CURSO DE ESCOAMENTOS
MULTIFÁSICOS

ESCOAMENTO EM CANAL - Modelos 1D

Preparado por: Leon Lima e Gustavo Anjos
5 de Agosto de 2015

Resumo. Este texto apresenta os pontos principais da modelagem matemática de escoamento incompressível, desenvolvido, em regimes laminar e turbulento, permanente e transiente, em canal aberto. Conceitos básicos de turbulência são sucintamente apresentados. Além disso, a discretização das equações de escoamento em canal 1D utilizando o método das diferenças finitas e o método de elementos finitos é apresenta para os perfis laminar e turbulento.

Conteúdo

1 PERFIL LAMINAR

1.1 Regime laminar permanente

Considere as componentes x e y das equações de Navier Stokes para escoamento incompressível (com viscosidade constante[1] e sem termo das forças de corpo):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{1b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

Para o regime permanente do escoamento, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$.

Suponha também que o escoamento seja desenvolvido, isto é:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

o que, devido a conservação de massa Eq. (2), implica em:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

Esse resultado significa que $v =$ constante ao longo de qualquer seção do canal. Mais do que isso: por causa das condições de contorno de não deslizamento, $v = 0$, em todo o domínio do escoamento.

Temos portanto:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5a}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{5b}$$

A condição de que a derivada parcial da pressão em relação a y seja nula significa que $p = p(x)$, ou seja, o campo de pressão não depende da coordenada y. Este resultado significa que o escoamento incompressível, desenvolvido e estacionário em um canal cujos fluxos na direção z são irrelevantes é modelado por

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{6}$$

Uma vez que a pressão depende apenas de x e a velocidade u depende apenas de y, podemos concluir que a pressão depende linearmente de x, de maneira que $\partial p/\partial x$ é constante. Dado um gradiente de pressão, a equação 6 se torna uma EDO homogênea de segunda ordem, cuja solução é o perfil laminar do escoamento com

[1] Para um escoamento isotérmico, a hipótese de viscosidade constante é muito realista, uma vez que, embora ela dependa também da pressão do fluido (além da temperatura), as variações com a pressão são extremamente baixas.

as características citadas, expresso por:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y^2 + C_1 y + C_2 \tag{7}$$

A Eq.(7) fornece a solução geral do problema representado pela Eq. (6). As condições de contorno definem a natureza do problema. Tratamos aqui o caso particular de não-escorregamento de partículas em contato com as paredes inferior $y = 0$ e superior $y = L$. Com isso, as condições de contorno para velocidade se escrevem:

$$u(y = 0) = u(0) = 0 \tag{8}$$
$$u(y = L) = u(L) = 0 \tag{9}$$

Os coeficientes C_1 e C_2 da Eq. (7) podem ser encontrados através da imposição das condições de contorno, definindo então a solução particular do problema:

$$C_1 = \frac{u(L) - u(0)}{L} - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}L \tag{10}$$
$$C_2 = u(0) \tag{11}$$

onde L é a largura do canal. Se $u(0) = u(L) = 0$, obtemos:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(y^2 - Ly\right) \tag{12}$$

Para o problema do canal, a velocidade U é máxima no centro $y = L/2$. Considere $u(y = L/2) = U$. Para o perfil dado pela equação 12, temos portanto que:

$$U = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(-\frac{L^2}{4}\right) \tag{13}$$

o que resulta em:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -8\frac{\mu U}{L^2} \tag{14}$$

Definindo o número de Reynolds como $\mathrm{Re} = UL\rho/\mu$, obtemos

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -8\frac{\mu^2\,\mathrm{Re}}{\rho L^3} \tag{15}$$

1.2 Regime laminar transiente

O regime transiente do mesmo escoamento pode ser representado por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{16}$$

Note que agora a equação depende da densidade ρ do fluido. De fato, para o regime transiente, a variação do perfil de velocidade com o tempo deve ser influenciada pela inércia do fluido, convergindo, no entanto, para um valor comum para qualquer valor de ρ. Note ainda que a pressão agora é também função do tempo, isto é, $p = p(x,t)$ e seu gradiente não pode mais ser calculado pela expressão 15.

2 PERFIL TURBULENTO

Para números de Reynolds acima de um certo limite[2], eventuais perturbações introduzidas ao escoamento podem gerar oscilações cujas amplitudes cresçam monotonicamente, tornando-o instável hidrodinamicamente e convertendo o regime laminar em turbulento. Escoamentos turbulentos são caracterizados por:

- alto grau de mistura
- riqueza de escalas
- imprevisibilidade

Osborne Reynolds introduziu a abordagem estatística ao estudo de escoamentos turbulentos em 1895 [7], segundo a qual o escoamento médio é resolvido. Para escoamentos quase estacionários, médias temporais podem ser usadas [3]. Matematicamente, o conceito introduzido por Reynolds consistia na média das equações de Navier-Stokes, cujo resultado são as equações RANS – *Reynolds Averaged Navier-Stokes*. Para escoamentos incompressíveis, elas são dadas por

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\,\nabla\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\nabla\,\mathrm{p} + \nu\nabla^2\mathbf{v} - \,\nabla\cdot\overline{\tilde{\mathbf{v}}\otimes\tilde{\mathbf{v}}} \tag{17}$$

Expandindo em coordenadas cartesianas temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{\tilde{u}\tilde{u}} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{\tilde{u}\tilde{v}} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{\tilde{u}\tilde{w}}\right) && \text{(18a)}\\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{\tilde{v}\tilde{u}} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{\tilde{v}\tilde{v}} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{\tilde{v}\tilde{w}}\right) && \text{(18b)}\\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{\tilde{w}\tilde{u}} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{\tilde{w}\tilde{v}} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{\tilde{w}\tilde{w}}\right) && \text{(18c)}
\end{aligned}$$

É importante notar que o campo de velocidade $\mathbf{v}$ e suas componentes, bem como o campo de pressão p, expressam aqui os respectivos valores médios, enquanto que o campo $\tilde{\mathbf{v}}$ e suas componentes representam as flutuações em torno dos valores médios, conforme a decomposição de Reynolds.

A dissipação introduzida pelos termos não-lineares de flutuação pode ser interpretada como um campo de tensão adicional atuando no escoamento, representado pelo tensor de tensões turbulentas dado por $\tau_t = -\rho\overline{\tilde{\mathbf{v}}\otimes\tilde{\mathbf{v}}}$, cujo divergente é

$$\nabla\cdot\tau_t = -\rho\,\nabla\cdot\overline{\tilde{\mathbf{v}}\otimes\tilde{\mathbf{v}}} \tag{19}$$

A equação 17 pode portanto ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\,\nabla\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\nabla\,\mathrm{p} + \frac{1}{\rho}\,\nabla\cdot\,(\mu\,\nabla\,\mathbf{v} + \tau_{\mathrm{t}}) \tag{20}$$

[2] Reynolds observou em experimento os regimes pelos quais um escoamento pode passar e quais os parâmetros influenciavam na transição. Suas conclusões em cima desse trabalho foram publicadas em 1883[6, 2]

Esta formulação introduz novas variáveis ao modelo, indeterminando o sistema de equações. A estratégia clássica de fechamento do sistema é a aplicação da hipótese de Boussinesq, proposta em 1877[3][3], segundo a qual os processos de difusão da quantidade de movimento molecular e turbulento são análogos. Matematicamente, isso equivale a

$$\tau_t = \mu_t \nabla \mathbf{v} \tag{21}$$

onde μ_t é dita viscosidade turbulenta, ou viscosidade de Boussinesq. É mais conveniente agora nos referirmos à viscosidade molecular μ_m. No caso da viscosidade cinética temos portanto ν_t e ν_m. Para a maioria dos números de Reynolds, ν_t é algumas ordens de grandeza superior a ν_m, ou seja, as dissipações turbulentas são muito maiores do que as dissipações viscosas. Introduzindo o conceito de viscosidade turbulenta na equação 20, obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \mathrm{p} + \nabla \cdot \left[(\nu_\mathrm{m} + \nu_\mathrm{t}) \nabla \mathbf{v} \right] \tag{22}$$

A viscosidade adicional μ_t pode ser interpretada como um acréscimo dos efeitos de dissipação ao escoamento, e deve estar associada às características do escoamento.

Para o escoamento desenvolvido no canal, a equação 22 se reduz a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu_m + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \tag{23}$$

2.1 Camada limite turbulenta

A região do escoamento próxima à parede passa por transições importantes até chegar ao escoamento principal[4]. Essa região é a camada limite do escoamento. É bem aceito que a camada limite possui duas regiões distintas: uma adjacente à parede, na qual os efeitos viscosos predominam – subcamada viscosa – e uma seguinte na qual os efeitos turbulentos são mais importantes – subcamada turbulenta. Cada uma delas possui um perfil de velocidade diferente. Essa composição é conhecida como a estrutura assintótica da camada limite turbulenta.

Na subcamada viscosa, a condição do escoamento pode ser descrita por

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{24}$$

Após integração, chegamos a

$$u = \frac{Cy}{\mu} \tag{25}$$

Tendo em vista que a tensão cisalhante τ_w na parede é

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{26}$$

temos que

$$u = \frac{\tau_w y}{\mu} \tag{27}$$

[3]O artigo de Reynolds propondo a decomposição dos campos em parcelas média e flutuante e dando origem ao hoje chamado tensor de Reynolds foi publicado somente em 1895. O que havia como base de conhecimento para Boussinesq fazer essa proposta em 1877?

[4]A expressão em inglês para o escoamento principal seria “bulk flow”.

Finalmente, introduzindo uma velocidade u_τ, denominada velocidade de atrito, definida por

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \tag{28}$$

podemos adimensionalizar a equação 27 definindo

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \tag{29a}$$
$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} \tag{29b}$$

De tal forma que, para a subcamada viscosa, temos

$$u^+ = y^+ \tag{30}$$

Para a subcamada turbulenta, é necessária uma avaliação das ordens de grandeza dos termos importantes, utilizando o conceito de comprimento de mistura. Freire et al. [3] descrevem o desenvolvimento da expressão para a região turbulenta da camada limite. Aqui, vamos nos limitar a dizer que o perfil de velocidade na subcamada turbulenta é expresso por

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \tag{31}$$

onde κ é a constante de Von Kármán, sendo normalmente $\kappa = 0,41$, e $B = 5$ é um valor constante bem aceito para escoamentos em parede, baseado em resultados experimentais. A figura 3.13 de Freire et al. [3] apresenta um conjunto de perfis para a camada limite turbulenta obtidos de experimentos diversos.

2.2 Comprimento de mistura de Prandtl

A viscosidade turbulenta ν_t pode ser determinada através de modelo algébrico ou de modelo a uma equação diferencial ou de modelo a duas equações diferenciais (neste se enquadram os modelos κ-ϵ e κ-ω).

O modelo algébrico é baseado no conceito de comprimento de mistura, concebido por Ludwig Prandtl (ver Freire et al. [3], capítulo 3), que define o quanto a partícula deve se afastar para perder sua identidade e misturar-se com as outras. A viscosidade turbulenta é então definida por:

$$\nu_t = l_c^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \tag{32}$$

onde l_c é o comprimento de mistura. Para escoamentos próximos a paredes sólidas (caso do escoamento no canal),

$$l_c = \kappa y, \text{ para } y \leq \delta \tag{33a}$$
$$l_c = \kappa \delta, \text{ para } y > \delta \tag{33b}$$

onde κ é a constante de Von Kármán, e δ é a espessura da camada limite.

Com essa definição, a variação do comprimento de mistura passa por uma descontinuidade da parede para o interior da camada limite. O comprimento de mistura pode ser calculado ainda com a aplicação de uma função de amortecimento. Normalmente é usada a função de amortecimento de Van Driest. Neste caso,

$$l_c = D\kappa y, \text{ para } y \leq \delta \tag{34}$$

com

$$D = 1 - \exp\left(-y\frac{u_\tau}{A\nu}\right) \tag{35}$$

onde $A = 26$.

Cabe ressaltar que a modelagem do escoamento através da introdução da viscosidade turbulenta é uma das formas de solução do Problema de Fechamento dos modelos RANS e é dito modelo de turbulência de primeira ordem. Existem modelos nos quais as componentes do tensor de Reynolds são decompostas, dando a origem a termos com produtos de três componentes de velocidade, classificados como modelos de turbulência de segunda ordem. Um outro ponto é que, no caso particular do escoamento no canal, considerando que ele possua largura L, o comprimento de mistura é dado por

$$l_c = \kappa y, \text{ para } y \leq \delta \tag{36a}$$

$$l_c = \kappa \delta, \text{ para } \delta < y < L - \delta \tag{36b}$$

$$l_c = \kappa(L - y), \text{ para } y \geq (L - \delta) \tag{36c}$$

3 MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

3.1 Laminar permanente

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{37}$$

A discretização em diferenças finitas unidimensional é feita para um ponto genérico de malha i e distância entre nós uniforme igual a Δy, a discretização da equação 6 em diferenças finitas centradas é expressa por:

$$\frac{\nu_{i+1/2}(u_{i+1} - u_i) - \nu_{i-1/2}(u_i - u_{i-1})}{\Delta y^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{38}$$

Note que a viscosidade cinemática $\nu = \mu/\rho$ é discretizada no ponto médio dos segmentos da malha em diferenças finitas $i + 1/2$ e $i - 1/2$, tomando-se então $\nu_{i+1/2} = (\nu_i + \nu_{i+1})/2$ e $\nu_{i-1/2} = (\nu_{i-1} + \nu_i)/2$.

O sistema de equações resultante é linear, e pode ser representado matricialmente por

$$\mathbf{Au} = \mathbf{b} \tag{39}$$

onde, considerando que a malha possua m pontos nodais,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \dots & A_{m,m} \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (42)$$

Para uma linha i e coluna j genéricas, a montagem (*assembling*) da matriz do termo difusivo $\mathbf{A}$ da equação em regime permanente é feita organizando-se os coeficientes de u_{i-1}, u_i e u_{i+1} em colunas dentro de um laço (*loop*) do tipo

- coluna $j-1$:

$$A_{i,j-1} = \frac{\nu_{i-1/2}}{\Delta y^2} \quad (43)$$

- coluna j:

$$A_{i,j} = \frac{-\nu_{i+1/2} - \nu_{i-1/2}}{\Delta y^2} \quad (44)$$

- coluna $j+1$:

$$A_{i,j+1} = \frac{\nu_{i+1/2}}{\Delta y^2} \quad (45)$$

Para a montagem do vetor do lado direto $\mathbf{b}$:

- linha i:

$$b_i = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad (46)$$

A solução do sistema linear 39 fornece o perfil laminar permanente de velocidade no canal.

3.2 Laminar transiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (47)$$

A discretização em diferenças finitas unidimensional ocorre da mesma forma que no caso de escoamento laminar estacionário, porém com a inclusão da derivada transiente ($\partial/\partial t$) na equação. Com isso, para um ponto genérico de malha i, para passo de tempo Δt e distância entre nós uniforme igual a Δy, a discretização da equação 16 em diferenças finitas centradas é expressa por:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad &+ \quad \alpha \frac{\nu_{i+1/2}(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) - \nu_{i-1/2}(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})}{\Delta y^2} + \\ &+ \quad (1-\alpha)\frac{\nu_{i+1/2}(u_{i+1}^{n} - u_i^{n}) - \nu_{i-1/2}(u_i^{n} - u_{i-1}^{n})}{\Delta y^2} \end{aligned} \quad (48)$$

onde α representa uma variável limitada por $0 \leq \alpha \leq 1$ que ajusta o esquema discreto no tempo em explícito $\alpha = 0$, implícito $\alpha = 1$ e de segunda ordem do tipo Crank-Nicholson para $\alpha = 1/2$. A viscosidade cinemática

$\nu = \mu/\rho$ é discretizada no ponto médio dos segmentos da malha em diferenças finitas $i+1/2$ e $i-1/2$, tomando-se então $\nu_{i+1/2} = (\nu_i + \nu_{i+1})/2$ e $\nu_{i-1/2} = (\nu_{i-1} + \nu_i)/2$.

Para o *assembling* da matriz do termo difusivo $\mathbf{A}$ da equação em regime transiente, propõe-se um esquema dentro de um *loop* do tipo (para linha i):

- coluna $j-1$:
$$A_{i,j-1} = -\alpha \frac{\nu_{i-1/2}}{\Delta y} \tag{49}$$
- coluna j:
$$A_{i,j} = \frac{1}{\Delta t} + \alpha \frac{\nu_{i+1/2}}{\Delta y} + \alpha \frac{\nu_{i-1/2}}{\Delta y} \tag{50}$$
- coluna $j+1$:
$$A_{i,j+1} = -\alpha \frac{\nu_{i+1/2}}{\Delta y} \tag{51}$$

Para a montagem do vetor do lado direto:

- linha i:
$$b_i = \frac{u_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + (1-\alpha)\frac{\nu_{i+1/2}(u_{i+1}^n - u_i^n) - \nu_{i-1/2}(u_i^n - u_{i-1}^n)}{\Delta y^2} \tag{52}$$

A adoção do esquema completamente explícito ($\alpha = 0$) impõe um limite quanto ao valor do incremento de tempo Δt, acima do qual a formulação se torna numericamente instável. Este limite pode ser determinado a partir do método de análise de Von Neumann. O resultado da análise considerando viscosidade constante exige que

$$\Delta t \leq 2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4\nu}{\Delta y^2}\right)^{-1} \tag{53}$$

A solução do sistema linear resultante fornece o campo laminar de velocidade para o passo de tempo n.

3.3 Condições de Contorno

Para que o problema tenha solução única, condições de contorno devem ser impostas. No escoamento em canal, é razoável supor condição de não deslizamento nas paredes, i.e.,

$$u(y=0) = 0 \tag{54a}$$
$$u(y=L) = 0 \tag{54b}$$

No contexto do problema discreto, com malha deslocada, esta condição exige que

$$u_1 + u_2 = 0 \tag{55a}$$
$$u_m + u_{m-1} = 0 \tag{55b}$$

De tal forma que

$$
\begin{aligned}
A_{1,1} &= 1 && (56a)\\
A_{1,2} &= 1 && (56b)\\
A_{m,m} &= 1 && (56c)\\
A_{m,m-1} &= 1 && (56d)\\
b_1 &= 0 && (56e)\\
b_m &= 0 && (56f)
\end{aligned}
$$

4 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

No método de elementos finitos, o domínio é divido em um número de sub-domínios finitos conhecidos como elementos. Uma simples função é utilizada para caracterizar a variação de cada variável dentro do elemento. Esta funcão recebe o nome *função de forma*. A justaposição da variação das variáveis em cada elemento é usada para descrever todo o campo do fluido.

Podem-se considerar como caracterísicas principais do método dois conceitos:

- a utilização da forma fraca, ou variacional, do problema;
- solução aproximada da equação variacional através do uso de funções dos elementos finitos.

A forma fraca é resultado da ponderação da equação original em sua forma forte (forma diferencial inicial, não alterada) em um domínio qualquer. É necessário encontrar uma solução tentativa u que satisfaça a seguinte expressão:

$$\int_\Omega (\frac{du}{dx})^2\, dx < \infty \tag{57}$$

Uma função que satisfaça a Eq. (57) é chamda de ***função*** H^1. Uma outra classe de funções é necessária, são as chamadas ***funções peso***, que são funções do tipo H^1 com uma característica a mais. Para o caso de problema de Dirichlet, no contorno do domínio elas são nulas. Utilizando estas definições, pode-se provar [4] que a forma forte da equação de difusão em 1D

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}\right) - f = 0 \qquad \text{em} \qquad \Omega \tag{58}$$

$$u = u_1 \qquad \text{em}\Gamma_1 \tag{59}$$

$$u = u_2 \qquad \text{em}\Gamma_2 \tag{60}$$

é equivalente à sua forma fraca representada pela Eq. (60) depois de passar por integração por partes do termo difusivo: **Achar** $u \in H^1_\Gamma$ **tal que, para qualquer** $W \in H^1_0$

$$\int_\Omega w\left[k\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) - f\right] = 0 \longrightarrow \int_\Omega k\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}d\Omega = \int_\Omega wf\, d\Omega + c.c. \tag{61}$$

w representa a função peso e Ω representa o domínio do problema, que para esse caso-exemplo está contido no intervalo fechado, $\Omega \in [0, 1]$.

Até esse momento não houve quaisquer aproximações e o problema ainda não foi discretizado. A seguir, através do método de Galerkin serão obtidas soluções aproximadas para a equação diferencial em questão.

Considerando Ω o domínio do problema e Ω^e o domínio do elemento, então:

$$\bigcup_{n=1}^{N} \Omega^e = \Omega; \qquad \Omega^i \cap \Omega^j = 0; \qquad i \neq j \tag{62}$$

sendo a malha formada por N elementos que podem ter dimensões características diferentes. Considere ainda que para cada elemento da malha está definida uma família de funções

$$N^e = \left[N_1^e \cdots N_S^e\right] \tag{63}$$

onde S representa o número de nós que definem o elemento. Para um elemento linear (Fig. 1a), $S = 2$, já para um elemento quadrático 1D (Fig. .1b), $S = 3$.

Figura 1: Representação de elementos unidimensionais linear à esquerda e quadrático à direita.

A diferença entre os dois elementos está no grau do polinômio interpolador. Para o elemento linear, a função interpoladora apresenta grau 1 enquanto que no elemento quadrático, a função interpoladora é de grau 2. Elementos de baixa ordem apresentam custo computacional baixo comparado aos de mais alta ordem, entretanto não oferecem a mesma precisão numérica. Considerando que as funções interpolação são da forma

$$u^e(x) = \sum_n u_j(x) N_j^e \tag{64}$$

$$w^e(x) = \sum_n w_i(x) N_i^e \tag{65}$$

e aplicando-se o método de Galerkin na forma fraca da equação de difusão, chega-se a:

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \sum_{i,j\in e} \alpha \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} u_j d\Omega = \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_{i\in e} N_i^e f \, d\Omega + \text{c.c.} \tag{66}$$

rearranjando os termos com somatório dentro da integral, a equação define um sistema linear do tipo

$$\mathbf{K}u = \mathbf{f} \tag{67}$$

onde u tem como componentes os valores nodais u_n, a matriz $\mathbf{K}$ e o vetor $\mathbf{f}$ representados por uma montagem especial conhecida com *Assembling*:

$$\mathbf{K} = \mathop{\mathcal{A}}_{e=1}^{nele} k^e; \quad \mathbf{f} = \mathop{\mathcal{A}}_{e=1}^{nele} f^e \tag{68}$$

e $\mathcal{A}$ é o operador montagem. A matriz k^e e o vetor f^e são definidos por

$$k_{i,j} = \int_{\Omega^e} \alpha \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} d\Omega \qquad i, j = 2 \tag{69}$$

$$f_i = \int_{\Omega^e} N_i^e f \, d\Omega \qquad i = 2 \tag{70}$$

As integrais acima podem ser resolvidas analiticamente ou através de métodos numéricos. Em elementos finitos, o método numérico mais popular é a quadratura gaussiana, porém, para o caso unidimensional, o resultado analítico dessas integrais é simples. Dependendo do tipo de função de forma escolhido, o erro de aproximação diminui. Para este caso, considera-se o elemento linear representado por:

$$N_i = 1 - \frac{x - x_i}{h} \tag{71}$$

$$N_j = \frac{x - x_j}{h} \tag{72}$$

onde h representa o tamanho característico do elemento, obtem-se:

$$k^e = \frac{\alpha}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad f^e = h \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Realizando o procedimento de *Assembling* chega-se ao sistema linear (Eq. 67):

Figura 2: Sistema linear resultante da discretização pelo método de elementos finitos

e a solução do sistema linear fornece os valores da incógnita u nos nós dos elementos da malha.

A utilização do método de elementos finitos vem se tornando cada vez mais frequente na indústria, na educação e na pesquisa. A reutilização de código na forma de módulos e bibliotecas é uma grande aliada ao desenvolvimento de grandes projetos, uma vez definida a base do código (montagem de matrizes e vetores, solução do sitema linear), uma mudança na geometria e nas condições de contorno do problema altera o tipo de problema físico estudado, representando aproximadamente 10% de modificações no código numérico.

5 PARTÍCULAS

A equação de Basset-Boussinesq-Oseen (BBO) relaciona a taxa de variação de quantidade de movimento de uma partícula esférica rígida imersa num campo de velocidade de baixo número de Reynolds. Esta equação acopla o movimento de partículas ao portanto o escoamento por meio da transferência de quantidade de movimento linear. Esta equação modela a ação do fluido na partícula. Em processos reais, as partículas (fase dispersa) também exercem influência sobre o fluido (fase contínua). No entanto, a concentrações de partículas pode ser baixa tal que o efeito destas no fluido pode ser desprezado, de maneira que o acoplamento entre fluido e partícula se dá apenas no sentido do fluido para as partículas, constituindo um modelo do tipo (*one-way coupling*). Além disso, problemas como o transporte de sedimentos em grandes corpos aquáticos, dispersão partículas de poluição na atmosfera, entre outros, as escalas de comprimento das partículas são muito pequenas em relação às do escoamento da fase contínua. Nestes casos, o conceito de partículas pontuais pode ser empregado, segundo o qual a influência do volume no escoamento pode ser desconsiderada.

Dada a massa M de uma partícula pontual, com densidade ρ_p, diâmetro D e o campo de velocidade velocidade $\mathbf{v}_p$ (bidimensional), consideremos agora as seguintes três forças atuando na partícula: arrasto (*drag*, $\mathbf{F}_D$), sustentação (*lift*, $\mathbf{F}_L$) e força de "massa acrescida" (*added mass*, $\mathbf{F}_A M$), definidas da seguinte forma arrasto $\mathbf{F}_D$:

$$\mathbf{F}_D = \frac{3\rho}{4D} C_D (\mathbf{u} - \mathbf{v}_p) \parallel \mathbf{u} - \mathbf{v}_p \parallel \tag{73}$$

sustentação $\mathbf{F}_L$:

$$\mathbf{F}_L = 1.61\sqrt{\mu\rho_p} D^2 \parallel \mathbf{u} - \mathbf{v}_p \parallel \frac{d\mathbf{u}}{dy} \left| \frac{du}{dy} \right|^{-0.5} \tag{74}$$

added mass $\mathbf{F}_{AM}$:

$$\mathbf{F}_{AM} = \rho \frac{\pi D^3}{12} \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_p - \mathbf{u}) \tag{75}$$

onde o vetor $\mathbf{u}$ é o campo de velocidade bidimensional do escoamento (o qual, no caso do canal, é tal que $\mathbf{u} = u\mathbf{i}$, i.e., a componente na direção y é nula). No termo da força de arrasto, C_D é o coeficiente de arrasto, definido por [5]

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{24}{Re_p}, \text{ para } \mathrm{Re}_p < 0,1 \\ C_D &= \frac{24}{Re_p}\left(1 + 0,14\,\mathrm{Re}_p^{0,7}\right), \text{ para } 0,1 \le \mathrm{Re}_p < 1000 \\ C_D &= 0,445, \text{ para } 1000 \le \mathrm{Re}_p < 350000 \end{aligned} \tag{76}$$

onde foi introduzido o número de Reynolds da partícula Re_p definido por

$$Re_p = \frac{\rho}{\mu} D \parallel \mathbf{u} - \mathbf{v}_p \parallel \tag{77}$$

Para estas três forças 73, 74 e 75, a equação BBO é expressa por

$$M\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{3\rho}{4D} C_D (\mathbf{u} - \mathbf{v}_p) \parallel \mathbf{u} - \mathbf{v}_p \parallel + 1.61\sqrt{\mu\rho_p} D^2 \parallel \mathbf{u} - \mathbf{v}_p \parallel \frac{d\mathbf{u}}{dy} \left| \frac{du}{dy} \right|^{-0.5} + \rho \frac{\pi D^3}{12} \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_p - \mathbf{u}) \tag{78}$$

cuja solução dentro do intervalo do passo de tempo fornece a velocidade $\mathbf{v}_p$ da partícula. O *tracking* da partícula pode então ser efetuado por meio do cálculo da posição com a velocidade $\mathbf{v}_p$.

Embora não seja o caso do escoamento em canal do qual trata o presente texto, cabe citar ainda a força exercida pelo campo gravitacional na partícula, $\mathbf{F}_G$, a qual resulta numa força de empuxo sobre a partícula dada por

gravidade $\mathbf{F}_G$:

$$\mathbf{F}_G = (\rho_p - \rho)\pi \frac{D^3}{6} \mathbf{g} \tag{79}$$

Outras forças podem ser incluídas no modelo do movimento da partícula, como influência de campo magnético, ou a força de Basset. Maiores detalhes podem ser obtidos de Crowe et al. [1].

6 TESTES

Uma implementação dos modelos descritos possibilitará os seguintes testes:

- Para um mesmo problema, integre a solução final ao longo do domínio espacial para duas resoluções de malha diferentes. Tente observar o efeito da dissipação numérica. Quanto menor o número de pontos, maior é a quantidade de informação perdida na aproximação das derivadas. Um escoamento mais dissipativo (ainda que falsamente) resultará em valores menores de $\int_0^L u dy$.
- Os perfis turbulentos são mais "achatados" do que os laminares, o que é possível de ser explicado a partir da definição do comprimento de mistura. Uma vez que a intensidade da turbulência é proporcional ao

número de Reynolds, é possível notar que o perfil se torna mais "achatado" para maiores números de Reynolds.

- A solução do perfil turbulento não representa o escoamento "real". De fato, uma vez que a solução das equações RANS fornece os campos médios, as flutuações do escoamento não são vistas pelos perfis obtidos da solução de 52.
- Tente reproduzir os perfis da camada limite turbulenta. Calcule a solução permanente do escoamento turbulento e tente observar as subcamadas viscosa e turbulenta.

Referências

[1] C.T. Crowe, J.D. Schwarzkopf, M. Sommerfeld, and Y. Tsuji. *Multiphase Flows with Droplets and Particles.* Taylor & Francis Group, Florida, 2012. ISBN 13:978-1-4398-4051-1.

[2] Peter A. Davidson, Yukio Kaneda, Keith Moffatt, and Katepalli R. Sreenivasan. *A Voyage Through Turbulence.* Cambridge University Press, 2011.

[3] Atila P. S. Freire, Philippe P. M. Menut, and Jian Su. *Turbulência.* ABCM - Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, 2002.

[4] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.* Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, New York, 1987. ISBN 9780486135021.

[5] R. H. Perry and D. W. Green. *Chemical Engineers' Handbook.* McGraw Hill, 1999.

[6] Osborne Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 174:935–982, 1883.

[7] Osborne Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 186:123–164, 1895.