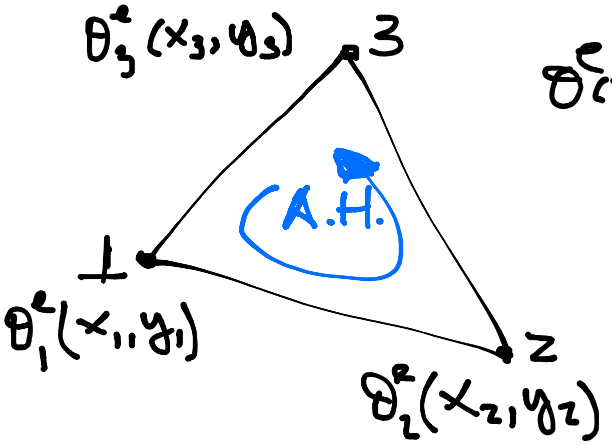
Elementos em 2D



$$\theta^e(x,y) = [1\ \ x\ \ y]\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$$

$$\theta^e(x,y) = P(x,y)\ \alpha^e$$

indica elemento "e"

$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$$

Valores dados pelas funções de restrições ou pela cond. de continuid.

Valores dados pela geometria do elemento

$$d^e = M^e \cdot \alpha^e$$

coeficientes a determ.

$$\alpha^e = M^{e^{-1}} \cdot d^e$$

vetor posições x,y

Valores da função θ nos vértices

$$\theta^e(x,y) = \underbrace{P(x,y) \cdot (M^e)^{-1}}_{\text{Shape functions}} \cdot d^e$$

Valor da função elemento interpolado em x,y

1x3 3x3

$$\left[N_1^e(x,y)\quad N_2^e(x,y)\quad N_3^e(x,y)\right]$$

$$(M^e)^{-1} = \frac{1}{2A^e}\begin{bmatrix} y_2^e - y_3^e & y_3^e - y_1^e & y_1^e - y_2^e \\ x_3^e - x_2^e & x_1^e - x_3^e & x_2^e - x_1^e \\ x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e & x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e & x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e \end{bmatrix}$$

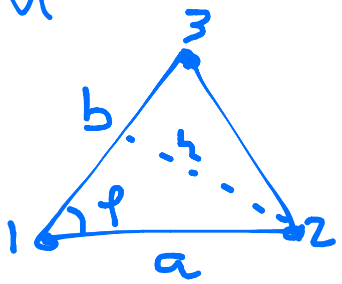
Área do elemento

$$2A^e = \det(M^e) = (x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e) - (x_1^e y_3^e - x_3^e y_1^e) + (x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e)$$

determinante

Relação entre a área do elemento e o determinante de M^e

$$A^e = \frac{bh}{2} = \frac{1}{2} ab \sin\varphi$$



Lembrando que $\vec{k}$ é uma das bases do $\mathbb{R}^3$, temos que

$$\vec{k}\cdot(a \times b) = ab \sin\theta$$

Juntando

$$A^e = \frac{\vec{k}\cdot(a\times b)}{2} = \frac{1}{2}\vec{k} \det\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A^e = \frac{1}{2}\vec{k}\left[\vec{k}(x_2-x_1)(y_3-y_1) - \vec{k}(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right]$$

Lembrando que $\vec{k}\cdot\vec{k} = 1$

$$A^e = \left[x_2y_3 - x_3y_2 + x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_1y_1 + x_1y_2 + x_3y_1\right]/2$$

$$A^e = \left[x_2y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_1y_3\right]/2$$

Resumindo

$\theta_1 \quad x_1 \quad y_1$

$\theta_2 \quad x_2 \quad y_2$

$\theta_3 \quad x_3 \quad y_3$

$$\theta(x,y) = [1 \;\; x \;\; y]\cdot\alpha$$

$$\theta_{(x,y)} = \underbrace{P_{(x,y)} \cdot M^{-1}}_{\text{Shape function}} d$$

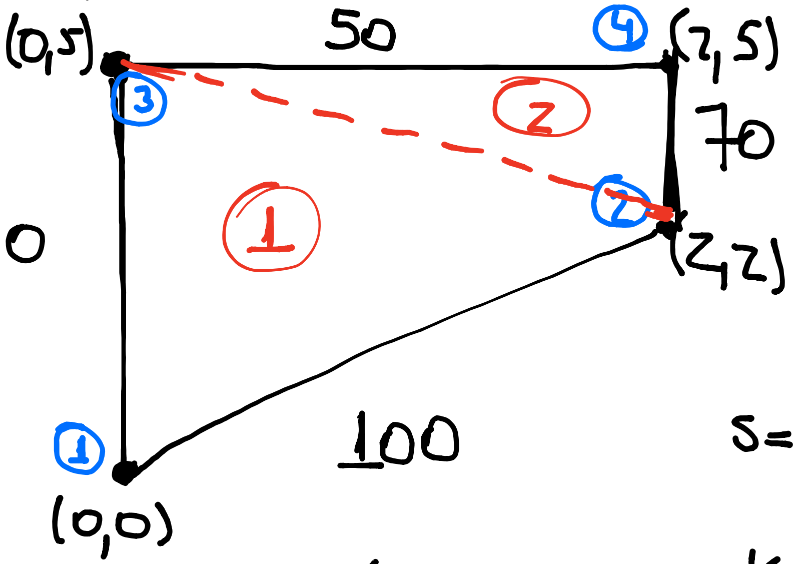
Valores de contorno da solução

$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}$$

$$d = M\alpha$$

$$\alpha = M^{-1}d$$

Solução do problema da distribuição estática de Temperatura:



$$\nabla^t . q = s$$

$$\nabla^t . q - s = 0$$

$$q = -K \nabla T$$

$$\nabla^t . (-K \nabla T) - s = 0$$

$S=0$ na placa do exemplo

$$K \nabla^2 T = 0$$

$$\int_\Omega w K \nabla^2 T = 0$$

$$-K \int_\Omega \nabla w \nabla T d\Omega + K \int_\Gamma w \nabla T d\Gamma = 0$$

$$\int_\Omega \nabla w \nabla T d\Omega = \int_\Gamma w \nabla T d\Gamma$$

Lembrar que em Galerkin $w_i(x,y) = N_i(x,y)$

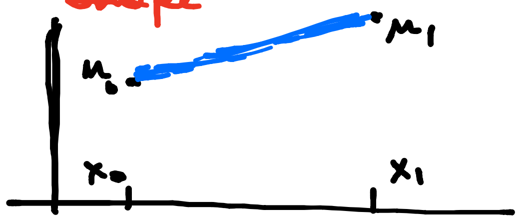
Qual a sequência de passos em 1D?

$$u(x) = N_0(x) u_0 + N_1(x) u_1$$

Valores de contorno da função

Função cujo valor desejamos calcular (função solução)

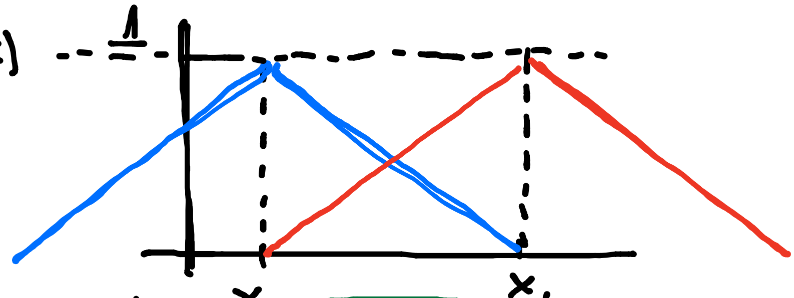
Funções Shape



Lembrar como foram desenv. N_0 e N_1

$-\dfrac{x-x_1}{x_1-x_0} = N_0(x)$

$\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = N_1(x)$



Combinando os dois: $\boxed{\mu_0 N_0(x) + \mu_1 N_1(x) = \mu(x)}$

Façamos uma analogia com um sistema 2D

Neste caso teremos variáveis independentes x e y

Supondo que desejamos calcular a temperatura, teremos $T(x,y)$. Sendo assim:

$$T(x,y) = N_0(x,y)T_0 + N_1(x,y)T_1 + N_2(x,y)T_2$$

Supondo funções de shape que serão 1 em um dos nós e zero nos demais, então assim podemos dizer:

$N_0(x_0;y_0)=1$	$N_1(x_0;y_0)=0$	$N_2(x_0;y_0)=0$
$N_0(x_1;y_1)=0$	$N_1(x_1;y_1)=1$	$N_2(x_1;y_1)=0$
$N_0(x_2;y_2)=0$	$N_1(x_2;y_2)=0$	$N_2(x_2;y_2)=1$

Assim como em 1D poderíamos ter obtido $N_0(x)$ e $N_1(x)$ através de uma operação matricial:

$$\mu(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\mu(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0(x) & N_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{bmatrix}$$

Em 2D:

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

$$T(x,y) = \underset{1\times 3}{P(x,y)} \cdot \underset{3\times 3}{M^{-1}} \cdot \underset{3\times 1}{\overline{T_2}}$$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} N_0(x,y) & N_1(x,y) & N_2(x,y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

Sistema a ser resolvido

$$\int_\Omega (\nabla N_i)^t \cdot \nabla T \, d\Omega = \int_\Gamma N_i^t \nabla T \, d\Gamma$$

Montagem da matriz global:

Nesta primeira etapa vamos simplesmente resolver o sistema.

Temos cada $N_i(x,y) \longrightarrow$ podemos calcular o $\nabla N_i(x,y)$

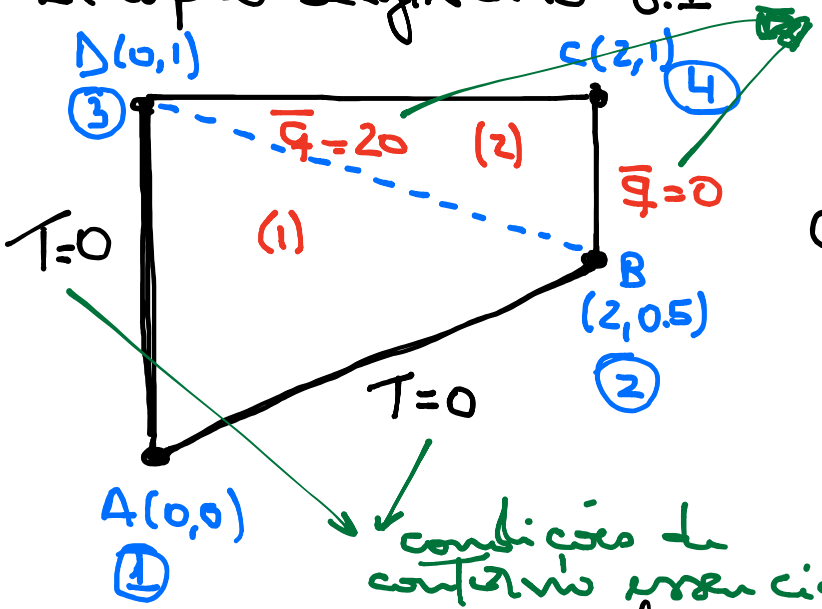
Temos $T(x,y) \longrightarrow$ podemos calcular o $\nabla T(x,y)$

Seguimos agora o processo em 1D calculando cada equação integral, neste caso para $N_0(x,y)$; $N_1(x,y)$; $N_2(x,y)$

A equação integral será:

$$\int_\Omega (\nabla N_i)^t \nabla T \, d\Omega = \int_\Gamma N_i^t \nabla T \, d\Gamma$$

Exemplo Belytschko 8.1



Placa e rede de nós (mesh) mostrados ao lado

condutividade: Isotrópica (isto é não há preferência por uma das direções)

$$\mathbf{D} = k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad k = 5\ W/{}^{o}C$$

(°C) $T=0$ → temperatura prescrita ao longo dos bordos (condição de contorno)

$\bar{q}=0$ e $\bar{q}=20\ W/m$ → fluxo prescrito ao longo dos bordos (condição de contorno)

$s = 6\ W/m^2$ → fonte de calor constante aplicada ao longo da placa.

Nós relativos às condições de contorno essenciais são numerados primeiro em sentido antihorário

Parei aqui pag. 193 Belytschko
Analisar a montagem da matriz

$$B^e = \frac{1}{2A^e}\begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

(7.20)

o que é a matriz B^e = ?

Pag 163 Belytschko eq. 7-20

B^e é a matriz que representa o gradiente da função θ^e

$$\nabla\theta^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial\theta^e}{\partial x} \\ \frac{\partial\theta^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x}\theta_1^e + \frac{\partial N_2}{\partial x}\theta_2^e + \frac{\partial N_3}{\partial x}\theta_3^e \\ \frac{\partial N_1}{\partial y}\theta_1^e + \frac{\partial N_2}{\partial y}\theta_2^e + \frac{\partial N_3}{\partial y}\theta_3^e \end{bmatrix}$$

$$\nabla\theta^e = \begin{bmatrix} N_{1x} & N_{2x} & N_{3x} \\ N_{1y} & N_{2y} & N_{3y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^e \\ \theta_2^e \\ \theta_3^e \end{bmatrix}$$

Valores da função solução

$$\nabla \theta^e = B^e \cdot d^e \longrightarrow \text{Valores de contorno}$$

$$B^e = \frac{1}{2A^e}\begin{bmatrix} y_2-y_3 & y_3-y_1 & y_1-y_2 \\ x_3-x_2 & x_1-x_3 & x_2-x_1 \end{bmatrix}$$

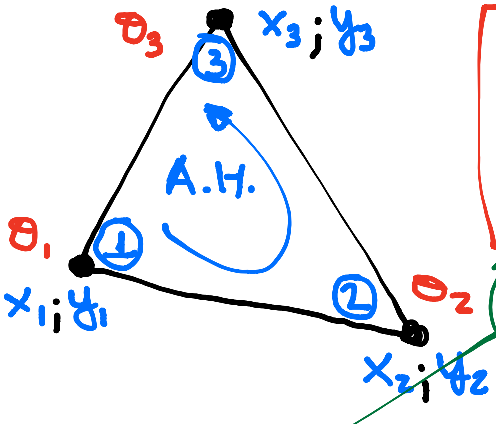
$$\theta^e = \underset{1\times 3}{p(x,y)}\,\underset{3\times 3}{(M^e)^{-1}}\,\underset{3\times 1}{d^e} \longrightarrow M^e\alpha = d^e$$

$$\theta^e = p(x,y)\alpha^e$$

$$\theta^e = \underset{1\times 3}{N^e(x,y)}\,\underset{3\times 1}{d^e}$$

$$\theta^e = \begin{bmatrix} N_1^e(x,y) & N_2^e(x,y) & N_3^e(x,y) \end{bmatrix}$$

Resumo da Teoria dos Elementos 2Δ



$$\underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}}_{d} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}}_{\alpha}$$

$$\alpha = M^{-1} d$$

Val. de função no contorno

geometria

$$\theta(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

inv. da geom.

$$\theta(x,y) = p(x,y)\,\alpha$$

Val cont.

Coeficientes a determinar

$$\Theta(x,y) = \underset{1\times3}{P(x,y)}\,\underset{3\times3}{M^{-1}}\,\underset{3\times1}{d}$$

$$\Theta(x,y) = \underbrace{N(x,y)}_{\substack{\text{shape function}\\ 1\times3}}\,d$$

$$[N_1 \quad N_2 \quad N_3]$$

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left[x_2y_3 - x_3y_2 + (y_2-y_3)x + (x_3-x_2)y\right]$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}\left[x_3y_1 - x_1y_3 + (y_3-y_1)x + (x_1-x_3)y\right]$$

$$N_3 = \frac{1}{2A}\left[x_1y_2 - x_2y_1 + (y_1-y_2)x + (x_2-x_1)y\right]$$

$$2A = \det(M)$$

Parei aqui. Demonstrar a fórmula para o cálculo do gradiente de Θ_e

---

Formulação em elementos finitos para problemas de condução de calor bidimensionais

Na forma fraca o problema de condução de calor pode ser escrito como:

Encontrar $T(x,y) \in U$ tal que:

$$\int_{\Omega} (\nabla w)^T \mathbf{D} \, \nabla T \, d\Omega = \int_{\Gamma_q} w^T \bar{q} \, d\Gamma + \int_{\Omega} w^T s \, d\Omega$$

$$\nabla T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{xy} & k_{yy} \end{bmatrix}$$

nel: nº de elementos que compõe o domínio

Realizando a soma das integrais ao longo dos nel elementos:

$$\sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} (\nabla w^e)^T \mathbf{D}^e (\nabla T^e) \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} w^{e^T} \bar{q} \, d\Gamma - \int_{\Omega^e} w^{e^T} s \, d\Omega = 0$$

$$T^e(x,y) = \mathbf{N}^e(x,y) \mathbf{d}^e = \sum_{I=1}^{nel} N_I^e(x,y) T_I$$

$$w^e(x,y) = \mathbf{N}^e(x,y) \mathbf{w}^e = \sum_{I=1}^{nel} N_I^e(x,y) w_I^e$$

local matriz de conexão global

$$N^e(x,y) = p(x,y)\,(M^e)^{-1}$$

$$d^e = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_m \end{bmatrix} \qquad w^e = \begin{bmatrix} w_1^e \\ w_2^e \\ \vdots \\ w_m^e \end{bmatrix} \qquad d^e = L^e d$$

$$w^e = L^e w$$

Substituindo:

$$T^e(x,y) = N^e(x,y)\,L^e\,d$$

$$w^{eT}(x,y) = \left(N^e(x,y)\,w^e\right)^T$$

$$\nabla T^e = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial T^e}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial T^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^e}{\partial x} T_1^e + \dfrac{\partial N_2^e}{\partial x} T_2^e + \dots + \dfrac{\partial N_m^e}{\partial x} T_m^e \\[2ex] \dfrac{\partial N_1^e}{\partial y} T_1^e + \dfrac{\partial N_2^e}{\partial y} T_2^e + \dots + \dfrac{\partial N_m^e}{\partial y} T_m^e \end{bmatrix}$$

○

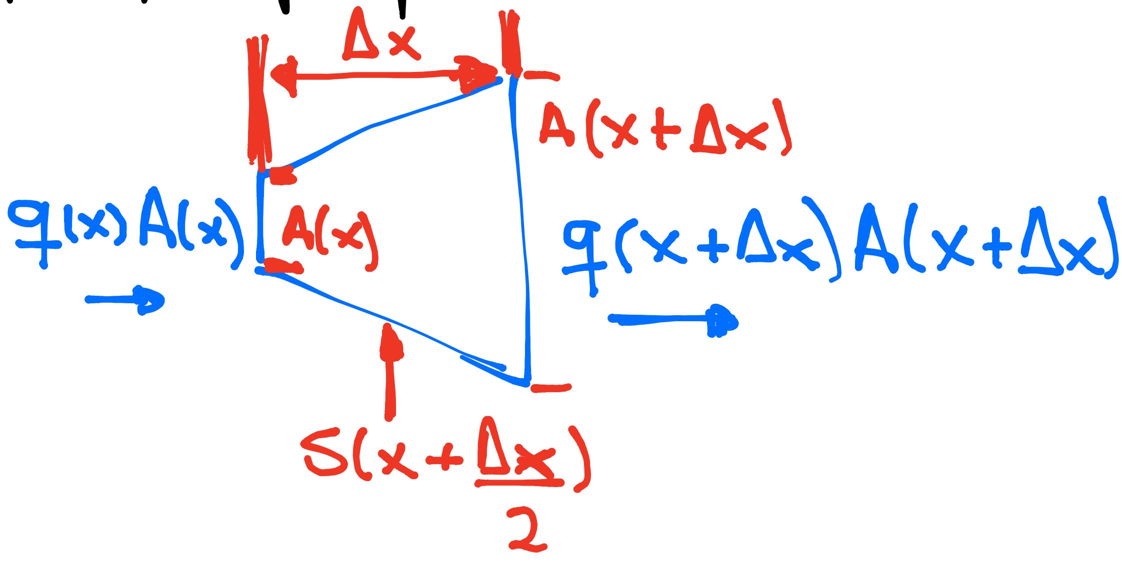
Heat Flow in One Dimension

Objetivo: Determinar a distribuição de temperatura

$A(x) \rightarrow$ área normal à direção do fluxo de calor m^2

$S(x) \rightarrow$ calor gerado por unidade de espessura da parede W/m

$q(x) \rightarrow$ fluxo de calor $\rightarrow$ Energia por tempo por área W/m^2



Observe que os fluxos são multiplicados por uma área (m^2) p/ obter-se uma potência ao passo que a fonte S é multiplicada por um comprimento

$$S\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x = \left[q(x+\Delta x)\,A(x+\Delta x) - q(x)\,A(x)\right]$$

Tomando o limite $\Delta x \to 0$

$$S = \frac{d(qA)}{dx}$$

$$q = -k\frac{dT}{dx} \qquad S = \frac{d}{dx}\left(A \cdot -k\,dT/dx\right)$$

$$S = -Ak\frac{d^2T}{dx^2}$$

Elementos Finitos Forma Forte e Fraca Multidimensional

$$\vec{q} = q_x \vec{i} + q_y \vec{j}$$ ⇒ PADRÃO

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}$$ ⇒ MATRICIAL

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO DE UM VETOR

\+ CONVENIENTE P/ ELEMENTOS FINITOS

Produto Escalar

$$\vec{q} \cdot \vec{r} = q_x r_x + q_y r_y$$

$$\mathbf{q}^t \mathbf{r} = \begin{bmatrix} q_x & q_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}^t \mathbf{r} = \mathbf{r}^t \mathbf{q} = q_x r_x + q_y r_y$$

Gradiente

$$\vec{\nabla} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) = \nabla$$ operador "grad"

$$\vec{\nabla}\theta = \left(\vec{i}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) \Rightarrow$$ direção da máxima variação de um campo

$\Downarrow$

Mera aplicação do operador GRAD a função bivariada $\theta(x,y)$

Divergente

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{q} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\left(\vec{i}\,q_x + \vec{j}\,q_y\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = \mathrm{div}\,\vec{q}$$

$\Downarrow$ operador DIV

Pode ser entendido como o produto escalar do operador GRAD com um campo VETORIAL $\vec{q}$

Em notação matricial

$$\underset{\text{Gradiente}}{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} \longrightarrow \nabla\theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial\theta}{\partial x} \\ \frac{\partial\theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

Equivale ao produto de um escalar por uma matriz

$$\underset{\text{Divergência}}{\nabla^t} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{bmatrix} \longrightarrow \nabla^t \cdot \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}$$

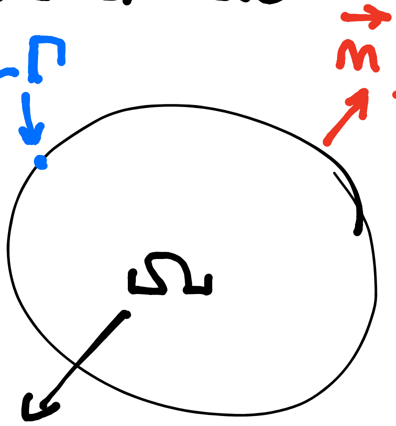
$\Downarrow$

Equivale ao produto de duas matrizes, o operador GRAD transposto e o campo vetorial $\vec{q}$

Teorema da divergência e Fórmula de Green

Fronteira da região $\leftarrow \Gamma$

$\vec{n} \rightarrow$ normal à fronteira da região de integração



Região de Integração

$$\int_{\Omega} \nabla f \, d\Omega = \int_{\Gamma} f n \, d\Gamma$$

$$\Downarrow$$

Teorema Fundamental do Cálculo em 2 dimensões

$\nabla f \longrightarrow$ gradiente da função f

Pode ser entendido como a generalização da derivada para 2 dimensões

Pela lógica, integrando uma derivada teremos a função original f calculada nos extremos do intervalo

Extremos do intervalo em 1D

Em uma dimensão fazemos:

$$\int_x f' dx = f \vec{n} \Big]_{x_0}^{x_1} = f_{x_1}\vec{i} + f_{x_0}(-\vec{i})$$

Fronteira

Normal à Fronteira

$$= f(x_1) - f(x_0)$$

Em duas dimensões fazemos

$$\int_\Omega \nabla f \, d\Omega = \int_\Gamma f \vec{n} \, d\Gamma$$

Ω grad. ou deriv. gener.

normal a front.

Γ fronteira

integração de superfície

integração de linha (ao longo da front.)

Teorema do divergência

$$\int_{\Omega} \nabla^T \cdot \mathbf{f} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

O teorema da divergência é similar ao Teorema fundamental, porém ele relaciona a integral de área da divergência de um campo vetorial f com a integral de linha do produto escalar de f com a normal a curva Γ ao longo de toda a extensão da mesma

Fórmula de Green

1D $\displaystyle\int_{\Omega} u' v \, dx = uv\Big]_{\Gamma} - \int_{\Omega} u v' \, dx$

2D $\displaystyle\int_{\Omega} \vec{q} \cdot \nabla w \, d\Omega = \int_{\Gamma} w \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{q} \, w \, d\Omega$

vetor

escalar

gradiente do campo escalar
w

o conjunto todo é um escalar

⇒ Produto escalar de dois vetores

---

q → fluxo de calor em uma determinada região

S → fonte de calor

É intuitivo que o fluxo que sai da região de controle seja dado pela divergência de q ($\nabla \cdot q$)

É intuitivo também que o fluxo que sai da região seja igual a quantidade de calor gerado nesta região, o que neste caso é igual a S

Sendo assim:

$$\nabla^t \cdot \underset{\sim}{q} - s = 0$$

Vamos agora recordar que o fluxo de calor é proporcional a diferença de temperatura entre dois pontos quaisquer

Sendo assim:

$$\underset{\sim}{q} = -K \frac{dT}{dx} \quad (\text{em } 1D - \text{Lei de Fourier})$$

$$\underset{\sim}{q} = -K \nabla T \quad \left(\text{o } - \text{ é porque o fluxo vai da temperatura alta p/ a baixa} \right)$$

Lembrando que $\nabla^t \cdot \underset{\sim}{q} - s = 0$

Teremos:

$$\nabla^t \cdot (-K \nabla T) - s = 0$$

$$-K \nabla^2 T - s = 0 \quad \text{onde definimos:}$$

$$\nabla^2 = \nabla^t \cdot \nabla$$ também conhecido por operador Laplaciano sendo igual a:

$$\nabla^2 = \nabla^t \cdot \nabla = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix}$$

$$= \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$$

Uma observação importante:

$S \rightarrow$ fonte de calor é dada em unidades de W/m (WATTS/metro)

$q \rightarrow$ fluxo de calor é dado em unidades de W/m^2 (WATTS/metro^2)

A equação ficará então

$$\underbrace{S}_{W/m} = \underbrace{K}_{m} \underbrace{\nabla^2 T}_{\frac{°C}{m^2}}$$

Analisando novamente a lei de fourier:

$$q = -K \nabla T$$

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial T/\partial x \\ \partial T/\partial y \end{bmatrix}$$

Vemos que em um sistema em duas dimensões a constante de proporcionalidade torna-se uma matriz 2x2 chamada matriz de condutividade

Em forma matricial:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D} \nabla T$$

Sempre lembrando que

$$S = \nabla^t \mathbf{q}$$

$$S = \nabla^t \left[-\mathbf{D} \nabla T \right]$$

$$\nabla^t (\mathbf{D} \nabla T) + S = 0$$

$\downarrow$

Deve ser positiva e definida

Condições de contorno

↳ Fronteira Γ da região de integração

$\Gamma_q \rightarrow$ fluxo prescrito $= \vec{q} \cdot \vec{n}$

$\Gamma_T \rightarrow$ Temperatura prescrita $= T$

Resumindo

Balanço de Energia $\Rightarrow \nabla^t \underset{\sim}{q} - s = 0$

Lei de Fourier $\Rightarrow \underset{\sim}{q} = -\mathbf{D}\nabla T$

Cond. Natural $\Rightarrow \Gamma_q = \underset{\sim}{q}^t \cdot m = \bar{q}$

Cond. Essencial $\Rightarrow \Gamma_T = \bar{T}$

Weak Form

Partimos do balanço de energia e da condição natural:

$$\nabla^t \underset{\sim}{q} - s = 0 \qquad \bar{q} - \underset{\sim}{q}^t \cdot m = 0$$

Multiplicamos pelas funções peso:

$$w(\nabla^t \underset{\sim}{q} - s) = 0 \qquad w(\bar{q} - \underset{\sim}{q}^t \cdot m) = 0$$

Integremos ao longo do domínio e da fronteira

$$\int_{\Omega} w\left(\nabla^t \underset{\sim}{q} - s\right) d\Omega = 0$$

$$\int_{\Gamma} w\left(\bar{\underset{\sim}{q}} - \underset{\sim}{q}^t n\right) d\Gamma = 0$$

Aplicando o teorema de Green ao primeiro termo da expressão do balanço de energia:

$$\int_{\Omega} w \nabla^t \underset{\sim}{q}\, d\Omega = \int_{\Gamma} w\, \underset{\sim}{q}\, \vec{n}\, d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla w)^t \cdot \underset{\sim}{q}\, d\Omega$$

Substituindo:

$$\int_{\Omega} (\nabla w)^t \cdot q \, d\Omega = \int_{\Gamma} w \, q_{\vec{n}} \, d\Gamma - \int_{\Omega} w s \, d\Omega$$

Pode ser dividida em Natural (diz respeito ao fluxo) e Essencial (diz respeito a temperatura)

Supondo que iremos escolher funções peso W que irão ser =0 na fronteira da temperatura teremos apenas a condição de contorno natural para atender.

Para sistemas lineares podemos substituir a Lei de Fourier na forma fraca acima:

FORMA FRACA

$$\int_{\Omega} (\nabla w)^t q \, d\Omega = \int_{\Gamma} w q \, d\Gamma - \int w s \, d\Omega$$

LEI DE FOURIER

$$q = -D \nabla T$$

$$\int_{\Omega} (\nabla w)^t D \nabla T \, d\Omega = -\int_{\Gamma} w q \, d\Gamma + \int_{\Omega} w s \, d\Omega$$

Atenção para um detalhe importante

$$\int_S \nabla \overset{\text{escalar}}{\theta}\, ds = \int_\Gamma \theta\, n\, d\Gamma \Rightarrow \text{Relação vetorial}$$

$\Downarrow$ Teor. fund. 2D

$$\int_S \nabla^t \overset{\text{vetor}}{\underset{\sim}{q}}\, ds = \int_\Gamma \underset{\sim}{q}^t n\, d\Gamma \Rightarrow \text{Relação escalar}$$

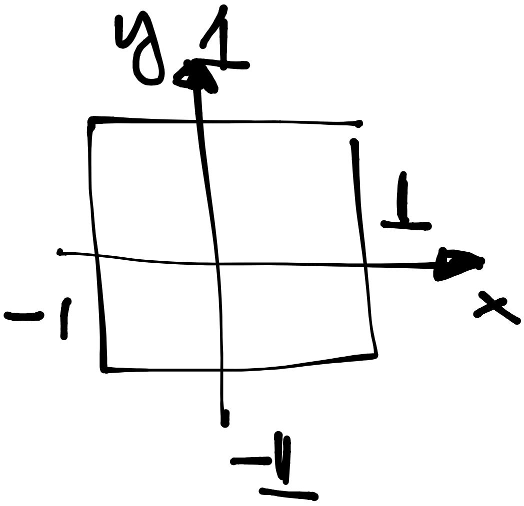
$\Downarrow$ Teor. da diverg.

* O teorema fundamental em 2D relaciona o gradiente de uma função escalar com a integral desta função na fronteira desta região
* O Teorema da divergência relaciona a divergência de um campo vetorial

Exercícios

6.1 $q_x = -y^2$

$q_y = -2xy$



$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}$$

$$\int_\Omega \nabla^t \cdot \mathbf{q}\, d\Omega = \int_\Gamma \mathbf{q}^t \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma$$

$$\nabla^t \mathbf{q} = 0 + (-2x)$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (-2x)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left[-x^2\right]_{-1}^{1} dy = 0$$

$$\int_\Gamma \mathbf{q}^t \mathbf{n}\, d\Gamma$$

$$\boxed{\begin{aligned} q_x &= -y^2 \\ q_y &= -2xy \end{aligned}}$$

$$\int_{-1}^{1} [q_x \; q_y] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dx = -\int_{1}^{-1} q_y \, dx = \int_{1}^{-1} 2x \, dx = 0$$

$y = -1$

$$\int_{-1}^{1} [q_x \; q_y] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dy = \int_{-1}^{1} q_x \, dy = \int_{1}^{-1} y^2 dy = \left. \frac{y^3}{3} \right]_{+1}^{-1} = -\frac{2}{3}$$

$x = 1$

$$\int_{1}^{-1} [q_x \; q_y] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-1) dx = \int_{1}^{-1} q_y \, dx = \int_{-1}^{1} 2x \, dx = 0$$

$y = 1$

$$\int_{+1}^{-1} [q_x \; q_y] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} (-1) dy = \int_{-1}^{+1} q_x \, dy = \int_{1}^{-1} y^2 dy = \left. \frac{y^3}{3} \right]_{1}^{-1} = \frac{2}{3}$$

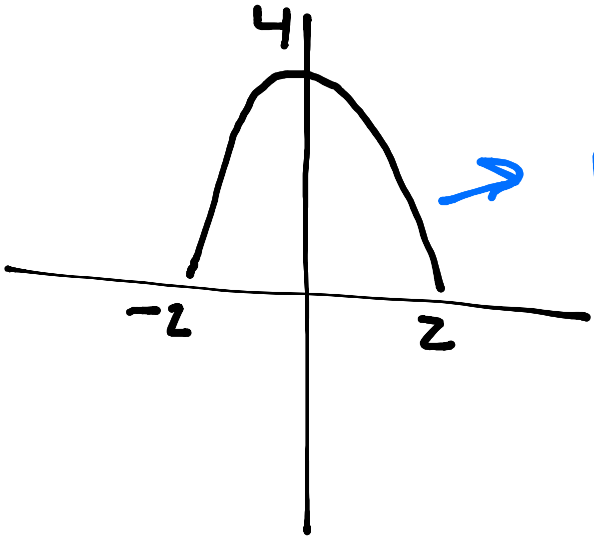
$x = -1$

atenção integramos aqui no sentido contrário a diferencial

= A soma fica = 0 como queríamos demonstrar

6.2

$$q_x = 3x^2y + y^3$$
$$q_y = 3x + y^3$$
$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}$$



$$y = (x+2)(x-2)$$
$$y = x^2 - 4$$
$$y = -x^2 + 4$$
$$x = 0 \quad y = 4$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{-x^2+4} \nabla^t \cdot \mathbf{q}\, dy\, dx = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{-x^2+4} (6xy + 3y^2)\, dy\, dx$$

$$= 4096/35$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{q}^t \mathbf{m}\, d\Gamma = \int_{-2}^{2} \mathbf{q}^t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dx + \int_{2}^{-2} \mathbf{q}^t \mathbf{m}\, ds$$

Curve:

$y = -x^2 + 4$

$\frac{dy}{dx} = -2x \quad \frac{dx}{dx} = 1$

$g_x = 3x^2y + y^3$

$g_y = 3x + y^3$

tg $\begin{bmatrix} 1 \\ -2x \end{bmatrix}$ normal $\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2x \end{bmatrix}$ $\|normal\|$ $\sqrt{1 + 1/4x^2}$ $\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x}$

normal unitário

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2x \end{bmatrix} \cdot \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}} = \begin{bmatrix} 2x \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + (-2x)^2} = \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$m = \begin{bmatrix} 2x \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} \qquad ds = \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

Fazendo as integrações ao longo do contorno

$$\underbrace{\int_{-2}^{2} (3x + 0^3)\,dx}_{\substack{1^{\circ} \text{ segmento} \\ \| \\ 0}} + \int_{2}^{-2} q^{t} \cdot m \cdot ds$$

$$q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}$$

$$m = \begin{bmatrix} 2x \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$ds = \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

(-1) pois iremos integrar no sentido contrário à dx

$\|$

$$\int_{-2}^{2} [q_x \; q_y] \cdot \begin{bmatrix} 2x \\ 1 \end{bmatrix} \sqrt{1+4x^2}\,(-1)\,dx = \frac{4096}{35}$$

$$q_x = 3x^2y + y^3$$

$$q_y = 3x + y^3$$

6.3 Prove que:

$$\oint_\Gamma m \, d\Gamma = 0$$

$$\iint_\Omega \nabla^t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\Omega = \int_\Gamma \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot m \, d\Gamma$$

$$\frac{\partial 1}{\partial x} + \frac{\partial 1}{\partial y} = 0 \Rightarrow \int_\Gamma m \, d\Gamma = 0$$

6.4 Comparando com a forma forte

$$\frac{dq}{dx} - s = 0 \qquad q(0) = \bar{q}$$
$$T(l) = \bar{T}$$

Desenvolva a forma fraca:

$$\int_0^l w(q'_x - s) = 0 \qquad \int_0^l w q'_x = \int_0^l ws$$

$$-\int_0^l w'q + \left[wq\right]_0^l = \int_0^l ws$$

$$-\int_0^l w'q + \underbrace{w(l)}_{0}q(l) - \underbrace{w(0)}_{1}q(0) = \int_0^l ws$$

$$+\int_0^l w'q + q(0) = -\int_0^l ws$$

$$q = -k\frac{dT}{dx}$$

$$-k\int_0^l w' T'_x + \bar{q} = -\int_0^l ws$$

fazendo $W' = cte$

$$-kw'\int_0^l T'_x + \bar{q} = -\int_0^l ws$$

$$-kw'\left[T(l) - T(0)\right] + \bar{q} = -\int_0^l ws$$

$$-kw'\bar{T} + kw'T(0) + \bar{q} = -\int_0^l ws$$

$$kw'T(0) = kw'\bar{T} - \bar{q} - \int_0^l ws$$

$$T(0) = \bar{T} - \frac{\bar{q}}{kw'} - \frac{\int_0^l ws}{kw'}$$

Forma Fraca e Forma Forte

Forma Fraca

Incógnita: T

$$\int_\Omega (\nabla w)^t \, \mathbf{D} \nabla T \, d\Omega = -\int_{\Gamma_q} w \bar{q} \, d\Gamma + \int w s \, d\Omega$$

q

Substituição de q válida para sistemas (materiais) lineares

Notas aula prof. Strang

Problema básico

$$-[c\,u_x]_x = f$$

$$-[c\,u_x]_x\, v = f\, v$$

Test Function

$$-\int_0^1 [c\,u_x]_x v = \int_0^1 f v$$

$$\underbrace{-\,c\,u_x v\Big|_0^1}_{\text{Ajustar } u \text{ e } v \text{ para que este termo dê } \phi} + \underbrace{\int_0^1 c\,u_x v_x = \int_0^1 f v}_{\text{Forma fraca}}$$

Em duas dimensões:

$$\operatorname{div}(uv) = (\operatorname{div} u).v + u.(\operatorname{div} v)$$

$$\nabla^T.(uv) = \nabla^T u.v + u.\nabla^T v$$

$$\boxed{\iint_S \nabla u \cdot v = \oint_C u v \vec{n} - \iint_S u \cdot \nabla v}$$

integração por partes em 2 dimensões

$S \rightarrow$ região do plano

$C \rightarrow$ curva que delimita a região S

Teorema da Divergência

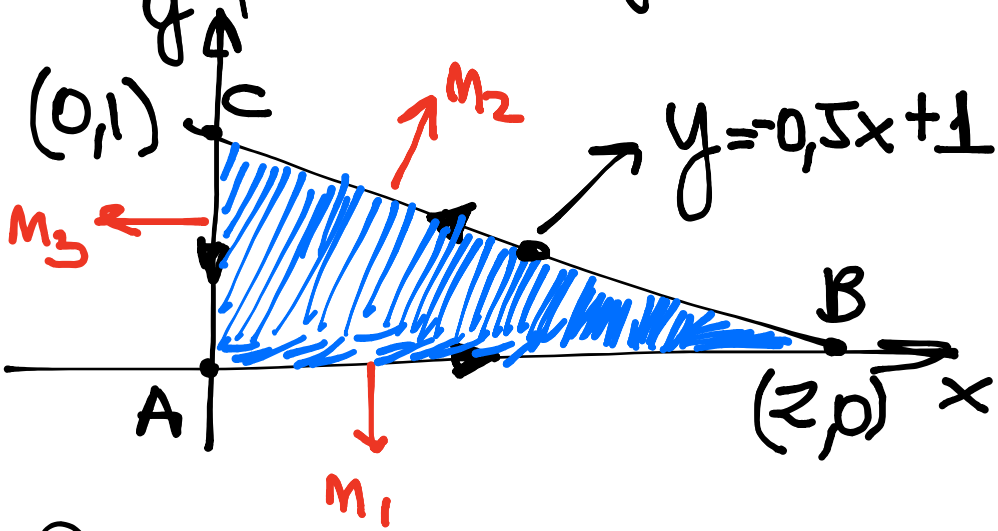
$$\iint_S \nabla \cdot \theta \, ds = \oint_C \theta \, n \, dc$$

A integral de superfície na região S do divergente da função θ é igual a integral de linha do produto escalar de θ e o vetor $\vec{n}$, normal a curva C que delimita S

Colocando na forma retangular:

$$\iint_S \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) dS = \oint_C \left(\theta_x n_x + \theta_y n_y\right) dC$$

Exemplo 2 Belytschko



Prove o teorema da divergência para o campo vetorial

$q_x = 3x^2y + y^3$

$q_y = 3x + y^3$

aplicado à região azul acima

$$\iint_S \nabla \underset{\sim}{q}\, ds = \oint_C \underset{\sim}{q} n\, dc$$

$$\nabla^T \underset{\sim}{q} = (6xy + 3y^2)$$

$$\nabla \underset{\sim}{q} \cdot ds = (6xy \;\; + 3y^2)\, dx\, dy$$

$$\int_0^2 \int_0^{-0,5x+1} (6xy + 3y^2)\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^2 \left. \frac{6xy^2}{2} + y^3 \right]_0^{1-0,5x} =$$

$$= \int_0^2 [3x(1-0,5x)^2 + (1-0,5x)^3]\, dx = 1,5$$

Realizando a integral de linha de $\theta . \vec{n}$

$$\int_{AB} q\, m_1\, dAB + \int_{BC} q\, m_2\, dBC + \int_{CA} q\, m_3\, dCA$$

$$m_1 = -j$$

$$dAB = dx$$

$$m_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 4/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$dBC \Rightarrow \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

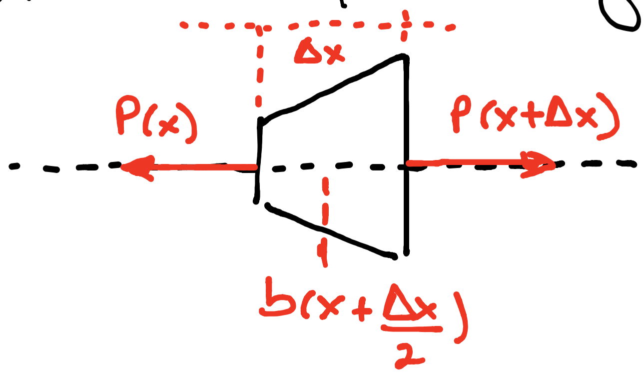
$$dBC \Rightarrow \sqrt{1 + 1/4}\, dx = \frac{\sqrt{5}}{2} dx$$

$$m_3 = -i$$

$$dCA = -dy$$

Formulação Forte em problemas unidimensionais

① Barra Elástica Carregada Axialmente



P → Força em N

Δx → deslocamento em m

$b(x+\frac{\Delta x}{2})$ → carga em N/m

No equilíbrio teremos:

$$-p(x) + p(x+\Delta x) + b\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x = 0$$

$$\frac{p(x+\Delta x) - p(x)}{\Delta x} + b\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = 0$$

Fazendo $\Delta x \to 0$ teremos:

$$\frac{d\,P(x)}{dx} + b(x) = 0$$

Iremos trabalhar com unidades de tensões as quais são medidas em N/m^2

Logo:

$$\sigma(x) = P(x)/A(x).$$

Sendo assim:

$$P(x) = \sigma(x)\,A(x)$$

Outra unidade importante é o elongamento. Neste caso:

$$\varepsilon(x) = \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]}{\Delta x}$$

É um número adimensional pois $u(x)$, o deslocamento é medido em m, Δx também é medido em m

Tomando o limite:

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}$$

Por último devemos lembrar da Lei de Hooke

$$\sigma(x) = E(x)\,\varepsilon(x)$$

Neste caso estamos simplesmente afirmando que a Tensão (em N/m^2) é proporcional ao elongamento (ou deformação) $\varepsilon(x)$.
$E(x)$ é o chamado módulo de Young.

Podemos então dizer que:

$$\sigma(x) = E(x)\,\frac{du}{dx},$$ e em consequência:

$$P(x) = \sigma(x)\,A(x) = E(x)\,A(x)\,\frac{du}{dx}$$

$$p(x) = E(x)\,A(x)\,\frac{du}{dx}$$

Substituindo na equação diferencial:

$$\frac{d\,p(x)}{dx} + b = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right] + b = 0$$

Como condições de contorno temos:

$u(l) = \bar{u}$ (um deslocamento prescrito)

$p(0) \rightarrow$ uma força aplicada em uma das extremidades da barra (N)

Isto se traduziria em:

$\sigma(0) = \dfrac{p(0)}{A(0)} \rightarrow$ tensão nas extremidades da barra (N/m^2)

o qual quando aplicado na equação diferencial:

$$p(x) = EA\frac{du}{dx}$$

$$\sigma(x) = \frac{P(x)}{A(x)} = E\frac{du}{dx}$$

$$\sigma(0) = \frac{P(0)}{A(0)} = E\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = -\bar{t}$$ (para a esquerda)

(uma tensão prescrita na extr.)

Teremos portanto:

$$\frac{d}{dx}\left[A E \frac{du}{dx}\right] + b = 0$$

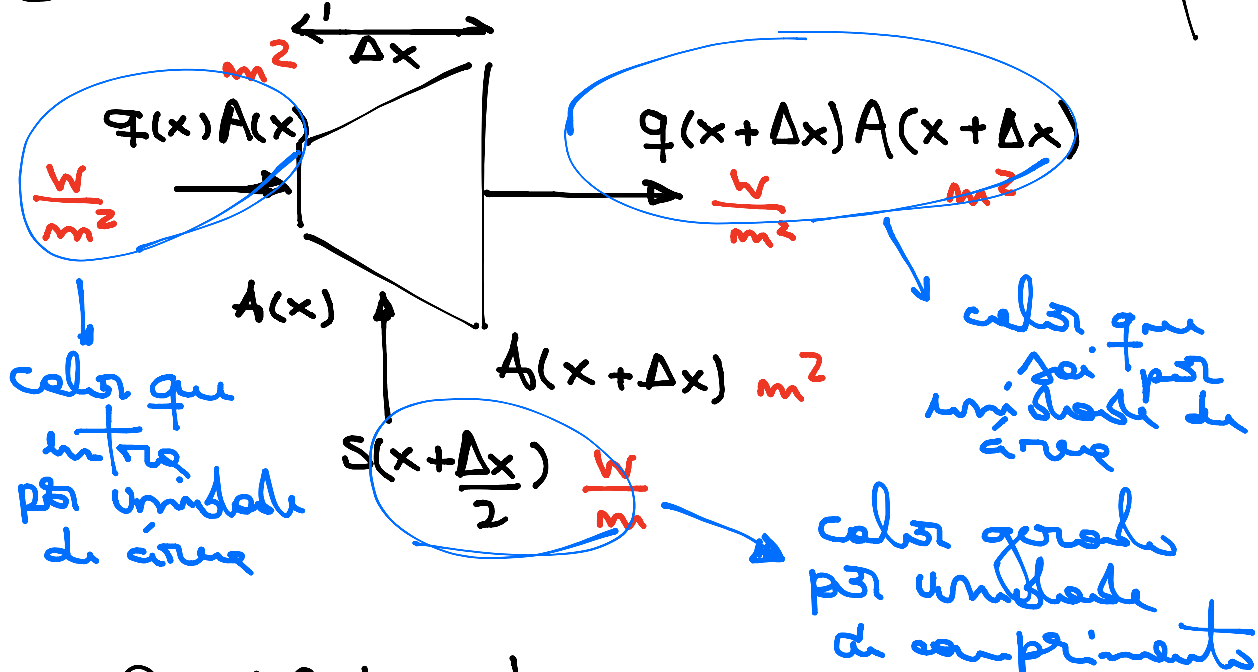
$$\sigma(x=0) = E\frac{du}{dx}\Big|_{x=0} = -\bar{t}$$

$$u(x=L) = \bar{u}$$

dados do problema

geometria e características do material

② Condução de calor unidimensional



O equilíbrio térmico requer:

$$q(x)A(x) + s\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x = q(x+\Delta x)A(x+\Delta x)$$

Rearranjando os termos:

$$q(x+\Delta x)A(x+\Delta x) - q(x)A(x) = S\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x$$

$$\frac{q(x+\Delta x)A(x+\Delta x) - q(x)A(x)}{\Delta x} = S\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

Tomando o limite $\Delta x \to 0$

$$\frac{d(qA)}{dx} = S(x)$$

Neste caso ao invés da Lei de Hooke utilizaremos a lei de Fourier para a condução de calor a qual é:

$$q = -k\frac{dT}{dx}$$

Ela simplesmente afirma que a condução de calor é proporcional a diferença de temperatura e ocorre do ponto de maior para o de menor temperatura.

Substituindo na equação diferencial original teremos:

$$\frac{d(qA)}{dx} - S = 0 \Rightarrow \frac{d\left[-Ak\frac{dT}{dx}\right]}{dx} - S = 0$$

o que nos leva a:

$$\frac{d\left[AK\frac{dT}{dx}\right]}{dx} + S = 0 \quad \text{no domínio } 0 \leq x \leq l$$

Teremos então as duas condições de contorno

$$T(l) = \bar{T} \quad (\text{em } x = l) \quad (\text{essencial})$$

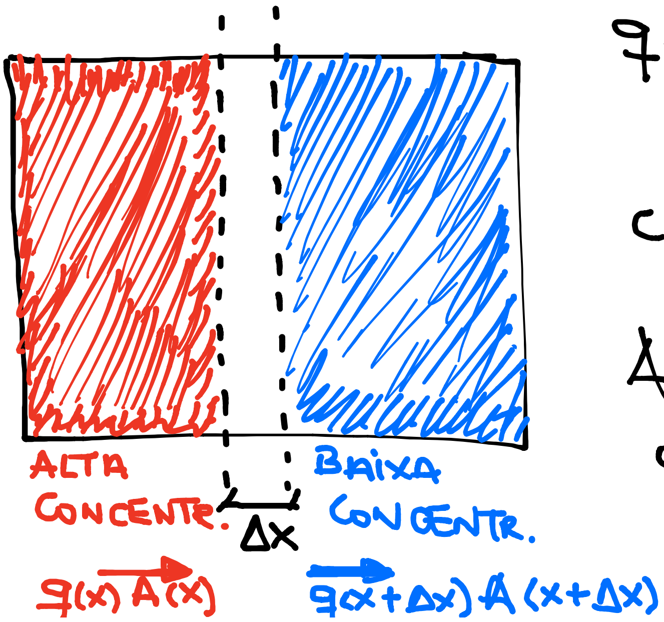
$$-q = K\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = \bar{q} \quad (\text{em } x=0) \quad (\text{natural})$$

o sinal de menos indica que o fluxo de calor sai da barra se a temp. dela for maior que a do meio

---

③ Difusão unidimensional

A difusão é o processo de transporte de átomos em um fluido produzido por movimento browniano



$q(x) \Rightarrow$ fluxo de átomos em $\frac{\text{átomos}}{\text{s}\,m^3}$

$C(x) \Rightarrow$ concentração em átomos$/m^3$

A lei que governa o fluxo de átomos em uma determinada região será:

Esta lei (chamada de lei de Fick) é similar a lei de Fourier e diz simplesmente que o fluxo é proporcional a diferença de concentração e ocorre do ponto de alta para o de baixa concentração.

$$q = -k\frac{dc}{dx}$$

Além disso pela figura acima, e aplicando a conservação da matéria na seção transversal de análise teremos:

$$q(x)A(x) = q(x+\Delta x)A(x+\Delta x)$$

$$q(x+\Delta x)A(x+\Delta x) - q(x)A(x) = 0$$

Dividindo por Δx e tomando o limite para $\Delta x \to 0$

$$\frac{q(x+\Delta x)\,A(x+\Delta x) - q(x)A(x)}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{d\,qA}{dx} = 0$$

Lembrando que

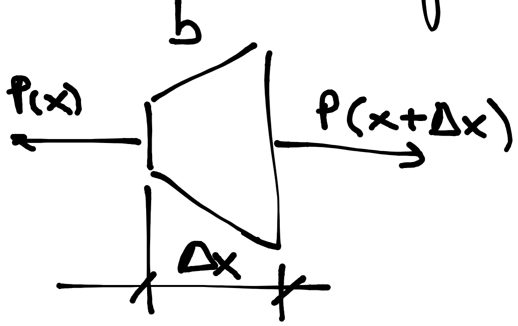
$$q = -k\frac{dc}{dx}$$

Substituindo teremos:

$$\frac{d}{dx}\left[AK\frac{dc}{dx}\right]=0 \quad \text{em} \quad 0\leq x\leq l$$

FORMULAÇÃO FRACA UNIDIMENSIONAL

Tomaremos por base o exemplo das tensões. Nele temos a formulação forte:



$$-p(x)+b\Delta x+p(x+\Delta x)=0$$

$$\frac{p(x+\Delta x)-p(x)}{\Delta x}=-b$$

$$\frac{dp}{dx}+b=0$$

$$\sigma(x)=\frac{p(x)}{A(x)}$$

$$\sigma(x)=E(x)\frac{du}{dx}$$

$$p(x)=\sigma(x)A(x)$$

$$\sigma(x)=E(x)\,\varepsilon(x)$$

$$p(x)=EA\frac{du}{dx}$$

$$\varepsilon(x)=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$$\varepsilon(x)=\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right]+b=0$$

Eq. dif.

$$\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right]+b=0$$

Domínio $0 \leqslant x \leqslant L$

$u(L)=\bar{u}$ (deslocamento no extremo da barra - cond. essencial)

$$\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right]_{x=0}=P(0)=\bar{P} \rightarrow \frac{d}{dx}\left[E\frac{du}{dx}\right]=\frac{P(0)}{A(0)}=\sigma(0)=-\bar{t}$$

Tração no extremo da barra - cond. natural)

tração é medida em unidades N/m^2

Observe que a tração é externa é medida negativa no oposto para o esforço. A tensão é + em tração e negativa em compressão

LEMBRAR

$P=\sigma A=E\varepsilon A=EA\frac{du}{dx}$

$\varepsilon(x)=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$

FORMULAÇÃO FRACA

1º
$$\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right]+b=0$$

$$w\left[\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right]+b\right]=0$$ w arbitrário

$$\int_0^L w\left[\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right]+b\right]=0$$

Função peso w

② $$E\frac{du}{dx}\Big|_{x=0} = -\bar{t}$$ (pois $\bar{t}$ é uma tração e como tal medida em N/m^2)

$$E\frac{du}{dx}\Big|_{x=0} + \bar{t} = 0$$

$$A\left(E\frac{du}{dx}\Big|_{x=0} + \bar{t}\right) = 0$$ (Não é necessário a integração pq a condição age em um ponto $x=0$, mas multiplicamos por A pois a condição da tração atua em uma seção transversal)

$$wA\left(E\frac{du}{dx} + \bar{t}\right)\Big|_{x=0} = 0$$

→ função peso w

As funções peso atenderão a condição $w(l) = 0$ pois isso facilitará o atendimento da 2ª condição de contorno

Vamos agora trabalhar na equação diferencial em si:

$$\int_0^l w\left[\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right] + b\right]dx = 0$$

$$\int_0^l w\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right]dx + \int_0^l wb\,dx = 0$$

$$-\int_0^l \frac{dw}{dx} EA \frac{du}{dx}\, dx + \left[w EA \frac{du}{dx} \right]_0^l + \int_0^l w b\, dx = 0$$

Lembrando que $w(l)=0$ por nossa escolha teremos

$$-\int_0^l \frac{dw}{dx} EA \frac{du}{dx}\, dx - w EA \frac{du}{dx}\Big|_{x=0} + \int_0^l w b\, dx = 0$$

Lembrando que $p = EA \frac{du}{dx} \rightarrow \frac{p}{A} = E \frac{du}{dx}$

Teremos: $\sigma = E \frac{du}{dx}$ $\quad \sigma(0) = E \frac{du}{dx}\Big|_{x=0}$

Lembrando que $\sigma(0) = -\bar{t}$ (vide acima)

teremos:

$$-\int_0^l \frac{dw}{dx} EA \frac{du}{dx} dx + \underset{x=0}{wA\bar{t}} + \int_0^l w b\, dx = 0$$

O que nos leva finalmente a:

$$\int_0^l \frac{dw}{dx} EA \frac{du}{dx}\, dx = \underset{x=0}{wA\bar{t}} + \int_0^l w b\, dx = 0$$

com $w(l) = 0$

É bom lembrar a convenção de sinais $\bar{t}$ para tração → esforço ao corpo e segue a convenção do eixo dos x

$\bar{t}$ para tensão → interna segue a convenção do alongamento

$$\varepsilon(x) = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

Para tração $\varepsilon(x) > 0$, a tensão será ⊕

Para compressão $\varepsilon(x) < 0$, a tensão será ⊖

Sendo assim, a formulação fraca do problema será:

$$\int_0^l \frac{dw}{dx} EA \frac{du}{dx}\, dx = w A \bar{t}\Big|_{x=0} + \int_0^l w b\, dx$$

com $\boxed{w(l)=0}$

Relacionado à condição essencial, ligada a $u(x)$.

onde $\bar{t}$ é uma tração apontando p/ a esquerda.

Exemplo ①

Desenvolva a forma fraca para

$$\frac{d}{dx}\left[AE\frac{du}{dx}\right] + 10Ax = 0 \qquad 0 < x < 2$$

$u(0) = 10^{-4}$ → condição em $u(x)$, essencial

$\sigma(2) = E\dfrac{du}{dx}\Big|_{x=2} = 10$ → condição em $u'(x)$, natural

Isto é MUITO importante: a condição essencial é relacionada com $u(x)$.
A condição natural é relacionada com $u'(x)$.
Portanto neste problema se $u(0)=10^{-4}$ $W(0)=0$ e não $W(2)$, pois devemos anular a função peso nos pontos essenciais!

Retomando a resolução:

$$\frac{d}{dx}\left[AE\frac{du}{dx}\right]+10Ax=0 \qquad 0<x<2$$

$u(0)=10^{-4} \longrightarrow u(x) \longrightarrow$ essencial $\longrightarrow \boxed{W(0)=0}$

$$\sigma(2)=E\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=2}=10$$

$$W\left(\frac{d}{dx}\left[AE\frac{du}{dx}\right]+10Ax\right)=0$$

$$\boxed{\int_0^2 W\left[\frac{d}{dx}\left[AE\frac{du}{dx}\right]+10Ax\right]dx=0}$$

$$A\left[E\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=2}-10\right]=0$$

$$\boxed{WA\left[E\frac{du}{dx}-10\right]_{x=2}=0}$$

Vamos agora aplicar integração por partes na equação diferencial

$$\int_0^2 w\left(\frac{d}{dx}\left[AE\frac{du}{dx}\right]+10Ax\right)dx=0$$

$$-\int_0^2 \frac{dw}{dx}AE\frac{du}{dx}\,dx+WAE\frac{du}{dx}\Big|_0^2+\int_0^2 10WAx\,dx=0$$

Como neste caso a cond. essencial prescreve $w(0)=0$

$$-\int_0^2 \frac{dw}{dx}AE\frac{du}{dx}\,dx+WAE\frac{du}{dx}\Big|_{x=2}+\int_0^2 10WAx\,dx=0$$

Lembrando que neste caso $l=2$ e que a condição natural, em $\frac{du}{dx}$ prescreve $\sigma(2)=E\frac{du}{dx}\Big|_{x=2}=10$

$$-\int_0^2 \frac{dW}{dx}AE\frac{du}{dx}\,dx+WA10_{x=2}+\int_0^2 10WAx\,dx=0$$

$$\int_0^2 \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx}\, dx - 10AW\Big|_{x=2} - \int_0^2 10AWx\, dx = 0$$

com $u(0) = 10^{-4}$ e $w(0) = 0$

Exemplo ②

desenvolva a formulação fraca para:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad \text{em } 1 < x < 3$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=1} = 2 \qquad u(3) = 1$$

Resolução:

Condição essencial $u(3) = 1$

Logo $w(3) = 0$

Ajustando a equação diferencial:

$$\int_1^3 w \frac{d^2u}{dx^2}\, dx = 0$$

$$-\int_1^3 \frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}\, dx + \left[w\frac{du}{dx}\right]_1^3 = 0$$

como supusemos $w(3) = 0$

$$-\int_1^3 \frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}\, dx - w\frac{du}{dx}\Big|_{x=1} = 0$$

Aplicando a condição natural

$$-\int_1^3 \frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}\,dx - 2w(1) = 0$$

com $w(3) = 0$ e $u(3) = 1$

Exemplo ③

Desenvolva a forma fraca para

$$\frac{d}{dx}\left[AE\frac{du}{dx}\right] + 104x = 0 \qquad 0 < x < 2$$

$$u(0) = 10^{-4}$$

$$\sigma(2) = E\frac{du}{dx}\bigg|_{x=2} = 10$$

e obtenha a solução para a mesma utilizando $u(x)$ (soluções tentativas) e $w(x)$ (funções peso) da forma:

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

$$w(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

Vamos recapitular e obter a forma fraca novamente:

$u(0) = 10^{-4} \longrightarrow$ condição essencial $\searrow w(0) = 0$

$$\frac{d}{dx}\left[AE\frac{du}{dx}\right] + 104x = 0$$

$$w \frac{d}{dx}\left[AE\frac{du}{dx}\right] + 10wAx = 0$$

$$\int_0^2 w\left[\frac{d}{dx}\left[AE\frac{du}{dx}\right]\right]dx + \int_0^2 10wAx\,dx = 0$$

$$-\int_0^2 \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx}\,dx + \left[wAE\frac{du}{dx}\right]_0^2 + \int_0^2 10wAx\,dx = 0$$

$$-\int_0^2 \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx}\,dx + wA10\Big|_{x=2} + \int_0^2 10wAx\,dx = 0$$

$$\int_0^2 \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx}\,dx = 10Aw\Big|_{x=2} + \int_0^2 10wAx\,dx$$

$u(0) = 10^{-4}$

$w(0) = 0$

Queremos agora soluções e função peso do tipo: (problema 3)

com A cte e $E = 10^5$

$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$

$w(x) = \beta_0 + \beta_1 x$

Aplicando as condições de contorno essenciais obtemos: $u(0) = 10^{-4} = \alpha_0$

$w(0) = 0 = \beta_0$

Nossas funções agora são:

$$u(x) = 10^{-4} + \alpha_1 x$$

$$w(x) = \beta_1 x$$

$$\frac{du(x)}{dx} = \alpha_1$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = \beta_1$$

As funções agora são

$$u(x) = 10^{-4} + \alpha_1 x \qquad u'(x) = \alpha_1$$

$$w(x) = \beta_1 x \qquad w'(x) = \beta_1$$

Aplicando na integral

$$\int_0^2 \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} dx = 10AW\Big|_{x=2} + \int_0^2 10WAx\,dx$$

$$\int_0^2 \beta_1 \cancel{A}E \alpha_1 dx = 10\cancel{A}\beta_1 x\Big|_{x=2} + \int_0^2 10\beta_1 x \cancel{A} x\,dx$$

A = const.

$$\int_0^2 \cancel{\beta_1} 10^5 \alpha_1 dx = 20\cancel{\beta_1} + \int_0^2 10\cancel{\beta_1} x^2 dx$$

$$\int_0^2 10^5 \alpha_1 \, dx = 20 + \int_0^2 10 x^2 dx$$

$$10^5 \alpha_1 [x]_0^2 = 20 + 10 \left[x^3/3 \right]_0^2$$

$$2 \cdot 10^5 \alpha_1 = 20 + 80/3$$

$$2 \cdot 10^5 \alpha_1 = 140/3$$

$$\alpha_1 = \frac{140}{6} \cdot 10^{-5} = \frac{70}{3} \cdot 10^{-5} = \frac{7}{3} \cdot 10^{-4}$$

$$\alpha_1 = \frac{7}{3} \cdot 10^{-4}$$

Substituindo em $u(x) = 10^{-4} + \alpha_1 x$

obtemos: $u(x) = 10^{-4} + \frac{7}{3} 10^{-4} x$

ou $\boxed{u(x) = 10^{-4}\left(1 + \frac{7x}{3}\right)}$ $\quad u'(x) = \frac{7}{3} \cdot 10^{-4}$

Solução Tentativa Linear

Calculando a tensão $\sigma(x)$ como:

$P(x) = AE \frac{du}{dx}$ $\qquad \sigma(x) = E \frac{du}{dx}$ $\qquad \boxed{\sigma(x) = \frac{70}{3}}$

$\frac{P(x)}{A} = E \frac{du}{dx}$ $\qquad \sigma(x) = 10^5 \cdot \frac{7}{3} \cdot 10^{-4}$

observe que a cond. natural de contorno é aprox.

Vamos agora repetir o problema considerando soluções aproximadas e funções peso (shape functions) quadráticas.

Neste caso:

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$w(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

As condições essenciais são: (como antes)

$$u(0) = 10^{-4}$$

Isto implica em $w(0) = 0$

Substituindo nas funções tentativas:

$$u(0) = a_0 = 10^{-4}$$

$$w(0) = \beta_0 = 0$$

As funções no momento ficam então:

$$u(x) = 10^{-4} + a_1 x + a_2 x^2$$

$$w(x) = \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

E as derivadas:

$$u'(x) = a_1 + 2a_2 x$$

$$w'(x) = \beta_1 + 2\beta_2 x$$

Substituindo na formulação fraca:

$$\int_0^2 \frac{dw}{dx} EA \frac{du}{dx}\, dx = 10WA\Big|_{x=2} + \int_0^2 10WAx\, dx$$

$Eu'(2) = 10 = V(2)$

$A \Rightarrow$ const.

$$\int_0^2 (\beta_1 + 2\beta_2 x) E\cancel{A} (a_1 + 2a_2 x)\, dx = 10(\beta_1 x + \beta_2 x^2)\cancel{A}\Big|_{x=2}$$

$$+ \int_0^2 10(\beta_1 x + \beta_2 x^2)\cancel{A} x\, dx$$

Simplificamos A por ser constante e presente em todos os termos

$$\int_0^2 (\beta_1 + 2\beta_2 x) E(a_1 + 2a_2 x)\, dx = 10(2\beta_1 + 4\beta_2) + \int_0^2 10(\beta_1 x^2 + \beta_2 x^3)\, dx$$

$$E\left[\beta_1 a_1 x\Big|_0^2 + 2\beta_2 a_1 \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + 2\beta_1 a_2 \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + 4\beta_2 a_2 \frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right]$$

$$= 20\beta_1 + 40\beta_2 + 10\beta_1 \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + 10\beta_2 \frac{x^4}{4}\Big|_0^2$$

$$E\left[2\beta_1 a_1 + 4\beta_2 a_1 + 4\beta_1 a_2 + \frac{32}{3}\beta_2 a_2\right] =$$

$$20\beta_1 + 40\beta_2 + \frac{80}{3}\beta_1 + 40\beta_2$$

$$E\left[\beta_1(2a_1 + 4a_2) + 4\beta_2\left(a_1 + \frac{8}{3}a_2\right)\right] = \frac{140}{3}\beta_1 + 80\beta_2$$

Como β_1 e β_2 são arbitrários, igualamos os termos em β_1 e β_2 e obtemos:

$$E(2a_1 + 4a_2) = \frac{140}{3}$$

$$4E\left(a_1 + \frac{8a_2}{3}\right) = 80$$

Substituindo $E = 10^5$

$$\left.\begin{aligned} a_1 + 2a_2 &= \frac{70}{3E} \\ a_1 + \frac{8a_2}{3} &= \frac{20}{E} \end{aligned}\right\}$$

$$2a_2 - \frac{8a_2}{3} = \left[\frac{70}{3} - 20\right]\frac{1}{E}$$

$$6a_2 - 8a_2 = (70 - 60)\frac{1}{E}$$

$$-2a_2 = 10/E$$

$$a_2 = -5/E$$

$$a_2 = -5.10^{-5} = -0{,}5.10^{-4}$$

$$a_1 + 2.-5.10^{-5} = \frac{70.10^{-5}}{3}$$

$$a_1 = 10.10^{-5} + \frac{70}{3}10^{-5}$$

$$a_1 = \frac{100}{3}.10^{-5} \qquad a_1 = \frac{10}{3}.10^{-4}$$

$$a_2 = -0{,}5.10^{-4}$$

A solução tentativa fica então:

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$u(x) = 10^{-4} + \frac{10}{3} \cdot 10^{-4} x - 0{,}5 \cdot 10^{-4} x^2$$

$$\sigma(x) = E\frac{du}{dx} = 10^5 \left(\frac{10^{-3}}{3} - 10^{-4} x \right)$$

$$\sigma(x) = E\frac{du}{dx} = 10 \left(\frac{10}{3} - x \right)$$

observe que a condição natural de contorno não é satisfeita perfeitamente!

Condições de contorno genéricas.

De maneira geral um ponto do contorno ou é um ponto das condições essenciais ($u(x) = \bar{u}$) ou um ponto das condições naturais ($\sigma(x) = \bar{t}$). Em um mesmo ponto não é possível prescrever ao mesmo tempo condições de contorno essenciais e naturais. Do ponto de vista físico isto significaria que as tensões seriam independentes do material o que é impossível.

Matematicamente falando:

$$\Gamma_t + \Gamma_u = \Gamma \quad e \quad \Gamma_t \cap \Gamma_u = 0$$

Problema 3.1 Belytschko)

Desenvolva a forma fraca de:

$$\frac{d}{dx}\left[AE\frac{du}{dx}\right] + 2x = 0 \qquad 1 < x < 3$$

$$\sigma(1) = E\frac{du}{dx}\bigg|_{x=1} = 0{,}1$$

$$u(3) = 0{,}001 \longrightarrow \text{cond. contorno essencial}$$

$$\Downarrow$$

$$w(3) = 0$$

$$\int_1^3 w\left[\frac{d}{dx}\left[AE\frac{du}{dx}\right] + 2x\right]dx = 0$$

$$-\int_1^3 \frac{dw}{dx}AE\frac{du}{dx}\,dx + wAE\frac{du}{dx}\bigg|_1^3 = -\int_1^3 2wx\,dx$$

$$-\int_1^3 \frac{dw}{dx}AE\frac{du}{dx}\,dx - wAE\frac{du}{dx}\bigg|_{x=1} = -\int_1^3 2wx\,dx$$

$$\int_1^3 \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx}\, dx + WA\sigma(1) = \int_1^3 2Wx\, dx$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; x=1$$

$$\int_1^3 \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx}\, dx = -WA\, 0{,}1 + \int_1^3 2Wx\, dx$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; x=1$$

com $W(3)=0$

Funções peso, soluções tentativas e Quadratura de Gauss para problemas unidimensionais

continuidade + completude → Convergência

Notação

$\theta(x)$ → soluções exatas

$\theta^h(x)$ → aproximação global por Elementos Finitos

$\theta^e(x)$ → aproximação da solução no elemento e

onde

$$\theta^e(x) = \alpha_0^e + \alpha_1^e x + \alpha_2^e x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

Para garantir a continuidade:

$$\theta^1(x_2^1) = \theta^2(x_1^2)$$

Para garantir a convergência:

$$\theta^e = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

ou

$$\theta^e = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

ou

$$\theta^e = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

ou seja o polinômio deve ser completo

O mais utilizado (e também o mais simples) será:

$\theta^e(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ (elemento linear)

Supondo um elemento linear com dois nós podemos expressar $\theta^e(x)$ em formato matricial como:

$$\theta^e(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0^e \\ \alpha_1^e \end{bmatrix} = \mathbf{P}(x)\,\alpha^e = \theta^e_{(x)}$$

Expressando α_1 e α_2 em termos dos valores de x nos nós (x_1 e x_2) e da variável dependente θ ($\theta(x_1)$ e $\theta(x_2)$) teremos:

$$\theta^e(x_1) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1$$

$$\theta^e(x_2) = \alpha_0 + \alpha_1 x_2$$

ou em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \theta_1^e \\ \theta_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0^e \\ \alpha_1^e \end{bmatrix}$$

$\mathbf{d}^e = \mathbf{M}^e\,\boldsymbol{\alpha}^e$, isolando α^e

$$\boldsymbol{\alpha}^e = \mathbf{M}^{e^{-1}} \cdot \mathbf{d}^e$$

Daí $\theta^e(x) = \mathbf{P}^e(x)\,\mathbf{M}^{-1e}\,\mathbf{d}^e$

em $\underbrace{\theta^e(x)}_{\text{solução tentativa}} = \underbrace{N(x)^e}_{\text{matriz de peso}} d^e$

Invertendo M^e

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & x_1 - x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{x_1 - x_2} & -\frac{1}{x_1 - x_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x_1}{x_1 - x_2} & \frac{x_1}{x_1 - x_2} \\ \frac{1}{x_1 - x_2} & -\frac{1}{x_1 - x_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_2 & x_1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{x_1 - x_2}$$

em

$$M^{e^{-1}} = \frac{1}{x_2^e - x_1^e}\begin{bmatrix} x_2^e & -x_1^e \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{l^e}\begin{bmatrix} x_2^e & -x_1^e \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

comprimento do elemento e

$$M^{e^{-1}} = \frac{1}{l^e}\begin{bmatrix} x_2^e & -x_1^e \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

calculando as funções da forma: (shape) N^e

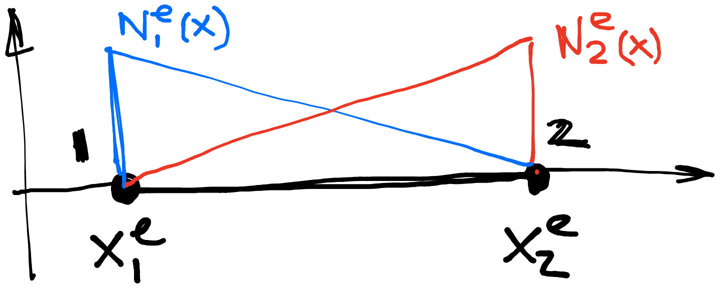
$$N^e(x) = P(x,y)\, M^{e^{-1}}$$

$$N^e(x) = [1 \quad x]\begin{bmatrix} x_2^e & -x_1^e \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{l^e}$$

$$N^e(x) = \begin{bmatrix} \underbrace{\dfrac{x_2^e - x}{x_2 - x_1}}_{N_1^e(x)} & \underbrace{\dfrac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e}}_{N_2^e(x)} \end{bmatrix}$$

função da forma do nó 1, elemento e

função da forma do nó 2, elemento e



As funções de shape tem as seguintes propriedades:

$$N_1^e(x_1) = 1 \qquad N_2^e(x_1) = 0$$

$$N_1^e(x_2) = 0 \qquad N_2^e(x_2) = 1$$

O que pode ser expresso em notação matricial como

$N_i^e(x_j^e) = \delta_{ij}$ onde δ_{ij} é o Delta de Kronecker, o qual é $=1$ para $i=j$ e 0 para $i \neq j$

O fato das funções N^e passarem por 1 exatamente em x_1 e x_2, dá a elas a propriedade interpoladora. Uma função interpoladora passa exatamente pelos valores desejados em posições determinadas da variável independente.

Para mostrar tal propriedade (a de interpolação) escrevemos a função $\theta^e(x)$ como:

$$\theta^e(x) = \mathbf{N}^e_{(x)}\mathbf{d}^e = \sum_{I=1}^{nen} N^e_I(x)\,\theta^e_I$$

nen → nº element nodes

Vamos agora calcular $\theta^e(x^e_1)$

$$\mathbf{N}^e_{(x)}\mathbf{d}^e = \begin{bmatrix} \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} & \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^e_1 \\ \theta^e_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}^e_{(x)}\mathbf{d}^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^e_1 \\ \theta^e_2 \end{bmatrix} = \theta^e_1$$ (valor de $\theta(x)$ em x_1)

De maneira similar para $x^e = x^e_2$

$$\mathbf{N}^e(x)\,\mathbf{d}^e = \begin{bmatrix} \dfrac{x^e_2 - x^e}{x^e_2 - x^e_1} & \dfrac{x^e - x^e_1}{x^e_2 - x^e_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^e_1 \\ \theta^e_2 \end{bmatrix}$$

$$N^e(x_2^e)\, d^e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^e \\ \theta_2^e \end{bmatrix}$$

$$N^e(x_2^e)\, d^e = \theta_2^e \, ! \quad \text{ok!}$$

Então resumindo dizemos que

$$\theta^e(x) = \underbrace{N^e(x)\, d(x)}_{\substack{\text{Notação matricial} \\ + \text{ compacta} \\ + \text{ elegante}}} = \underbrace{\sum_{I=1}^{men} N_I^e(x)\, \theta_I^e}_{\substack{\text{Notação do} \\ \text{somatório.}}}$$

$$\theta^e(x) = N^e(x)\, d^e \longrightarrow \text{notação matricial}$$

$$\theta^e(x) = \sum_{I=1}^{men} N_I^e(x)\, \theta_I^e \rightarrow \text{notação do somatório}$$

$$\theta^e(x_J) = \sum_{I=1}^{men} \delta_{IJ}\, \theta_I^e = \theta_J^e \longrightarrow \text{notação utilizando o delta de Kronecker}$$

Para aplicar a forma fraca da seção anterior temos de calcular as derivadas das funções tentativas e de peso, θ^e o que pode ser feito da seguinte forma:

$$\theta^e(x) = N^e(x)\, d^e$$

$$\frac{d\theta^e(x)}{dx} = \frac{d\left[N^e(x)\, d^e\right]}{dx}$$

$$\frac{d\theta^e(x)}{dx} = \frac{d\left[N^e(x)\right]}{dx} \cdot d^e + \cancel{N^e(x)\, \frac{d\, d^e}{dx}}$$

ctes portanto a derivada é zero

$$\theta^e_x(x) = \frac{d}{dx}\left(\begin{bmatrix} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} & \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} \theta^e_1 \\ \theta^e_2 \end{bmatrix}$$

$$\theta^e_x = \begin{bmatrix} \frac{-1}{x_2 - x_1} & \frac{1}{x_2 - x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^e_1 \\ \theta^e_2 \end{bmatrix}$$

$\theta^e_x = N^e_x \cdot d^e$ ou seguindo a notação do Belytschko:

$$\Theta_x^e = \mathbf{B}^e \cdot \mathbf{d}^e$$

Recapitulando:

$$\Theta^e_{(x)} = \mathbf{N}^e_{(x)} \mathbf{d}^e$$

$$\mathbf{N}^e_{(x)} = \mathbf{P}^e_{(x)} \mathbf{M}^{e^{-1}}$$

$$\mathbf{d}^e = \begin{bmatrix} \theta_1^e \\ \theta_2^e \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{e^{-1}} = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{d\Theta^e_{(x)}}{dx} = \left[\frac{d\mathbf{N}^e_{(x)}}{dx}\right] \cdot \mathbf{d}^e = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{x_2-x_1} & \dfrac{1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^e \\ \theta_2^e \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\Theta^e_{(x)}}{dx} = \mathbf{B}^e \mathbf{d}^e$$

$$\mathbf{B}^e = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^e \\ \theta_2^e \end{bmatrix} \frac{1}{l_e}$$

Construção direta das funções de forma (interpoladoras)

Suponha um elemento com 3 nós x_1^e x_2^e x_3^e e θ_1^e θ_2^e θ_3^e

teremos $N_1(x)$, $N_2(x)$ e $N_3(x)$

$$N_1(x) \rightarrow \begin{cases} N_1^e(x_1^e)=1 \\ N_1^e(x_2^e)=0 \\ N_1^e(x_3^e)=0 \end{cases}$$

Fazemos então

$$(x^e-x_2^e)(x^e-x_3^e)$$

Isto garante o 0

Para o 1 em x_1^e teremos:

$$\boxed{N_1(x) = \frac{(x^e-x_2^e)(x^e-x_3^e)}{(x_1^e-x_2^e)(x_1^e-x_3^e)}}$$

De maneira similar podemos montar

$$\boxed{N_2(x) = \frac{(x^e-x_1^e)(x^e-x_3^e)}{(x_2^e-x_1^e)(x_2^e-x_3^e)}}$$

e

$$\boxed{N_3(x) = \frac{(x^e - x_1^e)(x^e - x_2^e)}{(x_3^e - x_1^e)(x_3^e - x_2^e)}}$$

A vantagem deste método é que ele produz as funções de forma rapidamente. Elas em seguida podem ser combinadas para formar a matriz N

No caso de um elemento quadrático teríamos:

$$N^e(x) = \left[N_1^e(x) \quad N_2^e(x) \quad N_3^e(x) \right]$$

$$\theta^e(x) = N^e(x)\, \underline{d}^e = \left[N_1^e(x) \quad N_2^e(x) \quad N_3^e(x) \right] \cdot \begin{bmatrix} \theta_1^e \\ \theta_2^e \\ \theta_3^e \end{bmatrix}$$

Funções peso:

No caso do método de galerkin as funções de aproximação e as funções peso tem a mesma forma.

Sendo assim

$$W^e(x) = \mathbf{N}^e(x)\, w^e$$

$$\frac{dW^e(x)}{dx} = \mathbf{B}^e(x)\, w^e$$

onde

$$\mathbf{B}^e(x) = \frac{d\mathbf{N}^e(x)}{dx} = \left[\frac{dN_1(x)}{dx} \quad \frac{dN_2(x)}{dx} \quad \dots \right]$$

Aproximação Global e Continuidade (4.5)

(AINDA NÃO É O SISTEMA DE EQUAÇÕES)

Para a função aproximadora global devemos juntar as aproximações em cada elemento (e fazer o mesmo para as funções peso)

Sendo assim:

$$\theta^h = \sum_{e=1}^{nel} \mathbf{N}^e \mathbf{d}^e = \left[\sum_{e=1}^{nel} \mathbf{N}^e \mathbf{L}^e \right] \mathbf{d} = \mathbf{N}\, \mathbf{d}$$

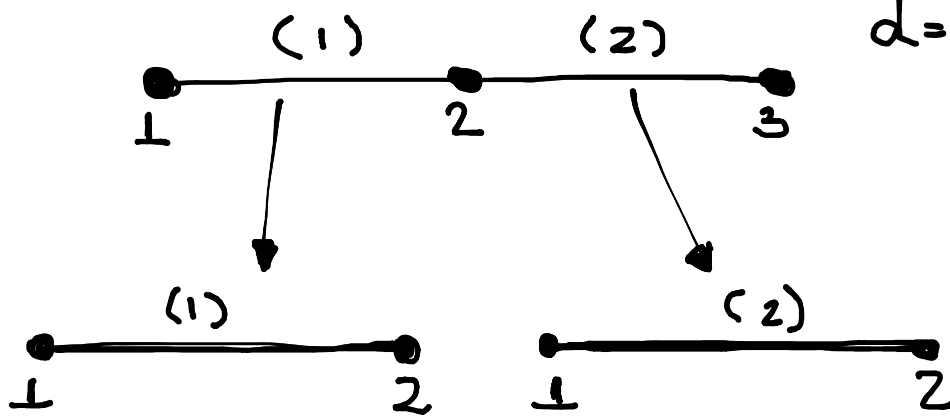
SOL. TENT.

$$w^h = \sum_{e=1}^{nel} \mathbf{N}^e \mathbf{w}^e = \left[\sum_{e=1}^{nel} \mathbf{N}^e \mathbf{L}^e \right] \mathbf{w} = \mathbf{N}\, \mathbf{w}$$

FUNÇ. PESO

Shape ou funç. de forma

O que estas matrizes (em especial a matriz $\mathbf{L}$) fazem é conectar a numeração local dos nós à numeração global, como no exemplo abaixo:



$$d = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$d^1 = \begin{bmatrix} \theta_1^1 \\ \theta_2^1 \end{bmatrix} \qquad d^2 = \begin{bmatrix} \theta_1^2 \\ \theta_2^2 \end{bmatrix}$$

$$d^1 = \mathbf{L}^1 \mathbf{d} \qquad d^2 = \mathbf{L}^2 \mathbf{d}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1^1 \\ \theta_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \theta_1^2 \\ \theta_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Sabendo que

$$\mathbf{N} = \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{N}^I \mathbf{L}^I$$

observe que cada elemento tem apenas 2 nós, isto é 2 valores da função solução, logo a aproximação é linear e $N(x) = [N_1(x) \; N_2(x)]$

$$\mathbf{N} = N^1 L^1 + N^2 L^2$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1^1 & N_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1^2 & N_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1^1 & N_2^1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & N_1^2 & N_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1^1 & N_2^1 + N_1^2 & N_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\theta^h(x) = \mathbf{N}\,\mathbf{d}$$ → Observe que estamos apenas criando uma função de aproximação global

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

NÃO é o sistema de equações dos elementos finitos ainda.

$$\boxed{\theta^h(x) = N_1^1\theta_1 + (N_2^1 + N_1^2)\theta_2 + N_2^2\theta_3}$$

$$\boxed{W^h(x) = N_1^1 W_1 + (N_2^1 + N_1^2) W_2 + N_2^2 W_3}$$

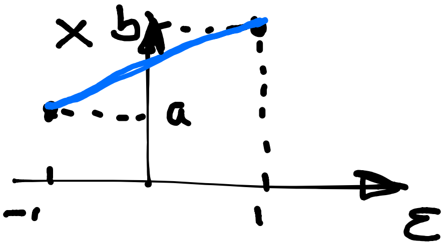
Atenta para o fato que a matriz $\mathbf{N}$ é uma função de x

---

4.6 Gauss Quadrature

Mapeamento para o intervalo $[-1, 1]$

$$\begin{vmatrix} x & \varepsilon & 1 \\ a & -1 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou}$$



$$(x-b) = \frac{b-a}{2}(\varepsilon - 1)$$

$$x = \left(\frac{b-a}{2}\right)\varepsilon - \frac{b-a}{2} + b$$

$$\boxed{x = \left[\frac{b-a}{2}\right]\varepsilon + \frac{b+a}{2}} \qquad \boxed{dx = \frac{b-a}{2}\,d\varepsilon = \frac{\ell}{2}\,d\varepsilon = J\,d\varepsilon}$$

JACOBINO

ou

$$\boxed{\begin{gathered} x = a\left[\frac{1-\varepsilon}{2}\right] + b\left[\frac{1+\varepsilon}{2}\right] \\ x = N_1(\varepsilon)a + N_2(\varepsilon)b \end{gathered}}$$

→ x dado em função das "shape functions"

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} J f(\varepsilon)\,d\varepsilon = W_1 f(\varepsilon_1) + W_2 f(\varepsilon_2) = \mathbf{W}^t \cdot \mathbf{f}$$

O objetivo é obter uma integral exata para polinômios de grau "m" (no exemplo $m=2$) através da correta escolha dos pesos W e dos pontos ε no intervalo $[-1, 1]$

$$f(\varepsilon) = \alpha_1 + \alpha_2\varepsilon + \alpha_3\varepsilon^2 + \dots$$

$$f(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = P(\varepsilon)\alpha$$

$$\begin{bmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_3) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \cdots \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \cdots \\ 1 & \varepsilon_3 & \varepsilon_3^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha}$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{W}^t \cdot \mathbf{f}$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{W}^t \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}$$

Para determinar os pesos $\mathbf{W}$ e os pontos de cálculo da função, $\boldsymbol{\varepsilon}$ fazemos

$$\hat{\mathbf{I}} = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} d\varepsilon$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \frac{\varepsilon^2}{2} & \frac{\varepsilon^3}{3} & \frac{\varepsilon^4}{4} & \cdots \end{bmatrix}_{-1}^{1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{P}} \quad \boldsymbol{\alpha}$$

Lembrando que $x = \frac{b-a}{2}\varepsilon + \frac{b+a}{2}$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

e que $dx = J\,d\varepsilon$

onde $J = \frac{l}{2} = \frac{b-a}{2}$

$$\hat{I} = \int_{-1}^{1} f(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

então $I = J\hat{\mathbf{I}}$

Temos então de resolver o sistema

$$\mathbf{W}^t \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} = \hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\alpha}$$

o que nos leva a:

$$\mathbf{W}^t \mathbf{M} = \hat{\mathbf{P}}$$

Recapitulando

$$\hat{\mathbf{I}} = \int_{-1}^{1} f(\varepsilon)\,d\varepsilon = w_1 f(\varepsilon_1) + w_2 f(\varepsilon_2) = \underbrace{[w_1\ w_2]}_{\mathbf{W}^t} \underbrace{\begin{bmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{W}^t \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} d\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & \frac{\varepsilon^2}{2} & \frac{\varepsilon^3}{3} & \cdots \end{bmatrix}_{-1}^{1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{p}} \qquad \boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{W}^t \mathbf{M} \alpha = \hat{\mathbf{p}} \boldsymbol{\alpha}$$

ou

$$\mathbf{W}^t \mathbf{M} = \hat{\mathbf{p}}^t$$

Recapitulando novamente

$$\hat{\mathbf{I}} = \int_{-1}^{1} f(\varepsilon) d\varepsilon = W_1 f(\varepsilon_1) + W_2 f(\varepsilon_2)$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{W}^t \mathbf{f}$$

$$\begin{bmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_3) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha}$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{W}^t \mathbf{f} = \mathbf{W}^t \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{W}^t \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} d\xi$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \frac{\varepsilon^2}{2} & \frac{\varepsilon^3}{3} & \frac{\varepsilon^4}{4} & \cdots \end{bmatrix}_{-1}^{1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{P} \quad \boldsymbol{\alpha}$$

$$W^t M \alpha = P \alpha$$

$$W^t M = P^t$$

Recapitulando mais uma vez

$$\hat{I} = \hat{I}$$

$$\int_{-1}^{1} f(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_{-1}^{1} f(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ \vdots \end{bmatrix} = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} d\varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \left[\varepsilon \;\; \frac{\varepsilon^2}{2} \;\; \frac{\varepsilon^3}{3} \cdots \right]_{-1}^{1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$W^t M \alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$W^t M \alpha = P \alpha$$

$$W^t M = P \text{ ou } M^t W = P^t$$

Recapitulando

$$\hat{\mathbb{I}} = \hat{\mathbb{I}}$$

$$\int_{-1}^{1} f(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_{-1}^{1} f(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$[W_1 \; W_2 \cdots] \boxed{\begin{bmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ \vdots \end{bmatrix}} = \int_{-1}^{1} [1 \;\; \varepsilon \;\; \varepsilon^2 \cdots] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

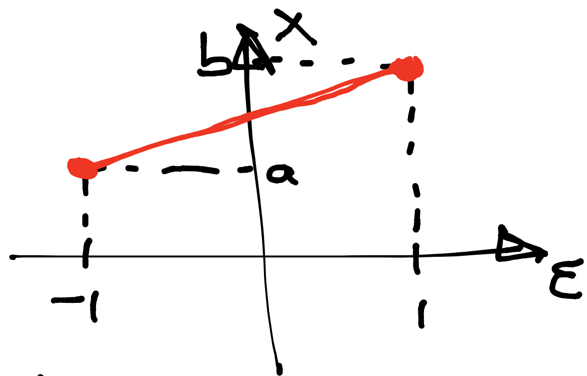
$$\boxed{\begin{bmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_3) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \cdots \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \cdots \\ 1 & \varepsilon_3 & \varepsilon_3^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \end{bmatrix}}$$

$$W^t M \alpha = \left[\varepsilon \;\; \frac{\varepsilon^2}{2} \;\; \frac{\varepsilon^3}{3} \cdots\right]_{-1}^{1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$W^t M \alpha = \left[2 \;\; 0 \;\; \frac{2}{3} \cdots\right] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$W^t M \alpha = P \alpha \rightarrow M^t W = P^t$$

Ajuste



$$x - b = \frac{b-a}{2} \cdot (\varepsilon - 1)$$

$$x = \frac{b-a}{2}\varepsilon - \frac{b-a}{2} + b$$

$$x = \frac{b-a}{2}\varepsilon + \frac{b+a}{2}$$

$$x = \left[\frac{b+a}{2}\right] + \left[\frac{b-a}{2}\right]\varepsilon$$

$$dx = \frac{b-a}{2} d\varepsilon$$

$$dx = J d\varepsilon$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(\varepsilon)\, J\, d\varepsilon$$

$$I = J\hat{I}$$

$$\hat{I} = W^t f(\varepsilon) = W^t M \alpha = p\alpha$$

$$M^T W = p^t \qquad I = w_1 f(\varepsilon_1) + w_2 f(\varepsilon_2) + \dots$$

$$M\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Recapitulando a teoria

Queremos

$$\hat{I} = \int_{-1}^{1} f(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

Vamos propor que tal integração seja feita pela operação

$$\hat{I} = w_1 f(\varepsilon_1) + w_2 f(\varepsilon_2) + w_3 f(\varepsilon_3)$$

ou seja 3 pesos (w_1, w_2 e w_3) e 3 valores da função $f(\varepsilon)$ calculados em 3 pontos ε_1; ε_2; ε_3 do intervalo.

Sendo assim

$$\hat{I} = \int_{-1}^{1} f(\varepsilon)\, d\varepsilon = w_1 f(\varepsilon_1) + w_2 f(\varepsilon_2) + w_3 f(\varepsilon_3) =$$

$$\hat{I} = \int_{-1}^{1} f(\varepsilon)\,d\varepsilon = [W_1 \; W_2 \; W_3] \begin{bmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_3) \end{bmatrix} = \mathbf{W}^t \mathbf{f}$$

$$= \mathbf{W}^t \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}$$

Supomos

$$f(\varepsilon) = 1.\alpha_1 + \varepsilon \alpha_2 + \varepsilon^2 \alpha_3$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$f(\varepsilon_1) = 1.\alpha_1 + \varepsilon_1 \alpha_2 + \varepsilon_1^2 \alpha_3$$

$$f(\varepsilon_2) = 1.\alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \varepsilon_2^2 \alpha_3$$

$$f(\varepsilon_3) = 1.\alpha_1 + \varepsilon_3 \alpha_2 + \varepsilon_3^2 \alpha_3$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 \\ 1 & \varepsilon_3 & \varepsilon_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}$$

Calculamos agora a integral para

$$\hat{I} = \int_{-1}^{1} f(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_{-1}^{1} [1 \;\; \varepsilon \;\; \varepsilon^2] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} d\varepsilon$$

$$\hat{I} = \left[\varepsilon \;\; \frac{\varepsilon^2}{2} \;\; \frac{\varepsilon^3}{3}\right]_{-1}^{1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \left[2 \;\; 0 \;\; \frac{2}{3}\right] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{I} = \mathbf{P} \quad \alpha$$

$$W^t M \alpha = p\alpha$$

$$M^t W = p^t$$

Fazer o 4,1 passo a passo.

$$I = \int_2^5 (x^3 + x^2)\,dx$$ com quadratura gaussiana de 2 pontos

$$2.\,n_{gp} - 1 = 2.2 - 1 = 3$$

Nº de pontos de quadratura gaussiana

Ordem do polinômio que pode ser integrado com 100% de precisão

Desenvolvimento integral

$$I = \int_2^5 (x^3 + x^2)\,dx \Rightarrow$$

Observe que temos aqui 4 variáveis

Precisamos de 4 equações

$$\hat{I} = \int_{-1}^{1} f(\varepsilon)\,d\varepsilon = [W_1 \quad W_2] \begin{bmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \end{bmatrix}$$

$$\hat{I} = W^t \cdot f$$

$$\hat{I} = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} d\varepsilon$$

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \frac{\varepsilon^2}{2} & \frac{\varepsilon^3}{3} & \frac{\varepsilon^4}{0} \end{bmatrix}_{-1}^{1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{I} = \underset{\mathbf{P}}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}} \underset{\boldsymbol{\alpha}}{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}}$$

$$f(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \end{bmatrix} = \underset{\mathbf{M}}{\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1^3 \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2^3 \end{bmatrix}} \underset{\boldsymbol{\alpha}}{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}}$$

$$W^t M \alpha = P \alpha$$

$$M^t W = P^t$$

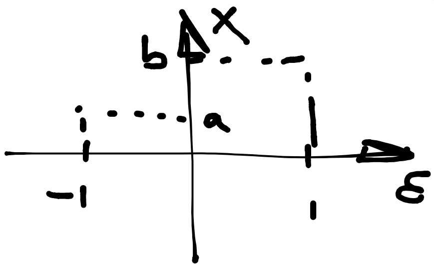
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 \\ \varepsilon_1^3 & \varepsilon_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolver no solver com MULTISTART SEARCH!

$$W_1 = W_2 = 1$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\int_2^5 \longrightarrow \int_{-1}^{1}$$



$$(x-b) = \frac{b-a}{2}(\varepsilon - 1)$$

$$x = \frac{b-a}{2}(\varepsilon - 1) + b$$

$$x = \left[\frac{b-a}{2}\right]\varepsilon + \left[\frac{b+a}{2}\right]$$

$$x(\varepsilon) = 1{,}5\,\varepsilon + 3{,}5 \qquad dx = 1{,}5\,d\xi$$

$$J = 1{,}5\,d\xi$$

$$\hat{I} = W_1 f(\varepsilon_1) + W_2 f(\varepsilon_2)$$

$$I = J\left[W_1 f[x(\varepsilon_1)] + W_2 f[x(\varepsilon_2)]\right]$$

$$I = 1{,}5\left[1 . f[x(-1/\sqrt{3})] + 1 . f[x(1/\sqrt{3})]\right]$$

$f(x) = x^3 + x^2$

$x = 1{,}5\varepsilon + 3{,}5$

m	1	2
w	1	1
ε	$-1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$
x	2,63	4,37
$f(x)$	25,22	102,29
$\sum f(x)$	127,5	
$J\sum f(x)$	191,25	

AGAIN! Lembrar que a matriz M não precisa ser quadrada.

$$\hat{I} = \int_{-1}^{1} f(\varepsilon)\, d\varepsilon = \underbrace{w_1 f(\varepsilon_1) + w_2 f(\varepsilon_2)}_{\text{proposta inicial}}$$

proposta inicial
2 pontos
4 variáveis

$$\hat{I} = \int_{-1}^{1} f(\varepsilon)\, d\varepsilon = \underbrace{\underset{1\times 2}{\underbrace{\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}^t}} \underbrace{\begin{bmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}\ 2\times 1}}_{\text{Proposta inicial}}$$

Proposta inicial

FORMATO MATRICIAL

2 PONTOS $(\varepsilon_1\ \varepsilon_2)$

4 VARIÁVEIS A CALCULAR

$(w_1\ w_2\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2)$

$$f(\varepsilon) = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}\ 1\times 4} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}\ 4\times 1}}_{\text{FORMATO PROPOSTO PARA } f(\varepsilon)}$$

FORMATO PROPOSTO PARA

$f(\varepsilon)$. OBSERVE QUE

TEMOS 4 TERMOS (MESMO

NÚMERO DE VARIÁVEIS DO

PROBLEMA)

Tomando por base o formato proposto acima para $f(\varepsilon)$

$$f(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$f(\varepsilon_2) = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1^3 \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{2\times1}{\mathbf{f}} = \overset{2\times4}{\mathbf{M}} \quad \underset{4\times1}{\boldsymbol{\alpha}}$$

FORMATO MATRICIAL

$$\hat{I} = \underset{1\times2}{\mathbf{W}^t} \underset{2\times1}{\mathbf{f}} = \underset{1\times2}{\mathbf{W}^t} \cdot \underset{2\times4}{\mathbf{M}} \underset{4\times1}{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\hat{I} = \int_{-1}^{1} f(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} d\varepsilon$$

$$1\times 4 \qquad 4\times 1$$

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \frac{\varepsilon^2}{2} & \frac{\varepsilon^3}{3} & \frac{\varepsilon^4}{4} \end{bmatrix}_{-1}^{1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{I} = \underset{\substack{P \\ 1\times 4}}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}} \underset{\substack{\alpha \\ 4\times 1}}{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}}$$

Igualando as duas formas de calcular $\hat{I}$

$$\underset{1\times 2}{W^t} \cdot \underset{2\times 4}{M} \underset{4\times 1}{\alpha} = \underset{1\times 4}{P} \cdot \underset{4\times 1}{\alpha}$$

ou (por conveniência)

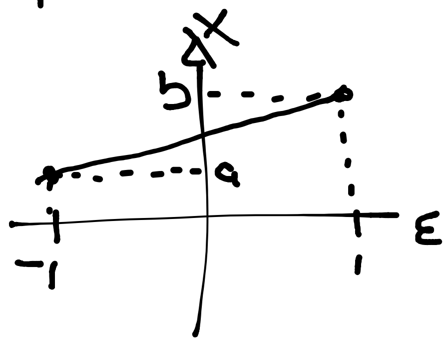
$$\underset{4\times 2}{M^t} \cdot \underset{2\times 1}{W} = \underset{4\times 1}{P}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 \\ \varepsilon_1^3 & \varepsilon_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} w_1 &= w_2 = 1 \\ \varepsilon_1 &= -1/\sqrt{3} \\ \varepsilon_2 &= 1/\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$f(x) = x^3 + x^2$$

$$\int_2^5 f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x(\varepsilon))\,\frac{dx}{d\varepsilon}\,d\xi = \left[\int_{-1}^{1} f(x(\varepsilon))\,d\xi\right]\frac{dx}{d\xi}$$

$$= J\int_{-1}^{1} f(x(\xi))\,d\xi = J\left[w_1 f(x(\varepsilon_1)) + w_2 f(x(\varepsilon_2))\right]$$



$$(x-b) = \frac{b-a}{2}(\varepsilon - 1)$$

$$x = \frac{b-a}{2}\varepsilon + \frac{b+a}{2}$$

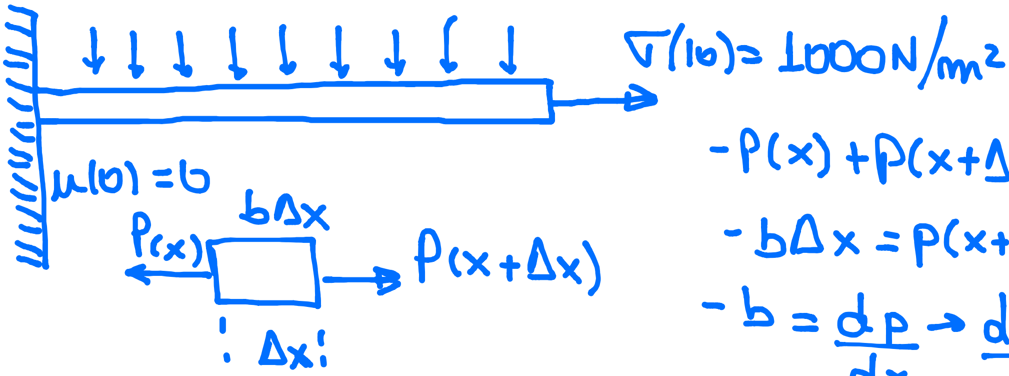
$$x = 1{,}5\xi + 3{,}5 \qquad dx = 1{,}5\,d\xi$$

$$f(x(\varepsilon)) = (1{,}5\xi + 3{,}5)^3 + (1{,}5\xi + 3{,}5)^2$$

$$= 1{,}5\left[1.f(x(-1/\sqrt{3})) + 1.f(x(1/\sqrt{3}))\right]$$

Barra Tracionada Axialmente

$E = 10^5 \quad b = 100\,N/m \quad A = 0{,}1\,m^2$



$$-P(x) + P(x+\Delta x) + b\Delta x$$

$$-b\Delta x = P(x+\Delta x) - P(x)$$

$$-b = \frac{dP}{dx} \rightarrow \frac{dP}{dx} + b = 0$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow E\varepsilon = \frac{P}{A} \rightarrow E\frac{du}{dx} = \frac{P}{A}$$

$$P = AE\frac{du}{dx} \rightarrow \frac{d}{dx}\left[AE\frac{du}{dx}\right] + b = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[AE\frac{du}{dx}\right] + b = 0$$

$u(0) \rightarrow$ cond. essencial

$\sigma(0) \rightarrow$ cond. natural

$$\int_0^{10} w\frac{d}{dx}\left[AE\frac{du}{dx}\right]dx + \int_0^{10} w\,b\,dx = 0$$

$w \rightarrow$ função arbitrária

$$-\int_0^{10} \frac{dw}{dx}AE\frac{du}{dx}dx + wAE\frac{du}{dx}\Big|_0^{10} + \int_0^{10} w\,b\,dx = 0$$

Supondo $w(0) = 0$

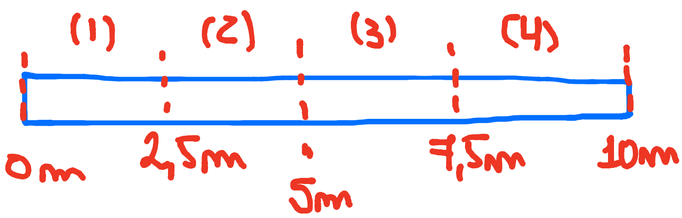
Lembrando

$$E\frac{du}{dx} = \sigma(x)$$

$$\boxed{-\int_0^{10} \frac{dw}{dx}^t AE \frac{du}{dx}\, dx + w^t A\sigma \Big|^{10} + \int_0^{10} w^t b\, dx = 0 \qquad u(0)=0}$$

FORMA FRACA

Discretização do Domínio



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 5 \\ 7{,}5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Matrizes de Ligação

(1)

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad x^1 = L^1 x$$

(2)

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad x^2 = L^2 x$$

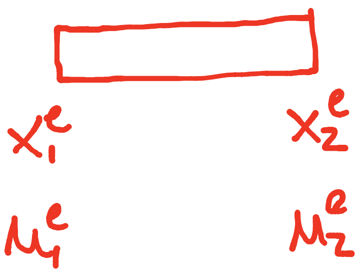
(3)

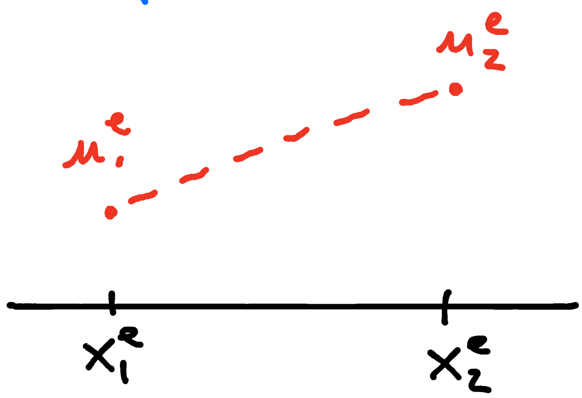
$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad x^3 = Lx$$

(4)

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad x^4 = L^4 x$$

Elemento "e", genérico





$$\underset{d^e}{\begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}} = \underset{M^e}{\begin{bmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{bmatrix}} \underset{\alpha^e}{\begin{bmatrix} \alpha_1^e \\ \alpha_2^e \end{bmatrix}}$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^e \\ \alpha_2^e \end{bmatrix}$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}$$

geometria

$$u(x) = P(x)\, M^{e^{-1}}\, d^e$$

$$u(x) = N^e(x)\, d^e$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} & \dfrac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}$$

cond. de contorno

$N_1^e(x)$ $\quad$ $N_2^e(x)$

Funções de interpolação

$$u^e(x) = N^e(x)\, d^e \qquad \frac{du^e}{dx} = B^e d^e \qquad d^e = L^e d \qquad d = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$w^e(x) = N^e(x)\, w^e \qquad \frac{dw^e}{dx} = B^e w^e \qquad w^e = L^e w$$

Discretização da solução

$$\sum_{e=1}^{n} \underbrace{- \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{dw^{e^t}}{dt} EA \frac{du}{dt}\, dt}_{1^{\circ}\text{ termo}} \underbrace{+\, w^{e^t} A\, \sigma(x) \Big|^{10}}_{2^{\circ}\text{ termo}} \underbrace{+ \int_{x_1^e}^{x_2^e} w^{e^t}\, b\, dx}_{3^{\circ}\text{ termo}} = 0$$

1º termo:

$$\sum_{e=1}^{m} - \int_{x_1^e}^{x_2^e} (B^e w^e)^t EA \frac{du}{dt}\, dx = -\sum_{e=1}^{m} \int_{x_1^e}^{x_2^e} (B^e L^e w)^t EA\, B^e L^e d\, dx$$

$$= -\sum_{e=1}^{m} w^t L^{e^t} B^{e^t} EA B^e L^e (x_2^e - x_1^e) d =$$

$$= -w^t \sum_{e=1}^{m} L^{e^t} B^{e^t}\, 10^5\, 0{,}1\, B^e L^e\, 2{,}5\, d =$$

$$= -w^t\, 25000 \left[\sum_{e=1}^{m} L^{e^t} B^{e^t} B^e L^e\right] d$$

cálculo de B^e

$$\frac{du}{dx} = B^e d^e$$

$$u^e(x) = N^e(x) d^e$$

$$B^e = \frac{d N^e(x)}{dx}$$

$$N^e(x) = \left[\frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} \quad \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e}\right]$$

$$B^e = \left[\frac{-1}{x_2^e - x_1^e} \quad \frac{1}{x_2^e - x_1^e}\right]$$

$$B^{e^t} B^e$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{x_2^e - x_1^e} \\ \frac{1}{x_2^e - x_1^e} \end{bmatrix} \left[\frac{-1}{x_2^e - x_1^e} \quad \frac{1}{x_2^e - x_1^e}\right] =$$

$$= \frac{1}{(x_2^e - x_1^e)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2{,}5^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -w^t\, 25000 \left[\sum_{e=1}^{m} L^{e^t} B^{e^t} B^e L^e\right] d$$

$$= -W^{t}4000\left[\sum_{e=1}^{m} L^{e^{t}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}L^{e}\right]d$$

$$= -W^{t}4000\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix} + \right.$$

$$\left.\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\right\}d$$

$$= -W^{t}4000\left\{\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0\\-1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&-1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&-1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&-1&1\end{bmatrix}\right\}d$$

$$= \boxed{-W^{t}4000\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&-1&1\end{bmatrix}d} \rightarrow 1^{\underline{o}}\ \text{termo}$$

2º termo

$$\sum_{e=1}^{m} w^{e^t} A \nabla T(x)\Big|^{10} = \sum_{e=1}^{m} \left(N^e(x) L^e w\right)^t A \nabla T(x)\Big|^{10} =$$

$$= w^t \sum_{e=1}^{m} L^{e^t} N^{e^t}(x) A \nabla T(x)\Big|^{10} = w^t\, 0{,}1 \cdot 1000 \sum_{e=1}^{m} L^{e^t} N^{e^t}(x)\Big|^{10} =$$

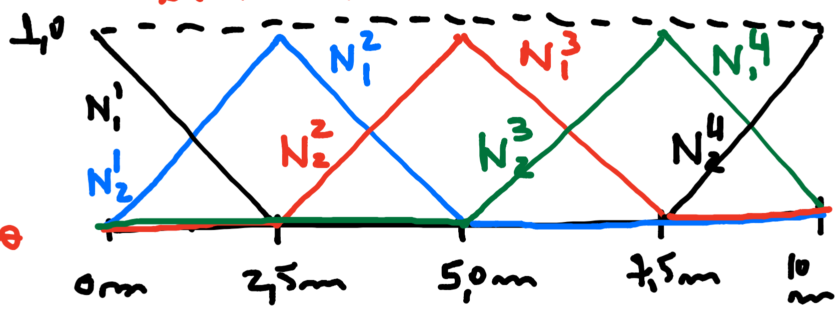
$$= w^t 100 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^1(10) \\ N_2^1(10) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^2(10) \\ N_2^2(10) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^3(10) \\ N_2^3(10) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^4(10) \\ N_2^4(10) \end{bmatrix} \right\}$$

$$= w^t 100 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= w^t 100 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = w^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

obs:
Definição das funções $N_i(x)$
Como pode ser visto no gráfico abaixo apenas N_2^4 é 1, em $x=10$. As demais são 0

$$\boxed{= w^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}} \rightarrow \text{2º termo}$$



3º termo

$$\sum_{e=1}^{m}\int_{x_1^e}^{x_2^e} w^{e^t}\, b\, dx = \sum_{e=1}^{m} b\int_{x_1^e}^{x_2^e}\left(N^e(x)\, W^e\right)^t dx = \sum_{e=1}^{m} b\, W^t L^{e^t}\int_{x_1^e}^{x_2^e} N^{e^t}(x)\, dx$$

$$= W^t\, 100 \sum_{e=1}^{m} L^{e^t}\int_{x_1^e}^{x_2^e}\begin{bmatrix}\dfrac{x_2^e-x}{x_2^e-x_1^e}\\[2ex] \dfrac{x-x_1^e}{x_2^e-x_1^e}\end{bmatrix}dx = W^t\, \frac{100}{2,5}\sum_{e=1}^{m} L^{e^t}\left.\begin{bmatrix}-\dfrac{(x_2^e-x)^2}{2}\\[2ex] \dfrac{(x-x_1^e)^2}{2}\end{bmatrix}\right|_{x_1^e}^{x_2^e}$$

$x_2^e - x_1^e = 2,5$ (neste exemplo)

$$= W^t\, \frac{40}{2}\sum_{e=1}^{m} L^{e^t}\begin{bmatrix}(x_2^e-x_1^e)^2\\[1ex] (x_2^e-x_1^e)^2\end{bmatrix} = W^t\, 20\sum_{e=1}^{m} L^{e^t}\begin{bmatrix}(2,5)^2\\[1ex] (2,5)^2\end{bmatrix} =$$

$$= W^t\, 125\sum_{e=1}^{m} L^{e^t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$= W^t\, 125\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$= W^t\, 125\begin{bmatrix}1\\2\\2\\2\\1\end{bmatrix} = \boxed{W^t\begin{bmatrix}125\\250\\250\\250\\125\end{bmatrix}} \longrightarrow \text{3º termo}$$

Montando o sistema

$$-w^t\,4000\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix} d + w^t\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\100\end{bmatrix} + w^t\begin{bmatrix}125\\250\\250\\250\\125\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$4000\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}125\\250\\250\\250\\225\end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}0313\\0{,}0625\\0{,}0625\\0{,}0625\\0{,}0563\end{bmatrix}$$

Sabendo que $u_1 = 0$ ($u(0)=0$ → cond. essencial)

Resolvemos então o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\u_3\\u_4\\u_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}0625\\0{,}0625\\0{,}0625\\0{,}0563\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}u_2 &= 0{,}2438\\ u_3 &= 0{,}4251\\ u_4 &= 0{,}5439\\ u_5 &= 0{,}6002\end{aligned}}$$

⇓

Resultado Final

Comparação com a solução exata

$$\frac{d}{dx}\left[AE\frac{du}{dx}\right]+b=0 \qquad u(0)=0 \qquad \sigma(10)=1000$$

$$0{,}1.10^5\, u_{xx}+100=0 \qquad E\frac{du}{dx}=\sigma(x)$$

$$u_{xx}=-\frac{100}{0{,}1.10^5}=-0{,}01 \qquad E\frac{du}{dx}\Big|_{x=0}=1000$$

$$u_{xx}=-0{,}01 \qquad u_x(0)=0{,}01$$

$$u(x)=ax^2+bx+c \rightarrow u(0)=0 \rightarrow c=0$$

$$u_x(x)=2ax+b \rightarrow u_x(10)=0{,}01 \rightarrow 20a+b=0{,}01$$

$$u_{xx}(x)=2a \rightarrow 2a=-0{,}01 \rightarrow a=-0{,}005$$

$$-0{,}1+b=0{,}01$$

$$b=0{,}11$$

$$u(x)=-0{,}005x^2+0{,}11x$$

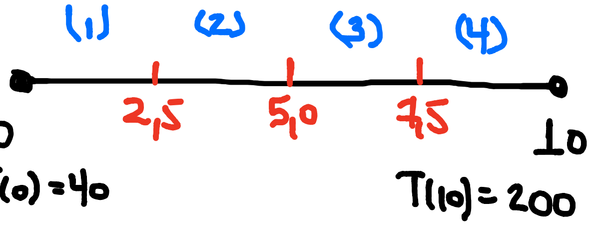
x	u exata	u FEM
0	0,0000	0,0000
2,5	0,2438	0,2438
5,0	0,4250	0,4251
7,5	0,5438	0,5439
10,0	0,6000	0,6002

$\Rightarrow$ diferenças menores que 0,1%

Resolver: $T''(x) = -10$

$T(0) = 40$

$T(10) = 200$



Forma Fraca

$$T''(x) + 10 = 0$$

$$wT'' + 10 = 0$$

$$\int_0^{10} wT''\,dx + \int_0^{10} 10w\,dx = 0$$

$$-\int_0^{10} \frac{dw}{dx}\frac{dT}{dx}\,dx + w\frac{dT}{dx}\Big|_0^{10} + \int_0^{10} 10w\,dx = 0$$

$$-\int_0^{10} \left[\frac{dw}{dx}\right]^t \frac{dT}{dx}\,dx + w^t\frac{dT}{dx}\Big|_0^{10} + \int_0^{10} 10w^t\,dx = 0$$

$$\sum_{e=1}^{4} -\int_{x_1^e}^{x_2^e} \left[\frac{dw^e}{dx}\right]^t \frac{dT^e}{dx}\,dx + w^{e^t}\frac{dT}{dx}\Big|_0^{10} + \int_{x_1^e}^{x_2^e} 10w^{e^t}\,dx = 0$$

$$\sum_{e=1}^{4} -\int_{x_1^e}^{x_2^e} (B^e w_2^e)^t B^e T_2^e\,dx + w_2^{e^t} N^{e^t}_{(x)}\frac{dT}{dx}\Big|_0^{10} + \int_{x_1^e}^{x_2^e} 10 w_2^{e^t} N^{e^t}(x)\,dx$$

$$\sum_{e=1}^{4} -w_2^{e^t}\int_{x_1^e}^{x_2^e} B^{e^t} B^e\,dx\,T_2^e + w_2^{e^t} N^{e^t}_{(x)}\frac{dT}{dx}\Big|_0^{10} + w^{e^t}\int_{x_1^e}^{x_2^e} 10 N^{e^t}_{(x)}\,dx = 0$$

$$W_l \sum_{e=1}^{4} -L^{e^t} \int_{x_1^e}^{x_2^e} B^{e^t} B^e \, dx \; T_l^e + L^{e^t} N^{e^t}(x) \frac{dT}{dx}\Big|_0^{10} + L^{e^t} \int_{x_1^e}^{x_2^e} 10\, N^{e^t}(x)\, dx = 0$$

$$B^e = \frac{dN^e(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[N_1^e(x) \;\; N_2^e(x) \right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} \;\; \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \right]$$

$$B^e = \left[\frac{-1}{x_2^e - x_1^e} \;\; \frac{1}{x_2^e - x_1^e} \right] = \frac{1}{x_2^e - x_1^e}\left[-1 \;\; 1\right] = \frac{1}{\ell^e}\left[-1 \;\; 1\right]$$

$$\frac{1}{\ell^{e^2}} \int_{x_1^e}^{x_2^e} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \frac{1}{\ell^{e^2}} \begin{bmatrix} \ell^e & -\ell^e \\ -\ell^e & \ell^e \end{bmatrix} = \frac{1}{\ell^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}4 \\ -0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix} = K^e$$

$$\sum_{e=1}^{4} -L^{e^t} \int_{x_1^e}^{x_2^e} B^{e^t} B^e \, dx \; T_l^e = \sum_{e=1}^{4} -L^{e^t} \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}4 \\ -0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix} L^e T_l =$$

$$-\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}4 \\ -0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}4 \\ -0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}$$

$$-\left[L^{1^t} K^1 L^1 + L^{2^t} K^2 L^2 + L^{3^t} K^3 L^3 + L^{4^t} K^4 L^4 \right]$$

Lembrando que neste caso, por conta da simetria dos elementos $K^1 = K^2 = K^3 = K^4$

Montando a matriz K global pelo sistema direto:

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 0{,}4 & -0{,}4 & & & & & & \\
2 & -0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 & -0{,}4 & & & & \\
3 & & & -0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 & -0{,}4 & & \\
4 & & & & & -0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 & -0{,}4 \\
5 & & & & & & & -0{,}4 & 0{,}4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 0{,}4 & -0{,}4 & & & \\
2 & -0{,}4 & 0{,}8 & -0{,}4 & & \\
3 & & -0{,}4 & 0{,}8 & -0{,}4 & \\
4 & & & -0{,}4 & 0{,}8 & -0{,}4 \\
5 & & & & -0{,}4 & 0{,}4
\end{array}
$$

Sendo assim a primeira integral fica:

$$
\boxed{W_2(-1)\begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}4 & & & \\ -0{,}4 & 0{,}8 & -0{,}4 & & \\ & -0{,}4 & 0{,}8 & -0{,}4 & \\ & & -0{,}4 & 0{,}8 & -0{,}4 \\ & & & -0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} \quad \text{onde } T_1 = 40,\ T_5 = 200}
$$

Passamos agora para o 2º termo:

$$
W_2^t \sum_{e=1}^{4} \left[^{e} N^{e^t}(x) \frac{dT}{dx} \right|_0^{10}
$$

$$
+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1^1(10)\\N_2^1(10)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1^2(10)\\N_2^2(10)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1^3(10)\\N_2^3(10)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1^4(10)\\N_2^4(10)\end{bmatrix}\cdot T'_{10}
$$

$$
-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1^1(0)\\N_2^1(0)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1^2(0)\\N_2^2(0)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1^3(0)\\N_2^3(0)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1^4(0)\\N_2^4(0)\end{bmatrix}\cdot T'_{0}
$$

$$=$$

$$
+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot T'_{10}
$$

$$
-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\cdot T'_{0}
$$

$$+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot T'_{10} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\T'_{10}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\T'_{10}\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot T'_{0} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T'_0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-T'_0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-T'_0\\0\\0\\0\\T'_{10}\end{bmatrix}$$

Sendo assim o 2º termo fica:

$$\boxed{W_1\begin{bmatrix}-T'_0\\0\\0\\0\\T'_{10}\end{bmatrix}}$$

Vamos agora para o 3º termo:

$$W_1^t \sum_{e=1}^{4} L^{e^t} \int_{x_1^e}^{x_2^e} 10\, N^{e^t}(x)\, dx$$

$$10\int_{x_1^e}^{x_2^e}\begin{bmatrix}\dfrac{x_2^e-x}{x_2^e-x_1^e}\\[2mm] \dfrac{x-x_1^e}{x_2^e-x_1^e}\end{bmatrix}dx=\frac{10}{x_2^e-x_1^e}\int_{x_1^e}^{x_2^e}\begin{bmatrix}x_2^e-x\\ x-x_1^e\end{bmatrix}dx=$$

$$\frac{10}{x_2^e-x_1^e}\begin{bmatrix}\dfrac{(x_2^e-x)^2(-1)}{2}\\[2mm] \dfrac{(x-x_1^e)^2}{2}\end{bmatrix}_{x_1^e}^{x_2^e}=\frac{5}{x_2^e-x_1^e}\begin{bmatrix}(x_2^e-x_1^e)^2\\ (x_2^e-x_1^e)^2\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}2{,}5\\ 2{,}5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12{,}5\\ 12{,}5\end{bmatrix}$$

$$\sum_{e=1}^{4} L^{e^t}\int_{x_1^e}^{x_2^e}10\,N^{e^t}(x)\,dx=\sum_{e=1}^{4} L^{e^t}\cdot 12{,}5=\left[L^{1^t}+L^{2^t}+L^{3^t}+L^{4^t}\right]\begin{bmatrix}12{,}5\\ 12{,}5\end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}12{,}5\\ 12{,}5\end{bmatrix}=$$

3: Termo

$$=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&1\\1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12{,}5\\ 12{,}5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12{,}5\\25\\25\\25\\12{,}5\end{bmatrix}\longrightarrow \boxed{W_2\begin{bmatrix}12{,}5\\25\\25\\25\\12{,}5\end{bmatrix}}$$

Juntando os termos e descontando W_2

$$-1\begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}4 & & & \\ -0{,}4 & 0{,}8 & -0{,}4 & & \\ & -0{,}4 & 0{,}8 & -0{,}4 & \\ & & -0{,}4 & 0{,}8 & -0{,}4 \\ & & & -0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 40 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ 200 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T_6' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_{10}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12{,}5 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \\ 12{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}4 & & & \\ -0{,}4 & 0{,}8 & -0{,}4 & & \\ & -0{,}4 & 0{,}8 & -0{,}4 & \\ & & -0{,}4 & 0{,}8 & -0{,}4 \\ & & & -0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 40 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_6' + 12{,}5 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \\ T_{10}' + 12{,}5 \end{bmatrix}$$

Este sistema fornece:

$T_2 = 173{,}5$ $\qquad T_6' = 66$

Ponto

$T_3 = 245$

$T_4 = 253{,}75$ $\qquad T_{10}' = -34$

Ponto

Podemos também calcular as demais derivadas porém neste caso somente nos elementos

$$\frac{dT(x)}{dx} = B^e T_2^e =$$

$$T_1' = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 173{,}5 \end{bmatrix} = 66{,}75$$

(elemento)

ok!

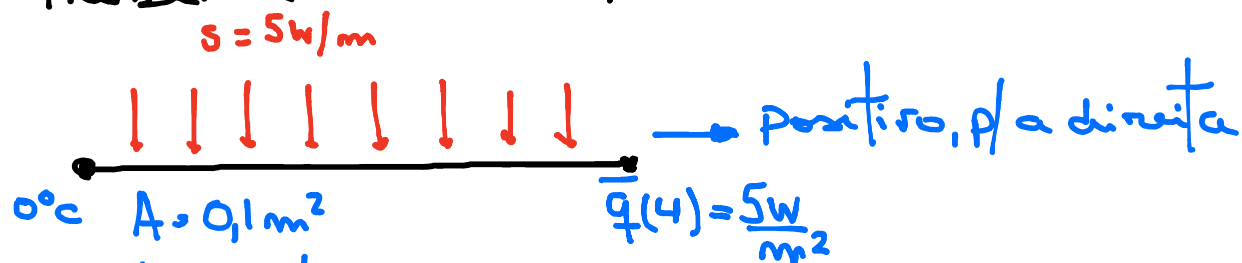
Resíduo pequeno

$$T_2' = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 173{,}5 \\ 245 \end{bmatrix} = 35{,}75$$

$$T_3' = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^3 \\ T_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 245 \\ 253{,}75 \end{bmatrix} = 4{,}375$$

$$T_4' = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 253{,}75 \\ 200 \end{bmatrix} = -26{,}87$$

Problema de condução de calor



$A = 0{,}1\,m^2$

$K = 2W/°C\,m$

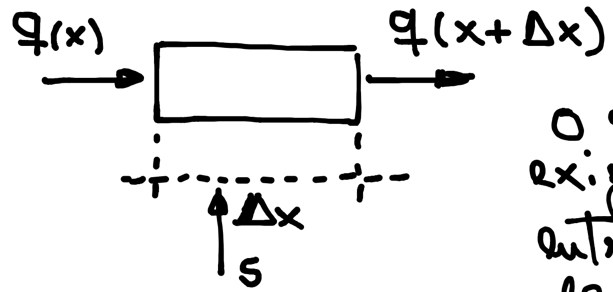
$l = 4m$

ESS. ① $T(0) = 0°$

NAT. ② $\bar{q}(4) = 5W/m^2$

Pede-se determinar a distribuição de temperatura na barra utilizando o FEM e dividindo o domínio em 2 elementos de 2 nós

1º Formulação Teórica do problema



O equilíbrio térmico exige que todo o fluxo entrante seja igual ao fluxo de saída (em W/m^2)

A formulação fica:

$$q(x) + s\Delta x = q(x+\Delta x)$$

$$\frac{q(x+\Delta x)A - q(x)A}{\Delta x} = s$$

$$A\frac{dq(x)}{dx} - s = 0$$

Lembrar que existe uma fonte de calor contínua na barra dada em W/m

Vamos agora incluir a Lei de Fourier:

$$q(x) = -K\frac{dT(x)}{dx}$$

$$A\frac{d}{dx}\left[-K\frac{dT(x)}{dx}\right]-S=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[-AK\frac{dT(x)}{dx}\right]-S=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[AK\frac{dT(x)}{dx}\right]+S=0$$

com condições de contorno

$T(0)=0°C$ (condição essencial)

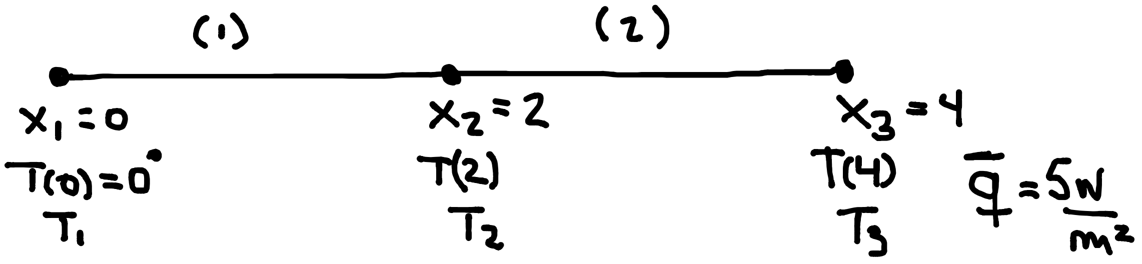
$q(4)=5\,W/m^2$ (condição natural)

onde $q(x)=-K\dfrac{dT(x)}{dx}$

Forma Forte

2ª Formulação em elementos finitos - 1ª parte

Nesta abordagem dividimos o domínio em "pedaços" chamados de elementos. Os extremos destes elementos serão chamados de nós. Iremos calcular os valores da função solução nestes nós. No caso do exemplo acima teremos 2 elementos.



A função solução global será dada por

$$T^h(x) = N_1(x)T_1 + N_2(x)T_2 + N_3(x)T_3$$

$$T^h(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

$$T^h(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{T}_1$$

Vamos agora trabalhar em um dos elementos, de forma genérica.

Parâmetros de ajuste

$$\begin{bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}$$

Por sua vez, para obter valores no interior do elemento vamos usar a seguinte estratégia:

$$T^e(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$T^e(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{bmatrix}$$

com esta estratégia garantimos que em x_1^e e x_2^e os valores da função se ajustam aos valores prescritos ou calculados da função solução.

$$T^e(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{bmatrix}$$

$$T^e(x) = P(x) \, . \, M^{e-1} . T_l^e \Big\} \text{ Notação matricial}$$

Faremos uma expressão matricial como essa para cada elemento. As temperaturas (isto os valores da função solução) nos elementos estarão relacionados com as temperaturas nos nós globais por matrizes de ligação especialmente construídas para tal.

Sendo assim para o elemento (1) teremos

$$T_l^1 = L^1 T_l$$

$$\begin{bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

E no elemento (2)

$$T_l^2 = L^2 T_l$$

$$\begin{bmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

De forma genérica:

$$T_l^e = L^e T_l$$

Voltando para a expressão da função $T^e(x)$

$$T^e(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^e & -x_1^e \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{x_2^e - x_1^e} \begin{bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{bmatrix}$$

$$T^e(x) = \underbrace{P(x) \, . \, M^{-1}} \quad T_l^e$$

$$T^e(x) = N(x) \, . \, T_l^e$$

$$T^e(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e}}_{N_1(x)} & \underbrace{\frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e}}_{N_2(x)} \end{bmatrix}}_{\text{Funções de Interpolação}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{bmatrix}}_{\text{Valores da função calculados nos extremos do elemento}}$$

É interessante observar o seguinte

$N_1(x_1^e) = 1 \qquad N_2(x_1^e) = 0$

$N_1(x_2^e) = 0 \qquad N_2(x_2^e) = 1$

$$\frac{dN_1(x)}{dx} = \frac{-1}{x_2^e - x_1^e} \qquad \frac{dN_2(x)}{dx} = \frac{1}{x_2^e - x_1^e}$$

$$\frac{dN(x)}{dx} = \left[\frac{-1}{x_2^e - x_1^e} \quad \frac{1}{x_2^e - x_1^e}\right] = B^e$$

③ Formulação em elementos finitos - forma fraca

Vamos trabalhar agora com a eq. diferencial

$$\frac{d}{dx}\left[AK\frac{dT(x)}{dx}\right] + S = 0$$

com condições de contorno

$T(0) = 0\,°C$ (condição essencial)

$\bar{q}(4) = 5\,W/m^2$ (condição natural)

onde $q(x) = -K\dfrac{dT(x)}{dx}$

Forma Forte

Multiplicamos a expressão por uma função $w(x)$ arbitrária chamada função "peso"

$$W(x)\left[\frac{d}{dx}\left[AK\frac{dT(x)}{dx}\right]+S\right]=0$$

Integramos esta função ao longo do domínio completo da equação diferencial

$$\int_0^2 W(x)\left[\frac{d}{dx}\left[AK\frac{dT(x)}{dx}\right]+S\right]=0$$

Aplicamos integração por partes

$$-\int_0^2 \frac{dW(x)}{dx}AK\frac{dT(x)}{dx}dx+\left[W(x)\,AK\frac{dT(x)}{dx}\right]_0^2+\int_0^2 W(x)\,S\,dx=0$$

Lembrando que a função W(x) é arbitrária supomos $W(x)=0$ para $x=0$ (nó da condição essencial, $T(0)=0°C$).

Isto nos deixa apenas com 2 (nó da condição natural). A expressão fica:

$$-\int_0^2 \frac{dW(x)}{dx}AK\frac{dT(x)}{dx}dx+W(x)\,AK\frac{dT(x)}{dx}\Big|_2+\int_0^2 W(x)\,S\,dx$$

e as condições são

$W(0)=0$

$\bar{q}(4)=5\,W/m^2$

Lembrando ainda que $q = -K\frac{dT}{dx}$

$$-\int_0^l \frac{dW(x)}{dx} AK \frac{dT(x)}{dx} dx - W(x) A q(x) \Big|_l + \int_0^l W(x) s \, dx$$

com $W(0) = 0$

$q(4) = 5$

4º Discretização

Quebraremos a integral acima em uma série de integrais aplicadas em cada um dos elementos. Tomaremos as transpostas de W(x) e suas derivadas para compatibilidade no produto matricial.

$$\sum_{e=1}^{nel} -\int_{x_1^e}^{x_2^e} \left[\frac{dW^e(x)}{dx}\right]^t AK \frac{dT^e(x)}{dx} dx - W^{e\,t}(x) A q(x) \Big|_l + \int_{x_1^e}^{x_2^e} W^{e\,t}(x) s \, dx = 0$$

Vamos agora trabalhar cada um dos produtos matriciais

(A) $\left[\frac{dW^e(x)}{dx}\right]^t = \left[\frac{dN^e(x) W_i^e}{dx}\right]^t$

Vamos também supor que, assim como $T(x) = N(x) T_i$, as funções de peso (ou teste) $W(x)$ também terão a forma $W(x) = N(x) W_i$.
Quando fazemos isto estamos usando a abordagem de GALERKIN.

Assim, lembrando:

$$\begin{bmatrix} W_1^e \\ W_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W_1^e \\ W_2^e \end{bmatrix}$$

$$W^e(x) = [1 \quad x] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow W^e(x) = [1 \quad x] \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W_1^e \\ W_2^e \end{bmatrix}$$

$$W^e(x) = P(x) \cdot M^{-1} \cdot W_\eta^e$$

$$M^{-1} = \frac{1}{x_2^e - x_1^e} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow W^e(x) = \underbrace{\underbrace{[1 \quad x]}_{P(x)} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\ell^e}}_{N^e(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} W_1^e \\ W_2^e \end{bmatrix}}_{W_\eta^e}$$

$$N^e(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} & \dfrac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \end{bmatrix}$$

Voltando a expressão de interesse:

$$\left[\frac{dW^e(x)}{dx}\right]^t = \left[\frac{d\,N^e(x) W_\eta^e}{dx}\right]^t = \left[\frac{dN^e(x)}{dx} W_\eta^e\right]^t = \left[W_\eta^e\right]^t \cdot \left[\frac{dN^e(x)}{dx}\right]^t =$$

$$= \left[W_\eta^e\right]^t \cdot \left[B^e\right]^t = [W_1^e \quad W_2^e] \begin{bmatrix} -1/(x_2^e - x_1^e) \\ 1/(x_2^e - x_1^e) \end{bmatrix}$$

Teremos ainda:

$$W_\eta^e = L^e W_\eta$$

No elemento 1 $W_\eta^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix}$

No elemento 2 $W_l^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix}$

E as transpostas serão dadas por:

$$[W_l^1]^t = [L^1 W_l]^t = W_l^t L^{1^t} = [W_1 \; W_2 \; W_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[W_l^2]^t = [L^2 W_l]^t = W_l^t L^{2^t} = [W_1 \; W_2 \; W_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(B) $$\frac{dT^e(x)}{dx} = B^e T_l^e = B^e L^e T_l$$

(C) Vamos substituir na primeira integral

$$\sum_{e=1}^{nel} - \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left[\frac{dW(x)}{dx}\right]^t KA \frac{dT(x)}{dx} dx$$

$$\sum_{e=1}^{nel} - \int_{x_1^e}^{x_2^e} W_l^{e^t} B^{e^t} KAB^e T_l^e dx$$

Lembrando agora que:

$$W_l^e = L^e W_l$$

$$T_l^e = L^e T_l$$

$$\sum_{e=1}^{nel} - \int_{x_1^e}^{x_2^e} W_l^t L^{e^t} B^{e^t} KAB^e L^e T_l dx$$

$$\sum_{e=1}^{nel} -W_2^t L^{e^t}\left[\int_{x_1^e}^{x_2^e} B^{e^t} KAB^e dx\right] L^e T_2$$

$[1\times 3][3\times 2]\;[2\times 1]\quad [1\times 2]\quad [2\times 3][3\times 1]$

Calculando a matriz entre os colchetes aqui:

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} \begin{bmatrix} \frac{-1}{x_2^e-x_1^e} \\ \frac{1}{x_2^e-x_1^e} \end{bmatrix} KA \begin{bmatrix} \frac{-1}{x_2^e-x_1^e} & \frac{1}{x_2^e-x_1^e} \end{bmatrix} dx$$

$$\frac{KA}{(x_2^e-x_1^e)^2}\int_{x_1^e}^{x_2^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

$$\frac{KA}{(x_2^e-x_1^e)^2} \begin{bmatrix} x_2^e-x_1^e & -(x_2^e-x_1^e) \\ -(x_2^e-x_1^e) & (x_2^e-x_1^e) \end{bmatrix}$$

$$\frac{KA}{x_2^e-x_1^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2.0,1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$

$$x_2^e - x_1^e = 2 \quad \forall e$$

Esta matriz é denominada de matriz K (ou de rigidez do elemento)

Estamos agora portanto com a seguinte expressão:

$$\sum_{e=1}^{mel} -W_2^t L^{e^t} \left[\int_{x_1^e}^{x_2^e} B^{e^t} KAB^e dx \right] L^e T_2$$

$$\sum_{e=1}^{mel} -W_2^t L^{e^t} K L^e T_2$$

$[1\times3][3\times2][2\times2][2\times3][3\times1]$

Como W_2 e T_2 são globais e fixos podemos fazer:

$$-W_2^t \left[\sum_{e=1}^{mel} L^{e^t} K L^e \right] T_2$$

$$-W_2^t \left[L^{1^t} K L^1 + L^{2^t} K L^2 \right] T_2$$

$$-W_2^t \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] T_2$$

$$-W_2^t \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}0 \\ -0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0{,}0 & -0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix} T_2$$

Outra forma de montar

ELEM 1

$$\begin{array}{c|cc} & & \\ 1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}$}} \\ 2 & & \\ & 1 & 2 \end{array}$$

ELEM 2

$$\begin{array}{c|cc} & & \\ 2 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}$}} \\ 3 & & \\ & 2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 0{,}1 & -0{,}1 & 0 \\
2 & -0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0
\end{array}
+
\begin{array}{|ccc|c}
1 & 2 & 3 & \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0{,}1 & -0{,}1 & 2 \\
0 & -0{,}1 & 0{,}1 & 3
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

Dizemos então que:

$$\sum_{e=1}^{nel} - \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left[\frac{dW^e(x)}{dx}\right]^t KA \frac{dT(x)}{dx}\, dx = -W_2^t \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix} T_2$$

Substituimos na expressão original:

$$\sum_{e=1}^{nel} - \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left[\frac{dW(x)}{dx}\right]^t Ak \frac{dT(x)}{dx}\, dx + W^{e^t}(x) Aq(x) \Big|_\Gamma + \int_{x_1^e}^{x_2^e} W^{e^t}(x) s\, dx = 0$$

$$-W_2^t \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix} T_2 + \sum_{e=1}^{nel} + W^{e^t}(x) Aq(x) \Big|_\Gamma + \int_{x_1^e}^{x_2^e} W^{e^t}(x) s\, dx = 0$$

D Vamos para o 2º termo:

$$\sum_{e=1}^{nel} - W^{e^t}(x) Aq(x) \Big|_\Gamma$$

$$w^e_{(x)} = N^e_{(x)} w^e_\eta$$

$$-\sum_{e=1}^{mel} w^{e^t}_\eta N^{e^t}_{(x)} A q(x) \Big|_\eta$$

$$w^e_\eta = L^e w_\eta$$

$$-\sum_{e=1}^{mel} w^t_\eta L^{e^t} N^{e^t}_{(x)} A q(x) \Big|_\eta$$

Lembrar que
$\eta = x_3$

$[1\times 3][3\times 2][2\times 1]$

$$-\sum_{e=1}^{mel} w^t_\eta L^{e^t} N^{e^t}(x) A q(x) \Big|_{x_3}$$

$$-\left[w^t_\eta \left(L^{1^t} N^{1^t}(x_3) A q(x_3) + L^{2^t} N^{2^t}(x_3) A q(x_3) \right) \right]$$

$$-\left[w^t_\eta \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{} \begin{bmatrix} N^1_1(x_3) \\ N^1_2(x_3) \end{bmatrix} A q(x_3) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} N^2_1(x_3) \\ N^2_2(x_3) \end{bmatrix}}_{2\times 1} A q(x_3) \right) \right]$$

$$N^1_1(x_3) = 0 \qquad N^2_1(x_3) = 0$$

$$N^1_2(x_3) = 0 \qquad N^2_2(x_3) = 1$$

$$-\left[w^t_\eta \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{2\times 1} A q(x_3) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{2\times 1} A q(x_3) \right) \right]$$

$$-\left[W_2^t\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}A q(x_3)\right)\right] = -W_2^t\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}0{,}1(+5)$$

$$= -W_2^t\begin{bmatrix}0\\0\\0{,}5\end{bmatrix}$$

Voltamos então para a expressão original:

$$\sum_{e=1}^{nel} -\int_{x_1^e}^{x_2^e}\left[\frac{dW^e(x)}{dx}\right]^t Ak\,\frac{dT^e(x)}{dx}\,dx - W^{e^t}(x)\,A q(x)\Big|_{\Omega} + \int_{x_1^e}^{x_2^e} W^{e^t}(x)\,s\,dx = 0$$

$$-W_2^t\begin{bmatrix}0{,}1 & -0{,}1 & 0\\ -0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}1\\ 0 & -0{,}1 & 0{,}1\end{bmatrix}T_2 - W_2^t\begin{bmatrix}0\\0\\0{,}5\end{bmatrix} + \sum_{e=1}^{nel}\int_{x_1^e}^{x_2^e} W^{e^t}(x)\,s\,dx = 0$$

(E) Vamos para o 3º termo

$$\sum_{e=1}^{nel}\int_{x_1^e}^{x_2^e}\left(N^e(x)\,W_2^e\right)^t s\,dx =$$

$$\sum_{e=1}^{nel}\int_{x_1^e}^{x_2^e} W_2^{e^t}\,N^{e^t}(x)\,s\,dx =$$

$$\sum_{e=1}^{nel}\int_{x_1^e}^{x_2^e}\left(L^e W_2\right)^t N^{e^t}(x)\,s\,dx =$$

$$\sum_{e=1}^{nel} \int_{x_1^e}^{x_2^e} W_1^t L^{e^t} N^{e^t}_{(x)}\, s\, dx =$$

$$W_2^t \sum_{e=1}^{nel} L^{e^t} \int_{x_1^e}^{x_2^e} N^{e^t}_{(x)}\, s\, dx =$$

$$W_2^t \sum_{e=1}^{nel} L^{e^t} \int_{x_1^e}^{x_2^e} \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{bmatrix} s\, dx =$$

s é constante
$s = 5$

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e}\, s\, dx = 2{,}5\,(x_2^e - x_1^e) = 5$$

$x_2^e - x_1^e = 2 \;\; \forall e$

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e}\, s\, dx = 2{,}5\,(x_2^e - x_1^e) = 5$$

$$= W_2^t \sum_{e=1}^{nel} L^{e^t} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = W_2^t \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \right]$$

$$= W_2^t \left[\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right] = W_2^t \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Forma alternativa de montagem :

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Retomando a expressão original

$$\sum_{e=1}^{mel} - \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left[\frac{dw^e(x)}{dx}\right]^t A k \frac{dT^e(x)}{dx}\, dx + w^{e\,t}(x) A q(x) \Big|_{\Omega} + \int_{x_1^e}^{x_2^e} w^{e\,t}(x) s\, dx = 0$$

$$-W_2^t \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix} T_1 - W_2^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} + W_2^t \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = 0$$

Colocamos W_2^t em evidência e obtemos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Porque T_1 é a cond. essencial

Como $T_1 = 0$ (cond. essencial) partimos para a resolução de:

$$\begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4{,}5 \end{bmatrix}$$

$T_2 = 145 \qquad T_3 = 190$

As derivadas da temperatura (isto é seu gradiente) são dadas por:

$$\frac{dT^e(x)}{dx} = \frac{dN^e(x)}{dx} \cdot T_2^e = B^e T_2^e = B^e L^e T_2$$

No elemento 1

$$\begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 145 \\ 190 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 142 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dT^1(x)}{dx} = 72,5$$

No elemento 2

$$\begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 145 \\ 190 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 145 \\ 190 \end{bmatrix}$$

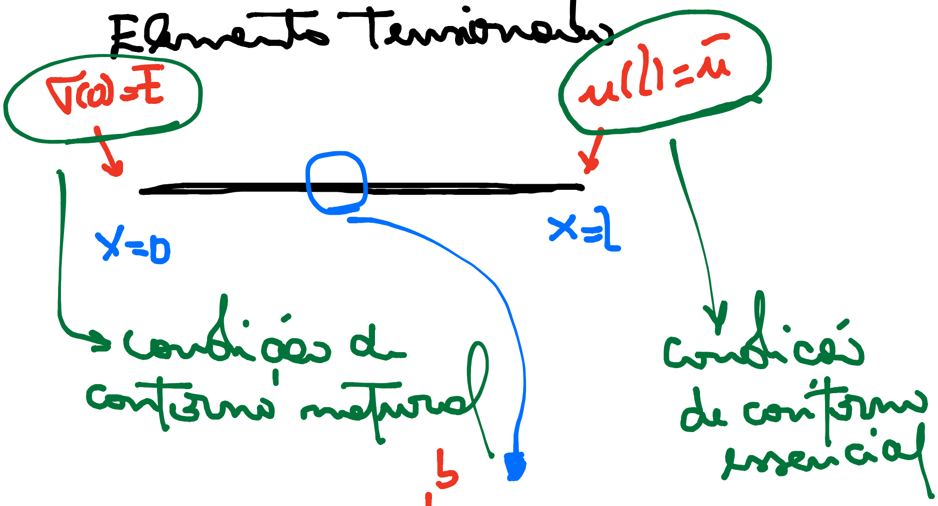
$$\frac{dT^2(x)}{dx} = 22,5 \qquad = -72,5 + 95$$

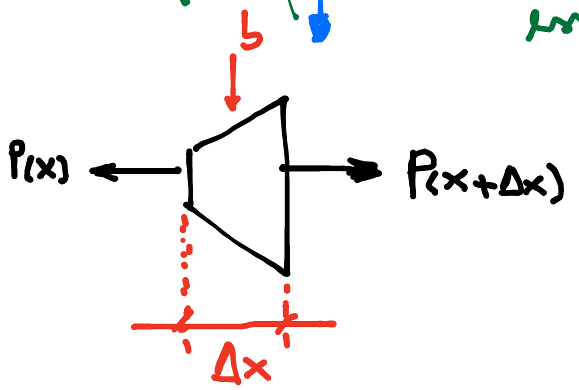
Sendo assim temos:

$$T_2 = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 145 \\ 190 \end{bmatrix} \qquad \frac{dT_2}{dx} = \begin{bmatrix} 72 \\ 22,5 \end{bmatrix}$$

Revisão da Formulação Fraca

Elemento Tensionado





$P(x) \rightarrow$ Força em N

$b \rightarrow$ carga distribuída em N/m

$\sigma \rightarrow$ tensão em N/m^2

$A \rightarrow$ área da seção transversal da barra em m^2

O equilíbrio de forças na seção infinitesimal da barra mostrada acima requer:

$$-P(x)+P(x+\Delta x)+b\Delta x=0$$

Daí:

$$\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x}=-b$$

e em seguida tomando o limite para $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{dP}{dx}+b=0$$

Vamos agora introduzir o deslocamento dos pontos da barra

Fazemos:

$$\varepsilon(x) = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \Rightarrow \frac{du}{dx} \longrightarrow \text{deformação}$$

$$\sigma(x) = E(x)\,\varepsilon(x) \text{ — Lei de Hooke}$$

$$\frac{P(x)}{A(x)} = E(x)\,\varepsilon(x) \longrightarrow P(x) = E(x)\,\varepsilon(x)\,A(x)$$

Módulo de Young

$$P(x) = E(x)\,\frac{du}{dx}\,A(x)$$

Inserindo $P(x)$ na equação diferencial

$$\frac{dP}{dx} + b = 0 \longrightarrow \frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right] + b = 0$$

Multiplicando por funções de forma arbitrárias $W(x)$ e integrando sobre o domínio

$$\int_0^l W\left[\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right] + b\right] = 0$$

Integrando por partes

$$-\int_0^l \frac{dW}{dx}\,EA\,\frac{du}{dx} + WEA\frac{du}{dx}\Big|_0^l + \int_0^l Wb = 0$$

Supondo que $W(l) = 0$

$$-\int_0^l \frac{dw}{dx} EA \frac{du}{dx} - wEA\frac{du}{dx}\Big|_0^l + \int_0^l wb = 0$$

Lembrando que $\sigma = E\varepsilon = E\frac{du}{dx}$

$$\sigma(0) = E\frac{du}{dx}\Big|_{x=0} = -\bar{t}$$

no exemplo do Belytschko a tração é dada para a esquerda

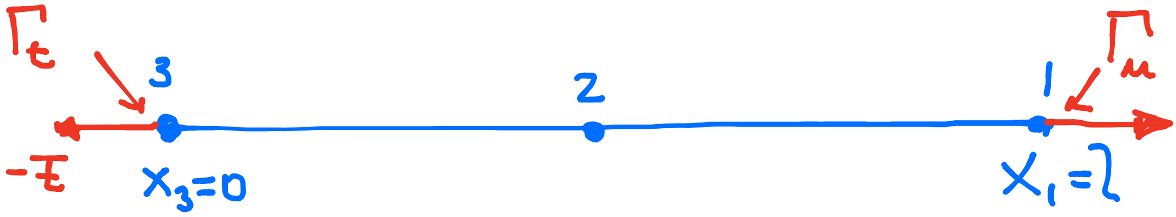
Temos:

$$-\int_0^l \frac{dw}{dx} EA \frac{du}{dx} - wA\sigma(0) + \int_0^l wb = 0$$

ou

$$\int_0^l \frac{dw}{dx} EA \frac{du}{dx} + wA\sigma(0) - \int_0^l wb = 0$$

$$\int_0^l \frac{dw}{dx} EA \frac{du}{dx} - wA\bar{t} - \int_0^l wb = 0$$



$\sigma(x_3) = -\bar{t}$
Natural prescrito

$u(x_1) = \bar{u}$
ESSENCIAL PRESCRITO
↓
o que implicará em
$w(x_1) = 0$

Por consistência com o desenvolvimento de Belytschko vamos incluir a transposição das funções "shape" W na forma fraca antes de começar a substituição das funções pelos seus equivalentes discretos, isto é matriciais. Sendo assim a forma fraca fica

$$\int_0^l \left(\frac{dW}{dt}\right)^t EA\,\frac{du}{dx}\,dx - EA\bar{t} - \int_0^l W^t b\,dx = 0$$

$W(l) = 0$

$u(l) = \bar{u}$

condição essencial

N/m^2.
pressão no nó
cond. Natural

Recordando as matrizes desenvolvidas no capítulo 4:

geometria

dados de contorno

$\theta_l = M\alpha$

$\alpha = M^{-1}\theta_l$

$p(x) = [1 \;\; x]$

$\theta(x) = p(x)\,M^{-1}\,\theta_l$

$\theta(x) = N(x)\,\theta_l$

$W(x) = N(x)\,W_l$

$W(x)^t = W^t\,N(x)^t$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{x_2 - x_1}$$

$$\left(\frac{dW(x)}{dt}\right)^t = W_l^t\,N(x)^t$$

Passando para a notação do capítulo 5:

$u(x) = N(x)\,u_l = \mathbf{N}\,d$

$w(x) = N(x)\,w = \mathbf{N}\,w \qquad w(x)^t = w^t\,\mathbf{N}^t$

$$\frac{du}{dx} = B\,d \qquad B = \frac{dN}{dx}$$

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)^t = w^t N^t$$

Esqueci de mencionar que todas as matrizes acima são relativas a um elemento individual. A relação entre a numeração dos elementos individuais e os elementos globais se dá por meio das matrizes de conexão L^e, sendo assim

$$u^e = L^e u$$

$$w^e = L^e w$$

For isotropic materials $\mathbf{D} = k\mathbf{I}$ and the conservation equation reduces to

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\theta - k\nabla^2\theta - s = 0 \quad \text{or} \quad \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\theta - k\nabla^2\theta - s = 0, \tag{6.43}$$

where ∇^2 is the Laplacian defined in (6.18). We consider the usual essential and natural boundary conditions

$$\begin{aligned} \theta &= \bar{\theta} \quad \text{on} \quad \Gamma_\theta, \\ \vec{q} \cdot \vec{n} &= \bar{q} \quad \text{on} \quad \Gamma_q, \end{aligned} \tag{6.44}$$

where Γ_θ and Γ_q are complementary.

To obtain the weak form of (6.43) we multiply the conservation equation (6.41) and the natural boundary condition by an arbitrary weight function w and integrate over the corresponding domains:

$$\text{(a)} \quad \int_\Omega w(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\theta + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} - s)\, \mathrm{d}\Omega = 0, \qquad \text{(b)} \quad \int_{\Gamma_q} w(\bar{q} - \vec{q} \cdot \vec{n})\, \mathrm{d}\Gamma = 0 \quad \text{on} \quad \forall w. \tag{6.45}$$

Integration by parts of the second term (the diffusion term) in (6.45a) gives

$$\int_\Omega w\,\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\theta\, \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \vec{\nabla}w \cdot \vec{q}\, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_q} w\bar{q}\, \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega ws\, \mathrm{d}\Omega\text{(a)} \qquad \forall w \in U_0, \tag{6.46}$$

where we have exploited (6.45b) and that $w = 0$ on Γ_θ.

Finally, the weak form is completed by substituting the generalized Fourier law into (6.46), which gives

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{find the trial solution } \theta(x, y) \in U \text{ such that} \\ \displaystyle\int_\Omega w\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\theta\, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega (\boldsymbol{\nabla}w)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\nabla}\theta\, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_q} w\bar{q}\, \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega ws\, \mathrm{d}\Omega \qquad \forall w \in U_0. \end{array}} \tag{6.47}$$

The above is the weak form for the advection–diffusion equation. Note that the first term is unsymmetric in the weight function w and the solution θ. This will result in unsymmetric discrete system equations and has important ramifications on the nature of the solutions, because as in 1D, the solutions can be unstable if the velocity is large enough.

REFERENCES

Fung, Y.C. (1994) *A First Course in Continuum Mechanics*, 3rd edn, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Malvern, L.E. (1969) *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Problems

Problem 6.1

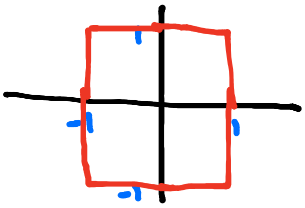
Given a vector field $q_x = -y^2$, $q_y = -2xy$ on the domain shown in Figure 6.2. Verify the divergence theorem.

Problem 6.2

Given a vector field $q_x = 3x^2y + y^3, q_y = 3x + y^3$ on the domain shown in Figure 6.9. Verify the divergence theorem. The curved boundary of the domain is a parabola.

Exercício 6.1

Dado o campo vetorial $q_x = -y^2$ e $q_y = -2xy$ no domínio:



Pede-se verificar o teorema da divergência

$$\int_\Omega \nabla\cdot q \, d\Omega = \int_\Gamma q^t n \, d\Gamma$$

Ele é na verdade o Teorema fundamental aplicado em 2 dimensões

LHS

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} -y^2 \\ -2xy \end{bmatrix} \qquad \nabla\cdot q = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 - 2x = -2x$$

$$-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 2x \, dx \, dy = -2\int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} dy = 0$$

RHS

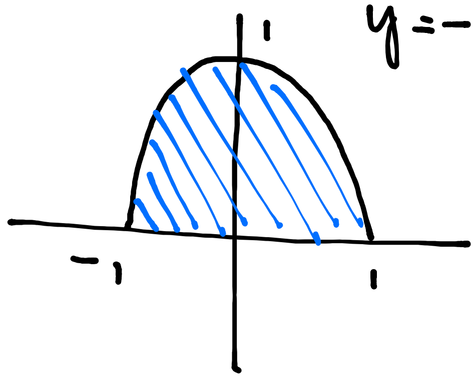
$$\int_{-1}^{1} \vec{q}^t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dx + \int_{-1}^{1} \vec{q}^t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dy + \int_{1}^{-1} \vec{q}^t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-dx) + \int_{1}^{-1} \vec{q}^t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} (-dy) =$$

$$\int_{-1}^{1} 2xy \, dx - \int_{-1}^{1} y^2 dy + \int_{1}^{-1} 2xy - \int_{1}^{-1} y^2 dy =$$

$$y\left[x^2\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[x^2\right]_{1}^{-1} - \left[\frac{y^3}{3}\right]_{1}^{-1} = 0 + \left[\frac{y^3}{3}\right]_{1}^{-1} + 0 + \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 0$$

Exercício 6.2

$$q = \begin{bmatrix} 3x^2y + y^3 \\ 3x + y^3 \end{bmatrix}$$



$y = -x^2 + 1$

$q_x = 6xy$

$q_y = 3y^2$

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{-x^2+1} (6xy + 3y^2)\, dy\, dx = \frac{32}{35}$$ (Feito via Wolfram Alpha)

$$\int_{-1}^{1} q^t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dx + \int_{1}^{-1} q^t \cdot m_n (-ds) =$$

$$\int_{+1}^{-1} (3x + y^3)\, dx + \int_{-1}^{1} q^t m_n\, ds =$$

Finite Elements Method

Element Equations

$u(x) = a_0 + a_1 x$ } Aproximation

$u_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1$

$u_2(x_2) = a_0 + a_1 x_2$ } cond. de contorno

Resolvendo temos:

$a_0 = \dfrac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1}$ $a_1 = \dfrac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}$

E substituindo na função de aprox. original Teremos:

$u(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2$

$N_1(x) = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ $N_2(x) = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

Vamos agora resolver uma

EDO com condições de contorno para entender a aplicação do método:

$$T''_x(x) = -f(x)$$

$$T''_x(x) + f(x) = 0$$

Se substituirmos a função exata $T''_x(x)$ por uma aproximação $\tilde{T}''_x(x)$ o resultado da soma não mais será zero e sim um valor que chamaremos de resíduo R.

O método dos Elementos Finitos procura tornar o Resíduo R igual a Ø se em alguns pontos do domínio através de uma função de aproximação apropriada ou igual a zero de uma forma média. Quando se tenta tornar o resíduo igual a ϕ em alguns pontos e através de uma função de aproximação polinomial, dizemos estar utilizando o método de GALERKIN.

Neste caso teremos:

$$\int_D R W_i \, dD = 0$$ onde R é a função resíduo e W_i é a função de aproximação polinomial.

No exemplo acima:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[T_x''(x) + f(x) \right] N_i(x) \, dx = 0$$

Separando e aplicando integração por partes:

$$\int_{x_1}^{x_2} T''_x(x) N_i(x) dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x) N_i(x) dx$$

$$T'_x(x) . N_i(x) \Big]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} T'_x(x) N'_i(x) dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x) N_i(x) dx$$

Para $i = 1$

$$T'_x(x_2) N_1(x_2) - T'_x(x_1) N_1(x_1)$$

Lembrando que $N_1(x_2) = 0$ e $N_2(x_1) = 1$ temos apenas

$$-T'_x(x_1)$$

Quanto ao outro termo:

$$-\int_{x_1}^{x_2} T'_x(x) . \frac{-1}{x_2 - x_1} dx = \frac{T(x_2) - T(x_1)}{x_2 - x_1}$$

A expressão fica:

$$-T'_x(x_1) + \frac{T(x_2) - T(x_1)}{x_2 - x_1} = -\int_{x_1} f(x) N_1(x)\, dx$$

Para $i=2$

$$T'_x(x_2) N_2(x_2) - T'_x(x_1) N_2(x_1)$$

Lembrando que

$N_2(x_2) = 1$, $N_2(x_1) = 0$ teremos:

$$T'_x(x_2)$$

Quanto ao termo seguinte:

$$-\int_{x_1}^{x_2} T'_x(x) \cdot \frac{1}{x_2 - x_1}\, dx = \frac{-T(x_2) + T(x_1)}{x_2 - x_1}$$

A expressão fica então:

$$T'_x(x_2) + \frac{-T(x_2) + T(x_1)}{x_2 - x_1} = -\int_{x_1}^{x_2} f(x) N_2(x)\, dx$$

Combinando as duas em forma matricial teremos:

$$\frac{1}{x_2-x_1}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\ T_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T'_x(x_1)-\int f(x)N_1(x)\,dx\\ -T'_x(x_2)-\int f(x)N_2(x)\,dx\end{bmatrix}$$

ou

$$\boxed{\frac{1}{x_2-x_1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\ T_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-T'_x(x_1)+\int_{x_1}^{x_2} f(x)N_1(x)\,dx\\ T'_x(x_2)+\int_{x_1}^{x_2} f(x)N_2(x)\,dx\end{bmatrix}}$$

Esta é a formulação para um dos elementos, devendo após ser combinada ao longo do domínio como no exemplo a seguir:

1) Suponha uma barra com $T(0,t)=40$, $T(10,t)=200$ e $f(x)=10$, $L=10$ cm.

Divida a mesma em e-

lementos de 2,5 cm e resolve a equação diferencial

$T''_x(x) = -f(x)$ pelo método dos elementos finitos.

Solução:

1º calculamos as integrais

$$\int_0^{2,5} 10 \cdot \frac{(2,5-x)}{2,5} dx = 12,5$$

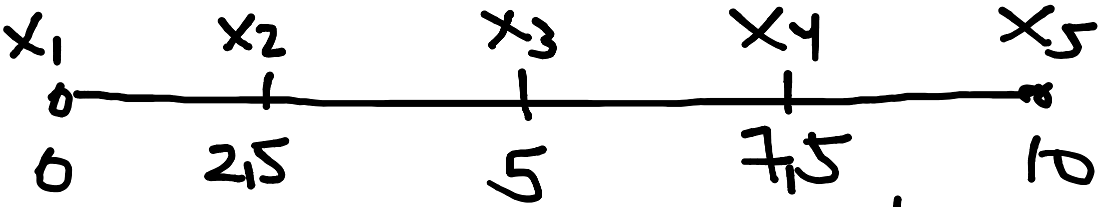
$$\int_0^{2,5} 10 \frac{(x-0)}{2,5} dx = 12,5$$

As integrais neste caso dão todas 12,5 ou seja

$$\int_5^{7,5} 10 \frac{(7,5-x)}{2,5} dx = 12,5$$

$$\int_5^{7,5} \frac{10(x-5)}{2,5}\,dx = 12,5$$ por exemplo

O domínio será dividido como no desenho abaixo



E as condições de contorno implicam que:

$T(x_1) = T(0) = 40$ e

$T(x_2) = T(10) = 200$

Observe que $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = x_5 - x_4 = 2,5$ e $\frac{1}{x_2 - x_1} = 0,4$

Teremos para os nós:

- 1 → $0{,}4T_1 - 0{,}4T_2 = -T_1' + 12{,}5$
- 2 → $-0{,}4T_1 + 0{,}4T_2 = T_2' + 12{,}5$
- 2 → $0{,}4T_2 - 0{,}4T_3 = -T_2' + 12{,}5$
- 3 → $-0{,}4T_2 + 0{,}4T_3 = T_3' + 12{,}5$
- 3 → $0{,}4T_3 - 0{,}4T_4 = -T_3' + 12{,}5$
- 4 → $-0{,}4T_3 + 0{,}4T_4 = T_4' + 12{,}5$
- 4 → $0{,}4T_4 - 0{,}4T_5 = -T_4' + 12{,}5$
- 5 → $-0{,}4T_4 + 0{,}4T_5 = T_5' + 12{,}5$

Juntando as equações do mesmo nó

$$0{,}4T_1 - 0{,}4T_2 = -T_1' + 12{,}5$$

$$-0{,}4T_1 + 0{,}8T_2 - 0{,}4T_3 = +25$$

$$-0{,}4T_2 + 0{,}8T_3 - 0{,}4T_4 = 25$$
$$-0{,}4T_3 + 0.8T_4 - 0{,}4T_5 = 25$$
$$-0{,}4T_4 + 0{,}4T_5 = T_5' + 12{,}5$$

Lembrando que $T_1 = 40$ e $T_5 = 200$

$$T_1' - 0{,}4T_2 = -3{,}5$$
$$0{,}8T_2 - 0{,}4T_3 = 41$$
$$-0{,}4T_2 + 0{,}8T_3 - 0{,}4T_4 = 25$$
$$-0{,}4T_3 + 0{,}8T_4 = 105$$
$$-0{,}4T_4 - T_5' = -67.5$$

Montando em forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & -0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}4 & +0{,}8 & -0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}4 & +0{,}8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1' \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3{,}5 \\ 41 \\ 25 \\ 105 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0{,}4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_5' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -67{,}5 \end{bmatrix}$$

O problema passa a ser agora a solução de um sistema de equações lineares, a solução:

$T_1' = 66$

$T_2 = 173{,}5$

$T_3 = 245$

$T_4 = 253{,}75$

$T_5' = -34$

Automatização do processo de montagem

Exemplo em 1D

Equação diferencial: $T'' = -10$

Relembrando:

$$T(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1}}_{N(x)} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

$[N_1(x) \quad N_2(x)] \rightarrow$ Shape Functions

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \qquad N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$N_1(x_1) = 1 \qquad N_2(x_1) = 0$$

$$N_1(x_2) = 0 \qquad N_2(x_2) = 1$$

$$N_1' = \frac{-1}{x_2 - x_1} \qquad N_2' = \frac{1}{x_2 - x_1}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} N_i T'' = -10 \int_{x_1}^{x_2} N_i$$

$$-\int_{x_1}^{x_2} N_i' T' + \left[N_i T' \right]_{x_1}^{x_2} = -10 \int_{x_1}^{x_2} N_i$$

$$-N_i' [T_2 - T_1] + \left[N_i T' \right]_{x_1}^{x_2} = -10 \int_{x_1}^{x_2} N_i$$

Para $i=1$

$$-N_1'[T_2-T_1]+[N_1(x_2)T'(x_2)-N_1(x_1)T'(x_1)]$$

$$=-10\int_{x_1}^{x_2} N_1$$

$$\frac{T_2-T_1}{x_2-x_1}-T'_{x_1}=5(x_1-x_2)$$

Para $i=2$

$$-N_2'[T_2-T_1]+[N_2(x_2)T'(x_2)-N_2(x_2)T'(x_2)]$$

$$=-10\int_{x_1}^{x_2} N_2$$

$$\frac{-T_2+T_1}{x_2-x_1}+T'_{x_2}=5(x_1-x_2)$$

Combinando

$$\frac{1}{x_2-x_1}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\ T_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T_1'\\ -T_2'\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Fazendo $\boxed{\frac{1}{x_2-x_1}=K}$

temos como equação do elemento:

$$\boxed{\begin{bmatrix} -K & K \\ K & -K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1' \\ -T_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$$

Sabendo que no nosso domínio $x_1 - x_2 = -2{,}5$ (sempre, pois os elementos são do mesmo tamanho)

e $\dfrac{1}{x_2 - x_1} = 0{,}4$

Temos a forma final da equação do elemento:

$$\begin{bmatrix} -0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & -0{,}4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1' \\ -T_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12{,}5 \\ -12{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} -0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & -0{,}4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1' - 12{,}5 \\ -T_2' - 12{,}5 \end{bmatrix}} \rightarrow \text{Equação que define o elemento padrão}$$

Vamos agora finalmente para o processo de montagem

1º devemos numerar os elementos e criar uma tabela de correspondência dos nós

Tabela de correspondência dos nós

ELEMENTO	LOCAL	GLOBAL
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3
3	1	3
	2	4
4	1	4
	2	5

Elemento 1

$$\begin{bmatrix} -0{,}4 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & -0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1' - 12{,}5 \\ -T_2' - 12{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & -0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1' - 12{,}5 \\ -T_2' - 12{,}5 \end{bmatrix}$$

Elemento 2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}4 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & -0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_2' - 12{,}5 \\ -T_3' - 12{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lembrar que devemos neste elemento substituir 1 por 2 e 2 por 3

$$\begin{bmatrix} -0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & -0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1' - 12{,}5 \\ -T_2' - 12{,}5 \end{bmatrix}$$

Elemento 3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}4 & +0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & -0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_3' - 12{,}5 \\ -T_4' - 12{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lembrar que devemos neste elemento substituir 1 por 3 e 2 por 4

$$\begin{bmatrix} -0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & -0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1' - 12{,}5 \\ -T_2' - 12{,}5 \end{bmatrix}$$

Elemento 4

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}4 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & +0{,}4 & -0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ +T_4' - 12{,}5 \\ -T_5' - 12{,}5 \end{bmatrix}$$

Lembrar que devemos neste elemento substituir 1 por 4 e 2 por 5

$$\begin{bmatrix} -0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & -0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1' - 12{,}5 \\ -T_2' - 12{,}5 \end{bmatrix}$$

Somando as matrizes globais dos elementos:

$$\begin{bmatrix} -0{,}4 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & -0{,}8 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & -0{,}8 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & -0{,}8 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & -0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1' - 12{,}5 \\ -25 \\ -25 \\ -25 \\ -T_5' - 12{,}5 \end{bmatrix}$$

Aplicando as condições de contorno

$$\begin{bmatrix} -0{,}4 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & -0{,}8 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & -0{,}8 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & -0{,}8 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & -0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1' - 12{,}5 \\ -25 \\ -25 \\ -25 \\ -T_5' - 12{,}5 \end{bmatrix}$$

Temos agora cinco variáveis e cinco equações

Reagrupando

$$\begin{bmatrix} -1 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}8 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & -0{,}8 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & -0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1' \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +3{,}5 \\ -41 \\ -25 \\ -105 \\ +67{,}5 \end{bmatrix}$$

Resolvendo temos:

$T_1' = 66$ $T_2 = 173{,}75$ $T_3 = 245$ $T_4 = 253{,}75$ $T_5' = -34$

O ensinamento básico deste exemplo é a necessidade de:

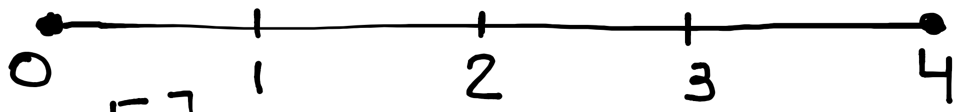
1º) Montar as equações constituintes dos elementos da forma o mais padronizada possível

2º) Montar uma tabela de conversão dos elementos da notação local para a notação global

3º) Transferir as equações constituintes dos elementos da rotação local para a matriz global. Esta matriz por definição será uma matriz GRANDE e esparsa. Sua coluna x em $Ax=B$ será tão comprida quanto a quantidade de pontos na solução!

Neste caso foram apenas 5 nós em uma malha por menor que ela seja serão 16, 25 ou muito mais

Exemplo do Chapra:
Matriz de conexões



$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \left[\sum_{I=1}^{nel} \mathbf{N}^I \mathbf{L}^I \right]$$

$$\mathbf{N}^1 \mathbf{L}^1 = [N_1^1 \; N_2^1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [N_1^1 \;\; N_2^1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$$

$$\mathbf{N}^2\mathbf{L}^2 = \begin{bmatrix} N_1^2 & N_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & N_1^2 & N_2^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}^3\mathbf{L}^3 = \begin{bmatrix} N_1^3 & N_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_1^3 & N_2^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}^4\mathbf{L}^4 = \begin{bmatrix} N_1^4 & N_2^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_1^4 & N_2^4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\sum_{I=1}^{\mathrm{nel}} \mathbf{N}^I\mathbf{L}^I\right] = \begin{bmatrix} N_1^1 & N_2^1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & N_1^2 & N_2^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_1^3 & N_2^3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_1^4 & N_2^4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1^1 & N_2^1 + N_1^2 & N_2^2 + N_1^3 & N_2^3 + N_1^4 & N_2^4 \end{bmatrix}$$

$$\theta^h_{(x)} = \mathbf{N}\, d$$

Finite Elements Method

Element Equations

$$u(x) = a_0 + a_1 x \Big\} \text{Aproximation}$$

$$\left.\begin{aligned} u_1(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 \\ u_2(x_2) &= a_0 + a_1 x_2 \end{aligned}\right\} \text{cond. de contorno}$$

Resolvendo temos:

$$a_0 = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1} \quad a_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}$$

E substituindo na função da aprox. original teremos:

$$u(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2$$

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Vamos agora resolver uma

EDO com condições de contorno para entender a aplicação do método:

$$T''_x(x) = -f(x)$$

$$T''_x(x) + f(x) = 0$$

Se substituirmos a função exata $T''_x(x)$ por uma aproximação $\tilde{T}''_x(x)$ o resultado da soma não mais será zero e sim um valor que chamaremos de resíduo R.

O método dos Elementos Finitos procura tornar o Resíduo R igual a $\emptyset$ se em alguns pontos do domínio através de uma função de aproximação apropriada ou igual a zero de uma forma média. Quando ao tentar tornar o resíduo igual a ϕ em alguns pontos e através de uma função de aproximação polinomial, dizemos estar utilizando o método de GALERKIN.

Neste caso faremos:

$$\int_D R W_i \, dD = 0$$

onde R é a função resíduo e W_i é a função de aproximação polinomial.

No exemplo acima:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[T''_x(x) + f(x) \right] N_i(x) \, dx = 0$$

Separando e aplicando integração por partes:

$$\int_{x_1}^{x_2} T_x''(x)\,N_i(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,N_i(x)\,dx$$

$$T_x'(x).N_i(x)\Big]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} T_x'(x)\,N_i'(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,N_i(x)\,dx$$

Para $i=1$

$$T_x'(x_2)N_1(x_2) - T_x'(x_1)N_1(x_1)$$

Lembrando que $N_1(x_2)=0$ e $N_2(x_1)=1$ temos apenas

$$-T_x'(x_1)$$

Quanto ao outro termo:

$$-\int_{x_1}^{x_2} T_x'(x).\frac{-1}{x_2-x_1}\,dx = \frac{T(x_2)-T(x_1)}{x_2-x_1}$$

A expressão fica:

$$\int^{x_2}$$

$$-T_x'(x_1) + \frac{T(x_2)-T(x_1)}{x_2-x_1} = -\int_{x_1} f(x)\, N_1(x)\, dx$$

Para $i=2$

$$T_x'(x_2)N_2(x_2) - T_x'(x_1)N_2(x_1)$$

Lembrando que

$N_2(x_2)=1$, $N_2(x_1)=0$ teremos:

$$T_x'(x_2)$$

Quanto ao termo seguinte:

$$-\int_{x_1}^{x_2} T_x'(x) \cdot \frac{1}{x_2-x_1}\, dx = \frac{-T(x_2)+T(x_1)}{x_2-x_1}$$

A expressão fica então:

$$T_x'(x_2) + \frac{-T(x_2)+T(x_1)}{x_2-x_1} = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, N_2(x)\, dx$$

Combinando as duas em forma matricial temos:

$$\frac{1}{x_2-x_1}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\ T_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_x(x_1) - \int f(x)N_1(x)\,dx \\ -T'_x(x_2) - \int f(x) N_2(x)\,dx\end{bmatrix}$$

ou

$$\boxed{\frac{1}{x_2-x_1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\ T_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T'_x(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(x)N_1(x)\,dx \\ T'_x(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_2(x)\,dx\end{bmatrix}}$$

Esta é a formulação para um dos elementos, devendo após ser combinada ao longo do domínio como no exemplo a seguir:

1) Suponha uma barra com $T(0,t) = 40$, $T(10,t) = 200$ e $f(x) = 10$, $L = 10$ cm.

Divida a mesma em e-

lementos de 2,5 cm e resol-
va a equação diferencial
$T''_x(x) = -f(x)$ pelo método dos
elementos finitos.

Solução:
1º calculamos as integrais

$$\int_0^{2,5} 10 \cdot \frac{(2,5-x)}{2,5} dx = 12,5$$

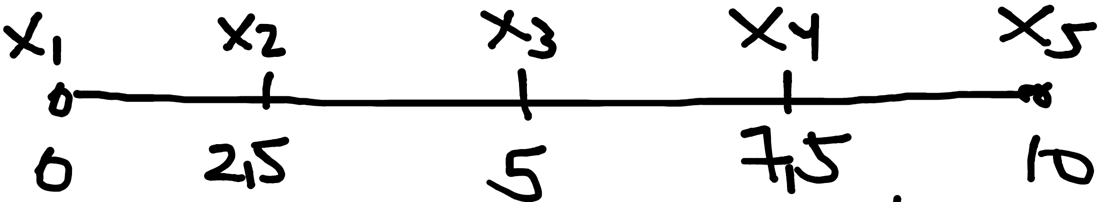
$$\int_0^{2,5} 10 \frac{(x-0)}{2,5} dx = 12,5$$

As integrais neste caso dão
todas 12,5 ou seja

$$\int_5^{7,5} 10 \frac{(7,5-x)}{2,5} dx = 12,5$$

$$\int_{5}^{7,5} \frac{10(x-5)}{2,5}\,dx = 12,5$$ por exemplo

O domínio será dividido como no desenho abaixo



E as condições de contorno implicam que:

$T(x_1) = T(0) = 40$ e

$T(x_2) = T(10) = 200$

Observe que $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$
$= x_5 - x_4 = 2,5$ e $\frac{1}{x_2 - x_1} = 0,4$

Teremos para os nós:

• 1 → $0{,}4T_1 - 0{,}4T_2 = -T_1' + 12{,}5$

• 2 → $-0{,}4T_1 + 0{,}4T_2 = T_2' + 12{,}5$

• 2 → $0{,}4T_2 - 0{,}4T_3 = -T_2' + 12{,}5$

• 3 → $-0{,}4T_2 + 0{,}4T_3 = T_3' + 12{,}5$

• 3 → $0{,}4T_3 - 0{,}4T_4 = -T_3' + 12{,}5$

• 4 → $-0{,}4T_3 + 0{,}4T_4 = T_4' + 12{,}5$

• 4 → $0{,}4T_4 - 0{,}4T_5 = -T_4' + 12{,}5$

• 5 → $-0{,}4T_4 + 0{,}4T_5 = T_5' + 12{,}5$

Juntando as equações do mesmo nó

$$0{,}4T_1 - 0{,}4T_2 = -T_1' + 12{,}5$$

$$-0{,}4T_1 + 0{,}8T_2 - 0{,}4T_3 = +25$$

$$-0{,}4T_2 + 0{,}8T_3 - 0{,}4T_4 = 25$$
$$-0{,}4T_3 + 0.8T_4 - 0{,}4T_5 = 25$$
$$-0{,}4T_4 + 0{,}4T_5 = T_5' + 12{,}5$$

Lembrando que $T_1 = 40$ e $T_5 = 200$

$$T_1' - 0{,}4T_2 = -3{,}5$$

$$0{,}8T_2 - 0{,}4T_3 = 41$$

$$-0{,}4T_2 + 0{,}8T_3 - 0{,}4T_4 = 25$$

$$-0{,}4T_3 + 0{,}8T_4 = 105$$

$$-0{,}4T_4 - T_5' = -67.5$$

Montando em forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & -0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}4 & +0{,}8 & -0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}4 & +0{,}8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1' \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3{,}5 \\ 41 \\ 25 \\ 105 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2{,}4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_5' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -67{,}5 \end{bmatrix}$$

O problema passa a ser agora a solução de um sistema de equações lineares, a solução:

$T_1' = 66$

$T_2 = 173{,}5$

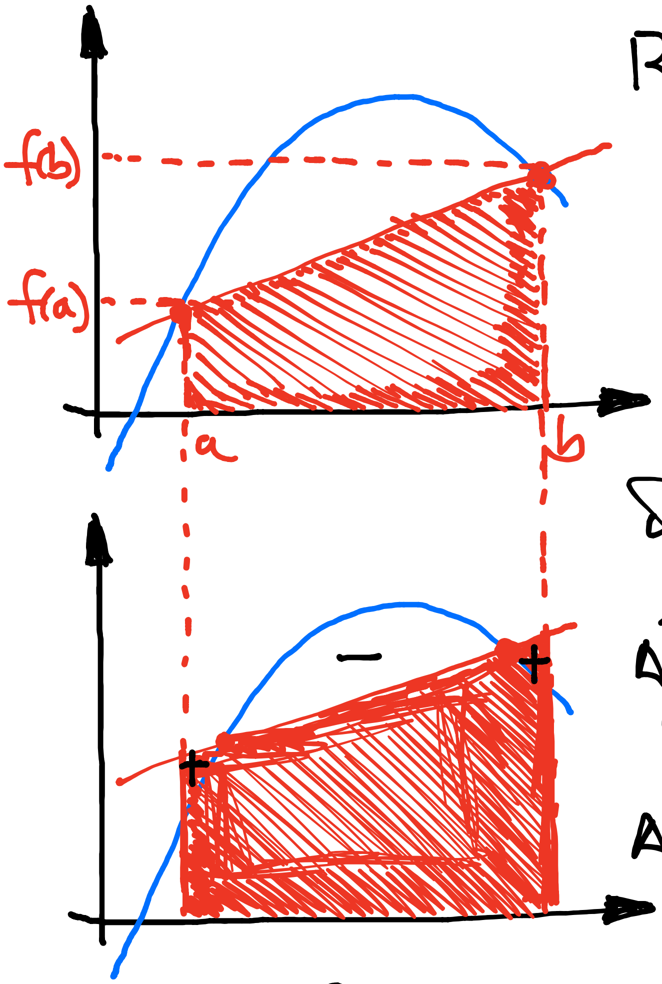
$T_3 = 245$

$T_4 = 253{,}75$

$T_5' = -34$

Regra do Trapézio

$$\frac{[f(a)+f(b)]}{2}(b-a)$$



Quadratura Gaussiana

Área em excesso compensa área a menos

Aumentamos a precisão da integração

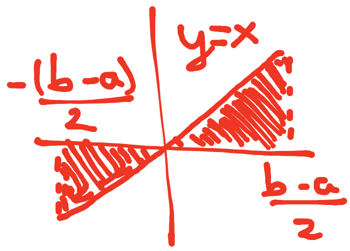
$$I = c_0 f(a) + c_1 f(b)$$

$y = 1$

$$c_0 + c_1 = \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} 1\,dx = 2$$

$y = x$

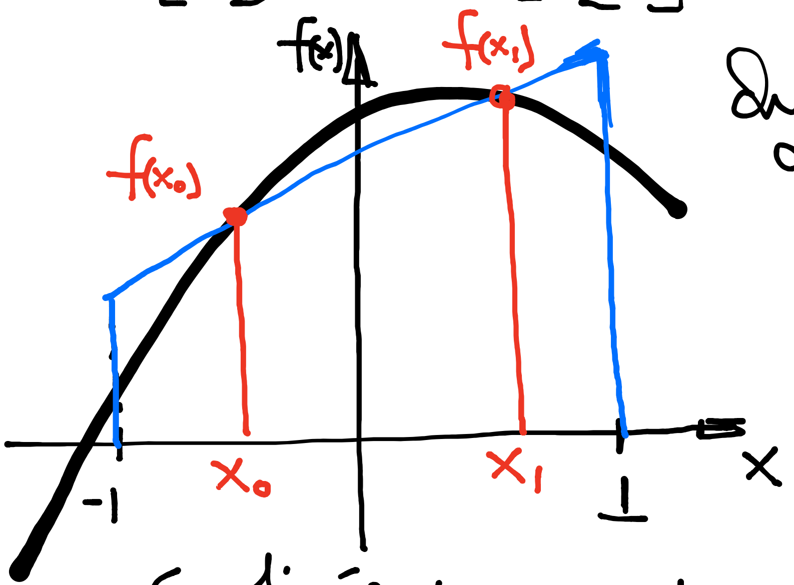
$$-c_0\frac{b-a}{2} + c_1\frac{b-a}{2} = \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} x\,dx = 0$$



$$\boxed{\begin{aligned} &c_0 + c_1 = b - a \\ &-c_0 \frac{b-a}{2} + c_1 \frac{b-a}{2} = 0 \end{aligned}}$$

$$c_0 = c_1 = \frac{b-a}{2}$$

$$I = \left[\frac{b-a}{2}\right] f(a) + \left[\frac{b-a}{2}\right] f(b)$$



Quatro valores desconhecidos

Condições:

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2$$

$$c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1 = 2$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0$$

$$c_0 \cdot x_0 + c_1 \cdot x_1 = 0$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = 2/3$$
$$c_0 . x_0^2 + c_1 x_1^2 = 2/3$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$
$$c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 = 0$$

$$c_0 . 1 + c_1 . 1 = 2$$
$$c_0 . x_0 + c_1 . x_1 = 0$$
$$c_0 . x_0^2 + c_1 x_1^2 = 2/3$$
$$c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 = 0$$

A idéia é que os coeficientes devem ajustar perfeitamente uma const., uma reta, uma parábola e uma cúbica no mesmo intervalo

Resolvendo:

$$c_0 = c_1 = 1$$
$$x_0 = -1/\sqrt{3} = -0,5773503\ldots$$
$$x_1 = 1/\sqrt{3} = 0,5773503$$

Isto produz a fórmula de Gauss Legendre

$$I \cong f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3})$$

Deve-se atentar que no momento da aplicação desta fórmula os intervalos de integração devem ser ajustados para -1 e 1. Fazemos isto através de uma transformação de variável x

$$\begin{vmatrix} x & x_d & 1 \\ a & -1 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{b-a}{2}$$

$$x - x_0 = m(x_d - x_{d_0})$$

$$x - b = \frac{b-a}{2}(x_d - 1)$$

$$\boxed{dx = \frac{b-a}{2} \quad x = \frac{b-a}{2}(x_d-1) + b}$$

Exemplo

Calcular $\displaystyle\int_0^{0,8} (0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5)\,dx$

Trocando a variável para a integração de -1 a +1

$$\begin{vmatrix} x & x_d & 1 \\ a & -1 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{b-a}{2}$$

$$x - x_0 = m(x_d - x_{d_0})$$

$$x - b = \frac{b-a}{2}(x_d - 1)$$

$b = 0,8$

$a = 0$

$x = 0,4(x_d - 1) + 0,8$

$x = 0,4x_d + 0,4$

$$x = \frac{b-a}{2}(x_d-1) + b$$

$$dx = \frac{b-a}{2}$$

$$\int_0^{0,8} \left(0,2+25x-200x^2+675x^3 - 900x^4+400x^5\right) dx$$

$$\int_{-1}^{1} \left[0,2+25(0,4x_d+0,4)-200(0,4x_d+0,4)^2 + 675(0,4x_d+0,4)^3-900(0,4x_d+0,4)^4 + 400(0,4x_d+0,4)^5\right] 0,4\, dx_d$$

$$g(x_d)=\left[0,2+25(0,4x_d+0,4)-200(0,4x_d+0,4)^2 + 675(0,4x_d+0,4)^3-900(0,4x_d+0,4)^4 + 400(0,4x_d+0,4)^5\right] 0,4$$

$$I = g\left(-1/\sqrt{3}\right)+g\left(1/\sqrt{3}\right)$$

$$I = 0,516741 + 1,305837$$

$$I = 1,822$$

Exemplo com 6 coeficientes

$$c_0 x_0^0 + c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 = 2 \longrightarrow \int_{-1}^{1} 1\, dx$$

$$c_0 x_0^1 + c_1 x_1^1 + c_2 x_2^1 = 0 \longrightarrow \int_{-1}^{1} x\, dx$$

$$c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = 2/3 \longrightarrow \int_{-1}^{1} x^2 dx$$

$$c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0 \longrightarrow \int_{-1}^{1} x^3 dx$$

$$c_0 x_0^4 + c_1 x_1^4 + c_2 x_2^4 = 2/5 \longrightarrow \int_{-1}^{1} x^4 dx$$

$$c_0 x_0^5 + c_1 x_1^3 + c_2 x_2^5 = 0 \longrightarrow \int_{-1}^{1} x^5 dx$$

$C_0 = 5/9 \qquad C_1 = 8/9 \qquad C_2 = 5/9$

$x_0 = -\sqrt{15}/5 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = \sqrt{15}/5$

Resolução via Matlab

syms C_0 C_1 C_2 X_0 X_1 X_2

solve('$C_0+C_1+C_2=2$', etc...)

Resolução via Solver

Utilizar no Premium Solver:

* GRG Não Linear
☑ Multistart search

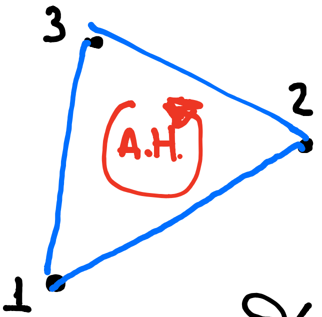
} Conv. Mínimo

☑ Topographic search } Aumenta a velocidade

☑ Require Bounds } Limita a busca facilitando os cálculos

Elementos em 2D

Elementos Triangulares



$$\theta(x,y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$$

$$[1, x, y]\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$$

$$\theta(x,y) = P(x,y)\cdot\alpha$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{bmatrix}}_{d} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}}_{M}\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}}_{\alpha}$$

coeficientes a determinar

Valores dados numericos (contorno) ou obtidos por continuidade

$$\theta(x,y) = P(x,y)\alpha$$

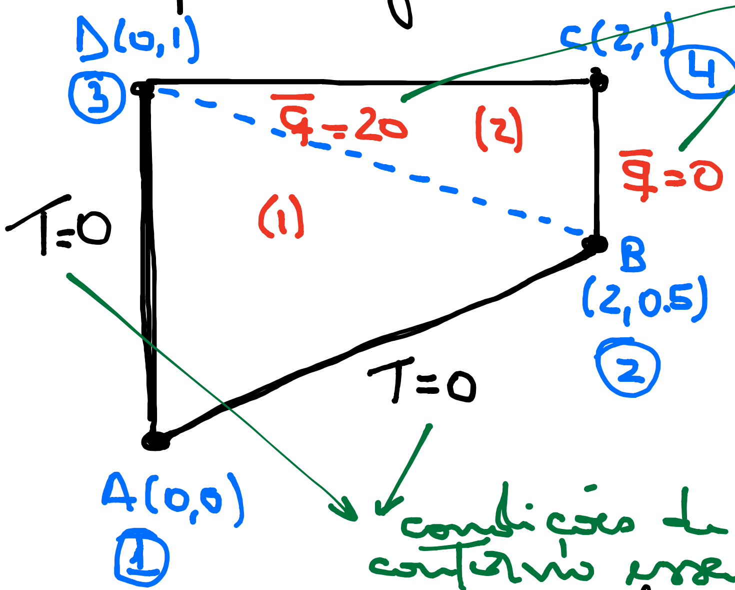
$$\alpha = M^{-1}d$$

$$\theta(x,y) = \underbrace{\underset{1\times 3}{P(x,y)}\,\underset{3\times 3}{M^{-1}}}_{\text{Shape Functions}}\,d$$

$$[N_1 \quad N_2 \quad N_3]$$

Exemplo Belytschko 8.1

condições de contorno naturais



Placa e rede de nós (mesh) mostrados ao lado

condições de contorno essenciais

Condutividade: Isotrópica (isto é não há preferência por uma das direções)

$$\mathbf{D} = k\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad k = 5\ W/^{\circ}C$$

(°C) $T=0$ → temperatura prescrita ao longo dos bordos (condição de contorno)

$\bar{q} = 0$ e $\bar{q} = 20$ W/m → fluxo prescrito ao longo dos bordos (condição de contorno)

$s = 6\ W/m^2$ → fonte de calor constante aplicada ao longo da placa.

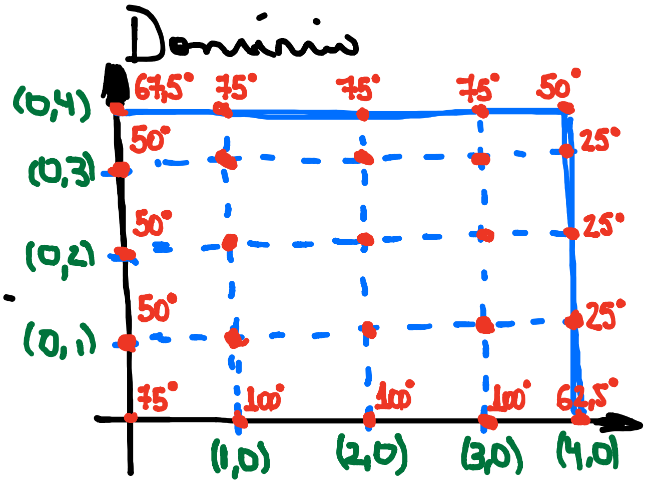
Este problema será resolvido depois

Equação do Potencial (ou de Laplace)

$$T_{xx} + T_{yy} = 0$$

ou em notação matricial

$$\nabla^2 T = 0$$



Vamos primeiro montar a forma fraca:

$$W \nabla^2 T = 0$$

$$\int_\Omega W \nabla^2 T = 0$$

$$-\int_\Omega \nabla W \, \nabla T \, d\Omega + \int_\Gamma W \, \nabla T \, d\Gamma = 0$$

domínio

fronteira do domínio

Vamos agora trabalhar com os gradientes de W (funções de shape) e de T (função solução) $\boxed{\text{Qual a sequência de passos em 1D?}}$

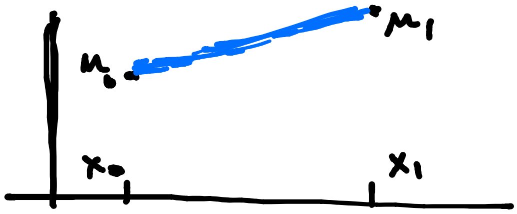
$$u(x) = N_0(x)\, u_0 + N_1(x)\, u_1$$

Valores de contorno da função

Funções Shape

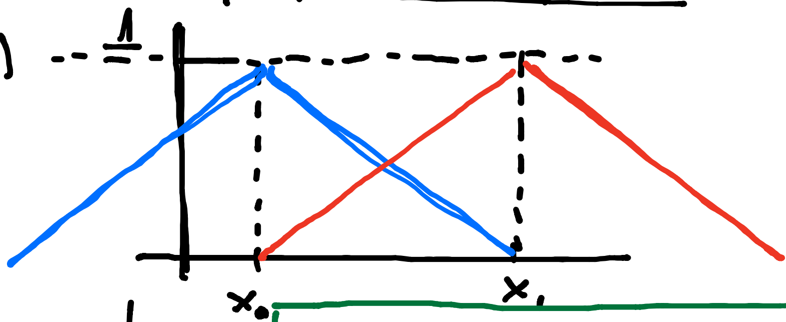
Função cujo valor desejamos calcular (função solução)

Lembrar como foram desenv. N_0 e N_1



— $-\dfrac{x-x_1}{x_1-x_0} = N_0(x)$

— $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = N_1(x)$



Combinando os dois: $\boxed{u_0 N_0(x) + u_1 N_1(x) = u(x)}$

Façamos uma analogia com um sistema 2D

Neste caso teremos variáveis independentes x e y

Supondo que desejamos calcular a Temperatura, teremos $T(x,y)$. Sendo assim:

$$T(x,y) = N_0(x,y)T_0 + N_1(x,y)T_1 + N_2(x,y)T_2$$

Supondo funções de shape que serão 1 em um dos nós e zero nos demais, sendo assim podemos dizer:

$N_0(x_0;y_0)=1$	$N_1(x_0;y_0)=0$	$N_2(x_0;y_0)=0$
$N_0(x_1;y_1)=0$	$N_1(x_1;y_1)=1$	$N_2(x_1;y_1)=0$
$N_0(x_2;y_2)=0$	$N_1(x_2;y_2)=0$	$N_2(x_2;y_2)=1$

Assim como em 1D poderíamos ter obtido $N_0(x)$ e $N_1(x)$ através de uma operação matricial:

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$u(x) = [1 \quad x] \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = [N_0(x) \quad N_1(x)] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}$$

Em 2D:

$$T(x,y) = [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

$$T(x,y) = \underset{1\times 3}{P(x,y)} \cdot \underset{3\times 3}{M^{-1}} \cdot \underset{3\times 1}{T_i}$$

$$T(x,y) = [N_0(x,y) \quad N_1(x,y) \quad N_2(x,y)] \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

$$N_1(x,y) = \frac{1}{2A}\left[x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_2 - x_1)y\right]$$

$$N_2(x,y) = \frac{1}{2A}\left[x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_2 - x_1)y\right]$$

$$N_3(x,y) = \frac{1}{2A}\left[x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\right]$$

$$2A = \det(M)$$

Expressando o sistema em notação matricial:

$$T(x,y) = P(x,y) \cdot M^{-1} \vec{T}$$

valores de contorno

geometria

variáveis independentes

Retornando ao problema original:

$$-\int_{\Omega}[\nabla N]^{t}\nabla T\,d\Omega+\int_{\Gamma}N\nabla T\,d\Gamma=0$$

Observe que trocamos W por N nas funções shape (de aproximações) para seguir com a notação da seção anterior.

Vamos agora pensar em termos matriciais:

$$\nabla N=\begin{bmatrix}\partial N/\partial x\\ \partial N/\partial y\end{bmatrix}\qquad N(x,y)=P(x,y)\,M^{-1}$$

$$P(x,y)=[1\;\;x\;\;y]$$

$$M=\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}$$

$$\nabla T=\begin{bmatrix}\partial T/\partial x\\ \partial T/\partial y\end{bmatrix}\qquad T(x,y)=N(x,y)\,M^{-1}\,\bar{T}$$

$$\bar{T}=\begin{bmatrix}T_1\\ T_2\\ T_3\end{bmatrix}$$

Pelo exposto acima podemos em princípio calcular cada uma das matrizes e cada um dos produtos descritos na integração e montar a equação de formação do elemento.

Finite Elements Method

Element Equations

$$u(x) = a_0 + a_1 x \Big\} \text{Aproximation}$$

$$\left.\begin{aligned} u_1(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 \\ u_2(x_2) &= a_0 + a_1 x_2 \end{aligned}\right] \text{cond. de contorno}$$

Resolvendo temos:

$$a_0 = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1} \quad a_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}$$

E substituindo na função de aprox. original teremos:

$$u(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2$$

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Vamos agora resolver uma

EDO com condições de contorno para entender a aplicação do método:

$$T''_x(x) = -f(x)$$

$$T''_x(x) + f(x) = 0$$

Se substituirmos a função exata $T''_x(x)$ por uma aproximação $\tilde{T}''_x(x)$ o resultado da soma não mais será zero e sim um valor que chamaremos de resíduo R.

O método dos Elementos Finitos procura tornar o Resíduo R igual a $\emptyset$ ou em alguns pontos do domínio através de uma função de aproximação apropriada ou igual a zero de uma forma média. Quando de tentar tornar o resíduo igual a Ø em alguns pontos e através de uma função de aproximação polinomial, dizemos estar utilizando o método de GALERKIN.

Neste caso temos:

$$\int_{D} R W_i \, dD = 0$$ onde R é a função resíduo e W_i é a função de aproximação polinomial.

No exemplo acima:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[T_x''(x) + f(x) \right] N_i(x) \, dx = 0$$

Separando e aplicando integração por partes:

$$\int_{x_1}^{x_2} T_x''(x)\, N_i(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, N_i(x)\, dx$$

$$T_x'(x) . N_i(x)\Big]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} T_x'(x)\, N_i'(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x) N_i(x)\, dx$$

Para $i=1$

$$T_x'(x_2) N_1(x_2) - T_x'(x_1) N_1(x_1)$$

Lembrando que $N_1(x_2)=0$ e $N_2(x_1)=1$ teremos apenas

$$-T_x'(x_1)$$

Quanto ao outro termo:

$$-\int_{x_1}^{x_2} T_x'(x) . \frac{-1}{x_2-x_1}\, dx = \frac{T(x_2)-T(x_1)}{x_2-x_1}$$

A expressão fica:

$$-T'_x(x_1) + \frac{T(x_2) - T(x_1)}{x_2 - x_1} = -\int_{x_1} f(x)\, N_1(x)\, dx$$

Para $i=2$

$$T'_x(x_2)N_2(x_2) - T'_x(x_1)N_2(x_1)$$

Lembrando que

$N_2(x_2)=1$, $N_2(x_1)=0$ teremos:

$$T'_x(x_2)$$

Quanto ao termo seguinte:

$$-\int_{x_1}^{x_2} T'_x(x) \cdot \frac{1}{x_2 - x_1}\, dx = \frac{-T(x_2) + T(x_1)}{x_2 - x_1}$$

A expressão fica então:

$$T'_x(x_2) + \frac{-T(x_2) + T(x_1)}{x_2 - x_1} = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, N_2(x)\, dx$$

Combinando as duas em forma matricial teremos:

$$\frac{1}{x_2-x_1}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\ T_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T'_x(x_1)-\int f(x)N_1(x)\,dx\\ -T'_x(x_2)-\int f(x)N_2(x)\,dx\end{bmatrix}$$

ou

$$\boxed{\frac{1}{x_2-x_1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\ T_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-T'_x(x_1)+\int_{x_1}^{x_2} f(x)N_1(x)\,dx\\ T'_x(x_2)+\int_{x_1}^{x_2} f(x)N_2(x)\,dx\end{bmatrix}}$$

Esta é a formulação para um dos elementos, devendo agora ser combinada ao longo do domínio como no exemplo a seguir:

1) Supondo uma barra com $T(0,t)=40$, $T(10,t)=200$ e $f(x)=10$, $L=10$ cm.

Divida a mesma em e-

lementos de 2,5 cm e resol-
va a equação diferencial
$T''_x(x) = -f(x)$ pelo método dos
elementos finitos.

Solução:
1º calculamos as integrais

$$\int_0^{2,5} 10 \cdot \frac{(2,5-x)}{2,5} dx = 12,5$$

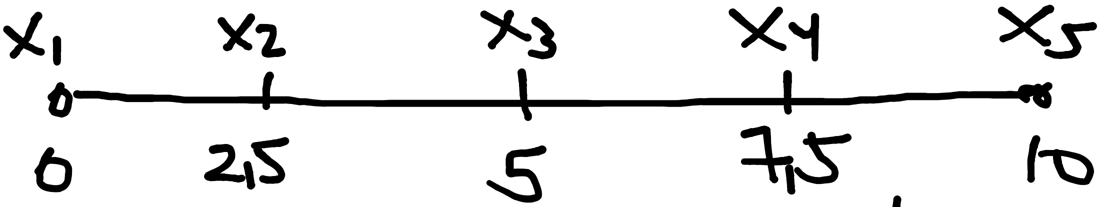
$$\int_0^{2,5} 10 \frac{(x-0)}{2,5} dx = 12,5$$

As integrais neste caso dão
todas 12,5 ou seja

$$\int_5^{7,5} 10 \frac{(7,5-x)}{2,5} dx = 12,5$$

$$\int_{5}^{7{,}5} \frac{10(x-5)}{2{,}5}\,dx = 12{,}5$$ por exemplo

O domínio será dividido como no desenho abaixo



E as condições de contorno implicam que:

$T(x_1) = T(0) = 40$ e

$T(x_2) = T(10) = 200$

Observe que $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$
$= x_5 - x_4 = 2{,}5$ e $\dfrac{1}{x_2 - x_1} = 0{,}4$

Teremos para os nós:

• 1 → $0{,}4T_1 - 0{,}4T_2 = -T_1' + 12{,}5$

• 2 → $-0{,}4T_1 + 0{,}4T_2 = T_2' + 12{,}5$

• 2 → $0{,}4T_2 - 0{,}4T_3 = -T_2' + 12{,}5$

• 3 → $-0{,}4T_2 + 0{,}4T_3 = T_3' + 12{,}5$

• 3 → $0{,}4T_3 - 0{,}4T_4 = -T_3' + 12{,}5$

• 4 → $-0{,}4T_3 + 0{,}4T_4 = T_4' + 12{,}5$

• 4 → $0{,}4T_4 - 0{,}4T_5 = -T_4' + 12{,}5$

• 5 → $-0{,}4T_4 + 0{,}4T_5 = T_5' + 12{,}5$

Juntando as equações do mesmo nó

$$0{,}4T_1 - 0{,}4T_2 = -T_1' + 12{,}5$$

$$-0{,}4T_1 + 0{,}8T_2 - 0{,}4T_3 = +25$$

$$-0,4T_2 + 0,8T_3 - 0,4T_4 = 25$$
$$-0,4T_3 + 0.8T_4 - 0,4T_5 = 25$$
$$-0,4T_4 + 0,4T_5 = T_5' + 12,5$$

Lembrando que $T_1 = 40$ e $T_5 = 200$

$$T_1' - 0,4T_2 = -3,5$$
$$0,8T_2 - 0,4T_3 = 41$$
$$-0,4T_2 + 0,8T_3 - 0,4T_4 = 25$$
$$-0,4T_3 + 0,8T_4 = 105$$
$$-0,4T_4 - T_5' = -67.5$$

Montando em forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & -0,4 & 0 & 0 \\ 0 & -0,4 & +0,8 & -0,4 & 0 \\ 0 & 0 & -0,4 & +0,8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1' \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,5 \\ 41 \\ 25 \\ 105 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2,4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_5' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -67,5 \end{bmatrix}$$

O problema passa a ser agora a solução de um sistema de equações lineares, da solução:

$T_1' = 66$

$T_2 = 173,5$

$T_3 = 245$

$T_4 = 253,75$

$T_5' = -34$

Elementos Finitos Forma Forte e Fraca Multidimensional

$$\vec{q} = q_x \vec{i} + q_y \vec{j}$$ PADRÃO

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}$$ MATRICIAL

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO DE UM VETOR

+ CONVENIENTE P/ ELEMENTOS FINITOS

Produto Escalar

$$\vec{q} \cdot \vec{r} = q_x r_x + q_y r_y$$

$$\mathbf{q}^t \mathbf{r} = \begin{bmatrix} q_x & q_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}^t \mathbf{r} = \mathbf{r}^t \mathbf{q} = q_x r_x + q_y r_y$$

Gradiente

$$\vec{\nabla} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) = \nabla$$ operador "grad"

$$\vec{\nabla}\theta = \left(\vec{i}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) \Rightarrow$$ direção de máxima variação de um campo

$\Downarrow$

Mais aplicações do operador GRAD a função bivariada $\theta(x,y)$

Divergente

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{q} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\left(\vec{i}q_x + \vec{j}q_y\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = \operatorname{div}\vec{q}$$

$\Downarrow$ operador DIV

Pode ser entendido como o produto escalar do operador GRAD com um campo VETORIAL $\vec{q}$

Em notação matricial

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} \longrightarrow \nabla\theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Gradiente

$\Downarrow$

Equivale ao produto de um escalar por uma matriz

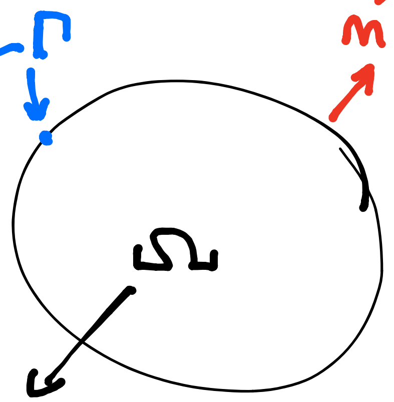
$$\nabla^t = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{bmatrix} \longrightarrow \nabla^t \cdot \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}$$

Divergência

$\Downarrow$

Equivale ao produto de duas matrizes, o operador GRAD transposto e o campo vetorial $\vec{q}$

Teorema da divergência e Fórmula de Green



$$\int_{\Omega} \nabla f \, d\Omega = \int_{\Gamma} f n \, d\Gamma$$

$$\Downarrow$$

Teorema Fundamental do Cálculo em 2 dimensões

$\nabla f \longrightarrow$ gradiente da função f

Pode ser entendido como a generalização da derivada para 2 dimensões

Pela lógica, integrando uma derivada teremos a função original f calculada nos extremos do intervalo

Extremos do intervalo em 1D

Em uma dimensão fazemos:

$$\int_x f' dx = f\vec{n}\Big]_{x_0}^{x_1} = f_{x_1}\vec{i} + f_{x_0}(-\vec{i})$$

$$= f(x_1) - f(x_0)$$

Fronteira

Normal à Fronteira

Em duas dimensões fazemos

$$\int_\Omega \nabla f \, d\Omega = \int_\Gamma f\vec{n} \, d\Gamma$$

grad. ou deriv. gener.

normal a front.

fronteira

integração de superfície

integração de linha (ao longo de front.)

Este é o teorema da divergência. Ele na verdade diz que a integral de superfície do gradiente de uma função f é igual a circulação, i.e. integral de linha do produto escalar de f com o vetor n normal à fronteira desta superfície.

Fórmula de Green

1D $$\int_\Omega u' v \, dx = uv\Big]_\Gamma - \int_\Omega u v' \, dx$$

2D $$\int_\Omega \vec{q} \cdot \nabla w \, d\Omega = \int_\Gamma w \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Gamma - \int_\Omega \nabla \cdot \vec{q} \, w \, d\Omega$$

vetor

escalar

gradiente do
campo escalar
w

o conjunto
todo é um
escalar

$\Rightarrow$ Produto escalar de
dois vetores

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i e_i = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$$

$$= u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \underbrace{u = u_i e_i}$$

Notação compacta ou de Tensores ou de Einstein

Dot product

$$u \cdot v = u_i \cdot v_i \qquad |u| = \sqrt{u_i u_i} \qquad |v| = \sqrt{v_i v_i}$$

$$|u| . |v| . \cos\theta_{uv} = u_i . v_i$$

$$\cos\theta = \frac{u_i v_i}{|u| . |v|}$$

Tensores (Ordem 1)

$$\varepsilon_i' = P_{ik} \varepsilon_k \qquad P_{ik} = \cos(e_i', e_k)$$

$$\varepsilon' = P\varepsilon \qquad \varepsilon_i' e_i' = \varepsilon_i . e_i \rightarrow \text{pois é}$$

o mesmo vetor ou Tensor de ordem 1

$$\varepsilon_i' e_i' \cdot e_i' = \varepsilon_k e_k e_i'$$

$$\varepsilon_i' \cos(e_i', e_i') = \varepsilon_k \cos(e_k, e_i')$$

$$\varepsilon_i' = p_{ik} \varepsilon_k$$ Lembrar $|e_i| = 1$

$$e_i e_k = \begin{matrix} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{matrix}$$

$$\varepsilon_i' = p_{ik} \varepsilon_k$$

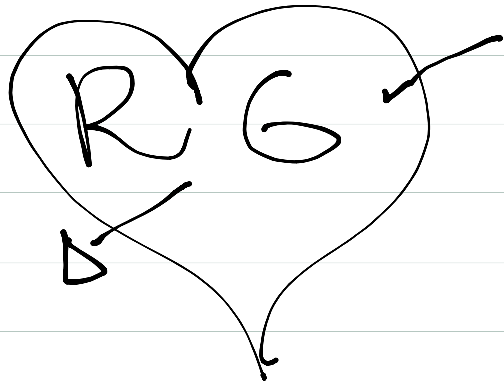
$$\varepsilon_j' e_j' = \varepsilon_i e_i$$

$$p_{ik} = \cos(e_i', e_k)$$

$$\varepsilon_j' e_j' e_j' = \varepsilon_i e_i e_j'$$

gustavo correia mirapalheta

Rosana Fernandes Mirapalheta



$\varepsilon'_i e'_i = \varepsilon_k e_k$ $\qquad$ $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cos\theta_{u,v}$

$\varepsilon'_i e'_i e'_i = \varepsilon_k e_k \cdot e'_i$

$\varepsilon' = \cos(e_k, e'_i)\,\varepsilon$

$\varepsilon'_j e'_j = \varepsilon_i e_i$

$\varepsilon'_k e'_k e'_k = \varepsilon_i e_i e'_k$

$$|e'_j| = 1 \ \forall j \qquad e'_j . e'_k = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

$$\varepsilon'_k = e'_k e_i \varepsilon_i$$

$$\varepsilon'_k = P_{ki} \varepsilon_i \qquad P_{ki} = \cos(e'_k, e_i)$$

$$\varepsilon_k = P_{ki} \varepsilon'_i \qquad P_{ki} = \cos(e_k, e'_i)$$

$$u . v = |u| . |v| \cos\theta_{uv}$$

$$e'_i e_k = |e'_i| \, |e_k| \cos\theta_{e'_i e_k}$$

$$e'_i e_k = \cos(e'_i, e_k)$$

$$\varepsilon'_j e'_j = \varepsilon_i e_i \qquad e'_j . e'_k \begin{cases} \nearrow 0 & j \neq k \\ \searrow 1 & j = k \end{cases}$$

$$\varepsilon'_j e'_j e'_k = \varepsilon_i e_i e'_k$$

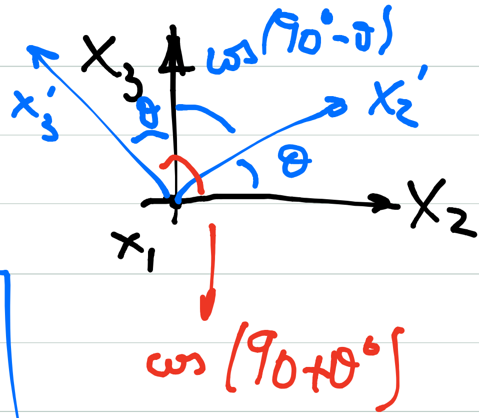
$$\varepsilon'_k = e'_k e_i \varepsilon_i \qquad e'_k e_i = \cos(e'_k, e_i)$$

$$\varepsilon_i = e_i e'_k \varepsilon'_k$$

$$\varepsilon' = P \varepsilon$$

$\varepsilon = P^{-1}\varepsilon' \qquad P^{-1} = P^{T}$

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad R' = PR$$



$$R' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$t'_{ij} = P_{ik} P_{jl} t_{kl}$$

$$t'_{mn} e'_m e'_n = t_{kl} e_k e_l$$

ⓐ $\boxed{\text{Bandwith of a matriz}}$

$a_{ij} = 0$ for $j > i + m_A$

$2m_A + 1 =$ Bandwidth

(2.9)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

* a partir da linha ou da coluna 3, os elementos são 0
* Logo para $j > 3$ os elementos são 0

Por exemplo, na primeira linha a partir da 3ª coluna os elementos passam a ser 0 logo $M_A = 2$ (meia banda) e $2M_A + 1 = 5$ (banda)

* $M_A = 2 \leftarrow$ Meia banda
* Band $= 5$

Mais importante ainda, a matriz acima é dita SIMÉTRICA e BANDED

ⓑ

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj} \qquad A_{3\times4} \quad B_{4\times5}$$

$$C = A . B$$

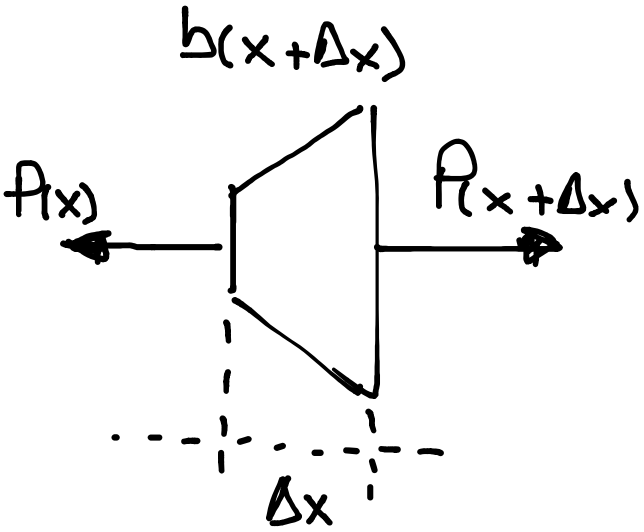
$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{4} a_{ir} b_{rj}$$

$i = [1..3]$ $j = [1..5]$

To calculate the element C_{ij} you multiply the elements of the i_{TH} line of **A** with the elements of the j_{TH} column of **B**

Number of products: 3×5 (elements) $\times 4$ (number of products in each element)

Parei no exemplo 2.5 pag. 37



$$-P(x) + b(x+\Delta x)\Delta x + P(x+\Delta x) = 0$$

$$\frac{P(x+\Delta x) - P(x)}{\Delta x} + b(x+\Delta x) = 0$$

$$\frac{dP(x)}{dx} + b(x) = 0$$

$P \rightarrow$ Força

$b \rightarrow$ carga p/m

$$\sigma(x) = E(x)\,\varepsilon(x) \qquad \varepsilon(x) = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{P(x)}{A(x)} = E(x)\frac{du}{dx}$$

$$P(x) = AE\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[AE\,\frac{du}{dx}\right] + b(x) = 0$$

Condições de contorno:

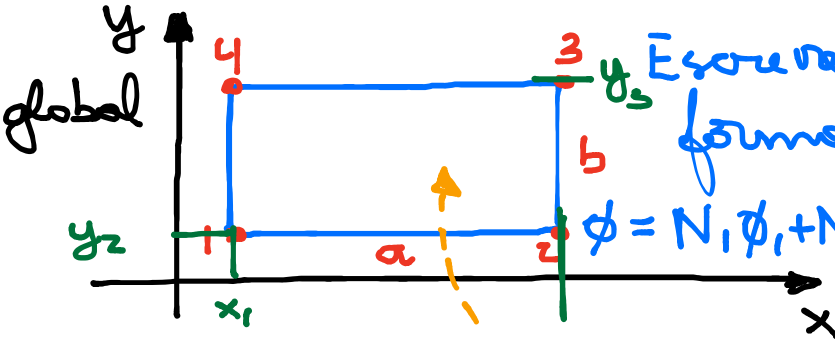
$P(0) = -\bar{F}$

$u(l) = u_l$

Schaum - capítulo 3

3.1 $\phi = A + Bx + Cy + Dxy$ → função solução

Dimensões: $a \times b$ Elemento retangular

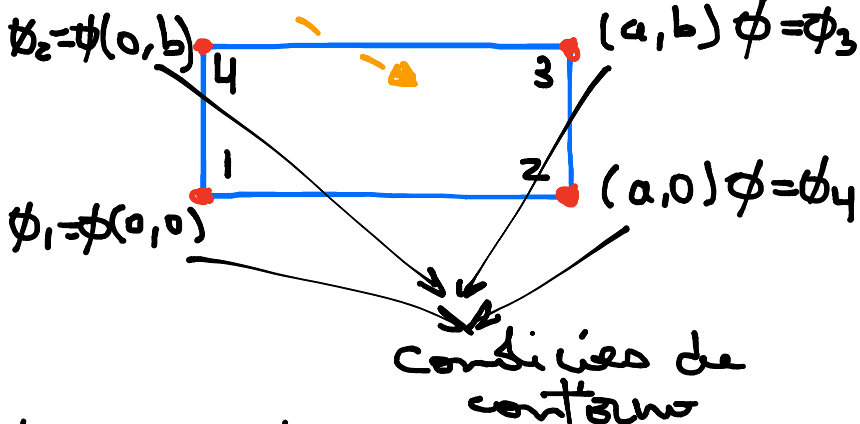


Escreva as funções de forma tal como:

$\phi = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 + N_4\phi_4$

$a = x_2 - x_1$

$b = y_3 - y_2$



Aplicando as condições de contorno na função de forma $\phi = A + Bx + Cy + Dxy$

$\phi_1 = A$

$\phi_2 = A + Ba$

$\phi_3 = A + Ba + Cb + Dab$

$\phi_4 = A + Cb$

$A = \phi_1$

$B = (\phi_2 - \phi_1)/a$

$C = (\phi_4 - \phi_1)/b$

$D = (\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - \phi_4)/ab$

Queremos então passar do formato:

$$\underbrace{\phi = A + Bx + Cy + Dxy}_{\text{Baseado em geometria}}$$

Para

$$\underbrace{\phi = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 + N_4\phi_4}_{\text{Baseado nos valores de contorno}}$$

$N_1(x,y)$ $N_2(x,y)$ $N_3(x,y)$ $N_4(x,y)$

Shape Functions

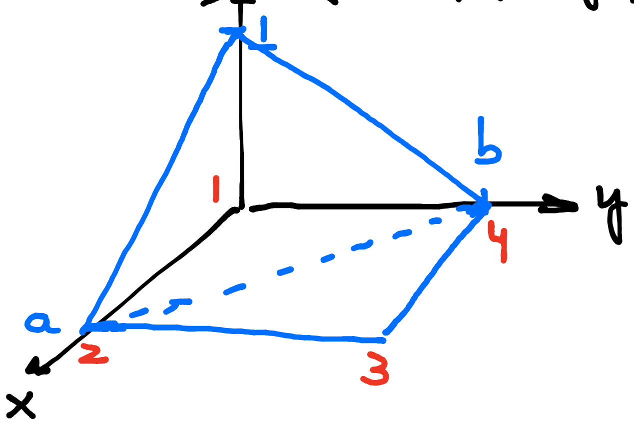
$N_1(x,y) = (a-x)(b-y)/ab$ $N_1(0,0) = 1$; demais pts $= 0$

$N_2(x,y) = x(b-y)/ab$ $N_2(a,0) = 1$; demais pts $= 0$

$N_3(x,y) = xy/ab$ $N_3(a,b) = 1$; demais pts $= 0$

$N_4(x,y) = y(a-x)/ab$ $N_4(0,b) = 1$; demais pts $= 0$

$N_1 = (a-x)(b-y)/ab$



3.2

1.7

$$a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad a_{ij} = i - j$$

$$a_{ij} x_i x_j =$$

$$a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3$$
$$+ a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{23} x_2 x_3$$
$$+ a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3 x_3$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x}$$

Notação de somatório — Notação matricial

Se $a_{ij} = i - j$ $\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ou

$A = -A^t$

Vamos provar por matrizes: aplicando a condição do problema!

$x^t A x = S \qquad -x^t A^t x = S$

transpondo pois S é um número

$(Ax)^t x = S$

$x^t A^t x = S \qquad x^t A^t x = -x^t A^t x$

$-x^t A x = x^t A x$

e isto somente é válido se

$x^t A x = 0$

Vamos provar por somatório

$a_{ij} x_i x_j =$

$a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + \dots$

$+ a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{23} x_2 x_3 + \dots$

$+ a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3 x_3 + \dots$

$+ \quad \vdots \qquad + \quad \vdots \qquad + \quad \vdots$

$=$

$0 + -x_1 x_2 + -2 x_1 x_3 + \dots$

$+ x_2 x_1 + 0 + -x_2 x_3 + \dots$

$+ 2 x_3 x_1 + x_3 x_2 + 0 + \dots$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$= 0$ pois para qualquer a_{ij}, $a_{ji} = -a_{ij}$

ou

$A = L + D + U$ L → lower diagonal

D → diagonal

$D = 0$ e $L^t = -U$ U → upper diagonal

Definindo a soma dos elementos de uma matriz A como $S(A)$ temos $S(A) = S(A^t)$ pois a transposição dos elementos de uma matriz não altera a soma dos mesmos.

Além disso $S(A+B) = S(A) + S(B)$ ou seja se quisermos a soma dos elementos de uma matriz que será a soma de duas outras matrizes tanto faz executar a soma matricial antes e a soma dos elementos depois ou as somas dos elementos de cada matriz antes e a junção depois. Sendo assim no nosso exemplo:

$A = L + U$ (lembrando que $D = 0$)

mas $L = -U^t$ logo

$\vdots \qquad \vdots$

$A = -U^t + U$, tomando a soma:

$$S(A) = S(-U^t + U) = -S(U^t) + S(U)$$

lembrando que $S(U^t) = S(U)$

$$S(A) = -S(U) + S(U) = 0$$

ou

$$S(A) = 0$$

(1.8) $$\frac{\partial\, a_{ij} x_i x_j}{\partial x_k}$$

$$\frac{d}{dx_1} \quad \begin{array}{l} a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots \\ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + a_{23}x_2x_3 + \dots \\ a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3x_3 + \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} 2a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & + \; a_{13}x_3 & + \dots \\ + \; a_{21}x_2 + & 0 & + \; 0 & + \dots \\ + \; a_{31}x_3 + & 0 & + \; 0 & + \dots \\ + \; \vdots & \vdots & \;\; \vdots & \end{array}$$

ou

$$x_1(a_{11} + a_{11}) + x_2(a_{12} + a_{21}) + x_3(a_{13} + a_{31}) + \dots$$

ou

$$x_i(a_{ki} + a_{ik})$$

então

$$\frac{\partial\, a_{ij} x_i x_j}{\partial x_k} = (a_{ki} + a_{ik})\, x_i$$

Ou em notação matricial

$$\frac{d\, x^T A x}{d x_k}$$

Notas aula prof. Strange

Problema básico

$$-[c\,u_x]_x = f$$

$$-[c\,u_x]_x\, v = f\, v$$

Test Function

$$-\int_0^1 [c\,u_x]_x\, v = \int_0^1 f v$$

$$\underbrace{-c\,u_x v\Big|_0^1}_{\text{Ajustar } u \text{ ou } v \text{ para que este termo de } \emptyset} + \underbrace{\int_0^1 c\,u_x v_x = \int_0^1 f v}_{\text{Forma fraca}}$$

Em duas dimensões:

$$\operatorname{div}(uv) = (\operatorname{div} u).v + u.(\operatorname{div} v)$$

$$\nabla^T.(uv) = \nabla^T u.v + u.\nabla^T v$$

$$\boxed{\iint_S \nabla u \cdot v = \oint_C u v \vec{n} - \iint_S u \cdot \nabla v}$$

integração por partes em 2 dimensões

$S \to$ região do plano

$C \to$ curva que delimita a região S

Teorema da Divergência

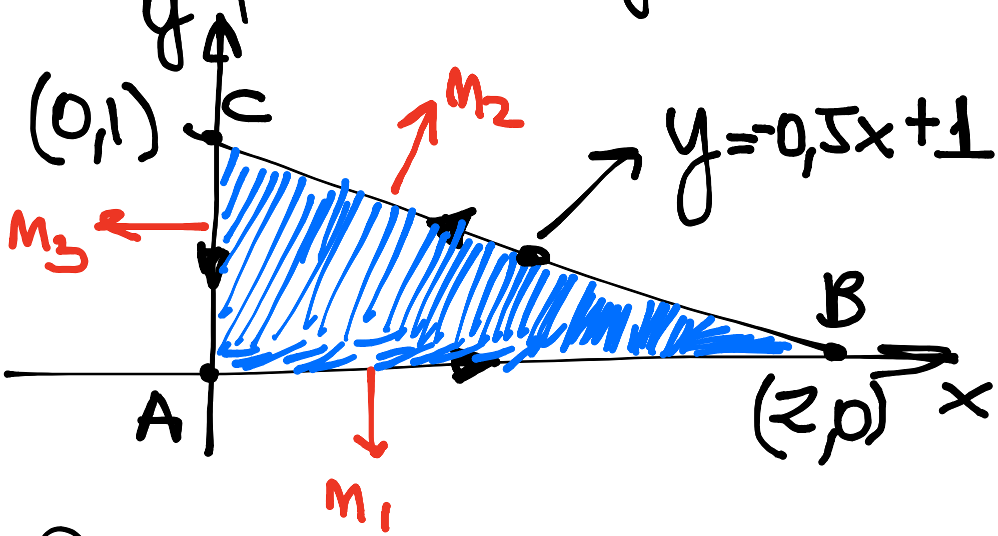
$$\iint_S \nabla \cdot \theta \, ds = \oint_C \theta \, n \, dc$$

A integral de superfície na região S do divergente da função θ é igual a integral de linha do produto escalar de θ e o vetor $\vec{n}$, normal a curva C que delimita S

Colocando na forma retangular:

$$\iint_S \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\right) dS = \oint_C (\theta_x n_x + \theta_y n_y)\, dc$$

Exemplo 2 Belytschko



Prove o teorema da divergência para o campo vetorial

$q_x = 3x^2y + y^3$ aplicado a

$q_y = 3x + y^3$ região azul acima

$$\iint_S \nabla \underline{q}\, ds = \oint_c \underline{q}\, n\, dc$$

$$\nabla^T \underline{q} = (6xy + 3y^2)$$

$$\nabla \underline{q} \cdot ds = (6xy + 3y^2)\, dx\, dy$$

$$\int_0^2 \int_0^{-0,5x+1} (6xy + 3y^2)\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^2 \left. \frac{6xy^2}{2} + y^3 \right]_0^{1-0,5x} =$$

$$= \int_0^2 [3x(1-0,5x)^2 + (1-0,5x)^3]\, dx = 1,5$$

Realizando a integral de linha de $\theta . \vec{n}$

$$\int_{AB} q\, m_1\, dAB + \int_{BC} q\, m_2\, dBC + \int_{CA} q\, m_3\, dCA$$

$m_1 = -j$

$dAB = dx$

$$m_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 4/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$dBC \Rightarrow \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$$dBC \Rightarrow \sqrt{1 + 1/4}\, dx = \frac{\sqrt{5}}{2} dx$$

$m_3 = -i$

$dCA = -dy$

Teorema da divergência (Integração por partes em 2 dimensões):

$\boxed{1D} \rightarrow \displaystyle\int_a^b \boxed{\frac{df}{dx}} dx = f\Big]_a^b$

$\boxed{2D} \rightarrow \displaystyle\iint_{\Omega} \operatorname{div} q \, d\Omega = \oint_{\Gamma} q\,\vec{n}\, d\Gamma$

Ω → Área

Γ → Curva que limita a área

$\vec{n}$ → NORMAL A CURVA

Notação: $\nabla^T q = \operatorname{div} q$

$\nabla q = \operatorname{grad} q$

Strang

$-\nabla^T q = \operatorname{div} q \rightarrow \nabla^T = -[\partial/\partial x \;\; \partial/\partial y]$

$\nabla q = \operatorname{grad} q \rightarrow \nabla = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix}$

Integração por partes em 2D

NORMAL À CURVA

$$\iint_{\Omega} \nabla\cdot f u \, d\Omega = \oint_{\Gamma} f u \, n \, d\Gamma - \iint f \nabla\cdot u \, d\Omega$$

Área plana fechada

Curva que delimita a área Ω

$\operatorname{div} f \cdot u$

$f \operatorname{div} u$

Lembrar

$$\nabla^T uv = u.(\nabla v) + (\nabla u).v$$

$$\iint_{\Omega} \nabla.^T uv = \iint_{\Omega} u.\nabla v + \iint_{\Omega} \nabla u.v$$

$$\oint_{\Gamma} uv\vec{n} \, d\Gamma = \iint_{\Omega} u.\nabla v + \iint_{\Omega} \nabla u.v$$

$$\iint_{\Omega} u \nabla v = \oint_{\Gamma} u v n \, d\Gamma - \iint_{\Omega} \nabla u \, v$$