
PYTHON PARA ENGENHARIA MECÂNICA

Preparado por: Prof. Gustavo Anjos
21 de Junho de 2017

Resumo. Este texto de nível introdutório tem como objetivo familiarizar o aluno de graduação na criação de ferramentas e solução de problemas em engenharia mecânica com a utilização de uma moderna linguagem de computador - Python. Este texto não se restringe a futuros engenheiros mecânicos, mas também pode ser usado por alunos que desejam obter um conhecimento inicial de solução de problemas diferenciais e como introdução à construção de códigos numéricos mais elaborados.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Movimento Horizontal de um Carrinho	2
3	Velocidade terminal de uma gota	2
4	Lançamento de projétil	3
5	Sistema massa-mola	5
6	Sistema massa-mola dissipativo	5
7	Sistema massa-mola vertical	6
8	Geração de malha 1D	7
9	Solução de problema térmico permanente 1D	7
10	Solução de problema térmico permanente com geração de calor 1D	8
11	Solução de problema térmico transiente 1D	8
12	Solução de problema térmico transiente 1D com geração de calor	9
13	Solução de equação de transporte	9
14	Escoamento com partículas - solução numérica	10
15	Pêndulo simples	12

1 Introdução

Introdução sobre a importância da linguagem Python na Engenharia Mecânica.

Solução de problemas diferenciais.

Importância da validação do código.

Curso baseado nos livros Mecânica...

Controle de versões (git)

Editor de texto (vim)

2 Movimento Horizontal de um Carrinho

Neste exemplo deseja-se calcular como a força de atrito linear $F_{drag} = -bv$ atua em um carrinho com massa m a fim de desacelerá-lo até sua completa parada na direção x . Desconsidere o atrito dos mancais no eixo de rodas do carrinho em Fig. (2).

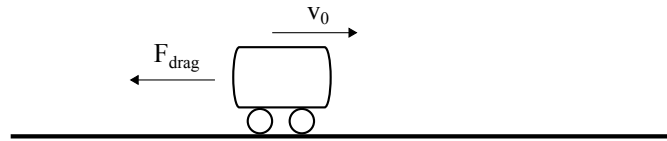


Figura 1: Desaceleração de carrinho por atrito do ar linear $F_{drag} = -bv$.

$$m \frac{dv}{dt} = -bv \quad (1)$$

A Eq. (1) pode ser resolvida analiticamente para $v(t)$ e sua solução analítica toma a seguinte forma:

$$v(t) = v_0 e^{-bt/m} \quad (2)$$

onde V_0 é a velocidade inicial do carrinho, t é o tempo medido em segundos e b é o coeficiente de atrito. Ao integrarmos novamente a equação de $v(t)$ obtemos a solução da posição, já que $dx/dt = v$:

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = x_\infty (1 - e^{-bt/m}) \quad (3)$$

onde $x_\infty = v_0 m / b$

Dados da simulação:

Tabela 1: Dados da simulação do carrinho submetido à força de atrito linear do ar.

massa da partícula	coeficiente de atrito	passo de tempo
[kg]	[kg]/[s]	[s]
$m = 1.0$	$b = 0.1$	$dt = 0.1$

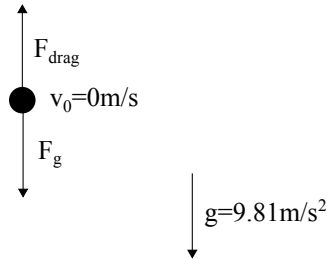
Condições iniciais:

3 Velocidade terminal de uma gota

Neste problema deseja-se calcular como a força de atrito linear $F_{drag} = -bv$ atua em uma partícula com massa m sob uma força de gravidade $F_{grav} = mg$ a fim de desacelerá-la até o equilíbrio de forças, onde a aceleração seja igual a 0 na direção y .

Tabela 2: Condições iniciais da da simulação do carrinho submetido à força de atrito linear do ar.

tempo inicial	velocidade inicial	posição inicial
[s]	[m]/[s]	[m]
$time = 0.0$	$v_0 = 10.0$	$x = 0.0$


 Figura 2: Aceleração de uma gota caindo sob efeito gravitacional $F_g = mg$ e atrito do ar linear $F_{drag} = -bv$.

Através da 2a. Lei de Newton, a equação matemática para modelar este problema pode ser escrito como:

$$m \frac{dv}{dt} = F_{drag} + F_g \quad (4)$$

onde v , que é uma função do tempo t é a incógnita que queremos resolver. A Eq. (4) pode ser resolvida analiticamente para $v(t)$ e sua solução analítica toma a seguinte forma:

$$v(t) = v_0 e^{-bt/m} + v_{lim}(1 - e^{-bt/m}) \quad (5)$$

onde V_0 é a velocidade inicial do carrinho, t é o tempo medido em segundos e b é o coeficiente de atrito. Ao integrarmos novamente a equação de $v(t)$ obtemos a solução da posição, já que $dx/dt = v$:

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt \quad (6)$$

Tabela 3: Dados da simulação do carrinho submetido à força de atrito linear do ar.

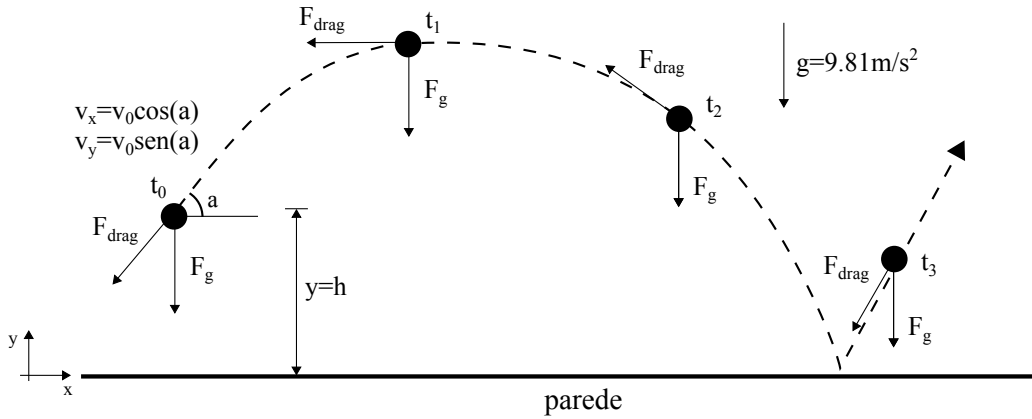
diâmetro da gota óleo	densidade do líquido	aceleração da gravidade	volume da gota
[m]	[kg]/[m ³]	[m]/[s ²]	[m ³]
$D = 1.5e - 06$	$\rho = 840.0$	$g = 9.81$	$V = \pi D^3/6.0$

4 Lançamento de projétil

Neste exemplo deseja-se calcular como a força de atrito linear $F = bv$, ou a força de atrito quadrática $F = cv^2$ ou ausencia de forcas de atrito atuam em uma partícula com massa m sob uma força de gravidade $F = mg$.

Tabela 4: Continuação de dados da simulação do carrinho submetido à força de atrito linear do ar.

massa da partícula	viscosidade dinâmica do ar	coeficiente de atrito linear	passo de tempo
$[kg]$	$[kg]/[m][s]$	$[kg]/[s]$	$[s]$
$m = \rho V$	$\beta = 1.6e - 04$	$b = \beta D$	$dt = 1e - 7$


 Figura 3: Desaceleração de um projétil por atrito do ar $F_{drag} = -bv$ sob efeito de gravidade.

A equação vetorial (em X e Y) toma a seguinte forma:

(7)

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{drag} + \mathbf{F}_g \begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = F_{drag_x} \\ m \frac{dv_y}{dt} = F_{drag_y} + F_{g_y} \end{cases} \quad (8)$$

Dados da simulação;

- $\#D = 1.5e - 06$ $[m]$ diâmetro do projétil
- $D = 7.0e - 02$ $[m]$ diâmetro da gota de neblina
- $g = 9.81$ $[m/s^2]$ aceleração da gravidade
- $V = \pi D^3 / 6.0$ $[m^3]$ volume da gota
- $m = 0.15$ $[kg]$ massa da partícula
- $\beta = 0.25$ $[kg/ms]$ viscosidade dinâmica do ar
- $b = \beta D$ $[kg/s]$ coeficiente de atrito linear
- $\gamma = 0.25$ $[Ns^2/m^4]$
- $c = \gamma D^2$ coeficiente de atrito linear
- $dt = 0.01$ $[s]$ passo de tempo

Condições iniciais

- $time = 0.0$ $[s]$ tempo

- $x = 0.0$ $[m]$ posição
- $y = 0.0$ $[m]$ posição
- $vx = 19.3$ $[m/s]$ velocidade
- $vy = 23.0$ $[m/s]$ velocidade

5 Sistema massa-mola

Neste exemplo deseja-se calcular como a força de mola $F_{spring} = -kx$ atua em uma partícula com massa m sem dissipação.

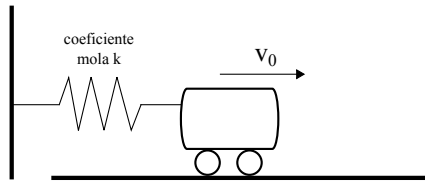


Figura 4: Sistema massa-mola sem dissipação $F_{spring} = -kx$

A solução analítica da equação:

$$m \frac{dv}{dt} = -kx \quad (9)$$

$$v(t) = v_0 e^{-bt/m} \quad (10)$$

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = x_\infty (1 - e^{-bt/m}) \quad (11)$$

onde $x_{inf} = v_0 m / b$

Dados da simulação

- $m = 1.0$ massa da partícula
- $k = 0.1$ coeficiente da mola
- $dt = 0.1$ passo de tempo

Condições iniciais:

- $time = 0.0$ tempo total da simulação
- $x = 0.0$ posição inicial da partícula
- $v_x = 10.0$ velocidade inicial da partícula

6 Sistema massa-mola dissipativo

Neste exemplo deseja-se calcular como a força de atrito linear $F = -bv$ atua em uma partícula com massa m sob uma força elástica (de mola) linear $F = -kx$ a fim de desacelerá-la até o equilíbrio de forças, onde a aceleração seja igual a 0 na direção y .

A equação em X:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{spring} + \mathbf{F}_{friction} \quad (12)$$

Dados da simulação:

- $m = 1.0$ massa da partícula
- $k = 0.1$ coeficiente da mola
- $b = 0.1$ coeficiente de atrito linear
- $dt = 0.1$ passo de tempo

Condições iniciais:

- $time = 0.0$ tempo total da simulação
- $x = 0.0$ posição inicial da partícula
- $v_0 = 10.0$ velocidade inicial da partícula

7 Sistema massa-mola vertical

Neste exemplo deseja-se calcular como a força de gravidade $F = -mg$ atua em uma partícula com massa m sob uma força elástica (de mola) $F = -ky$ a fim de mantê-la oscilando.

A equação em X:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{spring} + \mathbf{F}_{grav} \quad (13)$$

$\mathbf{F}_{spring} = F_{spring_y} - ky$ e $\mathbf{F}_{grav} = F_{grav_y} mg$

Dados da simulação:

- $m = 1.0$ massa da partícula
- $k = 0.1$ coeficiente da mola
- $b = 0.1$ coeficiente de atrito linear
- $y = 0.0$ posição inicial da partícula
- $v_0 = 10.0$ velocidade inicial da partícula
- $g = 9.81$ $[m/s^2]$ aceleração da gravidade
- $D = 7.0e - 02$ $[m]$ diâmetro da partícula
- $\gamma = 0.25$ $[Ns^2/m^4]$
- $c = \gamma * D * D$ coeficiente de atrito linear
- $dt = 0.1$ $[s]$ passo de tempo
- $time = 0.0$ tempo total da simulação

- $\#D = 1.5e - 06$ $[m]$ diâmetro do projétil
- $m = 0.15$ $[kg]$ massa da partícula
- $\beta = 0.25$ $[kg/ms]$ viscosidade dinâmica do ar
- $b = \beta D$ $[kg/s]$ coeficiente de atrito linear

8 Geração de malha 1D

Criacao de malha 1D para o método de elementos finitos com dx variando conforme as seguintes equações:

- constante: $dx = cte$
- quadrática: x^2
- cúbica: x^3
- exponencial: $exp(x)$

Parâmetros da malha:

- $L = 1.0$ comprimento total da malha
- $nx = 10$ número total de nós
- $ne = nx - 1$ número total de elementos

Dica: para criação de malha computacional, 2 estruturas são necessárias: um vetor de coordenadas dos nós da malha e uma matriz de conectividade de nós.

9 Solução de problema térmico permanente 1D

Neste exemplo deseja-se calcular a distribuição de temperatura unidimensional em regime permanente em uma barra com dimensão adimensional $L = 1$ e temperaturas constantes $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$ nas extremidades da barra.

A equação de interesse:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (14)$$

para $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$

Execução do programa:

- $nx = 40$ número de pontos em x
- $L = 1.0$ comprimento total
- $dx = L/nx$ intervalo dx
- $T_i = 0.0$ condição de contorno do primeiro nó
- $T_f = 0.0$ condição de contorno do último nó
- $Q = 2.0$ fonte de calor

10 Solução de problema térmico permanente com geração de calor 1D

Neste exemplo deseja-se calcular a distribuição de temperatura unidimensional em regime permanente em uma barra com dimensão adimensional $L = 1$ e temperaturas adimensionais constantes $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 0$ nas extremidades da barra e com geração de calor Q .

A equação de interesse:

$$\alpha \frac{d^2 T}{dx^2} = Q \quad (15)$$

para $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 0$

Execução do programa:

- $nx = 40$ número de pontos em x
- $L = 1.0$ comprimento total
- $dx = L/nx$ intervalo dx
- $T_i = 0.0$ condição de contorno do primeiro nó
- $T_f = 0.0$ condição de contorno do último nó
- $\alpha = 1.0$ difusividade térmica do material
- $Q = 2.0$ fonte de calor

11 Solução de problema térmico transiente 1D

Neste exemplo deseja-se calcular a evolução temporal da distribuição de temperatura unidimensional em uma barra com dimensão $L = 1$ e temperaturas constantes $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$ nas extremidades da barra.

A equação de interesse:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \frac{d^2 T}{dx^2} \quad (16)$$

para $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$

A solução da equação em estado permanente se escreve:

$$T(x) = c_1 x + c_2 \quad (17)$$

Com constantes c_1 e c_2 a serem determinadas através da aplicação das condições de contorno. Para condições de contorno arbitrárias com temperatura fixa nas extremidades (condição de contorno do tipo Dirichlet), as constantes assumem os seguintes valores:

$$c_1 = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{L} \quad c_2 = T_{s1} \quad (18)$$

onde T_{s1} é a temperatura da superfície 1 e T_{s2} é a temperatura da superfície 2. Com isso, a distribuição de temperatura para o caso de duas condições de contorno do tipo Dirichlet toma a forma:

$$T(x) = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{L} x + T_{s1} \quad (19)$$

Para o caso do problema sugerido, a solução final toma a forma de:

$$T(x) = \frac{x}{L} \quad (20)$$

12 Solução de problema térmico transiente 1D com geração de calor

Neste exemplo deseja-se calcular a evolução temporal da distribuição de temperatura unidimensional em uma barra com dimensão $L = 1m$ e temperaturas constantes $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$ nas extremidades da barra. A forma forte do problema se escreve:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \frac{d^2T}{dx^2} + Q \quad (21)$$

para $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$

A solução da equação em estado permanente se escreve:

$$T(x) = -\frac{QL}{2k} \left(x - \frac{x^2}{L} \right) + \frac{T_{s2}}{L}x + T_{s1} \quad (22)$$

Esta é a solução particular para temperatura da superfície 1 igual a T_{s1} e temperatura da superfície 2 igual a T_{s2} no caso permanente ($\partial/\partial t = 0$). No caso de tomarmos as condições de contorno do problema $T_{s1} = T_{s2} = 0$, a solução da distribuição de temperatura $T(x)$ fica:

$$T(x) = -\frac{QL}{2k} \left(x - \frac{x^2}{L} \right) \quad (23)$$

13 Solução de equação de transporte

Neste exemplo deseja-se calcular a equação diferencial parcial de convecção transiente usando o método de diferenças finitas e discretizando o termo convectivo vdu/dx com as seguintes metodologias:

- diferenças centradas
- upwind 1a. ordem
- upwind 2a. ordem
- semi-lagrangiano 1a. ordem
- semi-lagrangiano 2a. ordem
- lagrangiano

A equação diferencial parcial para $u(t, x)$:

$$\frac{du}{dt} + a \frac{du}{dx} = 0 \quad (24)$$

Usando o método de diferenças centradas para o termo espacial e um esquema explícito de derivação temporal, obtém-se a seguinte expressão para a equação:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{dt} = -a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2dx} + O[(dt, dx)^2] \quad (25)$$

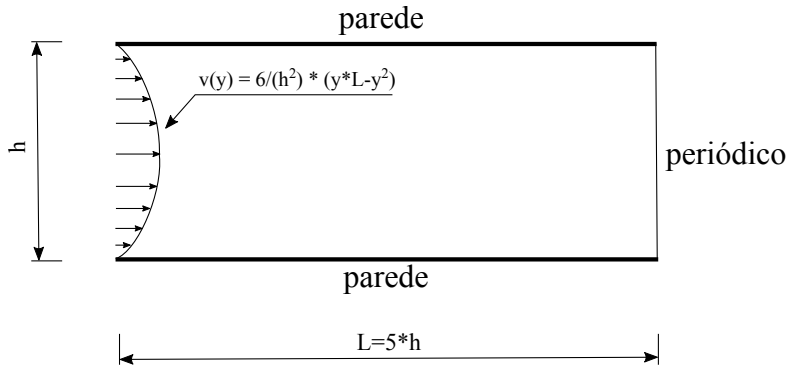


Figura 5: Domínio numérico e condições de contorno para partículas e perfil de velocidade.

O número de Courant (CFL) é definido como:

$$CFL = a \frac{dt}{dx} \quad (26)$$

14 Escoamento com partículas - solução numérica

Deseja-se calcular a trajetória de uma partícula em um canal sob efeito de um perfil de velocidades conhecido (dado por uma função em y) e submetida às forças de gravidade F_g , de arrasto F_{drag} e de sustentação F_{lift} .

A equação vetorial (x e y):

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{drag} + \mathbf{F}_{lift} + \mathbf{F}_g \quad (27)$$

onde:

$$\mathbf{F}_{drag} = 3\pi\mu d_p v \quad (28)$$

$$\mathbf{F}_{lift} = 1.61\sqrt{\mu\rho_d} dp^2 |u - v| \frac{du}{dy} \sqrt{\left| \frac{du}{dy} \right|} \quad (29)$$

$$\mathbf{F}_g = mg \quad (30)$$

Note que esta equação vetorial tem solução analítica, porém neste problema usaremos uma aproximação numérica explícita para encontrarmos v^{n+1} .

O perfil de velocidade $v(y)$ é conhecido e da forma:

$$v(y) = \frac{6}{L^2} (yL - y^2) \quad (31)$$

As condições de contorno deste problema estão ilustradas na Fig. (5):

Dados da simulação:

fluido (fase contínua)

ar - $T = 25^\circ C$

- $\mu = 17.2e - 6$ $[N][s]/[m^2]$ viscosidade

- $\rho = 1.225$ $[kg]/[m^3]$ densidade

água - $T = 25^\circ C$

- $\mu = 1.003e - 3$ $[N][s]/[m^2]$ viscosidade
- $\rho = 997.0$ $[kg]/[m^3]$ densidade

azeite - $T = 15^\circ C$

- $\mu = 81.0e - 03$ $[N][s]/[m^2]$ viscosidade
- $\rho = 703.0$ $[kg]/[m^3]$ densidade

partícula (fase dispersa)

- $d_p = 1e - 3$ $[m]$ diametro (limite $1e - 3m$)
- $\rho_p = 785.0$ $[kg]/[m^3]$ densidade madeira
- $\rho_p = 2700.0$ $[kg]/[m^3]$ densidade aluminio
- $\rho_p = \rho$
- $V_p = (1.0/6.0)\pi d_p^3$ $[m^3]$ volume
- $m = \rho_p V_p$ $[kg]$ massa

campo

- $g = 9.81$ $[m]/[s^2]$ gravidade
- $h = 1.0$ $[m]$ altura do canal
- $L = 5h$ $[m]$ comprimento do canal

condição inicial

- $numParticles = 100$ número total de partículas
- $\#v_x = np.zeros((numParticles,1),dtype=float)$
- $v_x = np.random.uniform(-0.1,0.1,(numParticles,1))$
- $\#v_y = np.zeros((numParticles,1),dtype=float)$
- $v_y = np.random.uniform(-0.1,0.1,(numParticles,1))$
- $time = 0.0$ $[s]$ tempo
- $x = np.random.uniform(2.0,1.0,(numParticles, 1))$
- $\#x = np.zeros((numParticles,1),dtype=float)$
- $y = np.random.uniform(0.8h,0.2h,(numParticles, 1))$
- $\#y = np.zeros((numParticles,1),dtype=float)$

passo de tempo

- $dt = 0.01$ $[s]$ passo de tempo

15 Pêndulo simples

Deseja-se resolver o problema do pêndulo simples:

$$m \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mg}{l} \sin \theta = 0 \quad (32)$$

Esta equação pode ser resolvida de diferentes formas. A mais simples é tornar esta equação diferencial de segunda ordem em duas equações de ordem mais baixa:

$$\frac{d\theta}{dt} = v \quad (33)$$

e

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{mg}{l} \sin \theta = 0 \quad (34)$$

Com isso, resolve-se a primeira equação para encontrar θ , fazendo:

$$\frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} = v^n \quad (35)$$

seguido da solução de v após a substituição do θ encontrado na equação anterior. Este processo deve ser repetido sucessivamente.

Para pequenas perturbações esta equação tem solução analítica, com isso aproxima-se $\sin \theta = \theta$, chegando à seguinte equação:

$$m \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mg}{l} \sin \theta = 0 \quad (36)$$

A solução analítica é então escrita da seguinte forma para pequenos ângulos ($< 10^\circ$):

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\sqrt{g/l}t) \quad (37)$$

Dados da simulação:

Tabela 5: Dados da simulação do pêndulo submetido à força de gravidade.

massa da partícula	aceleração da gravidade	passo de tempo	comprimento da haste
[kg]	[m]/[s ²]	[s]	[m]
$m = 1.0$	$g = 9.81$	$dt = 0.01$	$L = 1.0$

Condições iniciais:

Tabela 6: Condições iniciais da simulação do pêndulo simples.

tempo inicial	velocidade inicial	ângulo inicial	posição inicial
[s]	[m]/[s]	°	[rad]
$time = 0.0$	$v_0 = 0.0$	10	$\theta_0 = \frac{2grad\pi}{360}$