Teoria Espectral em Espaços de Hilbert

Alex Farah Pereira

Departamento de Análise
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

22 de setembro de 2016

Espaços Vetoriais de Dimensão Finita

Sejam V um espaço vetorial (real ou complexo) de dimensão finita e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear.

Proposição

T é diagonalizável se, e somente se, V admite uma base formada por autovetores de T. Neste caso, a matriz de T nesta base é uma matriz diagonal.

Proposição

Se V é um espaço euclidiano, então T é auto-adjunto se, e somente se, existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T.

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ (real ou complexo). Um produto interno em E é uma aplicação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

que satisfaz

(P1) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle \;\; \forall x_1, x_2, y \in E$

(P2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \;\; \forall x, y \in E \, , \, \lambda \in \mathbb{C}$

(P3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \;\; \forall x, y \in E$

(P4) $\langle x, x \rangle > 0 \;\; \forall x \neq 0$

O par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é chamado de espaço euclidiano.

Exemplos

Exemplo 1

$\mathbb{R}^n$ é um espaço euclidiano com

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=0}^{n} x_j y_j$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2

$\mathbb{C}^n$ é um espaço euclidiano com

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=0}^{n} x_j \overline{y_j}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

Exemplos

Exemplo 3

$\ell_2 = \{(x_n)_n \in \mathbb{C}\,;\, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ é um espaço euclidiano com

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_j \overline{y_j}$$

onde $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in \ell_2$.

Exemplo 4

$L_2(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço euclidiano com

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}\,d\mu$$

onde $f, g \in L_2(X, \Sigma, \mu)$.

Uma norma em E é uma função $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

(N1) $\|x\| \geq 0 \;\; \forall x \in E$

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \;\; \forall x \in E \; \forall \lambda \in \mathbb{C}$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \;\; \forall x, y \in E$

(N4) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

O par $(E, \|\cdot\|)$ é chamado de espaço normado.

- Todo espaço euclidiano é um espaço normado!

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \;\; \forall x \in E$$

Espaços de Hilbert

Um espaço de Hilbert é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno. Os espaços

- $\mathbb{R}^n$;
- $\mathbb{C}^n$;
- $\ell_2 = \{(x_n)_n \in \mathbb{C} \, ; \, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$;
- $L_2(X, \Sigma, \mu)$.

são espaços de Hilbert com seus respectivos produtos internos.

Ortogonalidade

Sejam E um espaço com produto interno e A um subconjunto de E. Denominamos o subconjunto

$$A^{\perp} = \{y \in E\,;\ \langle x, y\rangle = 0 \text{ para todo } x \in A\}$$

de complemento ortogonal.

Teorema

Sejam H um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado de H. Então

(a) $H = M \oplus M^{\perp}(x \in H \Leftrightarrow x = p + q$ com $p \in M$ e $q \in M^{\perp})$;

(b) Os operadores $P(x) = p$ e $Q(x) = q$ são projeções (lineares, contínuos e $P^2 = P$ e $Q^2 = Q$).

- $\|x - p\| = \text{dist}(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$;
- p é chamado de projeção ortogonal de x sobre M;
- P é chamado de projeção ortogonal de H sobre M.

Conjuntos Ortonormais

Seja E um espaço com produto interno. Um conjunto $S \subset E$ é dito ortonormal quando para todos $x, y \in S$,

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0, & x \neq y, \\ 1, & x = y. \end{cases}$$

Um conjunto ortonormal S tal que $S^{\perp} = \{0\}$ é chamado de sistema ortonormal completo.

Exemplos

- A base canônica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{K}^n$;
- A base canônica $\{e_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ de ℓ_2.

Todo conjunto ortonormal em um espaço com produto interno é linearmente independente.

Conjuntos Ortonormais

Proposição

Sejam H um espaço de Hilbert e $\{x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto ortonomal finito em H.

(a) Se $M = [x_1, \ldots, x_n]$ e $x \in H$, então

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle x_i\| = \operatorname{dist}(x, M).$$

(b) Para todo $x \in H$, $\sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Desigualdade de Bessel

Seja $S = \{x_i\,;\, i \in I\}$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert H. Então, para todo $x \in H$,

$$\sum_{i \in J} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

onde $J = \{i \in I\,;\, \langle x, x_i \rangle \neq 0\}$.

Teorema

Seja $S = \{x_i\,;\ i \in I\}$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert H. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Para cada $x \in H$, $x = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i$.

(b) S é um sistema ortonormal completo.

(c) $\overline{[S]} = H$.

(d) Para cada $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2$. (Identidade de Parseval)

(e) Para todos $x, y \in H$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle \overline{\langle y, x_i \rangle}$.

Processo de Ortogonalização

Sejam E um espaço com produto interno e $(x_n)_n$ uma sequência de vetores linearmente independentes em E.

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Existe uma sequência ortonormal $(e_n)_n$ em E tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$[x_1, \ldots, x_n] = [e_1, \ldots, e_n].$$

Corolário

Existe uma sequência ortonormal $(e_n)_n$ em E tal que

$$[x_n\, ;\ n \in \mathbb{N}] = [e_n\, ;\ n \in \mathbb{N}].$$

Teorema

Um espaço de Hilbert H de dimensão infinita é separável se, e somente se, existe em H um sistema ortonormal completo enumerável.

Teorema de Riesz-Fischer

Todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isometricamente isomorfo a ℓ_2.

Teorema

Todo espaço de Hilbert contém sistemas ortonormais completos.

Sejam V um espaço vetorial e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear.

- $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de $T \Leftrightarrow$ existe $x \in V, v \neq 0;\ T(x) = \lambda x$;
- $V_\lambda = \{x \in V\,;\ T(x) = \lambda x\}$ é dito autoespaço associado ao autovalor λ.

Sabemos que quando V tem dimensão finita:

$$\lambda \text{ é autovalor de } T \Leftrightarrow \ker(T - \lambda I) \neq \{0\} \Leftrightarrow T - \lambda I \text{ não é injetora}$$

$$\Leftrightarrow T - \lambda I \text{ não é bijetora} \Leftrightarrow (T - \lambda I)^{-1} \text{ não existe}$$

Espectro de Operadores Contínuos

Sejam E um espaço normado e $T \in \mathcal{L}(E, E)$.

$$\lambda \text{ não é autovalor } \Rightarrow (T - \lambda I)^{-1} \text{ é linear e injetora}$$

$$(T - \lambda I) \text{ é sobrejetora? } (T - \lambda I)^{-1} \text{ é contínua?}$$

- λ é um valor regular de T quando $(T - \lambda I)$ é bijetora e sua inversa é contínua.
- $\rho(T)$ é o conjunto dos valores regulares de T chamado de conjunto resolvente de T.
- $\sigma(T) = \mathbb{K} - \rho(T)$ é chamado de espectro de T.

E um espaço de Banach $\Rightarrow \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ (T - \lambda I) \text{ é bijetora}\}$

Exemplo

O operador $T \in \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ definido por

$$T((a_n)_n) = (0, a_1, a_2, \ldots)$$

para todo $(a_n)_n \in \ell_2$ não possui autovalores. Além disso, T é injetora porém não é bijetora. Portanto $0 \in \sigma(T)$ e não é autovalor.

Teorema

Sejam E um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, E)$. Então o espectro de T é um compacto de $\mathbb{K}$. Além disso,

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

Um operador $T : E \longrightarrow F$ entre espaços normados é dito compacto quando satisfaz uma (e, portanto, todas) das afirmações a seguir:

- $\overline{T(B_E)}$ é compacto em F;
- $\overline{T(A)}$ é compacto em F para todo limitado A em E;
- Para toda sequência limitada $(x_n)_n$ em E, a sequência $\left(T(x_n)\right)_n$ tem subsequência convergente em F.

Operadores Integrais são compactos!
$K : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e $T : C[a, b] \longrightarrow C[c, d]$ definido por

$$T(f)(t) = \int_a^b K(s, t) f(s)\, ds$$

para todo $t \in [c, d]$. K é chamada de núcleo do operador integral T.

Teoria Espectral de Operadores Compactos

Proposição

Sejam E um espaço de Banach, $T : E \longrightarrow E$ um operador compacto e $\lambda \neq 0$. Então

(a) $V_\lambda = \ker(T - \lambda I)$ tem dimensão finita.

(b) $(T - \lambda I)(E)$ é fechado em E.

(c) $(T - \lambda I)$ é injetora se, e somente se, é sobrejetora.

Teorema Espectral para Operadores Compactos

O espectro de um operador compacto $T : E \longrightarrow E$ em um espaço de Banach E é enumerável, podendo ser finito, e o único ponto de acumulação possível é o zero.

Sejam H um espaço de Hilbert (complexo) e $T \in \mathcal{L}(H, H)$. Dizemos T é autoadjunto quando satisfaz

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$$

para todos $x, y \in H$.

Proposição

Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H, H)$ um operador autoadjunto. Então

$$\|T\| = \sup\{|\langle T(x), x\rangle| \,;\, \|x\| = 1\}.$$

Proposição

Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H, H)$ um operador autoadjunto. Então:

(a) Os autovalores de T são números reais.

(b) Se λ e μ são autovalores distintos de T, então $V_\lambda \perp V\mu$.

Teorema

Seja H um espaço de Hilbert. O espectro $\sigma(T)$ de um operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(H, H)$ é real.

Proposição

Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H, H)$ um operador não-nulo, compacto e autoadjunto. Então $\|T\|$ ou $-\|T\|$ é um autovalor de T associado ao qual existe um autovetor $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$ e $|\langle T(x), x\rangle| = \|T\|$.

Corolário

Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H, H)$ um operado compacto e autoadjunto. Então:

(a) $\sigma(T) \neq \emptyset$.

(b) Se $\sigma(T) = \{0\}$, então $T = 0$.

Decomposição Espectral de Operadores Compactos e Autoadjuntos

Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H, H)$ um operador compacto e autoadjunto. Então H admite um sistema ortonormal completo formado por autovetores de T. Mais ainda, existem sequências (finitas ou infinitas) de autovalores $(\lambda_n)_n$ de T e de vetores $(v_n)_n$ tais que cada v_n é autovetor associado a λ_n e

$$T(x) = \sum_n \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n.$$

Referências

Bibliografia

- G. Botelho, D. Pellegrino & E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, Textos Universitários, SBM, 2012
- J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Graduate texts in mathematics 96, Springer, 1990.

email: alexpereira@id.uff.br

OBRIGADO!!!