**Notação**

Denota-se por $\delta(A, B)$ a distância entre dois objetos geométricos quaisquer.

1. A distância entre dois conjuntos de pontos A e B é definida como a menor distância entre um par de pontos (a, b) tal que a $\in$ A e b $\in$ B.

   (a) Demonstre que a distância entre uma reta $r$ e uma reta $s$ tal que $r \cap s = A$ é sempre 0.
   *Dica: distâncias são sempre números pertencentes aos reais positivos incluindo o zero ou ainda* $\delta(A, B) \geq 0, \forall A\ \forall B$

   Por hipótese, isto é, pelo caso que a questão apresenta:

$$
\begin{array}{ll}
\exists A \mid A \in r, A \in s & \wedge \\
\delta(A, A) = 0 & \wedge \\
\delta(A, B) \geq 0 & \wedge \\
\delta(r, s) = \text{mín}\{\delta(A, B), \forall A \in r, \forall B \in s\} & \Rightarrow \\
\delta(r, s) = 0 & \square
\end{array}
$$

   Lendo as sentenças acima, teríamos algo como:

   > Se existe um ponto $A$ tal que $A$ pertence às duas retas, se a distância entre um ponto e ele mesmo é 0, se qualquer distância entre dois pontos é maior ou igual a 0 e se a distância entre duas retas é a menor distância possível entre dois de seus pontos, então a distância entre $r$ e $s$ é 0. $\square$

   (b) Demonstre que a distância entre duas retas paralelas $r//s$ é igual a medida de um segmento de reta $\overline{AB}$, A $\in$ r e B $\in$ s tal que $\overline{AB} \perp r \wedge \overline{AB} \perp s$

      i. Mostre que a distância entre um ponto $A$ e uma reta $r$ tal que $A \notin r$ é determinada pela medida de um segmento de reta $\overline{AB}$, B $\in$ r tal que $\overline{AB} \perp r$.
      *Dica: Utilize o Teorema de Pitágoras*
      A demonstração pode ser feita por contradição. Primeiro assumimos que o que queremos provar é falso e, por termos assumido falsidade, chegamos numa contradição. Portanto, a afirmação só pode ser verdadeira (caso contrário, nossa matemática seria inconsistente).

Demonstração formal:

$$\begin{aligned}
&\text{Seja } P \in r \mid P \neq B \land \delta(A,P) < \delta(A,B) \\
&\Rightarrow \delta^2(A,P) < \delta^2(A,B) \\
&\Rightarrow \delta^2(A,P) - \delta^2(A,B) < 0 && \text{(I)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overline{AB} \perp r \land B, P \in r \\
&\xRightarrow{\text{Pitágoras}} \delta^2(A,P) = \delta^2(A,B) + \delta^2(B,P) \\
&\Rightarrow \delta^2(B,P) = \delta^2(A,P) - \delta^2(A,B) && \text{(II)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} \land \text{(II)} \\
&\Rightarrow \delta^2(B,P) < 0 && \lightning
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \nexists P \in r \mid P \neq B \land \delta(A,P) < \delta(A,B) \\
&\Rightarrow \text{mín}\{\delta(A,P), \forall P \in r\} = \delta(A,B) \\
&\xRightarrow{\text{Definição}} \delta(A,r) = \delta(A,B), \overline{AB} \perp r && \square
\end{aligned}$$

Lê-se como:

Tomando um ponto $P$ em $r$ tal que $P$ não seja $B$ e assumindo que sua distância até $A$ é menor do que a distância de $A$ até $B$, podemos dizer que o quadrado da distância de $A$ até $P$ é menor que o quadrado da distância de $A$ até $B$. Isto implica que a diferença entre o quadrado da distância de $A$ até $P$ e o quadrado da distância de $A$ até $B$ é negativa. Esta é a conclusão (I).

Se o segmento de $A$ a $B$ é perpendicular à reta $r$ e $B$ e $P$ pertencem a $r$, então, por Pitágoras, o quadrado da distância de $A$ até $P$ é igual a soma do quadrado da distância de $A$ até $B$ com o quadrado da distância de $B$ até $P$. Isto implica que o quadrado da distância de $B$ até $P$ é igual a diferença entre o quadrado da distância de $A$ até $P$ e o quadrado da distância de $A$ até $B$. Esta é a conclusão (II).

Se concluímos (II), que o quadrado da distância de $B$ até $P$ é igual a diferença entre o quadrado da distância de $A$ até $P$ e o quadrado da distância de $A$ até $B$, e concluímos (I), que diz que essa diferença é negativa, então o quadrado da distância de $B$ até $P$ é negativo. Porém o quadrado de um número real nunca pode ser negativo: chegamos a uma contradição.

Portanto, não existe um $P$ em $r$ tal que $P$ seja diferente de $B$ e que a distância de $A$ até $P$ seja menor que a distância de $A$ até $B$. Isto implica que a mínima distância entre um ponto em $P$ qualquer em $r$ e o ponto $A$ é a distância entre $A$ e $B$. Isto implica, pela definição dada da distância entre dois conjuntos de pontos, que a distância entre a reta $r$ e o ponto $A$ é a distância entre $A$ e $B$ onde o segmento de $A$ até $B$ é perpendicular à reta $r$. $\square$

ii. Mostre que, por simetria, todos os pontos de uma reta s tal que $s//r$ tem a mesma distância em relação a r. Determine, portanto, $\delta(r, s)$.

Como as retas paralelas $r$ e $s$ são infinitas, existe uma simetria de translação entre elas. Isto significa que eu posso deslizar uma delas em relação a outra por qualquer número de unidades e teremos o mesmo arranjo de antes da translação. Portanto, uma propriedade do ponto $A \in r$ em relação à reta $s$ valerá igualmente para todos os outros pontos em $r$. Como demonstrado no item anterior, a distância entre um ponto e uma reta é a medida de um segmento de reta que passa pelo ponto e é perpendicular à reta. Desta forma, a distância entre as retas $r$ e $s$ pode ser definida como a distância de *qualquer ponto* em r até s.

(c) Como você calcularia $\delta(r, s)$ se r e s são retas reversas? Questão Aberta.