Quotes3, 204-313

1. "Some psychologists suggest irregularities of the English names of numerals may hinder children's counting ability." (Azar, Beth (1999). "English words may hinder math skills development", http://en.wikipedia.org/wiki/Decimal#cite_note-21)
2. "... were a quantum leap in the development of algebra, a leap above the details of computation to a real of powerful abstract concepts. The power of these abstract concepts - groups, fields, dimension - lies in their ability to capture general features of computation, so that the existence of particular computations can be proved or disproved without attempting to carry them out" (Elements of Algebra, Stillwell)
3. "In principle, the negative integers are unnecessary, since all statements involving them can be replaced by equivalent statements about natural numbers. For example, 3-7=-4 is equivalent to 3-7+4=0. But in practice they confer an enormous advantage - the advantage of algebra over arithmetic - by allowing the properties of subtraction to be used without restriction. For example, in Z on can say (m-n)(m+n)=m2-n2 without adding "provided m>=n", as one must when working with N." (Stillwell, Elements of Algebra)
4. "Thus Q is closed under +-x/ (by nonzero elements). This is the ideal situation for computation, and indeed the field properties facilitate computation so greatly that they enable us to see things that are virtually invisible from the viewpoint of N. For example, the ability to solve linear equations in any number of variables leads to the invaluable concepts of vector space and dimension (see section 5.3). Nevertheless, the rational numbers have no content not already implicit in the natural numbers, and one is often forced back to N in order to answer questions about Q. For example, the field properties of Q are no help in deciding whether there is x in Q such that x2=2. The only way to decide is by attacking the equivalent question about N : are there m,n in N such that m2=2n2? " (Stillwell, Elements of Algebra)
5. "The fact that N is not closed under division makes the problem of divisibility in N an interesting problem. In fact, it is the source of the most challenging problems in mathematics" (Elements of Algebra, Stillwell)
6. "Negative numbers appear for the first time in history in the Nine Chapters on the Mathematical Art (Jiu zhang suan-shu), which in its present form dates from the period of the Han Dynasty (202 BC – AD 220), but may well contain much older material.[2] The Nine Chapters used red counting rods to denote positive coefficients and black rods for negative.[9] This system is the exact opposite of contemporary printing of positive and negative numbers in the fields of banking, accounting, and commerce, wherein red numbers denote negative values and black numbers signify positive values. The Chinese were also able to solve simultaneous equations involving negative numbers.

   For a long time, negative solutions to problems were considered "false". In Hellenistic Egypt, the Greek mathematician Diophantus in the third century A.D. referred to an equation that was equivalent to 4x + 20 = 0 (which has a negative solution) in Arithmetica, saying that the equation was absurd.

   The use of negative numbers was known in early India, and their role in situations like mathematical problems of debt was understood.[10] Consistent and correct rules for working with these numbers were formulated.[11] The diffusion of this concept led the Arab intermediaries to pass it to Europe.[10]

   The ancient Indian Bakhshali Manuscript, which Pearce Ian claimed was written some time between 200 BC. and AD 300,[12] while George Gheverghese Joseph dates it to about AD 400 and no later than the early 7th century,[13] carried out calculations with negative numbers, using "+" as a negative sign.[14]

   During the 7th century AD, negative numbers were used in India to represent debts. The Indian mathematician Brahmagupta, in Brahma-Sphuta-Siddhanta (written in A.D. 628), discussed the use of negative numbers to produce the general form quadratic formula that remains in use today. He also found negative solutions of quadratic equations and gave rules regarding operations involving negative numbers and zero, such as "A debt cut off from nothingness becomes a credit; a credit cut off from nothingness becomes a debt. " He called positive numbers "fortunes," zero "a cipher," and negative numbers "debts."[15][16]

   During the 8th century AD, the Islamic world learned about negative numbers from Arabic translations of Brahmagupta's works,[citation needed] and by the 10th century Islamic mathematicians were using negative numbers for debts. The earliest known Islamic text that uses negative numbers is A Book on What Is Necessary from the Science of Arithmetic for Scribes and Businessmen by Abū al-Wafā' al-Būzjānī.[17]

   In the 12th century AD in India, Bhāskara II also gave negative roots for quadratic equations but rejected them because they were inappropriate in the context of the problem. He stated that a negative value is "in this case not to be taken, for it is inadequate; people do not approve of negative roots."

Knowledge of negative numbers eventually reached Europe through Latin translations of Arabic and Indian works.

European mathematicians, for the most part, resisted the concept of negative numbers until the 17th century, although Fibonacci allowed negative solutions in financial problems where they could be interpreted as debits (chapter 13 of Liber Abaci, AD 1202) and later as losses (in Flos).

In the 15th century, Nicolas Chuquet, a Frenchman, used negative numbers as exponents and referred to them as “absurd numbers.”[citation needed]

In A.D. 1759, Francis Maseres, an English mathematician, wrote that negative numbers "darken the very whole doctrines of the equations and make dark of the things which are in their nature excessively obvious and simple". He came to the conclusion that negative numbers were nonsensical.[18]

In the 18th century it was common practice to ignore any negative results derived from equations, on the assumption that they were meaningless.[19]" (http://en.wikipedia.org/wiki/Negative_number)

7. "At the end of December 1755, in a letter to Fagnano alluding to correspondence exchanged before the end of 1754, Lagrange speaks of Euler’s Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solution problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, published at Lausanne and Geneva in 1744. The same letter shows that as early as the end of 1754 Lagrange had found interesting results in this area, which was to become the calculus of variations (a term coined by Euler in 1766).
On 12 August 1755 Lagrange sent Euler a summary, written in Latin, of the purely analytical method that he used for this type of problem. It considered, he wrote in 1806, in varying the y’s in the integral formula in x and y, which should be a maximum or a minimum by ordinary differentiations, but relative to another characteristic δ, different form the ordinary characteristic d. It was further dependent on determining the differential value of the formula with respect to this new characteristic by transporting the sign δ after the signs d and ∫ when it is placed before. The differentials of δy under the ∫ signs are then eliminated through integration by parts.
In a letter to d’Alembert of 2 November 1769 Lagrange confirmed that this method of maxima and minima was the first fruit of his studies—he was only nineteen when he devised it—and that he regarded it as his best work in mathematics.
Euler replied to Langrange on 6 September 1755 that he was very interested in the technique. Lagrange’s merit was likewise recognized in Turin; and he was named, by a royal decree of 28 September 1755, professor at the Royal Artillery School with an annual salary of 250 crowns—a sum never increased in all the years he remained in his native country.
In 1756, in a letter to Euler that has been lost, Lagrange applied the calculus of variations to mechanics. Euler had demonstrated, at the end of his Methodus, that the trajectory described by a material point subject to the influence of central forces is the same as that obtained by supposing that the integral of the velocity multiplied by the element of the curve is either a maximum or a minimum. Lagrange extended “this beautiful theorem” to an arbitrary system of bodies and derived from it a procedure for solving all the problems of dynamics." (Lagrange, Joseph Louis, Complete Dictionary of Scientific Biography | 2008 | Copyright)
8. "Recherches sur la nature et la propagatin du son6 constitutes a thorough and extensive study of a question much discussed at the time. In it Lagrange displays an astonishing erudition. He had read and pondered the writings of Newton, Daniel Benoulli, Taylor. Euler, and Alembert; and his own contribution to the problem of vibrating strings makes him the equal of his predecessors." (Lagrange, Joseph Louis, Complete Dictionary of Scientific Biography | 2008 | Copyright)
9. "“Application de la méthode précédente à la solution de différens problèmes de dynamique”10 made the principle of least action, joined with the theorem of forces vives (or via viva), the very foundation of dynamics. Rather curiously, Lagrange no longer used the expression “least action”, which he had employed until then, a minor failing due, perhaps, to the death of Maupertuis. This memoir heralded the Mécanique ana;lytique of 1788 in its style and in the breadth of the author’s views." (Lagrange, Joseph Louis, Complete Dictionary of Scientific Biography | 2008 | Copyright)
10. "A ce compte, l'aptitude spéciale aux mathéma- tiques ne serait due qu'à une mémoire très sûre, ou bien à une force d'attention prodigieuse. Ce serait une qualité analogue à celle du joueur de whist, qui retient les cartes tombées; ou bien, pour nous élever d'un degré, à celle du joueur d'échecs qui peut envisager un nombre très grand de combinai- sons et les garder dans sa mémoire. Tout bon mathématicien devrait être en même temps bon joueur d'échecs et inversement; il devrait être éga- lement un bon calculateur numérique. Certes, cela arrive quelquefois, ainsi Gauss était à la fois un géomètre de génie et un calculateur très précoce et très sûr.
Mais il y a des exceptions, ou plutôt je me trompe, je ne puis pas appeler cela des exceptions, sans quoi les exceptions seraient plus nombreuses que les cas conformes à la règle. C'est Gauss, au contraire, qui était une exception. Quant à moi, je suis obligé de l'avouer, je suis absolument inca- pable de faire une addition sans faute. Je serais également un fort mauvais joueur d'échecs; je cal- culerais bien qu'en jouant de telle façon je m'expose à tel danger; je passerais en revue beaucoup d'autres coups que je rejetterais pour

d'autres raisons, et je finirais par jouer le coup d'abord examiné, ayant oublié dans l'intervalle le danger que j'avais prévu,
En un mot ma mémoire n'est pas mauvaise, mais elle serait insuffisante pour faire de moi un bon joueur d'échecs. Pourquoi donc ne me fait-elle pas défaut dans un raisonnement mathématique diffi- cile où la plupart des joueurs d'échecs se per- draient? C'est évidemment parce qu'elle est guidée par la marche générale du raisonnement. Une démonstration mathématique n'est pas une simple juxtaposition de syllogismes, ce sont des syllo- gismes placés dans un certain ordre, et l'ordre dans lequel ces éléments sont placés est beaucoup plus important que ne le sont ces éléments eux-mêmes. Si j'ai le sentiment, l'intuition pour ainsi dire de cet ordre, de façon à apercevoir d'un coup d'oeil l'en- semble du raisonnement, je ne dois plus craindre d'oublier l'un des éléments, chacun d'eux viendra se placer de lui-même dans le cadre qui lui est pré- paré, et sans que j'aie à faire aucun effort de mémoire.
Il me semble alors, en répétant un raisonnement appris, que j'aurais pu l'inventer; ce n'est souvent qu'une illusion; mais, même alors, même si je ne suis pas assez fort pour créer par moi-même, je le réinvente moi-même, à mesure que je le répète.
On conçoit que ce sentiment, cette intuition de l'ordre mathématique, qui nous fait deviner des har- monies et des relations cachées, ne puisse appartenir à tout le monde. Les uns ne posséderont ni ce sentiment délicat, et difficile à définir, ni une force de mémoire et d'attention au-dessus de l'ordinaire, et alors ils seront absolument incapables de com- prendre les mathématiques un peu élevées; c'est le plus grand nombre. D'autres n'auront ce sentiment qu'à un faible degré, mais ils seront doués d'une mémoire peu commune et d'une grande capacité d'attention. Ils apprendront par cœur les détails les uns après les autres, ils pourront comprendre les mathématiques et quelquefois les appliquer, mais ils seront hors d'état de créer. Les autres enfin pos- séderont à un plus ou moins haut degré l'intuition spéciale dont je viens de parler et alors non seule- ment ils pourront comprendre les mathématiques, quand même leur mémoire n'aurait rien d'extraor- dinaire, mais ils pourront devenir créateurs et cher- cher à inventer avec plus ou moins de succès, sui- vant que cette intuition est chez eux plus ou moins développée.
Qu'est-ce, en effet, que l'invention mathématique ? Elle ne consiste pas à faire de nouvelles combinai-sons avec des êtres mathématiques déjà connus.
Cela, n'importe qui pourrait le faire, mais les com-binaisons que l'on pourrait former ainsi seraient en nombre infini, et le plus grand nombre serait abso-lument dépourvu d'intérêt. Inventer, cela consiste précisément à ne pas construire les combinaisons inutiles et à construire celles qui sont utiles et qui ne sont qu'une intime minorité. Inventer.c'estdis-ce de ???, de choisir.
Comment doit se faire ce choix, je l'ai expliqué plus haut; les faits mathématiques dignes d'être étudiés, ce sont ceux qui, par leur analogie avec d'autres faits, sont susceptibles de nous conduire à la connaissance d'une loi mathématique de la même façon que les faits expérimentaux nous conduisent à 1a connaissance d'une loi physique. Ce sont ceux
qui nous révèlent des parentés insoupçonnées entre d'autres faits, connus depuis longtemps, mais qu'on croyait à tort étrangers les uns aux autres.
Parmi les combinaisons que l'on choisira, les plus fécondes seront souvent celles qui sont formées d'éléments empruntés à des domaines très éloignés; et je ne veux pas dire qu'il suffise pour inventer de rapprocher des objets aussi disparates que possible; la plupart des combinaisons qu'on formerait ainsi seraient entièrement stériles ; mais quelques-unes d'entre elles, bien rares, sont les plus fécondes de toutes.
Inventer, je l'ai dit, c'est choisir; mais le mot n'est peut-étre pas tout à fait juste, il fait penser à un acheteur à qui on présente un grand nombre d'échantillons et qui les examine l'un après l'autre de façon à faire son choix. Ici les échantillons seraient tellement nombreux qu'une vie entière ne suffirait pas pour les examiner. Ce n'est pas ainsi que les choses se passent. Les combinaisons stériles ne se présenteront même pas à l'esprit de l'inventeur. Dans le champ de sa conscience n'apparaîtront jamais que les combinaisons réellement utiles, et quelques-unes qu'il rejettera, mais qui participent un peu des caractères des combinaisons utiles. Tout se passe comme si l'inventeur était un examinateur du deuxième degré qui n'aurait plus à interroger que les candidats déclarés admissibles après une première épreuve.
Mais ce que j'ai dit jusqu'ici, c'est ce qu'on peut observer ou inférer, en lisant les écrits des géo- mètres, à la condition de faire cette lecture avec quelque réflexion.
Il est temps de pénétrer plus avant et de voir ce qui se passe dans l'âme même du mathématicien. Pour cela, je crois que ce que j'ai de mieux à faire, c'est de rappeler des souvenirs personnels. Seule- ment, je vais me circonscrire et vous raconter com- ment j'ai écrit mon premier mémoire sur les fonc- tions fuchsiennes. Je vous demande pardon, je vais employer quelques expressions techniques, mais elles ne doivent pas vous effrayer, vous n'avez aucun besoin de les comprendre. Je dirai, par exemple, j'ai trouvé la démonstration de tel théorème dans telles circonstances, ce théorème aura un nom bar- bare, que beaucoup d'entre vous ne connaîtront pas,
mais cela n'a aucune importance; ce qui est inté- ressant pour le psychologue, ce n'est pas le théo- rème, ce sont les circonstances.
Depuis quinze jours, je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis les fonctions fuchsiennes; j'étais alors fort ignorant; tous les jours, je m'as- seyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux, j'essayais un grand nombre de combinai-sos et je n'arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir, contrairement à mon habitude, je ne pus m'endormir : les

idées surgissaient en foule; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent, pour ainsi dire, pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais éta- bli l'existence d'une classe de fonctions fuchsiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique ; je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures.

Je voulus ensuite représenter ces fonctions par le quotient de deux séries; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie ; l'analogie avec les fonctions
elliptiques me guidait. Je me demandai quelles de- vaient être les propriétés de ces séries, si elles exis- taient, et j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées thétafuchsiennes.

A ce moment, je quittai Caen, où j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entre- prise par l'École des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques ; arri- vés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade; au moment où je mettais le pied sur le marche-pied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuch- siennes étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne. Je ne fis pas la vérification; je n'en aurais pas eu le temps, puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commenetait déjà quelque chose. Tout ce travail fut parfai- tement conscient.

Là-dessus, je partis pour le Mont-Valérien, où je devais faire mon service militaire; j'eus donc des préoccupations très différentes. Un jour, en traver- sant le boulevard, la solution de la difficulté qui m'avait arrêté m'apparut tout à coup. Je ne cherchai pas à l'approfondir immédiatement, et ce fut seule- ment après mon service que je repris la question. J'avais tous les éléments, je n'avais qu'à les rassembler et à les ordonner. Je rédigeai donc mon mémoire délinitif d'un trait et sans aucune
peine.

Je me bornerai à cet exemple unique, il est inutile
de les multiplier , eu ce qui concerne mes autres recherches, j'aurais à faire des récits tout à fait ana- logues ; et les observations rapportées par d'autres mathématiciens dans l'enquête de l'Enseignement Mathématique ne pourraient que les confirmer.

Ce qui frappera tout d'abord, ce sont ces appa- rences d'illumination subite, signes manifestes d'un long travail inconscient antérieur; le rôle de ce tra- vail inconscient dans l'invention mathématique me paraît incontestable, et on en trouverait des traces dans d'autres cas où il est moins évident. Souvent, quand on travaille une question difficile, on ne fait rien de bon la première fois qu'on se met à la be- sogne; ensuite on prend un repos plus ou moins long, et on s'asseoit de nouveau devant sa table. Pendant la première demi-heure, on continue à ne rien trouver et puis tout à coup l'idée décisive se presente à l'esprit. On pourrait dire que le travail conscient a été plus fructueux, parce qu'il a été interrompu et que le repos a rendu à l'esprit sa force et sa fraîcheur. Mais il est plus probable que ce repos a été rempli par un travail inconscient, et que le résultat de ce travail s'est révélé ensuite au géomètre, tout à fait comme dans les cas que j'ai cités; seulement la révélation, au lieu de se faire jour pendant une promenade ou un voyage, s'est produite pendant une période de travail conscient, mais indépendamment de ce travail qui joue tout au plus un rôle de déclanchement, comme s'il était l'aiguillon qui aurait excité les résultats déjà acquis pendant le repos, mais restés inconscients, à revêtir la forme consciente.

Il y a une autre remarque à faire au sujet des conditions de ce travail inconscient : c'est qu'il n'est possible et en tout cas qu'il n'est fécond que s'il est d'une part précédé, et d'autre part suivi d'une pé- riode de travail conscient. Jamais (et les exemples que j'ai cités le prouvent déjà suffisamment) ces inspirations subites ne se produisent qu'après quel- ques jours d'efforts volontaires, qui ont paru abso- lument infructueux et où l'on a cru ne rien faire de bon, où il semble qu'on a fait totalement fausse route. Ces efforts n'ont donc pas été aussi stériles qu'on le pense, ils ont mis en branle la machine in- consciente, et, sans eux, elle n'aurait pas marché et n'aurait rien produit.

La nécessité de la seconde période de travail consci nt, après l'inspiration, se comprend mieux .... "(Science et method, Poincare)

11. "The consideration of the movement of a system of material points making only infinitely small oscillations around their equilibrium position led Lagrange to a system of linear differential equations. In integrating it he presented for the first time—explicity—the notion of the characteristic value of a linear substitution." (Lagrange, Joseph Louis, Complete Dictionary of Scientific Biography | 2008 | Copyright)
12. No proof...
"In October 1773 Lagrange composed Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice.30 "It is," he wrote Condorcet, "a problem already solved by Euler and by d'Alembert ... My method is completely different from theirs.. It is, moreover, based on formulas that can be useful in other cases and that are quite remarkable in themselves." His method was constructed, in fact, on a purely algebraic lemma. The formulas he provided—with no proof—in this llemma plertain today to the multiplication of determinants.
A by-product of this study of dynamics was Lagrange's famous Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangularies.31 Starting from the same formulas as those
of the lemma mentioned above, again asserted without proof, he expressed the surface, the volume, and the radii of circumdcribed, inscribed, and escribed spheres and located the center of gravity of every triangular pyramid as a function of the lengths of the six edges. Published in May 1775, this memoir must have been written shortly after the preceding one, perhaps in the fall of 1773. It displays a real duality.

Today it would be classed in the field of pure algebra, since it employs what are now called determinants, the square of a determinant, an inverse matrix, an orthogonal matrix, and so on." (Lagrange, Joseph Louis, Complete Dictionary of Scientific Biography | 2008 | Copyright)

13. "On 20 September 1768 he sent to the Mélanges de Turin, along with “Mémoire d’analyse indéterminée,” the eassay “Sur l’intégration de quelques équations différentielles dont les indéterminées sont séparées, mais dont chaque membre en particulier n’est point intégrable.”55 In it Lagrange drew inspiration from some of Euler’s works; and the latter wrote to him on 23 March 1775, when the essay finally came to his attention: “I was not sufficiently able to admire the skill and facility with which you treat so many thorny matters that have cost me much effort...in particular the integration of this differential equation:
in all cases where the two numbers m and n are rational.”" (Lagrange, Joseph Louis, Complete Dictionary of Scientific Biography | 2008 | Copyright)
14. "Théoire des fonctions analytiques contenant les principes de calcul différentiel, dégagés de toute considération d’infiniment petits, d’évanouissants, de limites et de fluxions et réduits à l’analyse algébrique des quantités finies71 indicates by its title the author’s ratjher utopian program. First published in 1813), it returned to themes already considered in 1772. In it Lagrange intended to show lthat power series expansions are sufficient to provide differential calculus with a solid foundation. Today mathematicians are partially returning to this conception in treating the formal calculus of series. As early as 1812, however, J. M. H. Wronski objected to Lagrange’s claims. The subsequent opposition of Cauchy
was more effective. Nevertheless, Lagrange’s point of view could not be totally neglected. Completed by convergence considerations, it dominated the study of the functions of a complex variable throughout the nineteenth century." (Lagrange, Joseph Louis, Complete Dictionary of Scientific Biography | 2008 | Copyright)
15. "With the appearance of the Mécanique analytique in 1788, Lagrange proposed to reduce the theory of mechanics and the art of solving problems in that field to general formulas, the mere development of which would yield all the equations necessary for the solution of every problem.
The Traité united and presented from a single point of view the various principles of mechanics, demonstrated their connection and mutual dependence, and made it possible to judge their validity and scope. It is divided into two parts, statics and dynamics, each of which treats solid bodies and fluids separately. There are no diagrams. The methods pesented require only analytic operations, subordinated to a regular and uniform development. Each of the four sections begins with a historical account which is a model of the kind.
Lagrange decided, however, that the work should have a second edition incorporating certain advances. In the Mémoires de l’Institut he had earlier published some essays that represented a last, brilliant contribution to the development of celestial mechanics. Among them were “Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique,”65 read on 13 March 1809, and “Second mémoire sur la théorie de la variation des constantess arbitraires dans les problémes de mécanique dans lequel o simplifie l’application des formules générales à ces problémes,”66 read on 19 February 1810. Arthur Cayley later deemed this theory “perfectly complete in itself.”" (Lagrange, Joseph Louis, Complete Dictionary of Scientific Biography | 2008 | Copyright)
16. "Another reason which makes a philosophy of science specially useful at the present time is the revolutionary progress, the sweeping away of what had seemed fixed landmarks, which has so far characterized this century, especially in physics. The conception of the " working hypothesis," provisional, approximate, and merely use- ful, has more and more pushed aside the comfortable eighteenth century conception of " laws of nature." Even the Newtonian dynamics, which for over two hundred years had seemed to embody a definite con- quest, must now be regarded as doubtful, and as probably only a first rough sketch of the ways of matter. And thus, in virtue of the very rapidity of our progress, a new theory of knowledge has to be sought, more tentative and more modest than that of more confident but less successful generations. Of this necessity Poincar^ was acutely conscious, and it gave to his writings a tone of doubt which was hailed with joy by sceptics and pragmatists. But he was in truth no sceptic : however conscious of the difficulty of attaining knowledge, he never admitted its impos- sibility. " It is a mistake to believe," he said, " that the love of truth is indistinguishable from the love of cer- tainty ;" and again: "To doubt everything or to believe everything are two equally convenient solutions ; both dispense with the necessity of reflection," His was the active, eager doubt that inspires a new scrutiny, not the idle doubt that acquiesces contentedly in nescience- Two opposite and conflicting qualities are required for the successful practice of philosophy — comprehen- siveness of outlook, and minute, patient analysis. Both exist in the highest degree in Descartes and Leibniz ; but in their day comprehensiveness was less difficult than it is now. Since Leibniz, I do not know of any philosopher who has possessed both : broadly speaking, British philosophers have excelled in analysis, while those of the Continent have excelled in breadth and scope. In this respect, Poincare is no exception : in philosophy, his mind was intuitive and synthetic ; wonderfully skilful, it is true, in analysing a science until he had extracted its philosophical essence, and in combining this essence with those of other sciences, but not very apt in those further stages of analysis which fall within the domain of philosophy itself. He built wonderful edifices with the philosophic materials that he found ready to hand, but he lacked the patience and the minuteness of attention required for the crea- tion of new materials. For this reason, his philosophy, though brilliant, stimulating, and instructive, is not among those that revolutionize fundamentals, or com- pel us to remould our imaginative conception of the nature of

things. In fundamentals, broadly speaking, he remained faithful to the authority of Kant.

Readers of the following pages will not be surprised to learn tliat his criticisms of mathematical logic do not appear to me to be among the best parts of his work. He was already an old man when he became aware of the existence of this subject, and he was led, by certain indiscreet advocates, to suppose it in some way /opposed to those quick flashes of insight in mathe- matical discovery which he has so admirably described- No such opposition in fact exists ; but the misconcep- tion, however regrettable, was in no way surprising.

To be always right is not possible in philosophy ; but Poincar^'s opinions, right or wrong, are always the expression of a powerful and original mind with a quite unrivalled scientific equipment ; a masterly style, great wit, and a profound devotion to the advance- ment of knowledge. Through these merits, his books supply, better than any others known to me, the growing need for a generally intelligible account of the philosophic outcome of modern science. " (Russel's preface to the translation of Poincarre's Science and Method)

17. "C'est que, comme l'a dit Mach, ces fous ont éco- nomisé à leurs successeurs la peine de penser. Ceux qui auraient travaillé uniquement en vue d'une application immédiate n'auraient rien laissé derrière eux et, en face d'un besoin nouveau, tout aurait été i recommencer. Or, la plupart des hommes n'aiment pas à penser et c'est peut-être un bien, puisque l'instinct les guide, et le plus souvent mieux que la raison ne guiderait une pure intelligence, toutes les fois du moins qu'ils poursuivent un but immédiat et toujours le même; mais l'instinct c'est la routine, 8l si la pensée ne le fécondait pas, il ne progresse- rait pas plus chez l'homme que chez l'abeille ou la fourmi. Il faut donc penser pour ceux qui n'aiment pas à penser et, comme ils sont nombreux, il faut que chacune de nos pensées soit aussi souvent utile que possible, et c'est pourquoi une loi sera d'autant plus précieuse qu'elle sera plus générale. " (Science et methode, Poincare)
18. "Cela nous montre comment doit se faire notre choix ; les faits les plus intéressants sont ceux' qui

    peuvent servir plusieurs fois ; ce sont ceux qui ont chance de se renouveler. Nous avons eu le bonheur de naître dans un monde où il y en a. Supposons qn'^n lieu de 60 éléments chimiques, nous en ayons 60 milliards, qu'ils ne soient pas les uns communs et les autres rares, mais qu'ils soient répartis uni- formément. Alors, toutes les fois que nous ramas- serions un nouveau caillou, il y aurait une grande probabilité pour qu'il soit formé de quelque subs- tance inconnue ; tout ce que nous saurions des autres cailloux ne vaudrait rien pour lui; devant chaque objet nouveau nous serions comme Tenfant qui vient de naître; comme lui nous ne pourrions qu'obéir à nos caprices ou à nos besoins ; dans un pareil monde, il n'y aurait pas de science ; peut-être la pensée et même la vie y seraient-elles impossibles, puisque révolution n'aurait pu y développer les ins- tincts conservateurs. Grâce à Dieu, il n'en est pas ainsi ; comme tous les bonheurs auxquels on est accoutumé, celui-là n'est pas apprécié à sa valeur. Le biologiste serait tout aussi embarrassé s'il n'y avait que des individus et pas d'espèce et si l'héré- dité ne faisait pas les fils semblables aux pères.

    Quels sont donc les faits qui ont chance de se renouveler ? Ce sont d'abord les faits simples. Il est clair que dans un fait complexe, mille circonstances sont réunies par hasard, et qu'un hasard bien moins vraisemblable encore pourrait seul les réunir de nouveau. Mais y a-t-il des faits simples et, s'il y en a, comment les reconnaître ? Qui nous dit que ce que Dious croyons simple ne recouvre pas une effroyable complexité ? Tout ce que nous pouvons dire, c'est que nous devons préférer les faits qui paraissent simples à ceux où notre œil grossier discerne des éléments dissemblables. Et alors, de deux choses Tune, ou bien cette simplicité est réelle, ou bien les éléments sont assez intimement mélangés pour ne pouvoir être distingués. Dans le premier cas, nous avons chance de rencontrer de nouveau ce même fait simple, soit dans toute sa pureté, soit entrant lui-même comme élément dans un ensemble com- plexe. Dans le second cas, ce mélange ihtime a également plus de chance de se reproduire qu'un assemblage hétérogène ; le hasard sait mélanger, il ne sait pas démêler, etpour faire avec des éléments multiples un édifice bien ordonné dans lequel on distingue quelque chose, il faut le faire exprès. Il y a donc peu de chance pour qu'un assemblage où on distingue quelque chose se reproduise jamais. Il y en a beaucoup au contraire pour qu'un mélange qui semble homogène au premier coup d'œil se renou- velle plusieurs fois. Les faits qui paraissent simples, même s'ils ne le sont pas, seront donc plus facile- ment ramenés par le hasard. " (Science et methode, Poincare)
19. "Mais où est le fait simple ? Les savants ont été le Mais où est le fait simple ? Les savants ont été lechercher aux deux extrémités, dans l'infinimen chercher aux deux extrémités, dans l'infinimengrand et dans l'infiniment petit. L'Astronome l'a trouvé parce que les distances des astres sont immenses, si grandes, que chacun d'eux n'apparaît plus que comme un point ; si grandes que les diffé- rences qualitatives s'effacent et parce qu'un point est plus simple qu'un corps qui a une forme et des qualités. Et, le Physicien, au contraire, a cherché le phénomène élémentaire en découpant fictivement les corps en cubes infiniment petits, parce que les con- ditions du problème, qui subissent des variations lentes et continues quand on passe d'un point du corps à l'autre, pourront être regardées comme constantes à l'intérieur de chacun de ces petits cubes. De même le Biologiste a été instinctivement porté à regarder la cellule comme plus intéressante que l'animal entier, et l'événement lui a donné raison, puisque les cellules, appartenant aux orga nisines les plus divers, sont plus semblables entre elles, pour qui sait reconnaître leurs

ressemblances, que ne le sont ces organismes eux-mêmes. Le Socio- logiste est plus embarrassé ; les éléments, qui pour lui sont les hommes, sont trop dissemblables, trop variables, trop capricieux, trop complexes eux- mêmes en un mot ; aussi, l'histoire ne recommence pas ; comment alors choisir le fait intéressant qui est celui qui recommence ; la méthode, c'est préci- sément le choix des faits, il faut donc se préoccuper d'abord d'imaginer une méthode, et on en a ima- giné beaucoup, parce qu'aucune ne s'imposait; cha- que thèse de sociologie propose une méthode nou- velle que d'ailleurs le nouveau docteur se garde bien d'appliquer de sorte que la sociologie est la science qu possède le plus de méthodes et le moins de ré- sultats." (Science et methode, Poincare)

20. "D'où vient cette concordance ? Est-ce simplement que les choses qui nous semblent belles sont celles qui s'adaptent le mieux à notre intelligence, et que par suite elles sont en même temps l'outil que cette intelligence sait le mieux manier ? Ou bien y a-t-il là un jeu de l'évolution et de la sélection naturelle? Les peuples dont l'idéal était le plus conforme à leur intérêt bien entendu ont-ils exterminé les autres et pris leur place ? Les uns et les autres poursui- vaient leur idéal, sans se rendre compte des consé- quences, mais tandis que cette recherche menait les uns à leur perte, aux autres elle donnait l'empire. On serait tenté de le croire ; si les Grecs ont triomphé des barbares et si l'Europe, héritière de la pensée des Grecs, domine le monde, c'est parce que les sauvages aimaient les couleurs criardes et les sons bruyants du tambour qui n'occupaient que leurs sens, tandis que les Grecs aimaient la beauté intel- lectuelle qui se cache sous la beauté sensible et que c'est celle-là qui fait l'intelligence sûre et forte.
Sans doute un pareil triomphe ferait horreur à Tolstoï et il ne voudrait pas reconnaître qu'il puisse être vraiment utile." (Science et methode, Poincare)
21. "Et, ce jour-là, le véritable inventeur, ce ne sera pas l'ouvrier qui aura patiem- ment édifié quelques-unes de ces combinaisons, ce sera celui qui aura mis en évidence leur parenté. Le premier n'aura vu que le fait brut, l'autre seul aura senti l'âme du fait. Souvent, pour affirmer cette parenté, il lui aura suffi d'inventer un mot nouveau, et ce mot aura été créateur; l'histoire de la science nous fournirait une foule d'exemples qui sont fami- liers à tous." (Science et methode, Poincare)
22. "Le célèbre philosophe viennois MACH a dit que le rôle de la Science est de produire l'économie de pensée, de même que la machine produit l'économie d'effort. Et cela est très juste. Le sauvage calcule avec ses doigts ou en assemblant de petits cailloux. En apprenant aux enfants la table de multiplication, nous leur épargnons pour plus tard d'innombrables manœuvres de cailloux. Quelqu'un autrefois a reconnu, avec des cailloux ou autrement, que 6 fois 7 font 42 et il a eu l'idée de noter le résultat, et c'est pour cela que nous n'avons pas besoin de recommencer. " (Science et methode, Poincare)
23. "n physique, les faits à grand rendement sont ceux qui. rentrent dans une loi très générale, parce qu'ils permettent d'en prévoir un très grand nombre d'autres, et il n'en est pas autrement en mathé- matiques. Je me suis livré à un calcul compliqué et suis arrivé péniblement à un résultat; je ne serai pas payé de ma peine si je ne suis devenu par là capable de prévoir les résultats d'autres calculs analogues et de les diriger à coup sûr en évitant les tâtonnements auxquels j'ai dû me résigner la première fois. Je n'aurai pas perdu mon temps, au contraire, si ces tâtonnements mêmes ont fini par me révéler l'analogie profonde du problème que je viens de traiter avec une classe beaucoup plus étendue d'autres problèmes ; s'ils m'en ont montré à la fois les ressemblances et les différences. si en un mot ils m'ont fait entrevoir la possibilité d'une généralisation. Ce n'est pas alors un résultat nou- veau que j'aurais acquis, c'est une force nouvelle." (Science et methode, Poincare)
24. "C'est pour la même raison que, quand un calcul un peu long nous a conduits à quelque résultat simple et frappant, nous ne sommes pas satisfaits tant que nous n'avons pas montré que nous aurions pu prévoir, sinon ce résultat tout entier, du moins ses traits les plus caractéristiques. Pourquoi? Qu'ost- ce qui nous empêche de nous contenter d'un calcul qui nous a appris, semble-t-il, tout ce que nous désirions savoir? C'est parce que, dans des cas ana-logues, le long calcul ne pourrait pas resservir, et qu'il n'en est pas de même du raisonnement souvent à demi intuitif qui aurait pu nous permettre de prévoir. Ce raisonnement étant court, on en voit d'un seul coup toutes les parties, de sorte qu'on aperçoit immédiatement ce qu'il y faut changer pour l'adapter à tous les problèmes de même nature qui peuvent se présenter. Et puisqu'il nous permet de prévoir si la solution de ces problèmes sera simple, il nous montre tout au moins si le calcul mérite d'être entrepris." (Science et methode, Poincare)
25. "Ce que nous venons de dire suffît pour montrer combien il serait vain de chercher à remplacer par un procédé mécanique quelconque la libre initiative du mathématicien. Pour obtenir un résultat qui ait une valeur réelle, il ne suffit pas de moudre des calculs ou d'avoir une machine à mettre les choses en ordre; ce n'est pas seulement l'ordre, c'est l'ordre inattendu qui vaut quelque chose. La ma- chine peut mordre sur le fait brut, l'âme du fait lui échappera toujours." (Science et methode, Poincare)
26. "Seulement est-il toujours néeessaire de le dire tant de fois; ceux qui les premiers se sont préoc- cupés avant tout de la rigueur nous ont. donné des raisonnements que nous pouvons essayer d'imiter; mais si les démonstrations de l'avenir doivent être bâties sur ce modèle, les traités de mathématiques vont devenir bien longs ; et si je crains les lon- gueurs, ce n'est pas seulement parce que je redoute l'encombrement des bibliothèques, mais parce que je crains qu'en s'allongeant, nos démonstrations perdent cette apparence d'harmonie dont j'ai expli- qué tout à l'heure le rôle utile." (Science et methode, Poincare)
27. "C'est à l'économie de pensée que l'on doit viser, ce n'est donc pas assez de donner des modèles à imiter. Il faut qu'on puisse après nous se passer de ces modèles et, au lieu de répéter un raisonnement déjà fait, le résumer en quelques lignes. Et c'est à quoi l'on a déjà réussi quelquefois ; par exemple il y avait tout un

type de raisonnements qui se res- semblaient tous et qu'on retrouvait partout ; ils étaient parfaitement rigoureux, mais ils étaient longs Un jour on a imaginé le mot d'uniformité de la convergence et ce mot seul les a rendus inutiles; on n'a plus eu besoin de les répéter puisqu'on pou-vait les sous-entendre. Les coupeurs de difficultés en quatre peuvent donc nous rendre un double service; c'est d'abord de nous apprendre à faire comme eux au besoin, mais c'est surtout de nous permettre le plus souvent possible de ne pas faire comme eux, sans pourtant rien sacrifier de la rigueur." (Science et methode, Poincare)

28. "Je ne sais si je n'ai pas déjà dit quelque part que la mathématique est l'art de donner le même nom à des choses diffé- rentes. Il convient que ces choses, différentes par la matière, soient semblables par la forme, qu'elles puissent pour ainsi dire se couler dans le même moule. Quand le langage a été bien choisi, on est tout étonné de voir que toutes les démonstrations, faites pour un objet connu, s'appliquent immédia- tement à beaucoup d'objets nouveaux; on n'a rien à y changer, pas même les mots, puisque les noms sont devenus les mêmes." (Science et methode, Poincare)
29. "Un mot bien choisi suffit le plus souvent pour faire disparaître les exceptions que comportaient les règles énoncées dans l'ancien langage; c'est pour cela qu'on a imaginé les quantités négatives, les quantités imaginaires, les points à l'infini, que sais- -e encore? Et les exceptions, ne l'oublions pas, sont pernicieuses, parce qu'elles cachent les lois." (Science et methode, Poincare)
30. "Les physiciens, d'ailleurs, agissent absolument de même; ils ont inventé le mot d'énergie, et ce mot a été prodigieusement fécond, parce que lui aussi créait la loi en éliminant les exceptions, parce qu'il donnait le même nom à des choses différentes par la matière et semblables par la forme.
Parmi les mots qui ont exercé la plus heureuse influence, je signalerai ceux de groupe et d'inva- riant. Ils nous ont fait apercevoir l'essence de bien des raisonnements mathématiques; ils nous ont montré dans combien de cas les anciens mathéma- ticiens considéraient des groupes sans le savoir, et comment, se croyant bien éloignés les uns des autres, ils se trouvaient tout à coup rapprochés sans comprendre pourquoi." (Science et methode, Poincare)
31. "Axiom of Completeness.4 (Vollsta ̈ndigkeit): To a system of points, straight lines, and planes, it is impossible to add other elements in such a manner that the system thus generalized shall form a new geometry obeying all of the five groups of axioms. In other words, the elements of geometry form a system which is not susceptible of extension, if we regard the five groups of axioms as valid.
This axiom gives us nothing directly concerning the existence of limiting points, or of the idea of convergence. Nevertheless, it enables us to demonstrate Bolzano's theorem by virtue of which, for all sets of points situated upon a straight line between two definite points of the same line, there exists necessarily a point of condensation, that is to say, a limiting point. From a theoretical point of view, the value of this axiom is that it leads indirectly to the introduction of limiting points, and, hence, renders it possible to establish a one-to-one correspondence between the points of a segment and the system of real numbers. However, in what is to follow, no use will be made of the "axiom of completeness."" (Hilbert, the foundations of geometry)
32. "A mesure que la science se développe, il devient plus difficile de l'embrasser tout entière; alors on cherche à la couper en morceaux, à se contenter de l'un de ces morceaux : en un mot, à se spécia- liser. Si l'on continuait dans ce sens, ce serait un obstacle fâcheux aux progrès de la Science. Nous l'avons dit, c'est par des rapprochements inattendus entre ses diverses parties que ses progrès peuvent se faire. Trop se spécialiser, ce serait s'interdire ces rapprochements. Espérons que des Congrès comme ceux de Ileidelberg et de Rome, en nous mettant en rapport les uns avec les autres, nous ouvriront des vues sur le champ du voisin, nous obligeront à le comparer au nôtre, à sortir un peu de notre petit village; ils seront ainsi le meilleur remède au danger que je viens de signaler." (Science et methode, Poincare)
33. "Autrefois, ou ne considérait une équation comme résolue que quand on en avait exprimé la solution à l'aide d'un nombre fini de fonctions connues; mais cela n'est possible qu'une fois sur cent à peine. Ce que nous pouvons toujours faire, ou plutôt ce que nous devona toujours chercher à faire, c'est de resoudre le problème qualitativement pour ainsi dire, c'est-à-dire de chercher à connaître la forme générale de la courbe qui représente la fonction inconnue.
Il reste ensuite à trouver la solution quantitative du problème; mais si l'inconnue ne peut être déterminée par un calcul fini, on peut la repré- senter toujours par une série infinie convergents qui permet de la calculer. Cela peut-il être regardé comme une vraie solution ? On raconte que NEWTON communiqua à LEIBNITZ un anagramme à peu près comme ceci : auuaalibbeeceii, etc. LEIBNITZ, naturellement, n'y comprit rien du tout ; mais nous qui avons la clef, nous savons que cet anagramme veut dire, en le traduisant dans le langage moderne: « Je sais intégrer toutes les équations différen- tielles, » et nous sommes amenés à nous dire que NEWTON avait bien de la chance ou qu'il se faisait de singulières illusions. Il voulait dire tout simplement qu'il pouvait former (par la méthode des coefficients indéterminés) une série de puissances satisfaisant formellement à l'équation proposée.
Une semblable solution aujourd'hui ne nous satis- ferait plus, et cela pour deux raisons; parce que la convergence est trop lente et parce que les termes se succèdent sans obéir à aucune loi. Au contraire, la série 6 nous paraît ne rien laisser à désirer, d'abord parce qu'elle converge très vite (cela, c'est pour le praticien qui désire avoir son nombre le plus promp- temeut possible) et ensuite parce que nous aperce- -ons d'un coup d'oeil la loi des temps (cela, c'est pour satisfaire aux besoins esthétiques du théo- ricien).
Mais alors il n'y a plus des problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas; il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus, selon qu'ils le sont par une série de convergence plus ou moins rapide, ou régie par une loi plus ou moins harmonieuse. Il arrive toutefois qu'une solution imparfaite nous achemine vers une

solution meilleure. Quelquefois la série est de convergence si lente que le calcul est impraticable et qu'on n'a réussi qu'à démontrer la possibilité du problème.
Et alors l'ingénieur trouve cela dérisoire, et il a raison, puisque cela ne l'aidera pas à terminer sa construction pour la date fixée. Il se préoccupe peu de savoir si cela sera utile aux ingénieurs du xxiie siècle; nous, nous pensons autrement et nous sommes quelquefois plus heureux d'avoir écono- misé un jour de travail à nos petits-fils qu'une heure à nos contemporains.
Quelquefois en tâtonnant, empiriquement pour ainsi dire, nous arrivons à une formule suffisam- ment convergente. Que voulez-vous de plus, nous dit l'ingénieur; et nous, malgré tout, nous ne sommes pas satisfaits, nous aurions voulu prévoir cette convergence. Pourquoi? parce que si nous avions su la prévoir une fois, nous saurions la pré- voir une autre fois. Nous avons réussi, c'est peu de chose à nos yeux si nous n'avons sérieusement l'espoir de recommencer." (Science et methode, Poincare)

34. "Les progrès de l'arithmétique ont été beaucoup plus lents que ceux de l'algèbre et de l'analyse, et il est aisé de comprendre pourquoi. Le sentiment de la continuité est un guide précieux qui fait défaut à l'arithméticien ; chaque nombre entier est séparé des autres, il a pour ainsi dire son individualité propre ; chacun d'eux est une sorte d'exception et c'est pourquoi les théorèmes généraux seront plus rares dans la théorie des nombres, c'est pourquoi aussi ceux qui existent seront plus cachés et échap- peront plus longtemps aux chercheurs." (Science et methode, Poincare)
35. "L'ARITHMETIQUE
Les progrès de l'arithmétique ont été beaucoup plus lents que ceux de l'algèbre et de l'analyse, et il est aisé de comprendre pourquoi. Le sentiment de la continuité est un guide précieux qui fait défaut à l'arithméticien ; chaque nombre entier est séparé des autres, il a pour ainsi dire son individualité propre ; chacun d'eux est une sorte d'exception et c'est pourquoi les théorèmes généraux seront plus rares dans la théorie des nombres, c'est pourquoi aussi ceux qui existent seront plus cachés et échap- peront plus longtemps aux chercheurs.
Si l'arithmétique est en retard sur l'algèbre et sur l'analyse, ce qu'elle a de mieux à faire c'est de chercher à se modeler sur ces sciences afin de pro- fiter de leur avance. L'arithméticien doit donc prendre pour guide les analogies avec l'algèbre. Ces analogies sont nombreuses et si, dans bien des cas, elles n'ont pas encore été étudiées d'assez près pour devenir utilisables, elles sont au moins pressenties depuis longtemps et le langage même des deux sciences montre qu'on les a aperçues. C'est ainsi qu'on parle de nombres transcendants, et qu'on se rend compte ainsi que la classification future de ces nombres a déjà pour image la classification des fonc- tions transcendantes, et cependant on ne voit pas encore très bien comment on pourra passer d'une classification à l'autre; mais si on l'avait vu, cela serait
déjà fait, et ce ne serait plus l'œuvre de l'avenir.e premier exemple qui me vient à l'esprit est la théorie des congruences, où l'on trouve un paral- lélisme parfait avec celle des équations algébriques. Certainement, ou arrivera à compléter ce parallé- lisme, qui doit subsister par exemple entre la théorie des courbes algébriques et celle des congruences à deux variables. Et quand les pro- blèmes relatifs aux congruences à plusieurs variables seront résolus, ce sera un premier pas vers la solu- tion de beaucoup de questions d'analyse indéter-minée.
L'ALGEBRE.
La théorie des équations algébriques retiendra encore longtemps l'attention des géomètres ; les côtés par où on peut l'aborder sont nombreux et divers.
Il ne faut pas croire que l'algèbre soit terminée parce qu'elle nous fournit des règles pour former toutes les combinaisons possibles ; il reste à cher- cher les combinaisons intéressantes, celles qui satis- font à telle ou telle condition. Ainsi se constituera une sorte d'analyse indéterminée où les inconnues ne seront plus des nombres entiers, mais des poly- nômes. C'est alors cette fois l'algèbre qui prendra modèle sur l'arithmétique, en se guidant sur l'ana- logie du nombre entier, soit avec le polynôme entier à coefficients quelconques, soit avec le poly- nôme entier à coefficients entiers.
LA GEOMETRIE
Il semble que la géométrie ne puisse rien contenir qui ne soit déjà dans l'algèbre ou dans l'analyse ; que les faits géométriques, ne soient autre chose que les faits algébriques ou analytiques exprimés dans un autre langage. On pourrait donc croire qu'après la revue que nous venons de passer, il ne nous res- tera plus rien à dire qui se rapporte spécialement à la géométrie. Ce serait méconnaître l'importance même d'un langage bien fait, ne pas comprendre ce qu'ajoute aux choses elles-mêmes la façon d'exprimer ces choses et par conséquent de les grouper.
D'abord les considérations géométriques nous amènent à nous poser de nouveaux problèmes ; ce sont bien, si l'on veut, des problèmes analytiques, mais que nous ne nous serions jamais posés a propos d'analyse. L'analyse en profite cependant comme elle profite de ceux qu'elle est obligée de résoudre pour satisfaire aux besoins de la Phy- sique.
Un grand avantage de la géométrie, c'est précisé- ment que les sens y peuvent venir au secours de l'intelligence, et aident à deviner la route à suivie et bien des esprits préfèrent ramener les problèmes d'analyse à la forme géométrique. Malheureusement, nos sens ne peuvent nous mener bien loin, et ils nous faussent compagnie dès que nous voulons nous envoler en dehors des trois dimensions classiques. Est-ce à dire que, sortis de ce domaine restreint où ils semblent vouloir nous enfermer, nous ne devons plus compter que sur l'analyse pure et que toute géométrie à plus de trois dimensions est vaine et sans objet? Dans la génération qui nous a précédés, les plus grands maîtres auraient répondu « oui » ; nous sommes

aujourd'hui tellement familiarisés avec cette notion que nous pouvons en parler, même dans un cours d'université, sans provoquer trop d'éton- nement.
Mais à quoi peut-elle servir ? Il est aisé de le voir : elle nous donne d'abord un langage très com- mode, qui exprime en ternies très concis ce que le langage analytique ordinaire dirait en phrases pro- lixes. De plus, ce langage nous fait nommer du même nom ce qui se ressemble et affirme des ana- logies qu'il ne nous laisse plus oublier. Il nous permet donc encore de nous diriger dans cet espace qui est trop grand pour nous et que nous ne pou- vons voir, en nous rappelant sans cesse l'espace visible qui n'en est qu'une image imparfaite sans doute, mais qui en est encore une image. Ici encore, comme dans tous les exemples précédents, c'est l'analogie avec ce qui est simple qui nous permet de comprendre ce qui est complexe.
Cette géométrie à plus de trois dimensions n'est pas une simple géométrie analytique, elle n'est pas purement quantitative, elle est aussi qualitative et c'est par là surtout qu'elle devient intéressante. Il y a une science qu'on appelle l'Analysis Situs et qui a pour objet l'étude des relations de position des divers éléments d'une figure, asbtraction faite de leurs grandeurs. Cette géométrie est purement qua- litative ; ses théorèmes resteraient vrais si les ligures, au lieu d'être exactes, étaient grossièrement imitées par un e.nfint. On peut faire aussi une Ana- lyses Situs à plus de trois dimensions. L'importance de l'Analysis Situs est énorme et je ne saurais trop y insister; le parti qu'en a tiré RIEMANN, l'un de ses principaux créateurs, suffirait à le démontrer. Il faut qu'on arrive à la construire complètement dans les espaces supérieurs ; on aura alors un instrument qui permettra réellement de voir dans l'hyperespace et de suppléer à nos sens.
Les problèmes de l'Analysis Situs ne se seraient peut-être pas posés si on n'avait parlé que le lan- gage analytique ; ou plutôt, je me trompe, ils se seraient posés certainement, puisque leur solution est nécessaire à une foule de questions d'analyse; mais ils se seraient posés isolément, les uns après les autres, et sans qu'on puisse apercevoir leur lien commun." (Science et methode, Poincare)

36. "En un mot ma mémoire n'est pas mauvaise, mais elle serait insuffisante pour faire de moi un bon joueur d'échecs. Pourquoi donc ne me fait-elle pas défaut dans un raisonnement mathématique diffi- cile où la plupart des joueurs d'échecs se per- draient? C'est évidemment parce qu'elle est guidée par la marche générale du raisonnement. Une démonstration mathématique n'est pas une simple juxtaposition de syllogismes, ce sont des syllo- gismes placés dans un certain ordre, et l'ordre dans lequel ces éléments sont placés est beaucoup plus important que ne le sont ces éléments eux-mêmes. Si j'ai le sentiment, l'intuition pour ainsi dire de cet ordre, de façon à apercevoir d'un coup d'oeil l'en- semble du raisonnement, je ne dois plus craindre d'oublier l'un des éléments, chacun d'eux viendra se placer de lui-même dans le cadre qui lui est pré- paré, et sans que j'aie à faire aucun effort de mémoire." (Science et methode, Poincare)
37. "Il me semble alors, en répétant un raisonnement appris, que j'aurais pu l'inventer; ce n'est souvent qu'une illusion; mais, même alors, même si je ne suis pas assez fort pour créer par moi-même, je le réinvente moi-même, à mesure que je le répète." (Science et methode, Poincare)
38. "Il me semble alors, en répétant un raisonnement appris, que j'aurais pu l'inventer; ce n'est souvent qu'une illusion; mais, même alors, même si je ne suis pas assez fort pour créer par moi-même, je le réinvente moi-même, à mesure que je le répète.
On conçoit que ce sentiment, cette intuition de l'ordre mathématique, qui nous fait deviner des har- monies et des relations cachées, ne puisse appar-tenir à tout le monde. Les uns ne posséderont ni ce sentiment délicat, et difficile à définir, ni une force de mémoire et d'attention au-dessus de l'ordinaire, et alors ils seront absolument incapables de com- prendre les mathématiques un peu élevées; c'est le plus grand nombre. D'autres n'auront ce sentiment qu'à un faible degré, mais ils seront doués d'une mémoire peu commune et d'une grande capacité d'attention. Ils apprendront par cœur les détails les uns après les autres, ils pourront comprendre les mathématiques et quelquefois les appliquer, mais ils seront hors d'état de créer. Les autres enfin pos- séderont à un plus ou moins haut degré l'intuition spéciale dont je viens de parler et alors non seule- ment ils pourront comprendre les mathématiques, quand même leur mémoire n'aurait rien d'extraor- dinaire, mais ils pourront devenir créateurs et cher- cher à inventer avec plus ou moins de succès, sui- vant que cette intuition est chez eux plus ou moins développée." (Science et methode, Poincare)
39. "Qu'est-ce, en effet, que l'invention mathématique ? Elle ne consiste pas à faire de nouvelles combinai- sons avec des êtres mathématiques déjà connus.
Cela, n'importe qui pourrait le faire, mais les com-binaisons que l'on pourrait former ainsi seraient en nombre infini, et le plus grand nombre serait abso-lument dépourvu d'intérêt. Inventer, cela consiste précisément à ne pas construire les combinaisons inutiles et à construire celles qui sont utiles et qui ne sont qu'une intime minorité. Inventer.c'estdis-cerner, c'est choisir." (Science et methode, Poincare)
40. "Inventer, je l'ai dit, c'est choisir; mais le mot n'est peut-étre pas tout à fait juste, il fait penser à un acheteur à qui on présente un grand nombre d'échantillons et qui les examine l'un après l'autre de façon à faire son choix. Ici les échantillons seraient tellement nombreux qu'une vie entière ne suffirait pas pour les examiner. Ce n'est pas ainsi que les choses se passent. Les combinaisons stériles ne se présenteront même pas à l'esprit de l'inventeur. Dans le champ de sa conscience n'apparaîtront jamais que les combinaisons réellement utiles, et quelques-unes qu'il rejettera, mais qui participent un peu des caractères des combinaisons utiles. Tout se passe comme si l'inventeur était un examinateur du deuxième degré qui n'aurait plus à interroger que les candidats déclarés admissibles après une première épreuve. Mais ce que j'ai dit jusqu'ici, c'est ce qu'on peut observer ou inférer, en lisant les écrits des géo- mètres, à la condition de faire cette lecture avec quelque réflexion." (Science et methode, Poincare)

41. "Depuis quinze jours, je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis les fonctions fuchsiennes; j'étais alors fort ignorant; tous les jours, je m'as- seyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux, j'essayais un grand nombre de combinai-sous et je n'arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir, contrairement à mon habitude, je ne pus m'endormir : les idées surgissaient en foule; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent, pour ainsi dire, pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais éta- bli l'existence d'une classe de fonctions fuchsiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique ; je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures.
Je voulus ensuite représenter ces fonctions par le quotient de deux séries; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie ; l'analogie avec les fonctions
elliptiques me guidait. Je me demandai quelles de- vaient être les propriétés de ces séries, si elles exis- taient, et j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées thétafuchsiennes.
A ce moment, je quittai Caen, où j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entre- prise par l'École des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques ; arri- vés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade; au moment où je mettais le pied sur le marche-pied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuch- siennes étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne. Je ne fis pas la vérification; je n'en aurais pas eu le temps, puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commencee mais j'eus tout de suite une entière certitude. De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête repo- sée pour l'acquit de ma conscience.
Je me mis alors à étudier des questions d'arithmé- tique sans grand résultat apparent et sans soupçon- ner que cela pût avoir le moindre rapport avec mes recherches antérieures. Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer, et je pensai à tout autre chose. Un jour, en me promenant sur la falaise, l'idée me vint, toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arith- métiques des formes quadratiques ternaires indéfi- finies étaient identiques à celles de la géométrie non- euclidienne.
Étant revenu à Caen, je réfléchis sur ce résultat, et j'en tirai les conséquences ; l'exemple des formes quadratiques me montrait qu'il y avait des groupes fuchsiens autres que ceux qui correspondent à la série hypergéométrique; je vis que je pouvais leur appliquer la théorie des séries thétafuchsiennes et que, par conséquent, il existait des fonctions fuch- siennes autres que celles qui dérivent de la série hypergéométrique, les seules que je connusse jus- qu'alors. Je me proposai naturellement de former toutes ces fonctions ; j'en fis un siège systématique et j'enlevai l'un après l'autre tous les ouvrages avancés; il y en avait un cependant qui tenait encore et dont la chute devait entraîner celle du corps de place. Mais tous mes efforts ne servirent d'abord qu'à me mieux faire connaître la difficulté, ce qui etait déjà quelque chose. Tout ce travail fut parfai- tement conscient.
Là-dessus, je partis pour le Mont-Valérien, où je devais faire mon service militaire; j'eus donc des préoccupations très différentes. Un jour, en traver- sant le boulevard, la solution de la difficulté qui m'avait arrêté m'apparut tout à coup. Je ne cherchai pas à l'approfondir immédiatement, et ce fut seule- ment après mon service que je repris la question. J'avais tous les éléments, je n'avais qu'à les rassembler et à les ordonner. Je rédigeai donc mon mémoire délinitif d'un trait et sans aucune peine." (Science et methode, Poincare)
42. "Les règles qui doivent, guider co choix sont extrême- ment fines et délicates, il est à peu près impossible de les énoncer dans un langage précis; elles se sentent plutôt qu'elles ne se formulent ; comment, dans ces conditions, imaginer un crible capable de les appliquer mécaniquement?" (Science et methode, Poincare)
43. "Et alors une première hypothèse se présente à nous : le moi subliminal n'est nullement inférieur au moi conscient; il n'est pas purement automa- tique, il est capable de discernement, il a du tact, de la délicatesse; il sait choisir, il sait deviner. Que dis-je, il sait mieux deviner que le moi conscient, puisqu'il réussit là où celui-ci avait échoué. En un mot, le moi subliminal n'est-il pas supérieur au moi conscient? Vous comprenez toute l'importance de cette question. M. Boutroux, dans une conférence récente, a montré comment elle s'était posée à des occasions toutes différentes et quelles conséquences entraînerait une réponse affirmative. (Voir aussi, du méme auteur, Science ei Religion, pages 313 sqq.)" (Science et methode, Poincare)
44. "Dans cette seconde manière de voir, toutes les combinaisons se formeraient par suite de l'automa- tisme du moi subliminal, mais seules, celles qui seraient intéressantes pénétreraient dans le champ de la conscience. Et cela est encore très mystérieux. Quelle est la cause qui fait que, parmi les mille pro- duits de notre activité inconsciente, il y en a qui sont appelés à franchir le seuil, tandis que d'autres restent en deçà? Est-ce un simple hasard qui leur confère ce privilège? Évidemment non; parmi toutes les excitations de nos sens, par exemple, les plus intenses seules retiendront notre attention, à moins que cette attention n'ait été attirée sur elles par d'autres causes. Plus généralement, les phénomènes inconscients privilégiés, ceux qui sont susceptibles de devenir conscients, ce sont ceux qui, directe- ment ou indirectement, affectent le plus profondé- ment notre sensibilité.
On peut s'étonner de voir invoquer la sensibilité à propos de démonstrations mathématiques qui, semble-t-il, ne peuvent intéresser que l'intelligence. Ce serait oublier le sentiment de la beauté mathé- matique, de l'harmonie des nombres et des formes, de l'élégance géométrique. C'est un vrai sentiment esthétique que

tous les vrais mathématiciens con- naissent. Et c'est bien là de la sensibilité." (Science et methode, Poincare)

45. "Autre observation. Il n'arrivejamais que le travail inconscient nous fournisse tout fait le résultat d'un calcul un peu long, où l'on n'a qu'à appliquer des règles fixes. On pourrait croire que le moi sublimi- nal, tout automatique, est particulièrement apte à ce genre de travail qui est en quelque sorte exclu- sivement mécanique. Il semble qu'en pensant le soir aux facteurs d'une multiplication, on pourrait espé- rer trouver le produit tout fait à son réveil, ou bien encore qu'un calcul algébrique, une vérification, par exemple, pourrait se faire inconsciemment. Il n'en est rien, l'observation le prouve. Tout ce qu'on peut espérer de ces inspirations, qui sont les fruits du travail inconscient, ce sont des points de départ pour de semblables calculs; quant aux cal- culs eux-mêmes, il faut les faire dans la seconde période de travail conscient, celle qui suit l'inspira- tion; celle où l'on vérifie les résultats de cette inspi- ration et où l'on en tire les conséquences. Les règles de ces calculs sont strictes et compliquées; elles exigent la discipline, l'attention, la volonté, et, par suite, la conscience. Dans le moi subliminal règne, au contraire, ce que j'appellerais la liberté, si l'on pouvait donner ce nom à la simple absence de dis- cipline et au désordre né du hasard. Seulement, ce désordre même permet des accouplements inat- tendus." (Science et methode, Poincare)
46. "Les calculs d'Abraham nous font connaître la loi suivant laquelle la masse fictive varie en fonction de la vitesse ; l'expérience de Kaufmann nous fait con- naître la loi de variation de la masse totale. La comparaison de ces deux lois nous permettra donc de déterminer le rapport de la masse réelle à la masse totale.
Telle est la méthode dont s'est servi Kaufmann pour déterminer ce rapport. Le résultat est bien surprenant : la masse réelle est nulle. On s'est trouvé ainsi conduit à des conceptions tout à fait inattendues. On a étendu à tous les corps ce qu'on n'avait démontré que pour les corpuscules cathodiques. Ce que nous appelons masse ne serait qu'une apparence ; toute inertie serait d'origine électromagnétique. Mais alors la niasse ne serait plus constante, elle augmenterait avec la vitesse ; sensiblement constante pour des vitesses pouvant aller jusqu'à 1.000 kilomètres par seconde, elle croîtrait ensuite et deviendrait infinie pour la vitesse de la lumière. La masse transversale ne serait plus égale à la masse longitudinale : elles seraient seule-ment à peu près égales si la vitesse n'est pas trop grande. Le principe B de la Mécanique ne serait plus vrai," (Science et methode, Poincare)
47. "La matière est tout entière formée d'électrons portant des charges énormes, et, si elle nous sem- ble neutre, c'est que les charges de signe contraire de ces électrons se compensent. On peut se repré- senter, par exemple, une sorte de système solaire formé d'un gros électron positif, autour duquel graviteraient de nombreuses petites planètes qui seraient des électrons négatifs, attirés par l'électri- cité de nom contraire qui charge l'électron central. Les charges négatives de ces planètes compense-raient la charge positive de ce Soleil, de sorte que la somme algébrique de toutes ces charges serait nulle." (Science et methode, Poincare)
48. "Dans certains corps, les métaux, par exemple, nous aurions des électrons immobiles, entre les- quels circuleraient des électrons mobiles jouissant d'une entière liberté, sauf celle de sortir du corps métallique et de franchir la surface qui le sépare du vide extérieur ou de l'air, ou de tout autre corps non métallique. Ces électrons mobiles se compor- tent alors, à l'intérieur du corps métallique, comme le font, d'après la théorie cinétique des gaz, les mo- lécules d'un gaz à l'intérieur du vase où ce gaz esi renfermé. Mais, sous l'influence d'une différence de potentiel, les électrons mobiles négatifs tendraient à aller tous d'un côté, et les électrons mobiles posi- tifs de l'autre. C'est ce qui produirait les courants électriques, et c'est pour cela que ces corps seraient conducteurs. D'autre part, les vitesses de nos élec- trons seraient d'autant plus grandes que la tempé- rature serait plus élevée, si nous acceptons l'assi- milation avec la théorie cinétique des gaz. Quand un de ces électrons mobiles rencontrerait la sur- face du corps métallique, surface qu'il ne peut franchir, il se réfléchirait comme une bille de bil- lard qui a touché la bande, et sa vitesse subirait un brusque changement de direction. Mais, quand un électron change de direction, ainsi que nous le verrons plus loin, il devient la source d'une onde lumineuse, et c'est pour cela que les métaux chauds sont incandescents.
Dans d'autres corps, les diélectriques et les corps transparents, les électrons mobiles jouissent d'une liberté beaucoup moins grande. Ils restent comme attachés à des électrons fixes qui les attirent. Plus ils s'en éloignent, plus cette attraction devient grande et tend à les ramener en arrière. Ils ne peuvent donc subir que de petits écarts ; ils ne peuvent plus circuler, mais seulement osciller au- tour de leur position moyenne. C'est pour cette raison que ces corps ne seraient pas conducteurs; ils seraient, d'ailleurs, le plus souvent transpa- rents, et ils seraient réfringents, parce que les vibrations lumineuses se communiqueraient aux électrons mobiles, susceptibles d'oscillation, et qu'il en résulterait une perturbation.
Je ne puis donner ici le détail des calculs ; je me bornerai à dire que cette théorie rend compte de tous les faits connus, et qu'elle en a fait prévoir de nouveaux, tels que le phénomène de Zeeman" (Science et methode, Poincare)
49. "2° Mais il y a un autre point de vue; on peut supposer qu'il n'y a pas d'atome neutre, et que les électrons positifs sont dépourvus de masse réelle au même titre que les électrons négatifs. Mais alors, la masse réelle s'évanouissant, ou bien le mot masse n'aura plus aucun sens, ou bien il fau- dra qu'il désigne la masse fictive électromagné- tique ; dans ce cas, la masse ne sera plus constante, la masse transversale ne sera plus égale à la masse longitudinale , les principes de la Mécanique seront renversés.
Un mot d'explication d'abord. Nous avons dit que, pour une même charge, la masse totale d'un électron

positif est beaucoup plus grande que celle d'un électron négatif. Et alors il est naturel de penser que cette différence s'explique, parce que l'électron positif a, outre sa masse fictive, une masse réelle considérable; ce qui nous ramènerait à la première hypothèse. Mais on peut admettre égale- ment que la masse réelle est nulle pour les uns comme pour les autres, mais que la masse fictive de l'électron positif est beaucoup plus grande, parce que cet. électron est beaucoup plus petit. Je dis bien : beaucoup plus polit. Et, en effet, dans cette hypothèse, l'inertie est d'origine exclusive- ment électromagnétique; elle se réduit à l'inertie de l'éther; les électrons ne sont plus rien par eux- mêmes ; ils sont seulement des trous dans l'éther, et autour desquels s'agite l'éther ; plus ces trous seront petits, plus il y aura d'éther, plus, par con-séquent, l'inertie de l'éther sera grande.
Comment décider entre ces deux hypothèses ? En opérant sur les rayons-canaux, comme Kaufmann l'a fait sur les rayons B? C'est impossible; la vitesse de ces rayons est beaucoup trop faible. Chacun devra-t-il donc se décider d'après son tempérament, les conservateurs allant d'un côté et les amis du nouveau de l'autre? Peut-être, mais, pour bien faire comprendre les arguments des novateurs, il faut faire intervenir d'autres considérations." (Science et methode, Poincare)

50. "Yet we can also appreciate Cardano's position. For the plain fact is that Tartaglia's giving him the formula for x3 + ax = N or even the formulae for this and for x3 = ax + N31 did not automatically provide solutions for all the other forms the cubic equation can take.32 Men had not yet learned the trick of setting all terms on one side of the equality sign with a zero on the other, and they had not yet learned that missing terms are not missing but merely have a zero coefficient." (T.R Witmer,Preface of the translation of Cardano's Ars Magna)
51. "These were the two conditions that had to be met before there could be, properly speaking, a formula for solving the cubic.33 In fact, there was no one cubic at that time. There were thirteen of them, and the formula for each of the thirteen had to be devised and proved separately. This is what Cardano did. It would have been surprising, therefore, if he had not felt entitled to publish the results of his labors, surprising if he had thought that his promise (assuming he did, in fact, make one) fore- closed him forever from publishing not only the formula he was given but everything that could be said to have stemmed from it regardless ofhis own contribution, and particularly surprising ifhe had so thought after he discovered that Tartaglia was not the only one who possessed the basic formula and that it had been written down by Scipione del Ferro for the benefit of posterity. Not only would it have been sur- prising, but the world would have been that much poorer for it since Tartaglia, even though he had had a lengthy headstart on Cardano, never got around to completing the work he had hoped to finish and never, even through posthumous publication, enlightened the world on how far he had carried his enterprise" (T.R Witmer,Preface of the translation of Cardano's Ars Magna)
52. "I have not hesitated, however, to use modern terminology even in these passages-"first power" or "the unknown," for example, for the author's res or positio-and in much of the text I have used modern symbolism (including literal coefficients) even though symbols, modern or otherwise, are completely lacking in the original; unless one counts such abbreviations as p: (plus), m: (minus) and ~ (radix = root) as symbols. Likewise, though some may think otherwise, I can see no advantage to translating a word like res as "thing" or "things." First, such a translation is likely to distract a reader from the idea that the author is trying to get across and to focus his attention on an archaism instead. Second, I have convinced myself that res had become, in Cardano's use of it, as much of an abstract term as is our x and that, therefore, x or "first power" is a more accurate reflection of what Cardano meant than" thing" would be." (T.R Witmer,Preface of the translation of Cardano's Ars Magna)
53. "Cardano's work varies in style between the tediously prolix and the annoyingly cryptic." (T.R Witmer,Preface of the translation of Cardano's Ars Magna)
54. "Yet the nature of AD is not the same as that of 40 or of AB, since a surface is far from the nature of a number and from that of a line, though somewhat closer to the latter. This truly is sophisticated,6 since with it one cannot carry out the operations one can in the case of a pure negative and other [numbers]. " (Cardano, Ars Magna)
55. "For as positio [the first power] refers to a line, quadratum [the square] to a surface, and cubum [the cube] to a solid body, it would be very foolish for us to go beyond this point. Nature does not permit it. " (Cardano, Ars Magna)
56. "“Lecturing is that mysterious process by means of which the contents of the note-book of the professor are transferred through the instrument of the fountain pen to the note-book of the student without passing through the mind of either.” (Edwin Slosson?)
57. "According to JACOBI The theory of elliptic functions was born between the twenty-third of December 1751 and the twenty-seventh of January 1752. On the former date, the Berlin Academy of Sciences handed over to EULER the two volumes of Marchese FAGNANO's Produzioni Mathematiche, published in Pesary in 1750 and just received from the author; Euler was requested to examine the book and draft a suitable letter of thanks. On the latter date, Euler, referring explicitly to Fagnano's work on the lemniscate, read to the Academy the first of a series of papers, eventually proving in full generality the addition and multiplication theorems for elliptic integrals." (Weil, Number theory an approach through history)
58. "Its first birth must have occurred at some point between 1621 and 1636, probably closer to the latter date. In 1621, the Greek text of DIOPHANTUS was published by BACHET, along with a useful Latin translation and an extensive commentary. IT is not known when FERMAT acquired a copy of this book (the same one,

no doubt, into whose margins he was later to jot down some of his best discoveries), not when he began to read it; but by 1636, as we learn from his correspondence, he had not only studied it carefully but was already developing ideas of his own about a variety of topics touched upon in that volume.
From then on, "numbers", i.e, number theory, never ceased to be among Fermat's major interests; but his valiant efforts to gain friends for his favorite subject were not, on the whole, crowned with success. "There is no lack of better topics for us to spend our time on" was young HUYGEN's comment to WALLIS. At one time Fermat cherished the thought of devoting a whole book to number theory. On another occasion he tried to persuade PASCAL to collaborate with him in writing such a book; of course, he realized the Pascal's gifts of exposition were far superior to his own. To our great loss, Pascal showed no interest and politely declined the suggestion; his views may well have been similar to those of Huygens. After Fermat's death in 16665, there was a great demand for a publication of his writings, hardly any of which had ever appeared in print. In 1670, his son Samuel published a reprint of Bachet's Diophantus, along with Fermat's marginal notes and an essay by the Jesuite father Jacques be BILLY on Fermat's methods for solving certain types of so-called Diophantine equations. This was followed in 1679 by the publication, also by Samuel, of a volume of his father's Varia Opera, including few letters of arithmetical content. But it took half a century for this to have any effect, and in the meanwhile number theory seemed to have died off.
As to its rebirth, we can pinpoint it quire accurately. In 1729, young EULER was in St. Petersburg, an adjunct of the newly founded Academy of Sciences; his friend and patron GOLDBACH was in Moscow. Their correspondence has been carefully preserved and was published by Euler's great-grandson in 1843. Goldbach, in his own amateurish way, was keenly interested in mathematics and particularly in "numbers"; it is in a letter to Euler that he stated the conjecture to which his name has remained attached. On the first of December 1729, Goldbach asked Euler for his views about Fermat's statement that all integers 2^(2n)+1 are primes. In his answer, Euler expresses some doubts; but nothing new occurs until the fourth of June, when Euler reports that he has "just been reading Fermat" and that he has been greatly impressed by Fermat's assertion that every integer is a sum of four squares (and also of 3 triangular numbers, of 5 pentagonal numbers, etc.). After that day, Euler never lost sight of this topic and of number theory in general; eventually LAGRANGE followed suit, then LEGENDRE, then GAUSS with whom number theory reached full maturity. Although never a popular subject, it has been doing well ever since." (Weil, Number theory an approach through history)

59. "Indeterminate equations of the first degree, to be solved in integers, must have occurred quite early in various cultures, either as puzzles (as exemplified by various epigrams in the Greek Anthology), or, more interestingly for the mathematician, as calendar problems. A typical problem of this kind may be formulated as a double congruence x== p(mod a), a== q(mod b)" (Weil, Number theory an approach through history)
60. "One is on somewhat firmer ground in assuming that problems of the type x^2-Ny^2=±m, for given positive integers N and m, must have occured rather early in Greek mathematics, presumably in connection with the problem of obtaining good ration approximations for √N when N is not a square. Clearly, if x^2-Ny^2=±m and if x and y are large in comparison with m, the ratio of x to y gives a good approximation for √N, as is apparent from the identity x/y-√N=(1/y)(x^2-Ny^2 / yx + y√N)" (Weil, Number theory an approach through history)
61. "As is the case with many brilliant discoveries, this one can be seen in retrospect as deriving quite naturally from the earlier work" (Weil, Number theory an approach through history)
62. "For the Indians, of course, the effectiveness of the cakravaala could be no more than an experimental fact, based on their treatment of a great many specific cases, some of them of considerable complexity and involving (to their delight, no doubt) quite large numbers. As we shall see, Fermat was the first to perceive the need for a general proof, and Lagrange the first to publish one. Nevertheless, to have developed the cakravaala and to have applied it successfully to such difficult numerical cases as N=61 or N=67 had been no mean achievement." (Weil, Number theory an approach through history)
63. "Also during the fifties, Euler studied Diophantus carefully, hoping to bring some order into what had all the appearances of a haphazard collection. He did succeed in isolating a few of the Greek geometer's favorite tricks, but otherwise the result of his effort was disappointing; only the later developments of algebraic geometry were to throw light into a subject which was not yet ready for even partial clarification" (Weil, Number theory an approach through history)
64. "In his paper Réflexions sur la résolution algébrique des équations ("Thoughts on the algebraic solving of equations"), Joseph Louis Lagrange introduced a new method to solve equations of low degree.

    This method works well for cubic and quartic equations, but Lagrange did not succeed in applying it to a quintic equation, because it requires solving a resolvent polynomial of degree at least six.[19][20][21] This is explained by the Abel–Ruffini theorem, which proves that such polynomials cannot be solved by radicals. Nevertheless the modern methods for solving solvable quintic equations are mainly based on Lagrange's method.[21]

    In the case of cubic equations, Lagrange's method gives the same solution as Cardano's, where the latter may seem almost magical to the modern reader. But Cardano explains in his book Ars Magna how he arrived at the idea of considering the unknown of the cubic equation as a sum of two other quantities, by drawing attention to a geometrical problem that involves two cubes of different size. Lagrange's method may also be applied directly to the general cubic equation (1) without using the reduction to the trinomial equation (2). Nevertheless the computation is much easier with this reduced equation.

Suppose that x0, x1 and x2 are the roots of equation (1) or (2), and define , so that ζ is a primitive third root of unity which satisfies the relation . We now set

This is the discrete Fourier transform of the roots: observe that while the coefficients of the polynomial are symmetric in the roots, in this formula an order has been chosen on the roots, so these are not symmetric in the roots. The roots may then be recovered from the three si by inverting the above linear transformation via the inverse discrete Fourier transform, giving" (Lagrange's Biography)

65. "One of the most subtle and interesting questions which presents itself in the investigation of space is that regarding the nature of continuity. This is profoundly significant for physics, and some logical theory concerning it is needed in any rigorous treatment of geometry. The continuity of time and space was much discussed by the Greek philosophers; f the problem is essentially to determine the relation of geometry to arithmetic." (Whittaker, Euclid to Eddington)
66. "The first person to use second-order interpolation for computing the positions of the sun and the moon in constructing a calendar is said to be the astronomer Liu` Zhu´o. Around 600 AD he used this technique in producing the so-called Hua´ng j´ı l`ı, or “Imperial Standard Calendar”. According to L˘ı Y˘an & Du` Sh´ıra´n [204], the formula involved in his computations reads, in modern notation:5
ξ ξ2
$f(x0+ξT)=f(x0) + 2(Δ1+Δ2) + ξ(Δ1−Δ2) − 2(Δ1−Δ2)$, (1)
with 0 􏱼 ξ < 1, T > 0, Δ1 = f(x0+T)−f(x0), and Δ2 = f(x0+2T)−f(x0+T), and with f(x0), f(x0 + T), and f(x0 + 2T) the observed results at times x0, x0 + T, and x0 + 2T, respectively. This formula is closely related to later Western interpolation formulae, to be discussed in the next section. Methods for second-order interpolation of unequal-interval observations were later used by the astronomer Monk Y`ı X´ıng in producing the so-called “D`a Y˘an Calendar” (727 AD) and by Xu´ A´ng in producing the “Xua¯n M´ıng Calendar” (822 AD). The latter also used a second-order formula for interpolation of equal-interval observations equivalent to the formula used by Liu` Zhu´o.
Accurate computation of the motion of celestial bodies, however, requires more sophis- ticated interpolation techniques than just second order. More complex techniques were later developed by Gu¯o Sh˘ouj`ıng and others. In 1280 AD they produced the so-called Sh`ou sh´ı l`ı, or “Works and Days Calendar”, for which they used third-order interpolation. Although they did not write down explicitly third-order interpolation formulae, it follows from their computations recorded in tables that they had grasped the principle.
Important contributions in the area of finite-difference computation were made by the Chinese mathematician Zhu¯ Sh`ıji´e." (Meijering, A Chronology of Interpolation)
67. "However, in times where all efforts are directed towards the future, the past may easily be forgotten. It is no sinecure, scanning the literature, to get a clear picture of the development of the subject through the ages. This is quite unfortunate, since it implies a risk of researchers going over grounds covered earlier by others. History has shown many examples of this" (Meijering, A Chronology of Interpolation)
68. "It is an extremely useful thing to have knowledge of the true origins of memorable discoveries, especially those that have been found not by accident but by dint of meditation. It is not so much that thereby history may attribute to each man his own discoveries and others should be encouraged to earn like commendation, as that the art of making discoveries should be extended by considering noteworthy examples of it.
G. W. Leibniz, Historia et Origo Calculi Differentialis (ca. 1714). Translation as in J. M. Child, "Newton and the Art of Discovery", in Isaac Newton 1642-1727: A Memorial Volume, W. J. Greenstreet (ed.), G. Bell and Sons, London, 1927, pp. 117-129."
69. "" I am sure that no subject loses more than mathematics by any attempt to dissociate it from its history."—J. W. L. Glaisher" (Cajori, A history of mathematics)
70. "As to his method of work E. Borel says: "The-methodofPoincareisessentiallyactiveandconstructive. He approaches a question, acquaints himself with its present condition without being much concerned about its history, finds out immediately the new analytical formulas by which the question can be advanced, deduces hastily the essential results, and then passes to another ques- tion. After having finished the writing of a memoir, he is sure to pause for a while, and to think out how the exposition could be im- proved; but he would not, for a single instance, indulge in the idea of devotingseveraldaystodidacticwork. Thosedayscouldbebetter utilized in exploring new regions."" (Cajori, A history of Mathematics)
71. "Euler developed the calculus of finite differences in the first chapters of his Institutiones calculi differentialis, and then deduced the differen- tial calculus from it. He established a theorem on homogeneous func- tions, kno^n by his name, and contributed largely to the theory of differential equations, a subject which had received the attention of I. Newton, G. W. Leibniz, and the Bernoullis, but was still unde- veloped." (Cajori, A history of Mathematics) <Tag1>
72. "In this way, we are led to a definition of differential calculus: It is a method for determining the ratio of the vanishing increments that any functions take on when the variable, of which they are functions, is given a vanishing increment. It is clearly manifest to those who are not strangers to this subject that the true character of differential calculus is contained in this definition and can be adequately deduced from it." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag1>

73. "On the other hand, this ratio would not be true unless that increment ω vanishes and becomes absolutely equal to zero. Hence, if this nothing that is indicated by ω refers to the increment of the quantity x, since this has the ratio to the increment of the square x2 as 1 to 2x, the increment of the square x2 is equal to 2xω and for this reason is also equal to zero. Although both of these increments vanish simultaneously, this is no obstacle to their ratios being determined as 1 to 2x. With respect to this nothing that so far has been represented by the letter ω, in differential calculus we use the symbol dx and call it the differential of x, since it is the increment of the quantity x. When we put dx for ω, the differential of x2 becomes 2x dx. In a similar way, it is shown that the differential of the cube x3 will be equal to 3x2 dx. In general, the differential of any quantity xn will be equal to nxn−1 dx. No matter what other functions of x might be proposed, differential calculus gives rules for finding its differential. Nevertheless, we must constantly keep in mind that since these differentials are absolutely nothing, we can conclude nothing from them except that their mutual ratios reduce to finite quantities. Thus, it is in this way that the principles of differential calculus, which are in agreement with proper reasoning, are established, and all of the objections that are wont to be brought against it crumble spontaneously; but these arguments retain their full rigor if the differentials, that is, the infinitely small, are not completely annihilated." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag1>
74. "To many who have discussed the rules of differential calculus, it has seemed that there is a distinction between absolutely nothing and a special order of quantities infinitely small, which do not quite vanish completely but retain a certain quantity that is indeed less than any assignable quan- tity. Concerning these, it is correctly objected that geometric rigor has been neglected. Because these infinitely small quantities have been neglected, the conclusions that have been drawn are rightly suspected. Although these in- finitely small quantities are conceived to be few in number, when even a few, or many, or even an innumerable number of these are neglected, an enormous error may result. There is an attempt wrongfully to refute this objection with examples of this kind, whereby conclusions are drawn from differential calculus in the same way as from elementary geometry. Indeed, if these infinitely small quantities, which are neglected in calculus, are not quite nothing, then necessarily an error must result that will be the greater the more these quantities are heaped up. If it should happen that the er- ror is less, this must be attributed to a fault in the calculation whereby certain errors are compensated by other errors, rather than freeing the cal- culation from suspicion of error. In order that there be no compensating one error by a new one, let me fix firmly the point I want to make with clear examples. Those quantities that shall be neglected must surely be held to be absolutely nothing. Nor can the infinitely small that is discussed in differential calculus differ in any way from nothing. Even less should this business be ended when the infinitely small is described by some with the example wherein the tiniest mote of dust is compared to a huge mountain or even to the whole terrestrial globe. If someone undertakes to calculate the magnitude of the whole terrestrial globe, it is the custom easily to grant him an error not only of a single grain of dust, but of even many thousands of these. However, geometric rigor shrinks from even so small an error, and this objection would be simply too great were any force granted to it. Then it is difficult to say what possible advantage might be hoped for in distinguishing the infinitely small from absolutely nothing. Perhaps they fear that if they vanish completely, then will be taken away their ratio, to which they feel this whole business leads. It is avowed that it is impossi- ble to conceive how two absolutely nothings can be compared. They think that some magnitude must be left for them that can be compared. They are forced to admit that this magnitude is so small that it is seen as if it were nothing and can be neglected in calculations without error. Neither do they dare to assign any certain and definite magnitude, even though incompre- hensibly small. Even if they were assumed to be two or three times smaller, the comparisons are always made in the same way. From this it is clear that this magnitude gives nothing necessary for undertaking a comparison, and so the comparison is not taken away even though that magnitude vanishes completely." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag1>
75. "We find among some ancient authors some trace of these ideas, so that we cannot deny to them at least some conception of the analysis of the infinite. Then gradually this knowledge grew, but it was not all of a sudden that it has arrived at the summit to which it has now come. Even now, there is more that remains obscure than what we see clearly. As differential calculus is extended to all kinds of functions, no matter how they are pro-duced, it is not immediately known what method is to be used to compare the vanishing increments of absolutely all kinds of functions. Gradually this discovery has progressed to more and more complicated functions. For example, for the rational functions, the ultimate ratio that the vanishing increments attain could be assigned long before the time of Newton and Leibniz, so that the differential calculus applied to only these rational func- tions must be held to have been invented long before that time. However, there is no doubt that Newton must be given credit for that part of differ- ential calculus concerned with irrational functions. This was nicely deduced from his wonderful theorem concerning the general evolution of powers of a binomial. By this outstanding discovery, the limits of differential calculus have been marvelously extended. We are no less indebted to Leibniz insofar as this calculus at that time was viewed as individual tricks, while he put it into the form of a discipline, collected its rules into a system, and gave a crystal-clear explanation. From this there followed great aids in the further development of this calculus, and some of the open questions whose an- swers were sought were pursued through certain definite principles. Soon, through the studies of both Leibniz and the Bernoullis, the bounds of dif- ferential calculus were extended even to transcendental functions, which had in part already been discussed. Then, too, the

foundations of integral calculus were firmly established. Those who followed in the elaboration of this field continued to make progress. It was Newton who gave very com- plete papers in integral calculus, but as to its first discovery, which can hardly be separated from the beginnings of differential calculus, it cannot with absolute certainty be attributed to him. Since the greater part has yet to be developed, it is not possible to say at this time that this calculus has absolutely been discovered. Rather, let us with a grateful mind acknowl- edge each one according to his efforts toward its completion. This is my judgment as to the attribution of glory for the discovery of this calculus, about which there has been such heated controversy." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag1>

76. "No matter what name the mathematicians of different nations are wont to give to this calculus, it all comes to this, that they all agree on this outstanding definition. Whether they call the vanishing increments whose ratios are under consideration by the name differentials or fluxions, these are always understood to be equal to zero, and this must be the true notion of the infinitely small. From this it follows that everything that has been debated about differentials of the second and higher orders, and this has been more out of curiosity then of usefulness, comes back to something very clear, namely, that when everything vanishes together we must con- sider the mutual ratio rather than the individual quantities. Since the ratio between the vanishing increments of the functions is itself expressed by some function, and if the vanishing increment of this function is compared with others, the result must be considered as the second differential. In this way, we must understand the development of differentials of higher orders, in such a way that they always are seen to be truly finite quantities and that this is the only proper way for them to be represented. At first sight, this description of analysis of the infinite may seem, for the most part, both shallow and extremely sterile, although that obscure notion of the infinitely small hardly offers more. In truth, if the ratios that connect the vanishing increments of any functions are clearly known, then this knowledge very of- ten is of the utmost importance and frequently is so important in extremely arduous investigations that without it almost nothing can be clearly un- derstood. For instance, if the question concerns the motion of a shot fired from a cannon, the air resistance must be known in order to know what the motion will be through a finite distance, as well as both the direction of the path at the beginning and also the velocity, on which the resistance depends. But this changes with time. However, the less distance the shot travels, the less the variation, so that it is possible more easily to come to knowledge of the true relationship. In fact, if we let the distance vanish, since in that case both the difference in direction and change in velocity also are removed, the effect of resistance produced at a single point in time, as well as the change in the path, can be defined exactly. When we know these instantaneous changes or, rather, since these are actually nothing, their mutual relationship, we have gained a great deal. Furthermore, the work of integral calculus is to study changing motion in a finite space. It is my opinion that it is hardly necessary to show further the uses of differen- tial calculus and analysis of the infinite, since it is now sufficiently noted, if even a cursory investigation is made. If we want to study more carefully the motion of either solids or fluids, it cannot be accomplished without analysis of the infinite. Indeed, this science has frequently not been suf- ficiently cultivated in order that the matter can be accurately explained. Throughout all the branches of mathematics, this higher analysis has pen- etrated to such an extent that anything that can be explained without its intervention must be esteemed as next to nothing." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag1>
77. "Even with the greatest care, the first principles of differential calculus are hardly sufficiently developed that I should bring them, as it were drawn from geometry, to this science. Here, everything is kept within the bounds of pure analysis, so that in the explanation of the rules of this calculus there is no need for any geometric figures." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag1>
78. "If we carefully consider all of the rules we have given so far, and we compare them with each other, we can reduce them to one universal principle, which we will be able to prove rigorously in paragraph 214. In the meantime it is not so difficult to see intuitively that this is true. Any algebraic function is composed of parts that are related to each other by addition, subtraction, multiplication, or division, and these parts are either rational or irrational. We call those quantities that make up any function its parts.
We differentiate any part of a given function by itself, as if it were the only variable and the other parts were constants. Once we have the individ- ual differentials of the parts making up the function, we put it all together in a single sum, and thus we obtain the differential of the given function.
By means of these rules almost all functions can be differentiated, not even excepting transcendental functions, as we shall show later." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis)
79. "Obviously these lists would contain gaps, due to either atmospherical conditions hampering observation or the fact that celestial bodies may not be visible during certain periods. From his study of ephemerides found on ancient astro- nomical cuneiform tablets originating from Uruk and Babylon in the Seleucid period (the last three centuries BC), the historian-mathematician Neugebauer [230, 231] concluded that interpolation was used in order to fill these gaps. Apart from linear interpolation, the tablets also revealed the use of more complex interpolation methods. Precise formulations of the latter methods have not survived, however." (A chronology of interpolation)
80. "This kind of change always occurs unless the function has only the appear- ance of a function of a variable, while in reality it is a constant, for example, x0. In this case the function remains constant no matter how the value of x changes." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag2>
81. "We will add a few things about the inverse problem. That is, if we are given the difference of some function, we would like to investigate the function itself. Since this is generally very difficult and frequently requires

analysis of the infinite, we will discuss only some of the easier cases. First of all, proceeding backwards, if we have found the difference for some function and that difference is now given, we can, in turn, exhibit that function from which the difference came." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag3>

82. "If the given difference is for a polynomial function of x, then its sum (or the function of which it is the difference) can easily be found with these formulas. Since the difference is made up of different powers of x, we find the sum of each term and then collect all of these terms." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag3>
83. " If a given difference is any power of x, then its sum, or the function from which it came, can be given. However, if the given difference is of some other form, so that it cannot be expressed in parts that are powers of x, then the sum may be very difficult, and frequently impossible, to find, unless by chance it is clear that it came from some function. For this reason it is useful to investigate the difference of many functions and carefully to note them, so that when this difference is given, its sum or the function from which it came can be immediately given. In the meantime, the method of infinite series will supply many rules whose use will marvelously aid in finding sums." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis)
84. "We should observe this method carefully, since sums of differences of this kind cannot be found by the previous method. If the difference has a numerator or the denominator has factors that do not form an arithmetic progression, then the safest method for finding sums is to express the frac- tion as the sum of partial fractions. Although we may not be able to find the sum of an individual fraction, it may be possible to consider them in pairs." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis)
85. "Since the general term is formed from the differences, any series can be continued backwards so that if the differences finally are constant, the gen- eral term can be expressed in finite form. If the differences are not finally constant, then the general term requires an infinite expression. From the general term we can also define terms whose indices are fractions, and this gives an interpolation of the series." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis)
86. "After these remarks about the general terms of series we now turn to the investigation of the sum, or general partial sum, of a series of any order. Given any series the general partial sum is a function of x that is equal to the sum of x terms of the series. Hence the general partial sum will be such that if x = 1, then it will be equal to the first term of the series. If x = 2, then it gives the sum of the first two terms of the series; let x = 3, and we have the sum of the first three terms, and so forth. Therefore, if from a given series we form a new series whose first term is equal to the first term of the given series, second term is the sum of the first two terms of the given series, the third of the first three terms, and so forth, then this new series is its partial sum series. The general term of this new series is the general partial sum. Hence, finding the general partial sum brings us back to finding the general term of a series." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag3>
87. "For this reason, the first differences of the given series are the second differences of the series of partial sums; the second differences of the former are the third differences of the latter; the third of the former are the fourth of the latter, and so forth. Hence, if the given series finally has constant differences, then the series of partial sums also eventually has constant differences and so is of the same kind except one order higher. It follows that this kind of series always has a partial sum that can be given as a finite expression." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag3>
88. " Since they can find no way out of this labyrinth, nor can they meet the objections in a suitable way, they flee to distinctions, and to the objections they reply with arguments supplied by the senses and the imagination. In this situation one should rely solely on the intellect, since the senses and ar- guments depending on them frequently are fallacious. Pure intellect admits the possibility that one thousandth part of a cubic foot of matter might lack all extension, while this seems absurd to the imagination. That which frequently deceives the senses may be true, but it can be decided by no one except mathematicians. Indeed, mathematics defends us in particular against errors of the senses and teaches about objects that are perceived by the senses, sometimes correctly, and sometimes only in appearance. This is the safest science, whose teaching will save those who follow it from the illusions of the senses. It is far removed from those responses by which metaphysicians protect their doctrine and thus rather make it more sus- pect." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag2>
89. "83. This theory of the infinite will be further illustrated if we discuss that which mathematicians call the infinitely small. There is no doubt that any quantity can be diminished until it all but vanishes and then goes to nothing. But an infinitely small quantity is nothing but a vanishing quantity, and so it is really equal to 0. There is also a definition of the infinitely small quantity as that which is less than any assignable quantity. If a quantity is so small that it is less than any assignable quantity, then it cannot not be 0, since unless it is equal to 0 a quantity can be assigned equal to it, and this contradicts our hypothesis. To anyone who asks what an infinitely small quantity in mathematics is, we can respond that it really is equal to 0. There is really not such a great mystery lurking in this idea as some commonly think and thus have rendered the calculus of the infinitely small suspect to so many. In the meantime any doubts that may remain will be removed in what follows, where we are going to treat this calculus.
84. Since we are going to show that an infinitely small quantity is really zero, we must first meet the objection of why we do not always use the same symbol 0 for infinitely small quantities, rather than some

special ones. Since all nothings are equal, it seems superfluous to have different signs to designate such a quantity. Although two zeros are equal to each other, so that there is no difference between them, nevertheless, since we have two ways to compare them, either arithmetic or geometric, let us look at quotients of quantities to be compared in order to see the difference. The arithmetic ratio between any two zeros is an equality. This is not the case with a geometric ratio. We can easily see this from this geometric proportion 2 : 1 = 0 : 0, in which the fourth term is equal to 0, as is the third. From the nature of the proportion, since the first term is twice the second, it is necessary that the third is twice the fourth.
85. These things are very clear, even in ordinary arithmetic. Everyone knows that when zero is multiplied by any number, the product is zero and that n·0 = 0, so that n : 1 = 0 : 0. Hence, it is clear that any two zeros can be in a geometric ratio, although from the perspective of arithmetic, the ratio is always of equals. Since between zeros any ratio is possible, in order to indicate this diversity we use different notations on purpose, especially when a geometric ratio between two zeros is being investigated. In the calculus of the infinitely small, we deal precisely with geometric ratios of infinitely small quantities. For this reason, in these calculations, unless we use different symbols to represent these quantities, we will fall into the greatest confusion with no way to extricate ourselves." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag2>

90. "If we accept the notation used in the analysis of the infinite, then dx indicates a quantity that is infinitely small, so that both dx = 0 and a dx = 0, where a is any finite quantity. Despite this, the geometric ratio a dx : dx is finite, namely a : 1. For this reason these two infinitely small quantities dx and adx, both being equal to 0, cannot be confused when we consider their ratio. In a similar way, we will deal with infinitely small quantities dx and dy. Although these are both equal to 0, still their ratio is not that of equals. Indeed, the whole force of differential calculus is concerned with the investigation of the ratios of any two infinitely small quantities of this kind. The application of these ratios at first sight might seem to be minimal. Nevertheless, it turns out to be very great, which becomes clearer with each passing day." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis)
91. "Since the infinitely small is actually nothing, it is clear that a finite quantity can neither be increased nor decreased by adding or subtracting an infinitely small quantity. Let a be a finite quantity and let dx be infinitely small. Then a+dx and a−dx, or, more generally, a±ndx, are equal to a. Whether we consider the relation between a ± n dx and a as arithmetic or as geometric, in both cases the ratio turns out to be that between equals. The arithmetic ratio of equals is clear: Since n dx = 0, we have a±ndx−a = 0. On the other hand, the geometric ratio is clearly of equals, since a ± n dx / a= 1. From this we obtain the well-known rule that the infinitely small vanishes in comparison with the finite and hence can be neglected. For this reason the objection brought up against the analysis of the infinite, that it lacks geometric rigor, falls to the ground under its own weight, since nothing is neglected except that which is actually nothing. Hence with perfect jus- tice we can affirm that in this sublime science we keep the same perfect geometric rigor that is found in the books of the ancients." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag2>
92. :88. Since the infinitely small quantity dx is actually equal to 0, its square dx2, cube dx3, and any other dxn, where n is a positive exponent, will be equal to 0, and hence in comparison to a finite quantity will vanish. However, even the infinitely small quantity dx2 will vanish when compared to dx. The ratio of dx±dx2 to dx is that of equals, whether the comparison is arithmetic or geometric. There is no doubt about the arithmetic; in the geometric comparison,
dx±dx2:dx = dx±dx2/dx= dx =1±dx=1.
In like manner we have dx ± dx3 = dx and generally dx ± dxn+1 = dx, provided that n is positive. Indeed, the geometric ratio dx ± dxn+1 : dx equals 1 + dxn, and since dxn = 0, the ratio is that of equals. Hence, if we follow the usage of exponents, we call dx infinitely small of the first order, dx2 of the second order, dx3 of the third order, and so forth. It is clear that in comparison with an infinitely small quantity of the first order, those of higher order will vanish." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag2> <Tag3>
93. "Once we have established the concept of the infinitely small, it is easier to discuss the properties of infinity, or the infinitely large. It should be noted that the fraction 1/z becomes greater the smaller the denominator z becomes. Hence, if z becomes a quantity less than any assignable quantity, that is, infinitely small, then it is necessary that the value of the fraction1/z becomes greater than any assignable quantity and hence infinite. For this reason, if 1 or any other finite quantity is divided by something infinitely small or 0, the quotient will be infinitely large, and thus an infinite quantity. Since the symbol ∞ stands for an infinitely large quantity, we have the equation a/dx =∞.
The truth of this is clear also when we invert: a/∞ =dx=0. Indeed, the larger the denominator z of the fraction a/z becomes, the smaller the value of the fraction becomes, and if z becomes an infinitely large quantity, that is z = ∞, then necessarily the value of the fraction a/∞ becomes infinitely small." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag3>
94. "Anyone who denies either of these arguments will find himself in great difficulties, with the necessity of denying even the most certain principles of analysis. If someone claims that the fraction a/0 is finite, for example equal to b, then when both parts of the equation are multiplied by the denominator, we obtain a = 0 · b. Then the finite quantity b multiplied by zero produces a finite a, which is absurd. Much less can the value b of the fraction a/0 be equal to 0; in no way can 0 multiplied by 0 produce the quantity a. Into the same absurdity will fall anyone who denies that a/∞ = 0, since then he would be saying that a/∞ = b, a finite

quantity. From the equation $a/\infty = b$ it would legitimately follow that $\infty = a/b$, but from this we conclude that the value of the fraction a/b, whose numerator and denominator are both finite quantities, is infinitely large, which of course is absurd. Nor is it possible that the values of the fractions $a/0$ and a/∞ could be complex, since the value of a fraction whose numerator is finite and whose denominator is complex cannot be either infinitely large or infinitely small." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag2>

95. "From this we conclude that series of this kind, which are called divergent, have no fixed sums, since the partial sums do not approach any limit that would be the sum for the infinite series. This is certainly a true conclusion, since we have shown the error in neglecting the final remainder. However, it is possible, with considerable justice, to object that these sums, even though they seem not to be true, never lead to error. Indeed, if we allow them, then we can discover many excellent results that we would not have if we rejected them out of hand. Furthermore, if these sums were really false, they would not consistently lead to true results; rather, since they differ from the true sum not just by a small difference, but by infinity, they should mislead us by an infinite amount. Since this does not happen, we are left with a most difficult knot to unravel." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis)
96. "110. I say that the whole difficulty lies in the name sum. If, as is commonly the case, we take the sum of a series to be the aggregate of all of its terms, actually taken together, then there is no doubt that only infinite series that converge continually closer to some fixed value, the more terms we actually add, can have sums. However, divergent series, whose terms do not decrease, whether their signs + and − alternate or not, do not really have fixed sums, supposing we use the word sum for the aggregate of all of the terms. Consider these cases that we have recalled, with erroneous sums, for example the finite expression 1/(1−x) for the infinite series 1 + x + x2 + x3 + · · · . The truth of the matter is this, not that the expression is the sum of the series, but that the series is derived from the expression. In this situation the name sum could be completely omitted.
    111. These inconveniences and apparent contradictions can be avoided if we give the word sum a meaning different from the usual. Let us say that the sum of any infinite series is a finite expression from which the series can be derived. In this sense, the true sum of the infinite series 1+x+x2 +x3 +· · · is 1/ (1 − x), since this series is derived from the fraction, no matter what value is substituted for x. With this understanding, if the series is convergent, the new definition of sum agrees with the usual definition. Since divergent series do not have a sum, properly speaking, there is no real difficulty which arises from this new meaning. Finally, with the aid of this definition we can keep the usefulness of divergent series and preserve their reputations." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis)
97. "114. The analysis of the infinite, which we begin to treat now, is noth- ing but a special case of the method of differences, explained in the first chapter, wherein the differences are infinitely small, while previously the differences were assumed to be finite. Hence, this case, in which the whole of analysis of the infinite is contained, should be distinguished from the method of differences. We use special names and notation for the infinitely small differences. With Leibniz we call infinitely small differences by the name differentials. From the discussion in the first chapter on the different orders of differences, we can easily understand the meaning of first, second, third, and so forth, differentials of any function. Instead of the symbol Δ, by which we previously indicated a difference, now we will use the symbol d, so that dy signifies the first differential of y, d2y the second differential, d3y the third differential, and so forth.
    115. Since the infinitely small differences that we are now discussing we call differentials, the whole calculus by means of which differentials are investigated and applied has usually been called differential calculus. The English mathematicians (among whom Newton first began to develop this new branch of analysis, as did Leibniz among the Germans) use different names and symbols. They call infinitely small differences, which we call differentials, fluxions and sometimes increments. These words seem to fit better in Latin, and they signify reasonably well the things themselves. A variable quantity by continuously increasing takes on various different values, and for this reason can be thought of as being in flux, from which comes the word fluxion. This was first used by Newton for the rate of change, to designate an infinitely small increment that a quantity receives, as if, by analogy, it were flowing." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag3>
98. "It might be uncivil to argue with the English about the use of words and a definition, and we might easily be defeated in a judgment about the purity of Latin and the adequacy of expression, but there is no doubt that we have won the prize from the English when it is a question of notation. For differentials, which they call fluxions, they use dots above the letters. Thus, y ˙ signifies the first fluxion of y, ̈y is the second fluxion, the third fluxion has three dots, and so forth. This notation, since it is arbitrary, cannot be criticized if the number of dots is small, so that the number can be recognized at a glance. On the other hand, if many dots are required, much confusion and even more inconvenience may be the result. For example, the tenth differential, or fluxion, is very inconveniently represented with ten dots, while our notation, d10y, is very easily understood. There are cases where differentials of even much higher order, or even those of indefinite order, must be represented, and for this the English mode is completely inapt." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag3>
99. "We have used both the words and notations that have been accepted in our countries; they are both more familiar and more convenient. Still, it is not beside the point that we have spoken about the English usage and notation, since those who peruse their books will need to know this if they are to be intelligible. The English are not so wedded to their ways that they refuse to read writings that use our methods. Indeed, we

have read some of their works with great avidity, and have taken from them much profit. I have also often remarked that they have profited from reading works from our regions. For these reasons, although it is greatly to be desired that everywhere the same mode of expression be used, still it is not so difficult to accustom ourselves to both methods, so that we can profit from books written in their way." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag2>

100. "Since up to this time we have used the letter ω to denote the differ- ence or the increment by which the variable x is understood to increase, now we understand ω to be infinitely small, so that ω is the differential of x, and for this reason we use our method of writing ω = dx. From now on, dx will be the infinitely small difference by which x is understood to increase. In like manner the differential of y we express as dy. If y is any function of x, the differential dy will indicate the increment that y receives when x changes to x + dx. Hence, if we substitute x + dx for x in the function y and we let yI be the result, then dy = yI − y, and this is understood to be the first differential, that is, the differential of the first order. Later we will consider the other differentials." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag3>
101. "We must emphasize the fact that the letter d that we are using here does not denote a quantity, but is used to express the word differential, in the same way that the letter l is used for the word logarithm when the theory of logarithms is being discussed. In algebra we are used to using the symbol √ for a root. Hence dy does not signify, as it usually does in analysis, the product of two quantities d and y, but rather we say the differential of y. In a similar way, if we write d2y, this is not the square of a quantity d, but it is simply a short and apt way of writing the second differential. Since we use the letter d in differential calculus not for some quantity, but only as a symbol, in order to avoid confusion in calculations when many different constant quantities occur, we avoid using the letter d. Just so we usually avoid the letter l to designate a quantity in calculations where logarithms occur. It is to be desired that these letters d and l be altered to give a different appearance, lest they be confused with other letters of the alphabet that are used to designate quantities. This is what has happened to the letter r, which first was used to indicate a root; the r has been distorted to √." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag3>
102. "If y is any function of x, as we have seen, its first differential will have the form P ω. Since ω = dx, we have dy = P dx. Whatsoever function of x y might be, its differential is expressed by the product of a certain function of x that we call P and the differential of x, that is, dx. Although the differentials of x and y are both infinitely small, and hence equal to zero, still there is a finite ratio between them. That is, dy : dx = P : 1. Once we have found the function P , then we know the ratio between the differential dx and the differential dy. Since differential calculus consists in finding differentials, the work involved is not in finding the differentials themselves, which are both equal to zero, but rather in their mutual geometric ratio." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag3>
103. "Differentials are much easier to find than finite differences. For the finite difference Δy by which a function increases when the variable quan- tity x increases by ω, it is not sufficient to know P , but we must investigate also the functions Q,R,S,... that enter into the finite difference that we have expressed as P ω + Qω2 + Rω3 + · · · .
For the differential of y we need only to know the function P. For this reason, from our knowledge of the finite difference of any function of x we can easily define its differential. On the other hand, from a function's differential it is not possible to figure out its finite difference. Nevertheless, we shall see (in paragraph 49 of the second part) that from a knowledge of the differentials of all orders it is possible to find the finite difference of any given function. Now, from what we have seen, it is clear that the first differential dy = P dx gives the first term of the finite difference, that is, Pω." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag3>
104. "Just as in differential calculus the differential of any quantity is investigated, so there is a kind of calculus that consists in finding a quantity whose differential is one that is already given, and this is called integral calculus. If any differential is given, that quantity whose differential is the proposed quantity is called its integral. The reason for this name is as follows: Since a differential can be thought of as an infinitely small part by which a quantity increases, that quantity with respect to which this is a part can be thought of as a whole, that is, integral, and for this reason is called an integral. Thus, since dy is the differential of y, y, in turn, is the integral of dy. Since d2y is the differential of dy, dy is the integral of d2y. Likewise, d2y is the integral of d3y, and d3y is the integral of d4y, and so forth. It follows that any differentiation, from an inverse point of view, is also an example of integration." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag3>
105. "Just as we use the symbol d for a differential, so we use the symbol ? to indicate an integral. Hence if this is placed before a differential, we are indicating that quantity whose differential is the one given. Thus, if the differential of y is p dx, that is, dy = p dx, then y is the integral of p dx. This is expressed as follows: y = p dx, since y = dy. Hence, the integral of pdx, symbolized by In a similar way if d2y = q dx, where dp = q dx, then the integral of d2y pdx, is that quantity whose differential is pdx. 􏰧􏰧 is dy, which is equal to pdx. Since p = qdx, we have dy = dx qdx, 􏰧􏰧􏰧 andhencey= dx qdx.Ifinaddition,dq=rdx,thenq= rdxand dp = dx rdx, so that if we place the symbol before both sides, we 􏰧􏰧 􏰧􏰧
havep= dx rdx.Finally,wehavedy=dx dx rdxandsoy= 􏰧􏰧􏰧 dx dx r dx." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag3>

106. "Since the differential dy is an infinitely small quantity, its integral y is a finite quantity. In like manner the second differential d2y is infinitely less that its integral dy. It should be clear that a differential will vanish in the presence of its integral. In order that this relation be better understood, the infinitely small can be categorized by orders. First differentials are said to be infinitely small of the first order; the infinitely small of the second order consist of differentials of the second order, which are homogeneous with dx2. Similarly, the infinitely small that are homogeneous with dx3 are said to be of the third order, and these include all differentials of the third order, and so forth. Hence, just as the infinitely small of the first order vanish in the presence of finite quantities, so the infinitely small of the second order vanishes in the presence of the infinitely small of the first order. In general, the infinitely small of any higher order vanishes in the presence of an infinitely small of a lower order." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis)
107. "145. The symbol d does not affect only the letter immediately following it, but also the exponent on that letter if it has one. Thus, dx2 does not express the differential of x2, but the square of the differential of x, so that the exponent 2 refers not to x but to dx. We could write this as dxdx in the same way as we would write the product of two differentials dx and dy as dxdy. The previous method, dx2, has the advantage of being both briefer and more usual. Especially if it is a question of higher powers of dx, the method of repeating so many times tends to be too long. Thus, dx3 denotes the cube of dx; we observe the same reasoning with regard to differentials of higher order. For example, d2y4 denotes the fourth power of the second-order differential d2y, and d3y2√x symbolizes the product of the square of the differential of the third order of y and √x. If it were the product with the rational quantity x then we would write it as xd3y2.
146. If we want the symbol d to affect more than the next letter, we need a special way of indicating that. In this case we will use parentheses to in- clude the expression whose differential we need to express. Then d 􏰁x2 + y2􏰂 means the differential of the quantity x2 + y2. It is true enough that if we want to designate the differential of a power of such an expression, then ambiguity can hardly be avoided. If we write d􏰁x2 +y2􏰂2, this could be understood to mean the square of d 􏰁x2 + y2􏰂. On the other hand, we can differential of 􏰁x2 + y2􏰂2. If the dot is missing, then d 􏰁x2 + y2􏰂2 indicates the square of d􏰁x2 +y2􏰂. The dot conveniently indicates that the symbol d applies to the whole expression after the dot. Thus, d.x dy expresses the differential of x dy, and d3.x dy√a2 + x2 is the third-order differential of the expression xdy√a2 +x2, which is the product of the finite quantities x and √a2 + x2 and the differential dy." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis) <Tag3>
108. "It is common to give other parts of analysis of the infinite. Besides differential and integral calculus, one sometimes finds differentio-differential calculus and exponential calculus. In differentio-differential calculus the methods of finding second and higher differentials are usually discussed. Since the method of finding differentials of any order will be discussed in this differential calculus, this subdivision, which seems to be based more on the importance of its discovery rather than the thing itself, we will omit. The illustrious Johann Bernoulli, to whom we are eternally grateful for innumerable and great discoveries in analysis of the infinite, extended the methods of differentiating and integrating to exponential quantities by means of exponential calculus. Since I plan to treat in both parts of calculus not only algebraic but also transcendental quantities, this special part has become superfluous and outside our plan." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis)
109. "150. I have decided to treat differential calculus first. I will explain the method by which not only first differentials but also second and higher differentials of variable quantities can be expeditiously found. I will begin by considering algebraic quantities, whether they be explicitly given or im- plicitly by equations. Then I will extend the discovery of differentials to nonalgebraic quantities, at least to those which can be known without the aid of integral calculus. Quantities of this kind are logarithms and expo- nential quantities, as well as arcs of circles and in turn sines and tangents of circular arcs. Finally, we will teach how to differentiate compositions and mixtures of all of these quantities. In short, this first part of differential calculus will be concerned with differentiating.
151. The second part will be dedicated to the explanation of the applica- tions of the method of differentiating to both analysis and higher geometry. Many nice things spill over into ordinary algebra: finding roots of equations, discussing and summing series, discovering maxima and minima, defining and discovering values of expressions that in some cases seem to defy de- termination. Higher geometry has received its greatest development from differential calculus. By its means tangents to curves and their curvature can be defined with marvelous facility. Many other problems concerned with either reflex or refracted radii of curves can be solved. Although a long treatise could be devoted to all of this, I will endeavor, as far as pos- sible, to give a brief and clear account." (Euler, in Blanton's translation of Institutiones calculi differentialis)
110.