



## SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTO 2D EM VÁLVULA DE CONTROLE DO TIPO BORBOLETA

Higor Odilon Gottgtroy

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Rio de Janeiro  
Março de 2025

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTO 2D EM VÁLVULA DE  
CONTROLE DO TIPO BORBOLETA

Higor Odilon Gottgtroy

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO  
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE  
ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO  
PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU  
DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Aprovada por: Prof. Daniel José Nahid Mansur Chalhub  
Prof. Gustavo Cesar Rachid Bodstein  
Prof. Gustavo Rabello dos Anjos  
Prof. Nisio de Carvalho Lobo Brum

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
MARÇO DE 2025

Odilon Gottgtroy, Higor

Simulação numérica de escoamento 2D em válvula de controle do tipo borboleta/Higor Odilon Gottgtroy. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2025.

XVII, 92 p. 29,7cm.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Mecânica, 2025.

Referências Bibliográficas: p. 90 – 92.

1. Mecânica dos fluidos computacional. 2. Elementos finitos. 3. Válvula borboleta. I. Rabello dos Anjos, Gustavo. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

*A educação é a melhor maneira  
de transformar uma vida.*

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente à Deus, que me deu força para chegar até aqui. À meus pais, que sempre me incentivaram a estudar e desejaram o meu sucesso. Aos meus amigos, com quem compartilho meus sentimentos e torcem por mim. Ao professor Gustavo Rabello dos Anjos, excelente professor e orientador, que me habilitou a desenvolver esse trabalho de mestrado. E ao meu amigo Emanuel, com quem dividi horas e horas de trabalho e boas conversas na sala de alunos do LabMFA.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTO 2D EM VÁLVULA DE CONTROLE DO TIPO BORBOLETA

Higor Odilon Gottgtroy

Março/2025

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Programa: Engenharia Mecânica

O escoamento de fluido em uma válvula de controle do tipo borboleta é um tema de grande relevância para a indústria de fabricação de válvulas. O presente trabalho apresenta uma simulação bidimensional do escoamento de fluido em válvulas de controle do tipo borboleta. Utilizando apenas softwares gratuitos, como GMSH para geração de malhas, Python para programação e Paraview para visualização, foi desenvolvida uma ferramenta computacional baseada nas equações de governo da mecânica dos fluidos, como a equação de Navier-Stokes. O método de elementos finitos (FEM) foi o utilizado para solução numérica desse problema. O método chamado de Semi-Lagrangeano também foi utilizado para solucionar o problema de oscilações epúrias devido ao termo convectivo da equação de Navier-Stokes, para casos com número de Reynolds elevados. A ferramenta foi verificada por meio de comparação com diversos casos conhecidos da literatura. Após a verificação, foi simulado o escoamento em alguns perfis de válvula borboleta. Os resultados das simulações foram bastante satisfatórios, comparando qualitativamente com as simulações citadas nas referências.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTO 2D EM VÁLVULA DE  
CONTROLE DO TIPO BORBOLETA

Higor Odilon Gottgtroy

March/2025

Advisor: Gustavo Rabello dos Anjos

Department: Mechanical Engineering

The fluid flow in a butterfly control valve is a topic of great relevance to the valve manufacturing industry. This work presents a two-dimensional simulation of fluid flow in butterfly control valves. Using only open-source software, such as GMSH for mesh generation, Python for programming, and Paraview for visualization, a computational tool was developed based on the governing equations of fluid mechanics, including the Navier-Stokes equation. The finite element method (FEM) was employed for the numerical solution of this problem. The Semi-Lagrangian method was also applied to address spurious oscillations caused by the convective term of the Navier-Stokes equation in cases with high Reynolds numbers. The tool was verified through comparisons with well-known cases from the literature. After verification, the flow in several butterfly valve profiles was simulated. The results of the simulations were quite satisfactory, comparing qualitatively with the simulations cited in the references.

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Organização do trabalho . . . . .	3
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>5</b>
2.1 Escoamento em válvulas de controle do tipo borboleta . . . . .	5
2.2 Métodos numéricos . . . . .	8
2.2.1 Método das diferenças finitas . . . . .	8
2.2.2 Método dos volumes finitos . . . . .	10
2.2.3 Método dos elementos finitos . . . . .	12
<b>3 Equações de governo</b>	<b>16</b>
3.1 Princípio da conservação da massa . . . . .	16
3.2 Equação da quantidade de movimento linear . . . . .	17
3.3 Tensor de tensões . . . . .	19
3.4 Equações de Navier-Stokes . . . . .	20
<b>4 Método de elementos finitos</b>	<b>21</b>
4.1 Introdução . . . . .	21
4.2 Condições de Contorno . . . . .	22
4.3 Forma variacional . . . . .	23
4.4 Discretização por elementos finitos . . . . .	25
4.5 Elementos de malha . . . . .	27
4.6 Método semi-Lagrangeano . . . . .	29
<b>5 Implementação computacional</b>	<b>34</b>
5.1 Fluxograma da Implementação . . . . .	34
5.2 Linguagem de Programação Python . . . . .	37

5.3	Geração de Malha . . . . .	37
5.4	Solução Numérica . . . . .	37
5.5	Método Semi-Lagrangeano . . . . .	38
5.6	Visualização dos Resultados . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Verificação do código</b>	<b>39</b>
6.1	Escoamento laminar entre placas . . . . .	39
6.1.1	Simulação do escoamento entre placas . . . . .	42
6.2	Escoamento ao redor de um cilindro, dentro de um canal . . . . .	46
6.3	Escoamento sobre uma cavidade . . . . .	50
6.4	Escoamento sobre um degrau . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Resultados das simulações em válvulas de controle do tipo borboleta em 2 dimensões.</b>	<b>59</b>
7.1	Introdução . . . . .	59
7.2	Parâmetros utilizados . . . . .	60
7.3	Caso 1 - obturador concêntrico, retangular e fino. Re = 600. . . . .	62
7.3.1	Resultado das simulações e análise. . . . .	62
7.4	Caso 2 - obturador excêntrico, de disco único reto. Re = 600. . . . .	68
7.4.1	Resultado das simulações e análise. . . . .	69
7.5	Caso 3 - obturador concêntrico, biconvexo. Re=6000 . . . . .	75
7.5.1	Resultado das simulações e análise. . . . .	75
7.6	Caso 4 - obturador concêntrico, convexo. Re=6000 . . . . .	81
7.6.1	Resultado das simulações e análise. . . . .	81
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>88</b>
8.1	Considerações Gerais . . . . .	88
8.2	Limitações do trabalho . . . . .	89
8.3	Propostas para trabalhos futuros . . . . .	89
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>90</b>

# Listas de Figuras

1.1	Representação simplificada de uma válvula borboleta em operação. Da esqueda para a direita: a válvula fechada na primeira figura, na figura do meio ela está totalmente aberta e na última figura está parcialmente aberta.	2
2.1	Tipos de válvula borboleta	6
2.2	Condições de operação em uma válvula de controle – desenho próprio	7
2.3	Fenômeno da cavitação - desenho próprio	7
2.4	Região discretizada em duas dimensões.	10
2.5	Típica malha de elementos finitos em duas dimensões. Nô e elemento triangular em destaque.	13
2.6	Representação da função de forma para um elemento unidimensional linear.	14
4.1	Elemento de interpolação linear de 1 <sup>a</sup> ordem.	25
4.2	Representação do elemento Taylor-Hood $P_2/P_1$ . Nos nós em verme- lho são avaliadas velocidade e pressão, nos nós ao centro das arestas são avaliadas apenas as velocidades. Totalizando 9 nós onde são ava- liadas a velocidade e 3 nós onde são avaliadas as pressões, também satisfazendo a condição de LBB.	28
4.3	Representação do elemento Mini $P_1^+/P_1$ . Nos nós em vermelho são avaliadas velocidade e pressão, no nó ao centro do triângulo é avaliada apenas a velocidade. Totalizando 4 nós onde são avaliadas a veloci- dade e 3 nós onde são avaliadas as pressões, satisfazendo a condição de LBB. Esse elemento foi o utilizado em todos os casos desse trabalho.	28
4.4	Elemento triangular mini, com destaque para os pontos nodais nos 3 vértices e 1 ponto no centróide.	29
4.5	Esquema da formulação semi-lagrangeana mostrando como a posição $\mathbf{x}_p$ , no passo de tempo anterior $t_p$ , é determinado. O vetor $-\mathbf{v}\Delta t$ é usado para o referido cálculo, onde $\mathbf{v}$ é a velocidade da partícula fluida localizada na posição $\mathbf{x}$ do nó, e delta t é o passo de tempo. . .	31

4.6	Exemplo de busca fora do domínio. Neste caso específico, o método faz uma interpolação entre os 2 nós mais próximos do ponto . . . . .	32
4.7	Exemplo do método semi-lagrangeano fazendo a busca dentro de um elemento. Nesse caso, a velocidade nesse ponto é encontrada com a interpolação da velocidade dos nós pertencentes a esse elemento . . . . .	33
5.1	Fluxograma resolução método de elementos finitos . . . . .	35
6.1	Escoamento laminar ao longo de um tubo. Demonstração da mudança do perfil de velocidade ao longo do comprimento do tubo. . . . .	40
6.2	Malhas triangulares em duas dimensões, elaborada no software GMSH. Estudo da influência do refino de malha no resultado da simulação. Malha 1 = 266 nós, 530 elementos. Malha 2 = 505 nós, 1008 elementos. Malha 3 = 1565 nós, Malha 4 = 4070 nós, 8138 elementos.	42
6.3	Demonstração das condições de contorno impostas no problema do escoamento entre placas paralelas. . . . .	42
6.4	Componente de velocidade horizontal no escoamento entre placas, em $m/s$ . . . . .	43
6.5	Quadro comparativo entre as soluções utilizando quatro malhas diferentes. É possível observar que a medida em que ocorre o refinamento de malha, a curva se aproxima da solução analítica, que tem como valor de $1,5m/s$ de velocidade no centro do escoamento. . . . .	44
6.6	Gráfico log-log do erro percentual vs número de nós das malhas. Podemos observar que o refinamento de malha apresentou um perfil linear na redução do erro. Refinando ainda mais, pode-se chegar próximo da estabilização do erro. . . . .	45
6.7	Condições de contorno do escoamento ao redor do cilindro entre placas. Velocidade de entrada $u=1.0m/s$ , $d = 0.04m$ , pressão igual a zero na saída do canal, condição de não deslizamento nas paredes do canal e no cilindro. Parâmetros utilizados: $dt = 0,01s$ , $\nu = 10^{-3}m^2/s$ para $Re = 40$ e $\nu = 2 \times 10^{-4}m^2/s$ para $Re = 200$ . . . . .	46
6.8	Malha do problema do escoamento ao redor do cilindro, dentro de um canal. Possui 4958 nós e 9916 elementos triangulares. Malha não estruturada, refinada ao redor do cilindro. . . . .	47
6.9	Campo de velocidade horizontal na simulação do escoamento ao redor do cilindro, dentro de um canal, para um $Re = 40$ . . . . .	47
6.10	Campo de pressão na simulação do escoamento ao redor do cilindro, dentro de um canal, para um $Re = 40$ . Observa-se as maiores pressões nas bordas da região de entrada do canal e no ponto de estagnação, no lado esquerdo do cilindro. . . . .	48

6.11 Campo de vorticidade na simulação do escoamento ao redor do cilindro, dentro de um canal, para um $Re = 40$ . Imagem do trabalho da ref [1] . . . . .	48
6.12 Formação de vórtices num escoamento simulado para um $Re = 200$ . Essa formação de vórtices periódica é também chamada de esteira de von Kármán. . . . .	49
6.13 Campo de vorticidade periódica para um $Re = 200$ . Imagem do trabalho da ref. [1] . . . . .	50
6.14 Condições de contorno do problema da cavidade . . . . .	51
6.15 Malhas utilizadas no estudo de refinamento de malhas para o caso do escoamento sobre a cavidade. Malha 1 - 513 nós, Malha 2 - 1.507 nós, Malha 3 - 5.035 nós, Malha 4 - 9.776 nós, Malha 5 - 15.042 nós, Malha 6 - 21.091 nós . . . . .	52
6.16 Tabela da velocidade horizontal ao longo da linha de centro vertical, retirada do estudo de Ghia [2]. Velocidades obtidas para diferentes números de Reynolds, para os mesmos pontos no eixo y. . . . .	53
6.17 Gráfico da influência da malha no erro. Com um maior refinamento, observa-se uma tendência de estabilização do erro. Encontra-se então o refinamento ótimo. . . . .	54
6.18 Campo de velocidade horizontal . . . . .	55
6.19 Campo de velocidade vertical . . . . .	55
6.20 Campos de velocidade da cavidade para $Re = 100$ . . . . .	55
6.21 Gráfico da velocidade horizontal na linha de centro vertical da cavidade. Comparação entre o estudo de Ghia(1982) e o presente estudo, para $Re = 100$ . . . . .	55
6.22 Gráfico da velocidade vertical na linha de centro horizontal da cavidade. Comparação entre o estudo de Ghia(1982) e o presente estudo, para $Re = 100$ . . . . .	56
6.23 Cotas e condições de contorno . . . . .	57
6.24 Pontos de recirculação . . . . .	57
6.25 Referências do escoamento em degrau . . . . .	57
6.26 Campo de velocidade horizontal no problema do degrau. Zoom na região de interesse. . . . .	57
6.27 Pontos de recirculação no problema do escoamento no degrau. Zoom na região de interesse. . . . .	58

7.1	Condições de contorno e dimensões dos casos de válvulas simulados. Condição de não deslizamento aplicada nas paredes e no obturador. Velocidade imposta na entrada do canal $u = 1,5 \text{ m/s}$ . Pressão imposta na saída do canal com valor de zero, para satisfazer a condição de LBB. Diâmetro do canal = 255,2mm . . . . .	60
7.2	Tabela de viscosidade do óleo do campo de Marlim. As viscosidades escolhidas foram $6,38 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ e $6,38 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , referentes as viscosidades próximas de $20^\circ\text{C}$ e $59^\circ\text{C}$ . Tabela retirada de [3]. . . . .	61
7.3	Campo de velocidade horizontal, em m/s, para diferentes ângulos de abertura. Perfil de obturador concêntrico, retangular e fino. Escoamento com número de Reynolds = 600. Velocidade de entrada de $u=1,5 \text{ m/s}$ em todos os casos. . . . .	63
7.4	Zoom do campo de velocidade horizontal, da fig. 7.3. . . . .	64
7.5	Linhas de corrente. Campos de recirculação são formados a jusante do obturador da válvula. Observamos que com o gradual fechamento da válvula mais campos de recirculação são gerados, e o escoamento tende a formar uma esteira de vórtices a jusante da válvula. . . . .	65
7.6	Gráfico de pressões ao longo da linha de centro para cada ângulo da abertura da válvula. Observa-se uma perda de carga localizada após a linha de centro passar pelo obturador. Logo a jusante do obturador, são observadas algumas pressões negativas, indicando possíveis pontos de pressão abaixo da pressão de vapor e formação de bolhas, possibilitando a existência de cavitação. Pressões iniciais: $20^\circ = 336.838,0 \text{ Pa}$ , $35^\circ = 60.538,7 \text{ Pa}$ , $55^\circ = 10.156,1 \text{ Pa}$ , $70^\circ = 3.057,9 \text{ Pa}$ , $90^\circ = 2.672,9 \text{ Pa}$ . . . . .	66
7.7	O gráfico de perda de pressão pelo ângulo de abertura da válvula mostra que a válvula borboleta tem um perfil quase exponencial de perda de carga, quando trabalha bastante restringida a perda de carga sobe vertiginosamente. Já em ângulos maiores de abertura, a perda de carga varia pouco. . . . .	67
7.8	Comparação entre os perfis dos obturadores . . . . .	68
7.9	Condições de contorno do problema do caso 2, obturador excêntrico, de disco único reto. Valor da velocidade de entrada $u = 1,5 \text{ m/s}$ , condição de não deslizamento nas paredes e na válvula, pressão igual a zero em toda a fronteira de saída do fluido do canal. $\nu = 6,38 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ , diâmetro do canal = 255,2mm , $\text{Re} = 600$ . . . . .	69

7.10 Campo de velocidade horizontal, em m/s, para diferentes ângulos de abertura. Escoamento com número de Reynolds = 600. Velocidade de entrada de $u=1,5$ m/s em todos os casos. Observadas velocidades bem acentuadas quando a válvula está restringida. Acabam por se formar grandes trechos de recirculação nos ângulos de abertura de $20^\circ$ e $35^\circ$ . Com abertura de $55^\circ$ é possível observar a formação de uma esteira de vórtices a jusante da válvula. Nos ângulos de maior abertura, não observa-se a formação de vórtices. . . . .	70
7.11 Zoom do campo de velocidade horizontal, da fig. 7.10. . . . .	71
7.12 Linhas de corrente. Devido ao perfil da válvula, na parte posterior do obturador, são formada duas grandes zonas de recirculação. Em posições de abertura mais restritas, $20^\circ$ e $35^\circ$ , o fluido escoa com grande velocidade no vão da parte superior da válvula e acaba formando uma grande zona de circulação a jusante dessa. Pode-se perceber uma oscilação a jusante do obturador na posição de $55^\circ$ , devido a uma formação de vórtices alternados, desprendidos da parte posterior da válvula. Nos ângulos de $70^\circ$ e $90^\circ$ o fluido contorna a válvula de modo a gerar menos pertubações no escoamento. . . . .	72
7.13 Gráfico de pressões ao longo da linha de centro para cada ângulo da abertura da válvula. Observa-se uma perda de carga localizada após a linha de centro passar pelo obturador. Logo a jusante do obturador, são observadas algumas pressões negativas, indicando possíveis pontos de pressão abaixo da pressão de vapor e formação de bolhas, possibilitando a existência de cavitação. Pressões iniciais: $20^\circ = 194.776$ Pa , $35^\circ = 37.760,4$ Pa , $55^\circ = 10.188,9$ Pa , $70^\circ = 5.134,8$ Pa , $90^\circ = 2.772,5$ Pa . . . . .	73
7.14 O gráfico de perda de pressão pelo ângulo de abertura da válvula mostra que a válvula borboleta tem um perfil quase exponencial de perda de carga, quando trabalha bastante restringida a perda de carga sobe vertiginosamente. Já em ângulos maiores de abertura, a perda de carga varia pouco. Delta de pressão: $20^\circ = 194.776$ Pa , $35^\circ = 37.760,4$ Pa , $55^\circ = 10.188,9$ Pa , $70^\circ = 5.134,8$ Pa , $90^\circ = 2.772,5$ Pa .	74
7.15 Condições de contorno do problema do caso 3, obturador concêntrico, biconvexo. Valor da velocidade de entrada $u = 1,5$ m/s , condição de não deslizamento nas paredes e na válvula, pressão igual a zero em toda a fronteira de saída do fluido do canal. $\nu = 6,38 \times 10^{-5} m/s$ , diâmetro do canal = 255,2mm , $Re = 6000$ . . . . .	75

7.16 Campo de velocidade horizontal, em m/s, para diferentes ângulos de abertura. Escoamento com número de Reynolds = 6000. Velocidade de entrada de $u=1,5$ m/s em todos os casos. Observadas velocidades mais acentuadas quando a válvula está restringida. A velocidade a jusante do obturador nos ângulos de $20^\circ$ e $35^\circ$ oscilam bastante, evidenciando a presença de esteira turbulenta. Com abertura de $55^\circ$ e $70^\circ$ ainda existe a presença de vórtices menos intensos. Apenas quando totalmente aberta, $90^\circ$ , que não apresenta-se sinais de instabilidade na região a jusante da válvula. . . . .	76
7.17 Zoom do campo de velocidade horizontal, da fig. 7.16. . . . .	77
7.18 Linhas de corrente. Nas duas primeiras imagens, abertura de $20^\circ$ e $30^\circ$ , observa-se que são formadas várias zonas de recirculação. Essas zonas oscilam conforme o escoamento. Nas aberturas de $55^\circ$ e $70^\circ$ , há uma zona de recirculação maior na placa superior, essa zona oscila muito pouco. O escoamento nessas aberturas ainda apresentam oscilações a jusante da válvula. Apenas com ela totalmente aberta, $90^\circ$ , que podemos observar há existência de pouca separação do fluido com a válvula. . . . .	78
7.19 Gráfico de pressões ao longo da linha de centro para cada ângulo da abertura da válvula do terceiro caso. Observa-se uma perda de carga localizada após a linha de centro passar pelo obturador. Logo a jusante do obturador, são observadas algumas pressões negativas, indicando possíveis pontos de pressão abaixo da pressão de vapor e formação de bolhas, possibilitando a existência de cavitação. Pressões iniciais: $20^\circ = 330.231,0$ Pa , $35^\circ = 54.383,8$ Pa , $55^\circ = 7598,6$ Pa , $70^\circ = 2804,2$ Pa , $90^\circ = 2.627,0$ Pa . . . . .	79
7.20 O gráfico de perda de pressão pelo ângulo de abertura da válvula do caso 3. Podemos observar que a válvula borboleta, quando bem restringida, com ângulos de abertura menores que $30^\circ$ , tem um aumento muito grande da perda de carga localizada. Já para ângulos maiores de abertura, a perda de carga varia pouco. Delta de pressão: $20^\circ = 330.231$ Pa , $35^\circ = 54.383,8$ Pa , $55^\circ = 7.595,6$ Pa , $70^\circ = 2.804,2$ Pa , $90^\circ = 2.627,0$ Pa . . . . .	80
7.21 Condições de contorno do problema do caso 4, obturador concêntrico, convexo. Valor da velocidade de entrada $u = 1,5$ m/s , condição de não deslizamento nas paredes e na válvula, pressão igual a zero em toda a fronteira de saída do fluido do canal. $\nu = 6,38 \times 10^{-5}$ , diâmetro do canal = 255,2mm , $Re = 6000$ . . . . .	81

7.22 Campo de velocidade horizontal, em m/s, para diferentes ângulos de abertura da válvula do caso 4. Escoamento com número de Reynolds = 6000. Velocidade de entrada de $u=1,5$ m/s em todos os casos. Observadas velocidades mais acentuadas quando a válvula está restringida. O fluido tem dificuldade para escoar por cima da válvula nos ângulos de $20^\circ$ e $35^\circ$ , devido à proximidade da válvula com a placa superior. Nesses 2 ângulos de abertura, o fluido passa da válvula pela parte de baixo com maior velocidade e depois de uma certa distância começa a oscilar. Nos ângulos de $55^\circ$ e $70^\circ$ , . . . . .	83
7.23 Zoom do campo de velocidade horizontal, da fig. 7.22. . . . .	84
7.24 Linhas de corrente do caso 4. São observadas muitas zonas de recirculação quando a abertura da válvula apresenta-se mais restrin- gida, nos ângulos de $20^\circ$ e $35^\circ$ . Nos ângulos de $55^\circ$ e $70^\circ$ ainda consta uma grande zona de recirculação na parte superior do canal. Apenas a $90^\circ$ o escoamento não apresenta zonas de recirculação. . . . .	85
7.25 Gráfico de pressões ao longo da linha de centro para cada ângulo da abertura da válvula do quarto caso. Observa-se uma perda de carga localizada após a linha de centro passar pelo obturador. Logo a jusante do obturador, são observadas algumas pressões negativas dos ângulos de $20^\circ$ e $35^\circ$ , indicando possíveis pontos de pressão abaixo da pressão de vapor e formação de bolhas, possibilitando a existência de cavitação. Pressões iniciais: $20^\circ = 333.962,0$ Pa , $35^\circ = 54.060,8$ Pa , $55^\circ = 8061,5$ Pa , $70^\circ = 3111,6$ Pa , $90^\circ = 1.555,7$ Pa . . . . .	86
7.26 O gráfico de perda de pressão pelo ângulo de abertura da válvula do caso 4. Podemos observar que a válvula borboleta, quando bem res- trin- gida, com ângulos de abertura menores que $30^\circ$ , tem um aumento muito grande da perda de carga localizada. Já para ângulos maiores de abertura, a perda de carga varia pouco. Delta de pressão: $20^\circ = 333.962$ Pa , $35^\circ = 54.060,3$ Pa , $55^\circ = 8.061,5$ Pa , $70^\circ = 3111,6$ Pa , $90^\circ = 1.555,0$ Pa . . . . .	87

# **Lista de Tabelas**

4.1	Termos discretizados e seus correspondentes matriciais . . . . .	26
4.2	Tabela de coordenadas . . . . .	29
6.1	Estudo de malha - escoamento entre placas . . . . .	43
6.2	Tabela de dados da simulação do escoamento ao redor do cilindro. . .	49
6.3	Tabela de resultados da simulação do estudo de malha para o escoamento sobre o canal. . . . .	51
6.4	Tabela de dados da simulação do escoamento sobre degrau. . . . .	56
6.5	Comparação das distâncias de recirculação com a referência para um Reynolds de 800 . . . . .	58
6.6	Comparação das distâncias de recirculação com a referência para um Reynolds de 1600 . . . . .	58
7.1	Tabela de dados da simulação do caso 1. . . . .	68
7.2	Tabela de dados da simulação do caso 2. . . . .	69
7.3	Tabela de dados da simulação do caso 3. . . . .	81
7.4	Tabela de dados da simulação do caso 4. . . . .	82

# Capítulo 1

## Introdução

Diversos trabalhos abordam o tema de simulação numérica interno à uma válvula de controle. Inclusive empresas fabricantes de válvulas de controle realizam simulações de escoamento em seus projetos de fabricação. Nesses dois casos, foi bastante observado o uso de softwares comerciais de simulação de escoamento de fluidos. O que diferencia esse trabalho dos demais encontrados na literatura é metodologia de estudos numéricos e o conjunto de algorítimos de última geração utilizados. Tudo foi realizado com a utilização de softwares gratuitos e a programação, que representa a física do problema em forma de código, foi escrita pelo próprio autor. De modo que o aluno não apenas aplicou o caso num software, onde não se sabe que cálculo é feito, mas sim aprendeu e desenvolveu toda a matemática e programação para simular o escoamento de fluidos em diversos casos.

A válvula de controle desempenha um papel muito importante no controle de processos industriais que trabalham com escoamento de fluidos. Basicamente, uma válvula de controle é um dispositivo usado em uma tubulação, para manipular o fluxo ou pressão de um líquido ou gás. A variável de interesse pode ser monitorada a montante ou a jusante da válvula de controle, dependendo do projeto. De modo geral, as válvulas de controle geram uma contrapressão, de forma que a pressão no trecho a montante da válvula se eleve. Podemos assim garantir que todo o produto no interior do duto encontra-se na fase líquida, por exemplo.

As válvulas de controle podem ser de diversos tipos, entretanto, as mais comumente utilizadas são as válvulas globo, esfera e borboleta. Ao exercer contrapressão sobre o escoamento, o obturador ou disco da válvula de controle está sujeito a forças hidrodinâmicas, como a força de arrasto e de sustentação. O próprio fluido, com a atuação da válvula, sofre mudança de velocidade, regulando assim a vazão de recebimento desejada.

Este trabalho tem por objetivo analisar o escoamento no interior das válvulas de controle, em um tipo especial: a válvula borboleta. Este tipo de válvula pode ser representado simplificadamente por uma placa com um eixo em seu centro, oblíqua

ao escoamento de fluido dentro de um canal, que bloqueia o escoamento na posição perpendicular. Com uma rotação de 90 graus, a válvula está 100% aberta. Entre 0 e 90 graus, a válvula está em controle.

Analisaremos neste trabalho os campos de pressão e de velocidade no interior das válvulas. Para tal, precisaremos resolver as equações de Navier-Stokes, que são as equações que modelam o escoamento de fluidos.

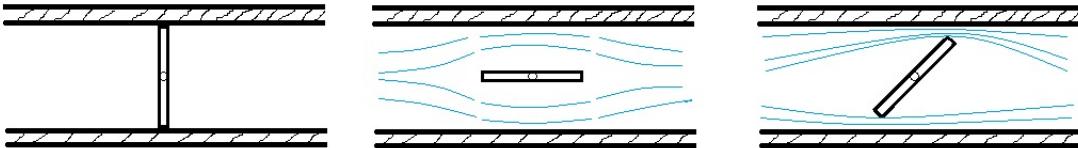


Figura 1.1: Representação simplificada de uma válvula borboleta em operação. Da esquerda para a direita: a válvula fechada na primeira figura, na figura do meio ela está totalmente aberta e na última figura está parcialmente aberta.

As equações de Navier-Stokes são equações diferenciais parciais, onde é possível se determinar os campos de velocidade e pressão atuando em um escoamento. Para casos simplificados, é possível achar solução analítica para a equação de Navier-Stokes. Já para casos reais, é necessário a utilização de métodos numéricos para tal, como será visto no nosso caso.

Os métodos numéricos são formas de se achar uma solução aproximada da equação diferencial parcial, utilizando ferramentas computacionais para o cálculo destas soluções, a chamada mecânica dos fluidos computacional. Os métodos numéricos mais utilizados são: diferenças finitas, volumes finitos e elementos finitos. Nessa dissertação abordaremos, com um foco maior, o terceiro método. Sua utilização teve início na década de 50, na mecânica sólida [4]. Somente na década de 70, com o método de Galerkin consolidado para as equações de difusão, é que a utilização do método de elementos finitos abrangeu também o campo da dinâmica dos fluidos.

Um dos problemas observados conforme o aumento do número de Reynolds do escoamento, é o surgimento de instabilidades no método numérico, devido ao termo convectivo da equação de Navier-Stokes que apresenta um produto de incógnitas, caracterizando a não linearidade do problema. Para resolver o problema da instabilidade numérica, existem várias técnicas disponíveis. Neste trabalho utilizaremos o método Semi-Lagrangeano, que consiste na discretização da derivada material e será mais abordado à frente.

A principal vantagem do método de elementos finitos é a sua utilização em malhas com geometrias complexas. A discretização dessas malhas não exige esforço adicional em comparação com geometrias mais regulares. Neste trabalho, iremos gerar uma malha triangular, não homogênea, para o interior da válvula de controle e para os

trechos de duto a montante e a jusante da válvula. A geração da malha foi feita com o software GMSH, software de código aberto e disponível para download na internet. A simulação foi realizada em duas dimensões, assim como a malha elaborada para cada caso proposto.

A linguagem de programação utilizada para a implementação do código foi a linguagem Python, também gratuita e disponível para download na internet. Além de ser uma linguagem muito utilizada, Python possui diversas bibliotecas que facilitam o trabalho de programação. Uma delas é a MESHIO, que faz a leitura da malha do GMSH e transforma em código Python. Além dela, outras bibliotecas foram utilizadas, como o NUMPY, para cálculos algébricos e a MATPLOTLIB, para plotagem de gráficos. Também foi utilizado o programa Paraview, para visualização de resultados em interfaces gráficas. Paraview também é um software livre e disponível para download.

Ao longo do trabalho, são demonstradas verificações de casos clássicos da literatura, que validam o funcionamento e acurácia do código desenvolvido. Após essa verificação, são realizadas simulações de 4 perfis de geometrias de válvulas borboletas diferentes, simulando 5 ângulos de abertura em casa uma delas. As duas primeiras com um número de Reynolds de 600 e as duas últimas com número de Reynolds de 6000. Os resultados das simulações do escoamento nas válvulas se mostram condizentes com o esperado, comparando qualitativamente com os artigos de referência.

## 1.1 Organização do trabalho

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma:

- **Capítulo 1:** Introdução. Comentários gerais a respeito do trabalho.
- **Capítulo 2:** Traz uma revisão bibliográfica de artigos de simulação numérica de escoamento em válvula borboleta e apresenta os principais métodos numéricos utilizados na solução de escoamentos, abordando os métodos de diferenças finitas, volumes finitos e elementos finitos, sendo este último explorado com mais detalhes no capítulo 4.
- **Capítulo 3:** Discute as equações governantes do escoamento de fluidos, com ênfase na dedução da equação de Navier-Stokes e suas implicações na modelagem do problema.
- **Capítulo 4:** Aborda o método de elementos finitos, detalhando a formulação variacional e a discretização utilizada na implementação do código computacional desenvolvido neste trabalho.

- **Capítulo 5:** Trata dos aspectos da implementação computacional, incluindo a geração de malhas, a solução numérica do sistema de equações e a visualização dos resultados obtidos.
- **Capítulo 6:** Apresenta a verificação do código numérico por meio da comparação com casos clássicos da literatura, como o escoamento entre placas paralelas, o escoamento sobre uma cavidade, o escoamento sobre um degrau e o escoamento ao redor de um cilindro.
- **Capítulo 7:** Expõe e analisa os resultados das simulações numéricas realizadas para quatro diferentes configurações geométricas de válvulas borboleta, investigando parâmetros como o campo de velocidade, os pontos de recirculação e a perda de carga em função do ângulo de abertura.
- **Capítulo 8:** Apresenta as conclusões do estudo, destacando as principais contribuições do trabalho, suas limitações e sugestões para pesquisas futuras.

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

### 2.1 Escoamento em válvulas de controle do tipo borboleta

As válvulas borboleta são dispositivos amplamente utilizados para o controle e a interrupção do fluxo em sistemas de transporte de fluidos. Elas consistem essencialmente em um disco montado em um eixo central, que gira para abrir ou fechar a passagem do fluido. A simplicidade de sua construção, aliada à eficácia operacional, faz dessas válvulas uma escolha popular em diversos setores industriais, incluindo o de tratamento de água, petroquímico, alimentício e HVAC (aquecimento, ventilação e ar condicionado).

A operação de uma válvula borboleta ocorre por meio de um giro do disco, que pode variar entre 0° (totalmente fechada) e 90° (totalmente aberta). Sua aplicação pode ser manual, por atuadores elétricos ou pneumáticos, dependendo das necessidades de controle do sistema. Entre suas principais vantagens estão o custo reduzido, o design compacto e a facilidade de instalação e manutenção, especialmente em sistemas de grande diâmetro, onde outros tipos de válvulas poderiam ser menos viáveis economicamente.

As válvulas borboleta podem ser classificadas em três categorias principais: concêntricas, excêntricas simples e duplamente excêntricas. Cada uma dessas variações é projetada para atender a requisitos específicos de pressão, temperatura e resistência química. O dimensionamento e a seleção adequados das válvulas borboleta devem considerar fatores como o tipo de fluido, a pressão e a temperatura do sistema, bem como as condições operacionais específicas. Essas considerações garantem não apenas o desempenho ideal, mas também a longevidade da válvula no sistema em que está inserida.

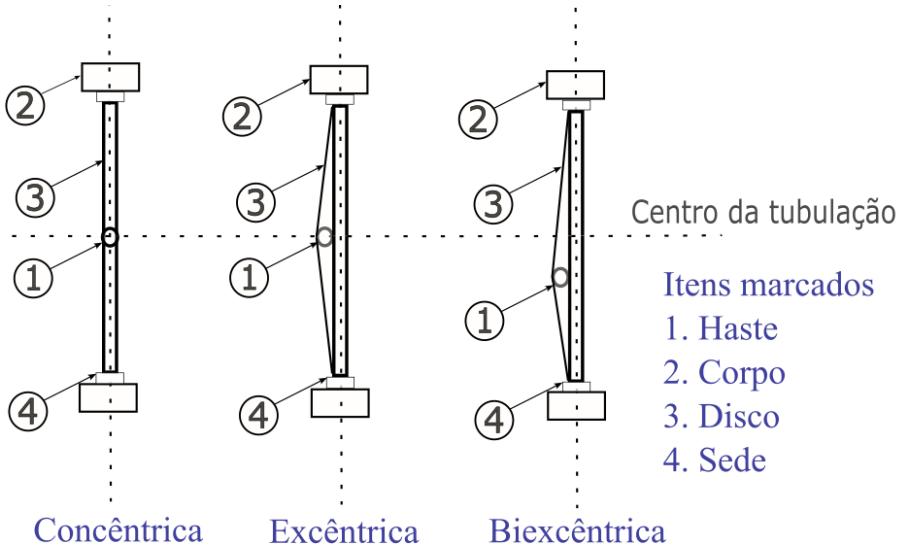


Figura 2.1: Tipos de válvula borboleta

O estudo do escoamento em válvulas de controle do tipo borboleta é importante para a otimização do desempenho e segurança desses dispositivos em sistemas de controle de fluxo. Diversos pesquisadores têm investigado aspectos como coeficientes de descarga, cavitação, características de escoamento e torque em válvulas borboleta.

Em Sarpkaya [5], o autor compara seus cálculos teóricos do coeficiente de descarga para uma válvula de controle do tipo borboleta em duas dimensões com dados experimentais. O coeficiente de descarga é definido como a relação entre o fluxo de massa ideal e o fluxo de massa com a válvula restringida. O estudo conclui que o cálculo do padrão de fluxo de escoamento bidimensional na válvula borboleta é diretamente aplicável a um caso tridimensional, desde que a relação das áreas comparáveis seja igual. Além disso, análises teóricas sobre cavitação e torque na válvula indicam que situações críticas de cavitação podem ser previstas e que o torque máximo na válvula borboleta normalmente ocorre quando esta está na posição próxima de 20º de ângulo com a linha de simetria da tubulação ou canal.

A cavitação é um fenômeno de considerável importância prática associado às válvulas borboleta. Ela ocorre internamente à válvula devido à perda de carga localizada, fazendo com que a pressão do fluido caia abaixo da pressão de vapor na vena-contracta. A vena-contracta é o ponto no escoamento, após uma válvula ou restrição, onde a área do fluxo é menor, a velocidade é máxima e a pressão é mínima. Após esse ponto, há uma recuperação parcial da pressão a jusante da válvula. Podem ocorrer três casos após a passagem do fluido pela válvula de controle: condição normal de operação (caso 1), condição de flash (caso 2) e cavitação (caso 3). Esses três casos podem ser observados na figura 2.2, que mostram a pressão e a distância em uma linha de corrente. No caso 1, a pressão não chega a cair abaixo da pressão de vapor, que é o melhor dos casos. No caso 2, a pressão cai abaixo da pressão de

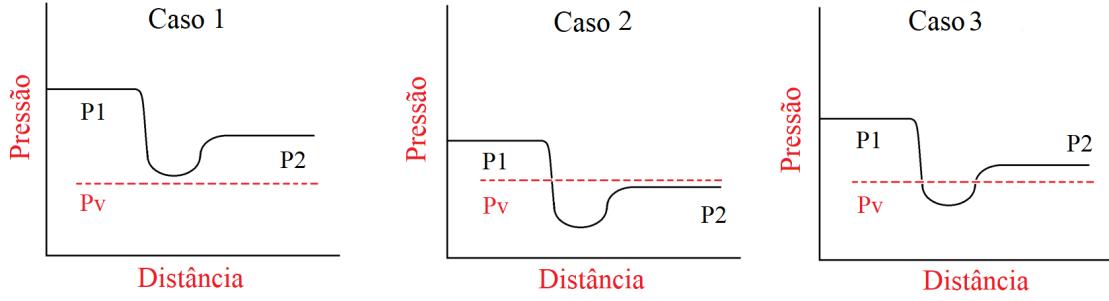


Figura 2.2: Condições de operação em uma válvula de controle – desenho próprio

vapor e não se recupera, formando bolhas que se propagam ao longo do escoamento. No terceiro e último caso, as bolhas se formam após passarem pela vena contracta mas depois implodem, após voltarem para uma área com pressão acima da pressão de vapor, gerando o problema da cavitação. Segundo De Falco[6], o fenômeno da cavitação gera ondas de choque que podem danificar a válvula, causando vibrações e ruídos. Esse fenômeno físico é demonstrado na figura 2.3 .



Figura 2.3: Fenômeno da cavitação - desenho próprio

G. Ibrahim et al.[7] investigaram as características de escoamento em válvulas borboleta usando técnicas de simulação numérica com o software FLUENT. A análise incluiu diferentes ângulos de abertura da válvula e velocidades de entrada. Os resultados mostraram que a turbulência começa nas bordas do disco da válvula e aumenta com o ângulo de fechamento, especialmente acima de 55°. Eles concluíram que a válvula não deve ser usada perto de ângulos totalmente fechados devido à alta turbulência gerada.

Huang at al.[8] realizaram uma análise tridimensional de escoamentos em válvulas borboleta utilizando o software FLUENT. A pesquisa investigou o campo de escoamento para diferentes ângulos de abertura da válvula e comparou os resultados numéricos com dados experimentais para validar a metodologia. Os resultados mostraram padrões de escoamento e distribuição de pressão variáveis conforme o

ângulo de abertura.

Wang et al. [9] investigaram as características de escoamento em uma válvula borboleta de grande diâmetro usando o código CFD FLUENT6.3. A simulação previu a estrutura do campo de escoamento, coeficiente de resistência ao fluxo e torque hidrodinâmico em diferentes aberturas. Observou-se a formação de vórtices na região traseira da válvula em ângulos de abertura menores que  $40^\circ$ , com a resistência ao fluxo e o torque hidrodinâmico diminuindo rapidamente acima de  $50^\circ$ . Esses resultados são cruciais para o design e operação de válvulas de grande diâmetro.

A pesquisa e desenvolvimento de técnicas de simulação numérica têm permitido avanços significativos na simulação dos fenômenos associados ao escoamento de fluidos. Isso contribui também com a indústria de válvulas, no que toca no desenvolvimento e designs de equipamentos mais eficientes e seguros. O estudo dos efeitos da cavitação e do comportamento de escoamento em diferentes condições operacionais é de grande importância para elaboração de projetos.

## 2.2 Métodos numéricos

Os métodos numéricos são técnicas utilizadas em diversas áreas da engenharia e ciências aplicadas, permitindo a resolução de problemas matemáticos complexos de forma aproximada, utilizando-se da computação. Dentre suas inúmeras aplicações, destacam-se a análise estrutural, simulação de escoamentos de fluidos, transferência de calor, otimização de projetos, entre outras áreas que envolvem fenômenos físicos complexos que não podem ser resolvidos de maneira analítica.

A utilização de métodos numéricos viabiliza a modelagem e análise de sistemas complexos, porém, também traz consigo desafios significativos. Entre esses desafios estão a estabilidade numérica, precisão, convergência e tempo de computação. Portanto, a escolha adequada do método numérico específico para cada tipo de problema, bem como a validação dos resultados, são etapas cruciais para garantir a confiabilidade das soluções obtidas.

Os métodos numéricos mais comumente utilizados são: método da diferenças finitas, método dos volumes finitos e o método de elementos finitos.

### 2.2.1 Método das diferenças finitas

O método das diferenças finitas é uma técnica numérica amplamente utilizada para resolver equações diferenciais parciais por meio da discretização do domínio. Segundo Fortuna [10], pode-se pensar nas aproximações de diferenças finitas como o inverso do processo de determinação de limite utilizado para obter a derivada de uma função  $f$ . Considere a definição da derivada de uma função  $f$  contínua:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.1)$$

A ideia central do método das diferenças finitas é substituir as derivadas presentes nas equações diferenciais parciais por aproximações diferenciais discretas. Essas aproximações podem ser derivadas utilizando expansões em série de Taylor.

**Série de Taylor:** para derivar essas aproximações, consideramos a expansão de Taylor em torno de  $x$ :

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{h^3}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \quad (2.2)$$

E então, utilizamos a discretização em diferenças finitas:

**Derivada Primeira:** para uma função  $f(x)$ , a derivada primeira em  $x$  pode ser aproximada como:

- *Diferença para frente:*

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.3)$$

- *Diferença para trás:*

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{\Delta x} \quad (2.4)$$

- *Diferença central:*

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2\Delta x} \quad (2.5)$$

**Derivada Segunda:** utilizando diferenças centrais:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{\Delta x^2} \quad (2.6)$$

**Erro de Truncamento:** Note que as aproximações acima são derivadas a partir da expansão de Taylor, eq. 2.2, onde os termos de ordem superior foram desconsiderados. Isso gera um erro de truncamento, que é o erro de se utilizar um número finito de termos da série de Taylor. Esse erro, somado ao arredondamento dos cálculos computacionais, é uma das principais fontes de imprecisões no método das diferenças finitas, segundo Chapra [11]. A ordem do erro de truncamento depende da aproximação utilizada:

- Para a diferença para frente e para trás na primeira derivada, o erro de truncamento é da ordem  $\mathcal{O}(\Delta x)$ .
- Para a diferença central para a primeira derivada possui erro de truncamento da ordem  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ , proporcionando uma aproximação mais precisa para  $\Delta x$  pequeno.

- Para a aproximação da derivada segunda, obtida pela fórmula de diferenças centrais, também apresenta erro de truncamento da ordem  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ .

**Representação gráfica de uma região contínua discretizada:** no método das diferenças finitas, o domínio espacial ou temporal é dividido em uma grade discreta com espaçamento fixo (ex: $\Delta x$ ,  $\Delta y$  ou  $\Delta t$ ). Na fig. 2.4 está uma ilustração de uma grade discreta em duas dimensões, destacando os nós utilizados para calcular derivadas e solucionar as EDPs numericamente.

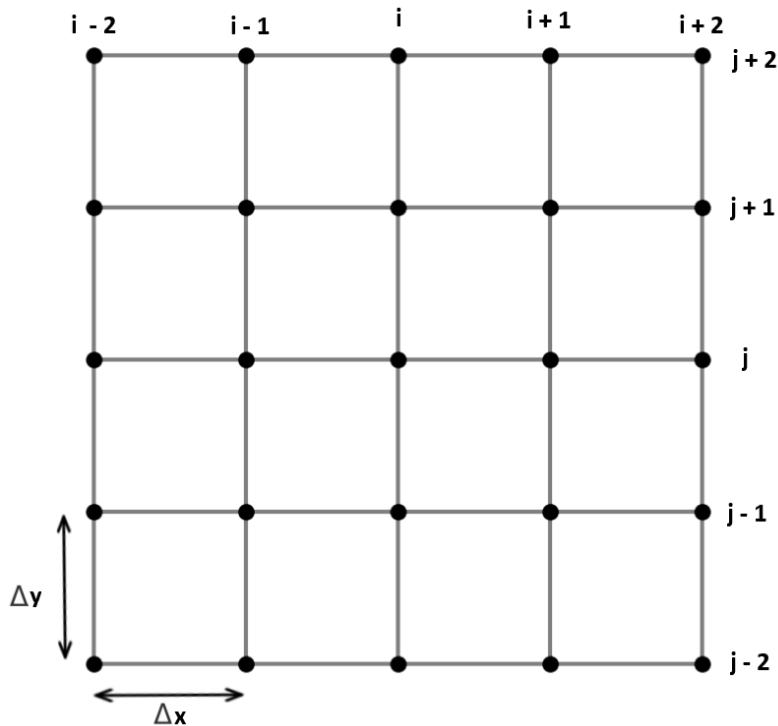


Figura 2.4: Região discretizada em duas dimensões.

O método de diferenças finitas possui simplicidade de implementação pois deriva das fórmulas da expansão de Taylor, o que torna o método intuitivo e relativamente simples de programar. Em contrapartida, possui limitações em geometrias mais complexas, por exemplo em domínios irregulares a adaptação do método pode ser difícil. Segundo Anderson [12], a escolha adequada de malhas e o refinamento da discretização são essenciais para minimizar os erros e melhorar a precisão dos resultados.

### 2.2.2 Método dos volumes finitos

O segundo método citado, método dos volumes finitos, é uma versão ainda mais refinada do método das diferenças finitas e tornou-se popular na dinâmica de fluidos computacional e transferência de calor. Patankar [13] destaca que o método dos

volumes finitos é particularmente eficaz em problemas envolvendo escoamentos de fluidos e transferência de calor, devido à sua capacidade de garantir a conservação das propriedades físicas em cada volume de controle. Este método discretiza o domínio em volumes de controle, aplicando princípios de conservação para obter as equações de transporte. No centróide de cada volume de controle encontra-se um nó computacional no qual os valores das variáveis devem ser calculados [14]. Uma das vantagens do método de volumes finitos é que ele não necessita de transformação de coordenadas quando aplicado a malhas irregulares. Com esta flexibilidade, este método pode ser utilizado em geometrias complexas.

O domínio contínuo é discretizado em pequenos volumes de controle. Em cada volume, a equação de conservação é integrada e o fluxo através das faces é aproximado. O princípio básico do método pode ser descrito como:

$$\int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_V S dV, \quad (2.7)$$

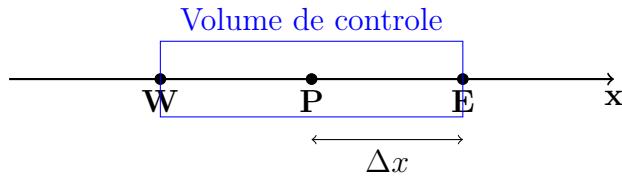
- $\phi$  é a variável conservada (por exemplo, temperatura ou concentração).
- $\mathbf{F}$  representa o fluxo através das faces do volume.
- $S$  é um termo fonte.
- $V$  é o volume de controle.
- $A$  representa as superfícies do volume.

Aplicando a aproximação de volumes finitos, as integrais de volume são substituídas por valores médios dentro de cada volume de controle.

Para ilustrar o método, consideremos a equação da difusão estacionária unidimensional:

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{d\phi}{dx} \right) = 0. \quad (2.8)$$

Dividimos o domínio em pequenos volumes de controle de largura  $\Delta x$ , centrados nos pontos  $P$ , com vizinhos  $W$  (esquerda, do inglês west) e  $E$  (direita, do inglês east):



Integrando a equação diferencial entre as faces do volume de controle centrado em  $P$ :

$$\int_{x_W}^{x_E} \frac{d}{dx} \left( k \frac{d\phi}{dx} \right) dx = 0. \quad (2.9)$$

Aplicando o teorema do transporte de Gauss:

$$\left[ k \frac{d\phi}{dx} \right]_{x_W}^{x_E} = 0. \quad (2.10)$$

Ou seja:

$$k \frac{d\phi}{dx} \Big|_E - k \frac{d\phi}{dx} \Big|_W = 0. \quad (2.11)$$

Aproximando as derivadas espaciais utilizando diferenças finitas centradas:

$$\left( \frac{d\phi}{dx} \right)_E \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x}, \quad (2.12)$$

$$\left( \frac{d\phi}{dx} \right)_W \approx \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x}. \quad (2.13)$$

Substituindo na equação integral:

$$k \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - k \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} = 0. \quad (2.14)$$

Rearranjando:

$$k \frac{\phi_E - 2\phi_P + \phi_W}{\Delta x^2} = 0. \quad (2.15)$$

O que leva a uma equação algébrica para cada volume de controle:

$$\phi_P = \frac{\phi_W + \phi_E}{2}. \quad (2.16)$$

Esse processo gera um sistema linear de equações para todas as incógnitas  $\phi_i$  no domínio, que pode ser resolvido numericamente.

### 2.2.3 Método dos elementos finitos

O terceiro método citado, método de elementos finitos, é o método numérico empregado nesse estudo. Ele é amplamente empregados para resolver problemas de mecânica estrutural, fluidodinâmica, eletromagnetismo, entre outros. O método surgiu na déca de 1950 [15], sendo utilizado principalmente na mecânica dos sólidos. Apenas a partir da década de 70, após a consolidação do método de Galerkin para equações de difusão, que o método começou a ser mais difundido em problemas da dinâmica dos fluidos.

O método discretiza o domínio do problema em elementos finitos, aproximando a solução dentro de cada elemento. A discretização de elementos finitos, ou seja, dividindo a região em um número de regiões menores, reduz o problema do contínuo, que tem um número infinito de incógnitas, para um problema com um número finito

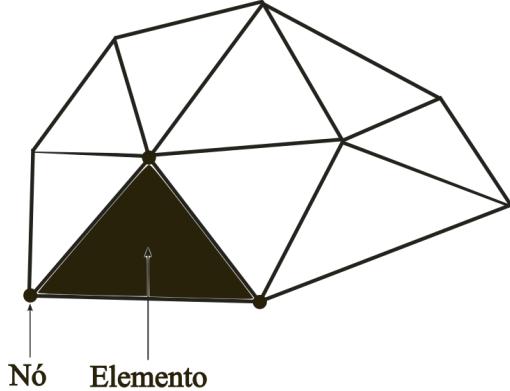


Figura 2.5: Típica malha de elementos finitos em duas dimensões. Nó e elemento triangular em destaque.

de incógnitas em pontos especificados, chamados de nós. O método dos elementos finitos também possui a vantagem da sua utilização em geometrias não regulares, ele nos permite formar os elementos, ou sub-regiões, em um sentido arbitrário, uma representação próxima de limites de domínios complicados é possível.

Segundo Ferziger [16], a característica distintiva do método de elementos finitos é que as equações são multiplicados por uma função de peso antes de serem integrados em todo o domínio, para com isso utilizarmos a equação na sua forma variacional. De acordo com [15], a solução de um problema contínuo pelo método dos elementos finitos pode ser aproximada pelo seguinte processo:

**Discretização do contínuo:** Dividindo a região da solução em elementos. A discretização de elementos finitos permite uma variedade de formas. Os elementos mais utilizados em 2D, geralmente são triângulos ou quadriláteros, enquanto em 3D tetraedros ou hexaedros são mais frequentemente utilizados [4]. Cada elemento é formado pela conexão de um certo número de nós. O número de nós empregados para formar um elemento depende do tipo de elemento.

**Selecionar as funções de interpolação, também chamadas de função de forma:** As funções empregadas para representar a natureza da solução dentro de cada elemento são chamadas de funções de forma, ou funções de interpolação. Elas são usadas para determinar o valor da variável dentro de um elemento interpolando os valores nodais. Essas funções podem ser lineares ou polinomiais. As funções lineares são mais simples e apresentam custo computacional menor, porém demandam uma malha mais refinada quando comparada com as funções polinomiais.

As equações de forma para um problema unidimensional, com nós  $x_i$  e  $x_j$ , podem ser descritas :

$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i}, \quad N_j(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}. \quad (2.17)$$

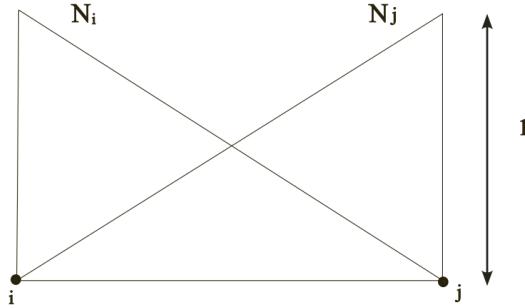


Figura 2.6: Representação da função de forma para um elemento unidimensional linear.

Por exemplo, em um caso onde ocorre variação linear da temperatura entre dois nós, com tempereraturas prescritas de  $T_i$  e  $T_j$ , para os nós  $i$  e  $j$  respectivamente. A variação linear de temperatura no elemento é representada por:

$$T(x) = N_i T_i + N_j T_j \quad (2.18)$$

**Montagem e resolução das equações:** Após montarmos as equações matriciais que expressam as propriedades de cada elemento, é feito um sistema de equações simultâneas, combinando as equações matriciais de cada elemento.

$$[K]\{T\} = \{f\} \quad (2.19)$$

- $K$  - Esta é uma matriz de rigidez, ou matriz global, que resulta da montagem das contribuições individuais de cada elemento da malha.
- $T$  - é a variável de interesse, a ser obtida em cada nó.
- $f$  - É o vetor de cargas. Representa as ações que atuam sobre o sistema, como forças, pressões, fontes térmicas, entre outras condições de contorno, dependendo do tipo de problema abordado.

As funções de forma não aparecem explicitamente na equação  $[K]\{T\} = \{f\}$ , mas elas estão embutidas no processo de montagem do sistema.

Na formulação do método dos elementos finitos, a solução  $T(x)$  é aproximada por uma combinação linear das funções de forma:

$$T(x) \approx \sum_{i=1}^n N_i(x) T_i,$$

onde  $N_i(x)$  são as funções de forma e  $T_i$  são os valores nodais, como demonstrado na equação 2.18.

Ao inserir essa aproximação na forma variacional e realizar a integração sobre cada elemento, os elementos da matriz de rigidez  $[K]$  e do vetor de força  $\{f\}$  são calculados a partir de integrais que envolvem os produtos das funções de forma (e suas derivadas). Por exemplo:

$$K_{ij} = \int_{\Omega_e} \alpha(x) \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \quad (2.20)$$

$$f_i = \int_{\Omega_e} f(x) N_i(x) dx \quad (2.21)$$

Dessa forma, embora a equação final  $[K]\{T\} = \{f\}$  não mostre explicitamente as funções  $N_i(x)$ , elas são importantes para definir os coeficientes que compõem  $[K]$  e  $\{f\}$ .

# Capítulo 3

## Equações de governo

### 3.1 Princípio da conservação da massa

O princípio da conservação de massa é uma das leis fundamentais da física que descreve a natureza da matéria e sua conservação em sistemas. Em mecânica dos fluidos, esse princípio é essencial para compreender e analisar o comportamento dos fluidos em diferentes situações.

O princípio da conservação de massa é frequentemente expresso através da equação da continuidade. Esta equação estabelece que, para um fluxo contínuo de fluido em um sistema, a taxa de entrada de massa em uma região deve ser igual à taxa de saída de massa dessa região, desde que não haja acúmulo ou subtração de massa no interior do sistema.

Sendo o sistema, um volume de controle que conserva sua massa,  $\frac{\partial m}{\partial t} = 0$ , podemos escrever:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0 \quad (3.1)$$

Sendo:  
     $\rho$  a densidade do fluido,  
     $t$  o tempo,  
     $V$  o volume de controle do fluido.

Utilizando o Teorema de Transporte de Reynolds [17], podemos transformar essa equação em:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (3.2)$$

Sendo os novos termos:  $\oint_S$  a integral de superfície,  $\mathbf{v}$  o vetor velocidade e  $\mathbf{n}$  o vetor normal ao escoamento. O primeiro termo da equação 3.2 representa a

taxa de variação da massa dentro do volume de controle, enquanto o segundo termo representa a taxa líquida de fluxo de massa para fora da superfície de controle.

Utilizando o teorema da divergência na equação 3.2, com o intuito de transformar a integral de superfície em integral de volume, temos:

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] = 0 \quad (3.3)$$

Sendo esta equação válida para qualquer volume de controle. Portanto, para um volume infinitesimal obtemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.4)$$

Neste trabalho, utilizaremos a equação da continuidade em duas dimensões. Logo, podemos expandir a equação para as coordenadas do eixo x e y:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

Expandindo os termos dessa equação, temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left[ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] = 0 \quad (3.6)$$

Em notação vetorial, temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \rho) + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (3.7)$$

Quando assumimos a hipótese de incompressibilidade do fluido,  $\rho = \text{constante}$ , a equação da continuidade pode ser expressa na forma simplificada como:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.8)$$

## 3.2 Equação da quantidade de movimento linear

A quantidade de movimento é uma importante grandeza vetorial, definida como o produto da massa de um corpo pela sua velocidade. A equação da quantidade de movimento descreve como o momento linear de um fluido muda ao longo do tempo

em resposta às forças externas e internas que atuam sobre ele.

Para a obtenção das equações de conservação da quantidade de movimento, utilizamos o princípio de conservação da massa e aplicamos o Teorema do Transporte de Reynolds. A equação estabelece que a taxa de variação da quantidade de movimento dentro de um volume de controle é igual ao fluxo líquido de quantidade de movimento para fora do volume, mais a soma das forças de superfície e de volume.

A taxa de variação da quantidade de movimento pode ser expressa como:

$$\int_V \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} dV \quad (3.9)$$

O fluxo líquido da quantidade de movimento é obtido multiplicando a equação do fluxo de massa,  $\oint_S \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}dA$ , pela velocidade  $\mathbf{v}$ , resultando em:

$$\oint_S \rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}dA \quad (3.10)$$

A força de superfície é representada pelo vetor de tensão  $\boldsymbol{\sigma}$ , que atua em cada elemento da superfície de controle:

$$\oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}dA \quad (3.11)$$

Para a resultante das forças de volume, temos:

$$\int_V \rho\mathbf{g}dV \quad (3.12)$$

onde  $\mathbf{g}$  representa a aceleração gravitacional.

Assim, combinando as equações acima, obtemos a equação integral da quantidade de movimento:

$$\int_V \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} dV = -\oint_S \rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}dA + \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}dA + \int_V \rho\mathbf{g}dV \quad (3.13)$$

Aplicando o teorema da divergência às integrais de superfície:

$$\int_V \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} dV = -\int_V \nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) dV + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \rho\mathbf{g}dV \quad (3.14)$$

Como essa equação é válida para qualquer volume de controle, obtemos a forma diferencial da equação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{g} \quad (3.15)$$

Decompondo apenas o lado esquerdo da equação:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v}(\nabla \cdot (\rho\mathbf{v})) \quad (3.16)$$

Rearranjando os termos:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right] + \mathbf{v} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) \right] \quad (3.17)$$

Pela equação da continuidade 3.8, sabemos que o segundo termo é zero. Assim, a equação final da quantidade de movimento é:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (3.18)$$

### 3.3 Tensor de tensões

Podemos decompor o tensor de tensões  $\boldsymbol{\sigma}$  na soma de dois tensores, um tensor devido à pressão  $p$  e outro devido à viscosidade  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (3.19)$$

Onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

A equação que expressa matematicamente o tensor de tensões viscosas  $\boldsymbol{\tau}$ , para um fluido Newtoniano, pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} + \left( \lambda - \frac{2}{3}\mu \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} \quad (3.20)$$

Sendo  $\mu$  o coeficiente de viscosidade dinâmica e  $\lambda$  o coeficiente de viscosidade volumétrica do fluido. Considerando o fluido como incompressível, podemos reduzir essa equação, utilizando a equação da continuidade simplificada,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , a equação se reduz a:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} \quad (3.21)$$

Já o tensor  $\mathbf{D}$  é relativo à parte simétrica do tensor taxa de deformação, sendo explicitado:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \quad (3.22)$$

Substituindo a forma explícita do tensor D na equação 3.21, temos para o a parte cisalhante do tensor tensão:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T) \quad (3.23)$$

### 3.4 Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes, juntamente com a equação da continuidade, formam um conjunto de equações diferenciais parciais não lineares, acopladas para as velocidades e pressão. Essas equações descrevem muitos escoamentos comuns para fluidos newtonianos incompressíveis. Porém, apenas possuem solução analítica para problemas simples. Para problemas mais complexos, soluções experimentais ou numéricas, como as utilizadas nesse trabalho, são frequentemente necessárias. A solução das equações de Navier-Stokes é crucial para entender e prever o comportamento de fluidos em uma variedade de situações.

Para achar as equações de Navier-Stokes, vamos substituir o tensor de tensões na equação geral da quantidade de movimento 3.18 :

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)] + \rho\mathbf{g} \quad (3.24)$$

Rearrumando a equação, dividindo-a por  $\rho$ :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla \cdot \left[ \frac{\mu}{\rho}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T) \right] + \mathbf{g} \quad (3.25)$$

Substituindo o lado esquerdo da equação pela notação de derivada material e o termo  $\frac{\mu}{\rho}$  pelo termo da viscosidade cinemática  $\nu$ :

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla \cdot [\nu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)] + \mathbf{g} \quad (3.26)$$

Para um escoamento incompressível, monofásico, com viscosidade constante, o termo  $\nabla \cdot [\nu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)]$  pode ser simplificado. Então, as equações de Navier-Stokes em sua forma dimensional, que são o conjunto das equações da quantidade de movimento com a substituição do tensor de tensões, juntamente com a equação da continuidade, tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (3.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.28)$$

# Capítulo 4

## Método de elementos finitos

### 4.1 Introdução

O método dos elementos finitos é uma técnica numérica amplamente utilizada para resolver problemas de engenharia. O objetivo principal do método é encontrar uma solução aproximada para um conjunto de equações diferenciais parciais que descrevem o comportamento de um sistema físico. Neste capítulo iremos abordar o método dos elementos finitos discretizando as equações de Navier-Stokes, que foi a formulação utilizada neste trabalho.

No método de elementos finitos, utilizamos uma forma de representação matemática alternativa à equação diferencial original, que permite uma formulação mais conveniente para a discretização e solução numérica. Ela é chamada de forma variacional e será apresentada ainda neste capítulo.

O domínio físico do problema é dividido em elementos finitos conectados por nós. Neste trabalho, utilizamos o triângulo mini  $P1^+/P1$  como elemento de malha. A malha representa uma aproximação da geometria real. Os elementos de malha serão discutidos também em seção posterior, ainda nesse capítulo.

Com a malha e as equações na forma variacional definidas, são aplicadas as condições de contorno que o sistema deve satisfazer nas fronteiras do domínio, como fluxos prescritos e pressões pré-determinadas.

A partir das contribuições de cada elemento, as equações de cada nó são combinadas para formar um sistema global de equações que representam o comportamento de todo o sistema. As equações globais são resolvidas numericamente para cada ponto nodal, afim de obter as incógnitas do problema, que no nosso caso são os campos de pressão e velocidade nos eixos x e y. Por último, os resultados obtidos são analisados e interpretados para extrair informações relevantes sobre o comportamento do sistema. A evolução dos campos de pressão e velocidade pode ser visualizado em outros softwares específicos para esse fim. Neste trabalho utilizamos o Paraview[18].

## 4.2 Condições de Contorno

As condições de contorno representam as restrições físicas impostas às fronteiras do domínio e influenciam diretamente o a solução dos problemas. No presente trabalho, foram adotadas as seguintes condições de contorno para o caso do escoamento ao redor da válvula borboleta:

### Condições de Dirichlet

A condição de Dirichlet impõe um valor fixo para a variável na fronteira do domínio. Em problemas de escoamento de fluidos, essa condição é utilizada para prescrever a velocidade do fluido em determinadas regiões.

Essa condição de contorno foi utilizada na maioria dos casos simulados nesse trabalho, impondo um perfil de velocidade horizontal constante nos domínios:

$$V_x = V_{\text{in}} \quad \text{em } \Gamma_{\text{entrada}}$$

Além disso, sobre as paredes do canal e na superfície da do obturador da válvula, adotamos a condição de não deslizamento, ou seja, a velocidade do fluido igual à zero na superfície. Temos:

$$\mathbf{V} = 0 \quad \text{em } \Gamma_{\text{parede}} \cup \Gamma_{\text{válvula}}$$

Essa condição reflete a aderência do fluido à superfície sólida, impedindo a existência de velocidade relativa entre eles.

Na saída do canal, utilizamos outra condição de Dirichlet, porém aplicada à pressão. Foi imposta que a pressão seja igual a zero:

$$P = 0 \quad \text{em } \Gamma_{\text{saída}}$$

Essa condição garante que a condição de condição de Ladyzenskaja-Babuska-Brezzi(LBB) seja atendida. Essa condição será detalhada mais adiante, ainda nesse capítulo.

### Condições de Neumann

A condição de Neumann impõe a derivada normal da variável, ou seja, um fluxo específico na fronteira. No presente trabalho, utilizamos essa condição de Neumann para a pressão nas paredes do domínio. Em superfícies sólidas impermeáveis, o

gradiente da pressão na direção normal é nulo:

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_{\text{parede}}$$

Isso significa que não há fluxo de pressão através das paredes, garantindo que a força do fluido não tenha um componente perpendicular às paredes. Essa condição não é imposta na formulação, ela está intrínseca ao problema

### 4.3 Forma variacional

Existem duas etapas principais no método dos elementos finitos. Primeiro, transformamos a equação diferencial parcial original em uma forma variacional, também chamada de forma fraca. Por conseguinte, a equação diferencial parcial original é chamada de forma forte. A forma variacional, para qualquer conjunto de equações, pode ser construída multiplicando-se o conjunto de equações por uma função arbitrária apropriada, chamada função peso, e integrando em seu domínio.

A forma variacional das equações diferenciais requer o uso dos espaços de Sobolev, pois ele nos fornece o espaço adequado onde a diferenciabilidade da função fraca é garantida [19]. Então, seja  $L^2$  o espaço das funções quadraticamente integráveis sobre o domínio  $\Omega$ , dado por:

$$L^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty \right\} \quad (4.1)$$

Sejam também o espaço de Sobolev  $\mathcal{H}^1(\Omega)$ , dado por 4.2, e seu análogo para vetores n-dimensionais, dado por 4.3.

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \left\{ v \in \mathcal{L}_2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in \mathcal{L}^2(\Omega), \quad i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (4.2)$$

$$\mathcal{H}^1(\Omega)^n = \left\{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) : v_i \in \mathcal{H}^1(\Omega), \quad i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (4.3)$$

Por conseguinte, os subespaços  $\mathcal{V}_{\mathbf{v}\Gamma}(\Omega)$  e  $\mathcal{P}_{p\Gamma}(\Omega)$  definidos por 4.4 e 4.5, onde  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são os contornos de velocidade e pressão, respectivamente.

$$\mathcal{V}_{\mathbf{v}\Gamma}(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{H}^1(\Omega)^n : \mathbf{v} = \mathbf{v}\Gamma \text{ em } \Gamma_1 \right\} \quad (4.4)$$

$$\mathcal{P}_{p\Gamma}(\Omega) = \left\{ p \in \mathcal{H}^1(\Omega) : p = p\Gamma \text{ em } \Gamma_2 \right\} \quad (4.5)$$

A formulação variacional será então construída multiplicando as equações diferenciais por funções peso apropriadas e integrando sobre o domínio, o que nos conduz à formulação dentro dos espaços de Sobolev. Para as equações de

Navier-Stokes, multiplicamos pelas funções peso  $w$  e  $q$ :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{\nabla p}{\rho} - \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{w} d\Omega = 0 \quad (4.6)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) q d\Omega = 0 \quad (4.7)$$

Aplicando a distributiva na equação 4.6:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{\nabla p}{\rho} \right) \cdot \mathbf{w} d\Omega - \nu \int_{\Omega} (\nabla^2 \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} d\Omega = 0 \quad (4.8)$$

Podemos desprezar os efeitos da gravidade nesse problema, logo:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{\nabla p}{\rho} \right) \cdot \mathbf{w} d\Omega - \nu \int_{\Omega} (\nabla^2 \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} d\Omega = 0 \quad (4.9)$$

Podemos tratar o segundo e o último termo da equação, termo da pressão e termo difusivo, respectivamente, realizando a integração por partes para as seguintes finalidades: separação do termo de contorno em ambos os casos (integral em  $\Gamma$ ), e redução de ordem no último termo.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) \cdot \mathbf{w} d\Omega + \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma} (\mathbf{w} p) \mathbf{n} d\Gamma - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} (p \nabla) \cdot \mathbf{w} d\Omega \\ - \nu \int_{\Gamma} (\mathbf{w} \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \nu \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{v}) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

O último termo possui um produto escalar entre tensores.

Como as condições de contorno usuais para problemas de fluidos incompressíveis são do tipo Dirichlet, onde a função peso deve ser nula, e de Neumann homogêneo, que também anula as integrais no contorno  $\Gamma$ , podemos simplificar a equação, eliminando os termos de integrais em  $\Gamma$ . Juntamente com a equação da continuidade, temos a forma final das equações:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) \cdot \mathbf{w} d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} (p\nabla) \cdot \mathbf{w} d\Omega + \nu \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{v}) d\Omega = 0 \quad (4.11)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) q d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

## 4.4 Discretização por elementos finitos

O método dos elementos finitos resolve o problema na forma variacional utilizando um método de aproximação. Discretiza-se o domínio em elementos, resultando em uma malha de pontos nodais. Nesse estudo, será abordada uma malha de duas dimensões, triangular, com pontos em cada vértice e em cada centróide de elemento triangular. Esse elemento é chamado de P1P1+ ou mini, e será abordado mais à frente.

Sendo  $nv$  o número de vértices mais centróides e  $np$  o número de vértices;

$$\mathbf{v} \approx \sum_i^{nv} N_i(x, y) \mathbf{v}_i \quad \mathbf{w} \approx \sum_i^{nv} N_j(x, y) \mathbf{w}_j \quad p \approx \sum_i^{np} N_i(x, y) p_i \quad (4.13)$$

As funções de aproximação para velocidade estão associadas aos vértices do triângulo e ao centróide, bem como a função a função peso,  $w$ . Por outro lado, a pressão deve estar associada a um grau de liberdade menor, para satisfazer a condição de LBB, por isso está associada apenas aos vértices do triângulo.

Onde  $N_i$  e  $N_j$  são funções de interpolação e  $v_i, w_j, p_i$  são coeficientes constantes a serem determinados. Neste estudo iremos utilizar funções de interpolação lineares,  $N_i$  e  $N_j$ , pois o uso de elementos de ordem mais alta pode trazer alguma instabilidade numérica e incremento do uso de recursos computacionais.

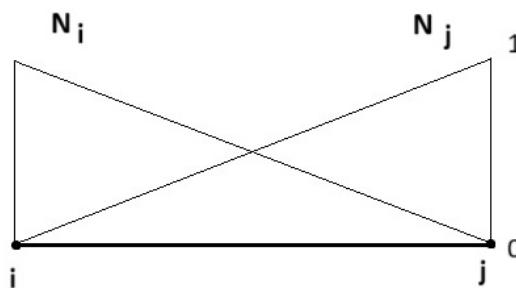


Figura 4.1: Elemento de interpolação linear de 1<sup>a</sup> ordem.

Sendo:

$$N_i = 1 - \frac{x - x_i}{h}, \quad N_j = \frac{x - x_i}{h} \quad (4.14)$$

Como  $v$ ,  $w$  e  $p$  são soluções aproximadas, existe ainda um resíduo a ser tratado. A ideia do MEF é ponderar esse resíduo. Dentre os métodos de ponderação, utilizaremos o Método de Galerkin, que é aquele que considera as funções de forma (ou de interpolação)  $N_i$  e  $N_j$  como sendo iguais.

Expandindo a derivada material do primeiro termo da equação da quantidade de movimento e substituindo as funções de forma, tanto na equação da quantidade de movimento quanto na equação da continuidade, temos:

1. Equação da quantidade de movimento na forma espacialmente discretizada

$$\sum_e \left( \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i v_i}{\partial t} \right) N_j w_j d\Omega \right) + \sum_e \left( \int_{\Omega} (N_i v_i \cdot \nabla N_i v_i) N_j w_j d\Omega \right) - \frac{1}{\rho} \sum_e \left( \int_{\Omega} N_j \nabla \cdot N_i d\Omega \right) p + v \sum_e \left( \int_{\Omega} (\nabla N_i : \nabla N_j) v_i d\Omega \right) = 0 \quad (4.15)$$

2. Equação da continuidade na forma discretizada

$$\sum_e \int_{\Omega} N_j q_j (\nabla \cdot N_i v_i) d\Omega = 0 \quad (4.16)$$

Os seguintes termos possuem correspondentes matriciais:

Termo discretizado	Tipo de termo	Nome da matriz
$\int_{\Omega} N_j N_i d\Omega$	Integral sem derivadas	De massa - M
$\int_{\Omega} N_j \nabla N_i d\Omega$	Integral com gradiente de um termo	Do gradiente - G
$\int_{\Omega} \nabla N_j \nabla N_i d\Omega$	Integral com multiplicação escalar entre gradientes	De rigidez - K

Tabela 4.1: Termos discretizados e seus correspondentes matriciais

Utilizando os correspondentes matriciais, podemos substitui-los nas duas equações discretizadas.

$$\left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \nu \mathbf{K} \right) \mathbf{v}^{n+1} - \frac{1}{\rho} \mathbf{G} p^{n+1} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \mathbf{v}^n - (\mathbf{v}^n \cdot \mathbf{G}_v) \mathbf{v}^n + cc \quad (4.17)$$

$$\mathbf{D} v^{n+1} = 0 + cc \quad (4.18)$$

Expandindo em matrizes, com relação ao eixo x e y para a velocidade e pressão absoluta. As condições de contorno nas equações 4.17 e 4.18 são representadas por  $cc$  e serão detalhadas na próxima seção.

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \nu \mathbf{K} & 0 & -\frac{1}{\rho} \mathbf{G}_x \\ 0 & \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \nu \mathbf{K} & -\frac{1}{\rho} \mathbf{G}_x \\ \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_y & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x^{n+1} \\ v_y^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} v_x^n - (v_x^n \mathbf{G}_{vx} + v_y^n \mathbf{G}_{vy}) v_x^n + cc \\ \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} v_y^n - (v_x^n \mathbf{G}_{vx} + v_y^n \mathbf{G}_{vy}) v_y^n + cc \\ 0 + cc \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema linear acima,  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , encontramos os valores de  $v_x$ ,  $v_y$  e  $p$  ao longo do tempo, para os pontos de nossa malha.

## 4.5 Elementos de malha

No método dos elementos finitos, o domínio é discretizado formando uma malha computacional com vários elementos. As equações de governo são aplicadas à cada um dos nós desses elementos da malha, desse modo, a escolha do tipo de elemento da malha é de suma importância no método dos elementos finitos.

Na equação de Navier-Stokes existe uma forte relação de acoplamento entre os campos de velocidade e pressão, sendo um típico problema de ponto de sela, tendo apenas uma solução para cada nó. Nesse tipo de caso, os métodos numéricos podem sofrer de instabilidades caso não atendam à condição de Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi (LBB).

**A condição de Ladyzenskaja–Babuska–Brezzi (LBB)**, também conhecida como condição "inf-sup", desempenha um papel importante na solução de problemas de ponto de sela. A origem dessa condição é comentada no trabalho de Ladyzhenskaya [20], no estudo da mecânica dos fluidos incompressíveis e foi formalizada matematicamente por Babuška [21] e Brezzi [22] no contexto do método de elementos finitos. Em problemas do tipo ponto de sela, onde a pressão atua como um multiplicador de Lagrange para impor a incompressibilidade, a condição de LBB garante a estabilidade e a convergência da solução numérica. Essencialmente, essa condição estabelece um vínculo entre os espaços discretos da velocidade e da pressão, garantindo que a pressão seja corretamente determinada pelo método numérico e que não surjam soluções espúrias. Os trabalhos de Brezzi e Fortin [23] e Hughes [24] apresentam uma análise detalhada sobre a condição de LBB e sua importância nos métodos numéricos.

Uma das principais consequências da violação da condição de LBB em discretizações numéricas é o fenômeno de oscilações na pressão em padrão oscilante, tipo tabuleiro de xadres, conhecido como checkerboard, que gera oscilações artificiais entre os nós da malha. Esse problema ocorre, por exemplo, ao utilizar pares de elementos finitos inadequados, como o par  $P_1/P_1$  (onde tanto a velocidade quanto a pressão são aproximadas por funções lineares contínuas). Para evitar esse comportamento indesejado, utilizam-se pares de elementos chamados de LBB-estáveis,

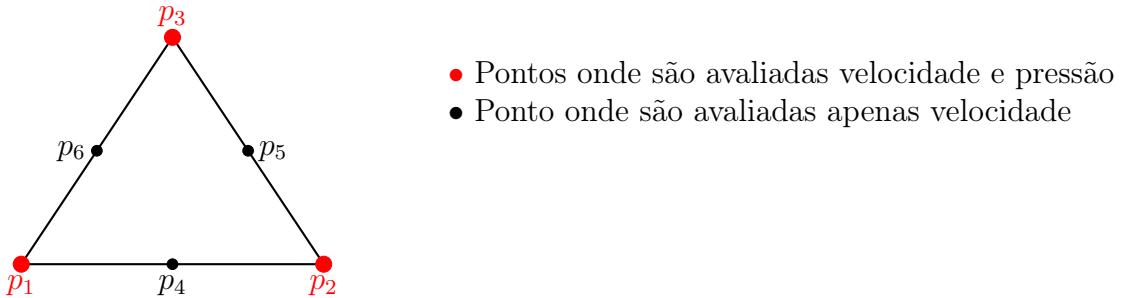


Figura 4.2: Representação do elemento Taylor-Hood  $P_2/P_1$ . Nos nós em vermelho são avaliadas velocidade e pressão, nos nós ao centro das arestas são avaliadas apenas as velocidades. Totalizando 9 nós onde são avaliadas a velocidade e 3 nós onde são avaliadas as pressões, também satisfazendo a condição de LBB.

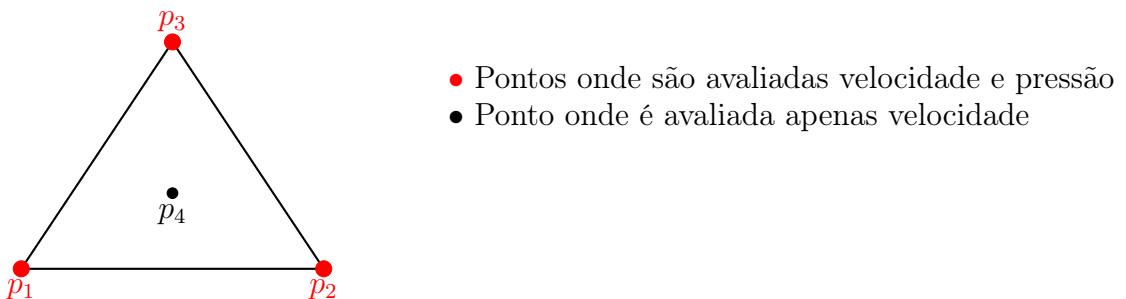


Figura 4.3: Representação do elemento Mini  $P_1^+/P_1$ . Nos nós em vermelho são avaliadas velocidade e pressão, no nó ao centro do triângulo é avaliada apenas a velocidade. Totalizando 4 nós onde são avaliadas a velocidade e 3 nós onde são avaliadas as pressões, satisfazendo a condição de LBB. Esse elemento foi o utilizado em todos os casos desse trabalho.

como por exemplo os elementos de Taylor-Hood:  $(P_2/P_1)$  e  $(P_1+/P_1)$ , demonstrados nas figuras 4.2 e 4.3. Neste trabalho, o elemento escolhido foi o triângulo mini  $(P_1+/P_1)$ . A correta escolha dos espaços discretos é importante para garantir a precisão das simulações numéricas. Geralmente, quantos mais pontos, menor é o erro porém maior é o custo computacional.

## Funções de forma

Para o triângulo mini  $P_1+/P_1$ , com função de interpolação linear, as funções de forma são da seguinte maneira:  $N(x, y) = [N_i, N_j, N_k, N_L]$ . **As funções de forma**  $N_i, N_j, N_k$  e  $N_L$  são obtidas através de uma combinação linear das **coordenadas baricêtricas do triângulo**:  $B_i, B_j$  e  $B_k$ .

- $N_i = B_i - 9B_iB_jB_k$
- $N_j = B_j - 9B_iB_jB_k$
- $N_k = B_k - 9B_iB_jB_k$
- $N_L = 27B_iB_jB_k$

- $B_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y)$
- $B_j = \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y)$
- $B_k = \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y)$

Para o cálculo das coordenadas baricêtricas do triângulo, é necessário se achar o valor da área do triângulo  $A_{triangulo}$ . O cálculo da área pode ser encontrado através da metade do determinante de uma matriz com suas coordenadas.

$$A_{triangulo} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Utiliza-se uma tabela de coordenadas 4.2, para facilitar o cálculo computacionalmente da coordenada baricêntrica de todos os elementos da malha.

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j & b_i &= y_j - y_k & c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k & b_j &= y_k - y_i & c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i & b_k &= y_i - y_j & c_k &= x_j - x_i \end{aligned}$$

Tabela 4.2: Tabela de coordenadas

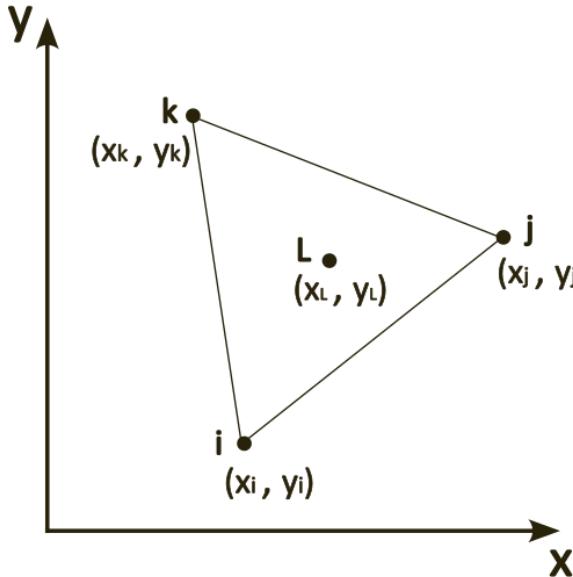


Figura 4.4: Elemento triangular mini, com destaque para os pontos nodais nos 3 vértices e 1 ponto no centróide.

## 4.6 Método semi-Lagrangeano

A medida em que aumentamos o número de Reynolds em nossa simulação, o termo convectivo da equação de Navier-Stokes tende a gerar instabilidade. Existem

duas tratativas para esse problema, ou diminuímos o passo de tempo de cada iteração, o que acarreta um aumento de tempo de rodagem e de iterações da simulação, ou utilizamos alguma técnica para tratar esse problema. O método Semi-Lagrangeano é uma das formas de tratar esta instabilidade do termo convectivo.

Ele se baseia na ideia de seguir as partículas fluidas ao longo do tempo, uma abordagem Lagrangeana, em vez de acompanhar as propriedades do fluido em pontos fixos no espaço, abordagem Euleriana.

A principal vantagem desse método é que ele permite aumentar o intervalo de tempo das iterações, sem comprometer a estabilidade numérica. Isso é especialmente útil em casos de escoamentos com altos números de Reynolds.

Um dos primeiros a propor a utilização do método foi Sawyer[25], utilizando o método para integração da equação de vorticidade-advecção barotrópica em problemas de previsão do tempo. Ele concluiu que o método semi-Lagrangiano permite um aumento considerável no intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) das interações, sem encontrar instabilidade computacional, além disso, o método também cria menos distorção do que o método Euleriano anteriormente utilizado.

A partir da década de 80, o semi-Lagrangeano passou a ser utilizado em sistemas convecção-difusão com o objetivo de se obterem as duas mesmas características: passo de tempo grande e estabilidade. Pironneau [26] aplicou o método para as equações de Navier-Stokes, simulando um escoamento num problema conhecido da cavidade, com  $Re = 100$ , onde ele demonstrou uma estabilidade incondicional do método e afirmando que o método é numericamente melhor do que os esquemas up-wind usuais porque requer solução numérica apenas de sistemas simétricos.

Segundo Anjos[27] , o algoritmo semi-lagrangeano é um método de fator de integração no qual tal fator é um operador de convecção que se desloca num sistema de coordenadas móveis no fluido, ou seja, coordenadas Lagrangeanas. Para implementarmos o método, é necessário realizarmos a discretização através da derivada material, integrando-a através da trajetória característica da partícula do fluido, que percorre a malha. Temos que:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \approx \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_p}{\Delta t} \quad (4.19)$$

Onde o subscrito  $p$  denota o valor da variável no intervalo de tempo anterior.

O primeiro passo do método é o cálculo das posições dos nós no período de tempo anterior,  $t_p$ . Basicamente isso é feito da seguinte forma:  $\mathbf{x}_p = \mathbf{x} - \mathbf{v}\Delta t$ , onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade do fluido e  $\mathbf{x}$ , a posição do nó da malha.

Um algoritmo de busca foi construído para otimizar o mapeamento dos elemen-

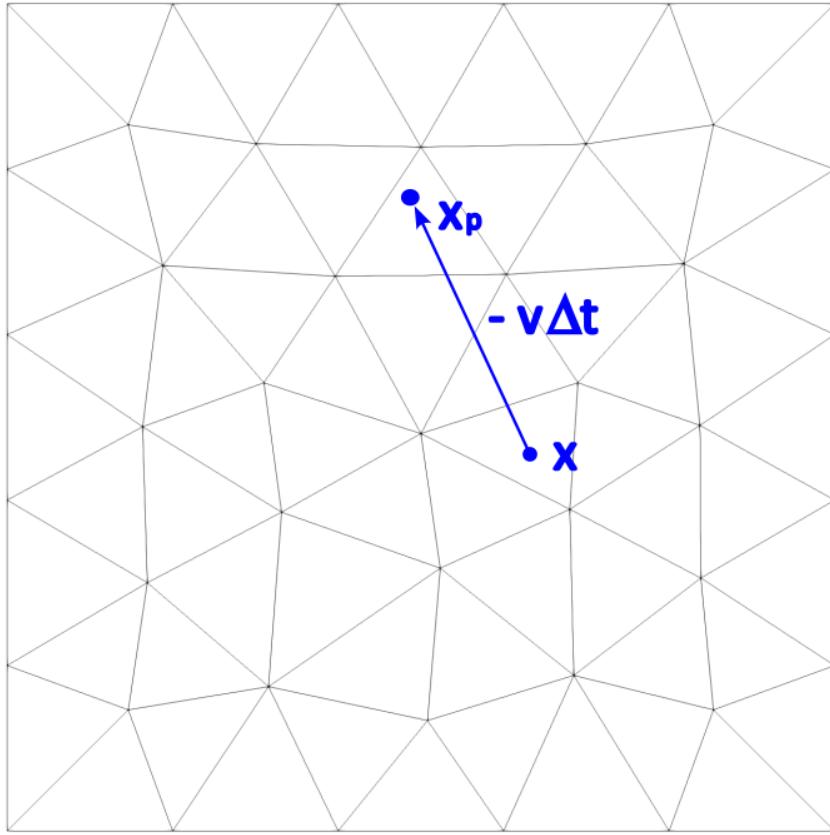


Figura 4.5: Esquema da formulação semi-lagrangeana mostrando como a posição  $\mathbf{x}_p$ , no passo de tempo anterior  $t_p$ , é determinado. O vetor  $-\mathbf{v}\Delta t$  é usado para o referido cálculo, onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade da partícula fluida localizada na posição  $\mathbf{x}$  do nó, e delta t é o passo de tempo.

tos, com o intuito de encontrar a posição de  $\mathbf{x}_p$  na malha, utilizando-se para cálculo as distâncias mais próximas de  $\mathbf{x}_p$  às coordenadas dos pontos vizinhos. Tal passo é repetido em loop, para cada ponto na malha, até que todas as posições  $\mathbf{x}_p$  sejam atribuídas aos seus respectivos elementos. O algoritmo implementado tem a capacidade de lidar com possíveis fenômenos, como quando o ponto determinado no tempo  $t_p$ , com coordenada  $\mathbf{x}_p$ , é fora do domínio. Nesse caso, o ponto mais próximo daquele localizado em  $\mathbf{x}_p$  deverá estar localizado na fronteira, após o algoritmo levar à conclusão que  $\mathbf{x}_p$  não pertence ao domínio e, então, os valores limite mais próximos serão interpolados e atribuído a este ponto.

O próximo passo do método é o cálculo das variáveis de interesse, que são calculadas por meio da interpolação dos valores de tais variáveis nos vértices do elemento que contém a partícula fluida no tempo  $t_p$ . Outra otimização implementada é com respeito a pontos localizados nos contornos do domínio, onde é imposta a condição de não escorregamento, velocidade igual a zero. Neste caso, a etapa semi-Lagrangiana é ignorada para esses pontos, assim como para aqueles localizados em um limite de fluxo de entrada, onde a velocidade é constante.

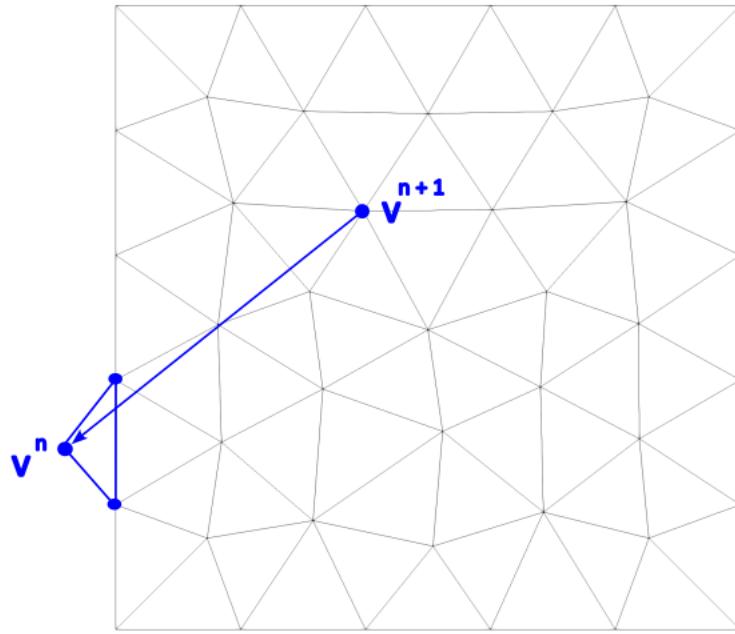


Figura 4.6: Exemplo de busca fora do domínio. Neste caso específico, o método faz uma interpolação entre os 2 nós mais próximos do ponto

Após o algoritmo realizar as buscas das velocidades em todos os pontos da malha, no passo de tempo anterior,  $t_p$ , ele irá executar o cálculo da derivada material. Para o cálculo da derivada material, se repete o procedimento de imposição das condições de contorno e o cálculo do sistema linear composto pelas matrizes, mas agora as matrizes possuem as derivadas materiais na forma discreta.

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \nu \mathbf{K} & 0 & -\frac{1}{\rho} \mathbf{G}_x \\ 0 & \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \nu \mathbf{K} & -\frac{1}{\rho} \mathbf{G}_x \\ \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_y & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x^{n+1} \\ v_y^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} v_{x_d}^n + cc \\ \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} v_{y_d}^n + cc \\ 0 + cc \end{bmatrix}$$

Resolvendo o novo sistema linear  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , agora com as derivadas materiais, encontramos os valores de  $v_x^{n+1}$ ,  $v_y^{n+1}$  e  $p^{n+1}$  ao longo do tempo, para os pontos da malha. O subscrito  $d$  é uma referência ao ponto de partida (do inglês, departure).

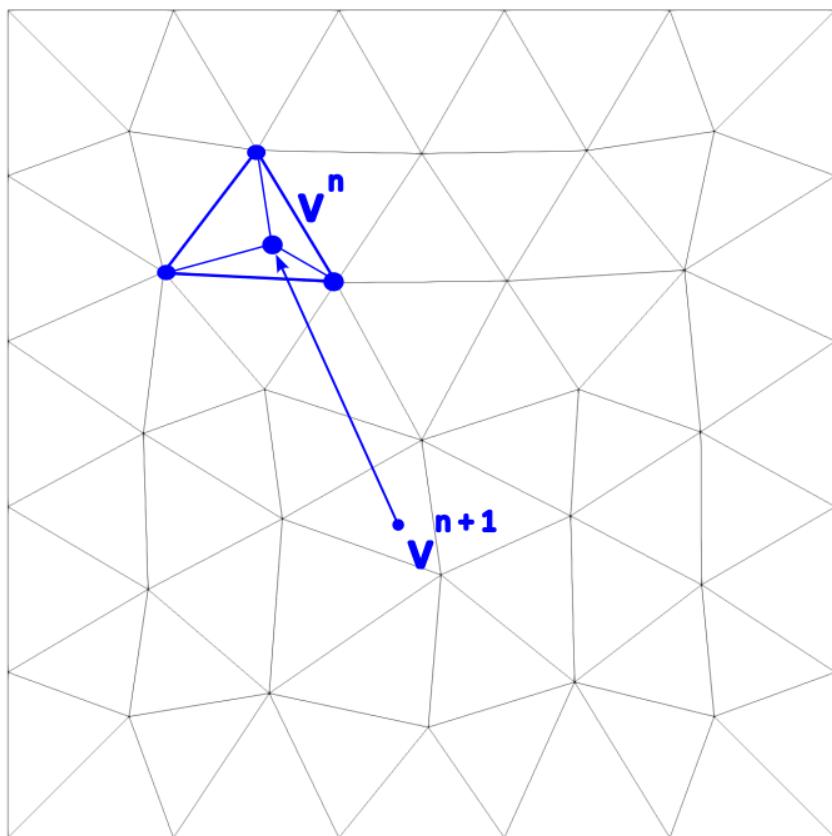


Figura 4.7: Exemplo do método semi-lagrangeano fazendo a busca dentro de um elemento. Nesse caso, a velocidade nesse ponto é encontrada com a interpolação da velocidade dos nós pertencentes a esse elemento

# Capítulo 5

## Implementação computacional

A implementação computacional deste trabalho foi realizada utilizando uma combinação de ferramentas de softwares de código aberto e programação desenvolvida em Python [28]. A geração de malhas foi feita com o GMSH [29], um software de geração de malhas para métodos numéricos, enquanto a visualização dos resultados foi processada no ParaView [18]. O código para solução do problema de escoamento foi escrito em Python, utilizando o método de elementos finitos para a resolução das equações de Navier-Stokes.

### 5.1 Fluxograma da Implementação

A figura 5.1 representa o fluxograma do processo de resolução utilizando o método de elementos finitos, desde a entrada de dados e geração de malha até a visualização dos resultados no ParaView.

1. **Problema Físico** - Esta etapa inicial envolve a identificação e a definição do problema real que se deseja resolver. No contexto de escoamentos em válvulas de controle, o problema físico pode ser determinar como o fluido interage com o obturador da válvula em diferentes ângulos de abertura, assim como prever perdas de carga, formação de vórtices ou regiões de estagnação. O objetivo aqui é traduzir a situação prática para um formato que possa ser analisado matematicamente.
2. **Modelo Matemático** - O problema físico identificado é representado por um conjunto de equações que descrevem os fenômenos envolvidos. Para problemas de dinâmica dos fluidos, são utilizadas as equações de Navier-Stokes. Essas equações são diferenciais parciais, e descrevem a variação das grandezas físicas ao longo do espaço e do tempo.

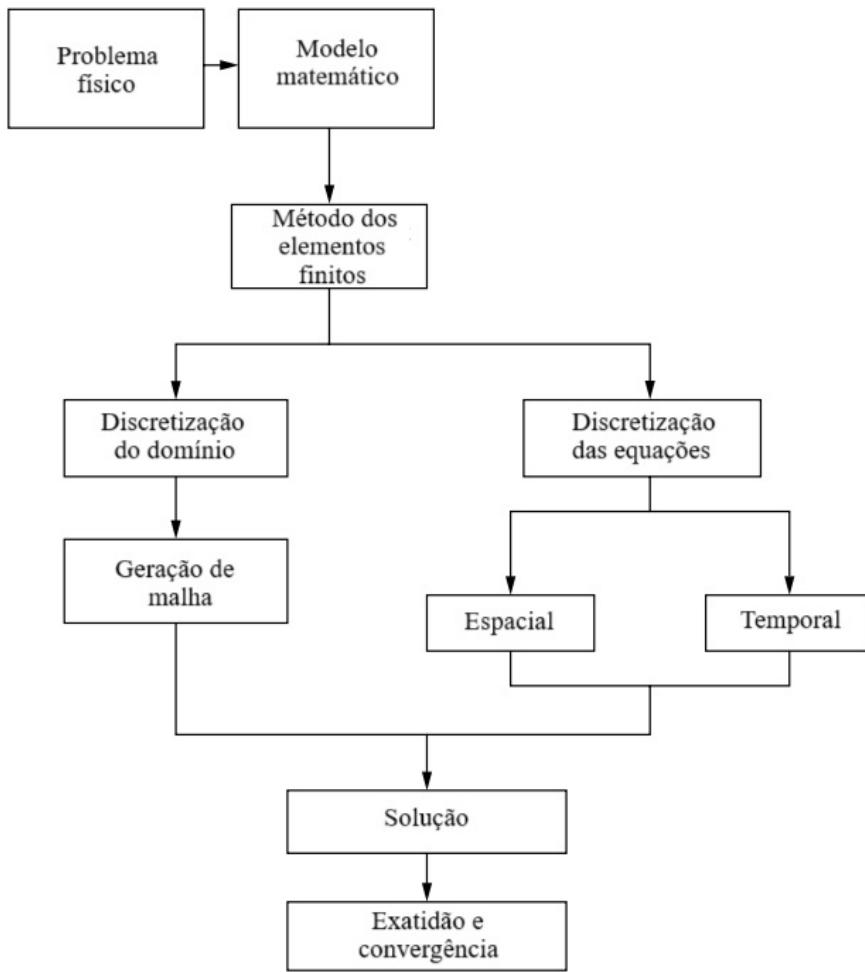


Figura 5.1: Fluxograma resolução método de elementos finitos

3. **Método dos Elementos Finitos** - O método de elementos finitos é selecionado como a técnica numérica para resolver o modelo matemático. Essa escolha é particularmente vantajosa devido à sua flexibilidade em tratar geometrias complexas, e por permitir soluções em domínios com condições de contorno variadas. O MEF transforma as equações diferenciais em um sistema de equações algébricas discretas que podem ser resolvidas computacionalmente. O processo é baseado na decomposição do domínio em elementos menores e na aplicação de funções de interpolação dentro desses elementos.
4. **Discretização do Domínio** - O domínio físico do problema é subdividido em pequenos elementos finitos, formando uma malha. Cada elemento da malha conecta pontos chamados nós, onde as soluções das variáveis são calculadas. Neste trabalho, foram utilizados elementos triangulares em 2D. Essa discretização reduz o problema contínuo com infinitas incógnitas para um problema discreto com um número finito de incógnitas.

5. **Geração de Malha** - A criação da malha é uma etapa importante para garantir precisão e eficiência computacional. As malhas são geradas utilizando ferramentas específicas, como o software GMSH, que permite a definição de refinamentos em regiões críticas, como próximo ao obturador da válvula, onde há maiores gradientes de velocidade e pressão. Elementos menores e mais densos são colocados nessas áreas de interesse, enquanto regiões com menores variações podem ser representadas por elementos maiores. A qualidade da malha influencia diretamente a precisão da solução e o tempo de simulação.
6. **Discretização das Equações** - Após a discretização do domínio, as equações diferenciais que representam o problema físico são discretizadas. O MEF transforma as equações diferenciais em sistemas algébricos utilizando funções de forma e integrais ponderadas. Este processo é dividido em duas partes:  
**Discretização Espacial** - Transforma as derivadas espaciais (como gradientes de velocidade e pressão) em representações discretas, utilizando elementos e nós da malha. A escolha das funções de forma e a imposição de condições de contorno são partes desse processo.  
**Discretização Temporal** - Em problemas transientes, as variáveis são também discretizadas ao longo do tempo. Métodos explícitos, implícitos ou semi-implícitos podem ser utilizados para resolver o comportamento do sistema em intervalos sucessivos de tempo. Para escoamentos com números de Reynolds elevados, técnicas como o método semi-Lagrangeano podem ser aplicadas para estabilizar a solução.
7. **Solução** - Com o sistema algébrico montado, é realizada a solução computacional para obter os valores aproximados das variáveis físicas, como os campos de velocidade e pressão. Os sistemas lineares são resolvidos através de uma função específica, dentro de um loop computacional, achando os valores das variáveis para todos os pontos da malha. A eficiência dessa etapa depende do uso de técnicas para reduzir o custo computacional, como o uso de matrizes esparsas.
8. **Exatidão e Convergência** - Após a solução numérica, é necessário avaliar a qualidade dos resultados. Isso é feito verificando a convergência, por exemplo, se as soluções melhoraram com o refinamento da malha ou com intervalos de tempo  $\Delta t$  menores e comparando os resultados com dados experimentais ou soluções analíticas, quando disponíveis. A exatidão depende de fatores como o refinamento da malha, a escolha do método numérico e a aplicação correta das condições de contorno.

## 5.2 Linguagem de Programação Python

O Python foi escolhido para a implementação do código devido à sua ampla popularidade, facilidade de uso e pela vasta gama de bibliotecas disponíveis para diferentes tipos de cálculos e visualizações. Para este projeto, utilizamos as seguintes bibliotecas principais:

- Numpy: para cálculos matemáticos e manipulação de arrays.
- Meshio: para leitura e manipulação de malhas geradas no GMSH.
- Matplotlib: para geração de gráficos e visualizações dos resultados de simulação.
- Scipy: para a solução de sistemas de equações lineares e outros cálculos algébricos.

## 5.3 Geração de Malha

A geração da malha foi feita utilizando o GMSH [29], que permite criar malhas em geometria 2D e 3D. O domínio foi discretizado em duas dimensões, utilizando elementos triangulares, conhecidos como  $P1^+/P1$  ou Triângulo-Mini, que possuem três vértices e um ponto no centróide. Este tipo de malha é eficaz na resolução de problemas de mecânica dos fluidos devido à sua flexibilidade em lidar com geometrias complexas e satisfazer a condição de Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi (LBB).

A malha foi refinada nas regiões de maior interesse, como nas bordas do obturador da válvula e nos pontos de entrada do duto.

## 5.4 Solução Numérica

A solução numérica foi baseada no Método dos Elementos Finitos (FEM) para resolver as equações de Navier-Stokes em regime incompressível. O algoritmo desenvolvido segue as etapas clássicas da solução FEM:

- Formulação da Equação Variacional: A equação diferencial foi convertida em uma forma variacional (ou fraca), multiplicando-a por uma função peso e integrando sobre o domínio.
- Discretização: O domínio foi discretizado em elementos triangulares, com interpolação linear para as variáveis de velocidade e pressão.

- Aplicação de Condições de Contorno: Foram aplicadas condições de contorno do tipo Dirichlet para a velocidade e pressão, por exemplo como a condição de não deslizamento nas paredes do duto e na válvula, além de uma pressão determinada em zero na saída do duto, para atender as condições de Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi (LBB) .
- Montagem do Sistema de Equações: As equações foram montadas em uma matriz esparsa que descreve o comportamento de cada nó da malha.
- Resolução do Sistema Linear: o sistema foi resolvido utilizando a função `sp-solve` do `scipy`, próprio para resolução de sistemas do tipo  $Ax = b$ .

## 5.5 Método Semi-Lagrangeano

Para escoamentos com números de Reynolds elevados, o termo convectivo nas equações de Navier-Stokes gera instabilidades. Para contornar isso, foi implementado o método Semi-Lagrangeano, que estabiliza a solução mesmo para escoamentos altamente convectivos.

Este método permite o uso de passos de tempo maiores sem comprometer a precisão, e foi integrado ao código de FEM para melhorar a eficiência das simulações em cenários com número de Reynolds mais alto.

## 5.6 Visualização dos Resultados

A visualização dos resultados foi realizada no ParaView [18], que permite gerar gráficos e animações dos campos de velocidade e pressão simulados. As simulações geraram campos vetoriais de velocidade e distribuição de pressão para diferentes ângulos de abertura da válvula borboleta, permitindo uma análise detalhada do comportamento do fluxo em cada configuração.

# Capítulo 6

## Verificação do código

Para realizarmos a verificação do código, primeiro precisamos testar nosso código em problemas conhecidos da literatura e obter resultados convergentes com os da literatura. Primeiramente, rodamos os problemas conhecidos com um baixo número de Reynolds 6.1, entre 1 e 200. Pois problemas com baixo número de Reynolds apresentam menos instabilidade, não sendo necessários a implementação de outros métodos de refinamento do código. Para problemas com Reynolds igual e acima de 200, foi utilizado o método Semi-Lagrangeano. A análise de resultado foi realizada comparando os resultados existentes na literatura para cada um dos problemas aqui expostos.

$$Re = \frac{vD}{\nu} \quad (6.1)$$

- $v$  é a velocidade ( $m/s$ )
- $D$  comprimento característico ( $m$ )
- $\nu$  viscosidade cinemática ( $m^2/s$ )

### 6.1 Escoamento laminar entre placas

O primeiro caso é o único, dos 4 casos que serão demonstrados nesse capítulo, que possui resultado analítico ao qual podemos comparar. O escoamento laminar entre placas, também conhecido como escoamento de Hagen-Poiseuille, descreve o movimento de um fluido viscoso incompressível escoando entre duas placas paralelas. Esse fluxo laminar unidimensional, caracterizado por camadas de fluido que deslizam uma sobre as outras sem se misturarem, apresenta um perfil parabólico de velocidades, com a velocidade máxima no centro e diminuindo gradualmente até zero nas paredes. Esse tipo de escoamento tem como causa primária um gradiente de pressão com sentido paralelo ao do escoamento.

A viscosidade do próprio fluido proporciona uma variação do perfil de velocidade ao longo do eixo vertical (perpendicular à direção do escoamento). Uma camada-limite desenvolve-se ao longo das placas. A parede sólida da placa exerce uma força de cisalhamento no sentido contrário ao perfil de velocidade  $v_x$ . No trecho completamente desenvolvido, o perfil de velocidade  $v_x$  é conhecido, formando uma parábola.

A uma certa distância da entrada entre as placas, a camada-limite atinge a linha de centro, então podemos considerar que o escoamento é inteiramente viscoso. Após não haver mais variação da forma do perfil conforme à distância de entrada, podemos afirmar que o escoamento está completamente desenvolvido. O ponto o qual a partir dele não há mais variação do perfil de velocidade é chamado de comprimento de entrada.



Figura 6.1: Escoamento laminar ao longo de um tubo. Demonstração da mudança do perfil de velocidade ao longo do comprimento do tubo.

Para um escoamento estacionário e completamente desenvolvido, as equações de Navier-Stokes podem ser simplificadas. Considerando que a única componente de velocidade significativa é  $v_x(y)$  e o gradiente de pressão  $\frac{\partial p}{\partial x}$  é constante, a equação de Navier-Stokes na direção x para um fluido incompressível e newtoniano é dada por:

$$\frac{d^2v_x}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (6.2)$$

- onde  $v_x$  é a componente de velocidade na direção  $x$ . Ela é função de  $y$ .
- $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido,
- $dp/dx$  é o gradiente de pressão na direção  $x$

A equação diferencial acima pode ser integrada duas vezes para obter a expressão para o perfil de velocidade  $u(y)$ . Integrando-a uma vez, temos:

$$\frac{d^2v_x}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + C_1 \quad (6.3)$$

Integrando novamente, temos:

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (6.4)$$

Para determinar as constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$ , aplicamos as condições de contorno. As condições de contorno para este problema são: velocidade do fluido iguais a zero nas superfícies das placas (condição de não deslizamento):

$$1. v_x(0) = 0$$

$$2. v_x(h) = 0$$

Aplicando a primeira condição, temos:

$$v_x(0) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx}(0)^2 + C_1(0) + C_2 = 0 \quad (6.5)$$

$$C_2 = 0 \quad (6.6)$$

Aplicando a segunda condição de contorno, temos:

$$v_x(h) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx}(h)^2 + C_1(h) = 0 \quad (6.7)$$

Logo,  $C_1$  tem o valor:

$$C_1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h \quad (6.8)$$

Substituindo  $C_1$  na expressão original:

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y)^2 - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h (y) \quad (6.9)$$

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - yh) \quad (6.10)$$

Temos então a solução clássica para o perfil de velocidade no escoamento entre placas paralelas.

O perfil de velocidade é parabólico e atinge seu valor máximo na metade da distância entre as duas placas  $y = h/2$ . O valor máximo da velocidade  $v_{x \max}$  é dado por:

$$v_{x \max} = \left| \frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dx} h^2 \right| \quad (6.11)$$

Como o módulo da velocidade média é dada por :

$$\bar{V} = \frac{-1}{12\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) h^2 \quad (6.12)$$

Temos que:

$$v_{x \text{ max}} = \frac{3}{2} \bar{V} \quad (6.13)$$

### 6.1.1 Simulação do escoamento entre placas

Para esse primeiro caso, que possui solução analítica, realizei um estudo de malha com o intuito de verificar a influência da malha no resultado final da simulação. Foram feitas 4 malhas no software GMSH, mostradas na figura 6.2. A malha é uma malha retangular, simulando o espaço entre as duas placas paralelas.

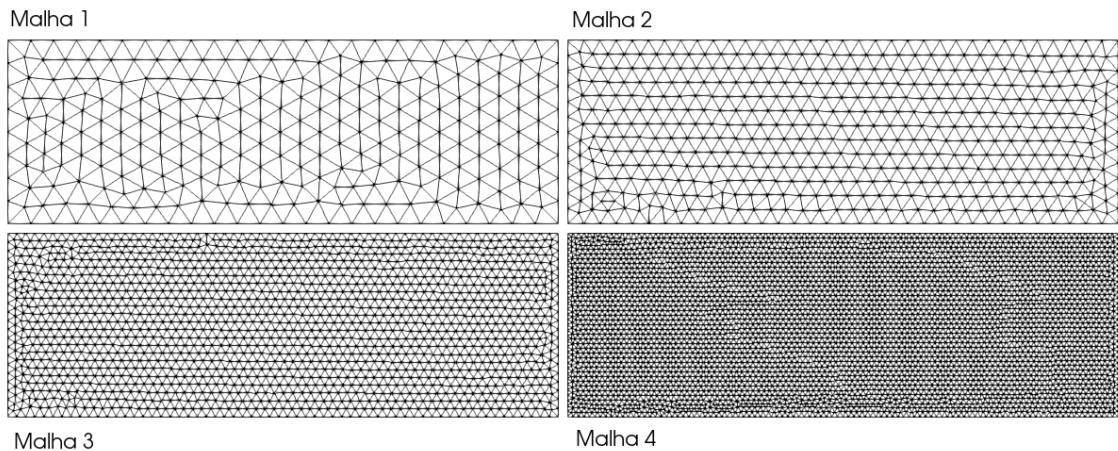


Figura 6.2: Malhas triangulares em duas dimensões, elaborada no software GMSH. Estudo da influência do refino de malha no resultado da simulação. Malha 1 = 266 nós, 530 elementos. Malha 2 = 505 nós, 1008 elementos. Malha 3 = 1565 nós, Malha 4 = 4070 nós, 8138 elementos.

No escoamento entre placas paralelas, as placas tendem a restringir o movimento do fluido. Uma das condições de contorno na simulação é  $u$  e  $v$  iguais a zero ao longo de qualquer superfície no escoamento. A velocidade de entrada e a pressão determinada na saída também são condições de contorno do problema. As condições de contorno, conforme demonstradas na figura 6.3, são aplicadas no programa de solução numérica. O programa faz a leitura da malha, aplica as condições de contorno e resolve as equações de Navier-Stokes através do método de elementos finitos.

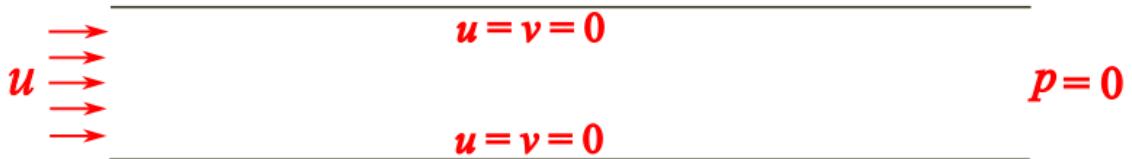


Figura 6.3: Demonstração das condições de contorno impostas no problema do escoamento entre placas paralelas.

A seguir estão os resultados observados da simulação de um escoamento entre placas paralelas. Os parâmetros utilizados para elaboração e simulação desse problema foram os seguintes: passo de tempo entre iterações = 0.01 segundos,  $\nu = 0.10m^2/s$ ,  $\rho = 10.0kg/m^3$ , número de iterações = 100. O comprimento do canal entre as placas é de 3 unidades( $m$ ) e a distância entre as placas é de 1 unidade( $m$ ).

Na imagem 6.4, podemos observar o perfil da componente horizontal da velocidade  $u$  ao longo do canal entre as placas. Na região de entrada, a velocidade é estabelecida como  $1m/s$ , conforme demonstrada na figura 6.3. A medida que o fluido entra no canal, onde as paredes com a condição de não deslizamento impõem uma condição de camada limite, podemos observar uma região de transição, um afunilamento do canal devido à camada limite. Podemos também observar o perfil de velocidade tornando-se completamente desenvolvido ao longo do canal. A velocidade máxima atingida é bem próxima de  $1,5m/s$  no centro do canal.

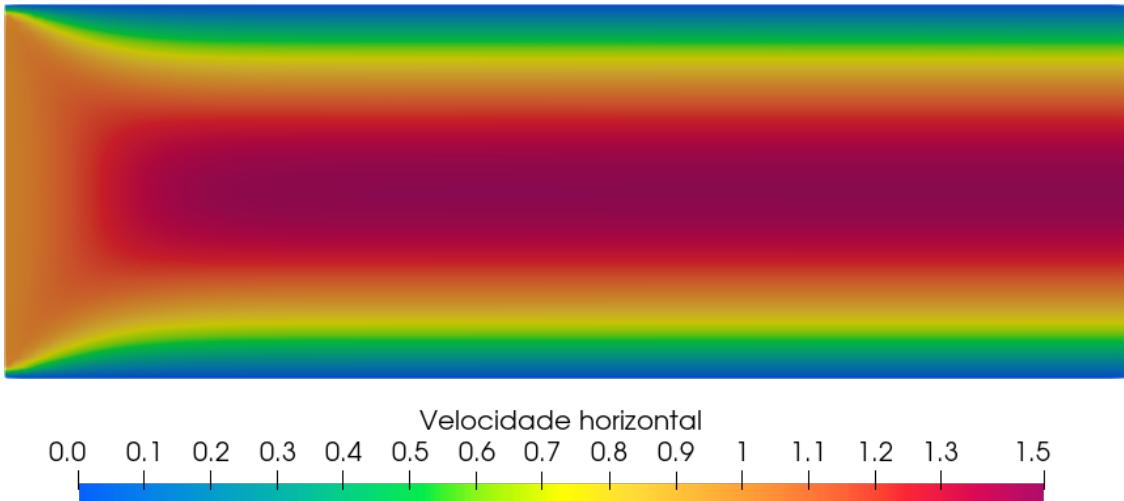


Figura 6.4: Componente de velocidade horizontal no escoamento entre placas, em  $m/s$

A componente horizontal da velocidade encontrada em cada simulação foi analisada e comparada com a solução analítica. Essa verificação de resultados pode ser observada na tabela 6.1 e nos gráficos da figuras 6.5 e 6.6.

Malha	Nós	Elementos	$\Delta t(s)$	Nº de Iterações	Tempo de Simulação(s)	Erro%
1	266	530	$10^{-2}$	1000	378	11,38
2	505	1008	$10^{-2}$	1000	875	6,94
3	1565	3128	$10^{-2}$	1000	41,80	3,22
4	4070	8138	$10^{-2}$	1000	185,77	1,61

Tabela 6.1: Estudo de malha - escoamento entre placas

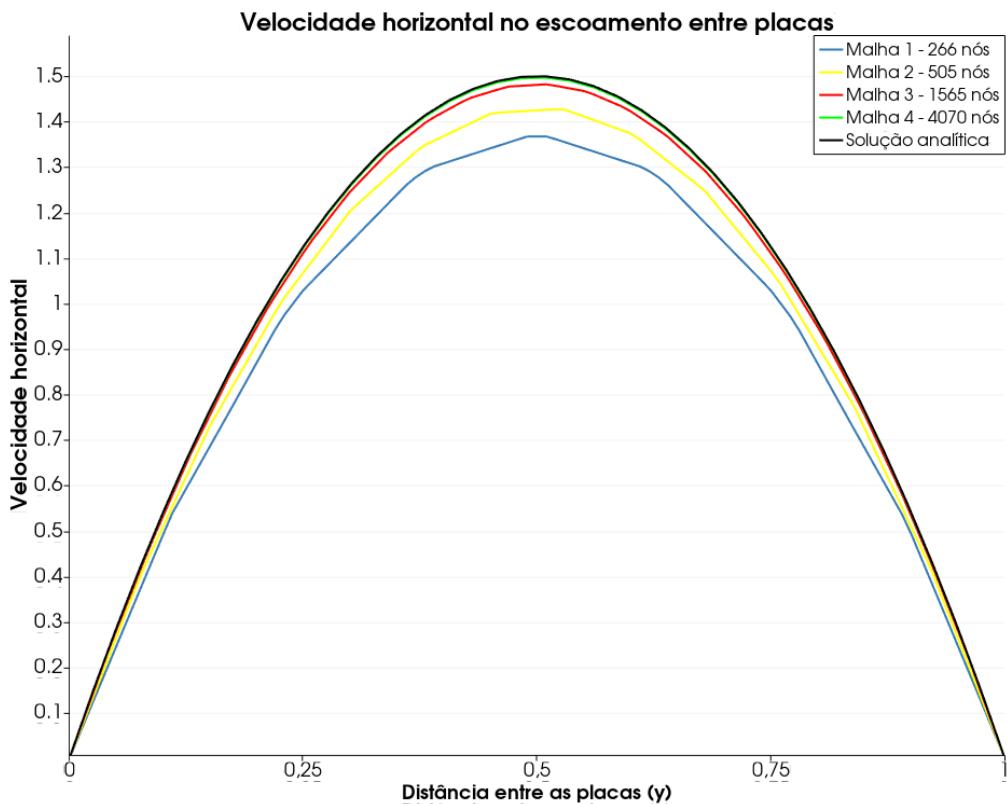


Figura 6.5: Quadro comparativo entre as soluções utilizando quatro malhas diferentes. É possível observar que a medida em que ocorre o refinamento de malha, a curva se aproxima da solução analítica, que tem como valor de  $1,5\text{m/s}$  de velocidade no centro do escoamento.

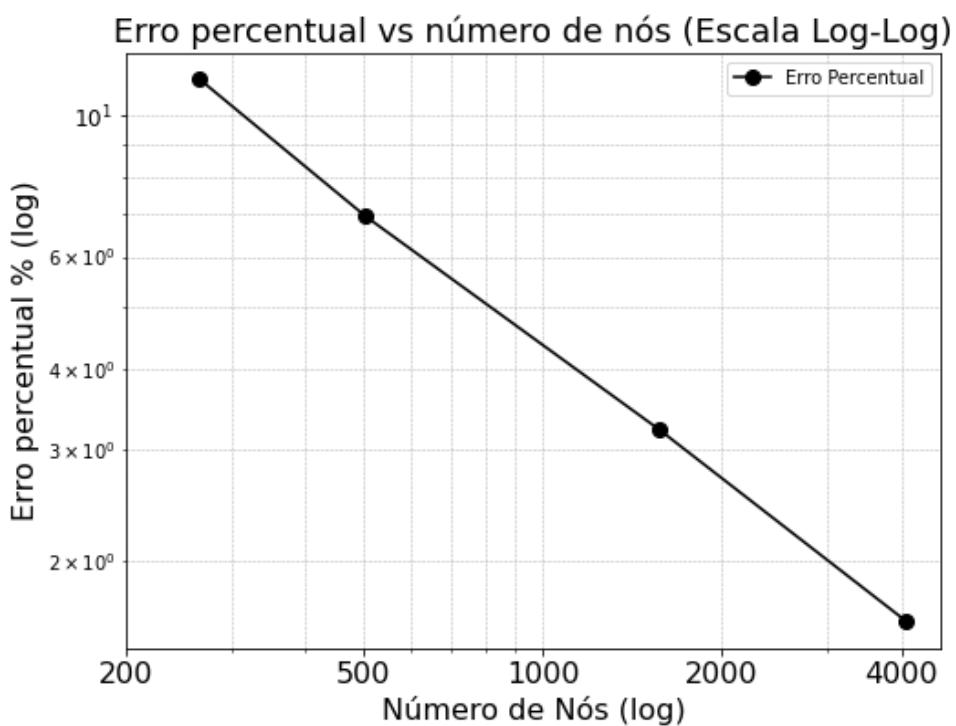


Figura 6.6: Gráfico log-log do erro percentual vs número de nós das malhas. Podemos observar que o refinamento de malha apresentou um perfil linear na redução do erro. Refinando ainda mais, pode-se chegar próximo da estabilização do erro.

## 6.2 Escoamento ao redor de um cilindro, dentro de um canal

O segundo caso de verificação foi realizado simulando um escoamento em 2D ao redor de um cilindro, imposto no centro de um canal entre 2 placas planas. A malha elaborada para este caso possui 4958 nós e 9916 elementos triangulares. A malha também possui um refinamento na região do cilindro, que é nossa principal área de interesse nesse caso. Sendo os dados do problema: um cilindro de diâmetro  $d$ , onde a largura total do canal é de 10 vezes esse valor, o comprimento do canal tendo 32,5 vezes o tamanho do diâmetro do círculo. Alguns dos parâmetros utilizados para esse problema foram:  $dt = 0,01\text{s}$ ,  $\nu = 10^{-3}\text{m}^2/\text{s}$  para  $Re = 40$  e  $\nu = 2 \times 10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$  para  $Re = 200$ . O fluido escoando da esquerda para a direita. As condições de contorno para esse problema são: velocidade de entrada no canal igual a 1, apenas na horizontal, velocidade nas paredes do canal e no cilindro iguais a zero e pressão na face de saída, face da direita da malha, igual a zero. Essas condições de contorno são demonstradas na figura 6.7.

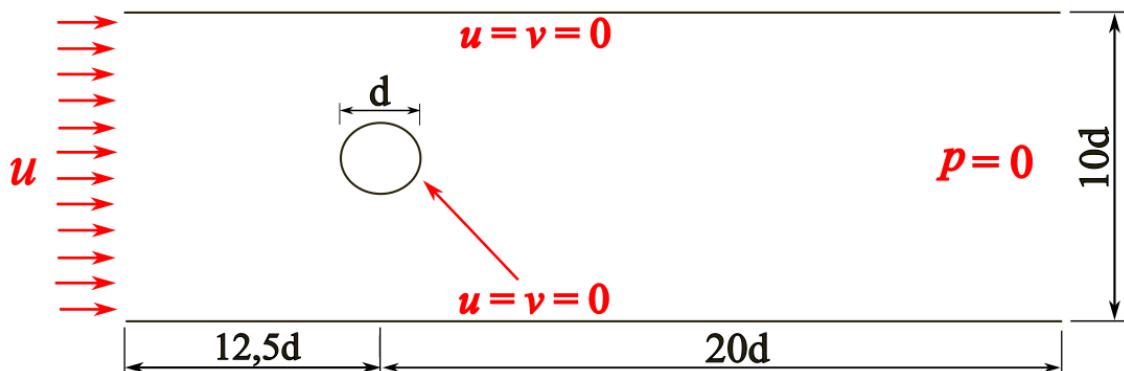


Figura 6.7: Condições de contorno do escoamento ao redor do cilindro entre placas. Velocidade de entrada  $u=1.0\text{m/s}$ ,  $d = 0.04\text{m}$ , pressão igual a zero na saída do canal, condição de não deslizamento nas paredes do canal e no cilindro. Parâmetros utilizados:  $dt = 0,01\text{s}$ ,  $\nu = 10^{-3}\text{m}^2/\text{s}$  para  $Re = 40$  e  $\nu = 2 \times 10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$  para  $Re = 200$ .

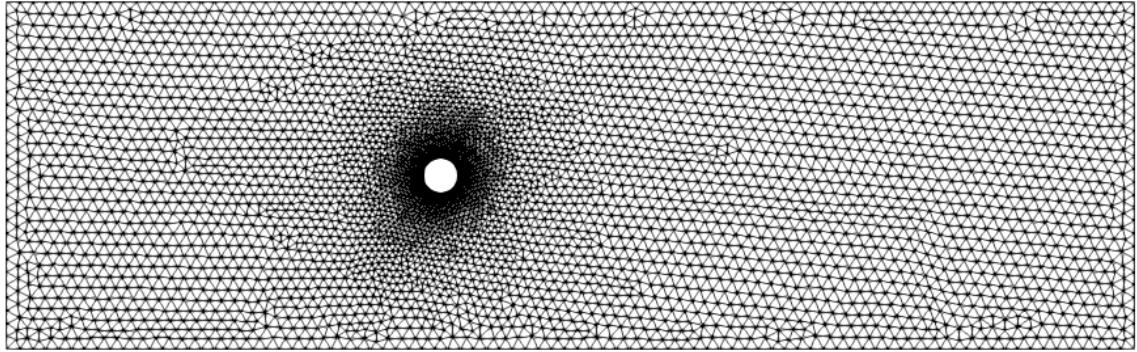


Figura 6.8: Malha do problema do escoamento ao redor do cilindro, dentro de um canal. Possui 4958 nós e 9916 elementos triangulares. Malha não estruturada, refinada ao redor do cilindro.

Este estudo de caso foi realizado com base no trabalho realizado por Da Cunha[1]. Porém, [1] realizou simulações utilizando campos de vorticidade e as minhas simulações foram de campos de velocidade e pressão, de forma que as análises desse caso seriam apenas qualitativas. Da Cunha [1] observou 3 tipos de diferentes casos para esse problema. Primeiro ele demonstrou que com um baixo número de Reynolds ( $Re < 49$ ) o escoamento se mantinha em regime laminar permanente. Neste caso, o escoamento se comporta de maneira a apenas desviar ao redor do cilindro. Na frente do cilindro temos o chamado ponto de estagnação, onde a velocidade se reduz a zero. A pressão máxima é atingida nesse ponto. Podemos observar o escoamento simulado com número de Reynolds igual a 40, nas figuras 6.11, 6.10.

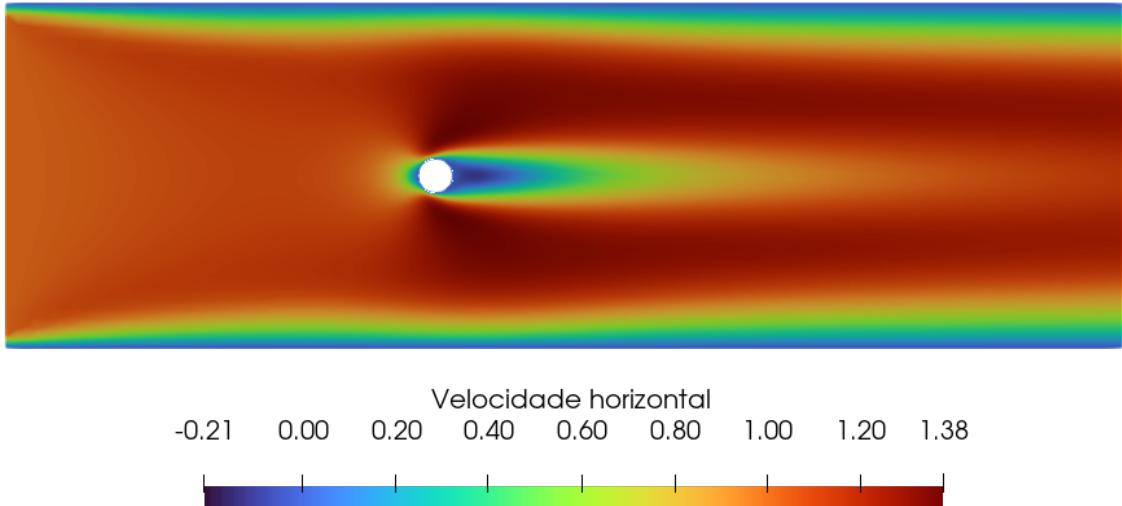


Figura 6.9: Campo de velocidade horizontal na simulação do escoamento ao redor do cilindro, dentro de um canal, para um  $Re = 40$ .

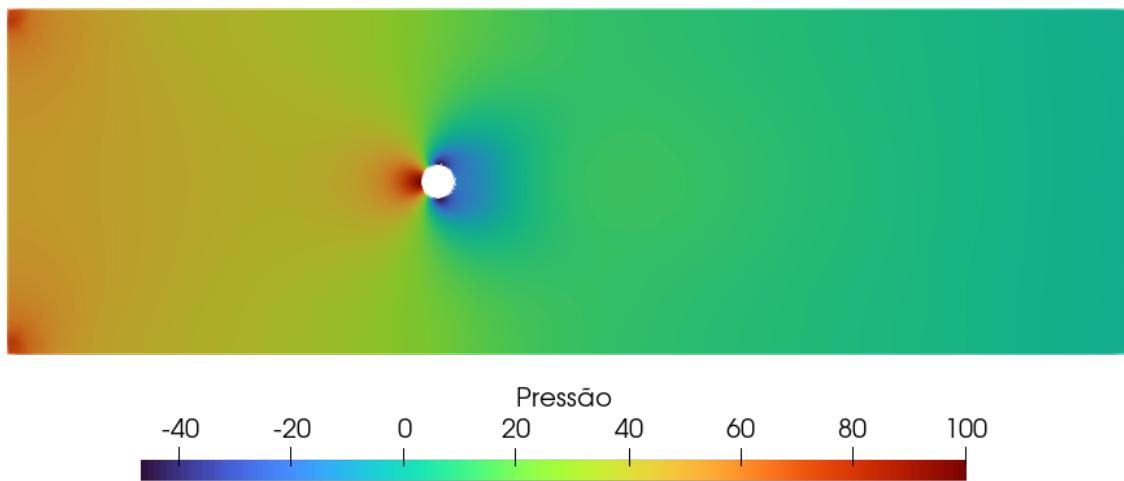


Figura 6.10: Campo de pressão na simulação do escoamento ao redor do cilindro, dentro de um canal, para um  $Re = 40$ . Observa-se as maiores pressões nas bordas da região de entrada do canal e no ponto de estagnação, no lado esquerdo do cilindro.

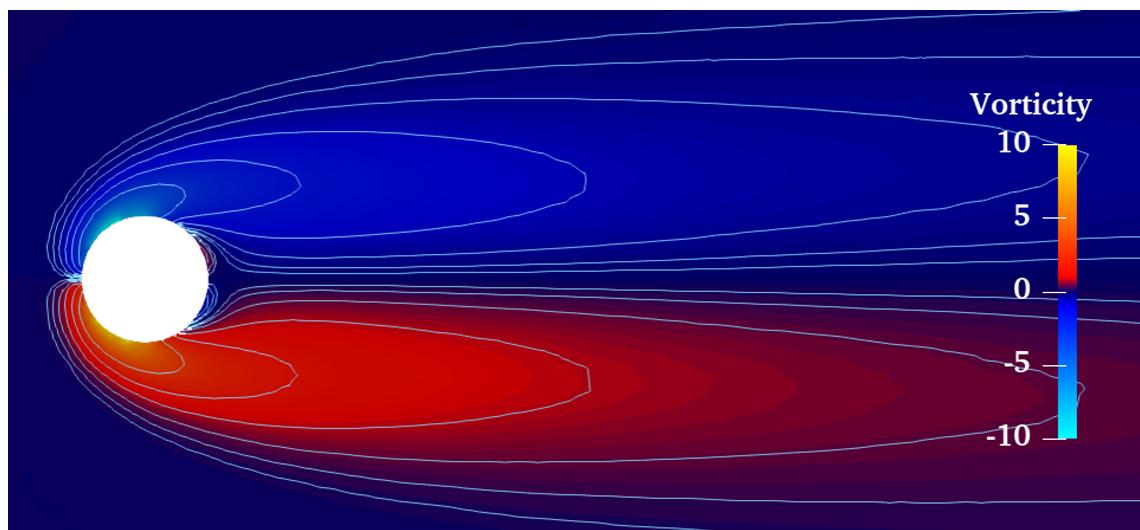


Figura 6.11: Campo de vorticidade na simulação do escoamento ao redor do cilindro, dentro de um canal, para um  $Re = 40$ . Imagem do trabalho da ref [1]

DaCunha afirma que aumentando o número de Reynolds atingi-se um patamar de transição, com Reynolds entre 49 e 180. Nesse regime, forma-se uma camada limite que se separa da parede do cilindro e forma-se também uma calda na região à jusante do cilindro.

Num patamar de  $Re > 180$ , já podemos observar claramente uma oscilação da cauda atrás do cilindro, desprendendo vórtices, como na fig. 6.12.

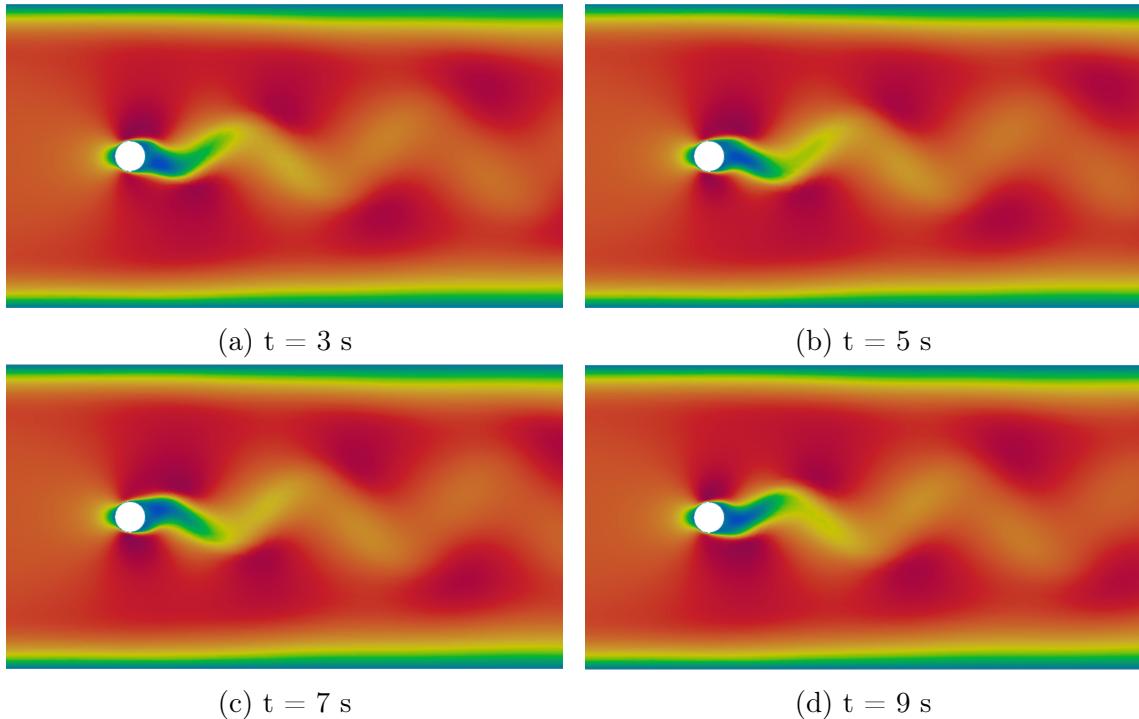


Figura 6.12: Formação de vórtices num escoamento simulado para um  $Re = 200$ . Essa formação de vórtices periódica é também chamada de esteira de von Kármán.

Número de Reynolds	Nós	Elementos	$\Delta t(s)$	Nº de Iterações	Tempo de Simulação(s)
40	4958	9916	$10^{-2}$	500	555
200	4958	9916	$10^{-2}$	500	548

Tabela 6.2: Tabela de dados da simulação do escoamento ao redor do cilindro.

Conclusão semelhante é apresentada no trabalho desenvolvido por DA CUNHA[1], onde a formulação de função de corrente-vorticidade é utilizada, demonstrada na figura 6.13.

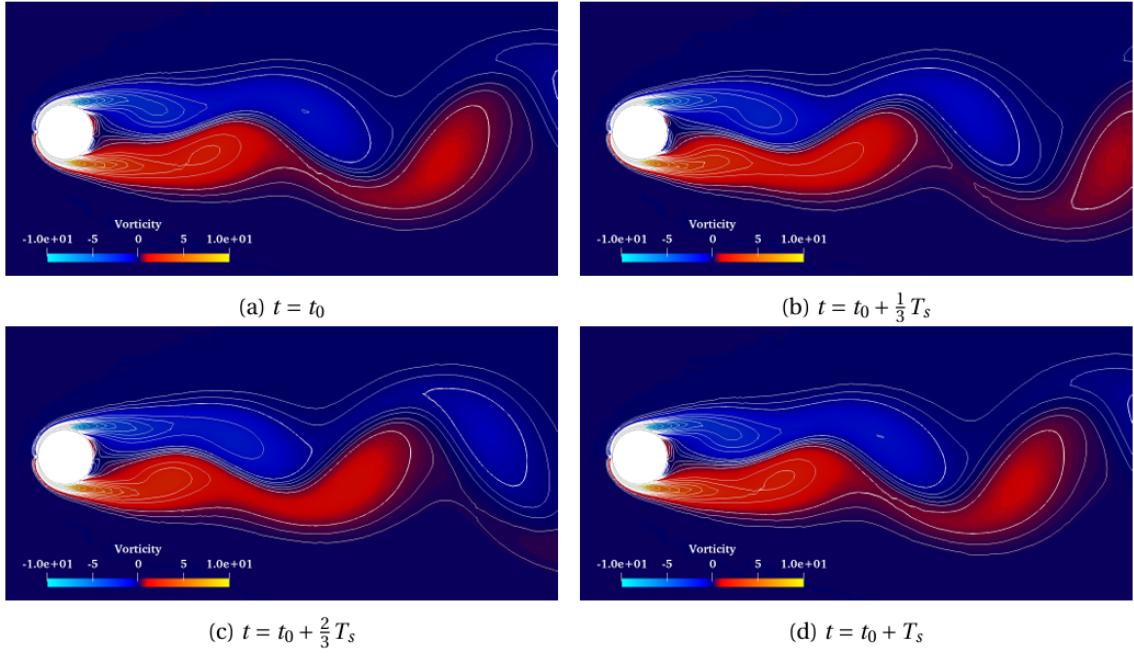


Figura 6.13: Campo de vorticidade periódica para um  $Re = 200$ . Imagem do trabalho da ref. [1]

### 6.3 Escoamento sobre uma cavidade

O problema da cavidade é também um caso bastante difundido na literatura. Apesar de não existir solução analítica, existe solução na literatura para diferentes números de Reynolds. Este problema descreve o movimento do fluido dentro de uma cavidade, induzido pelo escoamento que está adjacente à sua face superior. A condição inicial é de velocidade horizontal igual a uma unidade apenas no contorno superior da malha quadrada, representando a cavidade. Outras condições de contorno são: velocidades iguais a zero nos outros contornos e a pressão igual a zero na quina inferior da malha quadrada, apenas para satisfazer a condição de LBB.

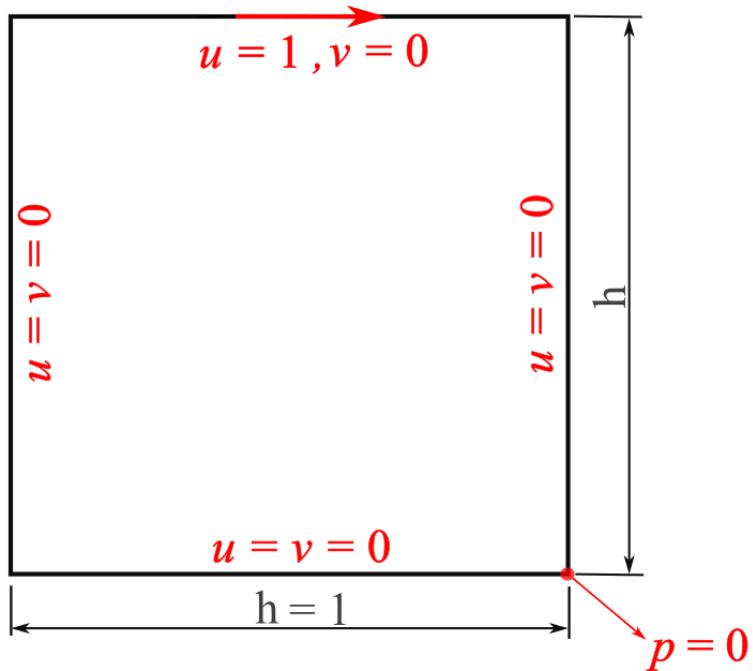


Figura 6.14: Condições de contorno do problema da cavidade

Um dos estudos de referência para esse caso é o do Ghia[2], onde ele faz a análise das velocidades horizontal e vertical, nas linhas de centro da cavidade, colocando os valores encontrados em uma tabela. Foi utilizada essa tabela 6.16, contendo diversas velocidades em diferentes números de Reynolds, para comparar com a simulação realizada pelo método de elementos finitos, elaborada neste trabalho. Ghia utiliza outros métodos numéricos de aproximação e uma malha mais refinada para obtenção de seus resultados. Para esse caso, foi realizado um estudo de malha com o objetivo de analisar a influência do refinamento de malha nos resultados. Foram elaboradas 6 malhas no Gmsh, com refinamento conforme demonstrado na tabela 6.3:

Malha	Nós	Elementos	$\Delta t$ (s)	Nº de Iterações	Tempo de Simulação(s)	Erro%
1	513	1024	$10^{-3}$	4.000	54	6,24
2	1507	3012	$10^{-3}$	4.000	160	4,61
3	5035	10068	$10^{-3}$	4.000	4.960	3,61
4	9776	19550	$10^{-3}$	4.000	14.161	3,29
5	15042	30082	$10^{-3}$	4.000	28.480	3,19
6	21091	42180	$10^{-3}$	4.000	51.527	3,16

Tabela 6.3: Tabela de resultados da simulação do estudo de malha para o escoamento sobre o canal.

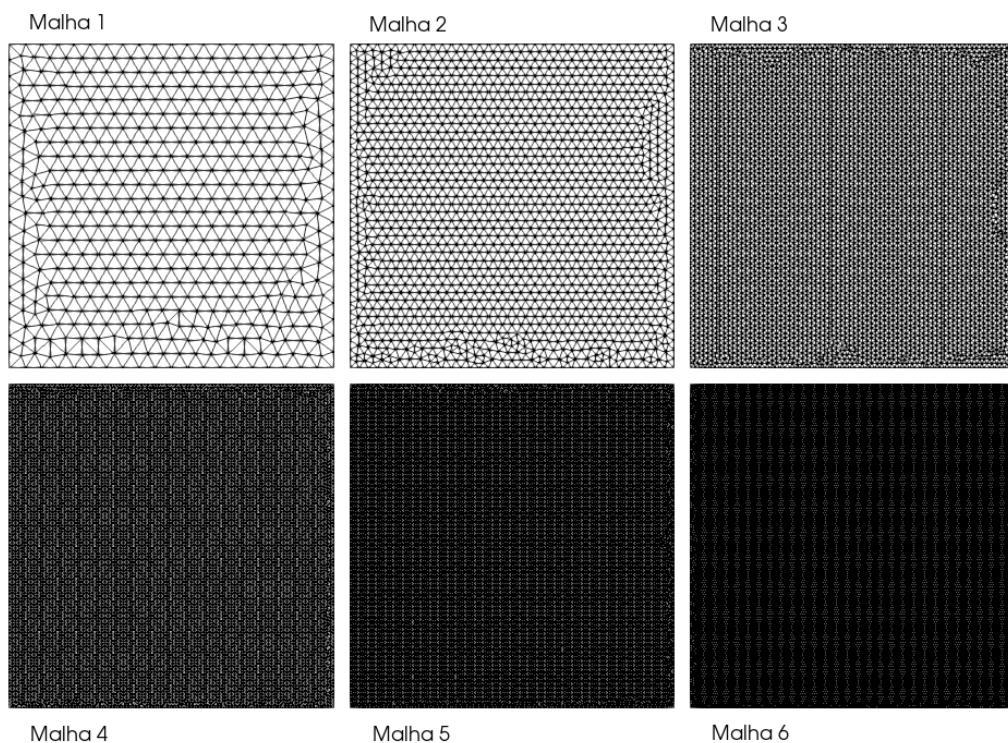


Figura 6.15: Malhas utilizadas no estudo de refinamento de malhas para o caso do escoamento sobre a cavidade. Malha 1 - 513 nós, Malha 2 - 1.507 nós, Malha 3 - 5.035 nós, Malha 4 - 9.776 nós, Malha 5 - 15.042 nós, Malha 6 - 21.091 nós

Para o estudo de malha, foram comparados os valores da velocidade horizontal demonstrados no estudo de Ghia[2] e os encontrados nessa simulação, para cada malha, para um Reynold igual a 100.

$y$	Re						
	100	400	1000	3200	5000	7500	10,000
1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.9766	0.84123	0.75837	0.65928	0.53236	0.48223	0.47244	0.47221
0.9688	0.78871	0.68439	0.57492	0.48296	0.46120	0.47048	0.47783
0.9609	0.73722	0.61756	0.51117	0.46547	0.45992	0.47323	0.48070
0.9531	0.68717	0.55892	0.46604	0.46101	0.46036	0.47167	0.47804
0.8516	0.23151	0.29093	0.33304	0.34682	0.33556	0.34228	0.34635
0.7344	0.00332	0.16256	0.18719	0.19791	0.20087	0.20591	0.20673
0.6172	-0.13641	0.02135	0.05702	0.07156	0.08183	0.08342	0.08344
0.5000	-0.20581	-0.11477	-0.06080	-0.04272	-0.03039	-0.03800	0.03111
0.4531	-0.21090	-0.17119	-0.10648	-0.86636	-0.07404	-0.07503	-0.07540
0.2813	-0.15662	-0.32726	-0.27805	-0.24427	-0.22855	-0.23176	-0.23186
0.1719	-0.10150	-0.24299	-0.38289	-0.34323	-0.33050	-0.32393	-0.32709
0.1016	-0.06434	-0.14612	-0.29730	-0.41933	-0.40435	-0.38324	-0.38000
0.0703	-0.04775	-0.10338	-0.22220	-0.37827	-0.43643	-0.43025	-0.41657
0.0625	-0.04192	-0.09266	-0.20196	-0.35344	-0.42901	-0.43590	-0.42537
0.0547	-0.03717	-0.08186	-0.18109	-0.32407	-0.41165	-0.43154	-0.42735
0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Figura 6.16: Tabela da velocidade horizontal ao longo da linha de centro vertical, retirada do estudo de Ghia [2]. Velocidades obtidas para diferentes números de Reynolds, para os mesmos pontos no eixo  $y$ .

Foi realizada uma análise de erro utilizando a norma 2, calculando o erro absoluto entre os pontos das simulações para as seis diferentes malhas e os demonstrados por Ghia [2].

Podemos observar que conforme refinamos a malha, o resultado se aproxima do estudo de referência. Também pode ser observado que a partir de um certo refinamento de malha, o ganho de resultado não é tão relevante, de forma que a seleção de uma malha ótima é dado por trabalhar com a malha que com o menor número de pontos, e por conseguinte, menor gasto computacional, nos aproxima dos resultados esperados.

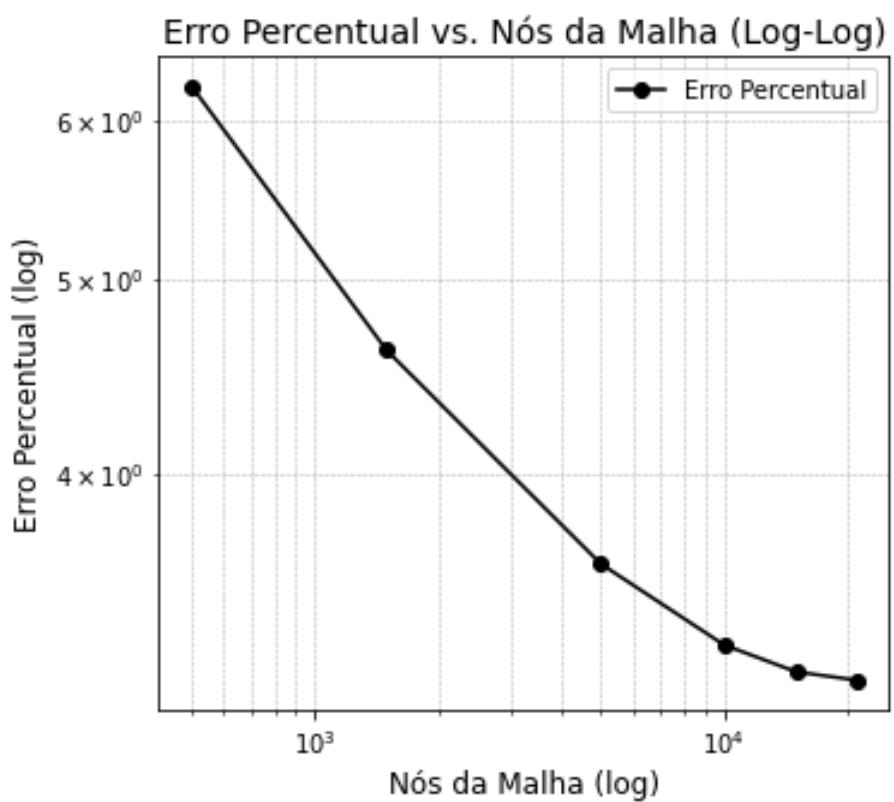


Figura 6.17: Gráfico da influência da malha no erro. Com um maior refinamento, observa-se uma tendência de estabilização do erro. Encontra-se então o refinamento ótimo.

Em seguida, temos os perfis dos campos de velocidade e a comparação com os resultados do estudo de Ghia.

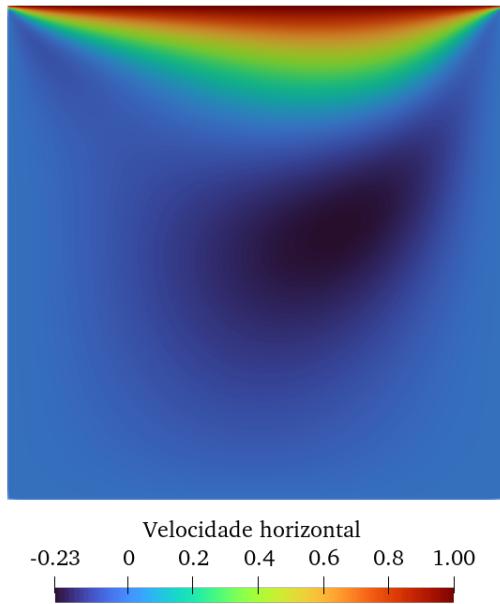


Figura 6.18: Campo de velocidade horizontal

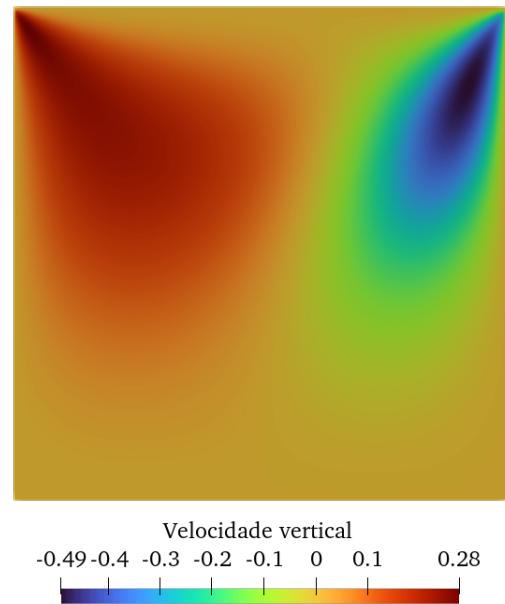


Figura 6.19: Campo de velocidade vertical

Figura 6.20: Campos de velocidade da cavidade para  $Re = 100$

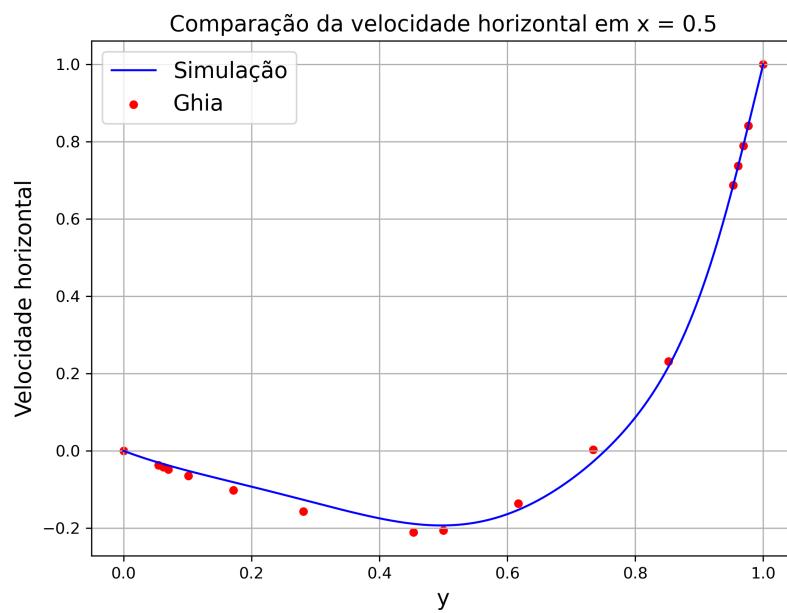


Figura 6.21: Gráfico da velocidade horizontal na linha de centro vertical da cavidade. Comparação entre o estudo de Ghia(1982) e o presente estudo, para  $Re = 100$ .

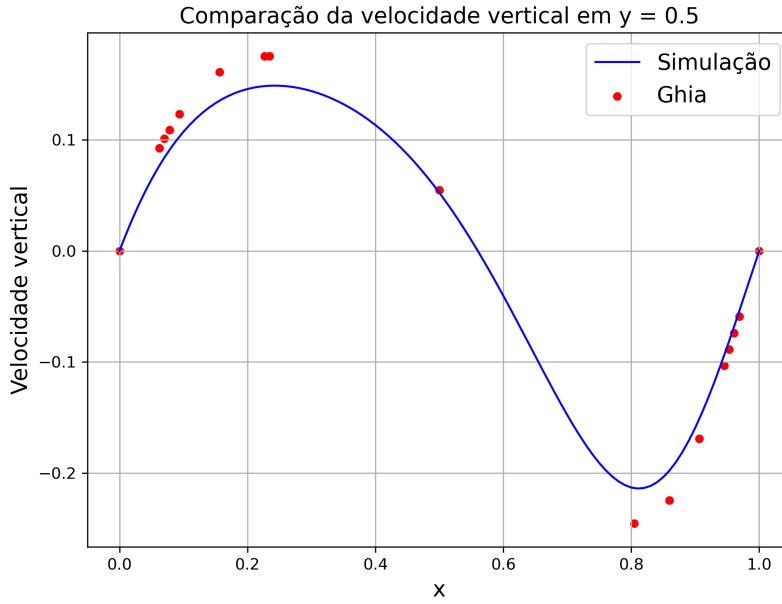


Figura 6.22: Gráfico da velocidade vertical na linha de centro horizontal da cavidade. Comparação entre o estudo de Ghia(1982) e o presente estudo, para  $Re = 100$ .

## 6.4 Escoamento sobre um degrau

O problema do escoamento sobre um degrau, também conhecido na literatura como Backward-face-step, é outro problema clássico que não possui solução analítica, somente numérica. O problema aborda o escoamento ao longo de um canal que possui um ressalto, ampliando a área do canal. Ao ampliar-se a área do escoamento, formam-se pontos de recirculação dentro do canal. Com o aumento da seção transversal, a velocidade do escoamento também diminui. Sendo as condições de contorno: velocidade unitária na entrada do canal, pressão igual à zero na saída do canal e velocidades nulas nas paredes do canal. O canal de entrada tem perfil de escoamento semelhante ao de Poiseuille, até a chegada do degrau.

Número de Reynolds	Nós	Elementos	$\Delta t(s)$	Nº de Iterações	Tempo de Simulação(s)
800	26313	52624	$10^{-3}$	10.000	50.340
1600	26313	52624	$10^{-3}$	10.000	52.179

Tabela 6.4: Tabela de dados da simulação do escoamento sobre degrau.

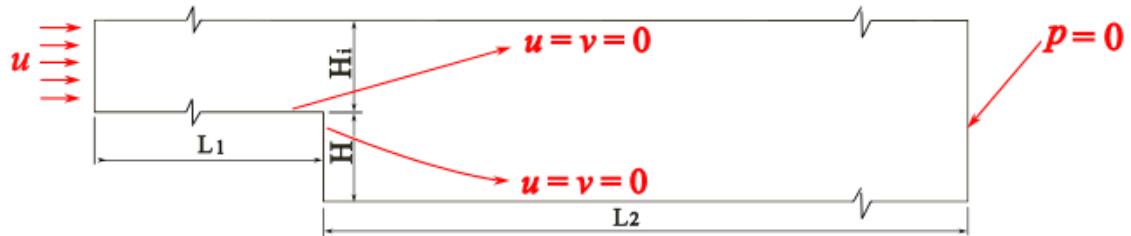


Figura 6.23: Cotas e condições de contorno

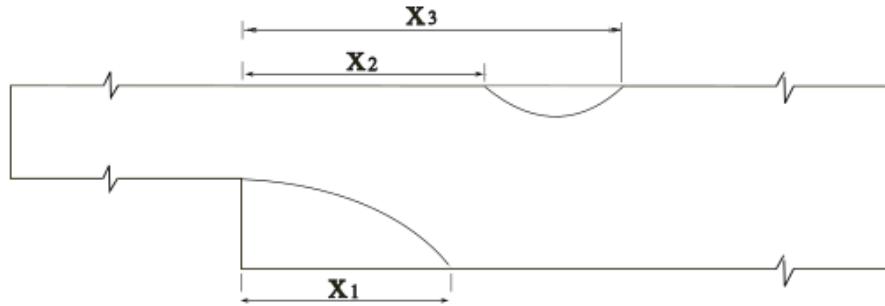


Figura 6.24: Pontos de recirculação

Figura 6.25: Referências do escoamento em degrau

Alguns estudos de referência desse problema podem ser citados, como Armaly[30], que realizou medições experimentais de perfis de escoamento nesse problema de degrau para diferentes números de Reynolds, utilizando um medidor de vazão a laser. Já Erturk[31], simulou esse escoamento com o método de diferenças finitas, para número de Reynolds entre 100 e 1500, estando o escoamento ainda em regime laminar, e comparou com a literatura existente de Armaly[30]. Basicamente, com o aumento do número de Reynolds, a recirculação depois do degrau aumenta de dimensão ao longo do eixo horizontal. O segundo ponto de recirculação, no ponto superior do canal, aparece somente com um número de Reynolds acima de 500, segundo Erturk[31]. Erturk[31] analisou ainda as distâncias  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ , mostradas na figura esquemática ??, para cada aumento do número de Reynolds, e comparou com o trabalho experimental de Armaly[30].

Nessa simulação, foi utilizada uma malha de 140.435 nós, com 280.868 elementos. O tempo de simulação foi de 14 horas e 57 minutos.

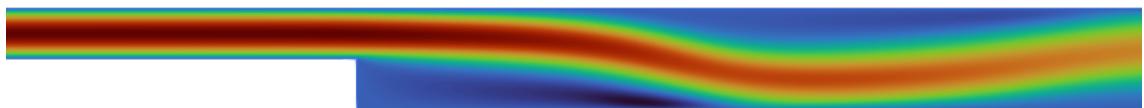


Figura 6.26: Campo de velocidade horizontal no problema do degrau. Zoom na região de interesse.

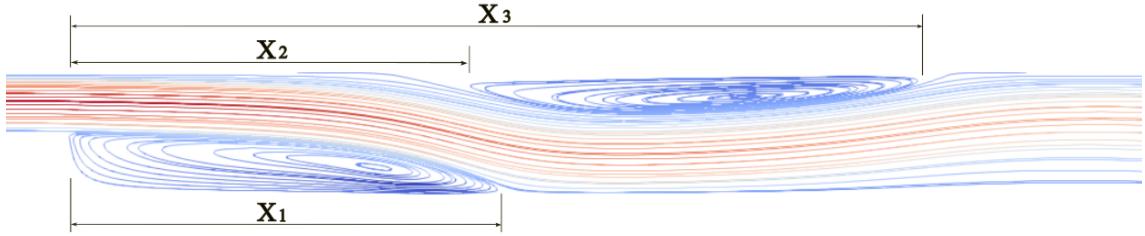


Figura 6.27: Pontos de recirculação no problema do escoamento no degrau. Zoom na região de interesse.

Apesar de os resultados apresentarem as características semelhantes aos da referência, os pontos de recirculação não ficaram exatamente nas mesmas distâncias para o degrau quando comparados com a referência [31].

$Re = 800$	Referência [31]	Presente trabalho
$X_1$	11,983	7,5
$X_2$	8,72	4,2
$X_3$	19,992	15,5

Tabela 6.5: Comparação das distâncias de recirculação com a referência para um Reynolds de 800

$Re = 1600$	Referência [31]	Presente trabalho
$X_1$	17,0	8,5
$X_2$	13,2	5,5
$X_3$	31,0	19,0

Tabela 6.6: Comparação das distâncias de recirculação com a referência para um Reynolds de 1600

A divergência dos resultados mostra que a difusão numérica ainda está presente neste trabalho. Apesar do baixo passo de tempo e refinamento de malha, sua influência se mostrou relevante de alguma forma nesse caso.

# Capítulo 7

## Resultados das simulações em válvulas de controle do tipo borboleta em 2 dimensões.

### 7.1 Introdução

O estudo do escoamento em válvulas de controle é de suma importância para a indústria de fabricação de válvulas, otimizando e garantindo o funcionamento adequado dos sistemas de controle de fluxo em aplicações industriais. Válvulas borboleta são amplamente utilizadas em setores como o de petróleo e gás, tratamento de água, processos químicos e sistemas de ventilação e arcondicionado, devido à sua construção simples, custo relativamente baixo e capacidade de regular o fluxo de maneira eficaz.

A análise numérica do escoamento em válvulas borboleta permite investigar fenômenos do campo da hidráulica, como a formação de zonas de recirculação, separação de fluxo, variações de pressão e possíveis efeitos indesejáveis, como cavitação e vibrações. Além disso, a posição do obturador da válvula em diferentes ângulos de abertura, influencia diretamente na perda de carga, impactando a eficiência energética do sistema.

O objetivo desse estudo foi realizar as simulações em duas dimensões, utilizando como referência os perfis das válvulas de artigos de escoamento em três dimensões. Todos os artigos aqui citados como referência de simulação numérica utilizaram softwares comerciais. Esses softwares contém modelos de turbulência, ausentes no meu código.

Serão apresentados neste capítulo os resultados das simulações numéricas de escoamento em perfis de válvulas borboleta em duas dimensões, utilizando o método de elementos finitos para a solução das equações de Navier-Stokes. O código desen-

volvido implementa o método Semi-Lagrangeano para estabilizar o termo convectivo em escoamentos de número de Reynolds elevado.

## 7.2 Parâmetros utilizados

Neste capítulo, tentando se aproximar de casos reais de escoamento em válvula de controle, serão demonstradas as simulações do escoamento de um fluido ao redor dos perfis de quatro obturadores de válvula borboleta em duas dimensões. Os perfis das válvulas foram elaborados com base em artigos de simulação numérica em válvulas borboleta de três dimensões que utilizam softwares comerciais. Os perfis das válvulas e das tubulações/canais foram reduzidos, com o intuito de trabalhar com as mesmas dimensões da área de escoamento, mesmas condições de contorno, e com um número de Reynolds fixo para todos os casos simulados. Todos os casos simulados tem como base a estrutura da figura 7.1, com as mesmas dimensões e condições de contorno, variando apenas o perfil do obturador das válvulas e a viscosidade cinemática do fluido.

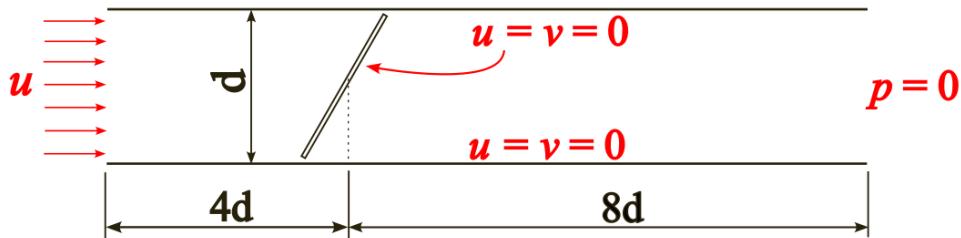


Figura 7.1: Condições de contorno e dimensões dos casos de válvulas simulados. Condição de não deslizamento aplicada nas paredes e no obturador. Velocidade imposta na entrada do canal  $u = 1,5$  m/s. Pressão imposta na saída do canal com valor de zero, para satisfazer a condição de LBB. Diâmetro do canal = 255,2mm .

Foram simulados os escoamentos de dois fluidos, com viscosidade cinemática diferentes, para cada posição de abertura em cada válvula. As posições de abertura definidas foram: 90° (100% aberta), 70°, 55°, 35° e 20° . Foi observada a evolução dos campos de velocidade e pressão ao longo do escoamento com a variação dos ângulos de abertura da válvula.

As malhas utilizadas tem em torno de 20.000 nós e 40.000 elementos triangulares não uniformes. As malhas foram refinadas nas proximidades dos obturadores, de modo a captar com mais sensibilidade o que ocorre nessa região. O passo de tempo escolhido foi de  $dt = 10^{-3}$  ss.

O fluido escolhido foi o petróleo. Sua viscosidade cinemática varia em função da temperatura. Com o intuito de simularmos o escoamento em dois número de Reynolds diferentes, selecionei as viscosidades 638,76 cSt e 63,876 cSt do óleo, estando na temperatura de 20°C e em torno de 59°C, segundo [3].

Tabela 2 – Viscosidade Cinemática em função da Temperatura do Óleo Cru de Marlim

T (°C)	$\nu$ (cSt)	T (°C)	$\nu$ (cSt)
20	638,76	110	13,65
25	434,81	115	12,76
30	353,29	120	12,20
35	249,81	125	11,59
40	158,22	130	8,76
45	127,71	135	7,48
50	94,65	140	7,29
55	76,13	145	7,10
60	60,89	150	5,94
65	48,04	155	5,72
70	39,48	160	5,39
75	32,65	165	5,16
80	29,16	170	5,01
85	25,00	175	4,42
90	21,94	180	4,20
95	19,92	185	3,78
100	15,46	190	3,57
105	14,38	195	3,48
		200	3,36

Figura 7.2: Tabela de viscosidade do óleo do campo de Marlim. As viscosidades escolhidas foram  $6,38 \times 10^{-4} m^2/s$  e  $6,38 \times 10^{-5} m^2/s$ , referentes as viscosidades próximas de 20°C e 59°C. Tabela retirada de [3].

Sendo o número de Reynolds definido como:

$$Re = \frac{ud}{\nu} \quad (7.1)$$

onde:

- $Re$  - Número de Reynolds (adimensional)
- $u$  - Velocidade de entrada no canal de 1,5(m/s),
- $d$  - Diâmetro do canal de 0,2552(m),
- $\nu$  - Viscosidade cinemática do fluido, ( $m^2/s$ ), extraída da tabela 7.2.

Sendo:

$$\nu (m^2/s) = \nu (\text{cSt}) \times 10^{-6}$$

Temos então, para as duas viscosidades escolhidas:  $\nu = 6,38 \times 10^{-4} m^2/s$  e  $\nu = 6,38 \times 10^{-5} m^2/s$ . Aplicando os valores de  $\nu$  na equação (7.1), temos:

$$Re = \frac{1,5 \times 0,2552}{6,38 \times 10^{-4}} = 600 \quad (7.2)$$

e

$$Re = \frac{1,5 \times 0,2552}{6,38 \times 10^{-5}} = 6000 \quad (7.3)$$

## 7.3 Caso 1 - obturador concêntrico, retangular e fino. $Re = 600$ .

O primeiro caso simulado, é o escoamento sobre o obturador de válvula com o formato de uma placa retangular fina, assim como demonstrada na figura 7.1. A placa possui espessura de 1,27 mm . A utilização desse perfil de obturador teve como base o artigo *An Investigation of Butterfly Valve Flow Characteristics Using Numerical Technique* [7]. Nesse artigo, os autores realizam uma simulação em três dimensões com o software Fluent, variando a velocidade de entrada no duto entre 0,5 m/s a 2,0 m/s , e variando também os ângulos de abertura da válvula.

### 7.3.1 Resultado das simulações e análise.

Na figura 7.3, podemos observar que o escoamento aumenta de velocidade no entorno da válvula, devido ao princípio da continuidade, conforme se diminui a região onde o fluido escoa, aumenta-se a velocidade. É possível observar o surgimento de regiões de recirculação atrás do obturador. Nos ângulos de menor abertura essas regiões ficam ainda mais intensas.

Na figura 7.5, vemos também é a formação de esteira de vórtices a jusante do obturador, sendo mais instável quanto mais restringida está a válvula. A medida em que o escoamento vai se distanciando da válvula, a esteira vai perdendo intensidade.

Na figura 7.6, observamos a queda de pressão localizada na válvula, para cada ângulo de abertura. A jusante da válvula, temos alguns pontos de pressão negativa, essa zona de baixa pressão foi criada devido à dificuldade do fluido em preencher o espaço deixado atrás do corpo da válvula.

Por fim, temos o gráfico da queda de pressão conforme o fechamento da válvula, demonstrado na figura 7.7. Esse gráfico mostra um perfil quase exponencial de perda de pressão conforme ocorre o fechamento da válvula. Está condizente com os gráficos reais de perda de carga em válvula borboleta. O ideal é não se trabalhar numa faixa de abertura pequena com essas válvulas, devido à alta perda de carga e possíveis formações de zonas de baixa pressão e seus problemas decorrentes.

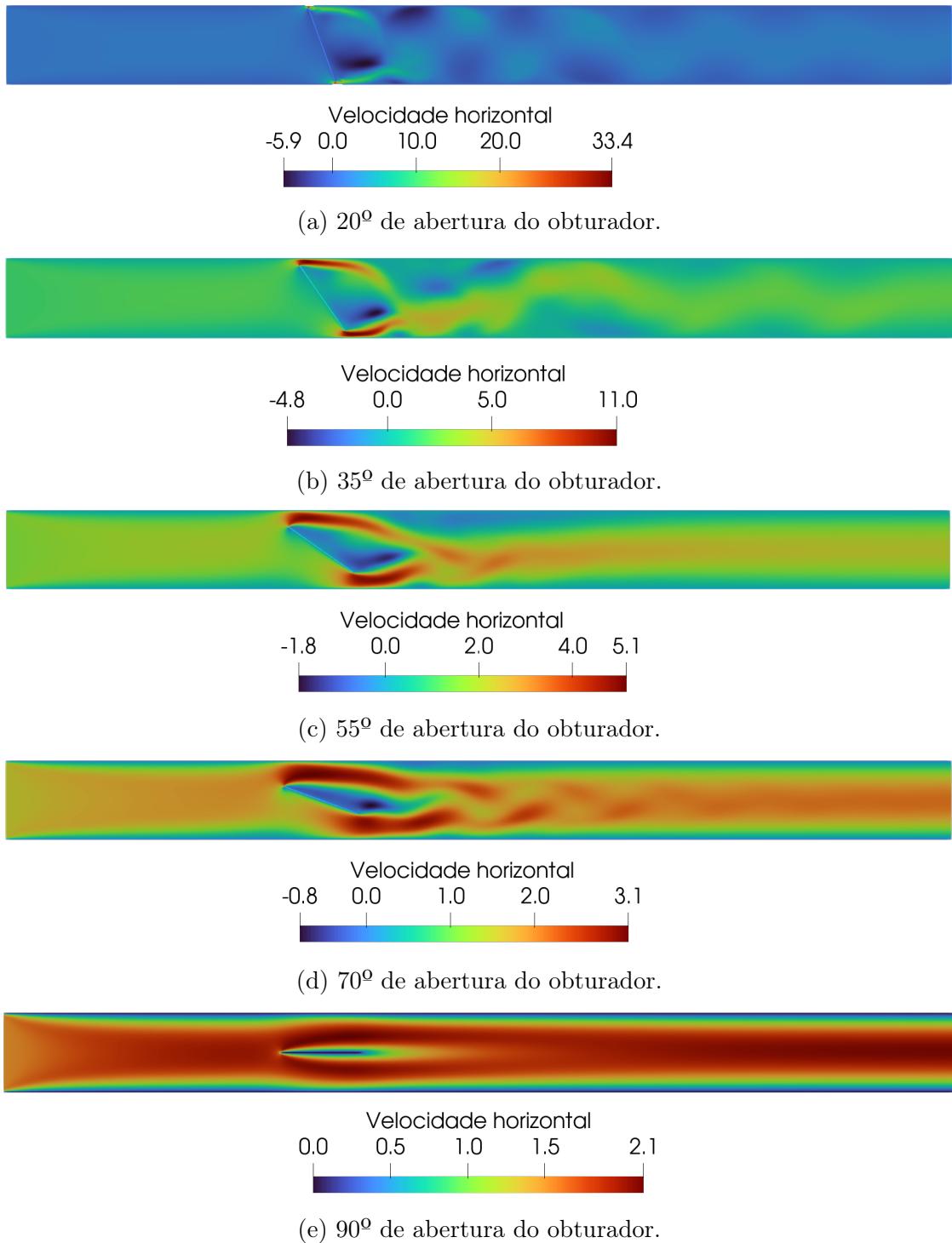
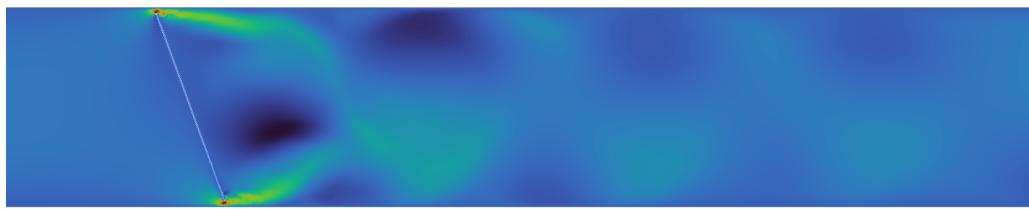
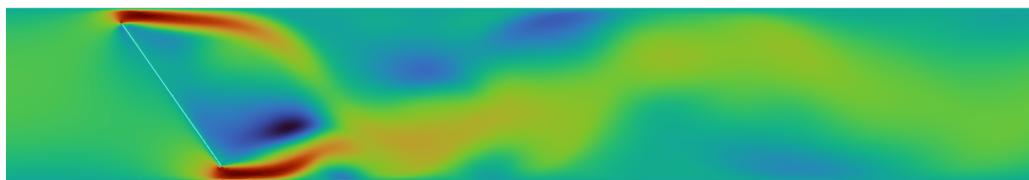


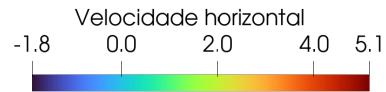
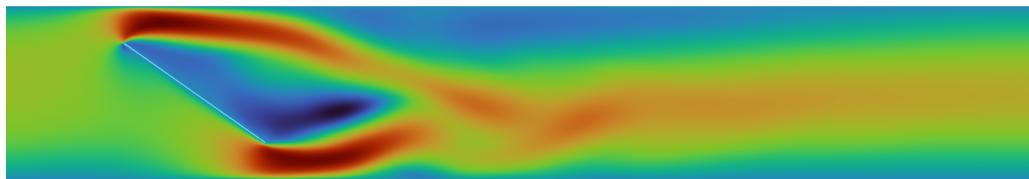
Figura 7.3: Campo de velocidade horizontal, em m/s, para diferentes ângulos de abertura. Perfil de obturador concêntrico, retangular e fino. Escoamento com número de Reynolds = 600. Velocidade de entrada de  $u=1,5$  m/s em todos os casos.



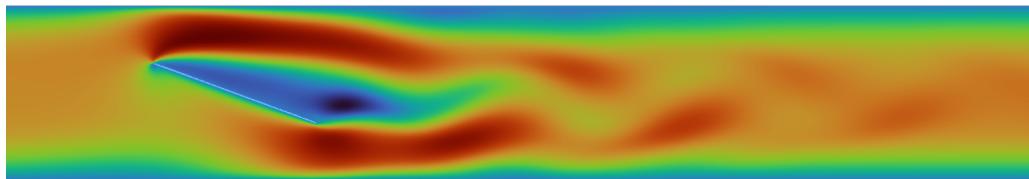
(a)  $20^\circ$  de abertura do obturador.



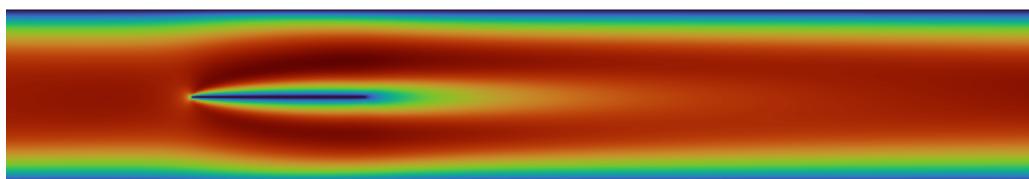
(b)  $35^\circ$  de abertura do obturador.



(c)  $55^\circ$  de abertura do obturador.

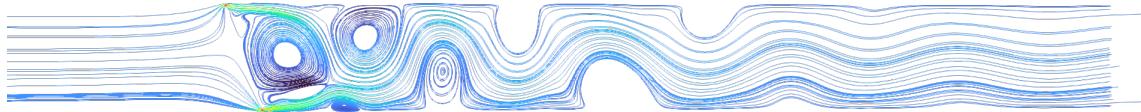


(d)  $70^\circ$  de abertura do obturador.

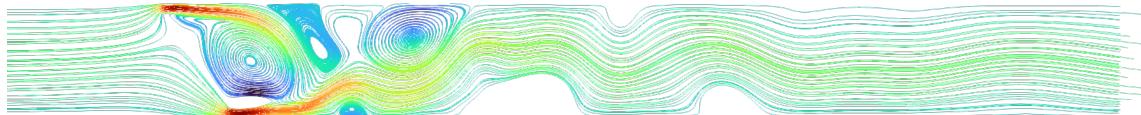


(e)  $90^\circ$  de abertura do obturador.

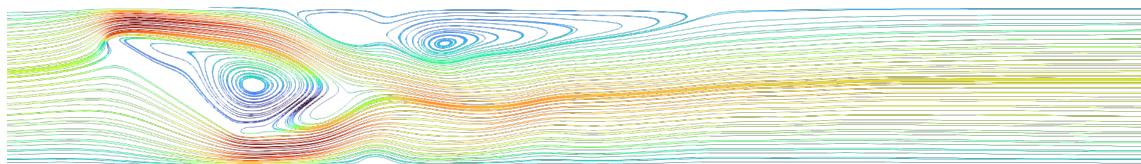
Figura 7.4: Zoom do campo de velocidade horizontal, da fig. 7.3.



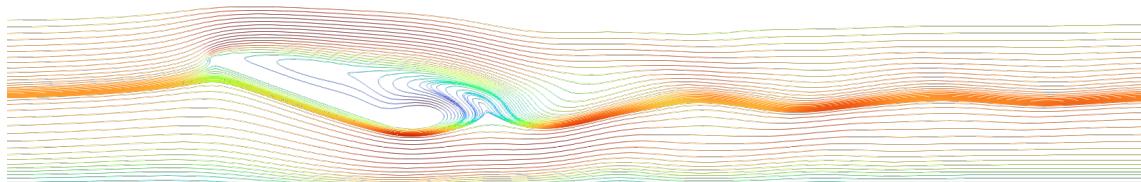
(a)  $20^\circ$  de abertura do obturador.



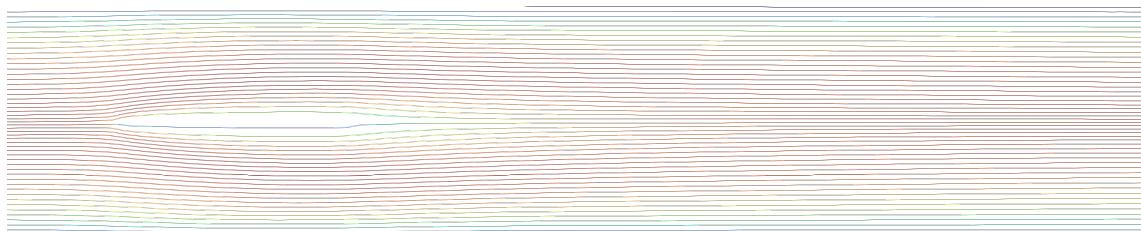
(b)  $35^\circ$  de abertura do obturador.



(c)  $55^\circ$  de abertura do obturador.



(d)  $70^\circ$  de abertura do obturador.



(e)  $90^\circ$  de abertura do obturador.

Figura 7.5: Linhas de corrente. Campos de recirculação são formados a jusante do obturador da válvula. Observamos que com o gradual fechamento da válvula mais campos de recirculação são gerados, e o escoamento tende a formar uma esteira de vórtices a jusante da válvula.

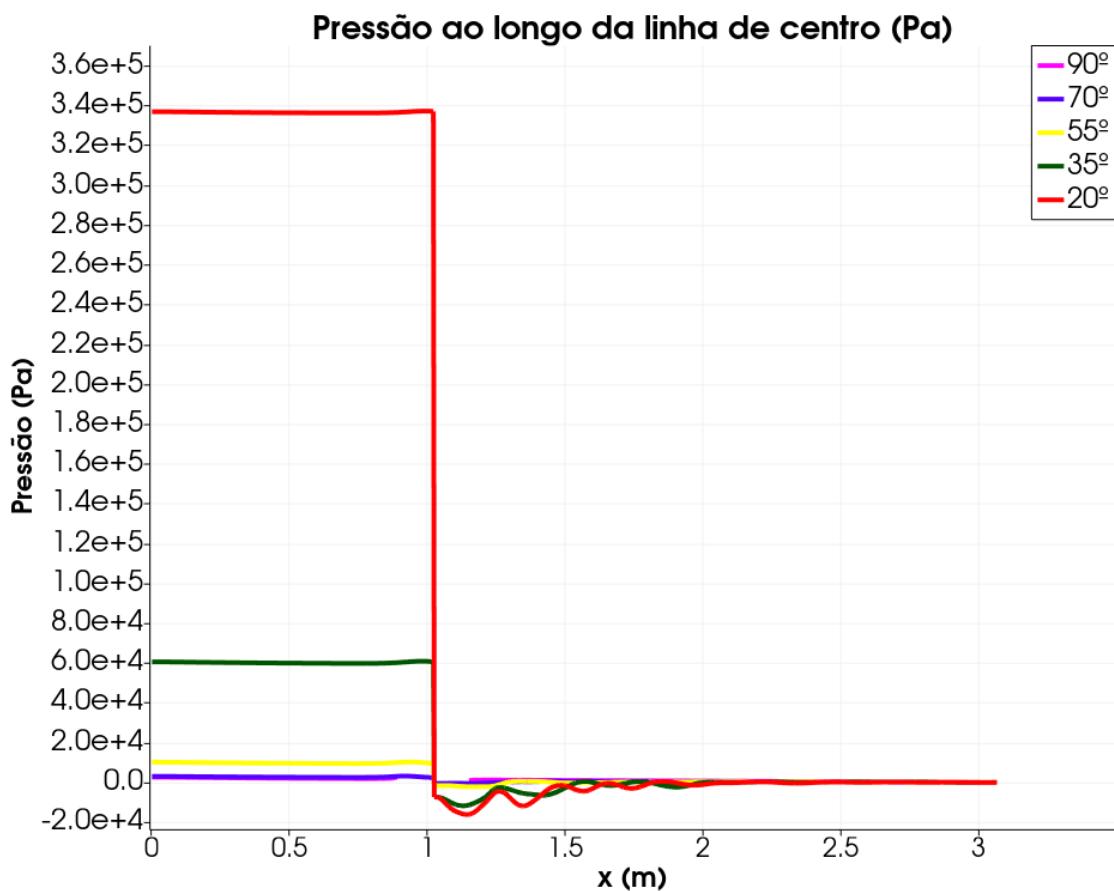


Figura 7.6: Gráfico de pressões ao longo da linha de centro para cada ângulo da abertura da válvula. Observa-se uma perda de carga localizada após a linha de centro passar pelo obturador. Logo a jusante do obturador, são observadas algumas pressões negativas, indicando possíveis pontos de pressão abaixo da pressão de vapor e formação de bolhas, possibilitando a existência de cavitação. Pressões iniciais:  $20^\circ = 336.838,0 \text{ Pa}$ ,  $35^\circ = 60.538,7 \text{ Pa}$ ,  $55^\circ = 10.156,1 \text{ Pa}$ ,  $70^\circ = 3.057,9 \text{ Pa}$ ,  $90^\circ = 2.672,9 \text{ Pa}$ .

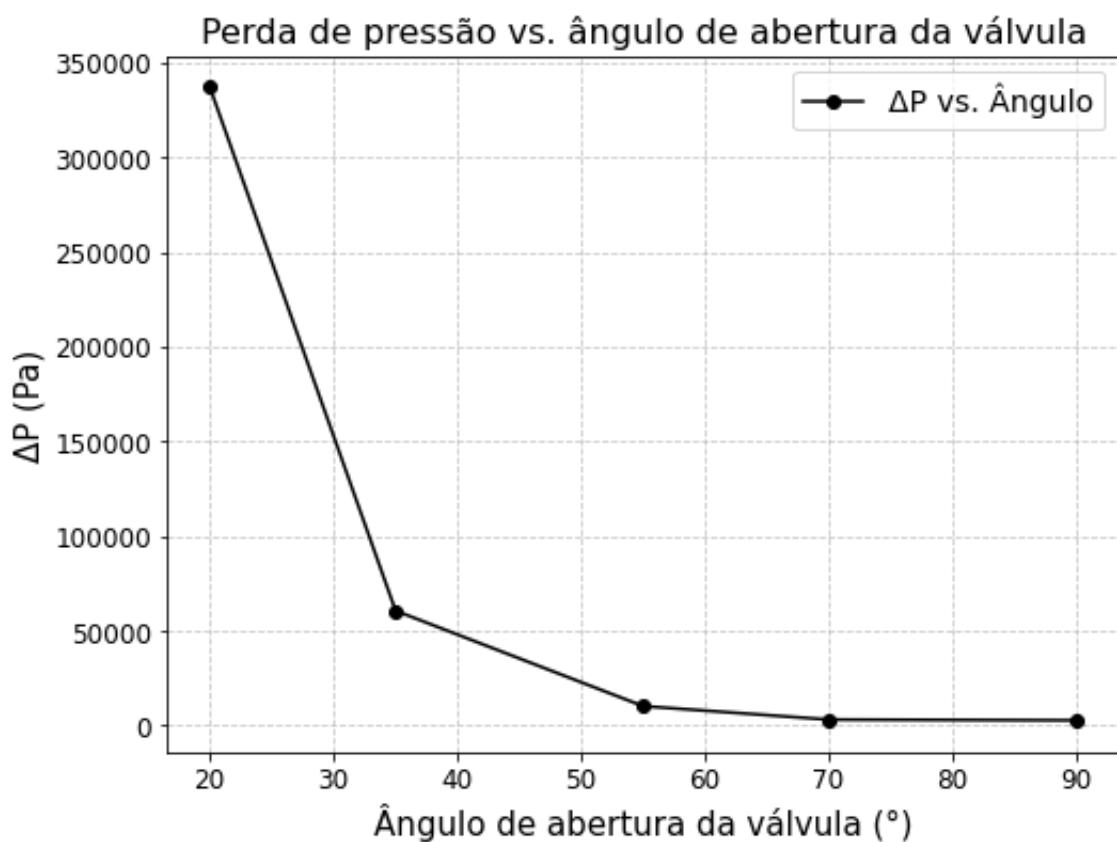


Figura 7.7: O gráfico de perda de pressão pelo ângulo de abertura da válvula mostra que a válvula borboleta tem um perfil quase exponencial de perda de carga, quando trabalha bastante restringida a perda de carga sobe vertiginosamente. Já em ângulos maiores de abertura, a perda de carga varia pouco.

Ângulo de abertura	Nós	Elementos	$\Delta t(s)$	Nº de Iterações	Tempo de Simulação(s)
20°	23487	46974	$10^{-3}$	20.000	120.173
35°	19863	39726	$10^{-3}$	20.000	93.675
55°	20686	41372	$10^{-3}$	20.000	97.621
70°	20866	41734	$10^{-3}$	20.000	105.820
90°	21039	42078	$10^{-3}$	20.000	102.786

Tabela 7.1: Tabela de dados da simulação do caso 1.

## 7.4 Caso 2 - obturador excêntrico, de disco único reto. $Re = 600$ .

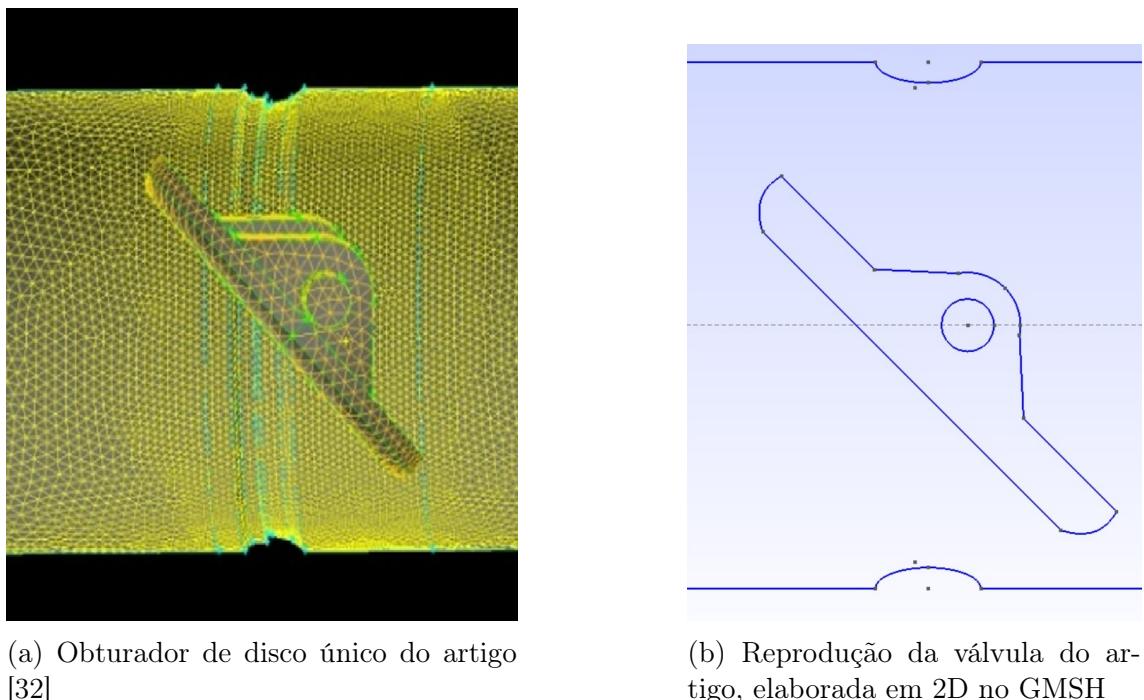


Figura 7.8: Comparação entre os perfis dos obturadores

O segundo caso simulado é o escoamento sobre o obturador de disco único, com formato demonstrado na figura 7.8. Esse obturador possui eixo excêntrico ao disco da válvula, com uma face plana, com curvatura nas duas bordas e reentrância nas placas. A utilização desse perfil de obturador teve como base o artigo *Flow characteristics and performance evaluation of butterfly valves using numerical analysis*[32]. Esse artigo discorre sobre a simulação em 2 tipos de obturador, um de disco único e outro de disco duplo. Os autores fazem a simulação em três dimensões, utilizando o software Fluent.

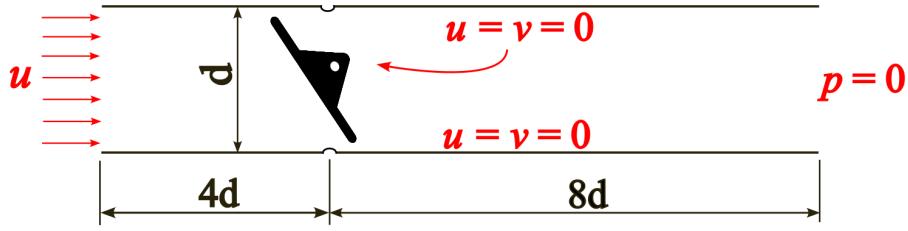


Figura 7.9: Condições de contorno do problema do caso 2, obturador excêntrico, de disco único reto. Valor da velocidade de entrada  $u = 1,5 \text{ m/s}$ , condição de não deslizamento nas paredes e na válvula, pressão igual a zero em toda a fronteira de saída do fluido do canal.  $\nu = 6,38 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ , diâmetro do canal = 255,2mm , Re = 600.

#### 7.4.1 Resultado das simulações e análise.

Nesse caso de número 2, o escoamento apresentou forma diferente dos demais a jusante da válvula. Foi observado uma grande área de recirculação atrás da válvula, nos ângulos de  $20^\circ$  e  $35^\circ$ , assim como no caso do escoamento sobre o degrau, demonstrado anteriormente. Nos demais ângulos de abertura o fluido apresenta apenas zonas de recirculação a jusante da válvula, como pode ser observado na 7.12. Com a válvula em abertura de  $55^\circ$ , o fluido escoa com uma pequena oscilação a jusante do obturador. Em  $70^\circ$  e  $90^\circ$  o escoamento é laminar. As quedas de pressão conforme os ângulos de abertura podem ser observadas nos gráficos das figuras 7.13 e 7.14.

Ângulo de abertura	Nós	Elementos	$\Delta t(s)$	Nº de Iterações	Tempo de Simulação(s)
$20^\circ$	19726	39452	$10^{-3}$	20.000	92.251
$35^\circ$	19805	39610	$10^{-3}$	20.000	95.217
$55^\circ$	19810	39620	$10^{-3}$	20.000	95.370
$70^\circ$	19868	39736	$10^{-3}$	20.000	96.153
$90^\circ$	19964	39928	$10^{-3}$	20.000	97.477

Tabela 7.2: Tabela de dados da simulação do caso 2.

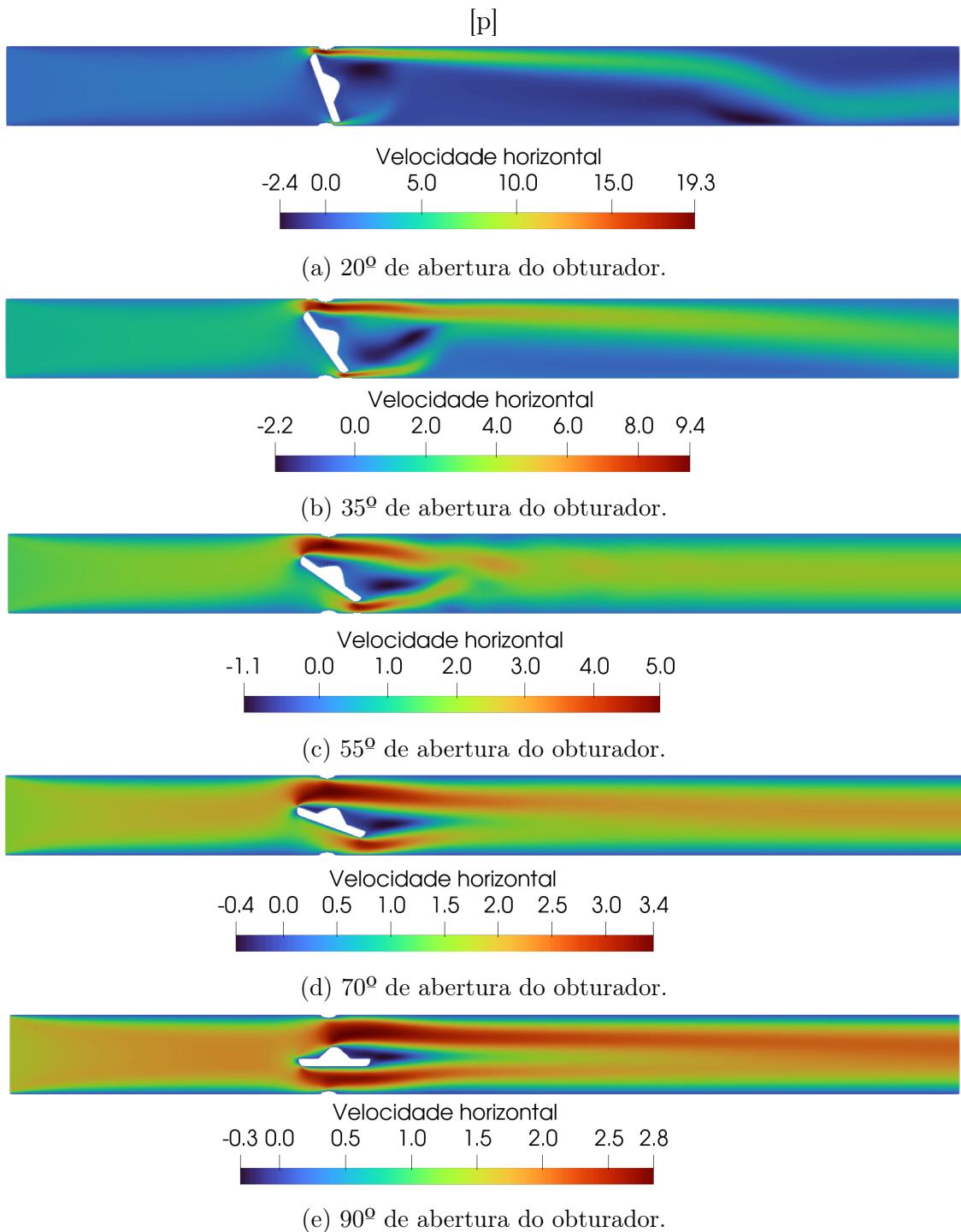
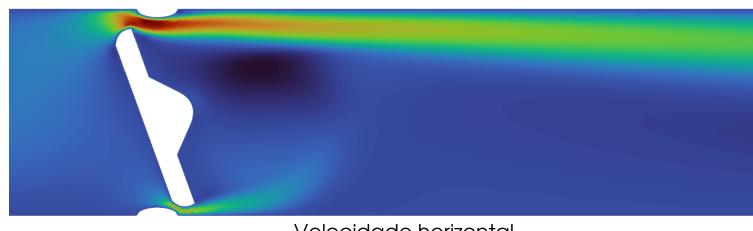
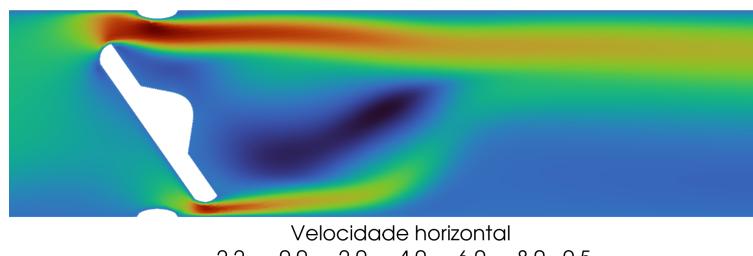


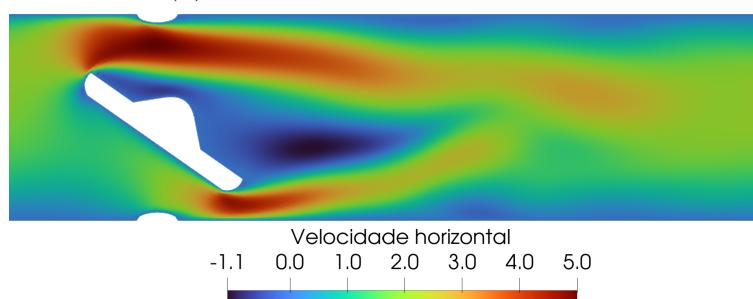
Figura 7.10: Campo de velocidade horizontal, em m/s, para diferentes ângulos de abertura. Escoamento com número de Reynolds = 600. Velocidade de entrada de  $u=1,5$  m/s em todos os casos. Observadas velocidades bem acentuadas quando a válvula está restringida. Acabam por se formar grandes trechos de recirculação nos ângulos de abertura de  $20^\circ$  e  $35^\circ$ . Com abertura de  $55^\circ$  é possível observar a formação de uma esteira de vórtices a jusante da válvula. Nos ângulos de maior abertura, não observa-se a formação de vórtices.



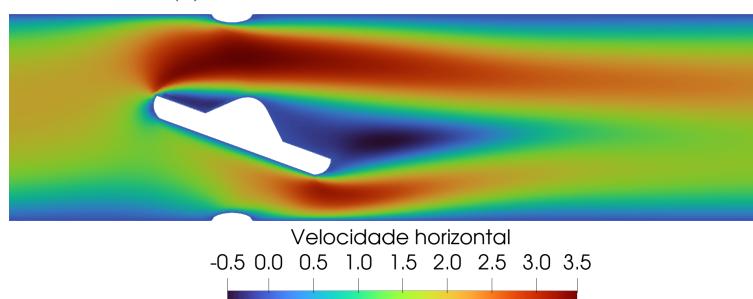
(a)  $20^\circ$  de abertura do obturador.



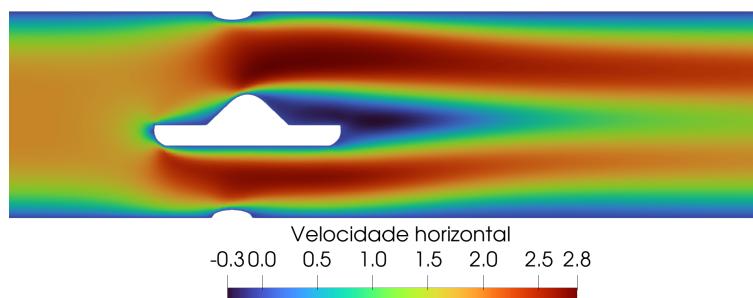
(b)  $35^\circ$  de abertura do obturador.



(c)  $55^\circ$  de abertura do obturador.



(d)  $70^\circ$  de abertura do obturador.



(e)  $90^\circ$  de abertura do obturador.

Figura 7.11: Zoom do campo de velocidade horizontal, da fig. 7.10.

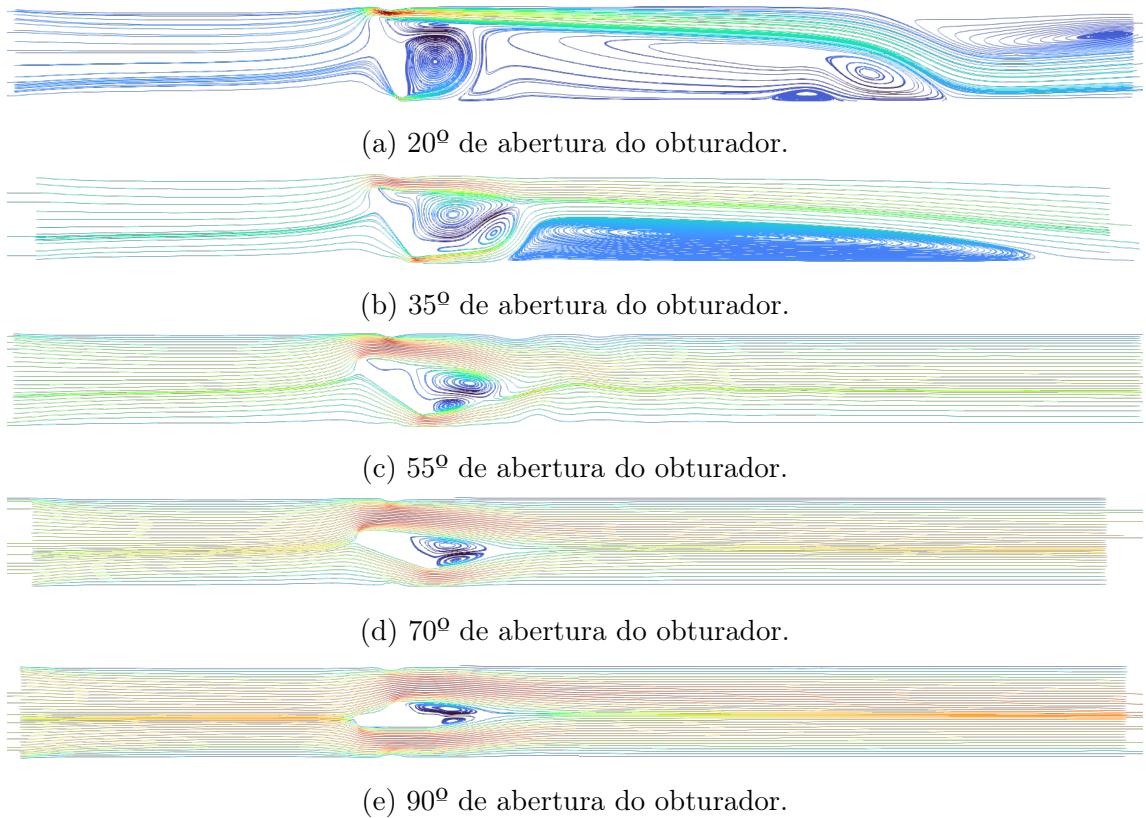


Figura 7.12: Linhas de corrente. Devido ao perfil da válvula, na parte posterior do obturador, são formada duas grandes zonas de recirculação. Em posições de abertura mais restritas,  $20^\circ$  e  $35^\circ$ , o fluido escoa com grande velocidade no vão da parte superior da válvula e acaba formando uma grande zona de circulação a jusante dessa. Pode-se perceber uma oscilação a jusante do obturador na posição de  $55^\circ$ , devido a uma formação de vórtices alternados, desprendidos da parte posterior da válvula. Nos ângulos de  $70^\circ$  e  $90^\circ$  o fluido contorna a válvula de modo a gerar menos pertubações no escoamento.

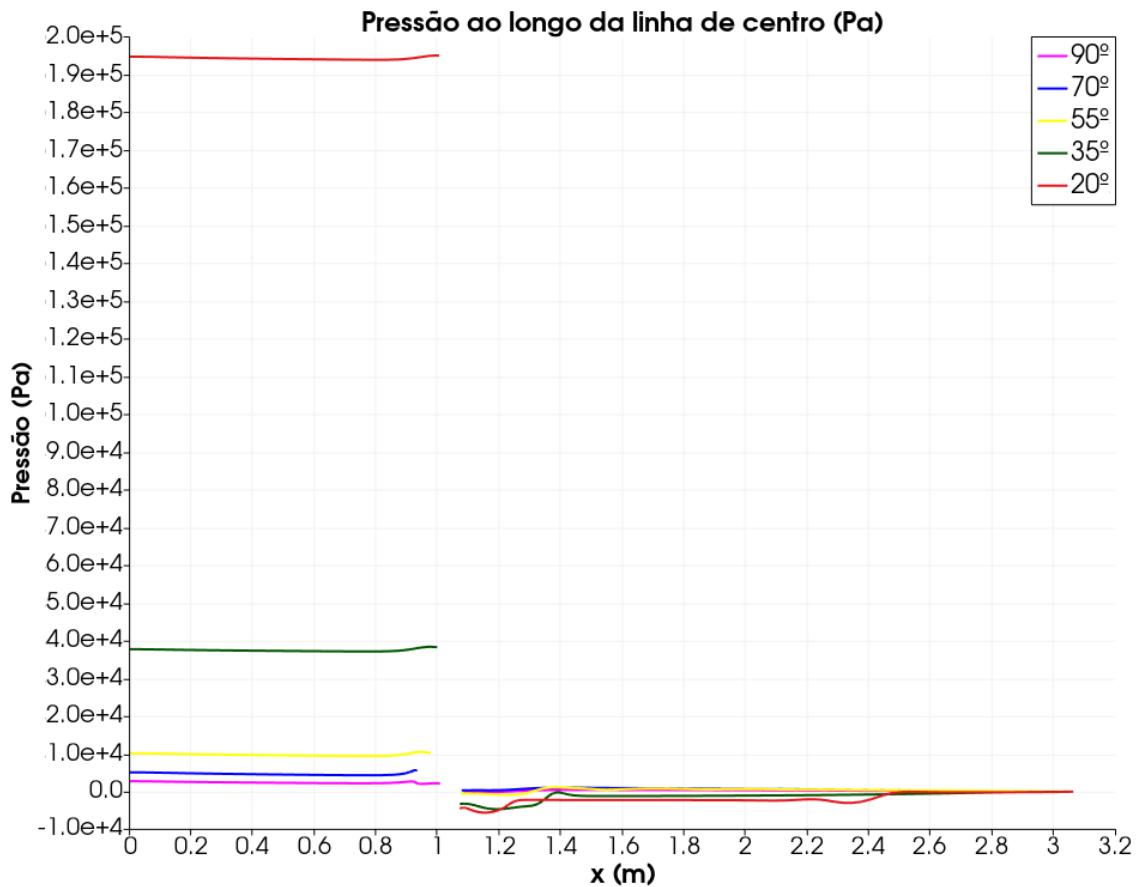


Figura 7.13: Gráfico de pressões ao longo da linha de centro para cada ângulo da abertura da válvula. Observa-se uma perda de carga localizada após a linha de centro passar pelo obturador. Logo a jusante do obturador, são observadas algumas pressões negativas, indicando possíveis pontos de pressão abaixo da pressão de vapor e formação de bolhas, possibilitando a existência de cavitação. Pressões iniciais:  $20^\circ = 194.776 \text{ Pa}$ ,  $35^\circ = 37.760,4 \text{ Pa}$ ,  $55^\circ = 10.188,9 \text{ Pa}$ ,  $70^\circ = 5.134,8 \text{ Pa}$ ,  $90^\circ = 2.772,5 \text{ Pa}$ .

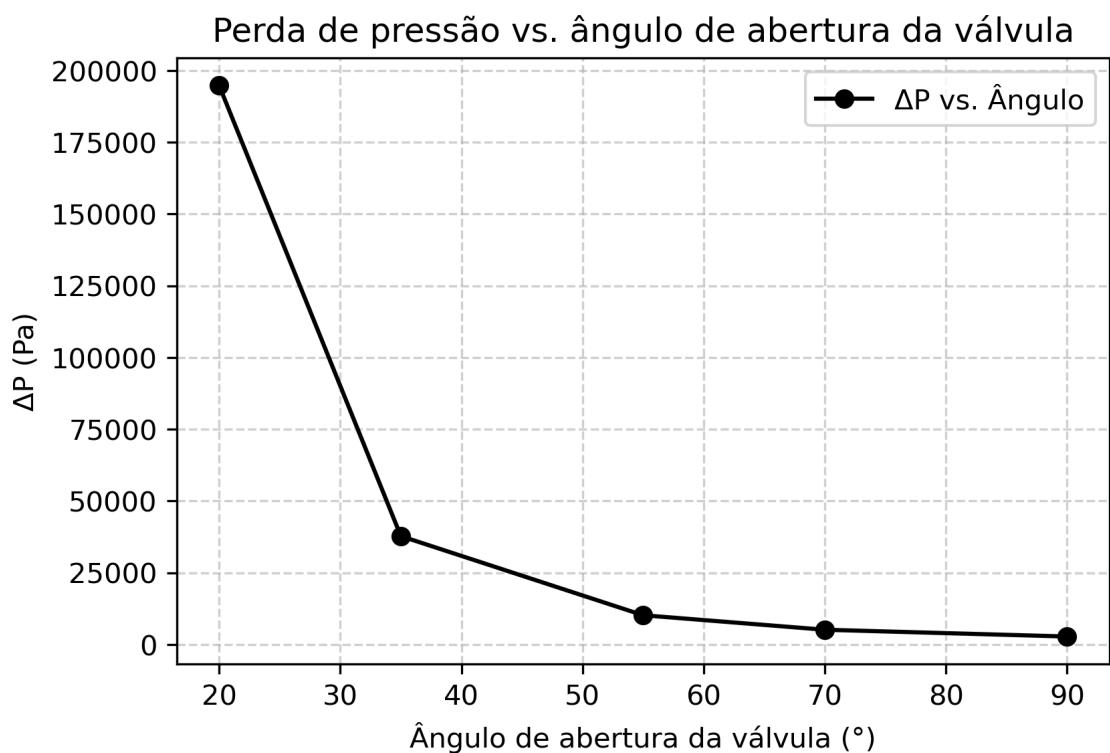


Figura 7.14: O gráfico de perda de pressão pelo ângulo de abertura da válvula mostra que a válvula borboleta tem um perfil quase exponencial de perda de carga, quando trabalha bastante restringida a perda de carga sobe vertiginosamente. Já em ângulos maiores de abertura, a perda de carga varia pouco. Delta de pressão:  $20^{\circ} = 194.776 \text{ Pa}$  ,  $35^{\circ} = 37.760,4 \text{ Pa}$  ,  $55^{\circ} = 10.188,9 \text{ Pa}$  ,  $70^{\circ} = 5.134,8 \text{ Pa}$  ,  $90^{\circ} = 2.772,5 \text{ Pa}$  .

## 7.5 Caso 3 - obturador concêntrico, biconvexo. Re=6000

O terceiro caso simulado é o escoamento sobre o obturador concêntrico, biconvexo. Seu formato foi baseado no obturador do artigo "*Numerical analysis of butterfly valve prediction of flow coefficient and hydrodynamic torque coefficient*"[33]. Esse artigo utiliza o programa ANSYS CFX 10.0 para rodar o caso de escoamento de água num duto, com a válvula borboleta também de perfil biconvexo, porém com outras dimensões.

Nesse caso, a ideia foi simular utilizando um número de Reynolds maior, para as mesmas dimensões dos outros dois casos anteriormente expostos, com isso, variando apenas o valor da viscosidade cinemática para  $\nu \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , viscosidade do óleo do campo de Marlim em torno de 59°C, segundo a tabela 7.2.

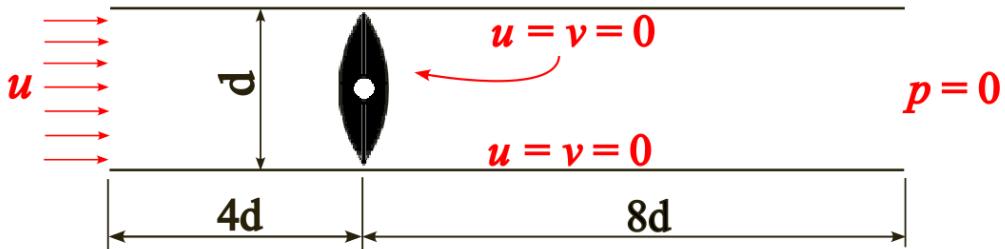


Figura 7.15: Condições de contorno do problema do caso 3, obturador concêntrico, biconvexo. Valor da velocidade de entrada  $u = 1,5 \text{ m/s}$ , condição de não deslizamento nas paredes e na válvula, pressão igual a zero em toda a fronteira de saída do fluido do canal.  $\nu = 6,38 \times 10^{-5} \text{ m/s}$ , diâmetro do canal = 255,2mm, Re = 6000.

### 7.5.1 Resultado das simulações e análise.

No escoamento no perfil da válvula biconvexa, agora para um  $Re = 6000$ , foi observada bastante oscilação do escoamento a jusante da válvula em ângulos de pouco abertura. Ainda foi observada alguma vorticidade que se acalmando ao longo do canal, nos ângulos de 55° e 70°. Com a válvula totalmente aberta, em 90°, percebe-se o fluido escoando num perfil totalmente laminar. São observadas intensas zonas de recirculação e oscliantes, nos ângulos de 20° e 35°. As zonas de recirculação diminuem nos ângulos de 55° e 70°, alojando-se atrás da válvula e na parte superior. Quando totalmente aberta, o fluxo apresenta apenas uma região de separação na parte a jusante do obturador. As quedas de pressão podem ser observadas na figuras 7.19 e 7.20, podendo ser observadas pressões negativas logo a jusante da válvula na primeira figura.

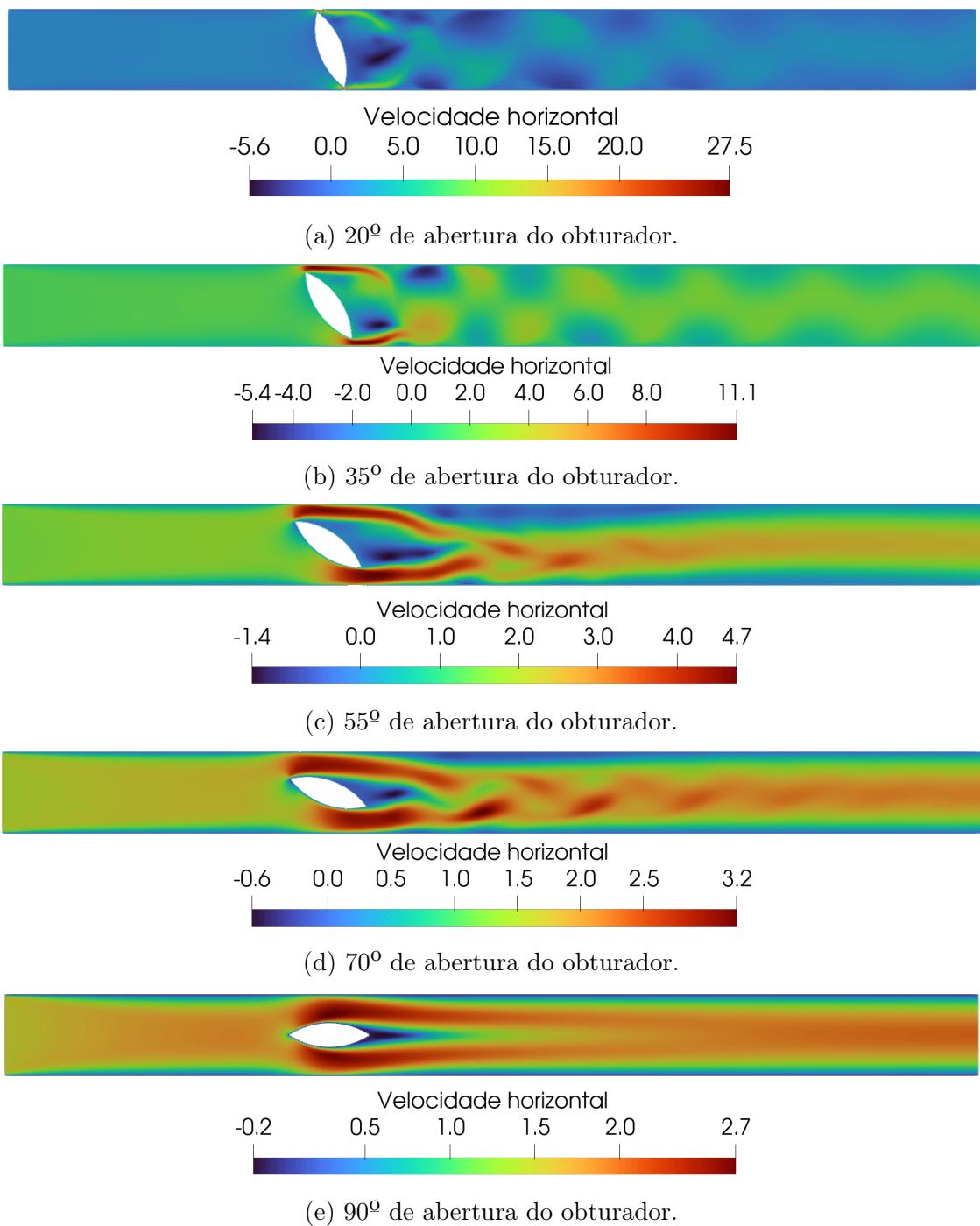


Figura 7.16: Campo de velocidade horizontal, em m/s, para diferentes ângulos de abertura. Escoamento com número de Reynolds = 6000. Velocidade de entrada de  $u=1,5$  m/s em todos os casos. Observadas velocidades mais acentuadas quando a válvula está restringida. A velocidade a jusante do obturador nos ângulos de  $20^\circ$  e  $35^\circ$  oscilam bastante, evidenciando a presença de esteira turbulenta. Com abertura de  $55^\circ$  e  $70^\circ$  ainda existe a presença de vórtices menos intensos. Apenas quando totalmente aberta,  $90^\circ$ , que não apresenta-se sinais de instabilidade na região a jusante da válvula.

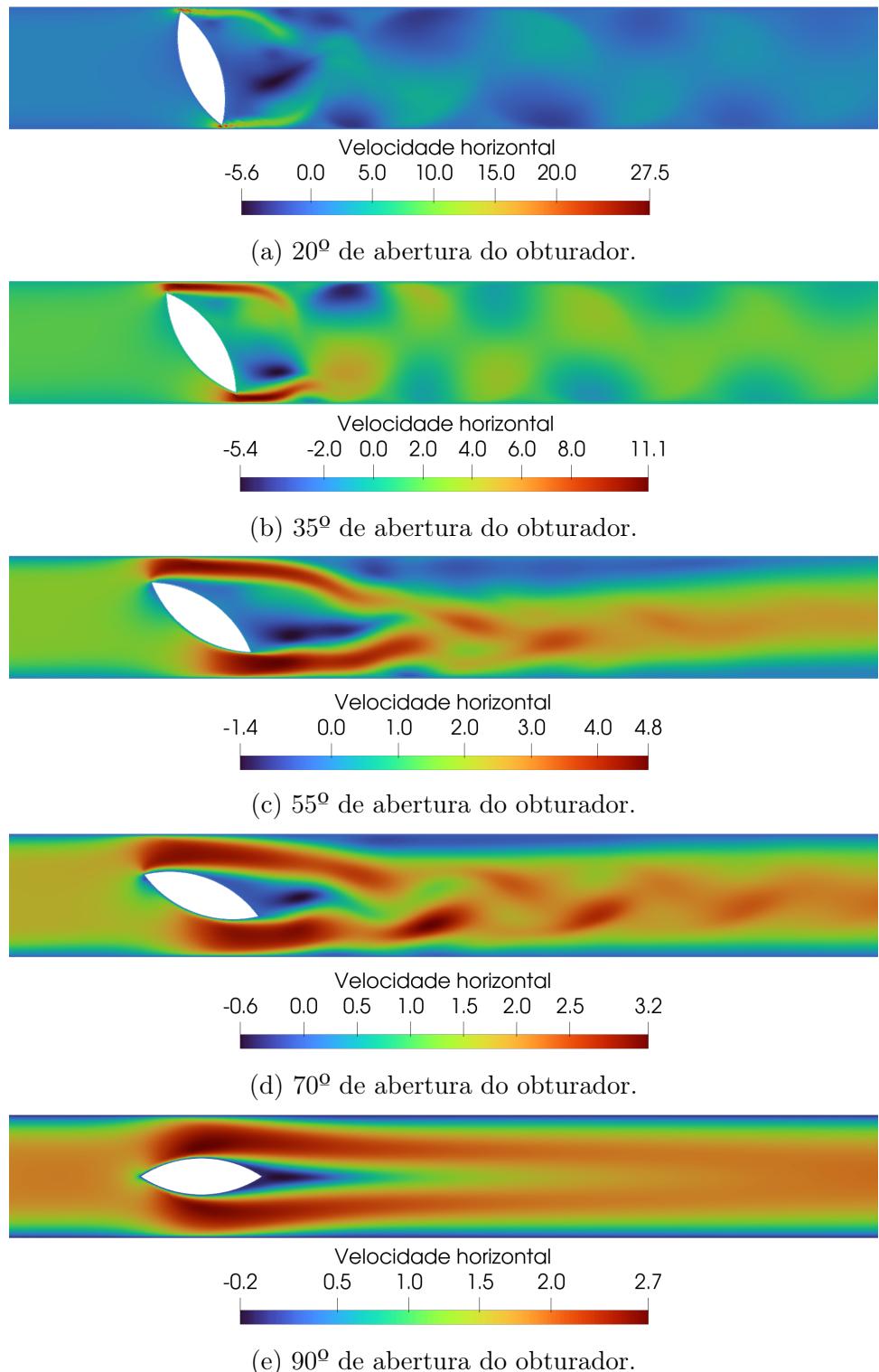


Figura 7.17: Zoom do campo de velocidade horizontal, da fig. 7.16.

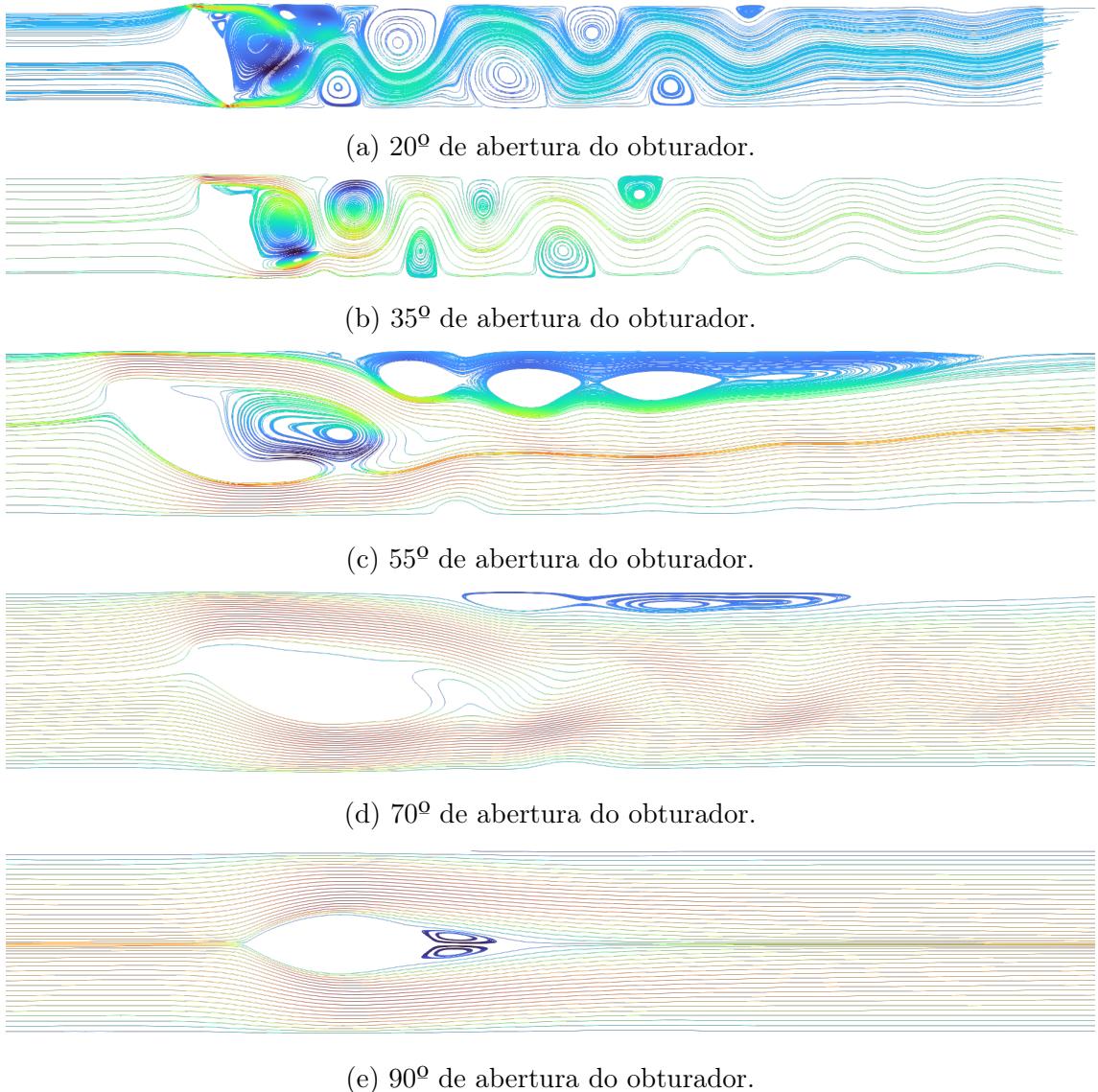


Figura 7.18: Linhas de corrente. Nas duas primeiras imagens, abertura de  $20^\circ$  e  $30^\circ$ , observa-se que são formadas várias zonas de recirculação. Essas zonas oscilam conforme o escoamento. Nas aberturas de  $55^\circ$  e  $70^\circ$ , há uma zona de recirculação maior na placa superior, essa zona oscila muito pouco. O escoamento nessas aberturas ainda apresentam oscilações a jusante da válvula. Apenas com ela totalmente aberta,  $90^\circ$ , que podemos observar há existência de pouca separação do fluido com a válvula.

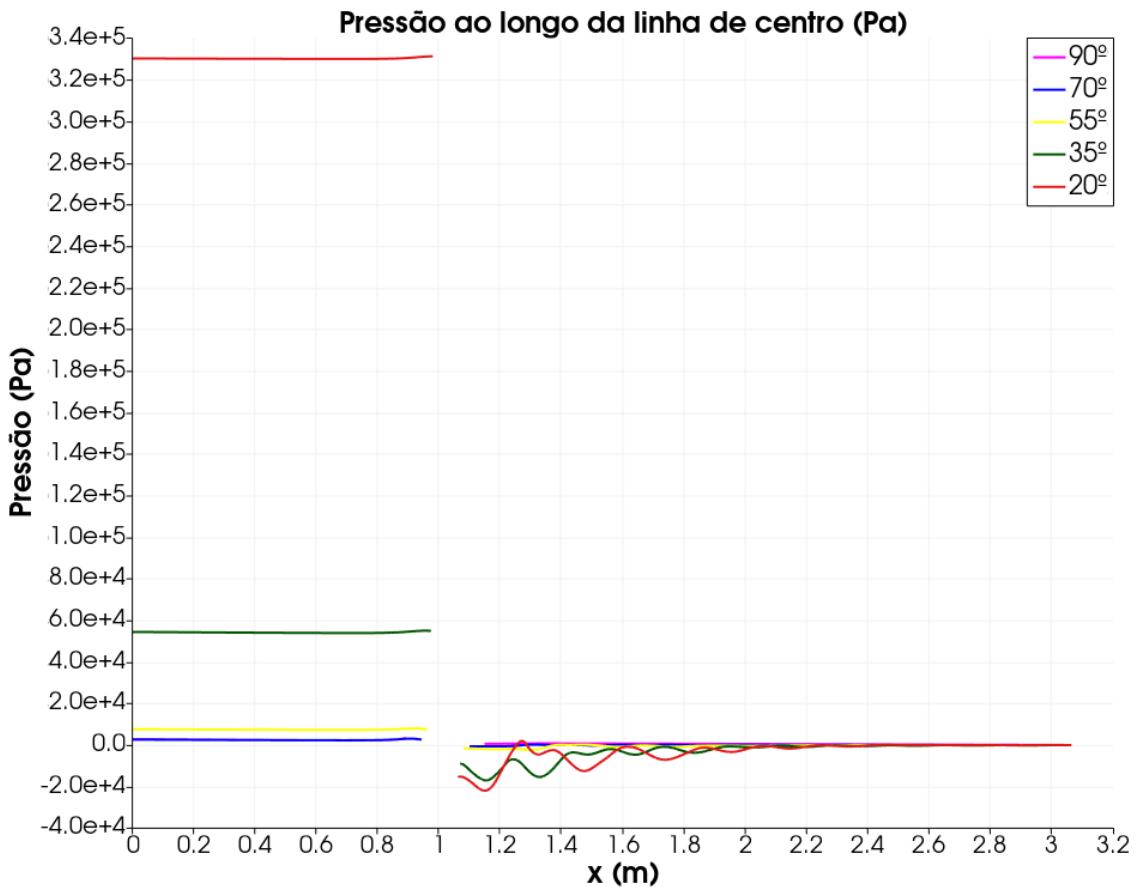


Figura 7.19: Gráfico de pressões ao longo da linha de centro para cada ângulo da abertura da válvula do terceiro caso. Observa-se uma perda de carga localizada após a linha de centro passar pelo obturador. Logo a jusante do obturador, são observadas algumas pressões negativas, indicando possíveis pontos de pressão abaixo da pressão de vapor e formação de bolhas, possibilitando a existência de cavitação. Pressões iniciais:  $20^\circ = 330.231,0 \text{ Pa}$  ,  $35^\circ = 54.383,8 \text{ Pa}$  ,  $55^\circ = 7598,6 \text{ Pa}$  ,  $70^\circ = 2804,2 \text{ Pa}$  ,  $90^\circ = 2.627,0 \text{ Pa}$  .

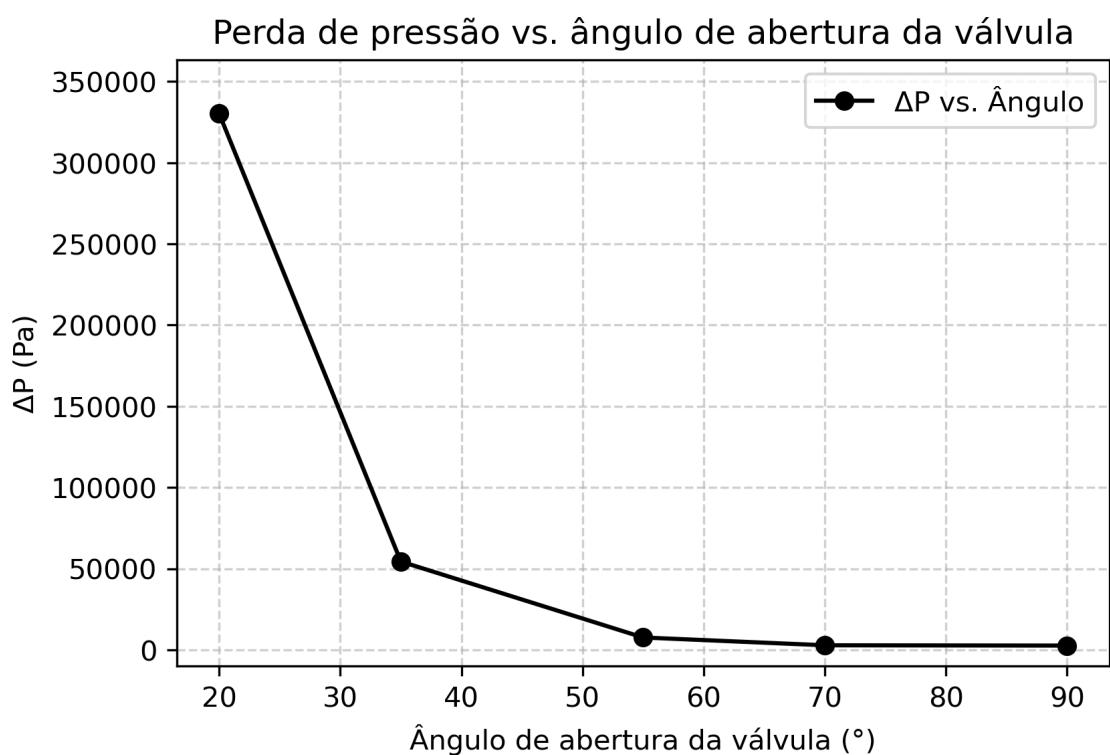


Figura 7.20: O gráfico de perda de pressão pelo ângulo de abertura da válvula do caso 3. Podemos observar que a válvula borboleta, quando bem restringida, com ângulos de abertura menores que  $30^\circ$ , tem um aumento muito grande da perda de carga localizada. Já para ângulos maiores de abertura, a perda de carga varia pouco. Delta de pressão:  $20^\circ = 330.231 \text{ Pa}$  ,  $35^\circ = 54.383,8 \text{ Pa}$  ,  $55^\circ = 7.595,6 \text{ Pa}$  ,  $70^\circ = 2.804,2 \text{ Pa}$  ,  $90^\circ = 2.627,0 \text{ Pa}$  .

Ângulo de abertura	Nós	Elementos	$\Delta t(s)$	Nº de Iterações	Tempo de Simulação(s)
20°	22956	45912	$10^{-3}$	20.000	120.194
35°	19479	38958	$10^{-3}$	20.000	91.285
55°	19359	38718	$10^{-3}$	20.000	90.250
70°	19431	38862	$10^{-3}$	20.000	88.201
90°	19393	38786	$10^{-3}$	20.000	89.366

Tabela 7.3: Tabela de dados da simulação do caso 3.

## 7.6 Caso 4 - obturador concêntrico, convexo. $Re=6000$

O quarto e último caso simulado é de um escoamento sobre o obturador concêntrico, convexo. Seu formato foi baseado no obturador do artigo "*Numerical study of large diameter butterfly valve on flow characteristics*"[34], com alteração das dimensões utilizadas. O artigo, que também simula o escoamento através de um duto com uma válvula de controle borboleta, utiliza o software FLUENT 6.3 para realizar a simulação numérica.

Os parâmetros utilizados para esse caso foram: velocidade de entrada no canal  $u = 1,5 \text{ m/s}$ ,  $p = 0$  na saída do canal. Condição de não deslizamento nas paredes do canal e na válvula. A viscosidade cinemática  $\nu = 6,38 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ . Resultando num Reynolds de 6000 na entrada do canal.

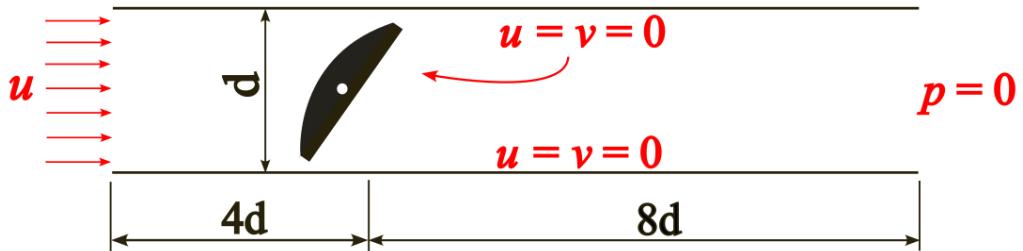


Figura 7.21: Condições de contorno do problema do caso 4, obturador concêntrico, convexo. Valor da velocidade de entrada  $u = 1,5 \text{ m/s}$ , condição de não deslizamento nas paredes e na válvula, pressão igual a zero em toda a fronteira de saída do fluido do canal.  $\nu = 6,38 \times 10^{-5}$ , diâmetro do canal = 255,2mm ,  $Re = 6000$ .

### 7.6.1 Resultado das simulações e análise.

Também foram observadas nessa simulação velocidades mais acentuadas quando a válvula está restringida. O fluido tem dificuldade para escoar por cima da válvula nos ângulos de 20° e 35°, devido à proximidade da válvula com a placa superior. Nesses 2 ângulos de abertura, o fluido passa da válvula pela parte de baixo com

maior velocidade e depois de uma certa distância começa a oscilar. Nos ângulos de  $55^\circ$  e  $70^\circ$ , o escoamento a jusante da válvula apresenta oscilação, e vai se dirigindo para o meio do canal ao longo do escoamento, como pode ser visualizado na 7.22. Também foram observados várias zonas de recirculação, principalmente nos dois primeiros ângulos de abertura,  $20^\circ$  e  $35^\circ$ . Nos ângulos de  $55^\circ$  e  $70^\circ$  uma grande zona de recirculação é observada na parte superior do canal, que diminui conforme a abertura. As recirculações podem ser observadas na 7.24. As perdas de pressão devido à restrição da válvula podem ser observadas nas figuras 7.25 e 7.26

Ângulo de abertura	Nós	Elementos	$\Delta t(s)$	Nº de Iterações	Tempo de Simulação(s)
$20^\circ$	19540	39080	$10^{-3}$	20.000	86.432
$35^\circ$	19620	39204	$10^{-3}$	20.000	84.540
$55^\circ$	19602	39240	$10^{-3}$	20.000	83.419
$70^\circ$	19752	39504	$10^{-3}$	20.000	87.376
$90^\circ$	19866	39732	$10^{-3}$	20.000	87.229

Tabela 7.4: Tabela de dados da simulação do caso 4.

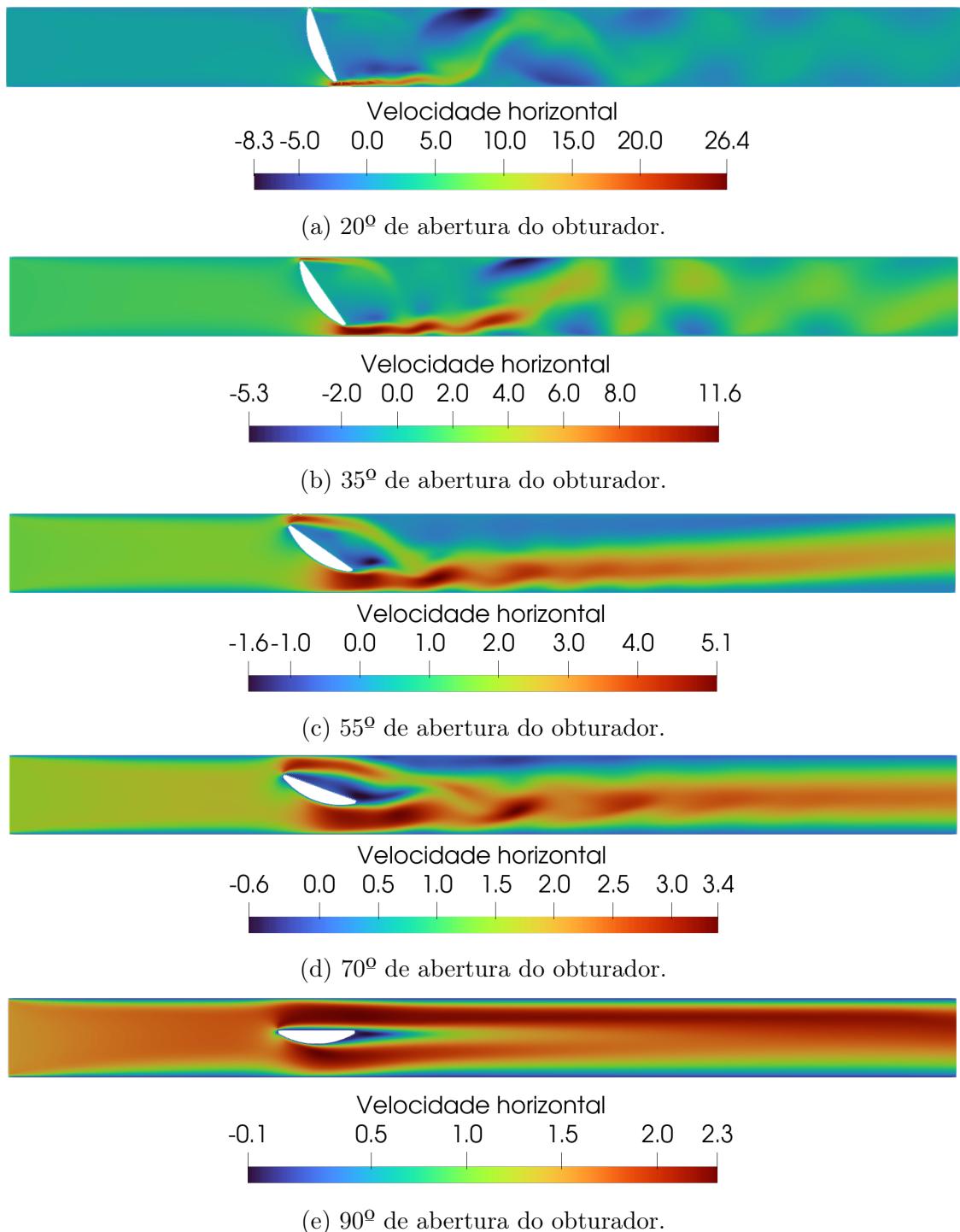
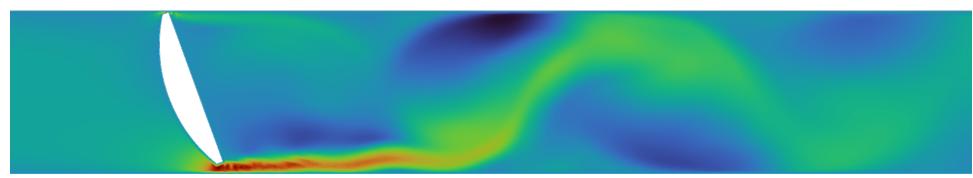
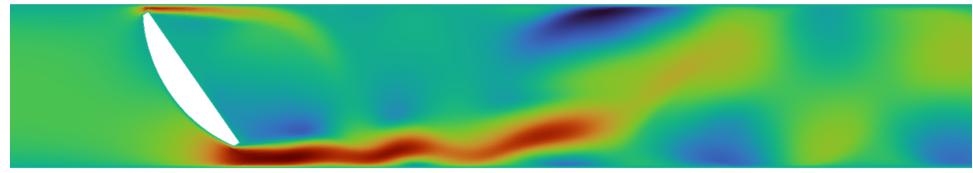


Figura 7.22: Campo de velocidade horizontal, em m/s, para diferentes ângulos de abertura da válvula do caso 4. Escoamento com número de Reynolds = 6000. Velocidade de entrada de  $u=1,5$  m/s em todos os casos. Observadas velocidades mais acentuadas quando a válvula está restringida. O fluido tem dificuldade para escoar por cima da válvula nos ângulos de  $20^\circ$  e  $35^\circ$ , devido à proximidade da válvula com a placa superior. Nesses 2 ângulos de abertura, o fluido passa da válvula pela parte de baixo com maior velocidade e depois de uma certa distância começa a oscilar. Nos ângulos de  $55^\circ$  e  $70^\circ$ ,



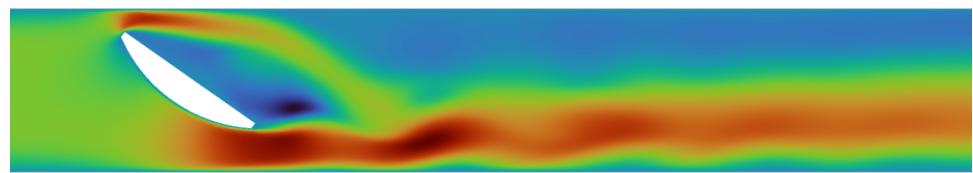
Velocidade horizontal  
-8.5 -5.0 0.0 5.0 10.0 15.0 20.0 26.4

(a)  $20^\circ$  de abertura do obturador.



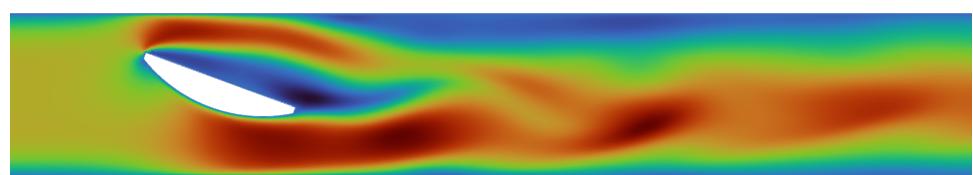
Velocidade horizontal  
-5.3 -2.0 0.0 2.0 4.0 6.0 8.0 11.6

(b)  $35^\circ$  de abertura do obturador.



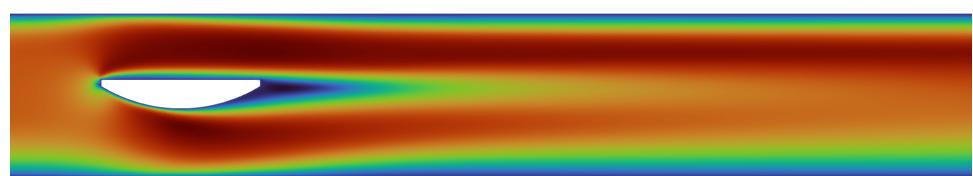
Velocidade horizontal  
-1.6 -1.0 0.0 1.0 2.0 3.0 4.0 5.2

(c)  $55^\circ$  de abertura do obturador.



Velocidade horizontal  
-0.7 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0 3.4

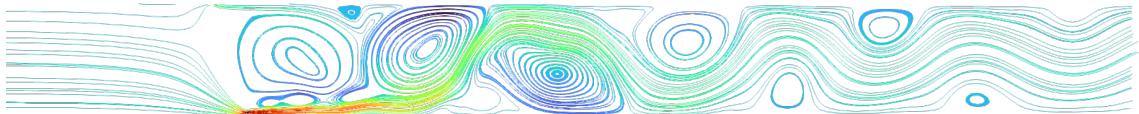
(d)  $70^\circ$  de abertura do obturador.



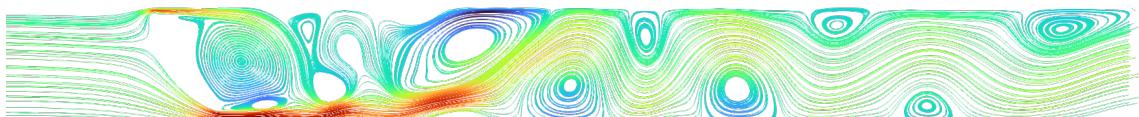
Velocidade horizontal  
-0.1 0.5 1.0 1.5 2.0 2.3

(e)  $90^\circ$  de abertura do obturador.

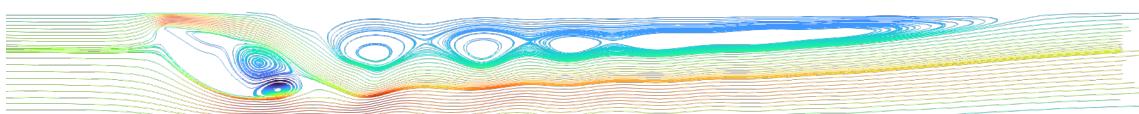
Figura 7.23: Zoom do campo de velocidade horizontal, da fig. 7.22.



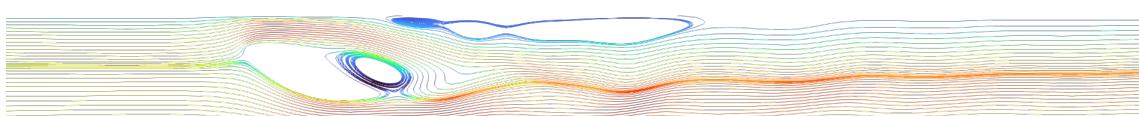
(a)  $20^\circ$  de abertura do obturador.



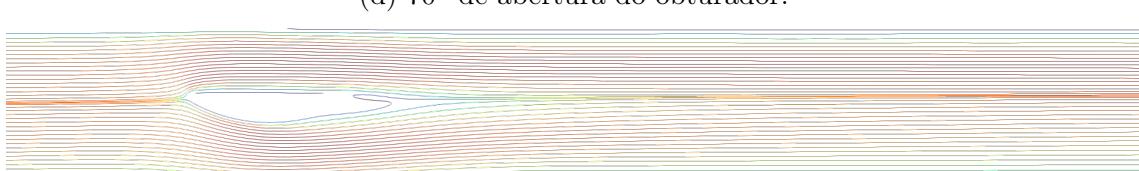
(b)  $35^\circ$  de abertura do obturador.



(c)  $55^\circ$  de abertura do obturador.



(d)  $70^\circ$  de abertura do obturador.



(e)  $90^\circ$  de abertura do obturador.

Figura 7.24: Linhas de corrente do caso 4. São observadas muitas zonas de recirculação quando a abertura da válvula apresenta-se mais restringida, nos ângulos de  $20^\circ$  e  $35^\circ$ . Nos ângulos de  $55^\circ$  e  $70^\circ$  ainda consta uma grande zona de recirculação na parte superior do canal. Apenas a  $90^\circ$  o escoamento não apresenta zonas de recirculação.

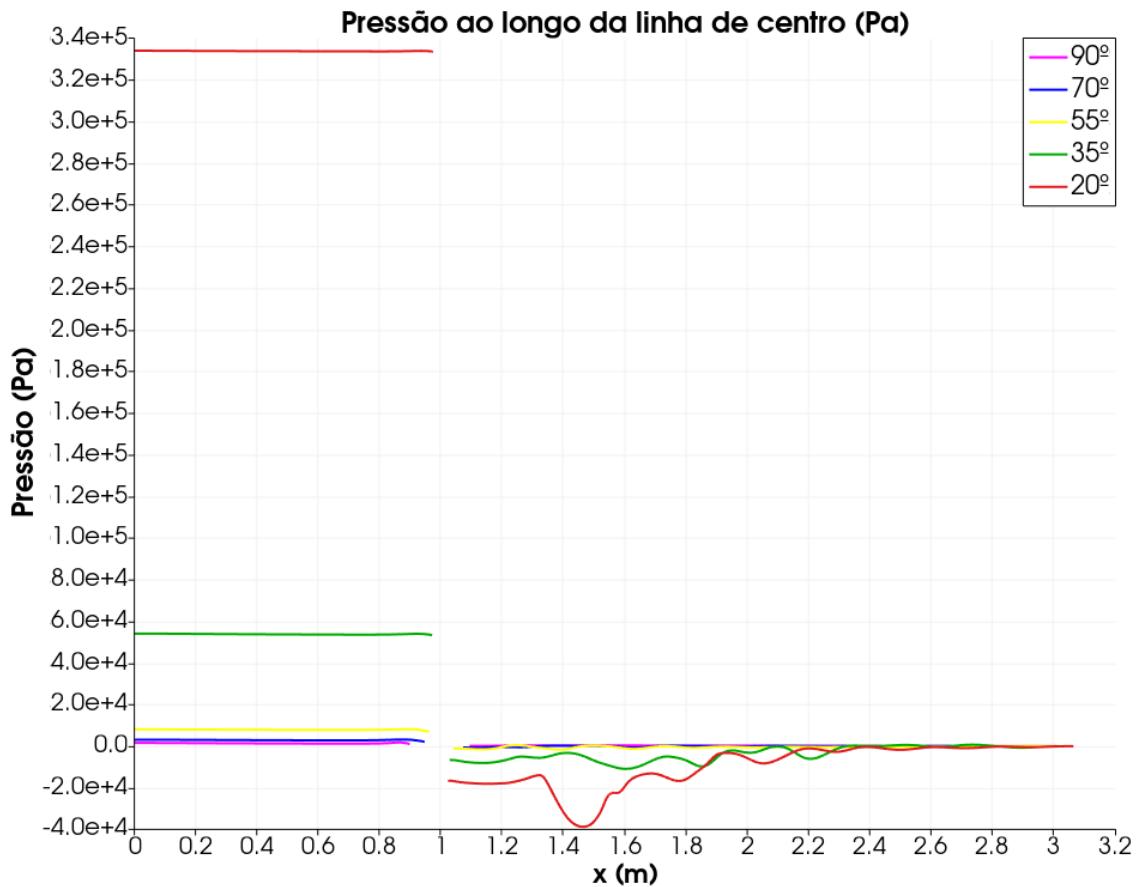


Figura 7.25: Gráfico de pressões ao longo da linha de centro para cada ângulo da abertura da válvula do quarto caso. Observa-se uma perda de carga localizada após a linha de centro passar pelo obturador. Logo a jusante do obturador, são observadas algumas pressões negativas dos ângulos de 20° e 35°, indicando possíveis pontos de pressão abaixo da pressão de vapor e formação de bolhas, possibilitando a existência de cavitação. Pressões iniciais: 20° = 333.962,0 Pa , 35° = 54.060,8 Pa , 55° = 8061,5 Pa , 70° = 3111,6 Pa , 90° = 1.555,7 Pa .

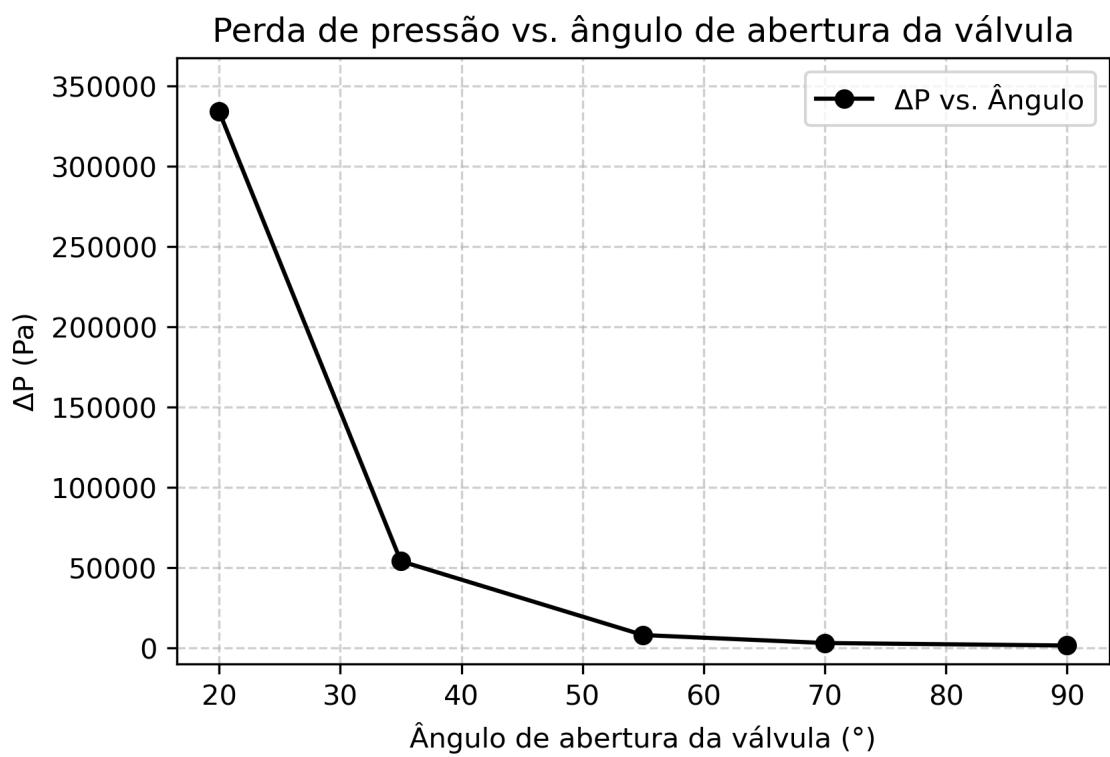


Figura 7.26: O gráfico de perda de pressão pelo ângulo de abertura da válvula do caso 4. Podemos observar que a válvula borboleta, quando bem restringida, com ângulos de abertura menores que  $30^\circ$ , tem um aumento muito grande da perda de carga localizada. Já para ângulos maiores de abertura, a perda de carga varia pouco. Delta de pressão:  $20^\circ = 333.962 \text{ Pa}$  ,  $35^\circ = 54.060,3 \text{ Pa}$  ,  $55^\circ = 8.061,5 \text{ Pa}$  ,  $70^\circ = 3111,6 \text{ Pa}$  ,  $90^\circ = 1.555,0 \text{ Pa}$  .

# Capítulo 8

## Conclusões

### 8.1 Considerações Gerais

O presente trabalho abordou a utilização de um código computacional, desenvolvido para este fim, que simula o escoamento de fluidos. A utilização do código na simulação do escoamento em válvulas de controle do tipo borboleta foi o objetivo do trabalho, entretanto, este é apenas um dos casos em que pode-se utilizar esse código. Foi desenvolvida uma ferramenta numérica baseada no método de elementos finitos, capaz de prever o comportamento do escoamento em diferentes configurações, além de garantir estabilidade numérica incondicional para o passo de tempo escolhido nesse trabalho.

Foram realizadas verificações bidimensionais do código, comparando os resultados obtidos com os casos clássicos da literatura, como o escoamento laminar entre placas, escoamento ao redor de um cilindro, escoamento sobre uma cavidade e escoamento sobre um degrau. Os resultados demonstraram boa concordância com os dados de referência, validando a metodologia implementada. A aplicação do método Semi-Lagrangeano mostrou-se eficaz para reduzir oscilações numéricas nos casos com números de Reynolds acima de 200.

Os experimentos numéricos com as válvulas borboleta evidenciaram a influência da geometria do obturador e do ângulo de abertura sobre a perda de carga e distribuição de pressão no escoamento. Em especial, foi possível observar que, para ângulos menores que  $30^\circ$ , há um aumento significativo na perda de carga, enquanto para aberturas superiores a  $55^\circ$  a variação é menos relevante. Isso também ocorre nos artigos simulados em três dimensões, utilizando softwares comerciais, citados neste trabalho.

Também foi possível observar alguns fenômenos como separação de fluxo, recirculação e geração de vórtices no escoamento a jusante das válvulas, principalmente em menores ângulos de abertura. Esses fenômenos também são constatados nos

artigos de simulação numérica aqui citados como referências. O refinamento das malhas nas regiões de interesse é de suma importância para conseguir captar esses fenômenos.

## 8.2 Limitações do trabalho

Apesar dos bons resultados comparados com casos da literatura e alguma similaridade com o escoamento em válvulas borboletas, algumas limitações foram identificadas ao longo do desenvolvimento. Primeiramente, a abordagem bidimensional não representa de fato o escoamento em válvulas borboletas. Mas acredita-se que foi bastante válida como estudo inicial.

Outro ponto é que a simulação foi conduzida utilizando um método de simulação direta, ou seja, sem modelos de turbulência. Isso significa que todas as escalas do escoamento deveriam ser resolvidas diretamente, incluindo as menores estruturas turbulentas. No entanto, muito provavelmente, a malha utilizada não possui refinamento suficiente para capturar adequadamente os efeitos da turbulência em regiões críticas do escoamento, ou seja, ela não está na menor escala de Kolmogorov. Isso leva a imprecisões na previsão de padrões do escoamentos turbulentos.

## 8.3 Propostas para trabalhos futuros

Com base nos resultados e limitações abordadas, algumas direções para estudos futuros podem ser sugeridas:

- **Elaboração de modelo tridimensional:** A implementação de uma versão tridimensional permitiria uma melhor representação do escoamento e a análise de efeitos tridimensionais.
- **Implementação de modelos de turbulência:** Estudo de utilização de modelos RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) ou LES (Large Eddy Simulation) para este tipo de simulação em válvulas borboletas, com intuito de melhorar a previsão do comportamento do escoamento em regimes turbulentos.
- **Otimização e implementação de um limitador de iterações no código:** Implementação de um critério de convergência que calcula o erro da iteração seguinte em relação à anterior, evitando cálculos e uso de CPU desnecessários.

# Referências Bibliográficas

- [1] Luís Henrique Carnevale da Cunha. Finite element method for simulating flows with the stream function-vorticity formulation. Msc. dissertation, Universidade do estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro - RJ, Brasil, 2020.
- [2] U. GHIA e C. T. SHIN. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method\*. *Journal of computational physics*, 148:387–411, January 1982.
- [3] Andreia Amaro de Lima, Marco Antonio Farah, and Krishnaswamy Rajagopal. A viscosidade de Óleo cru. In *4º PDPETRO - Congresso Brasileiro de Pesq. e Desenvolvimento em Petróleo e Gás*, Campinas, SP, Brasil, 2007. ABPG.
- [4] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 7th edition, 2013.
- [5] Turgut Sarpkaya. Theoretical discharge coefficients for butterfly valves. *J. Journal of Basic Engineering*, 83(2):251–256, 1961.
- [6] Reinaldo de Falco. *Bombas industriais*. Interciênciac, Rio de Janeiro, 2 edition, 1998.
- [7] H. Ahmed G. Ibrahim, Z. Al-Otaibi. An investigation of butterfly valve flow characteristics using numerical technique. *International Journal of Advanced Engineering Research and Science · June 2013*, 3:151–166, June 2013.
- [8] Chendong Huang e R. H. Kim. Three-dimensional analysis of partially open butterfly valve flows. *Journal of Fluids Engineering*, (118):562–568, September 1996.
- [9] Xiaodong Wang, Jingliang Dong, and Tian Wang. Numerical study of large diameter butterfly valve on flow characteristics. *Advanced Materials Research*, 236-238:1653–1657, 2011.

- [10] Armando de Oliveira Fortuna. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*. Editora da Universidade de São Paulo (EDUSP), São Paulo, SP, Brasil, 2000. Academia, Série 30.
- [11] S. C. Chapra and R. P. Canale. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill Education, 7th edition, 2015.
- [12] J. D. Anderson. *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*. McGraw-Hill, 1995.
- [13] S. V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- [14] H. K. Versteeg and W. Malalasekera. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Pearson Education, 2nd edition, 2007.
- [15] Roland W. Lewis, Perumal Nithiarasu, and Kankanhalli N. Seetharamu. *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. John Wiley & Sons, 2004.
- [16] Joel H. Ferziger, Milovan Peric, and R. L. Street. *Computational methods for fluid dynamics*. Springer, Stanford, CA, USA, 4 edition, 2020.
- [17] R. Byron Bird, Warren E. Stewart, and Edwin N. Lightfoot. *Transport Phenomena*. John Wiley & Sons, New York, 2nd edition, 2002.
- [18] Inc. Kitware. Paraview - open source scientific visualization, 2025. Accessed: 2025-02-26.
- [19] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer, New York, 2010.
- [20] O. A. Ladyzhenskaya. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon & Breach, 1969.
- [21] I. Babuška. The finite element method for elliptic equations with discontinuous coefficients. *Computing*, 5:207–213, 1971.
- [22] F. Brezzi. On the existence, uniqueness, and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *RAIRO*, 8:129–151, 1974.
- [23] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer, 1991.

- [24] T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, 2000.
- [25] J. S. Sawyer. A semi-lagrangian method of solving the vorticity advection equation. *Tellus*, 15:336–342, June 1963.
- [26] O. Pironneau. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the navier-stokes equations. *Numerische Mathematik, Springer Verlag*, September 1982.
- [27] Gustavo Rabello dos Anjos. Solução do campo hidrodinâmico em células eletróquímicas pelo método de elementos finitos. Msc. dissertation, Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Rio de Janeiro - RJ, Brasil, 2007.
- [28] Python . <https://python.org/>, 2024.
- [29] Gmsh . <https://gmsh.info/>, 2024.
- [30] J. C. F. PEREIRA B. F. ARMALYt, F. DURSTS and B. SCHONUNG. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *J. Fluid Mech*, 127:473–496, July 1982.
- [31] Ercan Erturk. Numerical solutions of 2-d steady incompressible flow over a backward-facing step, part i: High reynolds number solutions. *Computer e Fluids, Elsevier*, (37):633–655, February 2008.
- [32] S. Y. Jeon, J. Y. Yoon, and M. S. Shin. Flow characteristics and performance evaluation of butterfly valves using numerical analysis. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 12(1):012099, 2010.
- [33] Xue Guan Song and Young Chul Park. Numerical analysis of butterfly valve - prediction of flow coefficient and hydrodynamic torque coefficient. In *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science 2007 (WCECS 2007)*, San Francisco, USA, October 24-26 2007.
- [34] Xiaodong Wang, Jingliang Dong, and Tian Wang. Numerical study of large diameter butterfly valve on flow characteristics. *Advanced Materials Research*, 236-238:1653–1657, 2011.