1-chaos

November 14, 2020

Lectura recomendada: Best Practices for Scientific Computing

1 Caos: Primera parte

1.1 Introducción

- Edward Lorenz la definió como:

  Caos Cuando el presente determina el futuro, pero el presente aproximado no determina aproximadamente el futuro.

- La **teoría del caos** estudia el comportamiento de los sistemas dinámicos que son muy sensibles a las condiciones iniciales (El famoso *efecto mariposa* según Jurassic Park). - Aunque no es lo único, ve más adelante.
- Este hecho hace que la predicción a largo plazo sea imposible.
- Entonces la afirmación **determinismo** → **predictibilidad** es falsa.

Chaos was the law of nature; Order was the dream of man – Henry Adams

- Para saber **muchísimo más** recomiendo: Chaos Book

Durante siglos en física se estuvo trabajando con sistemas como el oscilador armónico y el problema de dos cuerpos con fuerza central (también conocido como *problema de Kepler*) los cuales se consideraban como paradigmáticos para resolver problemas. La explosión del caos en el siglo XX nos señalaba que esos problemas y métodos no eran la norma, si no al contrario: eran casos especiales.

A lo largo del curso (sobre todo en la última parte) podría quedar el sabor de boca de que las herramientas analíticas son un fraude y que hemos sido engañados durante toda nuestra educación y que el único camino son las simulaciones y la estadística.

Pero eso no es cierto: Existen teorías que tienen el mismo poder predictivo, y el estudio del caso general sigue abriendo el camino para la comprehensión científica del mundo.

Lo que si es cierto, es que, partiendo de la definición de que un **sistema determinístico** es aquel que su estado futuro esta *completamente* determinado por sus condiciones actuales (en contraste con un sistema estocástico en el cual el futuro está determinado sólo parcialmente) ya no implica **predictibilidad**.

1.2 Sensitividad a condiciones iniciales

Una de las características que puede indicar **caos** es la sensibiliad a condiciones iniciales, la cual se puede expresar matemáticamente como:

$$|\delta \mathbf{x}(t)| = e^{\lambda t} |\delta \mathbf{x}(0)|$$

a λ se le conoce como *exponente de Lyapunov.* Si este exponente positivo indica que con el paso del tiempo la diferencia δ crece exponencialmente.

NOTA La sensibilidad es una idea muy importante pero no determina completamente si el sistema es caotico o no, para ello se necesita otra característica: *mezcla topológica* (topological mixing), la cual verémos más adelante, pero se puede entender como que las trayectorias del sistema, luego de diverger se vueven a aproximar un número infinito de veces.

1.2.1 Mapeos

A los sistemas dinámicos discretos, en una dimensión se les conoce como **mapas**, ya que son funciones

$$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$$

y los cuales producen la *secuencia* de puntos:

$$\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\}$$

la cual se conoce como *órbita* de x bajo f.

Los sistemas dinámicos discretos, se pueden pensar como ecuaciones de diferencias de primer orden

$$y = x_{n+1} = f(x_n)$$

y regularmente

$$y = f(x) = f(x, a)$$

existe un parámetro a que puede influir muchísimo en el comportamiento del sistema.

1.2.2 Comportamientos

Pueden pasar lo siguiente:

- Si $f(x) = x$ hemos alcanzado un *punto fijo*.
- Si $f^n(x) = x$, pero $f^k(x) \neq x$ para $k \leq n$, se dice que la órbita tiene *periodo* de orden n.

1.2.3 Mapeo logístico

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

Donde, para fines de esta clase, r esta contenido en

$$0 \leq r \leq 4$$

la razón de esto, es que el cuadro unitario mapea al cuadro unitario, i.e.

$$0 \leq x \leq 1 \rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$$

Ejercicio ¿Por qué?

Ejercicio Define la función `logistic_map` que recibe como parámetros x y r regresa $rx(1-x)$.

[1]:
```
def logistic_map(x,r):
    return r*x*(1-x)
```

Los *puntos fijos* del mapeo logístico son:

$$x = f(x)$$

$$x = rx(1-x)$$

$$1 = r(1-x)$$

$$x = 1 - \frac{1}{r}$$

El punto fijo se dice *estable* si $|f(x) - x_0| < |x - x_0|$ e *inestable* si la desigualdad se invierte.

Ejercicio Calcule el punto fijo para $r = 2$ usando SymPy

[2]:
```
from sympy import *
x = Symbol("x")
r = Symbol("r")
fijo = Eq(x, 1-1/r)
fijo.rhs.subs(r,2)
```

[2]: $\frac{1}{2}$

Teorema:

Sea $f(x_0) = x_0.$, entonces,

Si $f'(x)$ es contínua y $|f'(x_0)| < 1$ entonces x_0 es estable.

Si $f'(x)$ es contínua y $|f'(x_0)| > 1$ entonces x_0 es inestable.

Ejercicio ¿Cuáles son las condiciones de estabilidad para el parámetro r? Los valores de r para cuales cambia de estable a inestable y viceversa, se llaman *puntos de bifurcación*.

[3]:
```
Eq(Derivative(r*x*(1-x),x).doit().subs(x,fijo.rhs),1).simplify()
```

[3]: $r = 1$

```
[4]: Eq(Derivative(r*x*(1-x),x).doit().subs(x,fijo.rhs),-1).simplify()
```

[4]: $r = 3$

```
[5]: simplify(Eq(abs(diff(r*x*(1- x), x)).subs(x, 1 - 1/r),1))
```

[5]: $|r - 2| = 1$

Ejercicio Programa un control para cambiar r entre 0 y 4 (con un slider) y otro para definid x_0. Grafica logistic_map respecto al número de iteraciones N. ¿Qué observas? ¿Puedes ver algún *periodo* ?¿Está cerca de los puntos fijos?

```
[12]: from ipywidgets import interact, fixed
import matplotlib.pyplot as plt
def logistic_map_recursivo(x, r, n=20):
    if n == 1:
        calculo = logistic_map(x,r)
    else:
        calculo = logistic_map(logistic_map_recursivo(x, r, n-1), r)
    return calculo
```

```
[13]: logistic_map_recursivo(.5,2,20)
```

[13]: 0.5

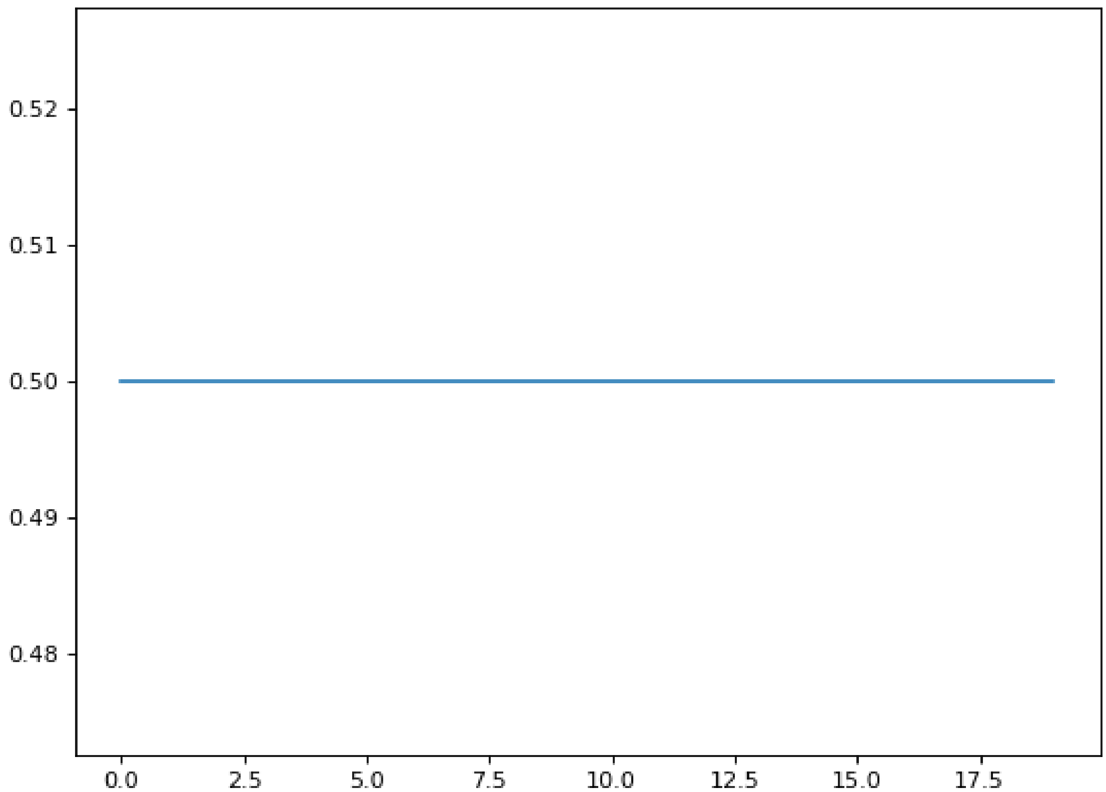
```
[14]: interact(logistic_map_recursivo,r=(0,4, .1), x=(0,1,.1))
```

```
interactive(children=(FloatSlider(value=0.0, description='x', max=1.0), FloatSlider(value=2.0,
```

```
[14]: <function __main__.logistic_map_recursivo(x, r, n=20)>
```

```
[15]: def log_plot(x, r, n = 20):
    y = []
    for i in range(n):
        y.append(logistic_map_recursivo(x, r, i+1))
    plt.figure(figsize = (8,6), dpi = 80)
    plt.plot(range(n),y)


log_plot(.5, 2)
```



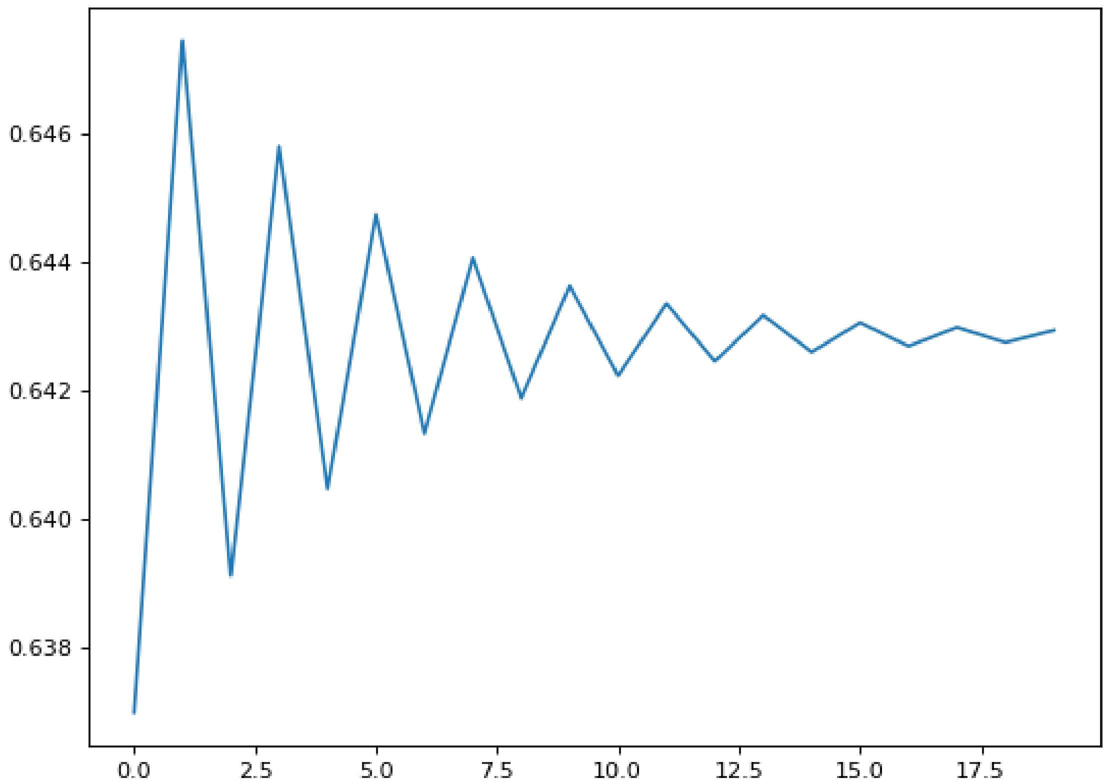
[16]:
```
interact(log_plot,x=(0,1,.1), r=(0,4,.1))
```

```
interactive(children=(FloatSlider(value=0.0, description='x', max=1.0), FloatSlider(value=2.0,
```

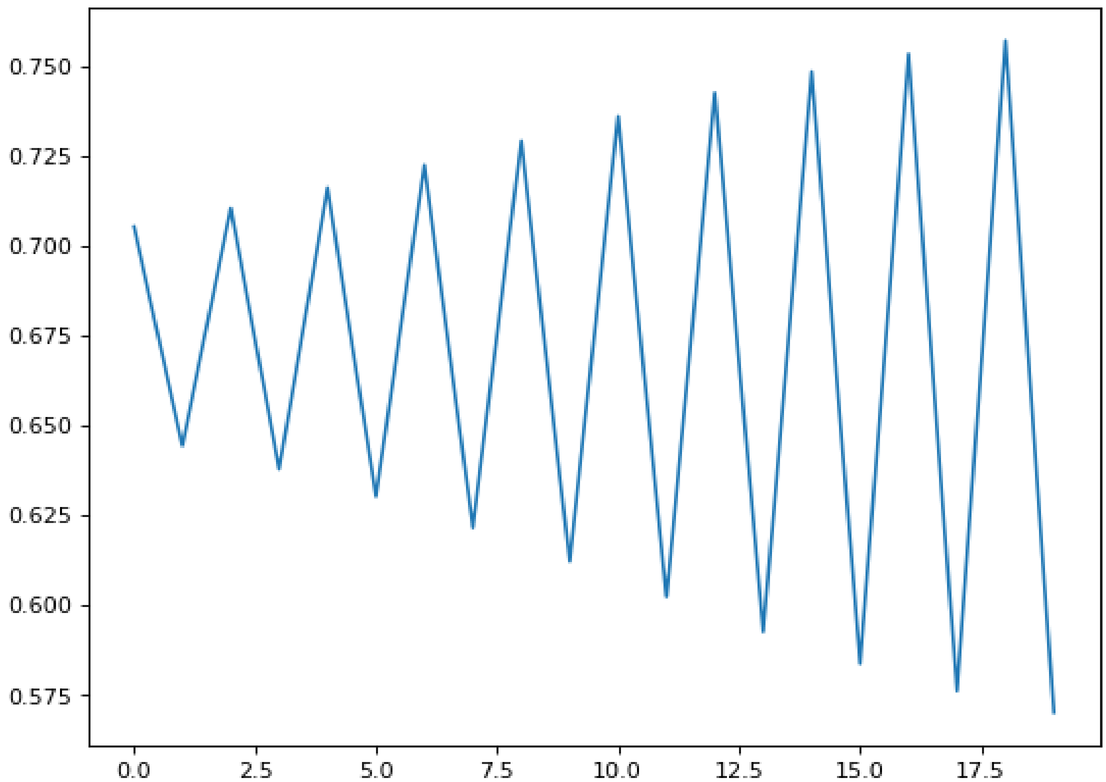
[16]:
```
<function __main__.log_plot(x, r, n=20)>
```

Ejercicio ¿Qué sucede para (a) $x_0 = 0.35$ en $r = 2.8$ y (b) para $x_0 = 0.35$ en $r = 3.1$. ¿Porqué escogí estos valores?

[17]:
```
log_plot(.35,2.8)
```



[18]:
```
log_plot(.35,3.1)
```



Ejercicio Define una función iterar que reciba una función g, un punto inicial x0, un entero N y el parámetro r regrese $g(g(\ldots(g(x_0, r), r)\ldots)$. En otras palabras que itere g, N veces a partir del punto x0.

[19]:
```python
def iterar(g, x, n, r):
    if n == 1:
        calculo = g(x,r)
    else:
        calculo = g(iterar(g, x, n-1, r), r)
    return calculo
```

Ejercicio Define una función iterarLista que reciba una función g, un punto inicial x0, un entero N y el parámetro r regrese la lista $[x_0, g(x), g(g(x)), \ldots g(g(\ldots(g(x))\ldots))]$ En otras palabras que itere g, N-1 veces a partir del punto x0 y devuelva la órbita completa empezando desde x0.

[22]:
```python
def iterarLista(g, x, n, r):
    y = [x]
    for i in range(n):
        y.append(iterar(g,x, i+1, r))
    print(y)
    return y
```

Ejercicio Usa las funciones recién definidas para calcular iteraciones para $r = \{0.8, 1.2, 2.8, 3.2\}$,

[23]:
```
 =[0.8,1.2,2.8,3.2]
for i in r:
    iterarLista(logistic_map, .1, 20, i)
```

```
[0.1, 0.07200000000000002, 0.053452800000000016, 0.04047647853772801,
0.031070506578330284, 0.024084104159436976, 0.018803248069019493,
0.014759748744859528, 0.011633518849478518, 0.009198544070925876,
0.007291144686320888, 0.005790387116387219, 0.004605486826743676,
0.0036674210542658936, 0.002923176861661297, 0.002331705518957396,
0.0018610149346642076, 0.0014860412464617315, 0.0011870663423004368,
0.0009485257726395314, 0.0007581008571985361]
[0.1, 0.108, 0.11560319999999999, 0.12268692017971199, 0.12916180775583477,
0.13497484220769546, 0.14010796101444378, 0.14457326432978265,
0.14840620268497612, 0.15165816202752228, 0.1543895567015473,
0.15666410577965642, 0.15854455648790045, 0.16008981611514647,
0.16135328026963808, 0.16238207905903887, 0.16321696735140348,
0.16389262670401725, 0.16443820033928988, 0.16487793433015852,
0.16523184132141414]
[0.1, 0.252, 0.5277888000000001, 0.697837791264768, 0.5904085833729387,
0.6771136065469955, 0.612166157052565, 0.664772508993766, 0.6239800567837179,
0.656961047455737, 0.631017042828474, 0.651936696567749, 0.6353626726610233,
0.648695451180181, 0.6380910558353027, 0.6466064088352157, 0.6398183704876365,
0.6452623051677097, 0.6409168155526169, 0.6443988630646272, 0.6416171113678004]
[0.1, 0.2880000000000001, 0.6561792000000002, 0.7219457839595519,
0.6423682207442558, 0.7351401271107676, 0.6230691859914625, 0.7515327214700762,
0.5975401280955426, 0.7695549549155365, 0.567488404097546, 0.7854250089995723,
0.5393042055603009, 0.7950565741608756, 0.5214131777422327, 0.7985327226207346,
0.514810283278849, 0.7992980976294374, 0.5133460760172793, 0.7994300232158112,
0.513093315830332]
```

1.3 Diagrama de CobWeb

Ejercicio Dibuja en una gráfica logistic_map, como ejes usa N_{n+1} y N_n, además agrega la línea $y = x$ en la misma gráfica. ¿Qué observas para los distintos valores de r? Grafícala junto a la gráfica anterior.

[56]:
```
def logistic_map(x,r):
    return r*x*(1-x)
```

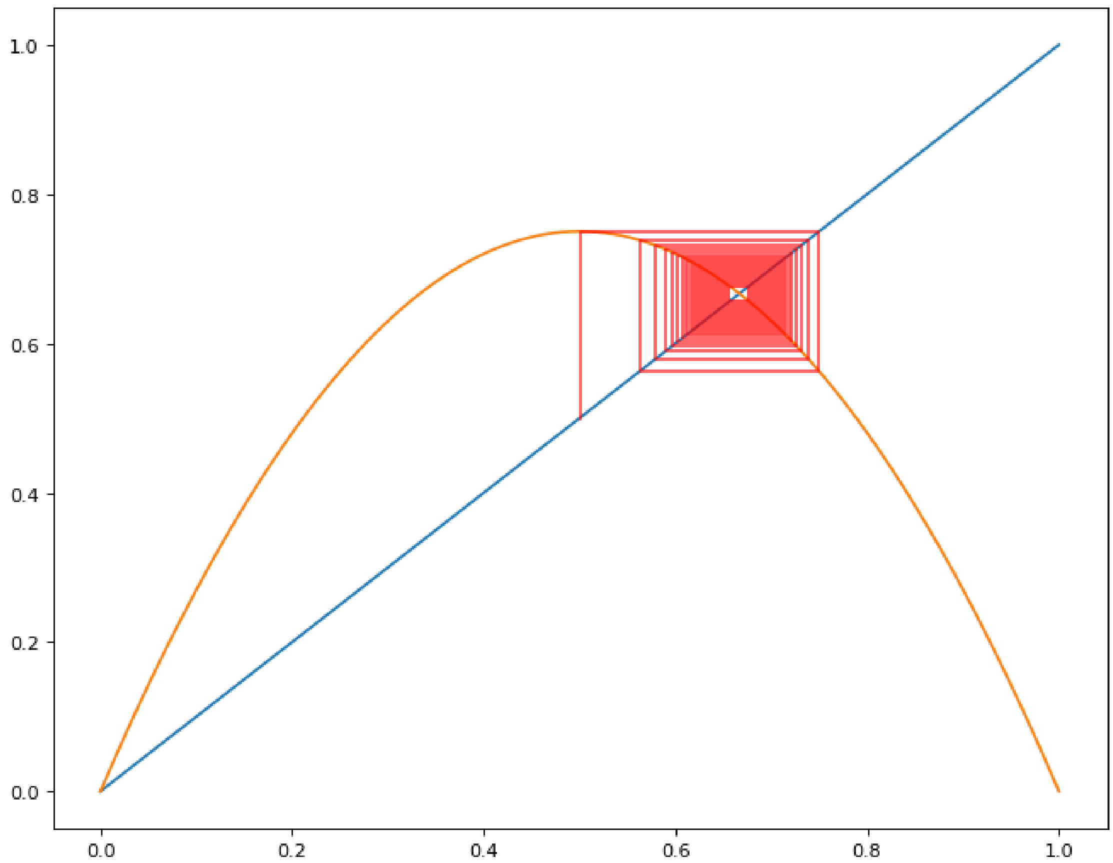
[57]:
```
from ipywidgets import interact, fixed
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

[119]:
```
def CobWeb (g,x, r, n=20):
    X = [x, x]
```

```
    Y = [x]
    for i in range(1,n,2):
        aux = g(X[i], r)
        Y.append(aux)
        X.append(aux)
        Y.append(aux)
        X.append(aux)
    X.pop()
    #Graficamos la funcion inicial y la identidad
    plt.figure(figsize=(10, 8), dpi=80)
    ejeX = np.linspace(0, 1, 1000)
    funcion = []
    for i in ejeX:
        funcion.append(g(i,r))
    plt.plot(ejeX, ejeX)
    plt.plot(ejeX, funcion)
    #Graficamos los puntos
    plt.plot(X, Y, c='r', alpha=0.7)
```

Ejercicio Agrega los segmentos de línea $(x_0, x_0), (x_0.f(x_0)), (f(x_0), f(x_0)), (f(x_0), f(f(x_0))), \ldots$

[120]:
```
CobWeb(logistic_map, x=.5, r=3, n=1000)
```



[123]:
```
interact(CobWeb ,g=fixed(logistic_map),  x=(.0001,1,.1), r=(0,4,.1),␣
↪n=fixed(500))
```

```
interactive(children=(FloatSlider(value=0.4001, description='x', max=1.0, min=0.0001), FloatSl
```

[123]:
```
<function __main__.CobWeb(g, x, r, n=20)>
```

[66]:
```
A
```

[66]:
```
[0.5,
 0.5,
 0.025,
 0.025,
 0.0024375000000000004,
 0.0024375000000000004,
 0.00024315585937500003,
 0.00024315585937500003,
 2.4309673460305166e-05,
 2.4309673460305166e-05,
```

```
 2.430908250008142e-06,
 2.430908250008142e-06,
 2.430902340693222e-07,
 2.430902340693222e-07,
 2.4309017497646033e-08,
 2.4309017497646033e-08,
 2.4309016906717706e-09,
 2.4309016906717706e-09,
 2.4309016847624875e-10,
 2.4309016847624875e-10,
 2.4309016841715593e-11]
```

[67]:
```
B
```

[67]:
```
[0.5,
 0.025,
 0.025,
 0.0024375000000000004,
 0.0024375000000000004,
 0.00024315585937500003,
 0.00024315585937500003,
 2.4309673460305166e-05,
 2.4309673460305166e-05,
 2.430908250008142e-06,
 2.430908250008142e-06,
 2.430902340693222e-07,
 2.430902340693222e-07,
 2.4309017497646033e-08,
 2.4309017497646033e-08,
 2.4309016906717706e-09,
 2.4309016906717706e-09,
 2.4309016847624875e-10,
 2.4309016847624875e-10,
 2.4309016841715593e-11,
 2.4309016841715593e-11]
```

1.4 Diagrama de Bifurcación

Ejercicio ¿Qué hace el siguiente código? Modificalo para que use nuestras funciones.

[ ]:
```
import math
from PIL import Image
imgx = 1000
imgy = 500
image = Image.new("RGB", (imgx, imgy))
```

```
xa = 1
xb = 4
maxit = 5000

for i in range(imgx):
    r = xa + (xb - xa) * float(i) / (imgx - 1)
    x = 0.5
    for j in range(maxit):
        x = r * x * (1 - x)
        if j > maxit / 2:
            image.putpixel((i, int(x * imgy)), (255, 255, 255))

image.save("bifurcacion.png", "PNG")
```

1.4.1 Pasos para producir el diagrama de bifurcación

1. Escoje un valor inicial para r
2. Escoje un valor al azar para x en [0,1]
3. Calcula la órbita de x bajo el g (en el caso anterior el mapeo logístico)
4. Ignora las primeras n iteraciones y dibuja el valor de x para la iteración n+1
5. Incrementa r y repite hasta r final.

Ejercicio Repite todo lo anterior para el mapeo

$$f(x, \mu) = 1 - \mu x^2$$

¿Qué diferencia observas? ¿Cuáles son sus puntos fijos? ¿Cuáles son los valores interesantes?