Segundo Taller Computacional
Álgebra Lineal Aplicada

Gustavo Adolfo Pérez Pérez
Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín
Programa de Ciencias de la Computación

Fecha de entrega: 2 de julio de 2025

Índice

1. Convergencia y estabilidad de sucesiones recurrentes

2. Estabilidad numérica de valores propios vs valores singulares

En este problema analizaremos la estabilidad de los valores singulares frente a perturbaciones y la compararemos con la estabilidad de los valores propios.

2.1. Estabilidad de los valores singulares

Teorema. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ una matriz con valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{\text{mín}(m,n)} \geq 0$. Si $E \in \mathbb{C}^{m\times n}$ es una perturbación tal que $\|E\|_2 = \varepsilon \ll 1$, entonces los valores singulares $\tilde{\sigma}_i$ de $A + E$ satisfacen:

$$|\sigma_i - \tilde{\sigma}_i| \leq \varepsilon, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, \text{mín}(m, n)$$

Demostración. Utilizaremos el Teorema de Weyl para valores singulares. Sin pérdida de generalidad, supongamos $m \geq n$.

Primero, recordemos que los valores singulares de una matriz M son las raíces cuadradas de los valores propios de M^*M. Para la matriz perturbada $A + E$, tenemos:

$$(A + E)^*(A + E) = A^*A + A^*E + E^*A + E^*E$$

Consideremos las matrices hermitianas aumentadas:

$$H_A = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}, \quad H_{A+E} = \begin{pmatrix} 0 & A+E \\ (A+E)^* & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de H_A son $\pm\sigma_1, \pm\sigma_2, \ldots, \pm\sigma_n$ (y ceros adicionales si $m > n$), donde σ_i son los valores singulares de A.

Observemos que:

$$H_{A+E} - H_A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E^* & 0 \end{pmatrix} = H_E$$

La norma espectral de H_E es:

$$\|H_E\|_2 = \max_i |\lambda_i(H_E)| = \|E\|_2 = \varepsilon$$

Por el Teorema de Weyl para valores propios de matrices hermitianas, si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$ son los valores propios de H_A ordenados de forma decreciente, y $\tilde{\lambda}_1 \geq \tilde{\lambda}_2 \geq \cdots$ son los valores propios de H_{A+E}, entonces:

$$|\lambda_i - \tilde{\lambda}_i| \leq \|H_E\|_2 = \varepsilon$$

Como los valores singulares de A y $A+E$ corresponden a los valores propios no negativos de H_A y H_{A+E} respectivamente, concluimos que:

$$|\sigma_i - \tilde{\sigma}_i| \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } i$$

Esto completa la demostración. □

2.2. Inestabilidad de los valores propios

A diferencia de los valores singulares, los valores propios pueden ser extremadamente sensibles a perturbaciones. Presentaremos dos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 1: Matriz nilpotente. Consideremos la matriz nilpotente de orden n:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Esta matriz tiene todos sus valores propios iguales a cero: $\lambda_i(A) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$.

Ahora consideremos la perturbación:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \delta & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\delta > 0$ es pequeño. Entonces $\|E\|_2 = \delta$.

La matriz perturbada $A+E$ tiene el polinomio característico:

$$\det(\lambda I - (A+E)) = \lambda^n - \delta = 0$$

Por lo tanto, los valores propios de $A+E$ son:

$$\lambda_k = \delta^{1/n} e^{2\pi i k/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Para n grande y δ pequeño pero fijo, tenemos $\delta^{1/n} \approx 1$. Por ejemplo, si $n = 100$ y $\delta = 10^{-10}$, entonces:

$$|\lambda_k(A+E) - \lambda_j(A)| = \delta^{1/n} = (10^{-10})^{1/100} = 10^{-0,1} \approx 0{,}794$$

Aunque la perturbación tiene norma $\|E\|_2 = 10^{-10}$, los valores propios se mueven una distancia de aproximadamente 0,794, que es mucho mayor que la norma de la perturbación.

Ejemplo 2: Matriz con valores propios coincidentes. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene un valor propio doble $\lambda = 1$ con un solo vector propio independiente (matriz defectiva).

Consideremos la perturbación:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\varepsilon > 0$ es pequeño. La matriz perturbada es:

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de $A + E$ es:

$$\det(\lambda I - (A + E)) = (\lambda - 1)^2 - \varepsilon = 0$$

Los valores propios de $A + E$ son:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\varepsilon}$$

Para ε pequeño, la distancia entre los valores propios de A y $A + E$ es aproximadamente $\sqrt{\varepsilon}$, que es mucho mayor que $\varepsilon = \|E\|_2$ cuando $\varepsilon \ll 1$.

2.3. Ejemplo numérico con distancia mayor que 1

Para obtener una distancia mayor que 1 entre valores propios, consideremos la matriz de tamaño 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con la perturbación:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí $\|E\|_2 = 8$. Los valores propios de A son todos cero, mientras que los valores propios de $A + E$ son las raíces cúbicas de 8:

$$\lambda_k = 2e^{2\pi ik/3}, \quad k = 0, 1, 2$$

La distancia mínima entre un valor propio de $A + E$ y cualquier valor propio de A es:

$$\min_k |\lambda_k - 0| = 2 > 1$$

2.4. Conclusión

Hemos demostrado que los valores singulares son estables bajo perturbaciones: una perturbación de norma ε causa cambios de a lo más ε en los valores singulares. En contraste, los valores propios pueden ser extremadamente sensibles a perturbaciones, especialmente cuando la matriz es defectiva o tiene valores propios múltiples. Esta diferencia fundamental hace que los valores singulares sean más confiables en aplicaciones numéricas donde las perturbaciones por errores de redondeo son inevitables.

3. Iteración del algoritmo QR para aproximar raíces de polinomios

3.1. Registro de tiempo de ejecución

3.2. Traslación elegida en cada iteración

3.3. Discos de Gershgorin

4. Descomposición en valores singulares para extraer el fondo de un video

4.1. Metodología

4.2. Resultados y análisis

4.3. Conclusiones