência de uma variável ou uma causa de variação não controlada.

A ANCOVA, permite, portanto, um controle do erro experimental, aumentando a precisão do experimento. é possível também fazer o ajuste das médias dos tratamentos em função da(s) covariável(eis) e, em alguns casos, estimar observações perdidas durante o experimento.

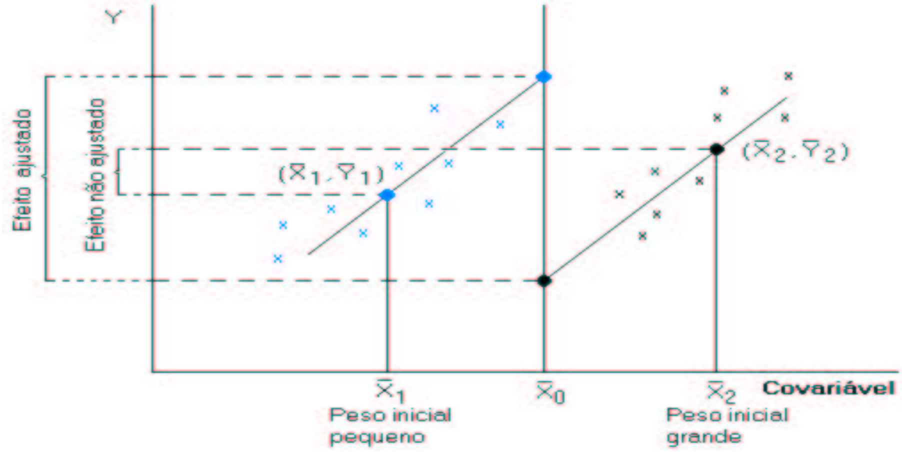
Para que uma covariável possa ser assim considerada, deve-se garantir que ela não seja afetada pelo tratamento. Por exemplo: ao utiliza-se como covariável o número de animais sobreviventes em uma gaiola, deve-se garantir que a causa da morte ou da perda dos animais durante o experimento não seja causada pelo efeito do tratamento. Neste caso, o uso da covariável é incorreto, pois será eliminado da análise uma possível fonte de variação conhecida: o próprio efeito do tratamento.

[2]**An**alysis of **cova**riance

Um situação bastante comum é quando existem animais de pesos diferentes e a variável resposta de interesse é o peso final dos animais. Neste caso, antes do início do experimento, o peso inicial dos animais é obtido e utilizado como covariável no experimento.

Graficamente, a forma de correção da variável resposta através da ANCOVA pode ser vista na figura 14.

Figura 14: Metodologia de ajuste da análise de covariância.



7.2 Modelo estatístico

Considere um experimento com um fator e uma covariável. O modelo estatístico pode ser escrito da seguinte maneira:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta(X_{ij} - \bar{X}) + \epsilon_{ij} \tag{23}$$

onde

μ = constante;
α_i =efeito do i-ésimo tratamento;
X_{ij} = valor observado da covariável;
$\bar{X}$ = média da covariável;
β = coeficiente de regressão linear entre a covariável (X) e a variável resposta (Y), com $\beta \neq 0$. Neste caso, a relação deve ser linear.

Neste modelo, assume-se que a variável resposta e a covariável estão relacionadas linearmente.

Análise de Variância

Tabela 59: Análise de covariância.

	GL	SQ e Prod. Cruzados			Ajuste pela Regressão		
CV	GL	xx	xy	yy	y	GL	QM
Trat	a-1	T_{xx}	T_{xy}	T_{yy}			
Erro	a(n-1)	E_{xx}	E_{xy}	E_{yy}	SQE=$E_{yy} - \frac{(E_{xy})^2}{E_{xx}}$	a(n-1)-1	$\frac{SQE}{a(n-1)-1}$
Total	an -1	S_{xx}	S_{xy}	S_{yy}	SQE'=$S_{yy} - \frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}$	an-2	
Trat. aj.					SQE-SQE'	a-1	$\frac{SQE'-SQE}{a-1}$

Onde

$$S_{yy} = \sum_{ij}^{an} y_{ij} - \frac{(y_{..})^2}{an}$$

$$S_{xx} = \sum_{ij}^{an} x_{ij} - \frac{(x_{..})^2}{an}$$

$$S_{xy} = \sum_{ij}^{an} x_{ij}y_{ij} - \frac{(y_{..})(x_{..})}{an}$$

$$T_{xx} = \sum_{i}^{a} \frac{x_{i.}}{n} - \frac{(x_{..})^2}{an}$$

$$T_{xy} = \sum_{i}^{a} \frac{(x_{i.})(y_{i.})}{n} - \frac{(x_{..})(y_{..})}{an}$$

$$T_{yy} = \sum_{i}^{a} \frac{y_{i.}}{n} - \frac{(y_{..})^2}{an}$$

$$E_{yy} = S_{yy} - T_{yy}$$

$$E_{xx} = S_{xx} - T_{xx}$$

$$E_{xy} = S_{xy} - T_{xy}$$

e

$$\hat{\beta} = \frac{E_{xy}}{E_{xx}} \tag{24}$$

O valor de F para tratamentos é obtido por:

$$F = \frac{\frac{SQE' - SQE}{A-1}}{\frac{SQE}{a(n-1)-1}} \tag{25}$$

E a hipótese $H_0 : \beta = 0$ pode ser testada por

$$F = \frac{\frac{(E_{xy})^2}{E_{xx}}}{\frac{E_{yy} - \frac{(E_{xy})^2}{E_{xx}}}{a(n-1)-1}} \sim F_\alpha(1, a(n-1)-1) \tag{26}$$

O ajuste da variável observada Y, pode ser entendido como

$$y_{ij} - \beta(X_{ij} - \bar{X}) = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij} \tag{27}$$

O ajuste de médias de tratamentos, pode ser feito da seguinte maneira

$$\bar{y}'_{i.} = \bar{y}_{i.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..}) \tag{28}$$

7.3 Exemplo:

Considere o seguinte conjunto de dados onde foi medido a resistência de fios de algodão. A resposta avaliada foi o comprimento (cm) que o fio atingiu antes de se romper. Como cada fio possui um diâmetro diferente, e isso afeta a resistência, utilizou-se essa informação como covariável. Os dados estão na tabela 60. Três tipos de máquinas foram comparadas neste experimento.

O primeiro passo da análise é verificar se existe relação linear entre a variável e a covariável. Esta relação deve ser pelo menos aproximada.

O passo seguinte é calcular as somas de quadrados e produtos cruzados.

$S_{yy} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} y_{ij}^2 - \frac{(y_{..})^2}{an} = (36^2 + \ldots + 32^2) - \frac{(603)^2}{3\times5} = 346,40$

Tabela 60: Comprimento (Y) e diâmetro (X) de fios de algodão.

	Máquina 1		Máquina 2		Máquina 3	
Observação	Y	X	Y	X	Y	X
1	36	20	40	22	35	21
2	41	25	48	28	37	23
3	39	24	39	22	42	26
4	42	25	45	30	34	21
5	49	32	44	28	32	15
Total	207	126	216	130	180	106

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} x_{ij}^2 - \frac{(x_{..})^2}{an} = (20^2 + \ldots + 15^2) - \frac{(362)^2}{3\times 5} = 261,73$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} (x_{ij})(y_{ij}) - \frac{(x_{..})(y_{..})}{an} = (20\times 36 + \ldots + 15\times 32) - \frac{(362)(603)}{3\times 5} = 282,60$$

$$T_{yy} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(y_{i.})^2}{n} - \frac{(y_{..})^2}{an} = \frac{(207^2+216^2+180^2)}{5} - \frac{(603)^2}{15} = 140,4$$

$$T_{xx} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(x_{i.})^2}{n} - \frac{(x_{..})^2}{an} = \frac{(126^2+130^2+106^2)}{5} - \frac{(362)^2}{15} = 66,13$$

$$T_{xy} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(x_{i.})(y_{i.})}{n} - \frac{(x_{..})(y_{..})}{an} = \frac{(126\times 207+130\times 216+106\times 180)}{5} - \frac{(362)(603)}{15} = 96$$

$E_{yy} = 346,4 - 140,4 = 206,0$
$E_{xx} = 261,73 - 66,13 = 195,6$
$E_{xy} = 282,6 - 96 = 186,6$

$$SQE' = 346,4 - \frac{(282,6)^2}{261,73} = 41,27$$

$$SQE = 206 - \frac{(186,6)^2}{195,6} = 27,99$$

$SQE' - SQE = 41,27 - 27,99 = 13,28$ que é a soma de quadrados de tratamentos ajustada para a covariável.

O Coeficiente de regressão $\hat{\beta}$ pode ser obtido por

$$\hat{\beta} = \frac{E_{xy}}{E_{xx}} = \frac{186,6}{195,6} = 0,954$$

Pode-se testar a hipótese $H_0 : \beta = 0$ por

$$F_{\beta} = \frac{(186,6)^2/195,6}{2,54} = 70,08$$