Proyecto Final: Simulación del Modelo Black-Scholes

Simulación

Gustavo Muñoz
173565

Oscar Aguilar
173718

14 de mayo de 2021

1. Introducción

Partiendo del enfoque estructural en el incumplimiento de pagos de los pasivos de una firma y el pago a los accionistas de su participación, se puede entender que el riesgo asociado a dicho incumplimiento afecta el valor de la misma (accionistas y tenedores de deuda). La contingencia en el pago a los accionistas y las reclamaciones de dichas deudas se realiza en un tiempo futuro T en el que se comparan el valor de los activos que posee la empresa en ese momento (V_T) con el valor nominal de la deuda D. Si los activos valen más que la deuda entonces los accionistas recibirían el excedente y los tenedores de deuda reciben el valor de la deuda; de lo contrario, los primeros no reciben cantidad alguna y los tenedores de deuda recibirían el valor de los activos.Por lo que se podría entender que los accionistas son dueños de una opción call europea del valor de los activos en el tiempo determinado.Por otro lado, los tenedores de deuda ofrecen una garantía implícita absorbiendo pérdidas si existe un incumplimiento de pago y reciben una prima de una opción put en la forma de un diferencial de crédito por encima de la tasa libre de riesgo, a cambio de mantener una deuda con riesgo.

Notacionalmente, la participación de los accionistas E y el pago a los tenedores de deuda B en el tiempo T está dado por las siguientes fórmulas:

$$E = max\{V_T - D, 0\}, B = D - max\{D - V_T, 0\}$$

2. Alcance del Proyecto

Simular bajo distintos supuestos (valor de activos, de deuda y tiempo en el que estas se reclaman) el proceso estocástico que entraña el precio de los instrumentos y obtener una distribución que nos revele lo que se esperaría observar en un tiempo futuro dado. Para el mejoramiento de las estimaciones generamos algunos métodos de reducción de varianza para comparar.

3. Actividades y Metodologías

Utilizando los resultados vistos en clase cuando se trabajaron los procesos estocásticos, simularemos los análogos a las caminatas aleatorias en el valor de los activos de la empresa mediante un movimiento browniano para parametrizar, dado un valor μ de drift y volatilidad σ la evolución del portafolio a través del tiempo y estimar tanto la participación esperada de los accionistas E, como el pago esperado a los tenedores de deuda B. Luego, con la fórmula clásica de *Black-Scholes* determinaremos, utilizando los resultados anteriores, el precio de la opciónes asociadas para comparar el resultado obtenido con las simulaciones.

(*Nota*: Se ilustrarán los métodos únicamente para el caso de estimación de E ya que resulta análogo para la estimación de B)

3.1. Monte Carlo Crudo

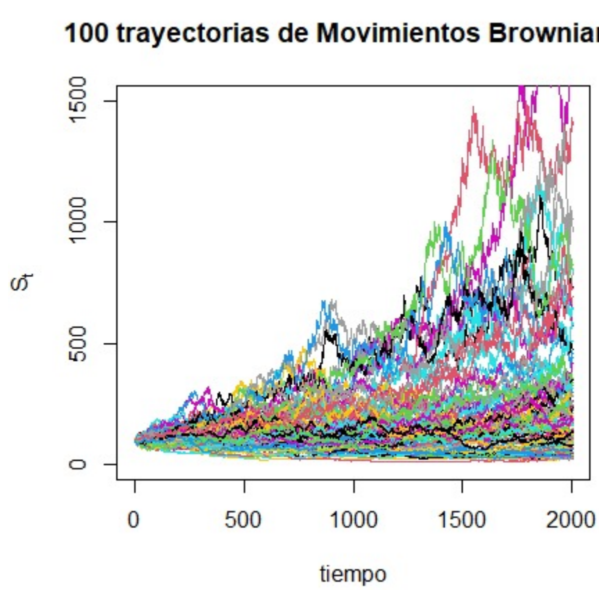
Para iniciar el trabajo, simulamos N trayectorias de un movimiento browniano geométrico sobre el valor de los activos $\{V_t\}^i$ con $i = 1, ..., N$. Es decir;

$$\frac{dV^i}{V^i} = \mu dt + \sigma dW_t^i$$

Para cada trayectoria i se transfomarán los valores obtenidos en cada punto del tiempo y así obtener trayectorías que representen la participación de los accionistas al tiempo/fecha T, que se interpreta como la opción call mencionada anteoriormente, y obtener $C^i = max\{V_t - D, 0\}^i$ para cada trayectoria i. Estas N observaciones en el tiempo T del valor de la opción se supondran observaciones independientes de una misma distribución F y utilizando el cálculo de integración Monte Carlo se estimará el precio de la opción traído a valor presente ($t = 0$) como la esperanza de dicha distribución, esto es:

$$\hat{E} = e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C^i = e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} max\{V_T - D, 0\}^i$$

Al simular 100 corridas del movimiento Browniano obtenemos la siguiente gráfica:



Gráfica 1: 100 Trayectorias de Movimiento Browniano

Para la simulación del valor de los activos al tiempo t utilizamos el siguiente cálculo discreto del Movimiento Browniano:

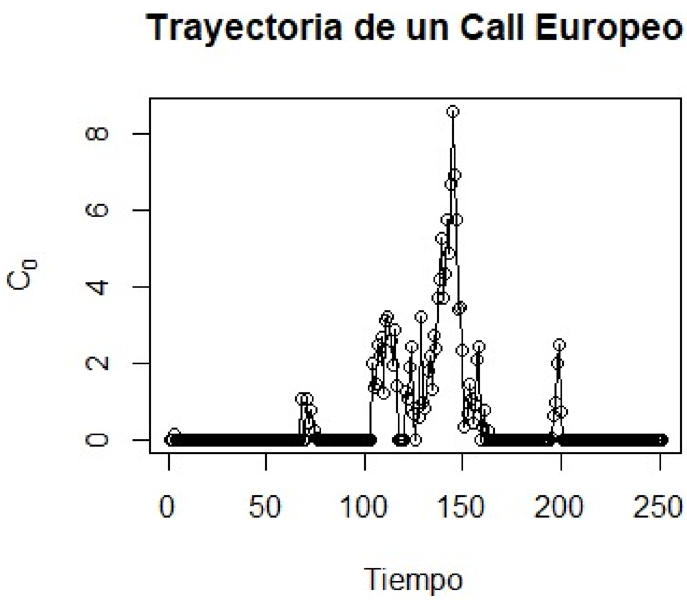
$$V_{t+\Delta t} = V_t exp\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma Z_j \sqrt{\Delta t}\}$$

con Δt el incremento en el tiempo y $Z_j \sim N(0,1)$.

Para representar esta función en R, implementamos el siguiente código:

```

V <- function(h, TT, mu, sigma, V0){
  #Funci n para generar un proceso Browniano Geom trico
  # INPUT :
  #         h     ... fracci n de tiempo
  #         TT    ... Tiempo final (unidad de tiempo 1 a o con 365 d as)
  #         mu    ... drift (rendimiento promedio)
  #         sigma ... volatilidad (riesgo = desv.est ndar del rendimiento)
  #         V0    ... valor inicial de los activos
  # OUTPUT :
  #         Vt    ... valor de los activos al tiempo TT
  Z <- rnorm(h)
  dt <- TT/h #incremento en el tiempo
  Vt <- V0
  for(i in 2:(h+1)){
    Vt <- c(Vt, Vt[i-1]*exp((mu - sigma^2/2)*dt + sigma*sqrt(dt)*Z[i-1]))
  }
  return(Vt)
}

call_eur <- function(S0, fecha, K, mu, sigma, r){

  #Funci n para calcular la trayectoria del precio de una ocpi n "Call" europea
  # INPUT :
  #         S0     ... Valor inicial del activo subyacente
  #         fecha    ... Fecha de expiraci n del contrato
  #         mu    ... drift (rendimiento promedio)
  #         sigma ... volatilidad (riesgo = desv.est ndar del rendimiento)
  #         V0    ... valor inicial de los activos
  #         r     ... tasa de inter s
  #
  # OUTPUT :
  #         valor de la opci n Call traido a valor presente con tasa r a trav s del tiempo


  Vt <- V(fecha, 250, mu/250, sigma/sqrt(250), S0) ## fecha en d as; 1 a o = 250 d as h biles
  equity <- Vt-K
  call_0 <- NULL
  for (j in 1:length(equity)) {
    call_0[j] <- exp(-r*fecha/250)*max(equity[j],0)
  }
  return(call_0)
}
```

Para representar la trayectoria de un Call Europeo, lo plasmamos en la siguiente gráfica:



Gráfica 2: Trayectoria de un Call Europeo

3.2. Variada Antitética

Para mejorar la estimación utilizando un método de reducción de varianza definimos una variada antitética como la trayectoria de la opción utilizando el negativo de la observación que proviene de la normal estandar $(-Z_j)$ pues sigue la misma distribución y así definimos una corrida promedio $\bar{C}^i$ como $\frac{C_1^i + C_2^i}{2}$, donde C_1^i proviene del cálculo definido anteriormente con proceso de activos $V_t exp\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma Z_j \sqrt{\Delta t}\}$ y C_2^i derivado del proceso $V_t exp\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma(-Z_j)\sqrt{\Delta t}\}$. Así nuestra estimación quedaría definida como:

$$\hat{E} = e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\bar{C}^i = e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{C_1^i + C_2^i}{2}$$

Para representar esta función en R, implementamos el siguiente código:

```
# Mejoramiento con variada antit tica
V2 <- function(h, TT, mu, sigma, V0){
  Z <- rnorm(h)
  dt <- TT/h #incremento en el tiempo
  Vt <- V0
  for(i in 2:(h+1)){
    Vt <- c(Vt, Vt[i-1]*exp((mu - sigma^2/2)*dt + sigma*sqrt(dt)*(-Z[i-1])))
  }
  return(Vt)
}
```

3.3. Variada de Control

Otro método que ayuda a reducir la variabilidad de nuestra estimación es a través de las llamadas variadas de control. Para esto, consideramos razonable pensar que el valor de los activos al tiempo T es una variable aleatoria V_T que está relacionada con el valor presente de la opción Call al tiempo T, C^i. Bajo esta idea simulamos N observaciones de una nueva variable aleatoria X con cada observación $X^i = C^i - a(V_T^i - \mathbb{E}[V_T^i])$ de tal forma que $a = \frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)}$ y $2aCov(X,Y) > a^2Var(Y)$:

Para representar esta función en R, implementamos el siguiente código:

```
# de control : valor de las acciones a la fecha de pago
set.seed(semilla)
y <- replicate(N,V(fecha, 250, mu/250, sigma/sqrt(250), V0)[fecha+1])
cov(x,y)
var(y)
a <- cov(x,y)/var(y)
a
2*a*cov(x,y) > a^2 * var(y)
xc <- x - a*(y - mean(y))
```

Así pues:

$$\hat{E} = e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X^i$$

3.4. Método Híbrido

Como último enfoque para el mejoramiento en la varianza se mezclaron los dos métodos anteriores para construir un esquema híbrido que suponemos será el mejor de los 4 métodos en cuanto al tamaño de la desviación estandar de nuestro estimador.

4. Hipótesis

Para esclarecer la dependencia de los resultados en el número de simulaciones y la volatilidad supuesta del movimiento browniano implementado; a continuación se presentan varias tablas de resultados en el que se comparan las distintas estimaciones, desviaciónes estándar, e intervalos de cada método y el resultado que proveé la fórmula de Black-Scholes para el cálculo del precio de las opciones.

Para efectos de este trabajo suponemos un valor inicial en los activos de la empresa (en miles de millones) $V_0 = 100$, una deuda nominal $D = 100$ con fecha de expiración $T = 1$ año, considerando un año con 250 días hábiles, una tasa de interés $r = 0{,}05$ y un retorno esperado constante de los activos μ (*drift*) de la misma magnitud. El número de simulaciones y la volatilidad se denotan por N y σ respectivamente.

5. Resultados

5.1. Participación de los accionistas($\hat{E}$)

Tabla 1: N = 10000 $\sigma = 0{,}2$ BS = 10.4508

```
        Metodo  Estimacion  Desv.Est    Cota.Inf   Cota.Sup
1 MC_Basico     10.37585   14.633023  -4.257170   25.00888
2 Antitetica    10.43015   10.549573  -0.119426   20.97972
3 De Control    10.37585   5.600514    4.775339   15.97637
4 Hibrido       10.43015   3.978050    6.452098   14.40820
```

Buscamos ahora variar el número de simulaciones:

Tabla 2: N = 100 $\sigma = 0{,}2$ BS = 10.4508

```
        Metodo  Estimacion  Desv.Est    Cota.Inf    Cota.Sup
1 MC_Basico     11.262175  15.284607  -4.0224312  26.54678
2 Antitetica    9.643404   9.676814   -0.0334095  19.32022
3 De Control    11.262175  5.579000    5.6831752  16.84118
4 Hibrido       9.643404   3.940490    5.7029144  13.58389
```

Tabla 3: N = 100000 $\sigma = 0{,}2$ BS = 10.4508

```
        Metodo  Estimacion  Desv.Est    Cota.Inf    Cota.Sup
1 MC_Basico     10.46400   14.691065  -4.2270661  25.15506
2 Antitetica    10.42208   10.407859   0.0142161  20.82994
3 De Control    10.46400   5.597294    4.8667045  16.06129
4 Hibrido       10.42208   3.958244    6.4638313  14.38032
```

Buscamos ahora variar la volatilidad:

Tabla 4: N = 10000 $\sigma = 0{,}01$ BS = 4.8770

```
        Metodo  Estimacion  Desv.Est       Cota.Inf   Cota.Sup
1 MC_Basico     4.872897   9.977319e-01   3.875165   5.870629
2 Antitetica    4.874127   7.146843e-01   4.159443   5.588811
3 De Control    4.872897   3.212372e-16   4.872897   4.872897
4 Hibrido       4.874127   4.824587e-15   4.874127   4.874127
```

Tabla 5: N = 10000 $\sigma = 0{,}05$ BS = 5.2832

```
        Metodo  Estimacion  Desv.Est    Cota.Inf   Cota.Sup
1 MC_Basico     5.265359   4.3679339   0.897424  9.633293
2 Antitetica    5.267292   3.1417564   2.125535  8.409048
3 De Control    5.265359   0.9868986   4.278460  6.252257
4 Hibrido       5.267292   0.6950645   4.572227  5.962356
```

Tabla 6: N = 10000 $\sigma = 0{,}1$ BS = 6.8049

```
        Metodo  Estimacion  Desv.Est    Cota.Inf   Cota.Sup
1 MC_Basico     6.766837   7.701145   -0.934307  14.467982
2 Antitetica    6.778764   5.543515    1.235249  12.322279
3 De Control    6.766837   2.621789    4.145048   9.388626
4 Hibrido       6.778764   1.852765    4.925999   8.631529
```

Tabla 7: N = 10000 $\sigma = 1{,}2$ BS = 46.5207

```
        Metodo  Estimacion  Desv.Est    Cota.Inf   Cota.Sup
1 MC_Basico     45.55419   154.20434  -108.6501  199.75853
2 Antitetica    46.75972   114.28741  -67.52769  161.04712
3 De Control    45.55419   28.49809    17.05609  74.05228
4 Hibrido       46.75972   20.40654    26.35317  67.16626
```

5.2. Pago a los tenedores de Deuda($\hat{B}$)

Tabla 8: N = 10000 $\sigma = 0{,}2$ BS = 94.42647

```
       Metodo  Estimacion  Desv.Est    Cota.Inf   Cota.Sup
1 MC_Basico     94.40918   8.664804   -3.0739806  14.255627
2 Antitetica    94.39384   6.153607   -0.5474453  11.759768
3 De Control    94.40918   5.600514   -0.0096903  11.191337
4 Hibrido       94.39384   3.978050    1.6281116   9.584211
```

Buscamos ahora variar el número de simulaciones:

Tabla 9: N = 100 $\sigma = 0{,}2$ BS = 94.42647

```
       Metodo  Estimacion  Desv.Est    Cota.Inf   Cota.Sup
1 MC_Basico      95.22482  8.196459  -3.4212744  12.971644
2 Antitetica     94.07697  6.562213  -0.6391786  12.485248
3 De Control     95.22482  5.579000  -0.8038153  10.354185
4 Hibrido        94.07697  3.940490   1.9825449   9.863525
```

Tabla 10: N = 100000 $\sigma = 0{,}2$ BS = 94.42647

```
       Metodo  Estimacion  Desv.Est    Cota.Inf   Cota.Sup
1 MC_Basico      94.43706  8.647885   -3.084944  14.210825
2 Antitetica     94.41787  6.102754   -0.520627  11.684881
3 De Control     94.43706  5.597294   -0.034353  11.160234
4 Hibrido        94.41787  3.958244    1.623882   9.540371
```

Buscamos ahora variar la volatilidad:

Tabla 11: N = 10000 $\sigma = 0{,}01$ BS = 100

```
       Metodo  Estimacion  Desv.Est  Cota.Inf   Cota.Sup
1 MC_Basico          100         0         0         0
2 Antitetica         100         0         0         0
3 De Control         100         0         0         0
4    Hibrido         100         0         0         0
```

Tabla 12: N = 10000 $\sigma = 0{,}05$ BS = 99.59379

```
       Metodo  Estimacion  Desv.Est     Cota.Inf   Cota.Sup
1 MC_Basico     99.59044   1.2309824    -0.82142  1.640542
2 Antitetica    99.59530   0.8641062    -0.45941  1.268802
3 De Control    99.59044   0.9868986    -0.57733  1.396458
4 Hibrido       99.59530   0.6950645    -0.29036  1.099760
```

Tabla 13: N = 10000 $\sigma = 0{,}1$ BS = 98.0721

```
       Metodo  Estimacion  Desv.Est    Cota.Inf   Cota.Sup
1 MC_Basico      98.06655  3.804041   -1.870596  5.737487
2 Antitetica     98.07000  2.687831   -0.757835  4.617826
3 De Control     98.06655  2.621789   -0.688343  4.555234
4 Hibrido        98.07000  1.852765    0.077230  3.782760
```

Tabla 14: N = 10000 $\sigma = 1{,}2$ BS = 58.35628

```
       Metodo  Estimacion  Desv.Est   Cota.Inf   Cota.Sup
1 MC_Basico     58.23888   33.66047    8.100646  75.42159
2 Antitetica    58.14253   23.94965   17.907822  65.80711
3 De Control    58.23888   28.49809   13.263023  70.25921
4 Hibrido       58.14253   20.40654   21.450924  62.26401
```

6. Interpretación

Como se puede notar en los resultados; entre mayor es el número de simulaciones (mayor muestra) la estimación de los métodos convergen al valor que la fórmula de *Black-Scholes* (BS) calcula. La volatilidad es un factor muy importante en la variablidad de las estimaciones y como era de esperarse, el método Híbrido es el que predomina en ese sentido en cada uno de los casos, tanto de la participación de los accionistas como el pago de deuda.

Por otro lado, es interesante recalcar que cuando la volatilidad crece, la estimación en la participación esperada de los accionistas crece de tal forma que esperaríamos observar una estimación igual al valor inicial de los activos para una simulación altamente volátil, mientras que en el caso del pago a los tenedores de deuda, este resulta al revés; mientras la volatilidad sea menor, evidentemente se esperaría recibir el valor de la deuda nominal a la fecha de expiración.

7. Bibliografía

1. Chatterjee, S., 2020. A Structural Approach to Measuring Default Risk. 1st ed. England, pp.1-14

2. Clewlow, L. and Carverhill, A., 1994. ON THE SIMULATION CONTINGENT CLAIMS. 2nd ed. [ebook] New York City: The Journal of Derivatives, pp.66-74. Available at: ¡http://www.iijournals.com¿[Accessed 7 May 2021]

3. Alexander Ramstr¨om, R., 2017. Pricing of European and Asian options with Monte Carlo simulations: Variance reduction and low-discrepancy techniques. 1st ed. Umeå, Suecia: Department of Economics, pp.1-9, 18-19

8. Anexo: Código en R-Studio

```r

BlackScholes <- function(S, K, r, TT, sig, type){

  if(type=="C"){
    d1 <- (log(S/K) + (r + sig^2/2)*TT) / (sig*sqrt(TT))
    d2 <- d1 - sig*sqrt(TT)

    value <- S*pnorm(d1) - K*exp(-r*TT)*pnorm(d2)
    return(value)}

  if(type=="P"){
    d1 <- (log(S/K) + (r + sig^2/2)*TT) / (sig*sqrt(TT))
    d2 <- d1 - sig*sqrt(TT)

    value <-  (K*exp(-r*TT)*pnorm(-d2) - S*pnorm(-d1))
    return(value)}
}

BlackScholes(100,100,.05,1,.2,"C")

############ WIENER GEO ####################

semilla <- 12

# Evoluci n del valor de los activos (Mov.Browniano Geo.)
#   con deriva mu:= rendimiento promedio y volatilidad sigma := desv.estandar del
    rendimiento


V <- function(h, TT, mu, sigma, V0){

  #Funci n para generar un proceso Browniano Geom trico
  # INPUT :
  #         h     ... fracci n de tiempo
  #         TT    ... Tiempo final (unidad de tiempo 1 a o con 365 d as)
  #         mu    ... drift (rendimiento promedio)
  #         sigma ... volatilidad (riesgo = desv.est ndar del rendimiento)
  #         V0    ... valor inicial de los activos
  # OUTPUT :
  #         Vt    ... valor de los activos al tiempo TT
  Z <- rnorm(h)
  dt <- TT/h #incremento en el tiempo
  Vt <- V0
  for(i in 2:(h+1)){
    Vt <- c(Vt, Vt[i-1]*exp((mu - sigma^2/2)*dt + sigma*sqrt(dt)*Z[i-1]))
  }
  return(Vt)
}

datos <- NULL
plot(V(2000,10,0.1,0.3,100), type = "l", ylim = c(0,1500),
     xlab = "tiempo", ylab = expression(S[t]), main = "100 trayectorias de Movimientos
     Brownianos")
for (i in 1:100) {
  sim <- V(2000,10,0.1,0.3,100)
  lines(sim, col = i)
  datos[i] <- sim[length(sim)]
}


call_eur <- function(S0, fecha, K, mu, sigma, r){

  #Funci n para calcular la trayectoria del precio de una ocpi n "Call" europea
```

```
  # INPUT :
  #         S0      ... Valor inicial del activo subyacente
  #         fecha    ... Fecha de expiraci n del contrato
  #         mu    ... drift (rendimiento promedio)
  #         sigma ... volatilidad (riesgo = desv.est ndar del rendimiento)
  #         V0    ... valor inicial de los activos
  #         r     ... tasa de inter s
  #
  # OUTPUT :
  #         valor de la opci n Call traido a valor presente con tasa r a trav s del tiempo


  Vt <- V(fecha, 250, mu/250, sigma/sqrt(250), S0) ## fecha en d as; 1 a o = 250 d as h biles
  equity <- Vt-K
  call_0 <- NULL
  for (j in 1:length(equity)) {
    call_0[j] <- exp(-r*fecha/250)*max(equity[j],0)
  }
  return(call_0)
}

# ejemplo
V0=100; fecha=250; D=100 ; mu=0.05; sigma=0.2; r=0.05; Num_Simul <- 10000

set.seed(semilla)
C_0 <- call_eur(V0, fecha, D, mu, sigma, r)
plot(1:length(C_0), C_0, type = "o", ylab = expression(C[0]), xlab = "Tiempo", main = "Trayectoria de un Call Europeo")

# Mejoramiento con variada antit tica
V2 <- function(h, TT, mu, sigma, V0){
  Z <- rnorm(h)
  dt <- TT/h #incremento en el tiempo
  Vt <- V0
  for(i in 2:(h+1)){
    Vt <- c(Vt, Vt[i-1]*exp((mu - sigma^2/2)*dt + sigma*sqrt(dt)*(-Z[i-1])))
  }
  return(Vt)
}


call_eur2 <- function(S0, fecha, K, mu, sigma, r){

  Vt <- V2(fecha, 250, mu/250, sigma/sqrt(250), S0) ## fecha en d as; 1 a o = 250 d as h biles
  equity <- Vt-K
  call_0 <- NULL
  for (j in 1:length(equity)) {
    call_0[j] <- exp(-r*fecha/250)*max(equity[j],0)
  }
  return(call_0)
}

#  variadas de control

N <- 10000

Resultados <- function(N,V0,fecha,D,mu,sigma,r,semilla){
  set.seed(semilla)
  x <- replicate(N,call_eur(V0,fecha,D,mu,sigma,r)[fecha+1])
  # variada antit tica
  set.seed(semilla)
```

```
  xa <- replicate(N,(call_eur(V0,fecha,D,mu,sigma,r)[fecha+1] + call_eur2(V0,fecha,D,mu,sigma,r)[fecha+1] )/2)
  # de control : valor de las acciones a la fecha de pago
  set.seed(semilla)
  y <- replicate(N,V(fecha, 250, mu/250, sigma/sqrt(250), V0)[fecha+1])
  cov(x,y)
  var(y)
  a <- cov(x,y)/var(y)
  a
  2*a*cov(x,y) > a^2 * var(y)
  xc <- x - a*(y - mean(y))
  # H brido
  set.seed(semilla)
  ya <- replicate(N,(V(fecha, 250, mu/250, sigma/sqrt(250), V0)[fecha+1] + V2(fecha, 250, mu/250, sigma/sqrt(250), V0)[fecha+1])/2)
  cov(xa,ya)
  var(ya)
  a2 <- cov(xa,ya)/var(ya)
  a2
  2*a2*cov(xa,ya) > a2^2 * var(ya)
  xc2 <- xa - a2*(ya - mean(ya))
  return(data.frame("M todo" = c("MC_B sico","Antit tica","De Control","H brido"),
                    "Estimacion" = c(mean(x),mean(xa), mean(xc), mean(xc2)),
                    "Desv.Est" = c(sd(x),sd(xa),sd(xc),sd(xc2)),
                    "Cota.Inf" = c(mean(x)-sd(x),mean(xa)-sd(xa),mean(xc)-sd(xc),mean(xc2)-sd(xc2)),
                    "Cota.Sup" = c(mean(x)+sd(x),mean(xa)+sd(xa),mean(xc)+sd(xc),mean(xc2)+sd(xc2))))
}



# Ejemplo Base
N <- 10000; V0 <- 100; fecha <- 250; D <- 100; mu <- .05; sigma <- .2; r <- .05; semilla <- 12

BlackScholes(V0,D,r,fecha/250,sigma,"C")
Resultados(N,V0,fecha,D,mu,sigma,r,semilla)


# Variaciones en el N mero de simulaciones

# N = 100
BlackScholes(V0,D,r,fecha/250,sigma,"C")
Resultados(100,V0,fecha,D,mu,sigma,r,semilla)

# N = 100000
BlackScholes(V0,D,r,fecha/250,sigma,"C")
Resultados(100000,V0,fecha,D,mu,sigma,r,semilla)


# Variaciones en la volatilidad

# sigma = .1
BlackScholes(V0,D,r,fecha/250,.1,"C")
Resultados(N,V0,fecha,D,mu,.1,r,semilla)

# sigma = .05
BlackScholes(V0,D,r,fecha/250,.05,"C")
Resultados(N,V0,fecha,D,mu,.05,r,semilla)

# sigma = .01
BlackScholes(V0,D,r,fecha/250,.01,"C")
Resultados(N,V0,fecha,D,mu,.01,r,semilla)

```

```
# sigma = 1.2
BlackScholes(V0,D,r,fecha/250,1.2,"C")
Resultados(N,V0,fecha,D,mu,1.2,r,semilla)


###############################################################################
###############################################################################

put_eur <- function(S0, fecha, K, mu, sigma, r){

  #Funci n para calcular la trayectoria del precio de una opci n "Put" europea
  # INPUT :
  #         S0     ... Valor inicial del activo subyacente
  #         fecha    ... Fecha de expiraci n del contrato
  #         mu    ... drift (rendimiento promedio)
  #         sigma ... volatilidad (riesgo = desv.est ndar del rendimiento)
  #         V0    ... valor inicial de los activos
  #         r     ... tasa de inter s
  #
  # OUTPUT :
  #         valor de la opci n Call traido a valor presente con tasa r a trav s del tiempo

  Vt <- V(fecha, 250, mu/250, sigma/sqrt(250), S0) ## fecha en d as; 1 a o = 250 d as h biles
  payoff <- K-Vt
  put_0 <- NULL
  for (j in 1:length(payoff)) {
    put_0[j] <- exp(-r*fecha/250)*(max(payoff[j],0))
  }
  return(put_0)
}



put_eur2 <- function(S0, fecha, K, mu, sigma, r){

  Vt <- V2(fecha, 250, mu/250, sigma/sqrt(250), S0) ## fecha en d as; 1 a o = 250 d as h biles
  payoff <- K-Vt
  put_0 <- NULL
  for (j in 1:length(payoff)) {
    put_0[j] <- exp(-r*fecha/250)*(max(payoff[j],0))
  }
  return(put_0)
}


###############################################################################
###############################################################################

D - BlackScholes(100,100,.05,1,.2,"P")


ResultadosP <- function(N,V0,fecha,D,mu,sigma,r,semilla){
  set.seed(semilla)
  x <- replicate(N,put_eur(V0,fecha,D,mu,sigma,r)[fecha+1])
  # variada antit tica
  set.seed(semilla)
  xa <- replicate(N,(put_eur(V0,fecha,D,mu,sigma,r)[fecha+1] + put_eur2(V0,fecha,D,mu,sigma,r)[fecha+1] )/2)
  # de control : valor de las acciones a la fecha de pago
  set.seed(semilla)
  y <- replicate(N,V(fecha, 250, mu/250, sigma/sqrt(250), V0)[fecha+1])
  cov(x,y)
```

```r
  var(y)
  a <- cov(x,y)/var(y)
  a
  2*a*cov(x,y) > a^2 * var(y)
  xc <- x - a*(y - mean(y))
  # H brido
  set.seed(semilla)
  ya <- replicate(N,(V(fecha, 250, mu/250, sigma/sqrt(250), V0)[fecha+1] + V2(fecha, 250, mu/250, sigma/sqrt(250), V0)[fecha+1])/2)
  cov(xa,ya)
  var(ya)
  a2 <- cov(xa,ya)/var(ya)
  a2
  2*a2*cov(xa,ya) > a2^2 * var(ya)
  xc2 <- xa - a2*(ya - mean(ya))
  return(data.frame("M todo" = c("MC_B sico","Antit tica","De Control","H brido"),
                    "Estimacion" = c(D - mean(x),D - mean(xa), D - mean(xc), D - mean(xc2)),
                    "Desv.Est" = c(sd(x),sd(xa),sd(xc),sd(xc2)),
                    "Cota.Inf" = c(mean(x)-sd(x),mean(xa)-sd(xa),mean(xc)-sd(xc),mean(xc2)-sd(xc2)),
                    "Cota.Sup" = c(mean(x)+sd(x),mean(xa)+sd(xa),mean(xc)+sd(xc),mean(xc2)+sd(xc2))))
}



# Ejemplo Base
N <- 10000; V0 <- 100; fecha <- 250; D <- 100; mu <- .05; sigma <- .2; r <- .05; semilla <- 12

D - BlackScholes(V0,D,r,fecha/250,sigma,"P")
ResultadosP(N,V0,fecha,D,mu,sigma,r,semilla)


# Variaciones en el N mero de simulaciones

# N = 100
D - BlackScholes(V0,D,r,fecha/250,sigma,"P")
ResultadosP(100,V0,fecha,D,mu,sigma,r,semilla)

# N = 10000
D - BlackScholes(V0,D,r,fecha/250,sigma,"P")
ResultadosP(100000,V0,fecha,D,mu,sigma,r,semilla)


# Variaciones en la volatilidad

# sigma = .1
D - BlackScholes(V0,D,r,fecha/250,.1,"P")
ResultadosP(N,V0,fecha,D,mu,.1,r,semilla)

# sigma = .05
D - BlackScholes(V0,D,r,fecha/250,.05,"P")
ResultadosP(N,V0,fecha,D,mu,.05,r,semilla)

# sigma = .01
D - BlackScholes(V0,D,r,fecha/250,.01,"P")
ResultadosP(N,V0,fecha,D,mu,.01,r,semilla)

# sigma = 1.2
D - BlackScholes(V0,D,r,fecha/250,1.2,"P")
ResultadosP(N,V0,fecha,D,mu,1.2,r,semilla)
```