



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Faculdade de Engenharia Mecânica

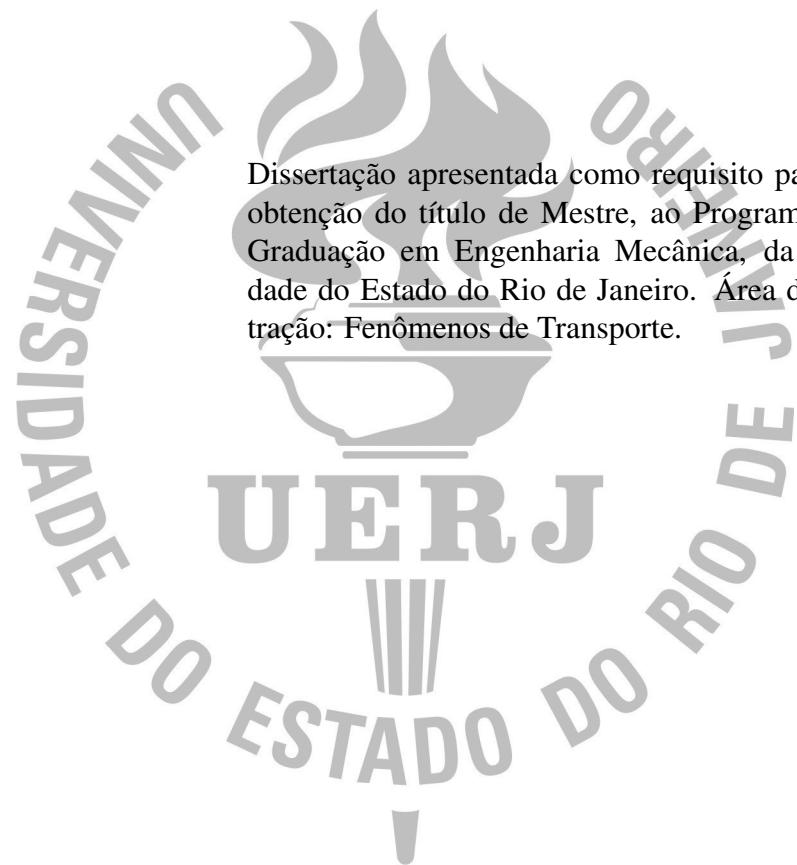
Leon Matos Ribeiro de Lima

**Desenvolvimento de Modelos 2D Para Simulação de
Escoamentos Ambientais**

Rio de Janeiro
2010

Leon Matos Ribeiro de Lima

Desenvolvimento de Modelos 2D Para Simulação de Escoamentos Ambientais



Orientador: Prof. Dr. Norberto Mangiavacchi

Rio de Janeiro
2008

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

E837

Matos, Leon.

Desenvolvimento de Modelos 2D Para Simulação de Escoamentos Ambientais / Leon Matos Ribeiro de Lima. – 2010.

106 f.: il.

Orientador: Norberto Mangiacacchi.

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia Mecânica.

Bibliografia: f. 96-99.

1. Escoamentos ambientais – Simulação numérica – Teses.
2. Dinâmica dos fluidos – Simulação numérica – Teses. I. Mangiacacchi, Norberto. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 627.03

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos a reprodução total ou parcial desta dissertação.

Assinatura

Data

Leon Matos Ribeiro de Lima

Desenvolvimento de Modelos 2D Para Simulação de Escoamentos Ambientais

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte.

Data da aprovação: ____/____/_____

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Norberto Mangiacacchi (Orientador)
Faculdade de Engenharia Mecânica da UERJ

Dr. Cássio Pereira Botelho Soares
Furnas Centrais Elétricas S.A.

Prof. Dr. João Flávio Vieira de Vasconcellos
IPRJ/UERJ

Prof. Dr. José da Rocha Miranda Pontes
COPPE/UFRJ

Prof. Dr. Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho
Instituto de Matemática e Estatística da UERJ

Dr. Ricardo Corrêa Martins
Instituto de Tecnologia Promon

Rio de Janeiro
2010

AGRADECIMENTOS

À Promon, que apostou neste projeto de mestrado e o apoiou financeira e tecnicamente. Agradeço especialmente ao engenheiro João Fontoura, por enriquecer este trabalho com sua experiência e conhecimento técnico. Sua dedicação no acompanhamento do trabalho e sua disposição em sempre mostrar o quanto ele é importante para a engenharia foram muito importantes.

Quero agradecer a Cássio Soares, por abrir as portas para que este e outros projetos de mestrado pudessem ser realizados, e por sempre valorizar cada pequeno passo meu.

Sou grato ao professor José Pontes, pela participação decisiva nas publicações produzidas, e por ser um dos maiores fãs deste projeto.

Ao professor Norberto, orientador não só deste trabalho, mas também de meus primeiros passos como engenheiro, quero agradecer imensamente e expressar minha admiração. Poucas pessoas de seu nível de competência têm sua humildade.

A meus amigos e companheiros de estudo Pedro, Hyun, Hugo e Manolo, *muchas gracias*. Com eles aprendi muito e compartilhei minhas lutas de mestrando. Obrigado Abrão, amigo desde a graduação e que, mesmo agora em Angola, continua próximo. Obrigado André, Cristiane, Jorge e Sonia, por me ensinarem tanto e pela companhia nestes anos de trabalho.

Agradeço profundamente a João Fernando, futuro sogro e segundo pai, que me deu conselhos valiosos e que, entre tantos outros gestos de carinho, me emprestou seu *laptop*, onde boa parte deste trabalho foi desenvolvida. Deixo também minha gratidão a Laurídice, futura sogra e segunda mãe, que tanto cuida de mim.

Agradeço e dedico este trabalho a minha mãe e meu pai, os melhores pais do mundo, e minha irmã, que serão sempre parte de tudo que fizer.

A Layla, meu presente de Deus, agradeço por ser minha maior motivação. Seu amor é inestimável. A ela dedico não só este trabalho, mas todo meu coração.

A Jesus, meu Senhor, agradeço por me abençoar através de todas estas pessoas. A Ele entrego minha vida. Obrigado, Pai.

RESUMO

MATOS, Leon. *Desenvolvimento de Modelos 2D Para Simulação de Escoamentos Ambientais*. Brasil. 2010.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

O trabalho apresentado nesta dissertação consiste na construção de um conjunto de módulos computacionais voltados para o estudo de escoamentos ambientais através de simulações numéricas utilizando os modelos 2DH e 2DB, que são modelos 2D integrados em uma terceira dimensão. Os modelos desenvolvidos são aplicáveis a problemas envolvendo escoamentos viscosos incompressíveis, com transporte de temperatura ou de massa, e estão acoplados a módulos para leitura e tratamento de dados topográficos, hidrográficos e de batimetria, tendo em vista que o estudo de escoamentos ambientais está fortemente associado a variáveis geográficas. O Método de Elementos Finitos é empregado para solução numérica do sistema de EDP's. Parte deste trabalho foi dedicada ao desenvolvimento de algoritmos de geração de malha, especialmente à geração da malhas bi-dimensionais.

O trabalho apresenta ainda a aplicação dos modelos desenvolvidos na simulação termo-hidráulica de dois problemas de escoamentos ambientais. Um consiste na análise da eficiência de troca térmica de estrutura para remoção do calor da água de resfriamento de uma usina termelétrica. O modelo 2DH foi empregado, utilizando geometrias diversas para o canal de resfriamento, verificando a influência da inserção de chicanas e do escoamento ao longo do rio, próximo do qual está localizada a usina. A outra aplicação consiste na simulação do escoamento vertical em um reservatório hipotético, porém baseado em dados de terreno reais. O objetivo das simulações, neste caso, era observar os efeitos da gravidade no escoamento e no transporte de temperatura, detectando, se fosse o caso, a formação de escoamento estratificado.

Palavras-chave: *Escoamentos ambientais, modelos 2D promediados, Método de Elementos Finitos, simulação eficiência de resfriamento, estratificação térmica.*

ABSTRACT

This work consists on the construction of a set of computational modules for the study of environmental flows, by numerical simulations employing the 2DH and 2DB models, which are 2D models with integration along a third dimension. The models are applicable to problems involving viscous incompressible flows, with temperature or mass transport, and are coupled to modules for reading and manipulating topological and hydrographic data, since the study of environmental flows is strongly related to geographic variables. The Finite Element Method is employed to solve the PDE's system. Part of this work was dedicated to develop two-dimensional mesh generation algorithms.

The work also presents the application of the developed models in the thermo-hydraulic simulation of two environmental flow problems. One consists in the analysis of heat exchange efficiency of a structure for heat removal of the cooling water of a thermoelectric power plant. The 2DH model was employed to simulate the flow and heat transport, using different geometries for the cooling channel. The other application is the simulation of a vertical flow problem in a hypothetical reservoir, based on real terrain data. The objective of the simulation, in this case, is the prediction of the impacts of gravity forces on the hydrodynamics and heat transport, identifying the possible formation of stratified flows.

Keywords: *Environmental flows, 2D averaged models, Finite Element Method, cooling efficiency simulation, thermal stratification.*

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| INTRODUÇÃO | 7 |
| Abordagem do problema | 8 |
| Este trabalho | 9 |
| Organização do texto | 10 |
| | |
| 1 MODELO MATEMÁTICO | 12 |
| 1.1 Equação da continuidade | 13 |
| 1.2 Equação de conservação de quantidade de movimento | 13 |
| 1.2.1 Fluido newtoniano | 14 |
| 1.2.2 Equação de Navier-Stokes | 14 |
| 1.3 Equação de transporte de escalar | 15 |
| 1.4 Equações 2DH | 16 |
| 1.4.1 Integração vertical da equação da continuidade | 17 |
| 1.4.2 Integração vertical da equação de quantidade de movimento | 18 |
| 1.4.3 Integração vertical da equação de transporte de escalar | 22 |
| 1.4.4 Modelo de trocas térmicas | 23 |
| 1.5 Equações 2DB | 24 |
| 1.5.1 Integração transversal da equação da continuidade | 26 |
| 1.5.2 Integração transversal da equação de quantidade de movimento | 27 |
| 1.5.3 Integração transversal da equação de transporte de escalar | 28 |
| 1.5.4 Hipótese de Boussinesq | 29 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| 2 | MODELO NUMÉRICO | 30 |
| 2.1 | Formulação em resíduos ponderados | 30 |
| 2.1.1 | Forma fraca das equações | 32 |
| 2.2 | Método de Galerkin | 33 |
| 2.3 | Método de Elementos Finitos | 35 |
| 2.3.1 | Elementos de malha | 39 |
| 2.4 | Método Semi-Lagrangiano | 40 |
| 2.5 | Sistema algébrico | 41 |
| 2.5.1 | Método da projeção | 42 |
| 2.5.2 | Estrutura dos sistemas | 44 |
| 3 | DADOS GEOGRÁFICOS | 48 |
| 3.1 | Dados de topografia | 48 |
| 3.2 | Dados de hidrografia | 50 |
| 4 | GERAÇÃO DE MALHA | 52 |
| 4.1 | Malha 2DH | 52 |
| 4.2 | Malha 2DB | 53 |
| 4.2.1 | Cálculo das larguras | 55 |
| 5 | VALIDAÇÃO DO CÓDIGO | 56 |
| 5.1 | Validação experimental | 56 |
| 5.2 | Validação física | 57 |
| 6 | SIMULAÇÕES 2DH | 61 |
| 6.1 | A importância de usinas termelétricas no Brasil | 61 |
| 6.2 | Problema estudado | 62 |
| 6.3 | Balanço térmico unidimensional | 63 |
| 6.4 | Análise termo-hidráulica | 65 |
| 6.4.1 | Primeiro projeto de canal | 66 |
| 6.4.2 | Segundo projeto de canal | 73 |
| 6.5 | Conclusões | 80 |
| 7 | SIMULAÇÕES 2DB | 81 |
| 7.1 | Pré-processamento | 81 |

| | | |
|--------------------|---------------------------------|-----------|
| 7.2 | Simulação | 85 |
| 8 | CONCLUSÕES | 89 |
| 8.1 | Modelo 2DH | 90 |
| 8.2 | Modelo 2DB | 90 |
| 8.3 | Trabalhos futuros | 90 |
| 8.3.1 | Do ponto de vista físico | 91 |
| 8.3.2 | Do ponto de vista numérico | 91 |
| 8.3.3 | Do ponto de vista computacional | 91 |
| 8.4 | Publicações geradas | 91 |
| REFERÊNCIAS | | 92 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Plano de cálculo da largura do reservatório | 25 |
| 2.1 | Elemento mini. Os nós menores, pintados de preto, são de velocidade, e os nós maiores, em branco, são de pressão. | 39 |
| 2.2 | Matriz de rigidez do sistema linear associado ao campo de velocidade. . . | 44 |
| 2.3 | Matriz de rigidez do sistema linear associado ao campo de pressão. . . . | 45 |
| 2.4 | Matriz de rigidez do sistema linear associado ao campo escalar de temperatura. | 45 |
| 3.1 | <i>Shapefile</i> completo (primeira etapa no tratamento dos dados de terreno) visualizado através da interface gráfica construída. | 49 |
| 3.2 | <i>Shapefile</i> após corte no plano horizontal (<i>xy</i>). | 49 |
| 3.3 | <i>Shapefile</i> após corte por nível. | 50 |
| 3.4 | Mapa de hidrografia completo referente à região mostrada na figura 3.1. . | 50 |
| 3.5 | Direção da malha 2DB selecionada a partir do mapa de hidrografia. . . | 51 |
| 4.1 | Nuvem de pontos e triangulação. | 52 |
| 4.2 | Malha após eliminação de triângulos fora do domínio. | 53 |
| 4.3 | Projeção da calha no fundo da malha 2DH. | 54 |
| 4.4 | Nuvem de pontos da malha 2DB destacando um dos palitos. | 54 |
| 4.5 | Fundo da malha 2DB destacando inserção de ponto em região inclinada do fundo. | 55 |
| 4.6 | Malhas 2DB e 2DH no mesmo sistema de coordenadas. | 55 |
| 5.1 | Flume usado no experimento. A imagem retrata o início do experimento. . | 56 |
| 5.2 | Validação experimental do código. As figuras apresentam a comparação entre os resultados das simulações experimental e numérica do problema de correntes de gravidade proposto. Para cada tempo, o <i>frame</i> superior é uma imagem do flume no qual correu o experimento, e o <i>frame</i> inferior é o resultado numérico obtido para o mesmo tempo. | 57 |

| | | |
|------|---|----|
| 5.3 | Canal com largura variável (área em azul, vista superior). A largura na entrada é de 0,50m, e, na saída, 0,75m. O aumento da largura começa a partir de 1,35m de comprimento, a partir da entrada, e para a 2,70m da entrada. | 58 |
| 5.4 | Vista lateral do canal. A vazão de entrada se dá pela extremidade esquerda do canal. | 58 |
| 5.5 | Distribuição do escalar transportado a 15s. | 59 |
| 5.6 | Distribuição do escalar transportado a 30s. | 59 |
| 5.7 | Distribuição do escalar transportado a 45s. | 59 |
| 5.8 | Distribuição da componente horizontal da velocidade a 45s. | 59 |
| 5.9 | Variação da velocidade ao longo do canal. | 59 |
| 5.10 | Variação da vazão em função do tempo para as seções de controle. As curvas apresentam, qualitativamente, o mesmo comportamento para todas as seções, exceto para a entrada. | 60 |
| 6.1 | Canal1. | 62 |
| 6.2 | Canal1 dividido em trechos. | 63 |
| 6.3 | Queda de temperatura em função da temperatura do ar, assumindo vento de 20Km/h. | 64 |
| 6.4 | Queda de temperatura em função do vento, assumindo temperatura do ar a 25°C. | 64 |
| 6.5 | Queda de temperatura em função do vento, utilizando o modelo SisBAHIA, para temperaturas do ar a 20 e 30°C. | 65 |
| 6.6 | Modelo de terreno gerado para o estudo do canal de resfriamento da termelétrica. À esquerda, é mostrada uma visualização da superfície da malha; à direita é mostrada a malha. | 66 |
| 6.7 | Detalhe da região do canal. | 67 |
| 6.8 | Detalhe da região onde a parte referente ao canal é acoplada à referente ao estuário (região do descarte para o rio). | 67 |
| 6.9 | Indicação das regiões com distintas condições de contorno. | 68 |
| 6.10 | Campo de temperatura para os seguintes tempos t : (a) $t = 43\text{min}$; (b) $t = 1h26\text{min}$; (c) $t = 2h10\text{min}$; (d) $t = 2h54\text{min}$; (e) $t = 3h37\text{min}$; (f) $t = 7h14\text{min}$; (g) $t = 10h52\text{min}$; (h) $t = 14h28\text{min}$; (i) $t = 18h06\text{min}$; (j) $t = 36h12\text{min}$ | 72 |
| 6.11 | Campo de temperatura a $t = 180\text{h}$ | 72 |

| | | |
|------|--|----|
| 6.12 | Temperaturas máximas a 100m da saída do canal e na zona de captação em função do número de horas simuladas. | 73 |
| 6.13 | Canal de resfriamento, segundo projeto | 74 |
| 6.14 | Canal de resfriamento – segundo projeto. Destaque na região do canal . . | 74 |
| 6.15 | Malha 2D do segundo canal. | 75 |
| 6.16 | Campo de temperatura para os seguintes tempos t : (a) $t = 56\text{min}$; (b) $t = 1h53\text{min}$; (c) $t = 2h50\text{min}$; (d) $t = 3h46\text{min}$; (e) $t = 4h43\text{min}$; (f) $t = 9h26\text{min}$; (g) $t = 14h09\text{min}$; (h) $t = 18h53\text{min}$; (i) $t = 23h36\text{min}$; (j) $t = 30h41\text{min}$; (l) $t = 37h46\text{min}$; (m) $t = 47h13\text{min}$; (n) $t = 94h26\text{min}$; (o) $t = 141h39\text{min}$; (p) $t = 188h53\text{min}$; (q) $t = 236h06\text{min}$ | 78 |
| 6.17 | Temperaturas máximas a 100m da saída do canal e na zona de captação em função do número de horas simuladas para o segundo canal. | 78 |
| 6.18 | Campo de temperatura a $t = 236\text{h}$ | 79 |
| 6.19 | Temperaturas máximas a 100m da saída do canal e na zona de captação em função do número de horas simuladas para o segundo canal em condições ambientais desfavoráveis. | 80 |
| 7.1 | Malha triangular representando terreno. | 82 |
| 7.2 | Mapa de hidrografia correspondente à região selecionada. | 82 |
| 7.3 | Malha 2DB no mesmo referencial da malha do terreno. | 83 |
| 7.4 | Distribuição de larguras na malha 2DB, visualizando a verdadeira grandeza da dimensão longitudinal. | 83 |
| 7.5 | Partes do contorno da malha 2DB. A escala longitudinal está reduzida nesta visualização. | 84 |
| 7.6 | Campos de temperatura e de velocidade para (a) $t = 26\text{min}$; (b) $t = 52\text{min}$; (c) $t = 1h18\text{min}$; (d) $t = 1h44\text{min}$; (e) $t = 2h10\text{min}$; (f) $t = 2h36\text{min}$; (g) $t = 3h02\text{min}$; (h) $t = 3h28\text{min}$ | 87 |
| 7.7 | Campo de pressão a $t = 1h44\text{min}$ | 88 |

INTRODUÇÃO

O crescimento da população humana mundial e a intensificação da exploração dos recursos naturais numa taxa insustentável levantam a questão ambiental como uma preocupação cada vez maior para todos. No âmbito dos recursos hídricos, segundo Rosenberg, McCully e Pringle (2000), os conflitos em torno das reservas de água doce têm crescido em função do acelerado crescimento populacional, tornando problemas envolvendo escoamentos ambientais (*environmental flows*, na expressão em inglês) um dos mais estudados atualmente.

O significado por trás da expressão ainda está em fase de amadurecimento, mas converge pra uma interpretação comum. Segundo Dyson, Bergkamp e Scanlon (2003), escoamento ambiental é o regime de escoamento em um rio, bacia hidrográfica ou zona costeira para manter os ecossistemas associados. Definição similar e mais geral é dada pelo grupo de pesquisa australiano *Land & Water Australia*, que diz que escoamento ambiental pode ser entendido como qualquer escoamento fluvial, ou ainda qualquer escoamento que deva ser protegido. Os modelos desenvolvidos neste trabalho são destinados a escoamentos em rios, estuários e reservatórios hidrelétricos, que se enquadram nessas definições de escoamento ambiental.

Discussões de líderes de diversos países apontam para uma reestruturação da dinâmica de exploração em diversos segmentos, sobretudo nos setores associados a produção de energia, ratificando a necessidade de planejamento precedente a empreendimentos que possam causar impactos ambientais. Em outras palavras, na construção de uma barragem de usina hidrelétrica, por exemplo, deve-se ter *a priori* todas as informações sobre quais as dimensões do reservatório formado após enchimento, quais braços do reservatório apresentarão baixas velocidades de escoamento, como será a distribuição do par OD-DBO (oxigênio dissolvido-demanda bioquímica de oxigênio), em que situações haverá estratificação, seja térmica ou hidráulica, etc. Informações preditivas com respeito às alterações hidrológicas provocadas por barragens e construção de reservatórios são hoje impre-

scindíveis na decisão de onde, quando ou qual o próximo projeto hidrológico será construído (ROSENBERG; MCCULLY; PRINGLE, 2000). Prognosticar quais as consequências para o ambiente de eventuais alterações na natureza torna-se, portanto, prática essencial para sustentabilidade do planeta.

Em trabalho discutindo as regras na manipulação de escoamentos ambientais, Arthington et al. (2006) propõe uma abordagem genérica que leva em conta aspectos essenciais de escoamentos para manipulação de rios, e diz que há agora um consenso entre cientistas de que para proteger a biodiversidade e benefícios das fontes de água doce providas por rios é preciso imitar as componentes da variabilidade de escoamentos naturais, considerando a magnitude, frequência, sincronismo, duração, taxa de mudança e previsibilidade dos eventos associados ao escoamento, e a sequência de tais condições. Apesar da consideração ser feita para rios ela pode ser estendida para ambientes como lagos, estuários e zonas costeiras, já que são ambientes que envolvem escoamentos a serem preservados, e se refere a simulação de escoamentos ambientais. A manipulação de um corpo de água natural sem dados preditivos conduz à adoção de valores grosseiros nos projetos de exploração hídrica, sujeitos a graves erros de projeto, comprometendo a integridade e biodiversidade do ecossistema (ARTHINGTON et al., 2006).

Simulações computacionais de escoamentos ambientais exercem papel significativo na gestão de recursos naturais, dado o rápido avanço dos equipamentos de informática, o que evidencia a relevância da dinâmica dos fluidos computacional (CFD, na sigla em inglês) aplicada a problemas ambientais. A mecânica dos fluidos ambiental abrange uma série de tópicos diversos, tais como dispersão de contaminantes em ambientes internos, dispersão de efluentes em ambientes incluindo rios, lagos, estuários, águas costeiras e atmosfera (KIM; BOYSAN, 1999). O desenvolvimento de dezenas de modelos e softwares de CFD – tais como Free CFD, FEniCS, OpenFlower, Gerris Flow Solver, Clawpack, FEATFLOW, ISAAC, Channelflow, NaSt3DGP, MOUSE, VH-1, para citar alguns – por universidades e centros de pesquisa em diversos países reforçam a importância da simulação computacional de escoamentos ambientais.

Abordagem do problema

A abordagem de um problema de escoamento ambiental via simulação computacional passa pelas etapas de modelagem matemática e modelagem numérica. O modelo matemático consiste no conjunto de equações que representam fenômenos que se aproximam dos fenômenos reais. A modelagem numérica é a metodologia de resolução das equações do modelo matemático de forma aproximada (em alguns casos, o método de aproximação fornece a solução exata). Modelos matemáticos para corpos de água naturais podem ser classificados de acordo com o número de dimensões espaciais, tais como

3D, 2D, 1D e 0D. Modelos 3D são os mais sofisticados e complexos, e também os mais caros em termos de custo computacional. Abordagens 2D são mais indicadas para diversos problemas de escoamento ambiental por prover, em muitas aplicações, resultados com a precisão requerida em menor tempo de processamento na comparação com respectiva simulação 3D (MATOS et al., 2010).

Nos problemas que permitem a abordagem bi-dimensional, as escalas em um dos planos do escoamento são muito maiores em relação às escalas em uma direção ortogonal ao plano. O escoamento na direção vertical em corpos d'água rasos, como lagos, águas costeiras, estuários, onde não haja estratificação vertical, é desprezível frente aos escoamentos nos planos horizontais. Semelhantemente, corpos d'água estreitos e com efeitos intensos de estratificação, como alguns rios e reservatórios, apresentam escoamentos muito mais relevantes nos planos verticais do que na direção transversal às margens. Ambos os casos permitem abordagem 2D sem perda de informações relevantes (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005; KURUP; HAMILTON; PHILLIPS, 2000). No entanto, os modelos mais adequados para tais problemas são bi-dimensionais com integração na direção onde o escoamento é desprezível. Ou seja, no caso de corpos d'água rasos, o modelo mais indicado seria 2D integrado verticalmente (modelo 2DH), em que as variáveis do problema são médias ao longo da altura da coluna d'água (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005; WROBEL et al., 1989). Geometrias em que a largura é pequena em relação ao comprimento e que comportam escoamentos estratificados são bem aproximadas por modelos 2D integrados transversalmente (modelo 2DB), em que as variáveis do problema são médias ao longo da largura (KURUP; HAMILTON; PHILLIPS, 2000; KARPIK; RAITHBY, 1990).

Este trabalho

O trabalho apresentado nesta dissertação consiste na construção de um conjunto de módulos computacionais voltados para o estudo de escoamentos ambientais através de simulações numéricas utilizando os modelos 2DH e 2DB. O desenvolvimento se deu em conjunto com outros trabalhos que atuaram na construção de uma ferramenta de simulação de escoamentos em ambientes de reservatórios hidrelétricos (Projeto GESAR, realizado em parceria UERJ/FURNAS).

Neste trabalho em conjunto, foi construída uma interface gráfica para manipulação dos módulos computacionais, com o objetivo de facilitar o processo de modelagem do problema, sobretudo no que se refere a leitura e tratamento de dados de terreno. Tarefas como aquisição de informações topográficas, seleção da região de estudo, tratamento dos dados para geração de malha, são realizadas através da interface gráfica com poucos cliques do *mouse*. A contribuição deste trabalho na interface foi mais marcante nas abas

destinadas aos dados de hidrografia e geração de malha.

Os dados importados dos arquivos de terreno são entrada para o módulo de geração de malhas bi-dimensionais, onde são armazenadas as informações relacionadas à geometria do problema. Os modelos 2DH e 2DB possuem geometrias próprias, tendo cada um rotinas de geração de malha distintas, embora integradas uma à outra, como será descrito no capítulo 4 (a malha 2DB é gerada a partir da malha 2DH e de dados de hidrografia). As malhas geradas são não-estruturadas, compostas de elementos triangulares. A interface gráfica se comunica com os códigos em C++ destinados à triangulação, usados na geração das malhas 2DH e 2DB. Parte das rotinas de triangulação 2DH é parte deste trabalho de mestrado, e as rotinas de triangulação 2DB foram totalmente desenvolvidas neste trabalho.

O modelo numérico emprega o Método de Elementos Finitos (MEF) para resolução dos sistemas de EDP's, utilizando o método de Galerkin para escolha das funções de ponderação das soluções aproximadas. O sistema de equações algébricas resultante é desacoplado pelo método da projeção discreto. O código de elementos finitos deste trabalho para os modelos 2DH e 2DB foi desenvolvido a partir do código de elementos finitos para solução das equações 2D de Navier-Stokes acoplada a transporte escalar criado por Anjos (2007). A partir do código original foram feitas adaptações para inserção das equações 2DH/2DB e das rotinas responsáveis por cálculo de transferência de calor, distribuição de densidade etc., além de ajustes e melhorias.

Além do desenvolvimento dos modelos de simulação, este projeto teve como parte relevante a aplicação do módulo 2DH no estudo de viabilidade de um projeto de resfriamento de água para usina termoelétrica, através da realização de simulações termohidráulicas, conforme será visto no capítulo 6. O projeto da usina foi desenvolvido pela Promon Engenharia, que acompanhou o estudo, fornecendo informações técnicas essenciais ao trabalho.

Organização do texto

Esta dissertação está dividida em oito capítulos, além da própria introdução. Os dois primeiros capítulos – 1 e 2 – se dedicam à apresentação dos modelos 2DH/2DB e à formulação numérica para resolução dos sistemas de equações. No capítulo 3 são apresentadas as ferramentas criadas para ler dados de terreno, mostrando os principais tipos de arquivos que comportam tais informações. O capítulo seguinte (4) faz uma breve descrição das rotinas de geração de malha. O processo de geração da malha 2DB é descrito, mostrando o encadeamento das informações envolvidas, desde a importação dos dados geográficos até a triangulação vertical e o cálculo da distância às margens associada a cada ponto. Na sequência, o capítulo 5 descreve os teste de validação a que o código foi

submetido.

Os dois capítulos finais apresentam resultados da aplicação dos modelos 2DH/2DB a problemas de escoamento ambiental. O capítulo 6 mostra uma série de simulações 2DH de um problema que consiste na análise da eficiência de troca térmica de canal para remoção do calor da água de resfriamento de uma usina termelétrica. Geometrias diversas foram utilizadas para o canal de resfriamento, verificando a influência da inserção de chicanas e do escoamento ao longo do rio, próximo do qual está localizada a usina. O capítulo final mostra o modelo 2DB aplicado a um problema que consiste na simulação do escoamento vertical em um reservatório hipotético, porém baseado em dados de terreno reais. O objetivo das simulações, neste caso, era observar os efeitos da gravidade no escoamento e no transporte de temperatura, detectando, possivelmente, a formação de escoamento estratificado.

CAPÍTULO 1

MODELO MATEMÁTICO

O comportamento de fluidos em movimento está sujeito às leis da mecânica e pode ser aproximado pelas equações de conservação de massa e conservação de quantidade de movimento – possivelmente acopladas a equações representando leis da termodinâmica.

O ferramental construído neste trabalho está baseado em dois modelos bi-dimensionais, implementados em um único código computacional. Ambos modelos matemáticos – o modelo 2DH e o 2DB – foram desenvolvidos de tal forma que fossem semelhantes o suficiente para que o mesmo código pudesse responder pelos dois, e que pudesse atuar ainda como um modelo 2D convencional. A vantagem de tal arquitetura reside na fácil manipulação do código e flexibilidade no estudo mais completo de problemas que exigam abordagens diversas. Para tanto, algumas hipóteses foram feitas para aproximar os modelos em sua estrutura, tornando o código versátil e simples. Efeitos de escoamentos secundários e de tensões turbulentas são desprezados.

Este capítulo apresentará as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento e a equação de transporte. Em seguida, serão apresentados os processos de integração que dão origem às equações 2DH e 2DB.

O desenvolvimento do trabalho foi voltado para a modelagem de problemas associados a escoamentos ambientais, sobretudo em ambientes de reservatórios. Em razão disso, o domínio das equações que serão apresentadas será normalmente referido como reservatório. No entanto, os modelos implementados são aplicáveis ao que se denomina escoamento ambiental de uma maneira ampla, podendo simular escoamentos em rios, estuários e outros ambientes.

1.1 Equação da continuidade

Seja o escalar ρ a massa específica do fluido e o vetor \mathbf{v} o campo de velocidade. A forma local da equação da continuidade (conservação da massa) é expressa por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.1)$$

Assumindo a hipótese de escoamento incompressível, segundo a qual não há variação de densidade, a equação acima resulta em

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

A condição de fluido incompressível depende de um conjunto de fatores, cuja descrição pode ser encontrada em (BATCHELOR, 1994). Incompressibilidade é uma aproximação largamente empregada em mecânica dos fluidos e não representa, na maioria dos casos, perda considerável de coerência física.

1.2 Equação de conservação de quantidade de movimento

Suponha que o escoamento esteja sujeito a um campo gravitacional \mathbf{g} e que a distribuição de tensões seja representada pelo tensor $\underline{\mathbf{T}}$. A forma local da equação de conservação da quantidade de movimento (ou simplesmente "equação de quantidade de movimento") pode ser expressa por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot \underline{\mathbf{T}} = 0 \quad (1.3)$$

onde \otimes representa o produto tensorial entre vetores. Sabendo que

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (1.4)$$

e inserindo a condição de conservação da massa (1.1), podemos reescrever a equação acima na forma

$$\rho \frac{D \mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \underline{\mathbf{T}} \quad (1.5)$$

A derivada material é o chamado termo convectivo. Os termos do lado direito representam, respectivamente, os efeitos da força peso e das tensões normais e cisalhantes atuantes.

1.2.1 Fluido newtoniano

Fluido newtoniano é aquele cuja taxa de deformação depende linearmente da tensão de cisalhamento, em que a proporcionalidade é dada pela viscosidade dinâmica do fluido. A definição formal de fluido newtoniano é, portanto, matematicamente descrita por uma expressão para o tensor de tensões atuante no fluido, dada por

$$\underline{\mathbf{T}} = -p\mathbf{I} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \quad (1.6)$$

No lado direito, o primeiro termo se refere a tensões normais provenientes da atuação de uma pressão p , enquanto que o segundo está relacionado a tensões normais provenientes de variações na densidade do fluido por efeito de compressibilidade, ponderado pelo coeficiente de viscosidade de bolha (ou viscosidade volumétrica) λ . O terceiro termo do lado direito é o responsável pelo surgimento de tensões cisalhantes, onde μ representa a viscosidade dinâmica. \mathbf{I} é a matriz identidade de mesma ordem que $\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T$. Para fluidos incompressíveis, onde $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, a equação acima passa a ser apenas

$$\underline{\mathbf{T}} = -p\mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \quad (1.7)$$

1.2.2 Equação de Navier-Stokes

Considere a equação de quantidade de movimento em sua forma local (1.5) e o divergente do tensor tensão para fluido newtoniano, expresso por

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\mathbf{T}} &= \nabla \cdot [-p\mathbf{I} + \mu \nabla \mathbf{v} + \mu (\nabla \mathbf{v})^T] \\ &= -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{v}) + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{v})^T] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Se a viscosidade μ for invariante no espaço, teremos

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{T}} = -\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v})^T \quad (1.9)$$

Tendo em vista que, pela conservação da massa e pela hipótese de fluido incompressível,

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v})^T = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (1.10)$$

a equação 1.9 passa a ser

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{T}} = -\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) \quad (1.11)$$

Se inserirmos a expressão acima na equação 1.5 obtemos a equação de Navier-Stokes para fluido incompressível e com viscosidade constante, dada por

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \quad (1.12)$$

1.3 Equação de transporte de escalar

A modelagem do transporte de massa e de temperatura empregado neste trabalho é representada por uma equação parabólica linear baseada na lei de Fick (para transporte de massa) ou na lei de Fourier (para transporte de temperatura). Apesar de implicar em processos de difusão com velocidade infinita (GÓMEZ; COLOMINAS; CASTELEIRO, 2008), esta abordagem fornece precisão satisfatória para a classe de problemas a que o modelo aqui apresentado se propõe a simular.

Seja c um campo escalar. O transporte de c em um domínio cujo campo de velocidade é \mathbf{v} e onde atua uma fonte s é expresso por

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla c + \nabla \cdot \mathbf{q} + s = 0 \quad (1.13)$$

$$\mathbf{q} = -\underline{\mathbf{K}} \nabla c \quad (1.14)$$

A equação 1.14 representa a lei de difusão de Fick, ou lei de Fourier, se tomarmos c como sendo temperatura. O tensor $\underline{\mathbf{K}}$ é uma difusividade, simétrico e positivo definido. No caso de materiais isotrópicos, $\underline{\mathbf{K}} = k \mathbf{I}$, onde k é um escalar positivo. Para estes casos, o fluxo \mathbf{q} passa a ser apenas

$$\mathbf{q} = -k \nabla c \quad (1.15)$$

Inserindo 1.15 na equação 1.13 obtemos a equação de transporte de escalar, expressa por

$$\frac{Dc}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla c) + s \quad (1.16)$$

Levando em conta que os escoamentos ambientais que serão analisados neste trabalho envolvem fenômenos térmicos relevantes, o escalar associado à equação de transporte será sempre tratado como temperatura no desenvolvimento dos modelos matemáticos, mas seguirá sendo denotado por c . Neste caso, o coeficiente de difusão da equação 1.14 é interpretado como condutividade térmica. Tomando ι e ρ como sendo, respectivamente, a calor específico e a massa específica do fluido, e assumindo que a condutividade é constante e uniforme, podemos introduzir a difusividade térmica κ dada por

$$\kappa = \frac{k}{\iota\rho} \quad (1.17)$$

Desta forma, a equação de transporte 1.16 passa a ser expressa por

$$\frac{Dc}{Dt} = \kappa \nabla^2 c + S \quad (1.18)$$

onde $S = s/(\iota\rho)$. A equação de transporte de temperatura, doravante, será referida apenas por equação de transporte.

1.4 Equações 2DH

Em muitos casos, a solução das equações de Navier-Stokes 3D é complexa e requer elevado esforço computacional, em alguns casos excedendo a capacidade do equipamento. Muitos problemas de escoamentos ambientais envolvem movimentos cujas componentes verticais são desprezíveis frente às componentes horizontais. Tais casos permitem abordagem através do modelo promediado verticalmente (BATES; LANE; FERGUSON, 2005), chamado neste trabalho de modelo 2DH, segundo o qual a velocidade é considerada constante ao longo da profundidade e igual à média vertical, com componente vertical nula. O mesmo ocorre para os campos de pressão e de temperatura. Ou seja, a solução das equações 2DH fornecem os valores médios ao longo da profundidade dos campos de velocidade, pressão e temperatura, que são dados por

$$\bar{u} = \frac{1}{H} \int_f^s u dz \quad (1.19)$$

$$\bar{v} = \frac{1}{H} \int_f^s v dz \quad (1.20)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{H} \int_f^s p dz \quad (1.21)$$

$$\bar{c} = \frac{1}{H} \int_f^s c dz \quad (1.22)$$

onde H é a altura da coluna d'água, u e v são as componentes longitudinal e transversal da velocidade $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ (\mathbf{i} e \mathbf{j} são vetores da base canônica para o sistema de coordenadas cartesianas), p é a pressão e c a temperatura. Assumindo que a coordenada z da superfície seja dada por $s = s(x, y)$ e que a coordenada z do fundo seja dada por $f = f(x, y)$, obtemos a altura H pela expressão.

$$H = s(x, y) - f(x, y) \quad (1.23)$$

A coordenada s da superfície é considerada uniforme, de tal forma que $\nabla s = \mathbf{0}$. Outra condição inserida no modelo é a de não-deslizamento no fundo, o que resulta em velocidade nula nestes pontos.

As equações do modelo 2DH são obtidas da integração vertical das equações 3D de continuidade, quantidade de movimento e de transporte. As variáveis do problema podem ser representadas em função de sua parcela média somada a uma parcela de flutuação em torno da média (WROBEL et al., 1989). Isto é, para a componente u da velocidade, por exemplo, temos

$$u = \bar{u} + \tilde{u} \quad (1.24)$$

1.4.1 Integração vertical da equação da continuidade

Tomemos a equação da continuidade para fluidos incompressíveis (1.2) integrada verticalmente:

$$\int_f^s \nabla \cdot \mathbf{v} dz = 0 \quad (1.25)$$

Considerando que o vetor de velocidades médias $\bar{\mathbf{v}}$ é dado por

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{H} \int_f^s \mathbf{v} dz \quad (1.26)$$

e empregando a regra de integração de Leibniz (KAPLAN, 1993), a equação da con-

tinuidade média verticalmente é escrita como

$$\nabla \cdot (H\bar{\mathbf{v}}) - \mathbf{v} |_s \cdot \nabla s + \mathbf{v} |_f \cdot \nabla f = 0 \quad (1.27)$$

As derivadas parciais na direção z dos valores médios são nulas. Aplicando a condição de que a elevação da superfície é constante e uniforme em todo domínio e da condição de não-deslizamento no fundo, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x}(H\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(H\bar{v}) = 0 \quad (1.28)$$

1.4.2 Integração vertical da equação de quantidade de movimento

Considere a integração vertical da equação de conservação de quantidade de movimento na forma dada pela equação 1.3:

$$\int_f^s \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \rho\mathbf{g} - \nabla \cdot \underline{\mathbf{T}} \right] dz = 0 \quad (1.29)$$

A hipótese de fluido incompressível permite que a equação acima seja reescrita da seguinte forma (aplicando a integral a cada termo separadamente)

$$\int_f^s \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dz + \int_f^s \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) dz - \int_f^s \mathbf{g} dz - \int_f^s \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\mathbf{T}} dz = 0 \quad (1.30)$$

Analisemos agora cada termo da equação acima. O termo da derivada da velocidade com relação ao tempo, após integração, é facilmente obtido e dado por

$$\int_f^s \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t}(H\bar{\mathbf{v}}) = H \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} \quad (1.31)$$

Quanto ao termo do divergente do produto tensorial da velocidade, é conveniente expressarmos a integração vertical em termos de suas componentes \mathbf{i} e \mathbf{j} , ou seja,

$$\begin{aligned} \int_f^s \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) dz &= \int_f^s \left[\frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) \right] \mathbf{i} dz + \\ &+ \int_f^s \left[\frac{\partial}{\partial x}(vu) + \frac{\partial}{\partial y}(vv) \right] \mathbf{j} dz \end{aligned} \quad (1.32)$$

Consideremos o processo de integração do primeiro termo da componente **i**, de maneira que os demais sejam obtidos por analogia. Após integração, obtemos

$$\int_f^s \frac{\partial}{\partial x} (uu) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_f^s (uu) dz - (uu) |_s \frac{\partial s}{\partial x} + (uu) |_f \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.33)$$

A derivada parcial de s com relação a x é nula, bem como $(uu) |_f$. A integral do lado direito da equação anterior representa o produto da média vertical de uu pela altura H , isto é

$$\int_f^s (uu) dz = H \bar{u} \bar{u} \quad (1.34)$$

Levando em conta a decomposição expressa pela equação 1.24, temos que o produto uu pode ser escrito como

$$uu = \bar{u}\bar{u} + \bar{u}\tilde{u} + \tilde{u}\bar{u} + \tilde{u}\tilde{u} \quad (1.35)$$

Desta forma, a integral apresentada em 1.34 pode ser calculada pela soma de quatro parcelas, isto é,

$$\int_f^s (uu) dz = \int_f^s \bar{u}\bar{u} dz + 2 \int_f^s \bar{u}\tilde{u} dz + \int_f^s \tilde{u}\tilde{u} dz \quad (1.36)$$

onde a integral de $\bar{u}\bar{u}$ é igual a $H \bar{u} \bar{u}$ e as integrais do produto $\bar{u}\tilde{u}$ são nulas. A integral de $\tilde{u}\tilde{u}$ introduz um outro termo de tensões na equação, chamado termo de dispersão, que, segundo Bates, Lane e Ferguson (2005), normalmente requerem fórmulas empíricas ou uma modelagem especial. Este termo será desprezado no modelo. Os resultados atribuídos às integrais acima são baseados nos postulados de Reynolds (WROBEL et al., 1989), segundo os quais

$$\frac{1}{H} \int_f^s \bar{u} dz = \bar{u} \quad (1.37)$$

$$\frac{1}{H} \int_f^s \tilde{u} dz = 0 \quad (1.38)$$

Com base nestas considerações, a componente **i** da equação 1.32 passa a ser

$$\int_f^s \left[\frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) \right] dz = \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{u}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(H\bar{u}\bar{v}) \quad (1.39)$$

Após expandirmos os termos do lado direito, inserindo a condição de conservação da massa, temos

$$\int_f^s \left[\frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) \right] dz = H \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad (1.40)$$

Analogamente à componente **i**, a componente **j** de 1.32 é expressa por

$$\int_f^s \left[\frac{\partial}{\partial x}(vu) + \frac{\partial}{\partial y}(vv) \right] dz = H \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right] \quad (1.41)$$

Com relação ao termo da gravidade, assumimos que esta atua apenas na direção z , ou seja, $\mathbf{g} = g\mathbf{k}$, de maneira que o termo da gravidade não tem contribuição nas equações 2DH. Resta o termo do divergente do tensor de tensões. Expandindo o divergente do tensor nas direções **i** e **j**, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\mathbf{T}} &= \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \\ &+ \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Analisemos a integral na direção z da componente **i**, de forma a obter a integral da componente **j** analogamente. Tomando separadamente a integral de cada um dos termos, temos

$$\int_f^s \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_f^s \sigma_x dz + \sigma_x |_f \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.43a)$$

$$\int_f^s \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_f^s \tau_{yx} dz + \tau_{yx} |_f \frac{\partial f}{\partial y} \quad (1.43b)$$

$$\int_f^s \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz = \frac{\partial}{\partial z} \int_f^s \tau_{zx} dz + \tau_{zx} |_f \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (1.43c)$$

Introduzindo a relação 1.6 para fluidos newtonianos, considerando viscosidade dinâmica μ uniforme, podemos reescrever as derivadas das integrais das tensões σ_x e τ_{yx} como

sendo

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_f^s \sigma_x dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_f^s \left[-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] dz \quad (1.44a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_f^s \tau_{yx} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_f^s \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dz \quad (1.44b)$$

que, após integração, nos leva a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_f^s \left[-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] dz &= -\frac{\partial}{\partial x} (H\bar{p}) + \\ &+ 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} (H\bar{u}) - u|_s \frac{\partial s}{\partial x} + u|_f \frac{\partial f}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (1.45a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_f^s \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dz &= \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} (H\bar{u}) - u|_s \frac{\partial s}{\partial y} + u|_f \frac{\partial f}{\partial y} \right] + \\ &+ \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} (H\bar{v}) - v|_s \frac{\partial s}{\partial x} + v|_f \frac{\partial f}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (1.45b)$$

Pela conservação da massa, e pelas condições de não-deslizamento no fundo e de superfície rígida, temos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (H\bar{u}) - u|_s \frac{\partial s}{\partial x} + u|_f \frac{\partial f}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} (H\bar{v}) - v|_s \frac{\partial s}{\partial x} + v|_f \frac{\partial f}{\partial x} \right] = 0 \quad (1.46)$$

o que nos permite, expandindo as derivadas parciais de $H\bar{u}$, reescrever as integrais presentes em 1.45 como

$$\int_f^s \left[-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] dz = -H\bar{p} + \mu \left[H \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial H}{\partial x} - u|_s \frac{\partial s}{\partial x} + u|_f \frac{\partial f}{\partial x} \right] \quad (1.47a)$$

$$\int_f^s \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dz = \mu \left[H \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial H}{\partial y} - u|_s \frac{\partial s}{\partial y} + u|_f \frac{\partial f}{\partial y} \right] \quad (1.47b)$$

Utilizando 1.23 e sabendo que $u|_s = \bar{u} + \tilde{u}|_s$ e $u|_f = \bar{u} + \tilde{u}|_f$ (resultados obtidos a partir

de 1.24), chegamos a

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_f^s \left[-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] dz = -\frac{\partial}{\partial x} (H\bar{p}) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[H \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \tilde{u} |_f \frac{\partial f}{\partial x} \right] \quad (1.48a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_f^s \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dz = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[H \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \tilde{u} |_f \frac{\partial f}{\partial y} \right] \quad (1.48b)$$

Os termos associados às flutuações da velocidade no fundo serão desprezados no modelo, bem como aqueles associados às tensões no fundo. Desta forma, as duas componentes 2DH do divergente do tensor de tensões são dadas por

$$\begin{aligned} \int_f^s \nabla \cdot \underline{T} dz &= \left[-\frac{\partial}{\partial x} (H\bar{p}) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right] \mathbf{i} + \\ &+ \left[-\frac{\partial}{\partial y} (H\bar{p}) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right] \mathbf{j} \end{aligned} \quad (1.49)$$

As componentes da equação 2DH de quantidade de movimento são, portanto, dadas por

$$H \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (H\bar{p}) + \nu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right] \quad (1.50)$$

$$H \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (H\bar{p}) + \nu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right] \quad (1.51)$$

1.4.3 Integração vertical da equação de transporte de escalar

Tomemos a integral da equação de transporte (1.18) expressa por

$$\int_f^s \left[\frac{Dc}{Dt} - \kappa \nabla^2 c + S \right] dz = 0 \quad (1.52)$$

Usando a continuidade (1.2), podemos reescrever a derivada material da temperatura como sendo

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{v}) \quad (1.53)$$

A integral da derivada parcial no tempo é facilmente obtida e dada por

$$\int_f^s \frac{\partial c}{\partial t} dz = H \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} \quad (1.54)$$

Quanto à integral da parcela advectiva, expandindo o divergente $\nabla \cdot (cv)$, temos

$$\int_f^s \left[\frac{\partial}{\partial x}(cu) + \frac{\partial}{\partial y}(cv) \right] = \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{c}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(H\bar{c}\bar{v}) \quad (1.55)$$

O resultado acima é obtido desprezando-se as integrais dos produtos das parcelas de flu-
tuação, isto é, $\tilde{u}\tilde{c}$ e $\tilde{u}\tilde{c}$. Expandindo as derivadas parciais e levando em conta a equação
1.28, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x}(H\bar{c}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(H\bar{c}\bar{v}) = H\bar{u}\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + H\bar{v}\frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \quad (1.56)$$

Quanto à integral do termo difusivo, o processo é o mesmo que o empregado para
o termo difusivo da equação de quantidade de movimento. Considerando o coeficiente
de difusão (condutividade térmica, no caso de transferência de calor) uniforme em todo
domínio e considerando $\tilde{c}|_f \nabla f = 0$, temos

$$\int_f^s \kappa(\nabla^2 c) dz = \kappa \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right) \right] \quad (1.57)$$

O resultado acima é obtido considerando-se constante a temperatura no fundo. Por último,
a integral do termo fonte resulta em

$$\int_f^s S dz = H\bar{S} \quad (1.58)$$

onde \bar{S} representa a média vertical do termo fonte S . Resumindo, a equação 2DH de
transporte é dada por

$$H \frac{D\bar{c}}{Dt} = \kappa \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right) \right] + H\bar{S} \quad (1.59)$$

1.4.4 Modelo de trocas térmicas

As taxas de transferência de calor através da superfície do corpo aquático exercem
impacto relevante na distribuição de temperatura e na hidrodinâmica local (tendo em vista
que a densidade da água é dependente da temperatura). Diversos fatores ambientais estão
associados às trocas térmicas, como radiação solar, umidade do ar e vento. Em particu-

lar, os efeitos de evaporação em corpos aquáticos de muita massa e com grande área de superfície são relevantes não só pelo calor transferido, mas também pelo volume de água cedido ao ambiente, especialmente importante em reservatórios hidrelétricos.

O modelo de trocas térmicas empregado neste trabalho é o proposto por Rosman (2009), que decompõe o fluxo total de calor Q que atravessa a superfície (em W/m^2) em sete parcelas, a saber,

- Q_s : fluxo de radiação solar de ondas curtas;
- Q_{sr} : fluxo de radiação solar de ondas curtas refletidas;
- Q_a : fluxo de radiação atmosférica de ondas longas;
- Q_{ar} : fluxo de radiação atmosférica de ondas longas refletidas;
- Q_{br} : fluxo de radiação de ondas longas da água em direção à atmosfera;
- Q_e : fluxo de calor por evaporação;
- Q_c : fluxo de calor por condução.

O fluxo total de calor Q é, portanto, dado por

$$Q = (Q_s - Q_{sr}) + (Q_a - Q_{ar}) - Q_{br} + Q_e + Q_c \quad (1.60)$$

considerando $Q > 0$ para calor cedido pelo ambiente à água. O fluxo total Q é inserido na equação de transporte através do termo fonte, pela relação

$$\bar{S} = \frac{Q}{H\rho} \quad (1.61)$$

O cálculo de cada um dos fluxos de calor é feito segundo Rosman (2009).

1.5 Equações 2DB

As equações 2DB fornecem os valores de velocidade, pressão e concentração (ou temperatura) promediados transversalmente, e são obtidas a partir da integração transversal das equações (1.1), (1.5) e (1.18). O sistema de equações resultante do processo de integração transversal constitui um modelo bi-dimensional com informação da direção transversal. O modelo foi desenvolvido de forma a possuir estrutura similar à do modelo 2DH, com vista, como já mencionado, a criar uma ferramenta flexível e de simples

utilização, que permitisse que a abordagem de um problema fosse facilmente mudada de 2DH para 2DB, e vice-versa.

Nesta seção, cada ponto do espaço no qual são válidas as equações 2DB é representado por coordenadas (x, z) , onde x representa a direção longitudinal e z , a direção vertical, e os pontos do espaço das equações 2DH passarão a ser representados por (x', y', z') . A dimensão ao longo da qual as equações 1.1, 1.5 e 1.18 são integradas será denotada por y , sendo $e = e(x, z)$ e $d = d(x, z)$ funções que representam as margens esquerda e direita do reservatório, respectivamente. Ou seja, a largura B para cada ponto do plano vertical de interesse é tal que

$$B = d(x, z) - e(x, z) \quad (1.62)$$

A imagem a seguir mostra esquematicamente a descrição acima.

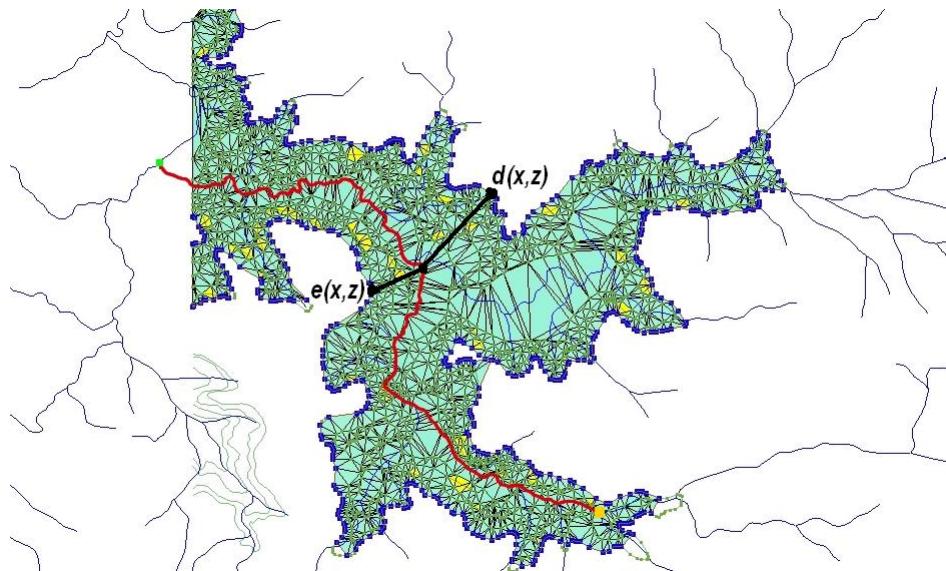


Figura 1.1: Plano de cálculo da largura do reservatório

A relação entre o sistema de coordenadas (x', y', z') e o sistema de coordenadas (x, y, z) , onde as equações de movimento e de transporte são integradas transversalmente, é ilustrada no capítulo 4. Vale ressaltar que o domínio das equações 2DB nem sempre corresponde a uma direção "reta" no referencial (x', y', z') . Ao contrário, em escoamentos ambientais a direção de interesse está associada ao leito do rio, que invariavelmente é um caminho sinuoso (a menos que se trate de um rio artificial).

O processo de integração para as equações 2DB é análogo ao mesmo processo para as equações 2DH. As diferenças estão nos valores atribuídos às variáveis do problema nos dois modelos. Por exemplo, no modelo 2DB, a condição de não-deslizamento impõe que a velocidade seja nula nas margens, ou seja, nos limites de integração d e e , enquanto

que nas equações 2DH há deslizamento na superfície. Por outro lado, ao contrário do que acontecia com a função s , as derivadas espaciais das funções das posições nas margens d e e no modelo 2DB não são nulas em todo domínio. Devido à semelhança nos processos de integração dos modelos 2DH e 2DB, algumas etapas na dedução das equações 2DB serão omitidas.

Os valores das componentes da velocidade, da pressão e da concentração lateralmente médios serão representados pela mesma notação utilizada na seção 1.4, porém serão definidas por

$$\bar{u} = \frac{1}{B} \int_e^d u dy \quad (1.63)$$

$$\bar{w} = \frac{1}{B} \int_e^d w dy \quad (1.64)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{B} \int_e^d p dy \quad (1.65)$$

$$\bar{c} = \frac{1}{B} \int_e^d c dy \quad (1.66)$$

1.5.1 Integração transversal da equação da continuidade

A integração transversal da equação da continuidade para fluidos incompressíveis (1.2) é expressa por

$$\int_e^d \nabla \cdot \mathbf{v} dy = 0 \quad (1.67)$$

Considerando que o vetor de velocidades médias $\bar{\mathbf{v}}$ é dado por

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{B} \int_e^d \mathbf{v} dy \quad (1.68)$$

obtemos, semelhantemente a 1.27,

$$\nabla \cdot (B \bar{\mathbf{v}}) - \mathbf{v} |_d \cdot \nabla d + \mathbf{v} |_e \cdot \nabla e = 0 \quad (1.69)$$

A condição de não-deslizamento nas margens impõe que o campo de velocidade em $y = d(x, z)$ e $y = e(x, z)$ seja nulo. A partir desta consideração, levando em conta que as derivadas na direção y dos valores médios transversalmente são nulas, obtemos a equação 2DB de conservação de massa, dada por

$$\frac{\partial}{\partial x}(B\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial z}(B\bar{w}) = 0 \quad (1.70)$$

1.5.2 Integração transversal da equação de quantidade de movimento

A integração transversal da equação de conservação de quantidade de movimento 1.3 é expressa por

$$\int_e^d \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \rho\mathbf{g} - \nabla \cdot \underline{\mathbf{T}} \right] dy = 0 \quad (1.71)$$

Seguindo o mesmo procedimento utilizado na integração vertical do termo da derivada material de 1.3, obtemos, nas componentes \mathbf{i} e \mathbf{k} ,

$$\int_e^d \frac{Du}{Dt} = B \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + B \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \quad (1.72a)$$

$$\int_e^d \frac{Dw}{Dt} = B \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + B \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \quad (1.72b)$$

Como foi dito na seção 1.4.2, o campo de gravidade \mathbf{g} é tal que $\mathbf{g} = g\mathbf{k}$, de maneira que a integração transversal do termo da gravidade resulta em

$$\int_e^d \mathbf{g} dy = Bg\mathbf{k} \quad (1.73)$$

A integração do divergente do tensor de tensões também é análoga à desenvolvida na seção 1.4.2, e, considerando $\tilde{u}|_e \nabla e = 0$ e $\tilde{u}|_d \nabla d = 0$, resulta em

$$\begin{aligned}\int_e^d \nabla \cdot \mathbf{T} dy &= \left[-\frac{\partial}{\partial x}(B\bar{p}) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(B \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right] \mathbf{i} + \\ &+ \left[-\frac{\partial}{\partial z}(B\bar{p}) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(B \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \right] \mathbf{k} \quad (1.74)\end{aligned}$$

Vale lembrar que os resultados acima são obtidos assumindo a condição de não-deslizamento nas margens, bem como, na integral do termo convectivo, desprezando efeitos de escoamentos secundários. Os termos associados às tensões nas margens também são desprezados. A equação 2DB de quantidade de movimento, separada em componentes \mathbf{i} e \mathbf{k} , é, então, dada por

$$B \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(B\bar{p}) + \nu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(B \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right] \quad (1.75)$$

$$B \frac{D\bar{w}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z}(B\bar{p}) + \nu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(B \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \right] + Bg \quad (1.76)$$

1.5.3 Integração transversal da equação de transporte de escalar

A integração transversal da equação de transporte é dada por

$$\int_e^d \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla c + \nabla \cdot \mathbf{q} + S \right] dy = 0 \quad (1.77)$$

O termo convectivo 2DB é análogo ao 2DH. As temperaturas nas margens são consideradas constantes, e os termos oriundos da integração associados às flutuações da temperatura nas margens são considerados nulos, i.e., $\tilde{c}|_e \nabla e = 0$ e $\tilde{c}|_d \nabla d = 0$. A integração transversal do termo difusivo da equação de transporte resulta, portanto, em

$$\kappa \int_e^d \left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right] dy = \kappa \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(B \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right) \right] \quad (1.78)$$

Desta forma, inserindo a média transversal do termo fonte, chega-se à equação 2DB de transporte, expressa por

$$B \frac{D\bar{c}}{Dt} = \kappa \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(B \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right) \right] + B\bar{S} \quad (1.79)$$

1.5.4 Hipótese de Boussinesq

Pela hipótese de fluido incompressível a densidade ρ é invariante no tempo e no espaço. Uma das aplicações mais relevantes do modelo promediado transversalmente se dá em problemas onde há estratificação térmica. Uma das condições para haja estratificação térmica é a diferença de densidade provocada por gradientes acentuados de temperatura, o que contradiz a condição de densidade uniforme e constante. A aproximação de Boussinesq permite a modelagem de escoamentos com estratificação térmica através da equação de Navier-Stokes para fluido incompressível, assumindo que a densidade é uniforme e constante em todos os termos da equação, exceto no termo da gravidade. Sejam ρ_0 uma densidade de referência, ρ a densidade em função da distribuição de temperatura e g' o módulo da aceleração da gravidade ambiente. A hipótese de Boussinesq propõe uma campo escalar g dependente de ρ tal que

$$g = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} g' \quad (1.80)$$

A relação acima faz com as partículas fluidas com $\rho > \rho_0$ tendam a se mover para o fundo, enquanto as que possuem $\rho < \rho_0$ buscam a superfície. A densidade ρ é uma função da distribuição de temperatura tal que $\rho = \hat{\rho}(T)$ e é calculada pela expressão (SOARES, 2003)

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(T) = & 999,845259 + 6,793952 \times 10^{-2}T - \\ & - 9,095290 \times 10^{-3}T^2 + 1,001680 \times 10^{-4}T^3 - \\ & - 1,120083 \times 10^{-6}T^4 + 6,536332 \times 10^{-9}T^5 \end{aligned} \quad (1.81)$$

que fornece a densidade em Kg/m^3 a partir da temperatura dada em graus Celsius. Desta forma é calculada a aceleração da gravidade g das equações 2DB.

CAPÍTULO 2

MODELO NUMÉRICO

Tomemos as equações

$$\Lambda \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla(\Lambda \bar{p}) + \nu \nabla \cdot (\Lambda \nabla \bar{\mathbf{v}}) + \Lambda \mathbf{g} \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot (\Lambda \bar{\mathbf{v}}) = 0 \quad (2.1b)$$

$$\Lambda \frac{D\bar{c}}{Dt} = -\kappa \nabla \cdot (\Lambda \nabla \bar{c}) + \Lambda \bar{S} \quad (2.1c)$$

que são, respectivamente, as equações de Navier-Stokes, de continuidade e de transporte integradas transversal ou verticalmente, onde o comprimento da dimensão integrada – altura da coluna d’água (modelo 2DH) ou largura (modelo 2DB) – é representado por Λ . Este capítulo apresenta a metodologia numérica empregada para resolução do sistema composto por estas equações. A metodologia numérica é a mesma para ambos modelos. De forma semelhante a Λ , as variáveis do problema, as coordenadas espaciais, as derivadas parciais e a direção de integração recebem a mesma notação neste capítulo, mas devem ser interpretados adequadamente de acordo com o modelo, se 2DH ou 2DB.

2.1 Formulação em resíduos ponderados

Sejam $\mathbf{V} = U\mathbf{i} + V\mathbf{j}$, P e C aproximações para as soluções que satisfazem exatamente o sistema 2.1, válidas no domínio $(\Omega, t) \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$, sujeitas às condições de

contorno tipo Dirichlet dadas por

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\Gamma \text{ em } \Gamma_V^\zeta \quad (2.2a)$$

$$P = P_\Gamma \text{ em } \Gamma_P^\zeta \quad (2.2b)$$

$$C = C_\Gamma \text{ em } \Gamma_C^\zeta \quad (2.2c)$$

e tipo Neumann, dadas por

$$(\nabla \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ em } \Gamma_V^\eta \quad (2.3a)$$

$$(\nabla P) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ em } \Gamma_P^\eta \quad (2.3b)$$

$$(\nabla C) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ em } \Gamma_C^\eta \quad (2.3c)$$

onde $\Gamma_V^\zeta, \Gamma_P^\zeta, \Gamma_C^\zeta, \Gamma_V^\eta, \Gamma_P^\eta$ e Γ_C^η compõem a fronteira Γ de Ω , e são tais que

$$\Gamma_V^\zeta \cup \Gamma_V^\eta = \Gamma \quad \text{e} \quad \Gamma_V^\zeta \cap \Gamma_V^\eta = \emptyset \quad (2.4a)$$

$$\Gamma_P^\zeta \cup \Gamma_P^\eta = \Gamma \quad \text{e} \quad \Gamma_P^\zeta \cap \Gamma_P^\eta = \emptyset \quad (2.4b)$$

$$\Gamma_C^\zeta \cup \Gamma_C^\eta = \Gamma \quad \text{e} \quad \Gamma_C^\zeta \cap \Gamma_C^\eta = \emptyset \quad (2.4c)$$

De acordo com Heinrich e Pepper (1999), as condições acima são necessárias para a construção de um problema bem posto. A aplicação das funções de aproximação nas equações do modelo produz resíduos $\bar{\mathcal{R}}_1, \mathcal{R}_2$ e \mathcal{R}_3 , i.e.,

$$\Lambda \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla (\Lambda P) - \nu \nabla \cdot (\Lambda \nabla \mathbf{V}) - \Lambda \mathbf{g} = \bar{\mathcal{R}}_1 \quad (2.5a)$$

$$\nabla \cdot (\Lambda \mathbf{V}) = \mathcal{R}_2 \quad (2.5b)$$

$$\Lambda \frac{DC}{Dt} + \kappa \nabla \cdot (\Lambda \nabla C) - \Lambda \bar{S} = \mathcal{R}_3 \quad (2.5c)$$

onde $\bar{\mathcal{R}}_1$ é um vetor com os resíduos da equação de quantidade de movimento nas direções de U e de V . Consideremos \mathbf{w}^m, w^c e w^t como funções de ponderação dos resíduos

produzidos, respectivamente, por 2.5a, 2.5b e 2.5c tais que

$$\mathbf{w}^m = 0 \text{ em } \Gamma_V^\zeta \quad (2.6a)$$

$$w^c = 0 \text{ em } \Gamma_P^\zeta \quad (2.6b)$$

$$w^c = 0 \text{ em } \Gamma_C^\zeta \quad (2.6c)$$

O método de resíduos ponderados impõe que o resíduo gerado pela aproximação seja nulo em alguns pontos do domínio, através das funções de ponderação. Matematicamente, tal condição é expressa por

$$\int_{\Omega} \bar{\mathcal{R}}_1 \cdot \mathbf{w}^m d\Omega = 0 \quad (2.7a)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{R}_2 w^c d\Omega = 0 \quad (2.7b)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{R}_3 w^t d\Omega = 0 \quad (2.7c)$$

Desta forma, temos que

$$\int_{\Omega} \left[\Lambda \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla(\Lambda P) - \nu \nabla \cdot (\Lambda \nabla \mathbf{V}) - \Lambda \mathbf{g} \right] \cdot \mathbf{w}^m d\Omega = 0 \quad (2.8a)$$

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (\Lambda \mathbf{V})] w^c d\Omega = 0 \quad (2.8b)$$

$$\int_{\Omega} \left[\Lambda \frac{DC}{Dt} + \kappa \nabla \cdot (\Lambda \nabla C) - \Lambda \bar{S} \right] w^t d\Omega = 0 \quad (2.8c)$$

2.1.1 Forma fraca das equações

A integração por parte das equações dos termos de pressão e difusão de 2.8a e do termo de difusão de 2.8c nos leva, respectivamente, a

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla(\Lambda P) \cdot \mathbf{w}^m d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{1}{\rho} \Lambda P (\mathbf{w}^m \cdot \mathbf{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \Lambda P \nabla \cdot \mathbf{w}^m d\Omega \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\nu \nabla \cdot (\Lambda \nabla \mathbf{V}) \cdot \mathbf{w}^m d\Omega &= \int_{\Gamma} [-\nu \Lambda \nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{w}^m] \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} \nu \Lambda \nabla \mathbf{V} : \nabla \mathbf{w}^m d\Omega \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \kappa \nabla \cdot (\Lambda \nabla C) w^t d\Omega &= \int_{\Gamma} \kappa \Lambda \nabla C \cdot (w^t \mathbf{n}) d\Gamma - \\ &- \int_{\Omega} \kappa \Lambda \nabla C \cdot \nabla w^t d\Omega \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde : representa o produto escalar entre tensores, que é definido, para dois tensores de segunda ordem A e B , por

$$A : B = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 A_{ij} B_{ji} \quad (2.12)$$

Levando em conta as condições de contorno naturais, expressas pelas equações 2.3, e as características das funções de ponderação, expressas por 2.6, podemos reescrever o sistema 2.8 na forma

$$\int_{\Omega} \left[\Lambda \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot \mathbf{w}^m - \frac{1}{\rho} \Lambda P \nabla \cdot \mathbf{w}^m + \nu \Lambda \nabla \mathbf{V} : \nabla \mathbf{w}^m - \Lambda \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}^m \right] d\Omega = 0 \quad (2.13a)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\Lambda \mathbf{V}) w^c d\Omega = 0 \quad (2.13b)$$

$$\int_{\Omega} \left[\Lambda \frac{DC}{Dt} w^t - \kappa \Lambda \nabla C \cdot \nabla w^t - \Lambda \bar{S} \right] d\Omega = 0 \quad (2.13c)$$

Note que a restrição para as funções de aproximação \mathbf{V} , P e C que aparecem nas equações 2.13a, 2.8b e 2.13c foi reduzida para a restrição de que sejam deriváveis até primeira ordem, razão pela qual 2.13a e 2.13c são ditas forma fraca das equações 2.8a e 2.8c (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005; DONEA; HUERTA, 2003).

2.2 Método de Galerkin

Segundo Ern e Guermond (2004), o método de Galerkin, num conceito mais geral, consiste numa família de métodos cujo conceito principal é resolver em espaços de dimensão finita um problema definido inicialmente em espaço de dimensão infinita. No

entanto, há variações quanto à escolha dos espaços de solução e dos espaços das funções de ponderação (também chamados espaço de teste). Quando os espaços de solução e de teste são diferentes, o método de aproximação é normalmente chamado Petrov-Galerkin, enquanto que, se as funções de aproximação e de ponderação pertencem ao mesmo espaço, o procedimento recebe o nome de método de Galerkin *standard*, que é o empregado neste trabalho, mas será referido apenas como método de Galerkin.

Considere o espaço de Lebesgue \mathcal{L}^2 (espaço das funções v quadrado integráveis em Ω , no sentido de Lebesgue) definido por

$$\mathcal{L}^2 = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty \right\} \quad (2.14)$$

Podemos introduzir o espaço de Sobolev de grau um das funções v tal que

$$\mathcal{H}^1 = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in \mathcal{L}^2(\Omega) \right\} \quad (2.15)$$

Sejam os conjuntos de funções linearmente independentes $S_u = \{N_i^u(\Omega)\}_{i=0}^{nu}$, $S_v = \{N_i^v(\Omega)\}_{i=0}^{nv}$, $S_p = \{N_i^p(\Omega)\}_{i=0}^{np}$ e $S_c = \{N_i^c(\Omega)\}_{i=0}^{nc}$, onde nu , nv , np e nc representam a dimensão de cada espaço, bases para os espaços \mathcal{H}^u , \mathcal{H}^v , \mathcal{H}^p e \mathcal{H}^c (todos espaços de Sobolev de grau um conforme 2.15), respectivamente. As funções U , V , P e C são construídas a partir de uma combinação linear única da base, conforme

$$U = \sum_{i=0}^{nu} N_i^u u_i \quad (2.16a)$$

$$V = \sum_{i=0}^{nv} N_i^v v_i \quad (2.16b)$$

$$P = \sum_{i=0}^{np} N_i^p p_i \quad (2.16c)$$

$$C = \sum_{i=0}^{nc} N_i^c c_i \quad (2.16d)$$

onde os coeficientes u_i , v_i , p_i e c_i representam as componentes da velocidade, a pressão e a temperatura em pontos discretos do domínio (também chamados valores nodais de U , V , P e C), e dependem apenas de t . Denotemos por Γ^c o subdomínio da fronteira Γ aos quais são atribuídas condições de contorno Dirichlet e consideremos o espaço \mathcal{H}_0^1 como subespaço de \mathcal{H}^1 , descrito por

$$\mathcal{H}_0^1 = \{v \in \mathcal{H}^1 \mid v = 0 \text{ em } \Gamma^\zeta\} \quad (2.17)$$

que é o espaço das funções de ponderação, i.e., $\mathbf{w}^m, w^c, w^t \in \mathcal{H}_0^1$. Conforme mencionado, o método de Galerkin consiste em que as funções de ponderação pertençam ao mesmo espaço das funções de aproximação. As funções de ponderação são construídas, então, por

$$w^x = \sum_{i=0}^{nu} N_i^{w^x} w_i^x \quad (2.18a)$$

$$w^y = \sum_{i=0}^{nv} N_i^{w^y} w_i^y \quad (2.18b)$$

$$w^c = \sum_{i=0}^{np} N_i^{w^c} w_i^c \quad (2.18c)$$

$$w^t = \sum_{i=0}^{nc} N_i^{w^t} w_i^t \quad (2.18d)$$

considerando $\mathbf{w}^m = w^x \mathbf{i} + w^y \mathbf{j}$. Observe que tanto as funções de ponderação quanto as de aproximação pertencem a espaços de Sobolev de dimensão finita. A dimensão dos espaços \mathcal{H}^1 irá variar de acordo com o tipo de elemento utilizado no Método de Elementos Finitos.

A formulação variacional introduzida pelo método de Galerkin conduz ao seguinte problema: buscar soluções $\mathbf{V}, P, C \in \mathcal{H}^1$ tais que o sistema 2.13 seja satisfeito, para quaisquer funções $\mathbf{w}^m, w^c, w^t \in \mathcal{H}_0^1$.

2.3 Método de Elementos Finitos

A escolha das funções 2.16 – que representa, na prática, escolha dos conjuntos S_u , S_v , S_p e S_c – para o domínio Ω completo de forma que forneçam uma boa aproximação para o problema 2.1 normalmente não é trivial. O Método de Elementos Finitos (MEF) permite que esta escolha seja feita para subdomínios de Ω , chamados de elementos finitos. Considerando um problema bidimensional, cada elemento que compõe o domínio possui uma área A_e , de maneira que, se o domínio completo, que possui área A , foi particionado em m elementos, temos que $\sum_{e=1}^m A_e = A$. No caso limite em que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_e = 0 \quad (2.19)$$

recupera-se o problema não discreto, com elementos de área infinitesimal. Daí o método receber o nome de elementos finitos. Após a decomposição do domínio em m elementos Ω_e (formando uma malha de elementos finitos), o domínio original Ω é aproximado pelo domínio discreto Ω_h , e o sistema 2.13 é definido para cada elemento, de tal forma que o problema em Ω é aproximado por

$$\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left[\Lambda \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot \mathbf{w}^m - \frac{1}{\rho} \Lambda P \nabla \cdot \mathbf{w}^m + \nu \Lambda \nabla \mathbf{V} : \nabla \mathbf{w}^m - \Lambda \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}^m \right] d\Omega_e = 0 \quad (2.20a)$$

$$\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \nabla \cdot (\Lambda \mathbf{V}) w^c d\Omega_e = 0 \quad (2.20b)$$

$$\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left[\Lambda \frac{DC}{Dt} w^t - \kappa \Lambda \nabla C \cdot \nabla w^t - \Lambda \bar{S} w^t \right] d\Omega_e = 0 \quad (2.20c)$$

Note que a equação 2.20a pode ser decomposta em duas parcelas dadas por

$$\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left[\Lambda \frac{DU}{Dt} w^x - \frac{1}{\rho} \Lambda P \frac{\partial w^x}{\partial x} + \nu \Lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial w^x}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial w^y}{\partial x} \right) - \Lambda g_x w^x \right] d\Omega_e = 0 \quad (2.21a)$$

$$\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left[\Lambda \frac{DV}{Dt} w^y - \frac{1}{\rho} \Lambda P \frac{\partial w^y}{\partial y} + \nu \Lambda \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial w^x}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial w^y}{\partial y} \right) - \Lambda g_y w^y \right] d\Omega_e = 0 \quad (2.21b)$$

de maneira que 2.20a é satisfeita para soluções \mathbf{V} , P e C que satisfazem 2.21a e 2.21b independentemente. As funções que compõem as bases para \mathcal{H}^u , \mathcal{H}^v , \mathcal{H}^p e \mathcal{H}^c são chamadas, no contexto do método de elementos finitos, de funções de forma do elemento ou funções de interpolação do elemento. Podemos construir Λ a partir de uma combinação linear da base de \mathcal{H}^1 , i.e., $\Lambda \approx \sum_{i=0}^{np} N_i^\Lambda \Lambda_i$, onde Λ_i representa os valores nodais de Λ . Considerando 2.21, a partir das funções 2.16 escolhidas para cada elemento, podemos reescrever o problema dado por 2.20 na forma

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k \sum_{i=1}^{nu} N_i^u \frac{Du_i}{Dt} \sum_{j=1}^{nu} N_j^{w^x} w_j^x d\Omega_e - \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \frac{1}{\rho_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k \sum_{i=1}^{np} N_i^p p_i \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial N_j^{w^x}}{\partial x} w_j^x d\Omega_e + \\ & + \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \nu_e \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k \left[\sum_{i=1}^{nu} \frac{\partial N_i^u}{\partial x} u_i \sum_{j=1}^{nu} \frac{\partial N_j^{w^x}}{\partial x} w_j^x + \sum_{i=1}^{nu} \frac{\partial N_i^u}{\partial y} u_i \sum_{j=1}^{nu} \frac{\partial N_j^{w^y}}{\partial x} w_j^y \right] d\Omega_e + \\ & - \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k g_x \sum_{i=1}^{nu} N_i^{w^x} w_i^x d\Omega_e = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k \sum_{i=1}^{nv} N_i^v \frac{Du_i}{Dt} \sum_{j=1}^{nv} N_j^{w^y} w_j^y d\Omega_e - \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \frac{1}{\rho_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k \sum_{i=1}^{np} N_i^p p_i \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial N_j^{w^y}}{\partial y} w_j^y d\Omega_e + \\
& + \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \nu_e \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k \left[\sum_{i=1}^{nv} \frac{\partial N_i^v}{\partial x} v_i \sum_{j=1}^{nv} \frac{\partial N_j^{w^x}}{\partial y} w_j^x + \sum_{i=1}^{nv} \frac{\partial N_i^v}{\partial y} v_i \sum_{j=1}^{nv} \frac{\partial N_j^{w^y}}{\partial y} w_j^y \right] d\Omega_e + \\
& - \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k g_y \sum_{i=1}^{nv} N_i^{w^y} w_i^y d\Omega_e = 0
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \left[\sum_{k=1}^{np} \sum_{i=1}^{nu} \frac{\partial}{\partial x} (N_k^\Lambda N_i^u) \Lambda_k u_i \sum_{j=1}^{np} N_j^{w^c} w_j^c + \sum_{k=1}^{np} \sum_{i=1}^{nv} \frac{\partial}{\partial y} (N_k^\Lambda N_i^v) \Lambda_k v_i \sum_{j=1}^{np} N_j^{w^c} w_j^c \right] d\Omega_e = 0 \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{nc} N_k^\Lambda \Lambda_k \sum_{i=1}^{nc} N_i^c \frac{Dc_i}{Dt} \sum_{j=1}^{nc} N_j^{w^t} w_j^t d\Omega_e + \\
& - \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \kappa_e \sum_{k=1}^{nc} N_k^\Lambda \Lambda_k \left[\sum_{i=1}^{nc} \frac{\partial N_i^c}{\partial x} c_i \sum_{j=1}^{nc} \frac{\partial N_j^{w^t}}{\partial x} w_j^t + \sum_{i=1}^{nc} \frac{\partial N_i^c}{\partial y} c_i \sum_{j=1}^{nc} \frac{\partial N_j^{w^t}}{\partial y} w_j^t \right] d\Omega_e + \\
& - \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{nc} N_k^\Lambda \Lambda_k \bar{S} \sum_{i=1}^{nc} N_i^{w^t} w_i^t d\Omega_e = 0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

onde ρ_e , ν_e e κ_e representam parâmetros físicos – densidade, viscosidade cinemática e difusividade térmica, respectivamente – constantes por elemento.

Levando em conta que as funções de ponderação são arbitrariamente escolhidas e que os valores nodais dos campos de velocidade, pressão e temperatura dependem apenas do tempo, as equações 2.22 a 2.25 podem ser reescritas de maneira que o problema seja matricialmente representado por

$$\mathbf{M}_x \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \mathbf{G}_x \mathbf{p} + (\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yx}) \mathbf{u} = \mathbf{F}_x \tag{2.26a}$$

$$\mathbf{M}_y \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{G}_y \mathbf{p} + (\mathbf{K}_{xy} + \mathbf{K}_{yy}) \mathbf{v} = \mathbf{F}_y \tag{2.26b}$$

$$\mathbf{D}_x \mathbf{u} + \mathbf{D}_y \mathbf{v} = 0 \tag{2.26c}$$

$$\mathbf{M}_c \frac{D\mathbf{c}}{Dt} + (\mathbf{K}_{cx} + \mathbf{K}_{cy}) \mathbf{c} = \mathbf{F}_c \tag{2.26d}$$

onde $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_{nu}]$, $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_{nv}]$, $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_{np}]$ e $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_{nc}]$ (cometendo

certo abuso de notação, o vetor \mathbf{v} aqui representa o vetor que contém os valores nodais da componente v do campo de velocidade, não o vetor velocidade das equações do sistema 2.1). As equações 2.26a, 2.26b e 2.26c são acopladas e compõem um único sistema de equações $\mathbf{Ae} = \mathbf{f}$, que será detalhado na seção 2.5. A equação 2.26d compõe outro sistema, $\mathbf{A}_c\mathbf{c} = \mathbf{f}_c$, acoplado ao primeiro através do campo de velocidade. Introduzindo os índices i e j correspondentes à matriz \mathbf{A} , e m e n correspondentes à matriz \mathbf{A}_c , e denotando a operação de atribuição por \leftarrow , as matrizes componentes do sistema global 2.26 são construídas por

$$\mathbf{M}_{x,ij} \leftarrow \mathbf{M}_{x,ij} + \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k N_i^u N_j^{w^x} d\Omega_e \quad (2.27a)$$

$$\mathbf{M}_{y,ij} \leftarrow \mathbf{M}_{y,ij} + \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k N_i^v N_j^{w^y} d\Omega_e \quad (2.27b)$$

$$\mathbf{G}_{x,ij} \leftarrow \mathbf{G}_{x,ij} - \frac{1}{\rho_e} \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k N_i^p \frac{\partial N_j^{w^x}}{\partial x} d\Omega_e \quad (2.27c)$$

$$\mathbf{G}_{y,ij} \leftarrow \mathbf{G}_{y,ij} - \frac{1}{\rho_e} \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k N_i^p \frac{\partial N_j^{w^y}}{\partial y} d\Omega_e \quad (2.27d)$$

$$\mathbf{K}_{xx,ij} \leftarrow \mathbf{K}_{xx,ij} + \nu_e \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k \frac{\partial N_i^u}{\partial x} \frac{\partial N_j^{w^x}}{\partial x} d\Omega_e \quad (2.27e)$$

$$\mathbf{K}_{yx,ij} \leftarrow \mathbf{K}_{xy,ij} + \nu_e \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k \frac{\partial N_i^u}{\partial y} \frac{\partial N_j^{w^y}}{\partial x} d\Omega_e \quad (2.27f)$$

$$\mathbf{K}_{xy,ij} \leftarrow \mathbf{K}_{yx,ij} + \nu_e \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k \frac{\partial N_i^v}{\partial x} \frac{\partial N_j^{w^x}}{\partial y} d\Omega_e \quad (2.27g)$$

$$\mathbf{K}_{yy,ij} \leftarrow \mathbf{K}_{yy,ij} + \nu_e \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k \frac{\partial N_i^v}{\partial y} \frac{\partial N_j^{w^y}}{\partial y} d\Omega_e \quad (2.27h)$$

$$\mathbf{D}_{x,ij} \leftarrow \mathbf{D}_{x,ij} + \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} \frac{\partial}{\partial x} (N_k^\Lambda N_i^u) \Lambda_k N_j^{w^c} d\Omega_e \quad (2.27i)$$

$$\mathbf{D}_{y,ij} \leftarrow \mathbf{D}_{y,ij} + \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} \frac{\partial}{\partial y} (N_k^\Lambda N_i^v) \Lambda_k N_j^{w^c} d\Omega_e \quad (2.27j)$$

$$\mathbf{M}_{c,mn} \leftarrow \mathbf{M}_{c,mn} + \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k N_m^c N_n^{w^t} d\Omega_e \quad (2.27k)$$

$$\mathbf{K}_{cx,mn} \leftarrow \mathbf{K}_{cx,mn} + \kappa_e \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k \frac{\partial N_m^c}{\partial x} \frac{\partial N_n^{w^t}}{\partial x} d\Omega_e \quad (2.27l)$$

$$\mathbf{K}_{cy,mn} \leftarrow \mathbf{K}_{cy,mn} + \kappa_e \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k \frac{\partial N_m^c}{\partial y} \frac{\partial N_n^{w^t}}{\partial y} d\Omega_e \quad (2.27m)$$

$$\mathbf{F}_{x,i} \leftarrow \mathbf{F}_{x,i} + \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k g_x N_i^{w^x} d\Omega_e \quad (2.27n)$$

$$\mathbf{F}_{y,i} \leftarrow \mathbf{F}_{y,i} + \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{np} N_k^\Lambda \Lambda_k g_y N_i^{w^y} d\Omega_e \quad (2.27o)$$

$$\mathbf{F}_{c,m} \leftarrow \mathbf{F}_{c,m} + \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{nc} N_k^\Lambda \Lambda_k \bar{S} N_m^{w^t} d\Omega_e \quad (2.27p)$$

As integrais são calculadas numericamente pelo método de Quadratura Gaussiana (ERN; GUERMOND, 2004).

2.3.1 Elementos de malha

O domínio Ω_h é discretizado em uma malha de elementos triangulares. A escolha do triângulo se deve ao fato de este ser o polígono mais simples para aproximação de geometrias bi-dimensionais irregulares. Segundo Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004), outra vantagem do elemento triangular são os avanços recentes em técnicas de geração de malhas não-estruturadas e adaptativas. Segundo o método de Galerkin, a dimensão do espaço de soluções do problema é reduzida para dimensão finita. O método de Elementos Finitos permite que este espaço seja definido para sub-regiões do domínio Ω_h , através da escolha das funções de forma do elemento, que são base para os espaços de solução das variáveis do problema. As estruturas das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{A}_c dependem da escolha dos espaços de soluções para o par velocidade-pressão, de maneira que um bom condicionamento do sistema linear depende das dimensões escolhidas. A condição LBB (formulada por Ladyzhenskaya, Babuška e Brezzi, na década de 1970) estabelece que os espaços de pressão e velocidade não podem ser escolhidos arbitrariamente, mas devem ser compatíveis (DONEA; HUERTA, 2003). Seguindo tais critérios, o elemento adotado para o par velocidade-pressão é o elemento mini, que possui quatro nós para velocidade (três nos vértices com interpolação linear e um no centroide com interpolação cúbica) e três nós para pressão (nos vértices com interpolação linear).

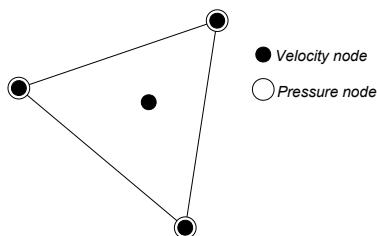


Figura 2.1: Elemento mini. Os nós menores, pintados de preto, são de velocidade, e os nós maiores, em branco, são de pressão.

Com relação ao campo de temperatura, é adotado o elemento linear, que possui três nós para temperatura, nós vértices, com interpolação linear (assim como o campo de pressão).

2.4 Método Semi-Lagrangiano

O método de Galerkin implementado provê discretização espacial, apenas, deixando o sistema 2.26 contínuo no tempo (razão pela qual o esquema Galerkin empregado é dito semi-discreto). Os esquemas Lagrangianos oferecem grande limitação aos problemas de fluidos pelo alto custo de reconstrução da malha e pelo alto grau de deformação que ela sofre em função do campo de velocidade. Este método é indicado para problemas de mecânica dos sólidos, para captura de pequenas deformações do domínio. O método Semi-Lagrangiano (RANDALL, 2009) permite a escolha de passos de tempo grandes (em contraste com esquemas Eulerianos), sendo estável independentemente do passo de tempo escolhido. É, por isso, largamente empregado na simulação de fenômenos climáticos. No entanto, apesar de o avanço no tempo não afetar a estabilidade, a precisão numérica é influenciada por ele. Segundo o método Semi-Lagrangiano, cada nó da malha representa o ponto de chegada de um ponto material de partida, de acordo com uma trajetória, de tal forma que, a cada passo de tempo, é feita uma busca retroativa pelo ponto de partida. O esquema de discretização temporal pode ser de primeira ordem, segunda ordem e assim por diante. O valor da variável de partida é calculado por interpolação dos valores nodais do elemento que o contém. O modelo numérico deste trabalho utiliza uma formulação Semi-Lagrangiana de primeira ordem para discretização temporal das equações de quantidade de movimento e de transporte de escalar. Sendo Δt o passo de tempo adotado, tal que, n passos após o instante inicial t_0 , o instante de tempo t seja dado por $t = t_0 + n\Delta t$, as derivadas materiais de \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{c} são aproximadas por

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \approx \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}_d^n}{\Delta t} \quad (2.28)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \approx \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}_d^n}{\Delta t} \quad (2.29)$$

$$\frac{D\mathbf{c}}{Dt} \approx \frac{\mathbf{c}^{n+1} - \mathbf{c}_d^n}{\Delta t} \quad (2.30)$$

O sistema 2.26 pode então ser reescrito como

$$\mathbf{M}_x \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}_d^n}{\Delta t} + \mathbf{G}_x \mathbf{p}^{n+1} + [\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yx}] [\lambda \mathbf{u}^{n+1} + (1 - \lambda) \mathbf{u}_d^n] = \mathbf{F}_x \quad (2.31a)$$

$$\mathbf{M}_y \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}_d^n}{\Delta t} + \mathbf{G}_y \mathbf{p}^{n+1} + [\mathbf{K}_{xy} + \mathbf{K}_{yy}] [\lambda \mathbf{v}^{n+1} + (1 - \lambda) \mathbf{v}_d^n] = \mathbf{F}_y \quad (2.31b)$$

$$\mathbf{D}_x \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{D}_y \mathbf{v}^{n+1} = 0 \quad (2.31c)$$

$$\mathbf{M}_c \frac{\mathbf{c}^{n+1} - \mathbf{c}_d^n}{\Delta t} + [\mathbf{K}_{cx} + \mathbf{K}_{cy}] [\lambda \mathbf{c}^{n+1} + (1 - \lambda) \mathbf{c}_d^n] = \mathbf{F}_c \quad (2.31d)$$

onde o coeficiente λ varia dentro do intervalo $[0, 1]$ e representa uma família de métodos de discretização temporal (DONEA; HUERTA, 2003). Os valores de λ mais empregados são $\lambda = 1$ (*Backward Euler*), $\lambda = 2/3$ (*Galerkin*) e $\lambda = 1/2$ (*Crank-Nicolson*). O único método com precisão de segunda ordem é o de Crank-Nicolson (DONEA; HUERTA, 2003).

2.5 Sistema algébrico

As equações de conservação de quantidade de movimento (2.31a e 2.31b) e de conservação de massa (2.31c) são resolvidas de forma acoplada, enquanto que a equação de transporte (2.31d) é resolvida de forma separada. Considerando um único vetor velocidade $\tilde{\mathbf{v}}$ que contém as componentes \mathbf{u} e \mathbf{v} , o sistema de equações algébricas constituído pelas equações 2.31a a 2.31c é dado por

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \lambda \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{D} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} \\ \mathbf{p}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\tilde{\mathbf{v}}} \\ \mathbf{b}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{v}}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

onde os vetores $\mathbf{b}_{\tilde{\mathbf{v}}}$ e \mathbf{b}_p representam as condições de contorno Dirichlet e o vetor $\mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{v}}}$ é proveniente dos valores conhecidos no passo de tempo n e é dado por

$$\mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{v}}} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \tilde{\mathbf{v}}_d^n - (1 - \lambda) \mathbf{K} \tilde{\mathbf{v}}_d^n + \mathbf{F} \quad (2.33)$$

considerando que o vetor \mathbf{F} contém \mathbf{F}_x e \mathbf{F}_y . As matrizes que aparecem em 2.32 são tais que

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_x & \\ & \mathbf{M}_y \end{bmatrix}_{2nu \times 2nu} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}_{xy} \\ \mathbf{K}_{yx} & \mathbf{K}_{yy} \end{bmatrix}_{2nu \times 2nu} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_x \\ \mathbf{G}_y \end{bmatrix}_{2nu \times np} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_y \end{bmatrix}_{np \times 2nu} \quad (2.37)$$

sendo $nu = nv$. O sistema linear correspondente ao campo de temperatura, por sua vez, é expresso por

$$\left[\frac{\mathbf{M}_c}{\Delta t} + \lambda \mathbf{K}_c \right] [\mathbf{c}^{n+1}] = [\mathbf{b}_c] + [\mathbf{r}_c] \quad (2.38)$$

onde \mathbf{K}_c é tal que

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cx} \\ \mathbf{K}_{cy} \end{bmatrix}_{nc \times nc} \quad (2.39)$$

e \mathbf{b}_c é o vetor que contém as condições de contorno e \mathbf{r}_c contém valores relativos ao passo de tempo anterior.

2.5.1 Método da projeção

Os campos de velocidade e pressão são computados separadamente pelo método da projeção discreto (CHORIN, 1968). Os métodos de projeção consistem no cálculo de uma velocidade intermediária que é projetada, pelo campo de pressão, no subespaço de campos vetoriais solenoidais (divergente da velocidade nulo). O método se baseia na decomposição de Helmholtz, segundo a qual um campo vetorial pode ser decomposto na soma de uma parcela solenoidal e outra irrotacional. A parcela irrotacional pode ser substituída pelo gradiente de um campo escalar ϕ , tendo em vista que $\nabla \times \nabla \phi = 0$. A decomposição de Helmholtz para o campo de velocidade \mathbf{w} resulta em

$$\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{v}} + \nabla \phi \quad (2.40)$$

onde $\tilde{\mathbf{v}}$ é o campo de velocidade que satisfaz a conservação de massa (solenoidal). Aplicando o divergente na equação 2.40, obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \nabla^2 \phi \quad (2.41)$$

Levando em conta que $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0$, podemos escrever

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \nabla^2 \phi \quad (2.42)$$

Em se conhecendo \mathbf{w} é possível determinar o campo escalar ϕ a partir de 2.42 e, a partir deste, calcular o campo de velocidade que satisfaz a conservação de massa por

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{w} - \nabla \phi \quad (2.43)$$

O método da projeção discreto se baseia nos passos descritos pelas equações 2.40 a 2.43, em que o escalar ϕ representa o campo de pressão, através da decomposição do sistema de equações discreto 2.32. Introduzindo a matriz \mathbf{B} tal que

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \lambda \mathbf{K} \quad (2.44)$$

a fatoração LU em blocos do sistema 2.32 resulta em

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{D} & -\mathbf{DB}^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{G} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\tilde{\mathbf{v}}} \\ \mathbf{b}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{v}}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

O sobrescrito $n + 1$ foi omitido para simplificar a notação, mas os vetores $\tilde{\mathbf{v}}$ e \mathbf{p} são referentes aos campos de velocidade e pressão no tempo $n + 1$. Operando a multiplicação da matriz triangular superior pelo vetor de incógnitas, temos que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{G} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{p} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Substituindo 2.46 em 2.45, obtemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{D} & -\mathbf{DB}^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{p} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\tilde{\mathbf{v}}} \\ \mathbf{b}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{v}}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Fazendo $\nabla \phi = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{p}$, a equação 2.43 nos permite escrever

$$\mathbf{B}\mathbf{w} = \mathbf{b}_{\tilde{\mathbf{v}}} + \mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{v}}} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{w} - \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{b}_p \quad (2.49)$$

onde $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{p}$. As equações 2.48 e 2.49 fornecem os campos \mathbf{w} e \mathbf{p} , a partir dos quais podemos determinar o campo de velocidade solenoidal $\tilde{\mathbf{v}}$, através de

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{w} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{p} \quad (2.50)$$

2.5.2 Estrutura dos sistemas

A solução de 2.32 segundo o método da projeção resulta em dois sistemas lineares distintos. Desta forma, as distribuições de velocidade, pressão e temperatura são obtidas a partir da solução de três sistemas lineares.

A figura a seguir representa a esparsidade de uma matriz típica \mathbf{B} associada ao sistema 2.48.

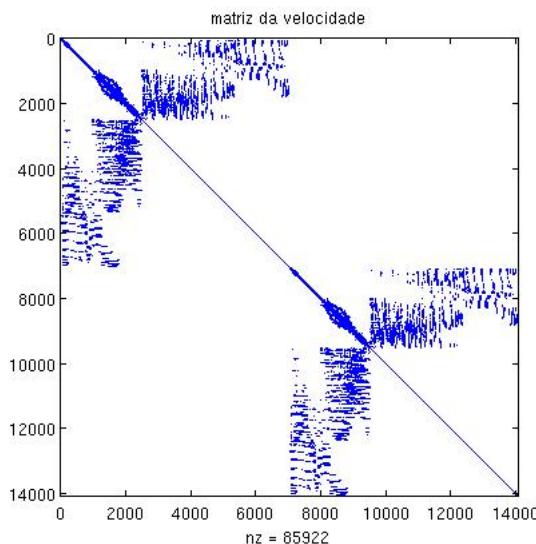


Figura 2.2: Matriz de rigidez do sistema linear associado ao campo de velocidade.

A matriz possui 14.058^2 elementos, e o grau de esparsidade é de 0,0435%. O número de condicionamento é $1,7703 \times 10^4$, utilizando norma-1 e aproximação numérica da norma da inversa da matriz. É possível observar pela imagem que os efeitos de convecção são mais fortes do que os de difusão, tendo em vista que os elementos não-nulos das regiões da matriz que são ocupadas apenas pela matriz do termo difusivo, i.e., regiões

associadas a K_{xy} e K_{yx} , são muito menores do que os elementos não-nulos das regiões em que há contribuição das matrizes M_x e M_y , do termo convectivo.

A figura 2.3 mostra uma representação da estrutura básica da matriz do sistema linear associado ao campo de pressão (2.49), dada por $DB^{-1}G$.

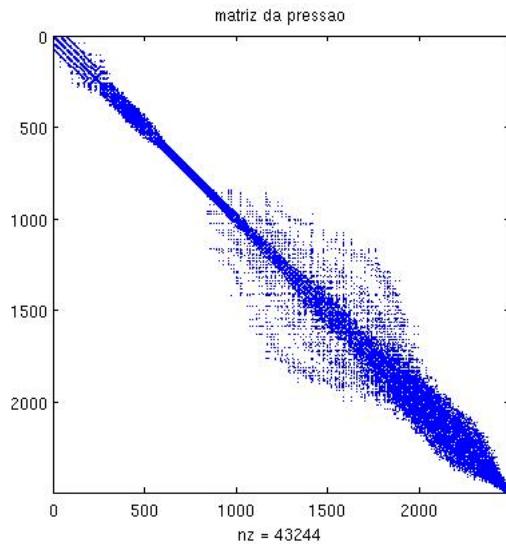


Figura 2.3: Matriz de rigidez do sistema linear associado ao campo de pressão.

Esta matriz é simétrica e positiva-definida. Possui 2492^2 elementos e grau de esparcidade de 0,6964%. O número de condicionamento é de $4,9380 \times 10^5$.

Por último, a matriz associada ao sistema para o campo de temperatura é mostrada na figura 2.4.

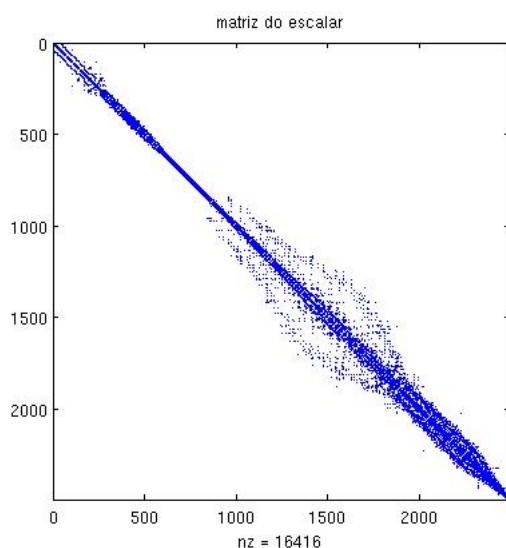


Figura 2.4: Matriz de rigidez do sistema linear associado ao campo escalar de temperatura.

O número de elementos é igual ao da matriz da pressão (já que o número de nós de pressão é igual ao número de nós de temperatura) e a esparsidade e número de condicionamento são, respectivamente, 0, 2643% e $1,6737 \times 10^3$. As matrizes dos três sistemas são simétricas positivas-definidas. Os três sistemas são resolvidos pelo método de gradiente conjugado pré-condicionado.

A seguir é apresentado um algoritmo básico de simulação.

Algoritmo 2.1 *Script de simulação*

1. leitura dos diretórios para simulação
2. leitura dos dados da malha
3. leitura das condições de contorno
4. atribuição das condições iniciais
5. cálculo e armazenamento das coordenadas dos centroides
6. definição da temperatura ambiente e densidade de referência
7. definição do passo de tempo
8. definição do método de discretização temporal
9. cálculo inicial das matrizes
10. avanço de um passo de tempo com as condições iniciais
11. atualização das matrizes
12. atribuição das condições de contorno
13. resolução do sistema linear

Para cada passo de tempo seguinte, **faça**:

14. montagem das matrizes associadas aos termos difusivos
15. cálculo da evaporação
16. cálculo da velocidade e temperatura no tempo anterior
17. montagem das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{A}_c
18. atribuição das condições de contorno
19. resolução do sistema linear

Fim para

As tarefas realizadas por este *script* são precedidas de uma fase de pré-processamento, na qual os dados geográficos são definidos e a malha de elementos finitos é gerada.

CAPÍTULO 3

DADOS GEOGRÁFICOS

Este capítulo apresenta brevemente a estrutura criada para manuseio dos dados geográficos relacionados aos escoamentos ambientais abordados. Os códigos responsáveis por essas tarefas foram desenvolvidos pelo grupo de pesquisa envolvido em projeto cujo objetivo era a construção de uma ferramenta para simulações numéricas de escoamentos em ambientes de reservatórios hidrelétricos (Projeto GESAR), no qual teve participação o presente trabalho.

3.1 Dados de topografia

A definição do domínio para escoamentos ambientais está diretamente associada à aquisição e manipulação dos dados de terreno da região do escoamento. Um conjunto de rotinas computacionais foi criado para leitura de arquivos de terreno do tipo *shapefile* para definição do domínio e entrada de dados para as rotinas de geração de malha. Segundo (HARMON; ANDERSON, 2003), as informações acerca do terreno podem ser armazenadas em dois tipos principais de arquivos: o tipo *raster* e o tipo *vector*. Arquivos *raster* armazenam informações em uma matriz de células, contendo informação sobre a cor (em RGB) ou a elevação do ponto em cada elemento da matriz. Arquivos *vector* são vetores de formas geométricas básicas, tais como linhas, curvas, polígonos, nas quais os dados geográficos estão armazenados, na forma de pontos. A manipulação de arquivos *raster* pelo computador é rápida, porém comportam menos informação do que arquivos *vector*. O *shapefile* (desenvolvido e regulamentado pela Environmental Systems Research Institute (ESRI)) é um tipo de arquivo *vector* e se refere, normalmente, a uma coleção de arquivos de extensão ".shp", ".shx", ".dbf" de mesmo prefixo.

A estrutura computacional criada para leitura e tratamento dos dados topográficos foi construída de tal forma que proporcionasse facilidade de manuseio e flexibilidade

nas etapas de pré-processamento. A construção da interface gráfica foi fundamental para chegar a esse objetivo, permitindo que todas as operações para seleção da região de estudo do terreno sejam feitas visualmente, por meio de poucos cliques do *mouse*. O módulo de terreno criado possui rotinas de leitura de arquivos tipo *raster* e tipo *shapefile*. A seguir, será descrito um caso de uso do módulo de terreno para leitura de um arquivo *shapefile*. O arquivo corresponde a uma área em Nova Friburgo, município do estado do Rio de Janeiro, próximo de $22,3^{\circ}\text{S}$ – $42,6^{\circ}\text{W}$. A figura 3.1 mostra uma visualização, através da interface gráfica criada, dos dados contidos no arquivo destacando a sub-região de interesse para a simulação (contida no retângulo). A interface apresentada pertence ao software FERSim, construído pelo grupo GESAR.

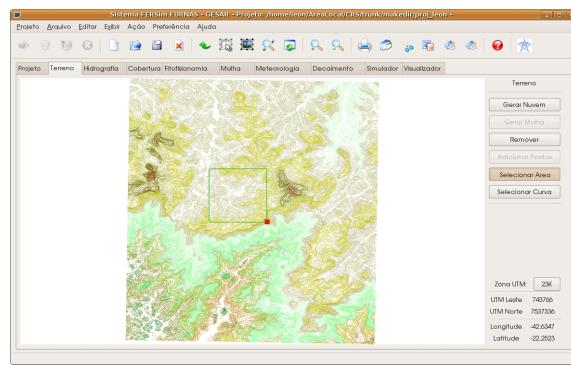


Figura 3.1: *Shapefile* completo (primeira etapa no tratamento dos dados de terreno) visualizado através da interface gráfica construída.

A partir da leitura dos dados completos é feito um corte horizontal (no plano *xy*) para delimitação mais precisa da região de interesse, conforme mostra a figura 3.2.

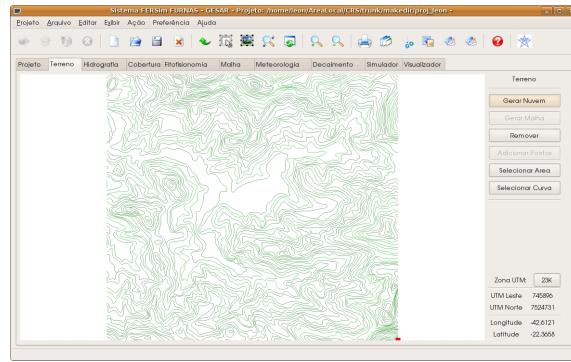


Figura 3.2: *Shapefile* apóis corte no plano horizontal (*xy*).

Ainda restam muitos pontos que não serão base para construção da malha de elementos finitos. Por isso, um corte por nível é feito. Dado um nível z_0 , o corte por nível elimina todas as curvas cuja elevação η é tal que $\eta > z_0$. A figura 3.3 mostra o resultado da aplicação desta rotina de corte.

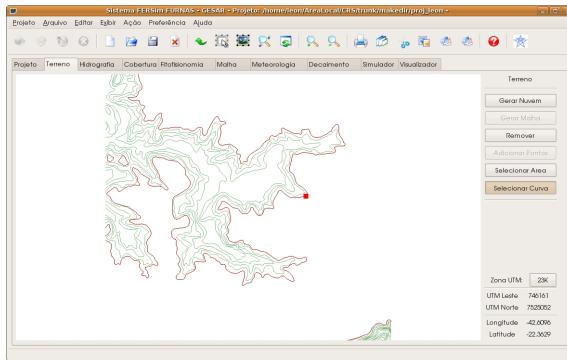


Figura 3.3: *Shapefile* após corte por nível.

Sucessivas operações de corte horizontal e por nível podem ainda ser feitas até que seja atingida a configuração adequada para os requisitos de modelagem.

3.2 Dados de hidrografia

O módulo responsável pelos dados de hidrografia possui rotinas para leitura de arquivos *shapefile*. Os dados de hidrografia também são armazenados em *shapefiles*. Neste caso, são vetores de linhas (coordenadas (x, y)) que descrevem a calha de um rio, ou potencial rio (resultante da inundação de uma região). A combinação dos dados de topografia com os dados de hidrografia é essencial para a construção da malha para o modelo 2DB. A figura 3.4 mostra o mapa de hidrografia correspondente à região da figura 3.1, visualizada pela interface gráfica.

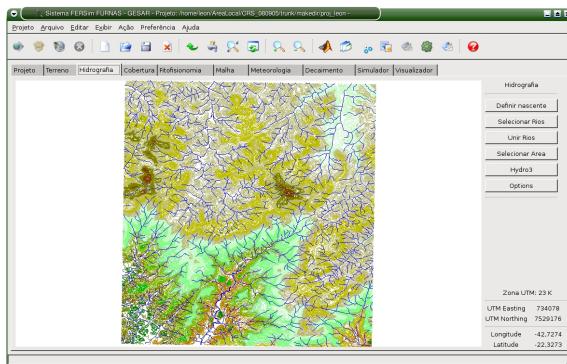


Figura 3.4: Mapa de hidrografia completo referente à região mostrada na figura 3.1.

A partir do arquivo de hidrografia é selecionada a direção da malha 2DB (como será visto no capítulo 4). A figura 3.5 mostra a direção selecionada (linha vermelha) a partir do mapa hidrográfico. A seleção é feita através da interface gráfica, por meio de clique nos trechos de rio, compondo o caminho do escoamento que será simulado.

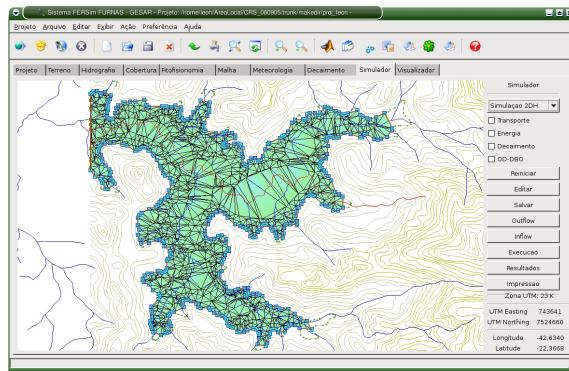


Figura 3.5: Direção da malha 2DB selecionada a partir do mapa de hidrografia.

A figura 3.5 mostra uma superposição de três camadas. Uma é composta das curvas de nível do arquivo de topologia. Outra, a do meio, é composta da malha 2dh (já gerada com os dados da região da figura 3.3. A camada mais à frente é a do mapa hidrográfico. O próximo capítulo (capítulo 4) descreve como estas informações são combinadas para gerar a malha 2DB.

CAPÍTULO 4

GERAÇÃO DE MALHA

A importação dos dados geográficos fornece ao módulo de geração de malha uma nuvem de pontos (x, y, z) , na qual são aplicados os algoritmos de triangulação. A malha 2DH (utilizada nas simulações 2DH) é construída a partir da triangulação dos pontos de coordenadas (x, y) , utilizando a coordenada z apenas para cálculo da profundidade, ao longo da qual são integradas as equações em 3D do modelo. A construção da malha 2DB (malha vertical, utilizada nas simulações 2DB) tem a malha 2DH como pré-requisito, já que dela são obtidas as coordenadas z do fundo e as distâncias para cada margem ao longo da direção preferencial. As seções seguintes dão mais detalhes acerca dos processos de geração de malha 2D.

4.1 Malha 2DH

A primeira etapa do processo de geração da malha 2DH é a aplicação de uma triangulação Delaunay (FILIPIAK, 1996) sobre a nuvem de pontos (x, y) . A figura 4.1 mostra uma nuvem de pontos no plano xy e o resultado da triangulação Delaunay nestes pontos.

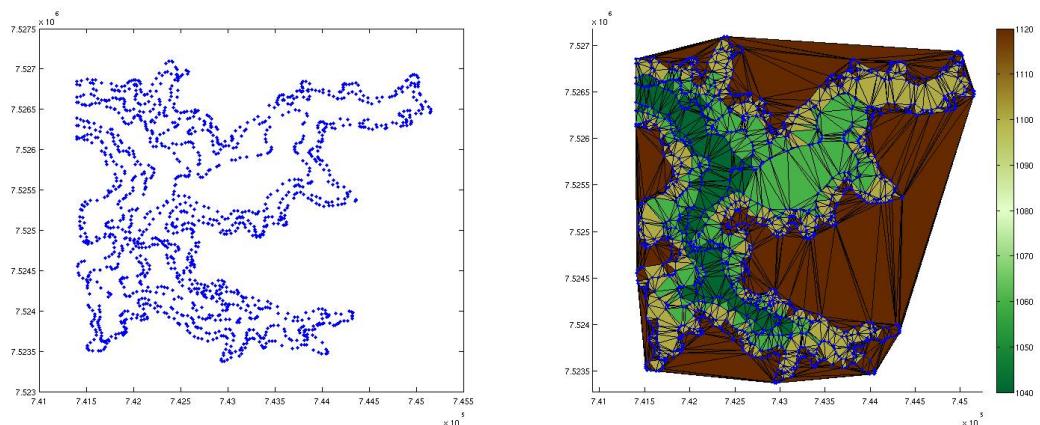


Figura 4.1: Nuvem de pontos e triangulação.

Esta primeira etapa de triangulação não cumpre com a condição de adaptabilidade ao contorno do domínio, como mostra a figura 4.1. Para tanto, é estabelecido um critério de eliminação dos triângulos fora do domínio com base na coordenada z dos pontos: os elementos que possuem os três vértices na cota máxima (maior valor de z) são eliminados. Esta é a segunda etapa do processo de geração, cujo resultado é apresentado pela figura 4.2.

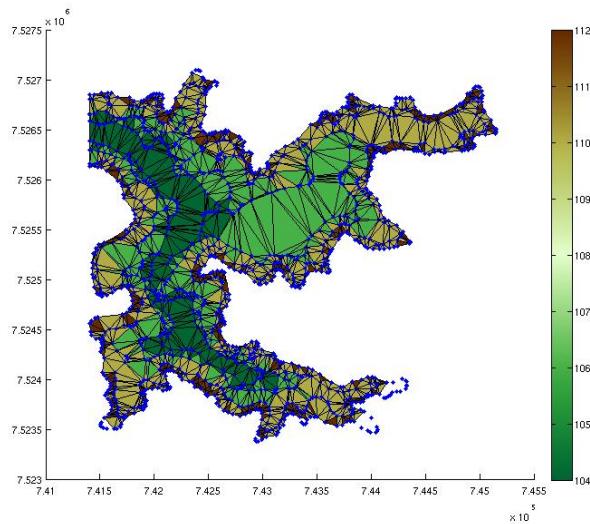


Figura 4.2: Malha após eliminação de triângulos fora do domínio.

Esta malha, de acordo com Filippiak (1996), já possui os requisitos para aplicação do Método de Elementos Finitos. O algoritmo de triangulação utilizado possui rotinas de verificação de casos como lado de triângulo passando por um ponto (além dos vértices) ou superposição de elementos. O módulo de geração de malha dispõe de rotinas de refinamento para controlar a distribuição de densidade dos pontos, permitindo o balanço entre precisão nos resultados e custo computacional. As operações de refinamento podem ser realizadas pela interface gráfica, o podem ser feitas em regiões arbitrárias da malha ou em toda ela. O código de triangulação empregado evita a geração de elementos excessivamente delgados, mas, dependendo da distribuição de pontos fornecida, alguns são inevitáveis.

4.2 Malha 2DB

O processo de geração da malha 2DB é mais complexo e passa por etapas de geração de pontos, triangulação, ajustes e cálculo de larguras (apesar de nesta última o processo de geração de malha já estar concluído). A nuvem de pontos gerada é estruturada, e o processo de triangulação foi desenvolvido para trabalhar com essa estrutura. O processo se inicia com a construção malha 2DH e com a seleção da calha do rio (direção preferencial ou crítica) através da importação dos dados de hidrografia, indicada pela linha azul na

figura 4.3 (à esquerda). Os pontos da calha são projetados no fundo da malha 2DH (com informação da coordenada z), conforme a figura 4.3.

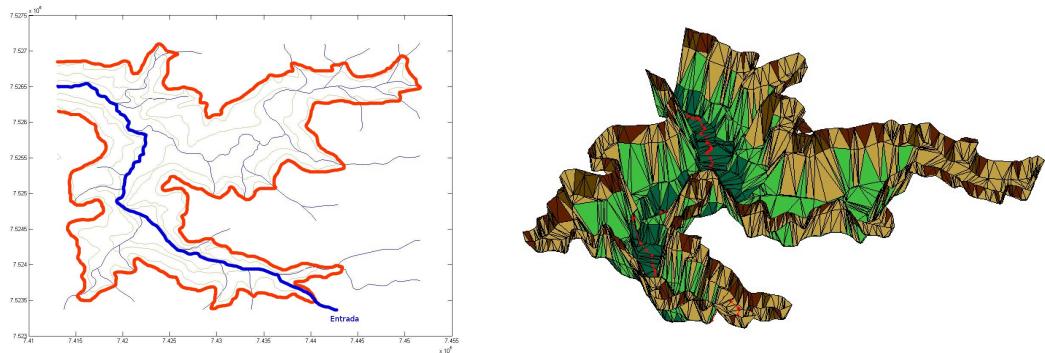


Figura 4.3: Projeção da calha no fundo da malha 2DH.

Tendo calculado as coordenadas z da calha, a partir da superfície são gerados pontos até o fundo para cada ponto (x, y) da calha, de acordo com uma distância Δz entre os níveis previamente especificada, formando colunas de pontos, aqui chamadas *palitos*. Sejam os pontos (x', z) pertencentes ao sistema bi-dimensional de coordenadas para o modelo 2DB. Podemos pensar na calha como uma sequência de n pontos (x_i, y_i, z_i) , de tal forma que cada coordenada x'_i correspondente seja calculada por

$$x'_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad (4.1)$$

com $i = 2, \dots, n$, sendo $x'_1 = 0$. A triangulação vertical (2DB) é realizada na nuvem de pontos (x', z) . A cada par de palitos consecutivos, o algoritmo de triangulação vertical monta triângulos unindo dois pontos de um palito e um do outro palito, conforme mostra a figura 4.4.

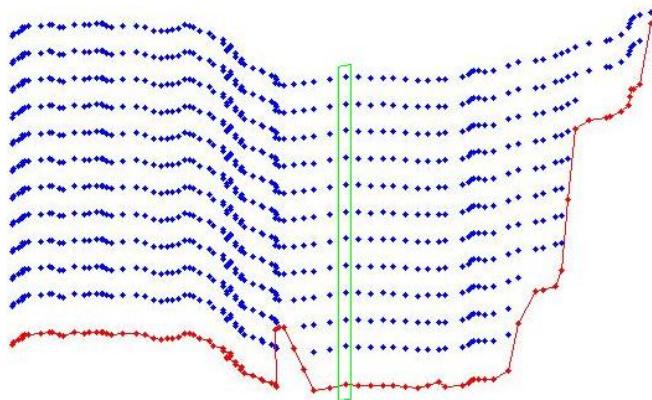


Figura 4.4: Nuvem de pontos da malha 2DB destacando um dos palitos.

Nas regiões onde o fundo é irregular, são inseridos pontos para que não sejam gerados elementos excessivamente delgados. A figura 4.5 ilustra este processo.

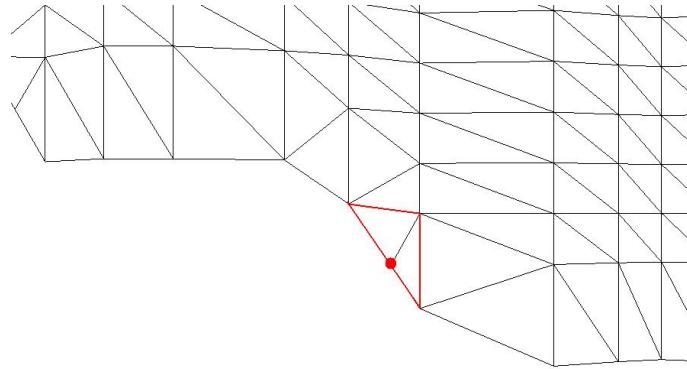


Figura 4.5: Fundo da malha 2DB destacando inserção de ponto em região inclinada do fundo.

A figura 4.6 mostra a malha 2DB no mesmo sistema de coordenadas da malha 2DH.

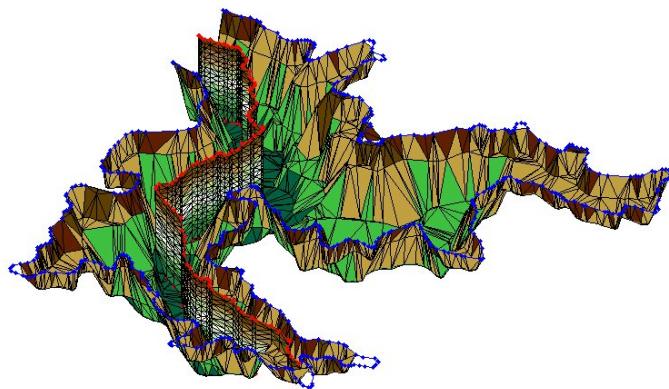


Figura 4.6: Malhas 2DB e 2DH no mesmo sistema de coordenadas.

Vemos que a malha 2DB representa um corte, seguindo uma direção irregular, da malha 2DH, segundo a calha do rio, obtida dos dados hidrográficos.

4.2.1 Cálculo das larguras

Cada ponto da malha 2DB está associado a uma largura, que, neste modelo, é dada pela soma das distâncias ao ponto mais próximo de cada margem do reservatório (informação que também é fornecida pela malha 2DH). Vimos que a malha 2DB é dividida em níveis. Para cada nível z_i é gerada uma sequência de pontos da margem a z_i . A busca pela menor distância à margem é feita dentro deste conjunto de pontos. A largura é armazenada como um dos atributos da malha 2DB.

O processo de geração da malha 2DB foi todo desenvolvido dentro deste projeto de mestrado.

CAPÍTULO 5

VALIDAÇÃO DO CÓDIGO

Dois testes foram realizados para validar os modelos e o código. O primeiro deles é uma validação experimental, realizada com o objetivo de avaliar o desempenho do modelo em problemas com gradientes de densidade, com a dimensão promediada ainda constante. O segundo teste de validação foi baseado na condição de conservação da massa e foi direcionado a verificar a capacidade do modelo de capturar os efeitos da variação na dimensão promediada.

5.1 Validação experimental

Foi realizada uma simulação experimental de um problema de correntes de gravidade (PATERSON et al., 2005), tendo em vista que este problema envolve escoamento no plano vertical, essencialmente 2D. Um flume, com 450cm de comprimento, 30cm de altura e 33cm de largura, foi preenchido (até uma altura de 25cm) de dois fluidos com densidades ρ distintas (figura 5.1): uma metade com uma solução de sal em água ($\rho = 1020\text{kg/m}^3$) e a outra com água ($\rho = 980\text{kg/m}^3$). À solução foi adicionada uma porção de permanganato de potássio (KMnO_4), para atuar como traçador. Os dois fluidos foram inicialmente separados por um anteparo vertical. O anteparo é, então, removido. O experimento foi modelado e simulado numericamente com o modelo deste trabalho.



Figura 5.1: Flume usado no experimento. A imagem retrata o início do experimento.

A figura 5.2 mostra *frames* sincronizados do escoamento dos resultados experimental e numérico para tempos $t = 2, 3, 5, 7, 9, 12, 15$ e 17 s.

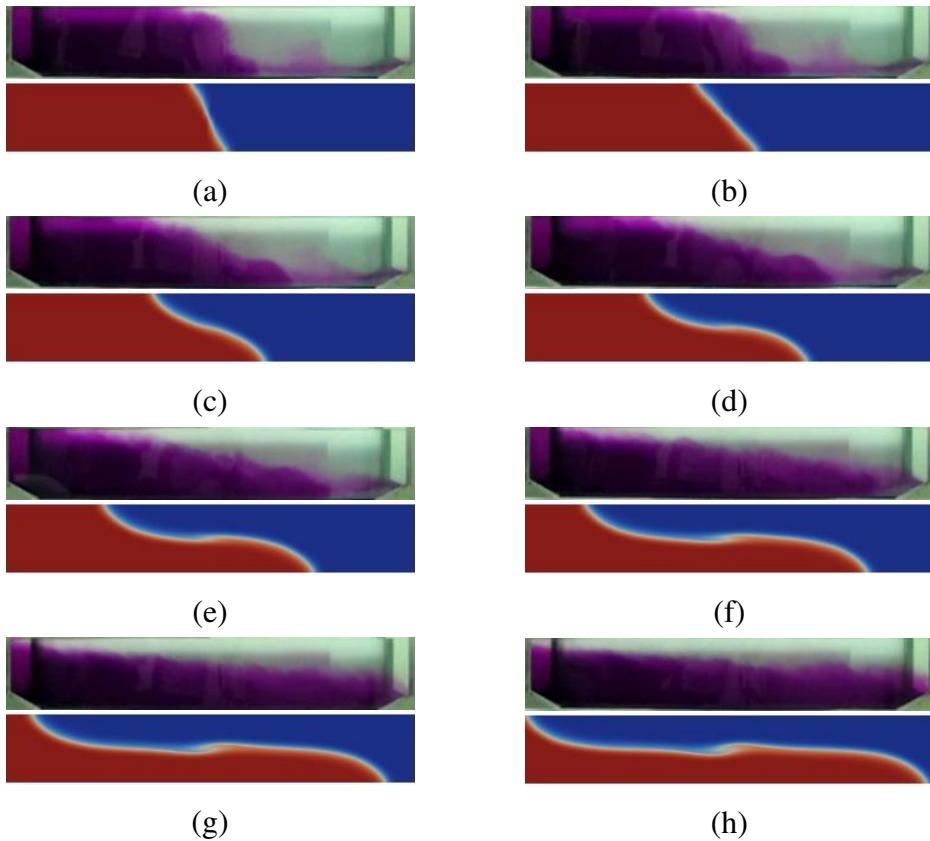


Figura 5.2: Validação experimental do código. As figuras apresentam a comparação entre os resultados das simulações experimental e numérica do problema de correntes de gravidade proposto. Para cada tempo, o *frame* superior é uma imagem do flume no qual correu o experimento, e o *frame* inferior é o resultado numérico obtido para o mesmo tempo.

Embora sem contar com um modelo de turbulência, a simulação numérica mostrou bons resultados de *timing*, que é um parâmetro relevante no processo de validação de um modelo. Observa-se que o perfil de mistura obtido numericamente pode ser melhorado através de um refinamento da malha, sem sobrecarga de custo computacional (cada rodada de simulação consumiu aproximadamente 20min para simular 17s de escoamento).

5.2 Validação física

A vantagem dos modelos 3D integrados em uma dimensão (2DB ou 2DH) com relação aos modelos 2D simples é levar em conta os efeitos da geometria do problema em três dimensões num escoamento bi-dimensional. Pensando na abordagem de um problema de escoamento em um reservatório pelo modelo 2DB, temos que, nas regiões onde o gradiente da largura do reservatório é Positivo, o gradiente de velocidade tende a diminuir (que será negativo se a profundidade for constante).

Um dos aspectos críticos na avaliação de soluções numéricas para as equações de Navier-Stokes é a conservação da massa.

Este capítulo apresenta a simulação de um problema de escoamento em canal de profundidade constante e largura variável, conforme mostrado na figura 5.2, utilizando o modelo 2DB. Uma vazão de entrada é imposta na extremidade esquerda do canal. Pela conservação da massa, a mesma vazão deve ser encontrada em todas as seções do canal, que possui 0,35m de altura e 4,50m de comprimento, de forma que o domínio Ω do problema é dado por

$$\Omega = \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4,50; 0 \leq y \leq 0,35\} \quad (5.1)$$

Como mostra a figura 5.2, a largura na saída é maior do que na entrada, de maneira que é esperada uma queda da velocidade na saída com relação à velocidade na entrada.

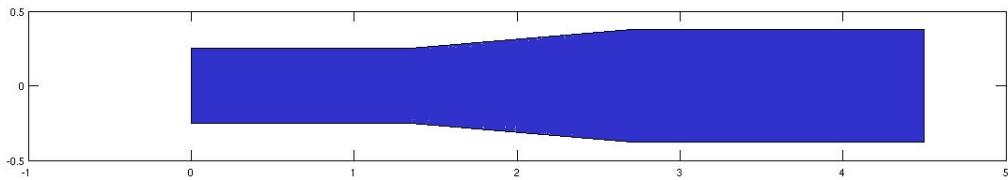


Figura 5.3: Canal com largura variável (área em azul, vista superior). A largura na entrada é de 0,50m, e, na saída, 0,75m. O aumento da largura começa a partir de 1,35m de comprimento, a partir da entrada, e para a 2,70m da entrada.

Uma vista lateral (no plano xz) do canal é mostrada na figura 5.2. As cores representam a distribuição da largura.

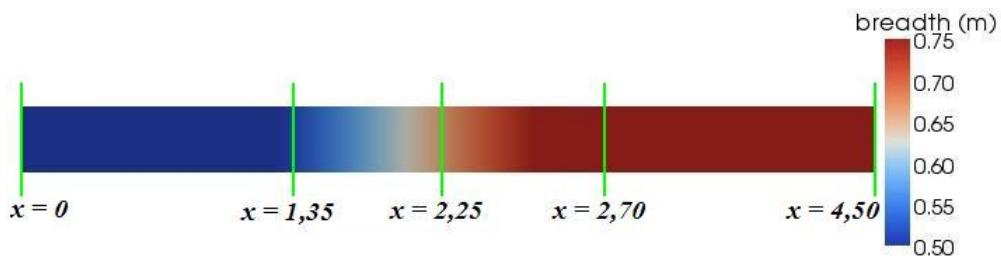


Figura 5.4: Vista lateral do canal. A vazão de entrada se dá pela extremidade esquerda do canal.

A velocidade de entrada é 0,1m/s, com componente vertical nula. A vazão foi medida em cinco seções do canal: na entrada ($x = 0$), três no terço mediano (a $x = 1,35$, $x = 2,25$ e $x = 2,70$) e na saída ($x = 4,50$). A figura 5.2 indica a posição das seções de controle da vazão. Foram simulados 45s de escoamento, com $\Delta t = 0,05s$ de intervalo entre cada passo de tempo (resultando em 900 passos). O fluido (inicialmente em repouso) transporta um escalar inerte, atuando como traçador. A distribuição do escalar transportado é mostrada nas figuras 5.2, 5.2 e 5.2 em diferentes tempos de simulação.



Figura 5.5: Distribuição do escalar transportado a 15s.



Figura 5.6: Distribuição do escalar transportado a 30s.



Figura 5.7: Distribuição do escalar transportado a 45s.

A figura 5.2 mostra a distribuição da componente horizontal da velocidade no final da simulação. O campo de velocidade não apresentou variações significativas durante o tempo simulado.

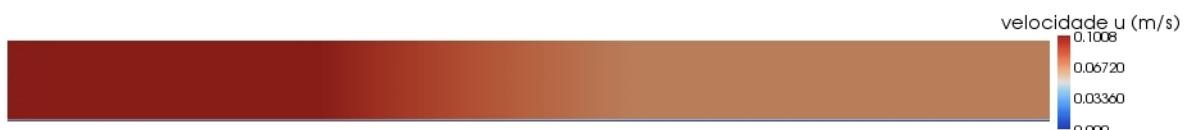


Figura 5.8: Distribuição da componente horizontal da velocidade a 45s.

A figura 5.2 mostra a variação da velocidade média horizontal ao longo do comprimento. Os valores de cada ponto da curva são uma média temporal da componente horizontal promediada ao longo de y .

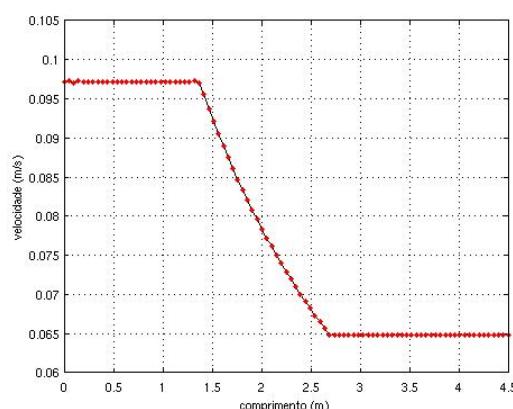


Figura 5.9: Variação da velocidade ao longo do canal.

Os pontos de velocidade de cada seção monitorada estão igualmente espaçados por uma distância $\Delta z = 0,025\text{m}$. Foi empregada uma malha de 3.348 nós (sem contar com os centroides) e 6.440 elementos, em que cada seção vertical possuía 36 pontos. Desta forma, sendo u_i a componente horizontal da velocidade no ponto i e B_{sec} a largura associada à seção, a vazão Q_{sec} na seção foi calculada pela expressão

$$Q_{sec} = \sum_{i=1}^{35} 0,5(u_i + u_{i+1})B_{sec}\Delta z \quad (5.2)$$

Os resultados da verificação são apresentados na tabela 5.9, mostrando as vazões máxima, mínima e média, ao longo do tempo, para cada uma das cinco seções monitoradas. A evolução das vazões nas seções de controle ao longo do tempo é mostrada no gráfico da figura 5.9.

| | vazão média (l/s) |
|------------|-------------------|
| $x = 0$ | 17,2500 |
| $x = 1,35$ | 17,2166 |
| $x = 2,25$ | 17,2176 |
| $x = 2,70$ | 17,2117 |
| $x = 4,50$ | 17,2107 |

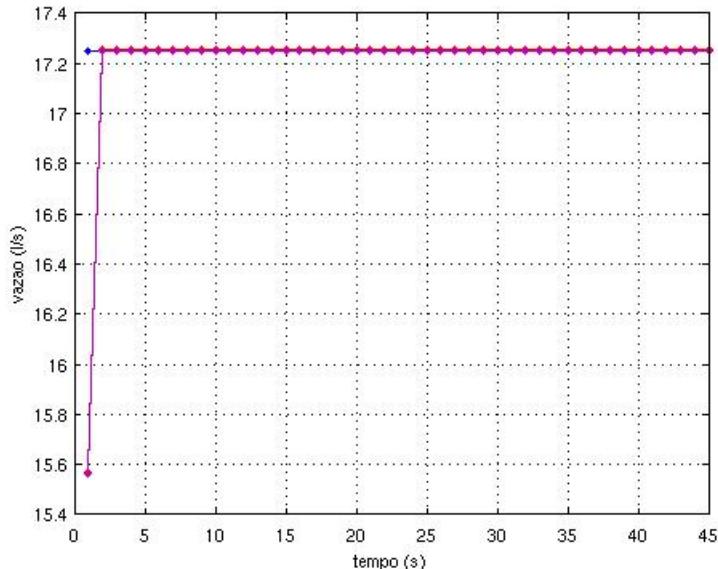


Figura 5.10: Variação da vazão em função do tempo para as seções de controle. As curvas apresentam, qualitativamente, o mesmo comportamento para todas as seções, exceto para a entrada.

CAPÍTULO 6

SIMULAÇÕES 2DH

6.1 A importância de usinas termelétricas no Brasil

O interesse por usinas geradoras de energia elétrica com ciclos a vapor tem crescido ao longo dos últimos anos no Brasil. Os principais fatores que impulsionam este crescimento são (i) os custos crescentes associados a projetos de estações hidrelétricas, seu longo tempo de construção e os impactos ambientais provocados pela barragem, e (ii) as novas oportunidades criadas pelos recentes leilões no mercado de energia.

As usinas termelétricas movidas a carvão, embora representem menos de 2% da energia nacional gerada, encontraram ainda um nicho. Uma nova geração de projetos de usinas a carvão modernas está em desenvolvimento.

A um destes projetos foi aplicado o modelo 2DH apresentado nesta dissertação: uma usina termelétrica a carvão com capacidade de geração de 600MW, próxima a um porto brasileiro.

Em geral, o fluido de trabalho de uma usina termelétrica convencional operando segundo ciclo Rankine pode ser resfriado de duas formas: pela passagem em torre de resfriamento ou resfriamento de passe-único (*once-through cooling*). Existem ainda alternativas menos usuais. A influência da tecnologia de resfriamento pode ser decisiva para o potencial de competitividade do projeto no leilão de energia: um sistema de circulação de água de passe-único que utiliza a água do mar ou do rio pode aumentar em até 2% a potência líquida na comparação com uma torre de resfriamento equivalente. No entanto, restrições ambientais internacionais, em especial as impostas pelo IFC/World Bank, além das imposições locais, determinam o acréscimo de temperatura máxima permitido no corpo aquático.

Portanto, torna-se importante, nas fases preliminares de desenvolvimento do projeto, a capacidade de determinar se o projeto atende tais requisitos. Se o corpo aquático é

grande o suficiente, ou se os sistemas de dispersão são muito custosos, então um sistema de resfriamento atmosférico pode ser a alternativa rentável para reduzir a temperatura final na região de descarga.

6.2 Problema estudado

No projeto estudado, a água utilizada para absorção do calor do ciclo térmico da usina é captada do mar e, após passagem pela usina, é descartada em um canal cuja finalidade é abaixar a temperatura da água a um valor aceitável para que retorne ao estuário. Duas restrições devem ser atendidas pelo projeto do canal: (i) a temperatura da água descartada no rio, a partir de um raio de 100m da saída do canal, deve ser menor ou igual que a temperatura da água no ponto de tomada da termelétrica acrescida de 3°C, e (ii) a temperatura da água na captação não deve sofrer acréscimos significativos causados pela água descartada (o que provocaria o curto circuito térmico). A segunda restrição surge de uma imposição da regulamentação ambiental de que o ponto de captação deve estar à jusante do rio e o ponto de descarte deve estar à montante. A finalidade da aplicação do modelo 2DH a este problema é analisar a eficiência de troca térmica de um projeto de resfriamento de passe-único e analisar a viabilidade técnica em função das duas restrições citadas (temperatura máxima a 100m da saída do canal e temperatura no ponto de captação). O estudo foi organizado em três etapas.

O plano de estudo da eficiência do projeto consiste na análise da capacidade do *design* inicial do canal, mostrado na figura 6.1, e, em função desta primeira análise, na elaboração e simulação de uma nova proposta para *design* do canal. A plataforma utilizada para correr as simulações foi um computador com processador Intel Core2 Duo de 3,0GHz com 2GB de memória RAM.

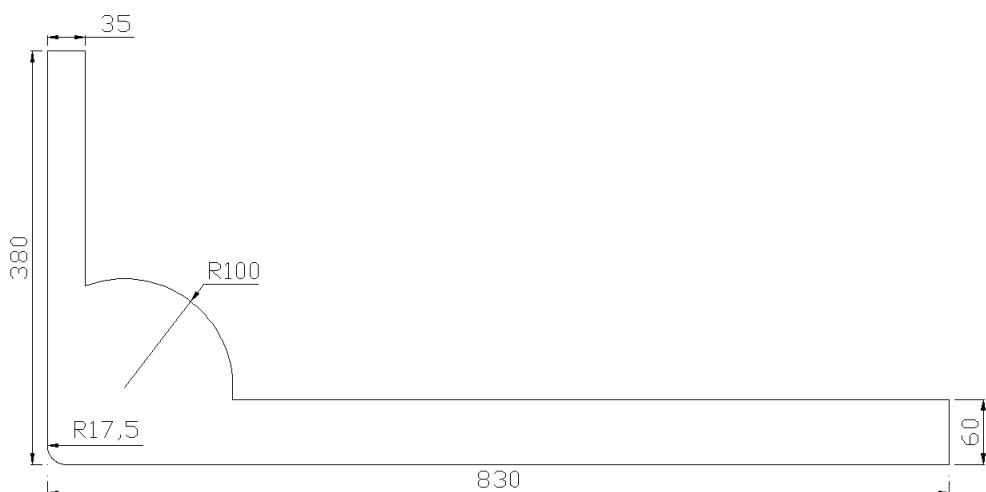


Figura 6.1: Canal1.

A vazão de circulação da água de resfriamento é de $40.000\text{m}^3/\text{h}$, aproximadamente. O calor absorvido a cada ciclo gera uma elevação de 8°C na temperatura da água, de acordo com o projeto da usina. Portanto, de acordo as restrições impostas pelos órgãos ambientais, o calor que deve ser removido durante a passagem pelo canal é dado por

$$Q = 5\dot{m}c \quad (6.1)$$

sendo \dot{m} a vazão mássica de água e c o calor específico da água. Portanto, a carga térmica que deve ser atendida pelo projeto, assumindo $c = 4180\text{J/Kg}^\circ\text{C}$, é de 232MW .

6.3 Balanço térmico unidimensional

Antes das simulações hidrodinâmicas, a capacidade de resfriamento do canal foi estimada através de um balanço térmico unidimensional. Para tanto, o canal foi dividido em trechos, conforme figura 6.2

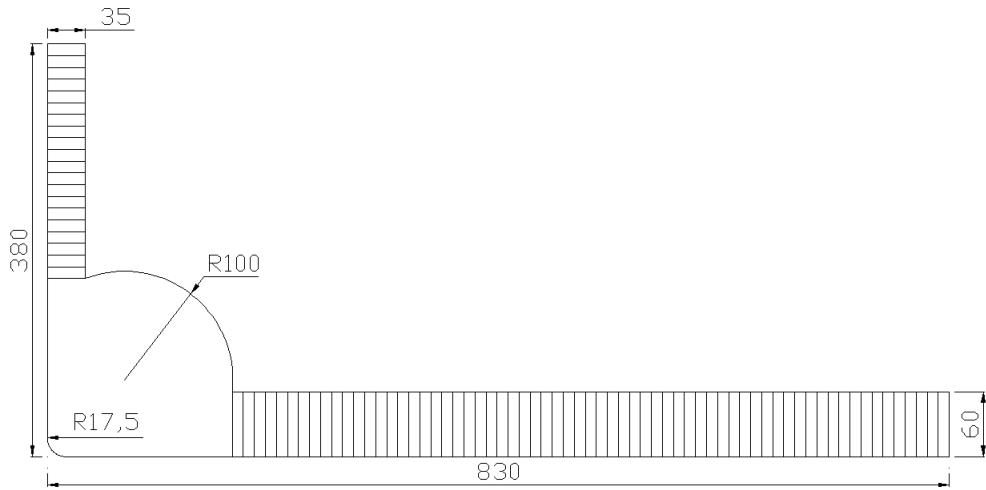


Figura 6.2: Canal1 dividido em trechos.

Cada trecho possui uma temperatura de entrada e uma de saída, um volume e uma área de superfície. A temperatura de saída de um trecho é a temperatura de entrada do trecho subsequente. Dois modelos de troca térmica foram empregados no cálculo das trocas térmicas. Um segue os parâmetros utilizados em (INCROPERA; DEWITT, 2001) e leva em conta evaporação e convecção térmica. O outro emprega o modelo de transferência de calor proposto em (ROSMAN, 2009), que é o modelo empregado no *software SisBAHIA* e considera, além de convecção térmica e evaporação, efeitos de radiação. Ambos os modelos foram aplicados para uma faixa de valores de temperatura do ar e de vento. Para uma faixa de temperatura do ar variando de 20°C a 30°C , assumindo vento de 20Km/h ,

segundo os dois modelos, o canal fornece quedas de temperaturas conforme apresentado a seguir (figura 6.3).

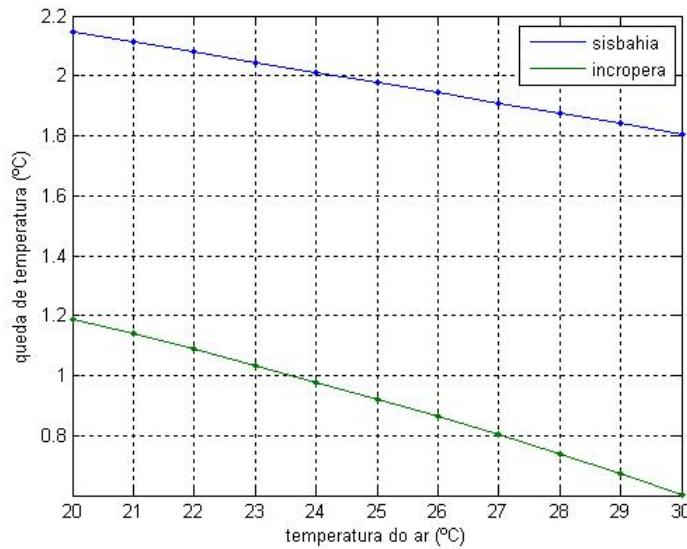


Figura 6.3: Queda de temperatura em função da temperatura do ar, assumindo vento de 20Km/h.

Agora, fixando a temperatura do ar a 25°C , o canal fornece, para uma faixa de ventos de 5Km/h a 50Km/h, as seguintes quedas de temperatura:

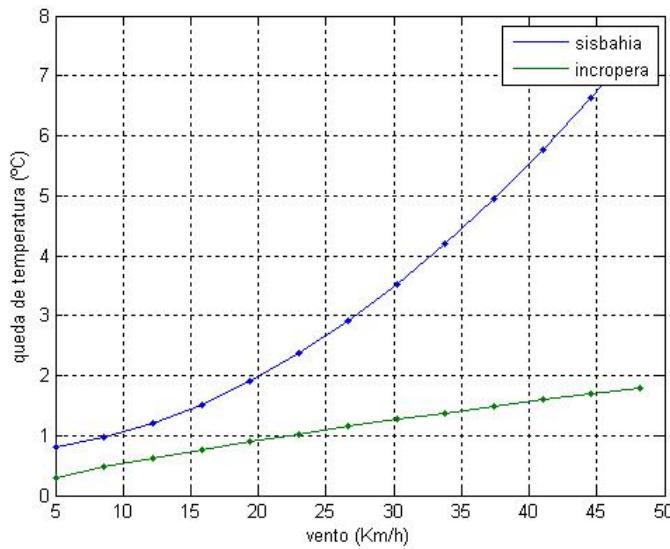


Figura 6.4: Queda de temperatura em função do vento, assumindo temperatura do ar a 25°C .

A partir dos resultados, observa-se que apenas para ventos acima de 40Km/h, com temperatura do ar a 25°C , o canal atende aos requisitos de resfriamento, de acordo com o modelo SisBAHIA. É possível observar ainda, pelas curvas apresentadas, que o efeito do

vento no resfriamento é maior que o da temperatura do ar ambiente. Analisemos agora duas situações: uma com temperatura do ar fixada em 20°C (melhor condição) e outra com temperatura do ar fixada em 30°C (pior condição), ambas com vento variável na mesma faixa de 5 a 50Km/h, empregando o modelo SisBAHIA. Os resultados são apresentados a seguir.

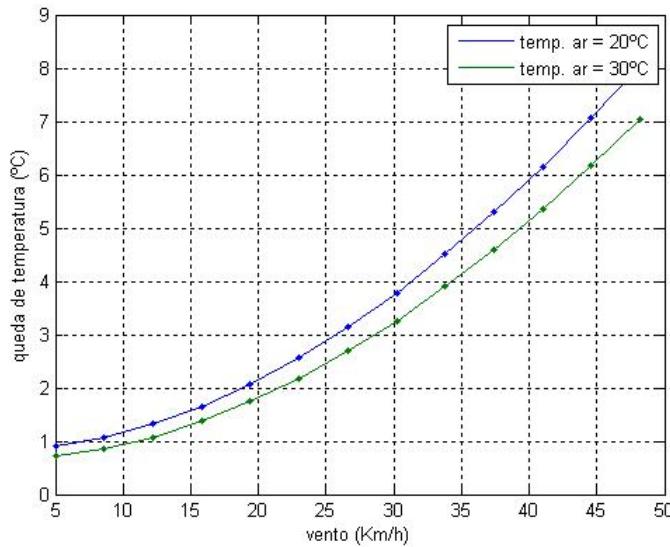


Figura 6.5: Queda de temperatura em função do vento, utilizando o modelo SisBAHIA, para temperaturas do ar a 20 e 30°C.

Pelos resultados, é possível concluir que, mesmo para a temperatura do mais baixa (20°C), é necessário um vento de aproximadamente 36Km/h para atender, no limite, à restrição ambiental. Estes resultados, no entanto, foram obtidos sem conhecimento das condições de escoamento no canal, que é de grande relevância para a análise da geometria deste e exerce influência direta no tempo de permanência da água antes de ser descartada no rio.

6.4 Análise termo-hidráulica

Aplicaremos agora o modelo 2DH para simulação do escoamento acoplado ao transporte de temperatura para análise da eficiência de resfriamento em função da hidrodinâmica local. Neste problema, a vantagem do modelo integrado verticalmente em relação a um modelo bidimensional simples é vista na região da saída do canal da termelétrica para o estuário, onde há um aumento da profundidade e consequente queda da velocidade de escoamento. Num modelo 2D convencional esta queda de velocidade não seria "capturada".

6.4.1 Primeiro projeto de canal

A primeira etapa no tratamento do problema consiste na modelagem do terreno, que será representado por uma malha bi-dimensional com informação da elevação (ou batimetria, por se tratar de um corpo aquático). A geração de malha será feita a partir de uma divisão do domínio em duas partes: uma composta pelo canal da usina e outra por um trecho do estuário local. As informações referentes ao canal são inicialmente armazenadas em uma nuvem de pontos de coordenadas (x, y, z), e as informações referentes ao estuário são inicialmente armazenadas em um conjunto de curvas de nível. Após esta primeira etapa de digitalização do terreno, as ferramentas de manipulação de dados de terreno e de geração de malha foram utilizadas para gerar a malha triangular do domínio completo. Algumas rotinas adicionais foram criadas para compor os dados do canal e do estuário em um único modelo de terreno. A figura 6.6 mostra o modelo de terreno gerado.

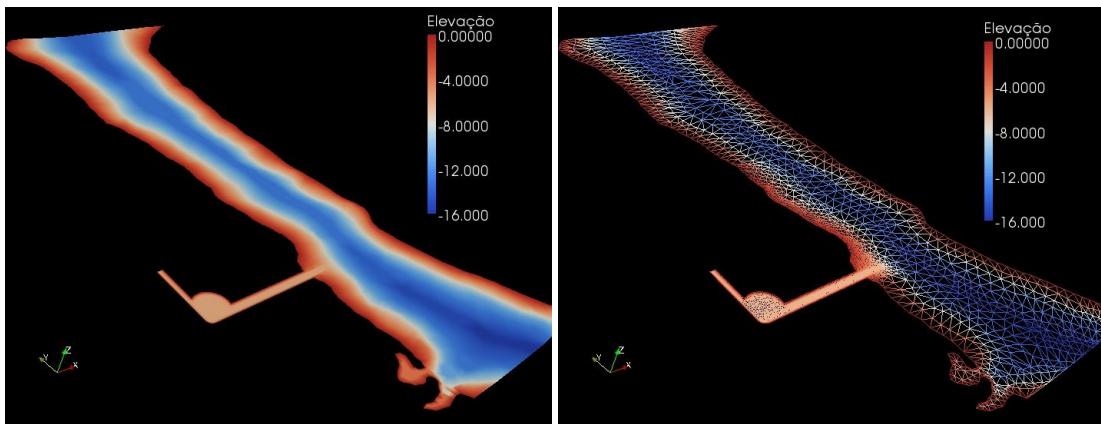


Figura 6.6: Modelo de terreno gerado para o estudo do canal de resfriamento da termelétrica. À esquerda, é mostrada uma visualização da superfície da malha; à direita é mostrada a malha.

A seguir, pode-se ver em detalhe a malha para a região do canal (figuras 6.7 e 6.8).

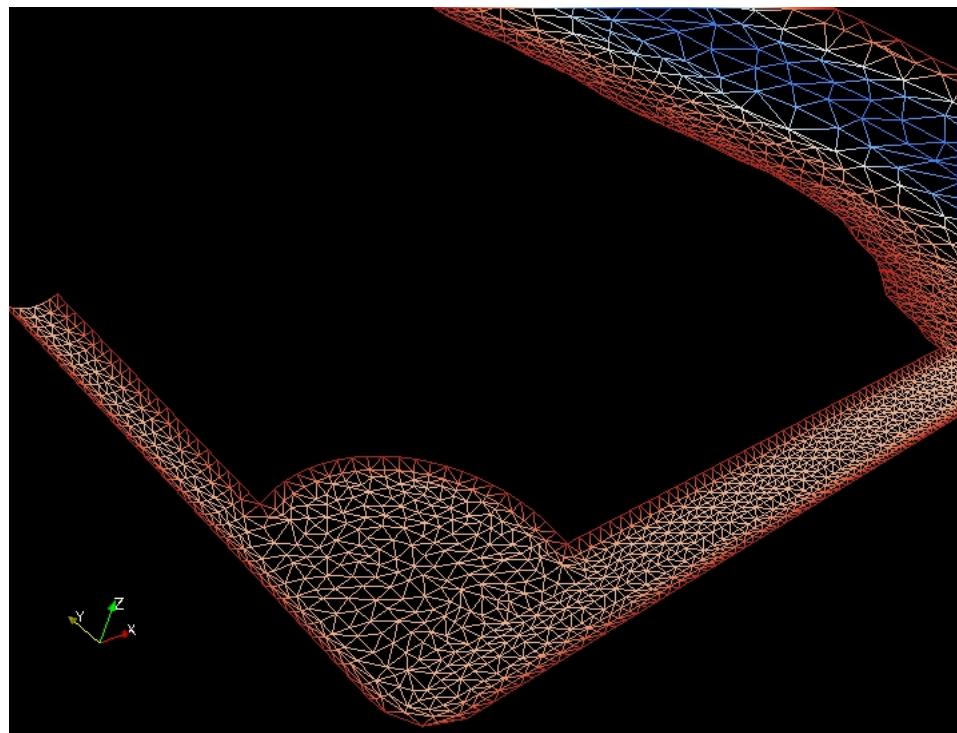


Figura 6.7: Detalhe da região do canal.

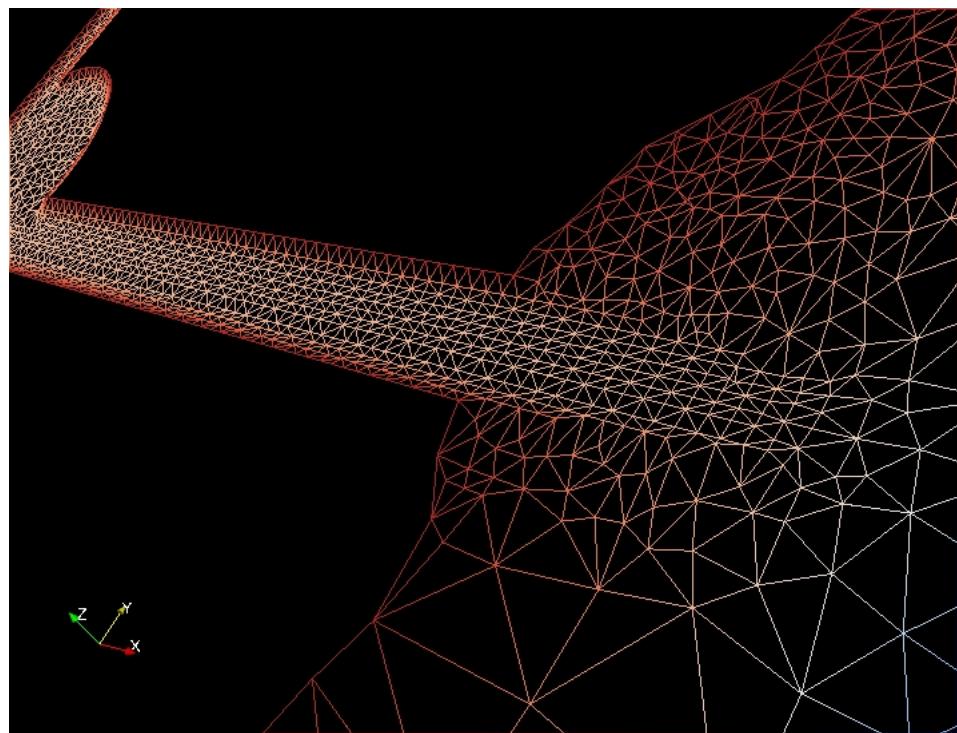


Figura 6.8: Detalhe da região onde a parte referente ao canal é acoplada à referente ao estuário (região de descarte para o rio).

Para a primeira simulação foram consideradas as melhores condições ambientais das testadas no estudo preliminar (balanço térmico unidimensional): vento de 50Km/h e

temperatura do ar a 20°C. Cinco condições de contorno foram atribuídas ao problema. As duas primeiras representam as condições do rio a montante (entrada do rio) e a jusante (saída do rio), indicadas na figura 6.9 respectivamente pelas setas verdes e pelas setas amarelas.

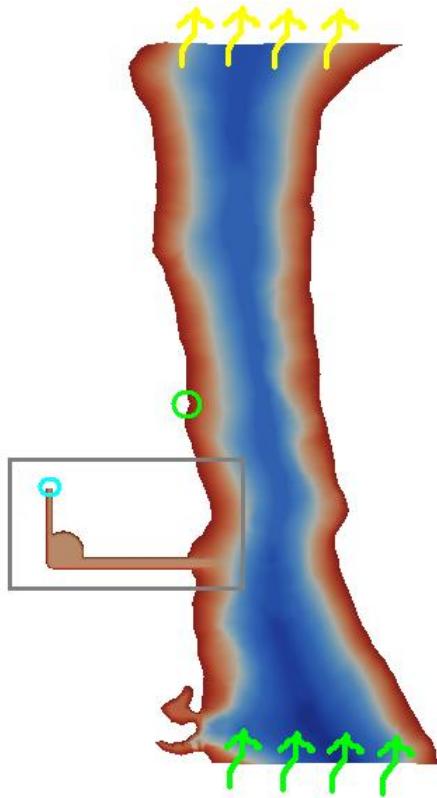


Figura 6.9: Indicação das regiões com distintas condições de contorno.

Aos nós da região de entrada do rio foram atribuídas condições tipo Dirichlet para as componentes da velocidade e para a temperatura e tipo Neumann para a pressão, dadas por

$$u_{mont} = 0 \quad (6.2a)$$

$$v_{mont} = 0,1 \quad (6.2b)$$

$$T_{mont} = 20 \quad (6.2c)$$

$$\nabla p_{mont} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.2d)$$

considerando uma velocidade de escoamento para o rio de 0,1m/s, com água entrando a 20°C. O vetor \mathbf{n} é o vetor unitário normal ao contorno. Nos nós de saída as condições de

contorno são dadas por

$$p_{jus} = 0 \quad (6.3a)$$

$$\nabla u_{jus} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.3b)$$

$$\nabla v_{jus} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.3c)$$

$$\nabla T_{jus} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.3d)$$

Outras duas regiões são a de captação da usina (indicada pela circunferência verde na figura 6.9) e a de descarte no canal de resfriamento (indicada pela circunferência azul na figura 6.9). Com relação aos nós correspondentes à captação de água, as condições de contorno foram atribuídas levando-se em conta a vazão requerida pelo projeto da térmica – $40.000\text{m}^3/\text{h}$ – através de um tubo circular com 3m de diâmetro. As condições de contorno neste caso são dadas por

$$u_{in} = -1,54 \quad (6.4a)$$

$$v_{in} = 0 \quad (6.4b)$$

$$\nabla p_{in} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.4c)$$

$$\nabla T_{in} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.4d)$$

Para o descarte, as condições de contorno foram atribuídas com base na vazão e na área da seção do canal. A temperatura no descarte é de 28°C (8°C acrescidos à temperatura de captação). As condições de contorno na entrada do canal são dadas por

$$u_{out} = 0 \quad (6.5a)$$

$$v_{out} = -0,07 \quad (6.5b)$$

$$T_{out} = 28 \quad (6.5c)$$

$$\nabla p_{out} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.5d)$$

Por último, as condições atribuídas ao restante dos nós de contorno são

$$u_c = 0 \quad (6.6a)$$

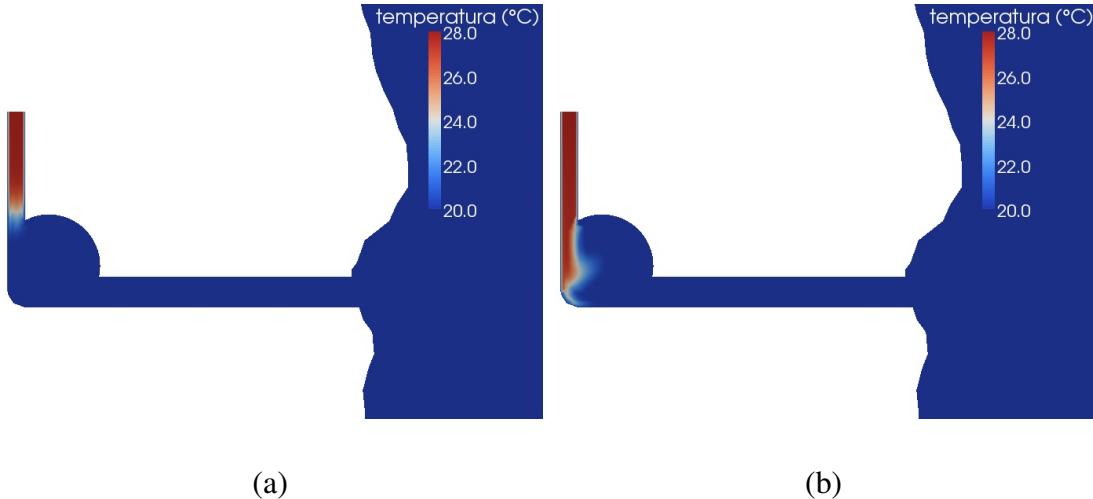
$$v_c = 0 \quad (6.6b)$$

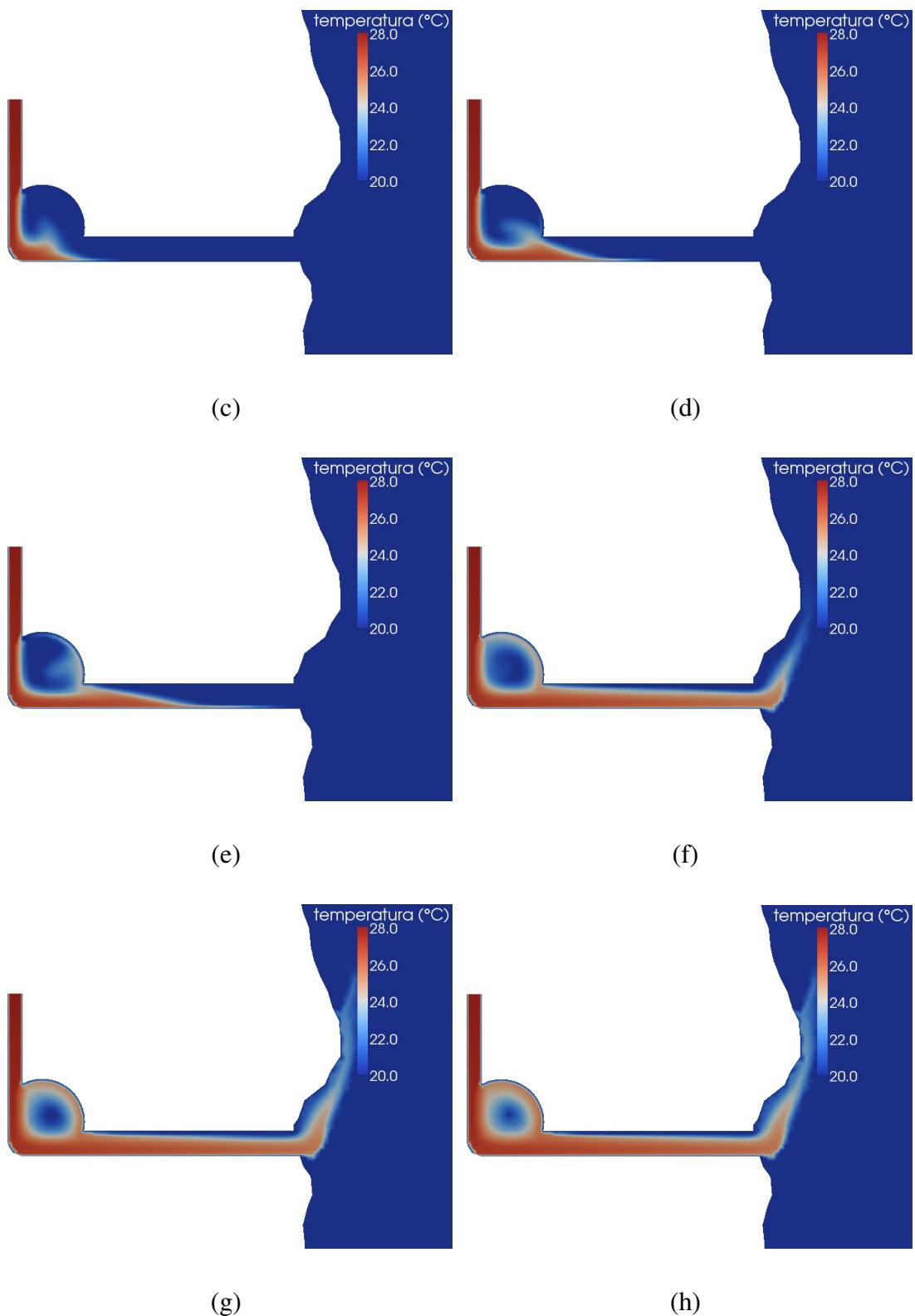
$$\nabla p_c \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.6c)$$

$$\nabla T_c \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.6d)$$

ou seja, componentes da velocidade nulas e fluxo nulo para pressão e temperatura.

A condição inicial é de campo de velocidade nulo e campo de temperatura uniforme e igual a 20°C. A malha empregada possui 2.749 pontos e 5.056 elementos. Foram simulados 7,54 dias de escoamento, em 10.000 passos de tempo ($\Delta T = 65,19\text{s}$), consumindo 8h43min de processamento. Os resultados mostram que, aproximadamente 29 horas após o momento em que a água aquecida começa a ser descartada no canal, o campo de temperatura na região a 100m da saída do canal atinge o regime estacionário. As figuras 6.10 e 6.11 mostram o campo de temperatura para alguns passos de tempo.





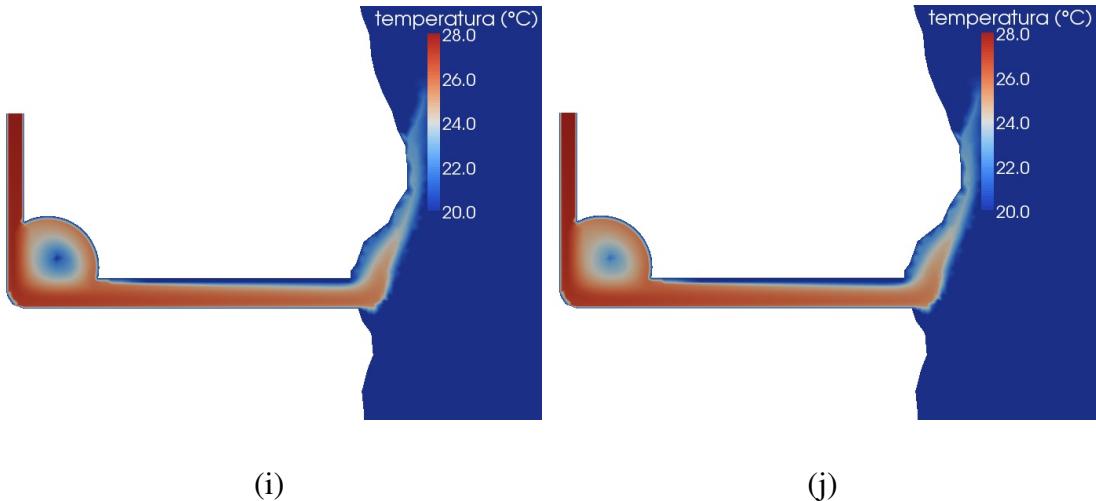


Figura 6.10: Campo de temperatura para os seguintes tempos t : (a) $t = 43\text{min}$; (b) $t = 1\text{h}26\text{min}$; (c) $t = 2\text{h}10\text{min}$; (d) $t = 2\text{h}54\text{min}$; (e) $t = 3\text{h}37\text{min}$; (f) $t = 7\text{h}14\text{min}$; (g) $t = 10\text{h}52\text{min}$; (h) $t = 14\text{h}28\text{min}$; (i) $t = 18\text{h}06\text{min}$; (j) $t = 36\text{h}12\text{min}$.

A partir de $t = 36\text{h}$ o campo de temperatura sofre alterações muito suaves, chegando, após 180h, à distribuição mostrada na figura 6.11.

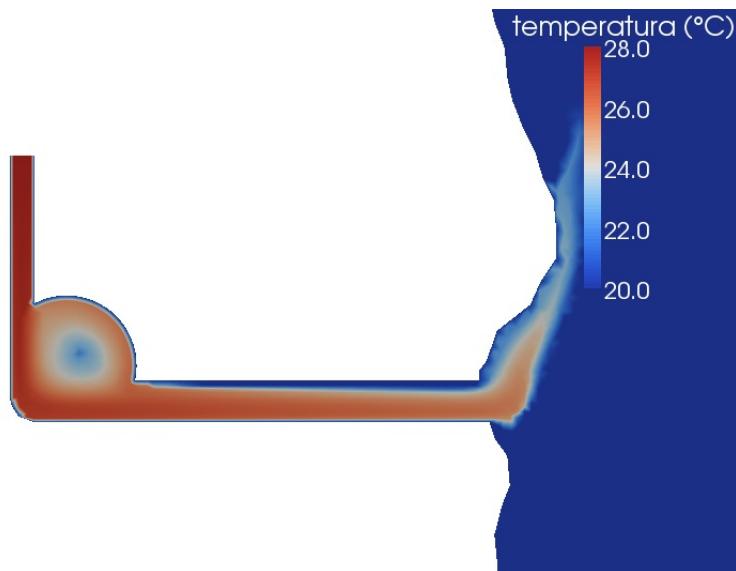


Figura 6.11: Campo de temperatura a $t = 180\text{h}$.

A figura 6.12 mostra a variação da temperatura máxima a 100m da saída do canal e na região de captação ao longo do tempo. A temperatura máxima a 100m do canal se estabiliza a $24,64^{\circ}\text{C}$, o que, para as condições consideradas, está acima do limite de 23°C a que a água deve estar a partir desta região. É possível concluir ainda, com base nos resultados, que a temperatura na zona de captação não é afetada de forma significativa pela água descartada no rio. A queda de temperatura alcançada pelo canal segundo o cálculo unidimensional para este problema, nas mesmas condições ambientais, é de $6,62^{\circ}$, enquanto que de acordo com a simulação com o modelo 2DH a queda é de $3,36^{\circ}\text{C}$. Uma

razão para que o resfriamento seja maior no cálculo unidimensional é que este assume que há aproveitamento de total da área da superfície do canal, o que não ocorre na simulação do escoamento. Na realidade, o aproveitamento total da área superficial é uma aproximação grosseira.

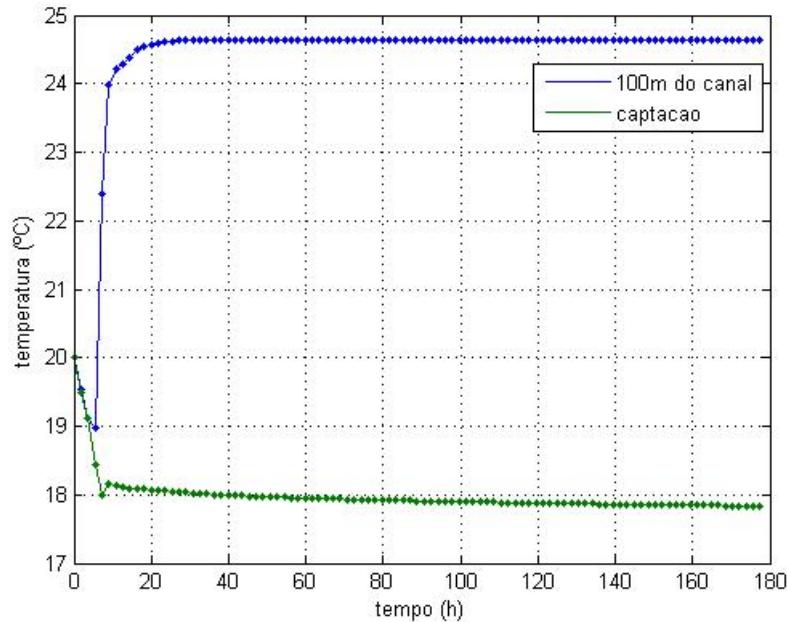


Figura 6.12: Temperaturas máximas a 100m da saída do canal e na zona de captação em função do número de horas simuladas.

A conclusão, com base na simulação, é que este *design* para o canal não atende aos requisitos de resfriamento, mesmo em condições ambientais favoráveis. Diante do desempenho deste primeiro para o canal de resfriamento, foi desenvolvido um novo canal.

6.4.2 Segundo projeto de canal

Dois aspectos negativos do primeiro projeto foram levados em conta na elaboração do segundo. Um se refere a áreas de superfície não aproveitadas. É possível observar, pelos resultados, que apenas uma pequena porção da água que vem da usina se acumula no trecho circular do canal, fazendo com que a água aquecida chegue mais rapidamente ao rio, tendo menos tempo para evaporação. O outro aspecto negativo é que o projeto inicial do canal não utilizou toda a área (terreno) de que dispunha para sua construção. A partir destas considerações, chegou-se ao desenho mostrado na figura 6.13.

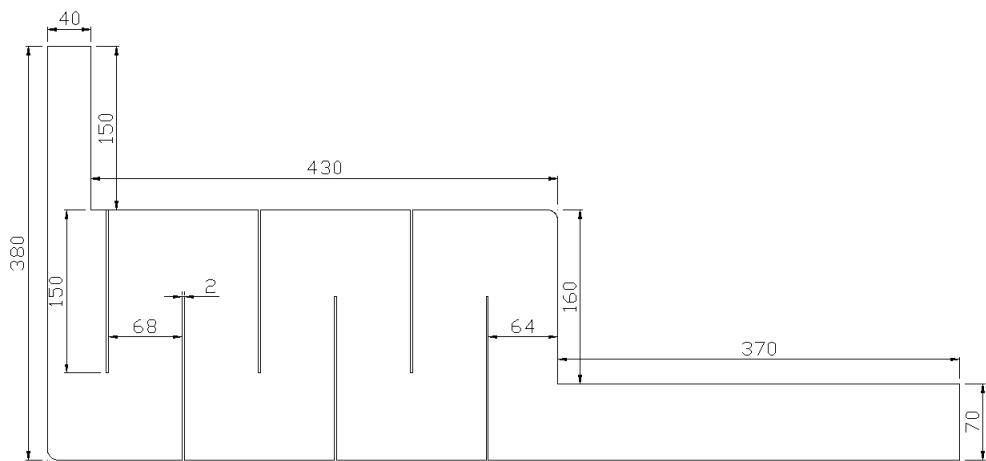


Figura 6.13: Canal de resfriamento, segundo projeto

Observe que chicanas foram inseridas para conduzir o escoamento de maneira a maximizar o aproveitamento da área superficial. As figuras a seguir mostram o novo modelo de terreno gerado, destacando a região do canal (figura 6.14), e a malha na região do canal (figura 6.15).

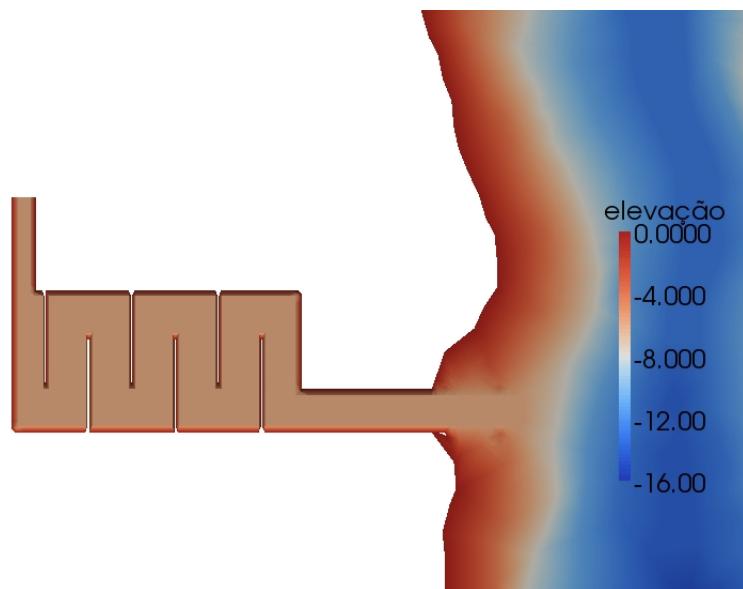


Figura 6.14: Canal de resfriamento – segundo projeto. Destaque na região do canal

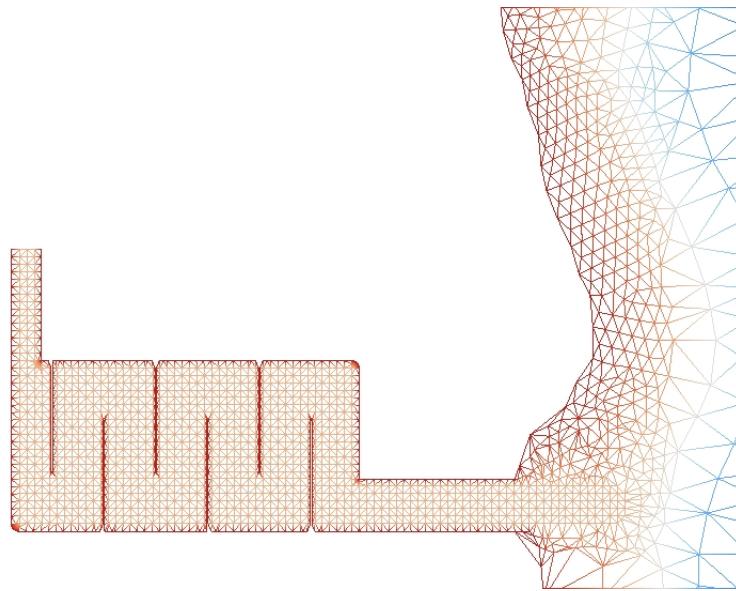
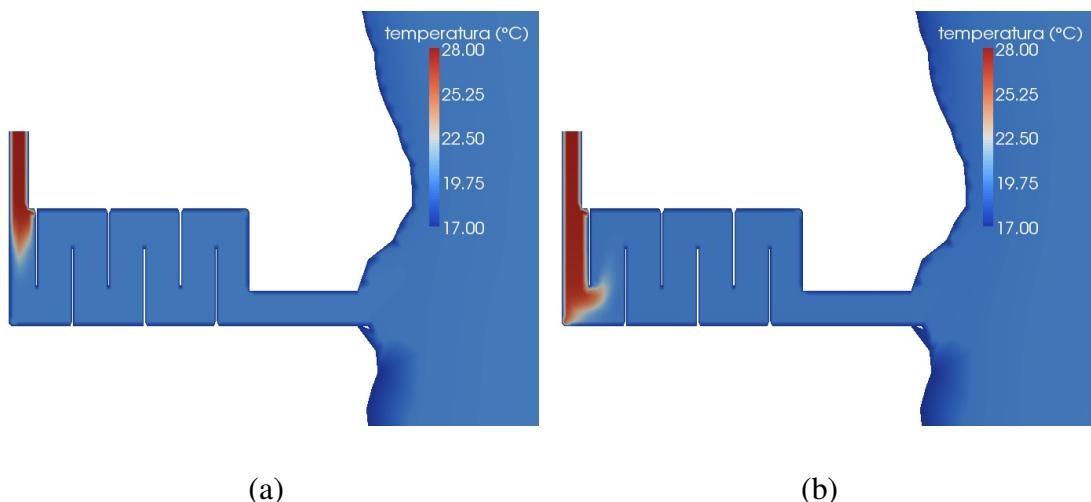
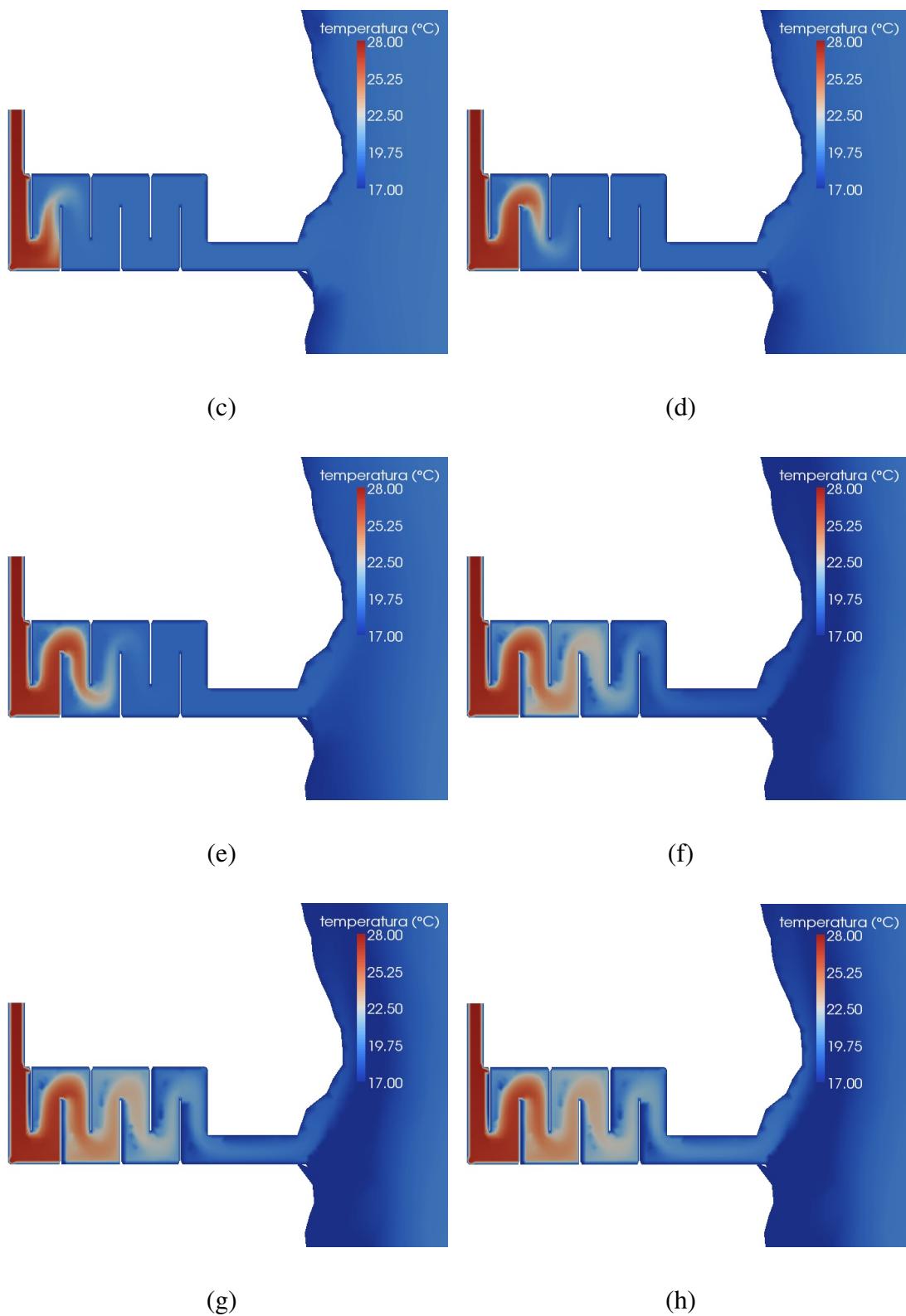
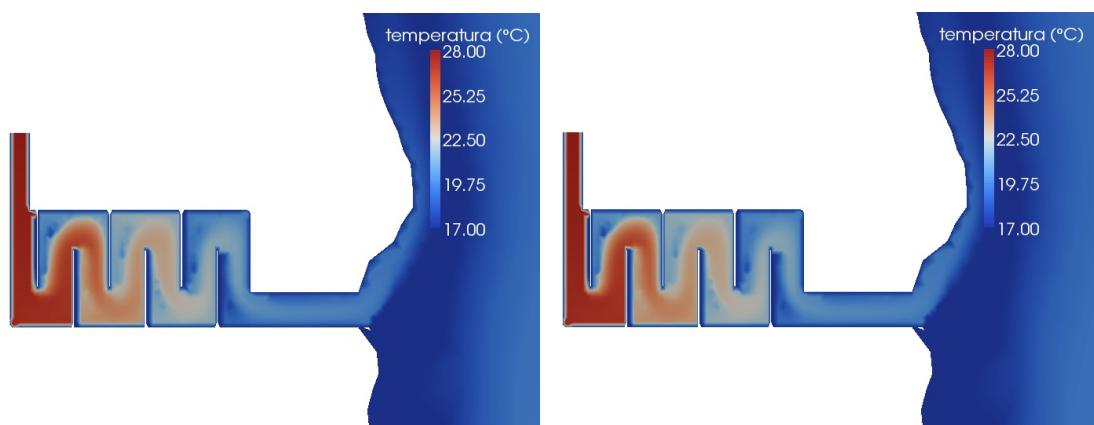


Figura 6.15: Malha 2D do segundo canal.

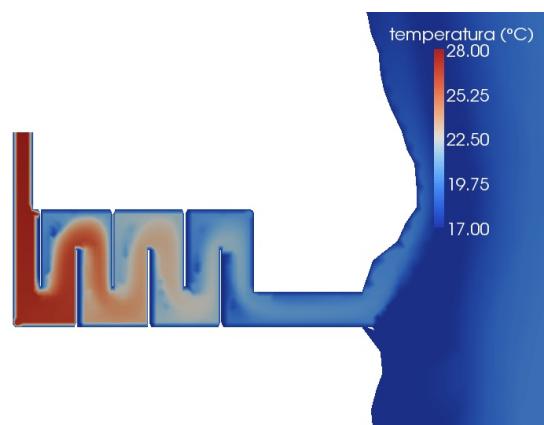
A eficiência de resfriamento acoplada à hidrodinâmica do escoamento foi simulada neste novo canal sob as mesmas condições do primeiro. Os resultados são mostrados a seguir (figura 6.16). Foi utilizada uma malha de 3.131 nós e 5.613 elementos. Foram simuladas 236 horas de escoamento (nove dias e vinte horas), também em 10.000 passos de tempo (com $\Delta T = 85\text{s}$), em 10h34min de processamento.



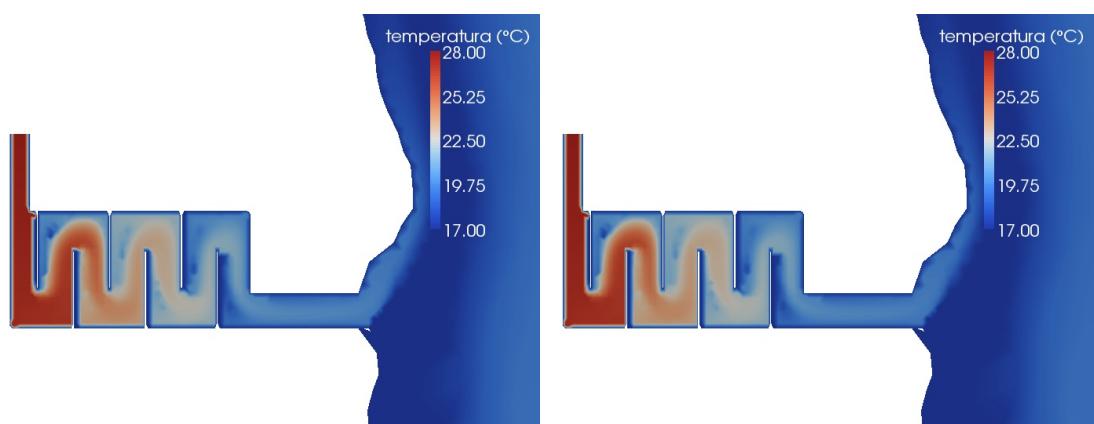




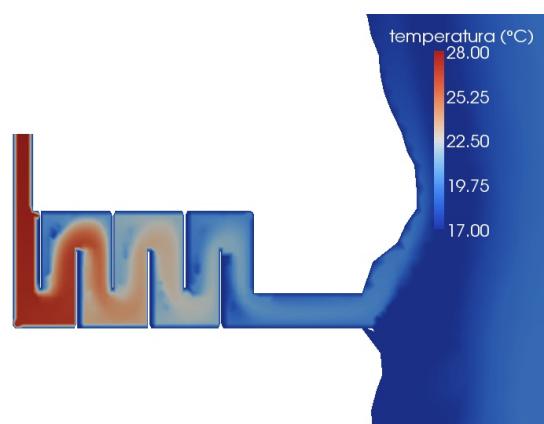
(i)



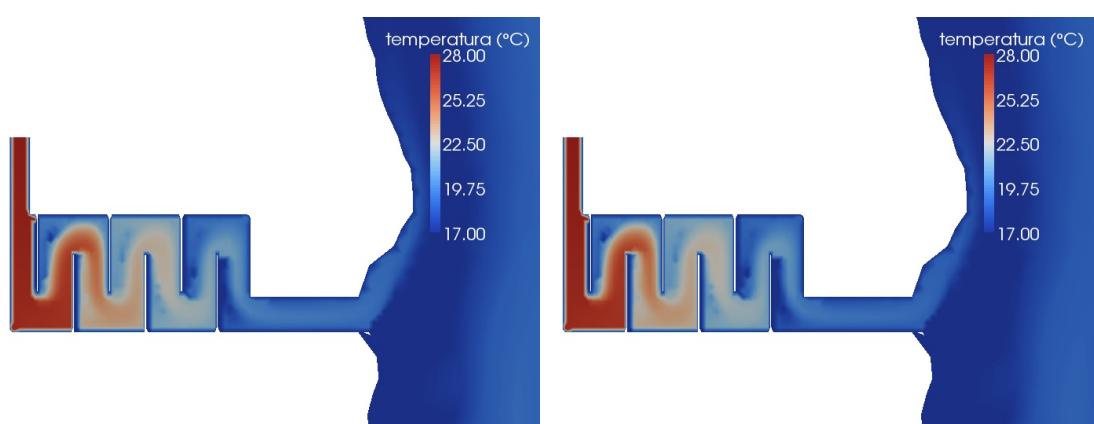
(j)



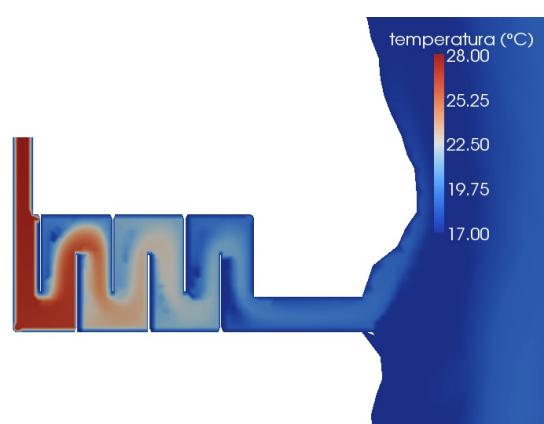
(l)



(m)



(n)



(o)

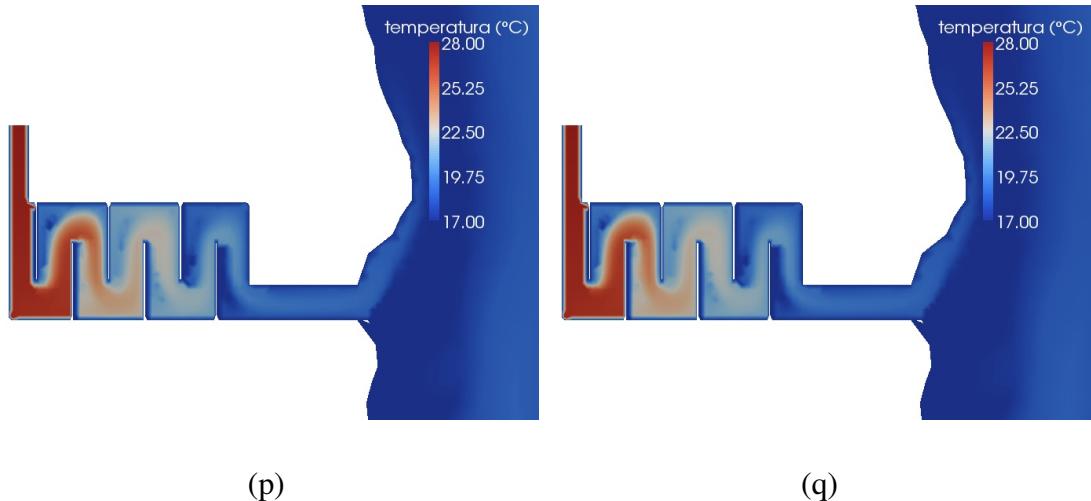


Figura 6.16: Campo de temperatura para os seguintes tempos t : (a) $t = 56\text{min}$; (b) $t = 1\text{h}53\text{min}$; (c) $t = 2\text{h}50\text{min}$; (d) $t = 3\text{h}46\text{min}$; (e) $t = 4\text{h}43\text{min}$; (f) $t = 9\text{h}26\text{min}$; (g) $t = 14\text{h}09\text{min}$; (h) $t = 18\text{h}53\text{min}$; (i) $t = 23\text{h}36\text{min}$; (j) $t = 30\text{h}41\text{min}$; (l) $t = 37\text{h}46\text{min}$; (m) $t = 47\text{h}13\text{min}$; (n) $t = 94\text{h}26\text{min}$; (o) $t = 141\text{h}39\text{min}$; (p) $t = 188\text{h}53\text{min}$; (q) $t = 236\text{h}06\text{min}$.

É possível observar, pelas imagens da figura 6.16, que após o descarte da água no rio, nenhum ponto atinge temperatura superior ao limite de 23°C . O gráfico a seguir (figura 6.17), ratifica esta conclusão.

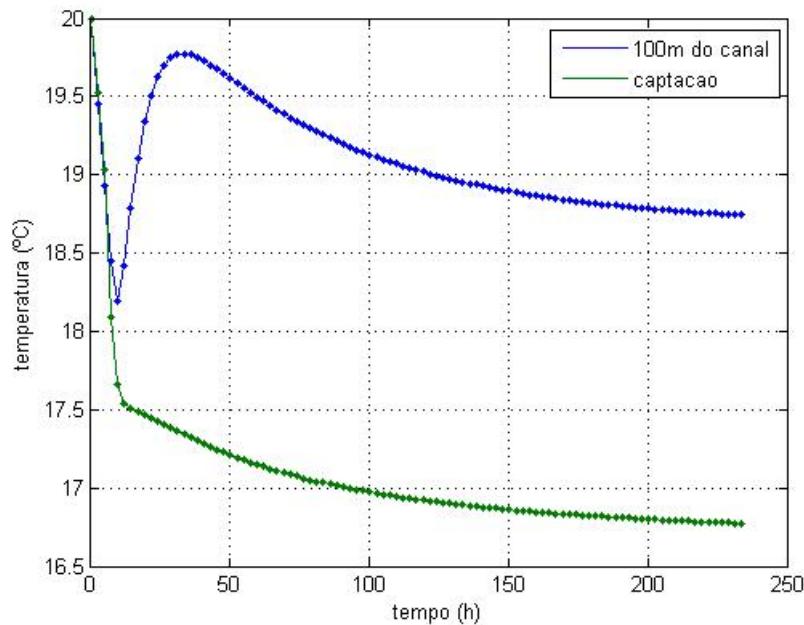


Figura 6.17: Temperaturas máximas a 100m da saída do canal e na zona de captação em função do número de horas simuladas para o segundo canal.

Após as 236 horas simuladas, a temperatura a 100m de canal ainda não havia se estabilizado, mostrando tendência de queda. A temperatura máxima nesta região ao final da simulação é de $18,19^\circ\text{C}$, o que representa um resfriamento de quase 10°C . No entanto,

este resultado foi obtido levando-se em conta condições ambientais favoráveis. Portanto, foi realizada uma terceira simulação, com o objetivo de prever o comportamento do escoamento no segundo canal, porém com condições ambientais desfavoráveis e condizentes com o clima do local de construção da usina. Segundo dados publicados em (AMARANTE et al., 2001), ventos de 25Km/h são dos mais baixos para a região em estudo, e a temperatura do ar raramente ultrapassa os 26°C. Utilizando estes valores para a simulação, após 236 horas de escoamento, o campo de temperatura assume a forma mostrada na figura 6.18. O tempo de processamento consumido foi de 11h22min.

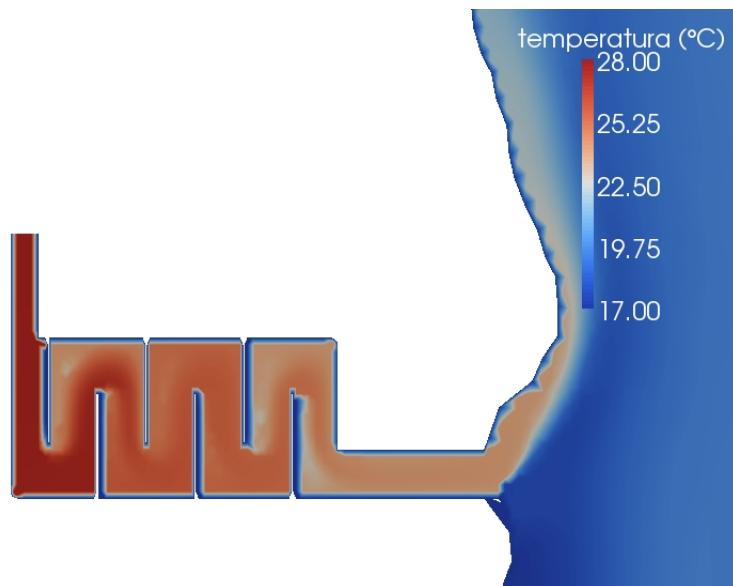


Figura 6.18: Campo de temperatura a $t = 236\text{h}$.

A temperatura máxima a 100m da saída do canal para o rio em função do tempo apresenta o comportamento mostrado no gráfico da figura 6.19.

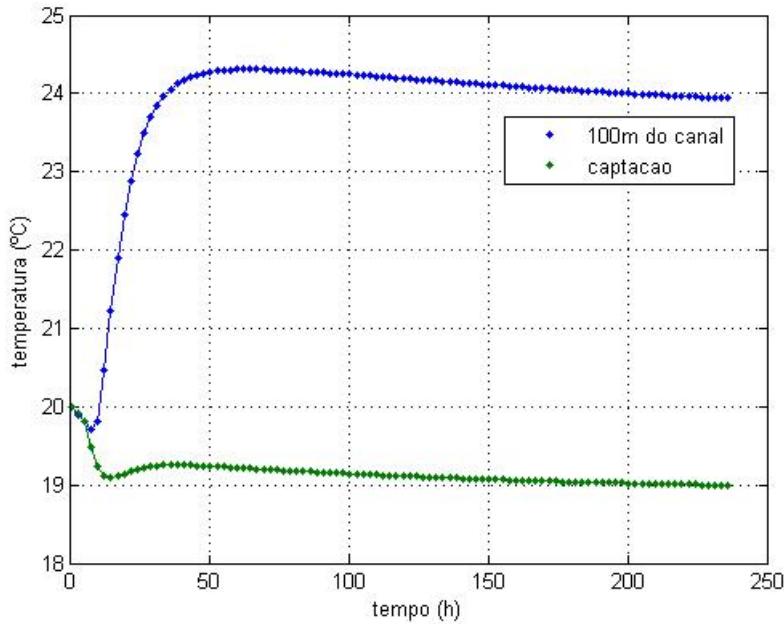


Figura 6.19: Temperaturas máximas a 100m da saída do canal e na zona de captação em função do número de horas simuladas para o segundo canal em condições ambientais desfavoráveis.

Observa-se que, nestas condições, a temperatura máxima a 100m do descarte no rio se estabiliza um pouco abaixo de 24°C.

6.5 Conclusões

O segundo projeto de canal buscou aproveitar melhor a área disponível para sua construção, aumentando a superfície de contato da água da termelétrica com o ar. A inserção de chicanas no projeto também se mostrou eficiente por conduzir o escoamento de maneira a aproveitar melhor a área da superfície. Possivelmente, um terceiro projeto de canal, com um número maior de chicanas, seria capaz de atender à demanda de resfriamento da usina. Outro aspecto do projeto que pode promover um aumento na eficiência de resfriamento é aumentar a profundidade do canal. Essa alteração reduziria a velocidade do escoamento, permitindo que a água descartada da térmica tenha mais tempo de troca de calor.

CAPÍTULO 7

SIMULAÇÕES 2DB

Muitos impactos ambientais associados a reservatórios hidrelétricos têm forte relação com o escoamento em planos vertical-longitudinais. Estratificação térmica é um fenômeno comum em tais ambientes, e pode provocar a formação de camadas com diferentes concentrações de oxigênio, afetando o ecossistema local (MATOS et al., 2009). Segundo Karpik e Raithby (1990), modelos bi-dimensionais integrados transversalmente fornecem previsões adequadas para muitas aplicações.

Este capítulo apresenta uma aplicação do modelo 2DB na simulação hidrodinâmica acoplada ao transporte de temperatura do escoamento em um reservatório hipotético, porém utilizando dados de terreno reais. O problema consiste na entrada de água a 18°C (a 1m/s) em um corpo aquático inicialmente em repouso e a 20°C. O objetivo da aplicação do modelo é observar o efeito da diferença de temperatura no escoamento.

7.1 Pré-processamento

Os dados geográficos utilizados na simulação correspondem a uma região do município de Nova Friburgo, Rio de Janeiro, chamada Caledonia, e estão contidos em um conjunto de arquivos *shapefile*. A primeira etapa de pré-processamento consiste na leitura e tratamento dos dados topológicos para geração da malha triangular, que contém as informações referentes ao terreno. A malha do terreno obtida para a região selecionada para este problema é mostrada na figura 7.1.

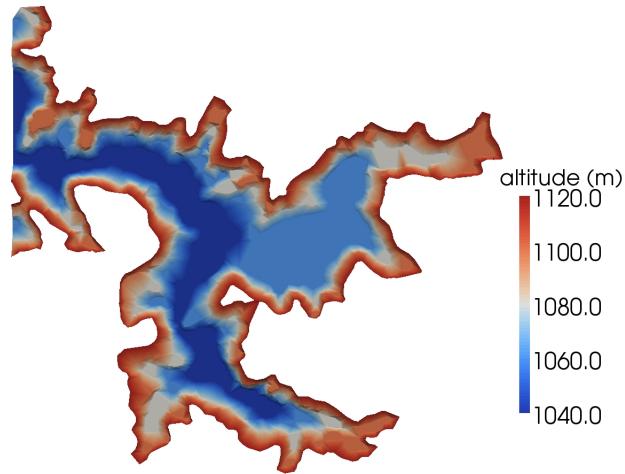


Figura 7.1: Malha triangular representando terreno.

A etapa seguinte é a leitura dos dados de hidrografia e seleção do caminho crítico sobre o qual será gerada a malha vertical. A figura 7.2 mostra o mapa de hidrografia e a direção selecionada (em vermelho).

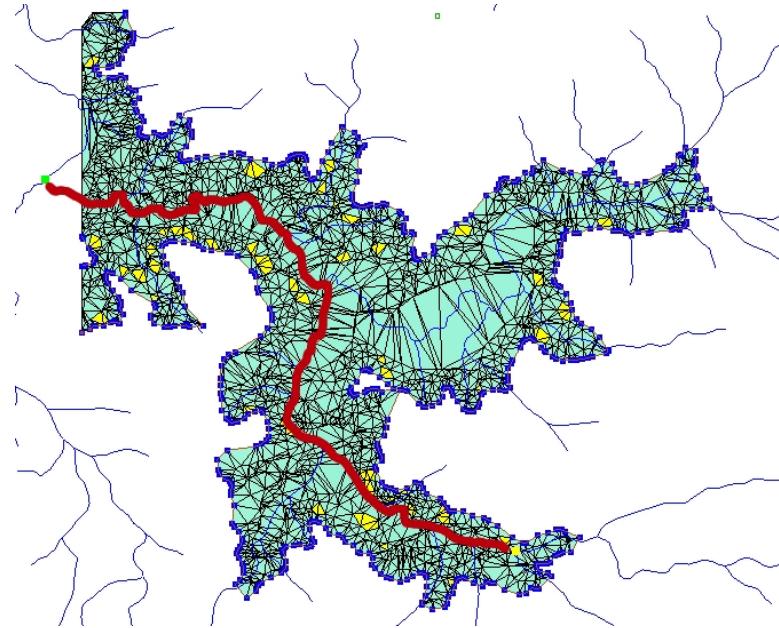


Figura 7.2: Mapa de hidrografia correspondente à região selecionada.

O trecho selecionado para simulação possui 5.689m de comprimento (isto é, a distância desde a entrada da água a 18°C até a saída é de 5.687m). De posse destas informações, a malha 2DB é gerada sobre a projeção da direção preferencial escolhida no fundo da malha do terreno. A figura 7.3 mostra uma visualização da malha 2DB no mesmo referencial da malha da figura 7.1, onde se pode observar a maneira como a malha 2DB segue a direção preferencial do escoamento.

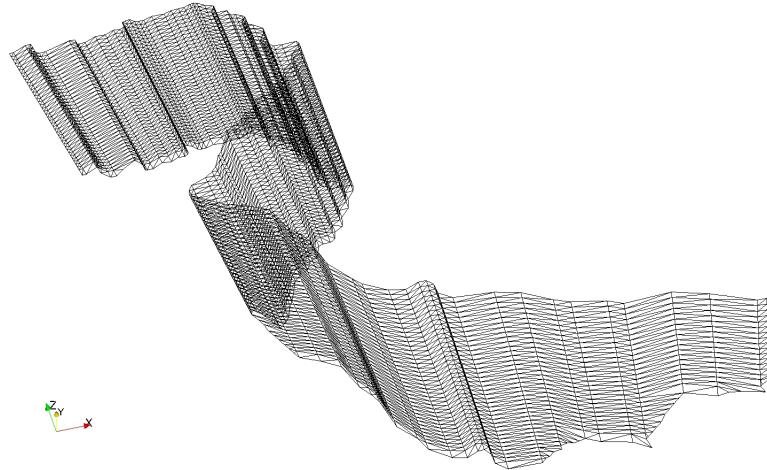


Figura 7.3: Malha 2DB no mesmo referencial da malha do terreno.

Como exposto no capítulo 4, cada ponto da malha 2DB está associado a uma largura. A figura 7.4 mostra a distribuição de larguras em escala de cores, visualizando a dimensão longitudinal da malha em verdadeira grandeza. Pela imagem, é possível observar a coerência das larguras com as distâncias às margens do reservatório observadas na figura 7.2.

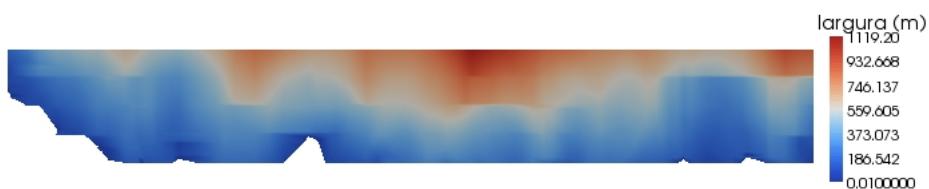


Figura 7.4: Distribuição de larguras na malha 2DB, visualizando a verdadeira grandeza da dimensão longitudinal.

A malha 2DB gerada possui 4.079 nós e 7.853 elementos. O contorno da malha 2DB é composto de quatro partes, conforme figura 7.5: *inflow*, que são os nós de entrada do fluido frio (pontos em vermelho), *outflow*, que são os nós de saída (pontos em rosa), superfície (pontos em verde) e fundo (pontos em azul).

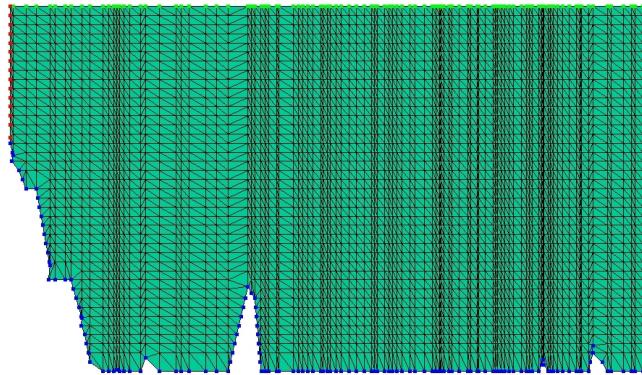


Figura 7.5: Partes do contorno da malha 2DB. A escala longitudinal está reduzida nesta visualização.

Aos nós de *inflow* foram atribuídas condições tipo Dirichlet para as componentes da velocidade e para a temperatura e tipo Neumann para a pressão, dadas por

$$u_{in} = 1 \quad (7.1a)$$

$$w_{in} = 0 \quad (7.1b)$$

$$T_{in} = 18 \quad (7.1c)$$

$$\nabla p_{in} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (7.1d)$$

O vetor \mathbf{n} é o vetor unitário normal ao contorno. Aos nós de *outflow* são atribuídas condições de contorno dadas por

$$p_{out} = 0 \quad (7.2a)$$

$$\nabla u_{out} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (7.2b)$$

$$\nabla w_{out} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (7.2c)$$

$$\nabla T_{out} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (7.2d)$$

Condição de não-deslizamento é considerada para o fundo do reservatório, resultando em componentes de velocidade nulas e condição de contorno tipo Neumann para temperatura

e pressão, conforme dado por

$$u_f = 0 \quad (7.3a)$$

$$w_f = 0 \quad (7.3b)$$

$$\nabla p_f \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (7.3c)$$

$$\nabla T_f \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (7.3d)$$

Finalmente, os nós de superfície recebem condição Neumann para componente longitudinal da velocidade, temperatura e pressão, e componente vertical da velocidade nula. As condições de contorno para superfícies são dadas por

$$w_s = 0 \quad (7.4a)$$

$$\nabla u_s \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (7.4b)$$

$$\nabla p_s \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (7.4c)$$

$$\nabla T_s \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (7.4d)$$

7.2 Simulação

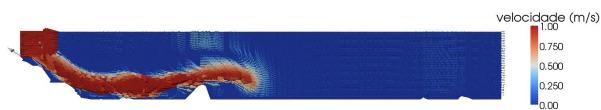
Foram simuladas três horas e 28 minutos de escoamento em 2.400 passos de tempo ($\Delta t = 5,22\text{s}$), consumindo 1h48min de tempo de processamento. A seguir são apresentados resultados para o campo de temperatura e de velocidade para alguns tempos t (figura 7.6).



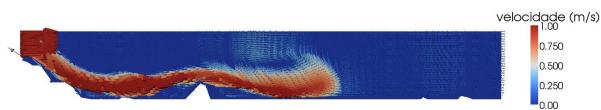
(a)



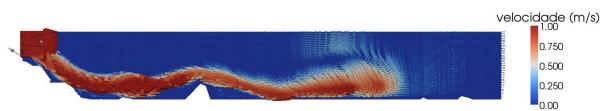
(b)



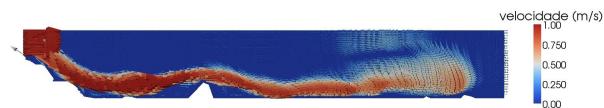
(c)



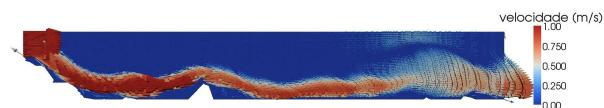
(d)



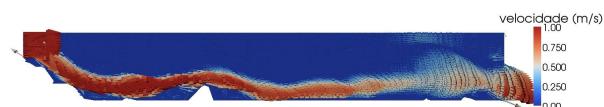
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 7.6: Campos de temperatura e de velocidade para (a) $t = 26\text{min}$; (b) $t = 52\text{min}$; (c) $t = 1\text{h}18\text{min}$; (d) $t = 1\text{h}44\text{min}$; (e) $t = 2\text{h}10\text{min}$; (f) $t = 2\text{h}36\text{min}$; (g) $t = 3\text{h}02\text{min}$; (h) $t = 3\text{h}28\text{min}$.

Segundo os resultados, após três horas de escoamento, observa-se que todas as seções do braço do reservatório simulado apresentam um perfil de temperatura estratificado, condição provocada por uma diferença de 2°C entre a temperatura da água que entra e a temperatura inicial do reservatório. O efeito da gravidade na porção mais densa (de menor temperatura) mantém a condição de estratificação. Outro fator que contribui para isso são as larguras menores encontradas no fundo do reservatório (veja figura 7.4). Outro efeito que se pode observar é que as porções com menores temperaturas apresen-

tam os maiores valores de velocidade. A figura a seguir mostra o campo de pressão para o tempo $t = 1\text{h}44\text{min}$, correspondente à figura 7.6d.



Figura 7.7: Campo de pressão a $t = 1\text{h}44\text{min}$.

Pela aproximação de Boussinesq, nas regiões com maiores diferenças de temperatura o efeito da gravidade é maior, produzindo gradientes de pressão maiores. Como mostra a figura 7.7, a extensão ocupada pela água fria apresenta uma zona de pressão alta no fundo do reservatório e um gradiente acentuado na direção z . A porção à direita da frente de propagação da água fria apresenta um valor de pressão intermediário. Essa configuração faz com que a porção fria no fundo busque a zona de pressão intermediária, já que não pode subir, pela gravidade. No entanto, a camada de alta pressão é mais "fina" do que a de baixa. Além disso, como já mencionado, o fundo do reservatório é mais estreito do que as camadas mais próximas da superfície. Estas duas condições contribuem para que o escoamento da porção fria se dê com maiores velocidades.

Os resultados produzidos pela simulação são fisicamente coerentes e confirmam a confiabilidade do modelo.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES

O produto final deste trabalho de mestrado é um conjunto de módulos computacionais, composto de dois modelos matemáticos (2DH e 2DB), voltado para simulações numéricas bi-dimensionais de escoamentos ambientais, e o estudo, por meio da aplicação destes modelos, de dois problemas desta classe. A ferramenta desenvolvida é capaz de simular dias de escoamento consumindo um tempo de computação da ordem de horas, utilizando malhas da ordem de milhares de elementos.

Conforme visto no capítulo 1, o processo de integração das equações de governo é acompanhado de algumas aproximações, feitas com base em considerações acerca de aspectos físicos dos problemas a que os modelos se propõem a resolver. Os resultados obtidos mostram que tais aproximações foram adequadas e não comprometem o objetivo de simulação do fenômeno físico.

O aspecto computacional foi alvo de atenção durante a evolução do trabalho, objetivando o desenvolvimento e a utilização de forma otimizada e flexível. Seguindo esta direção, a construção de ambos modelos foi baseada na criação de um código computacional comum, aproveitando a semelhança entre eles, contribuindo para facilidade de manuseio do simulador (passar do modelo 2DH para o 2DB, por exemplo, se resume em trocar umas poucas linhas no programa principal). A estratégia de realização de uma primeira etapa na elaboração das rotinas computacionais utilizando Matlab com posterior implementação em C++ se mostrou eficiente, sobretudo na construção dos módulos de leitura e tratamento dos arquivos de terreno e de geração de malha, em razão dos recursos de visualização do Matlab. Em ambas as fases do desenvolvimento computacional foram empregados os conceitos de programação orientada a objeto, o que permitiu a construção de uma estrutura otimizada, flexível, com facilidade para a identificação e tratamento de erros, inserção de novas rotinas e mesmo alterações na estrutura dos programas.

As duas validações a que os modelos foram submetidos mostraram bons resultados. A validação experimental, mesmo sendo um problema em que a dimensão promediada fosse constante, forneceu resultados consistentes de *timing* do código. Além disso, mostrou adequação da aproximação de Boussinesq para o termo da gravidade. O teste realizado pelo monitoramento da vazão também produziu resultados consistentes de validação, mostrando bom desempenho com relação à variação da dimensão integrada.

8.1 Modelo 2DH

A modelagem 2DH do problema do canal de resfriamento, no projeto da usina termelétrica (capítulo 6), se mostrou adequada, fornecendo previsões relevantes ao estudo realizado. Os efeitos do aumento da profundidade saída do canal para o rio foram observados nas distribuições de temperatura e de velocidade, mesmo sem a utilização de um modelo tri-dimensional. Os resultados do balanço térmico unidimensional ficaram relativamente próximos dos obtidos com a simulação 2DH, sendo também uma validação do código. Ainda assim, uma etapa futura de levantamento de dados de campo enriqueceria muito os resultados, permitindo, por exemplo, um ajuste mais preciso dos parâmetros físicos. Um aspecto a ressaltar neste estudo foi o rico intercâmbio técnico com a Promon, sempre se mostrando disposta a fornecer as informações necessárias para a evolução do estudo. A troca de informações foi essencial no direcionamento do trabalho.

8.2 Modelo 2DB

A aplicação do modelo 2DB na simulação do escoamento vertical com gradientes de temperatura acentuados produziu resultados satisfatórios em diversos aspectos. Os recursos para modelagem do problema, através da leitura e combinação de dados de topografia e hidrografia, são de fácil manuseio e possui alto grau de automação, exigindo pouca intervenção do modelador. As rotinas de geração de malha e de cálculo da largura de cada ponto da malha foram criadas de forma a serem totalmente automáticas a partir do fornecimento da direção longitudinal projetada no fundo do terreno, o que permitiu o teste do modelo em diversas geometrias.

8.3 Trabalhos futuros

A conclusão deste projeto deixa aberta a possibilidade de realização de novos trabalhos em diferentes frentes.

8.3.1 Do ponto de vista físico

Do ponto de vista da física, a implementação de um modelo de turbulência aumentaria a capacidade dos modelos 2DH e 2DB de simularem escoamentos com velocidades elevadas.

8.3.2 Do ponto de vista numérico

Do ponto de vista da numérico, trabalhos podem ser feitos no esquema Semi-Lagrangiano para melhorar a simulação do transporte convectivo. O esquema utilizado atualmente é de primeira ordem e realiza a busca do ponto de partida com base em trajetórias retilíneas, que é a implementação mais simples. Apesar de não comprometer os resultados apresentados, problemas envolvendo linhas de corrente com regiões de curvatura acentuada e velocidades elevadas podem sofrer perdas de informações nos resultados simulados. Tais casos acabam sendo um limitador para o passo de tempo empregado na simulação, contrariando um dos aspectos positivos do emprego de esquemas Semi-Lagrangianos.

8.3.3 Do ponto de vista computacional

Do ponto de vista da computacional, algumas alterações visando a otimizar o consumo de memória podem ser realizadas. Esta foi uma preocupação durante o desenvolvimento do trabalho e ainda há espaço para melhorias.

8.4 Publicações geradas

Este trabalho gerou a publicação de dois artigos em congresso – (MATOS et al., 2008; MATOS et al., 2009).

REFERÊNCIAS

- AMARANTE, O. A. C. do et al. *Atlas do potencial eólico brasileiro*. [S.l.], 2001.
- ANJOS, G. R. dos. *Solução do Campo Hidrodinâmico em Células Eletroquímicas pelo Método de Elementos Finitos*. Dissertação (Mestrado) — COPPE/UFRJ, Março 2007.
- ARTHINGTON, A. H. et al. The challenge of providing environmental flow rules to sustain river ecosystems. *Ecological Applications*, v. 16, p. 1311–1318, 2006.
- BATCHELOR, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994.
- BATES, P. D.; LANE, S. N.; FERGUSON, R. I. *Computational Fluid Dynamics: Applications in Environmental Hydraulics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2005.
- CHORIN, A. J. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation*, v. 22, p. 745–762, 1968.
- DONEA, J.; HUERTA, A. *Finite Element Methods For Flow Problems*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003.
- DYSON, M.; BERGKAMP, G.; SCANLON, J. *Flow: the essentials of environmental flows*. [S.l.], 2003. xiv, +118 p.
- ERN, A.; GUERMOND, J. L. *Theory and Practice of Finite Element*. [S.l.]: Springer, 2004.
- FILIPIAK, M. *Mesh Generation*. [S.l.], 1996.
- GÓMEZ, H.; COLOMINAS, I.; CASTELEIRO, M. A hyperbolic model for convection-diffusion transport problems in cfd: Numerical analysis and applications. *Rev. R. Acad. Cienc. Serie A. Mat.*, v. 102, p. 319–334, 2008.
- HARMON, J. E.; ANDERSON, S. J. *The Design and Implementation of Geographic Information System*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003.
- HEINRICH, J. C.; PEPPER, D. W. *Intermediate Finite Element Method: fluid flow and heat transfer applications*. [S.l.]: Taylor and Francis, 1999.

- INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. *Introduction to heat transfer*. 4th. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001.
- KAPLAN, W. *Advanced Calculus*. 4a edição. ed. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1993.
- KARPIK, S. R.; RAITHBY, G. D. Laterally averaged hydrodynamics model for reservoir predictions. *Journal of Hydraulic Engineering*, v. 116, p. no.6, 1990.
- KIM, S.-E.; BOYSAN, F. Application of cfd to environmental flows. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 81, p. 145–158, 1999.
- KURUP, R. G.; HAMILTON, D. P.; PHILLIPS, R. L. Comparison of two 2-dimensional, laterally averaged hydrodynamic model applications to the swan river estuary. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 51, p. 627–638, 2000.
- LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. *Fundamentals of the Finite Element Method For Heat and Fluid Flow*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.
- MATOS, L. et al. Thermohydraulic simulation of circulating water systems for thermoelectric power plants. In: *Anais do XI Encontro de Modelagem Computacional (EMC2008)*. Volta Redonda, RJ: CD-ROM, 2008.
- MATOS, L. et al. Laterally averaged 2d model for thermal stratification simulations in reservoir environments. In: *Anais do XX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM2009)*. Gramado, RS: CD-ROM, 2009.
- MATOS, L. et al. Finite element method applied to a 2db model for incompressible environmental flows. *Journal of Computational Interdisciplinary Sciences*, 2010.
- PATERSON, M. D. et al. Numerical modeling of two-dimensional ans axissymmetric gravity currents. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 47, p. 1221–1227, 2005.
- RANDALL, D. A. *An Introduction to Numerical Modeling of the Atmosphere*. [S.l.], 2009.
- ROSENBERG, D. M.; MCCULLY, P.; PRINGLE, C. M. Global-scale environmental effects of hydrological alterations. *BioScience*, v. 50, p. 746–751, 2000.
- ROSMAN, P. C. C. *Referência Técnica do SisBAHIA*. [S.l.], 2009.
- SOARES, C. B. P. *Modelagem e Simulação de Sistemas Aquáticos em Ambiente de Geoprocessamento*. Tese (Tese de doutorado) — Escola de Química - UFRJ, 2003.

WROBEL, L. C. et al. *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos*. [S.l.]: ABRH, 1989.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. *The Finite Element Method For Fluid Dynamics*. 6th. ed. [S.l.]: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.