CURSO DE PYTHON
PARA ENGENHARIA MECÂNICA

PYTHON PARA ENGENHARIA MECÂNICA

Preparado por: Prof. Gustavo Anjos
28 de Maio de 2017

Resumo. Este texto de nível introdutório tem como objetivo familiarizar o aluno de graduação na criação de ferramentas e solução de problemas em engenharia mecânica com a utlização de uma moderna linguagem de computador - Python. Este texto não se restringe a futuros engenheiros mecânicos, mas também pode ser usado por alunos que desejam obter um conhecimento inicial de solução de problemas diferenciais e como introdução à construção de códigos numéricos mais elaborados.

Conteúdo

1 Introdução

Introdução sobre a importânica da linguagem Python na Engenharia Mecânica.

Solução de problemas diferenciais.

Importância da validação do código.

Curso baseado nos livros Mecânica...

Controle de versões (git)

Editor de texto (vim)

2 Movimento Horizontal de um Carrinho

Neste exemplo deseja-se calcular como a força de atrito linear $F_{drag} = -bv$ atua em um carrinho com massa m a fim de desacelerá-la até sua completa parada na direcao x. Desconsidere o atrito dos mancais no eixo de rodas do carrinho em Fig. (2).

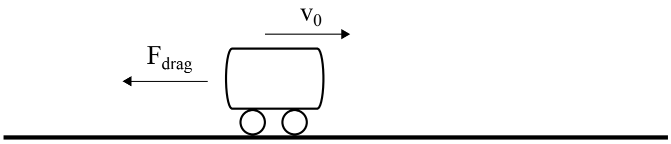

Figura 1: Desaceleração de carrinho por atrito do ar linear $F_{drag} = -bv$.

A solucao analítica da equacao:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -b\mathbf{v} \tag{1}$$

$$v(t) = v_0 e^{-bt/m} \tag{2}$$

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = x_\infty(1 - e^{-bt/m}) \tag{3}$$

onde $x_\infty = v_0 m/b$

Dados da simulação:

- $m = 1.0$ massa da particula
- $b = 0.1$ coeficiente
- $dt = 0.1$ passo de tempo

Condições iniciais:

- $time = 0.0$ tempo inicial
- $v_0 = 10.0$ velocidade inicial
- $x = 0.0$ posição inicial

3 Velocidade terminal de uma gota

Neste problema deseja-se calcular como a força de atrito linear $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$ atua em uma partícula com massa m sob uma força de gravidade $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ a fim de desacelerá-la até o equilíbrio de forças, onde a aceleração seja igual a 0 na direcao y.

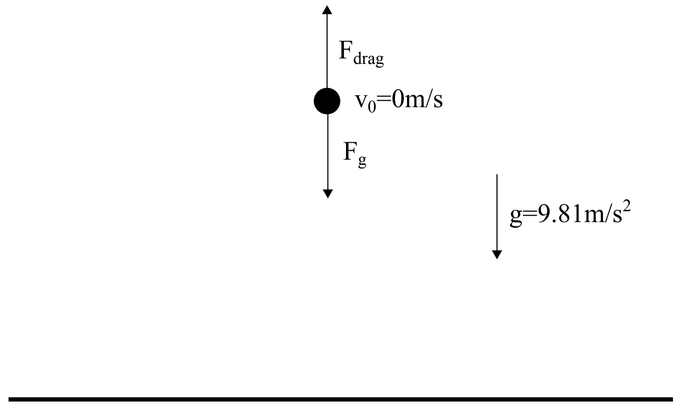

Figura 2: Aceleração de uma gota caíndo sob efeito gravitacional $F_g = mg$ e atrito do ar linear $F_{drag} = -bv$.

A solução analítica da equação:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{drag} + \mathbf{F}_g \tag{4}$$

$$v(t) = v_0 e^{-bt/m} + v_{lim}(1 - e^{-bt/m}) \tag{5}$$

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt \tag{6}$$

Dados da simulação:

- $D = 1.5e - 06$ $[m]$ diâmetro da gota óleo
- $\#D = 0.2e - 03$ $[m]$ diâmetro da gota de neblina
- $\rho = 840.0$ $[kg/m^3]$ densidade do líquido
- $g = 9.81$ $[m/s^2]$ aceleração da gravidade
- $V = \pi D^3/6.0$ $[m^3]$ volume da gota
- $m = \rho V$ $[kg]$ massa da partícula
- $\beta = 1.6e - 04$ $[kg/ms]$ viscosidade dinâmica do ar
- $b = \beta D$ $[kg/s]$ coeficiente de atrito linear
- $dt = 0.0000001$ $[s]$ passo de tempo

4 Lançamento de projétil

Neste exemplo deseja-se calcular como a forca de atrito linear $F = bv$, ou a forca de atrito quadratica $F = cv^2$ ou ausencia de forcas de atrito atuam em uma particula com massa m sob uma forca de gravidade $F = mg$.

A equacao vetorial (em X e Y) toma a seguinte forma:

$$\tag{7}$$

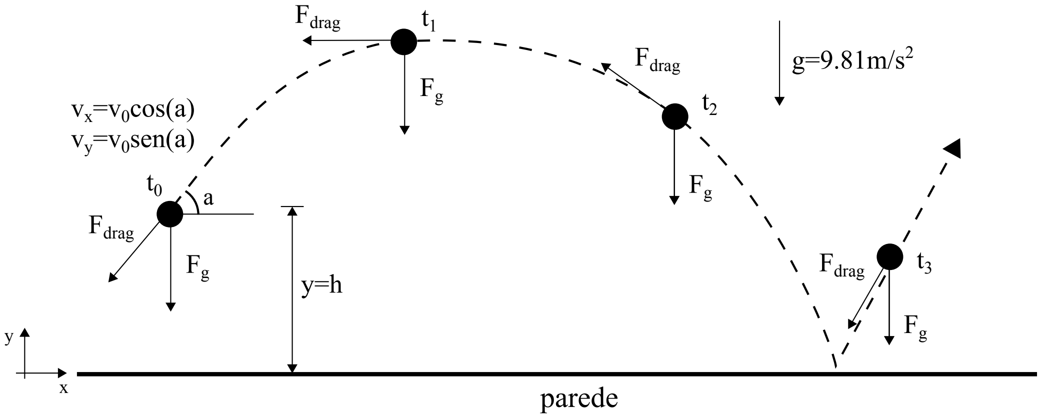

Figura 3: Desaceleração de um projetil por atrito do ar $F_{drag} = -bv$ sob efeito de gravidade.

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{drag} + \mathbf{F}_g \begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} = F_{drag_x} \\ m\frac{dv_y}{dt} = F_{drag_y} + F_{g_y} \end{cases} \tag{8}$$

Dados da simulação;

- $\#D = 1.5e-06$ $[m]$ diâmetro do projétil
- $D = 7.0e-02$ $[m]$ diâmetro da gota de neblina
- $g = 9.81$ $[m/s^2]$ aceleração da gravidade
- $V = \pi D^3/6.0$ $[m^3]$ volume da gota
- $m = 0.15$ $[kg]$ massa da partícula
- $\beta = 0.25$ $[kg/ms]$ viscosidade dinâmica do ar
- $b = \beta D$ $[kg/s]$ coeficiente de atrito linear
- $\gamma = 0.25$ $[Ns^2/m^4]$
- $c = \gamma D^2$ coeficiente de atrito linear
- $dt = 0.01$ $[s]$ passo de tempo

Condições iniciais

- $time = 0.0$ $[s]$ tempo
- $x = 0.0$ $[m]$ posição
- $y = 0.0$ $[m]$ posição
- $vx = 19.3$ $[m/s]$ velocidade
- $vy = 23.0$ $[m/s]$ velocidade

5 Sistema massa-mola

Neste exemplo deseja-se calcular como a força de mola $F = -kx$ atua em uma particula com massa m sem dissipação.

A solução analítica da equação:

$$m\frac{dv}{dt} = -kx \tag{9}$$

$$v(t) = v_0 e^{-bt/m} \tag{10}$$

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = x_\infty(1 - e^{-bt/m}) \tag{11}$$

onde $x_{inf} = v_0 m/b$

Dados da simulação

- $m = 1.0$ massa da partícula
- $k = 0.1$ coeficiente da mola
- $dt = 0.1$ passo de tempo

Condições iniciais:

- $time = 0.0$ tempo total da simulação
- $x = 0.0$ posição inicial da partícula
- $v_x = 10.0$ velocidade inicial da partícula

6 Sistema massa-mola dissipativo

Neste exemplo deseja-se calcular como a forca de atrito linear $F = -bv$ atua em uma partícula com massa m sob uma forca elástica (de mola) linear $F = -kx$ a fim de desacelerá-la ate o equilíbrio de forças, onde a aceleração seja igual a 0 na direcao y.

A equação em X:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{spring} + \mathbf{F}_{friction} \tag{12}$$

Dados da simulação:

- $m = 1.0$ massa da partícula
- $k = 0.1$ coeficiente da mola
- $b = 0.1$ coeficiente de atrito linear
- $dt = 0.1$ passo de tempo

Condições iniciais:

- $time = 0.0$ tempo total da simulação
- $x = 0.0$ posição inicial da partícula
- $v_0 = 10.0$ velocidade inicial da partícula

7 Sistema massa-mola vertical

Neste exemplo deseja-se calcular como a força de gravidade $F = -mg$ atua em uma partícula com massa m sob uma forca elástica (de mola) $F = -ky$ a fim de mantê-la oscilando.

A equação em X:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{spring} + \mathbf{F}_{grav} \tag{13}$$

$\mathbf{F}_{spring} = F_{spring_y} - ky$ e $\mathbf{F}_{grav} = F_{grav_y}mg$

Dados da simulação:

- $m = 1.0$ massa da partícula
- $k = 0.1$ coeficiente da mola
- $b = 0.1$ coeficiente de atrito linear
- $y = 0.0$ posição inicial da partícula
- $v_0 = 10.0$ velocidade inicial da partícula
- $g = 9.81$ $[m/s^2]$ aceleração da gravidade
- $D = 7.0e-02$ $[m]$ diâmetro da partícula
- $\gamma = 0.25$ $[Ns^2/m^4]$
- $c = \gamma * D * D$ coeficiente de atrito linear
- $dt = 0.1$ $[s]$ passo de tempo
- $time = 0.0$ tempo total da simulação
- $\#D = 1.5e-06$ $[m]$ diâmetro do projétil
- $m = 0.15$ $[kg]$ massa da partícula
- $\beta = 0.25$ $[kg/ms]$ viscosidade dinâmica do ar
- $b = \beta D$ $[kg/s]$ coeficiente de atrito linear

8 Geração de malha 1D

Criacao de malha 1D para o método de elementos finitos com dx variando conforme as seguintes equações:

- constante: $dx = cte$

- quadrática: x^2
- cúbica: x^3
- exponencial: $exp(x)$

Parâmetros da malha:

- $L = 1.0$ comprimento total da malha
- $nx = 10$ número total de nós
- $ne = nx - 1$ número total de elementos

Dica: para criação de malha computacional, 2 estruturas são necessárias: um vetor de coordenadas dos nós da malha e uma matriz de conectividade de nós.

9 Solução de problema térmico permanente 1D

Neste exemplo deseja-se calcular a distribuição de temperatura unidimensional em regime permanente em uma barra com dimensão adimensional $L = 1$ e temperaturas constantes $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$ nas extremidades da barra.

A equação de interesse:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \tag{14}$$

para $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$

Execução do programa:

- $nx = 40$ número de pontos em x
- $L = 1.0$ comprimento total
- $dx = L/nx$ intervalo dx
- $Ti = 0.0$ condição de contorno do primeiro nó
- $Tf = 0.0$ condição de contorno do último nó
- $Q = 2.0$ fonte de calor

10 Solução de problema térmico permanente com geração de calor 1D

Neste exemplo deseja-se calcular a distribuicao de temperatura unidimensional em regime permanente em uma barra com dimensão adimensional $L = 1$ e temperaturas adimensionais constantes $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 0$ nas extremidades da barra e com geração de calor Q.

A equação de interesse:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = Q \tag{15}$$

para $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 0$

Execução do programa:

- $nx = 40$ número de pontos em x
- $L = 1.0$ comprimento total
- $dx = L/nx$ intervalo dx
- $Ti = 0.0$ condição de contorno do primeiro nó
- $Tf = 0.0$ condição de contorno do último nó
- $Q = 2.0$ fonte de calor

11 Solução de problema térmico transiente 1D

Neste exemplo deseja-se calcular a evolucao temporal da distribui cão de temperatura unidimensional em uma barra com dimensao $L = 1$ e temperaturas constantes $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$ nas extremidades da barra.

A equação de interesse:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dx^2} \tag{16}$$

para $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$

A solução da equação em estado permanente se escreve:

$$T(x) = c_1 x + c_2 \tag{17}$$

Com constantes c_1 e c_2 a serem determinadas através da aplicação das condições de contorno. Para condições de contorno arbitrárias com temperatura fixa nas extremidades (condição de contorno do tipo Dirichlet), as constantes assumem os seguintes valores:

$$c_1 = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{L} \qquad c_2 = T_{s1} \tag{18}$$

onde T_{s1} é a temperatura da superfície 1 e T_{s2} é a temperatura da superfície 2. Com isso, a distribuição de temperatura para o caso de duas condições de contorno do tipo Dirichlet toma a forma:

$$T(x) = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{L} x + T_{s1} \tag{19}$$

Para o caso do problema sugerido, a solução final toma a forma de:

$$T(x) = \frac{x}{L} \tag{20}$$

12 Solução de problema térmico transiente 1D com geração de calor

Neste exemplo deseja-se calcular a evolucao temporal da distribuicao de temperatura unidimensional em uma barra com dimensao $L = 1m$ e temperaturas constantes $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$ nas extremidades da barra. A forma forte do problema se escreve:

$$\frac{dT}{dt} = k\frac{d^2T}{dx^2} + Q \tag{21}$$

para $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$

A solução da equação em estado permanente se escreve:

$$T(x) = -\frac{QL}{2k}\left(x - \frac{x^2}{L}\right) + \frac{T_{s2}}{L}x + T_{s1} \tag{22}$$

Esta é a solucao particular para temperatura da superficie 1 igual a T_{s1} e temperatura da superficie 2 igual a T_{s2} no caso permanente $(\partial/\partial t = 0)$. No caso de tomarmos as condições de contorno do problema $T_{s1} = T_{s2} = 0$, a solução da distribuição de temperatura $T(x)$ fica:

$$T(x) = -\frac{QL}{2k}\left(x - \frac{x^2}{L}\right) \tag{23}$$

13 Solução de equação de transporte

Neste exemplo deseja-se calcular a equação diferencial parcial de conveção transiente usando o método de diferencas finitas e discretizando o termo convectivo vdu/dx com as seguintes metodologias:

- diferencas centradas
- upwind 1a. ordem
- upwind 2a. ordem
- semi-lagrangiano 1a. ordem
- semi-lagrangiano 2a. ordem
- lagrangiano

A equação diferencial parcial para $u(t, x)$:

$$\frac{du}{dt} + a\frac{du}{dx} = 0 \tag{24}$$

Usando o método de diferenças centradas para o termo espacial e um esquema explícito de derivação temporal, obtém-se a seguinte expressão para a equação:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{dt} = -a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2dx} + O[(dt, dx)^2] \tag{25}$$

O número de Courant (CFL) é definido como:

$$CFL = a\frac{dt}{dx} \tag{26}$$

14 Escoamento com partículas - solução numérica

Deseja-se calcular a trajetoria de uma partícula em um canal sob efeito de um perfil de velocidades conhecido (dado por uma função em y) e submetida às forca de arrasto F_{drag}, sustentação F_{lift} e força gravitacional F_g.

A equacao vetorial (x e y):

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{drag} + \mathbf{F}_{lift} + \mathbf{F}_g \tag{27}$$

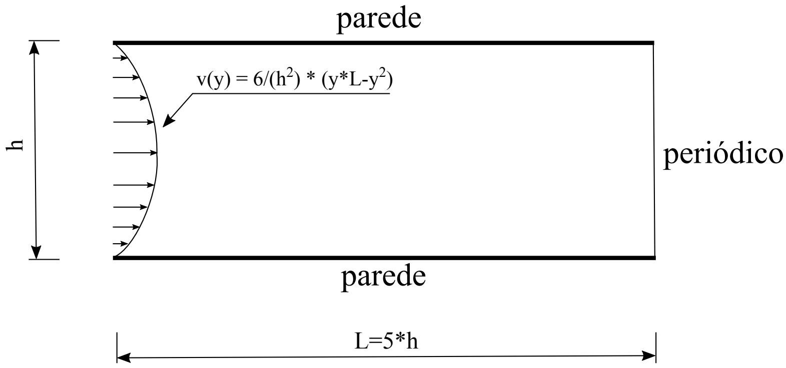

Figura 4: Domínio numérico e condições de contorno para partículas e perfil de velocidade.

onde:

$$\mathbf{F_{drag}} = 3\pi\mu d_p v \tag{28}$$

$$\mathbf{F_{lift}} = 1.61\sqrt{\mu\rho_d}\, dp^2|u-v|\frac{du}{dy}\sqrt{\left|\frac{du}{dy}\right|} \tag{29}$$

$$\mathbf{F_g} = mg \tag{30}$$

Note que esta equação vetorial tem solução analítica, porém neste problema usaremos uma aproximação numérica explícita para encontrarmos v(n+1).

O perfil de velocidade v é conhecido:

$$v(y) = \frac{6}{L^2}(yL - y^2) \tag{31}$$

As condições de contorno deste problema estão ilustradas na Fig. (4):

Dados da simulação

fluido (fase contínua)

ar - $T = 25°C$

- $\#\mu = 17.2e-6$ $[N][s]/[m^2]$ viscosidade
- $\#\rho = 1.225$ $[kg]/[m^3]$ densidade

água - $T = 25°C$

- $\mu = 1.003e-3$ $[N][s]/[m^2]$ viscosidade
- $\rho = 997.0$ $[kg]/[m^3]$ densidade

azeite - $T = 15°C$

- $\#\mu = 81.0e-03$ $[N][s]/[m^2]$ viscosidade
- $\#\rho = 703.0$ $[kg]/[m^3]$ densidade

partícula (fase dispersa)

- $d_p = 1e - 3$ $[m]$ diametro (limite $1e - 3m$)
- $\rho_p = 785.0$ $[kg]/[m^3]$ densidade madeira
- $\#\rho_p = 2700.0$ $[kg]/[m^3]$ densidade aluminio
- $\#\rho_p = \rho$
- $V_p = (1.0/6.0)\pi d_p^3$ $[m^3]$ volume
- $m = \rho_p V_p$ $[kg]$ massa

campo

- $g = 9.81$ $[m]/[s^2]$ gravidade
- $h = 1.0$ $[m]$ altura do canal
- $L = 5h$ $[m]$ comprimento do canal

condição inicial

- $numParticles = 100$ número total de partículas
- $\#v_x$ = np.zeros((numParticles,1),dtype=float)
- v_x = np.random.uniform(-0.1,0.1,(numParticles,1))
- $\#v_y$ = np.zeros((numParticles,1),dtype=float)
- v_y = np.random.uniform(-0.1,0.1,(numParticles,1))
- $time = 0.0$ $[s]$ tempo
- x = np.random.uniform(2.0,1.0,(numParticles, 1))
- $\#x$ = np.zeros((numParticles,1),dtype=float)
- y = np.random.uniform(0.8h,0.2h,(numParticles, 1))
- $\#y$ = np.zeros((numParticles,1),dtype=float)

passo de tempo

- $dt = 0.01$ $[s]$ passo de tempo