

ESCOAMENTO EM CANAL - Modelos 1D

Preparado por: Leon Lima e Gustavo Anjos
30 de Maio de 2015

Resumo. Este texto apresenta os pontos principais da modelagem matemática de escoamento incompressível, desenvolvido, em regimes laminar e turbulento, permanente e transiente, em canal aberto. Conceitos básicos de turbulência são sucintamente apresentados. Além disso, a discretização das equações de escoamento em canal 1D utilizando o método das diferenças finitas e o método de elementos finitos é apresentada para os perfis laminar e turbulento.

Conteúdo

1 PERFIL LAMINAR	2
1.1 Regime laminar permanente	2
1.2 Regime laminar transiente	3
2 PERFIL TURBULENTO	4
2.1 Camada limite turbulenta	5
2.2 Comprimento de mistura de Prandtl	6
3 MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS	7
3.1 Laminar permanente	7
3.2 Laminar transiente	8
3.3 Condições de Contorno	9
3.4 Turbulento transiente	9
4 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	9
5 PARTÍCULAS	12
6 TESTES	12

1 PERFIL LAMINAR

1.1 Regime laminar permanente

Considere as componentes x e y das equações de Navier Stokes para escoamento incompressível (com viscosidade constante¹ e sem termo das forças de corpo):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Para o regime permanente do escoamento, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$.

Suponha também que o escoamento seja desenvolvido, isto é:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

o que, devido a conservação de massa Eq. (2), implica em:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

Esse resultado significa que $v = \text{constante}$ ao longo de qualquer seção do canal. Mais do que isso: por causa das condições de contorno de não deslizamento, $v = 0$, em todo o domínio do escoamento.

Temos portanto:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (5a)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (5b)$$

A condição de que a derivada parcial da pressão em relação a y seja nula significa que $p = p(x)$, ou seja, o campo de pressão não depende da coordenada y . Este resultado significa que o escoamento incompressível, desenvolvido e estacionário em um canal cujos fluxos na direção z são irrelevantes é modelado por

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6)$$

Uma vez que a pressão depende apenas de x e a velocidade u depende apenas de y , podemos concluir que a pressão depende linearmente de x , de maneira que $\partial p / \partial x$ é constante. Dado um gradiente de pressão, a equação 6 se torna uma EDO homogênea de segunda ordem, cuja solução é o perfil laminar do escoamento com

¹Para um escoamento isotérmico, a hipótese de viscosidade constante é muito realista, uma vez que, embora ela dependa também da pressão do fluido (além da temperatura), as variações com a pressão são extremamente baixas.

as características citadas, expresso por:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (7)$$

A Eq.(7) fornece a solução geral do problema representado pela Eq. (6). As condições de contorno definem a natureza do problema. Tratamos aqui o caso particular de não-escorregamento de partículas em contato com as paredes inferior $y = 0$ e superior $y = L$. Com isso, as condições de contorno para velocidade se escrevem:

$$u(y = 0) = u(0) = 0 \quad (8)$$

$$u(y = L) = u(L) = 0 \quad (9)$$

Os coeficientes C_1 e C_2 da Eq. (7) podem ser encontrados através da imposição das condições de contorno, definindo então a solução particular do problema:

$$C_1 = \frac{u(L) - u(0)}{L} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} L \quad (10)$$

$$C_2 = u(0) \quad (11)$$

onde L é a largura do canal. Se $u(0) = u(L) = 0$, obtemos:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - Ly) \quad (12)$$

Para o problema do canal, a velocidade U é máxima no centro $y = L/2$. Considere $u(y = L/2) = U$. Para o perfil dado pela equação 12, temos portanto que:

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(-\frac{L^2}{4} \right) \quad (13)$$

o que resulta em:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -8 \frac{\mu U}{L^2} \quad (14)$$

Definindo o número de Reynolds como $Re = UL\rho/\mu$, obtemos

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -8 \frac{\mu^2 Re}{\rho L^3} \quad (15)$$

1.2 Regime laminar transiente

O regime transiente do mesmo escoamento pode ser representado por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (16)$$

Note que agora a equação depende da densidade ρ do fluido. De fato, para o regime transiente, a variação do perfil de velocidade com o tempo deve ser influenciada pela inércia do fluido, convergindo, no entanto, para

um valor comum para qualquer valor de ρ . Note ainda que a pressão agora é também função do tempo, isto é, $p = p(x, t)$ e seu gradiente não pode mais ser calculado pela expressão 15.

2 PERFIL TURBULENTO

Para números de Reynolds acima de um certo limite², eventuais perturbações introduzidas ao escoamento podem gerar oscilações cujas amplitudes cresçam monotonicamente, tornando-o instável hidrodinamicamente e convertendo o regime laminar em turbulento. Escoamentos turbulentos são caracterizados por

- alto grau de mistura
- riqueza de escalas
- caos

Osborne Reynolds introduziu a abordagem estatística ao estudo de escoamentos turbulentos em 1895 [6], segundo a qual o escoamento médio é resolvido. Para escoamentos quase estacionários, médias temporais podem ser usadas [3]. Matematicamente, o conceito introduzido por Reynolds consistia na média das equações de Navier-Stokes, cujo resultado são as equações RANS – Reynolds Averaged Navier-Stokes. Para escoamentos incompressíveis, elas são dadas por

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla \cdot \overline{\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}} \quad (17)$$

Expandindo em coordenadas cartesianas temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{\tilde{u}\tilde{u}} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\tilde{u}\tilde{v}} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\tilde{u}\tilde{w}} \right) \quad (18a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{\tilde{v}\tilde{u}} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\tilde{v}\tilde{v}} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\tilde{v}\tilde{w}} \right) \quad (18b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{\tilde{w}\tilde{u}} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\tilde{w}\tilde{v}} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\tilde{w}\tilde{w}} \right) \quad (18c)$$

É importante notar que o campo de velocidade \mathbf{v} e suas componentes, bem como o campo de pressão p , expressam aqui os respectivos valores médios, enquanto que o campo $\tilde{\mathbf{v}}$ e suas componentes representam as flutuações em torno dos valores médios, conforme a decomposição de Reynolds.

A dissipação introduzida pelos termos não-lineares de flutuação pode ser interpretada como um campo de tensão adicional atuando no escoamento, representado pelo tensor de tensões turbulentas dado por $\tau_t = -\rho \overline{\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}}$, cujo divergente é

$$\nabla \cdot \tau_t = -\rho \nabla \cdot \overline{\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}} \quad (19)$$

A equação 17 pode portanto ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{v} + \tau_t) \quad (20)$$

²Reynolds observou em experimento os regimes pelos quais um escoamento pode passar e quais os parâmetros influenciavam na transição. Suas conclusões em cima desse trabalho foram publicadas em 1883[5, 2]

Esta formulação introduz novas variáveis ao modelo, indeterminando o sistema de equações. A estratégia clássica de fechamento do sistema é a aplicação da hipótese de Boussinesq, proposta em 1877[3]³, segundo a qual os processos de difusão da quantidade de movimento molecular e turbulento são análogos. Matematicamente, isso equivale a

$$\tau_t = \mu_t \nabla \mathbf{v} \quad (21)$$

onde μ_t é dita viscosidade turbulenta, ou viscosidade de Boussinesq. É mais conveniente agora nos referirmos à viscosidade molecular μ_m . No caso da viscosidade cinética temos portanto ν_t e ν_m . Para a maioria dos números de Reynolds, ν_t é algumas ordens de grandeza superior a ν_m , ou seja, as dissipações turbulentas são muito maiores do que as dissipações viscosas. Introduzindo o conceito de viscosidade turbulenta na equação 20, obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot [(\nu_m + \nu_t) \nabla \mathbf{v}] \quad (22)$$

A viscosidade adicional μ_t pode ser interpretada como um acréscimo dos efeitos de dissipação ao escoamento, e deve estar associada às características do escoamento.

Para o escoamento desenvolvido no canal, a equação 22 se reduz a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu_m + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (23)$$

2.1 Camada limite turbulenta

A região do escoamento próxima à parede passa por transições importantes até chegar ao escoamento principal⁴. Essa região é a camada limite do escoamento. É bem aceito que a camada limite possui duas regiões distintas: uma adjacente à parede, na qual os efeitos viscosos predominam – subcamada viscosa – e uma seguinte na qual os efeitos turbulentos são mais importantes – subcamada turbulenta. Cada uma delas possui um perfil de velocidade diferente. Essa composição é conhecida como a estrutura assintótica da camada limite turbulenta.

Na subcamada viscosa, a condição do escoamento pode ser descrita por

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (24)$$

Após integração, chegamos a

$$u = \frac{C y}{\mu} \quad (25)$$

Tendo em vista que a tensão cisalhante τ_w na parede é

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (26)$$

temos que

$$u = \frac{\tau_w y}{\mu} \quad (27)$$

³O artigo de Reynolds propondo a decomposição dos campos em parcelas média e flutuante e dando origem ao hoje chamado tensor de Reynolds foi publicado somente em 1895. O que havia como base de conhecimento para Boussinesq fazer essa proposta em 1877?

⁴A expressão em inglês para o escoamento principal seria “bulk flow”.

Finalmente, introduzindo uma velocidade u_τ , denominada velocidade de atrito, definida por

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (28)$$

podemos adimensionalizar a equação 27 definindo

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad (29a)$$

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} \quad (29b)$$

De tal forma que, para a subcamada viscosa, temos

$$u^+ = y^+ \quad (30)$$

Para a subcamada turbulenta, é necessária uma avaliação das ordens de grandeza dos termos importantes, utilizando o conceito de comprimento de mistura. Freire et al. [3] descrevem o desenvolvimento da expressão para a região turbulenta da camada limite. Aqui, vamos nos limitar a dizer que o perfil de velocidade na subcamada turbulenta é expresso por

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (31)$$

onde κ é a constante de Von Kármán, sendo normalmente $\kappa = 0,41$, e $B = 5$ é um valor constante bem aceito para escoamentos em parede, baseado em resultados experimentais. A figura 3.13 de Freire et al. [3] apresenta um conjunto de perfis para a camada limite turbulenta obtidos de experimentos diversos.

2.2 Comprimento de mistura de Prandtl

A viscosidade turbulenta ν_t pode ser determinada através de modelo algébrico ou de modelo a uma equação diferencial ou de modelo a duas equações diferenciais (neste se enquadram os modelos κ - ϵ e κ - ω).

O modelo algébrico é baseado no conceito de comprimento de mistura, concebido por Ludwig Prandtl (ver Freire et al. [3], capítulo 3), que define o quanto a partícula deve se afastar para perder sua identidade e misturar-se com as outras. A viscosidade turbulenta é então definida por:

$$\nu_t = l_c^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (32)$$

onde l_c é o comprimento de mistura. Para escoamentos próximos a paredes sólidas (caso do escoamento no canal),

$$l_c = \kappa y, \text{ para } y \leq \delta \quad (33a)$$

$$l_c = \kappa \delta, \text{ para } y > \delta \quad (33b)$$

onde κ é a constante de Von Kármán, e δ é a espessura da camada limite.

Com essa definição, a variação do comprimento de mistura passa por uma descontinuidade da parede para o interior da camada limite. O comprimento de mistura pode ser calculado ainda com a aplicação de uma função

de amortecimento. Normalmente é usada a função de amortecimento de Van Driest. Neste caso,

$$l_c = D\kappa y, \text{ para } y \leq \delta \quad (34)$$

com

$$D = 1 - \exp\left(-y \frac{u_\tau}{A\nu}\right) \quad (35)$$

onde $A = 26$.

Cabe ressaltar que a modelagem do escoamento através da introdução da viscosidade turbulenta é uma das formas de solução do Problema de Fechamento dos modelos RANS e é dito modelo de turbulência de primeira ordem. Existem modelos nos quais as componentes do tensor de Reynolds são decompostas, dando a origem a termos com produtos de três componentes de velocidade, classificados como modelos de turbulência de segunda ordem. Um outro ponto é que, no caso particular do escoamento no canal, considerando que ele possua largura L , o comprimento de mistura é dado por

$$l_c = \kappa y, \text{ para } y \leq \delta \quad (36a)$$

$$l_c = \kappa \delta, \text{ para } \delta < y < L - \delta \quad (36b)$$

$$l_c = \kappa(L - y), \text{ para } y \geq (L - \delta) \quad (36c)$$

3 MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

3.1 Laminar permanente

$$\frac{\partial}{\partial y} \nu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (37)$$

A discretização em diferenças finitas unidimensional é feita para um ponto genérico de malha i e distância entre nós uniforme igual a Δy , a discretização da equação 6 em diferenças finitas centradas é expressa por:

$$\frac{\nu_{i+1/2}(u_{i+1} - u_i) - \nu_{i-1/2}(u_i - u_{i-1})}{\Delta y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (38)$$

Note que a viscosidade cinemática $\nu = \mu / \rho$ é discretizada no ponto médio dos segmentos da malha em diferenças finitas $i + 1/2$ e $i - 1/2$, tomando-se então $\nu_{i+1/2} = (\nu_i + \nu_{i+1})/2$ e $\nu_{i-1/2} = (\nu_{i-1} + \nu_i)/2$.

Para a montagem (“*assembling*”) da matriz do termo difusivo A da equação em regime permanente, separe-se os coeficientes $i - 1$, i e $i + 1$ e organiza-se em colunas, uma vez que esta matriz é simétrica, dentro de um laço (“*loop*”) do tipo:

- coluna $j-1$:

$$\frac{\nu_{i-1/2}}{\Delta y^2} \quad (39)$$

- coluna j :

$$\frac{-\nu_{i+1/2} - \nu_{i-1/2}}{\Delta y^2} \quad (40)$$

- coluna $j+1$:

$$\frac{\nu_{i+1/2}}{\Delta y^2} \quad (41)$$

Para a montagem do vetor do lado direito:

- linha i:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (42)$$

3.2 Laminar transiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \nu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (43)$$

A discretização em diferenças finitas unidimensional é da mesma forma que no caso de escoamento laminar estacionário, porém com a inclusão da derivada transiente ($\partial/\partial t$) na equação. Com isso, para um ponto genérico de malha i , para passo de tempo ΔT e distância entre nós uniforme igual a Δy , a discretização da equação 16 em diferenças finitas centradas é expressa por:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha \frac{\nu_{i+1/2}(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) - \nu_{i-1/2}(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})}{\Delta y^2} + \\ & + (1 - \alpha) \frac{\nu_{i+1/2}(u_{i+1}^n - u_i^n) - \nu_{i-1/2}(u_i^n - u_{i-1}^n)}{\Delta y^2} \end{aligned} \quad (44)$$

Note que α representa uma variável limitada por $0 \leq \alpha \leq 1$ que ajusta o esquema discreto no tempo em explícito $\alpha = 0$, implícito $\alpha = 1$ e de segunda ordem do tipo Crank-Nicholson para $\alpha = 1/2$. A viscosidade cinemática $\nu = \mu / \rho$ é discretizada no ponto médio dos segmentos da malha em diferenças finitas $i+1/2$ e $i-1/2$, tomando-se então $\nu_{i+1/2} = (\nu_i + \nu_{i+1})/2$ e $\nu_{i-1/2} = (\nu_{i-1} + \nu_i)/2$.

Para a montagem (“*assembling*”) da matriz do termo difusivo A da equação em regime transiente, propõe-se um esquema dentro de um laço (“*loop*”) do tipo:

- coluna j-1:

$$-\alpha \frac{\nu_{i-1/2}}{\Delta y} \quad (45)$$

- coluna j:

$$\frac{1}{\Delta t} + \alpha \frac{\nu_{i+1/2}}{\Delta y} + \alpha \frac{\nu_{i-1/2}}{\Delta y} \quad (46)$$

- coluna j+1:

$$-\alpha \frac{\nu_{i+1/2}}{\Delta y} \quad (47)$$

Para a montagem do vetor do lado direito:

- linha i:

$$\frac{u_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} (1 - \alpha) \frac{\nu_{i+1/2}(u_{i+1}^n - u_i^n) - \nu_{i-1/2}(u_i^n - u_{i-1}^n)}{\Delta y^2} \quad (48)$$

3.3 Condições de Contorno

3.4 Turbulento transiente

4 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

No método de elementos finitos, o domínio é dividido em um número de sub-domínios finitos conhecidos como elementos. Uma simples função é utilizada para caracterizar a variação de cada variável dentro do elemento. Esta função recebe o nome *função de forma*. A justaposição da variação das variáveis em cada elemento é usada para descrever todo o campo do fluido.

Podem-se considerar como características principais do método dois conceitos:

- a utilização da forma fraca, ou variacional, do problema;
- solução aproximada da equação variacional através do uso de funções dos elementos finitos.

A forma fraca é resultado da ponderação da equação original em sua forma forte (forma diferencial inicial, não alterada) em um domínio qualquer. É necessário encontrar uma solução tentativa u que satisfaça a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx < \infty \quad (49)$$

Uma função que satisfaça a Eq. (49) é chamada de **função** H^1 . Uma outra classe de funções é necessária, são as chamadas **funções peso**, que são funções do tipo H^1 com uma característica a mais. Para o caso de problema de Dirichlet, no contorno do domínio elas são nulas. Utilizando estas definições, pode-se provar [4] que a forma forte da equação de difusão em 1D

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{du}{dx} \right) - f = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad (50)$$

$$u = u_1 \quad \text{em} \Gamma_1 \quad (51)$$

$$u = u_2 \quad \text{em} \Gamma_2 \quad (52)$$

é equivalente à sua forma fraca representada pela Eq. (52) depois de passar por integração por partes do termo difusivo: **Achar** $u \in H_1^1$ **tal que, para qualquer** $W \in H_0^1$

$$\int_{\Omega} w \left[k \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) - f \right] = 0 \longrightarrow \int_{\Omega} k \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} d\Omega = \int_{\Omega} w f d\Omega + c.c. \quad (53)$$

w representa a função peso e Ω representa o domínio do problema, que para esse caso-exemplo está contido no intervalo fechado, $\Omega \in [0, 1]$.

Até esse momento não houve quaisquer aproximações e o problema ainda não foi discretizado. A seguir, através do método de Galerkin serão obtidas soluções aproximadas para a equação diferencial em questão.

Considerando Ω o domínio do problema e Ω^e o domínio do elemento, então:

$$\bigcup_{n=1}^N \Omega^e = \Omega; \quad \Omega^i \cap \Omega^j = 0; \quad i \neq j \quad (54)$$

sendo a malha formada por N elementos que podem ter dimensões características diferentes. Considere ainda que para cada elemento da malha está definida uma família de funções

$$N^e = [N_1^e \cdots N_S^e] \quad (55)$$

onde S representa o número de nós que definem o elemento. Para um elemento linear (Fig. 1a), $S = 2$, já para um elemento quadrático 1D (Fig. 1b), $S = 3$.

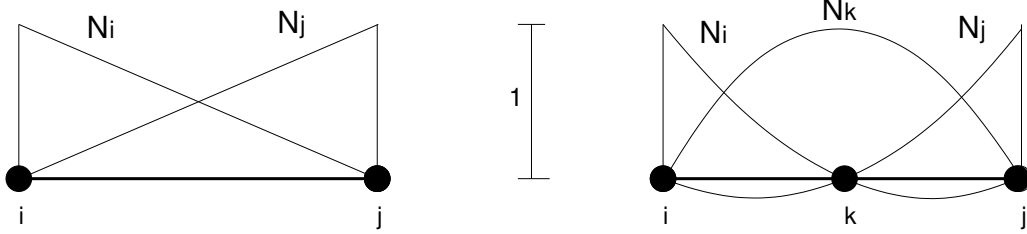


Figura 1: Representação de elementos unidimensionais linear à esquerda e quadrático à direita.

A diferença entre os dois elementos está no grau do polinômio interpolador. Para o elemento linear, a função interpoladora apresenta grau 1 enquanto que no elemento quadrático, a função interpoladora é de grau 2. Elementos de baixa ordem apresentam custo computacional baixo comparado aos de mais alta ordem, entretanto não oferecem a mesma precisão numérica. Considerando que as funções interpolação são da forma

$$u^e(x) = \sum_n u_j(x) N_j^e \quad (56)$$

$$w^e(x) = \sum_n w_i(x) N_i^e \quad (57)$$

e aplicando-se o método de Galerkin na forma fraca da equação de difusão, chega-se a:

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \sum_{i,j \in e} \alpha \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} u_j d\Omega = \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_{i \in e} N_i^e f d\Omega + \text{c.c.} \quad (58)$$

rearranjando os termos com somatório dentro da integral, a equação define um sistema linear do tipo

$$\mathbf{K}u = \mathbf{f} \quad (59)$$

onde u tem como componentes os valores nodais u_n , a matriz \mathbf{K} e o vetor \mathbf{f} representados por uma montagem especial conhecida com *Assembling*:

$$\mathbf{K} = \mathcal{A} \underset{e=1}{\overset{nele}{k^e}}; \quad \mathbf{f} = \mathcal{A} \underset{e=1}{\overset{nele}{f^e}} \quad (60)$$

e \mathcal{A} é o operador montagem. A matriz k^e e o vetor f^e são definidos por

$$k_{i,j} = \int_{\Omega^e} \alpha \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} d\Omega \quad i, j = 2 \quad (61)$$

$$f_i = \int_{\Omega^e} N_i^e f d\Omega \quad i = 2 \quad (62)$$

As integrais acima podem ser resolvidas analiticamente ou através de métodos numéricos. Em elementos finitos, o método numérico mais popular é a quadratura gaussiana, porém, para o caso unidimensional, o resultado analítico dessas integrais é simples. Dependendo do tipo de função de forma escolhido, o erro de aproximação diminui. Para este caso, considera-se o elemento linear representado por:

$$N_i = 1 - \frac{x - x_i}{h} \quad (63)$$

$$N_j = \frac{x - x_j}{h} \quad (64)$$

onde h representa o tamanho característico do elemento, obtém-se:

$$k^e = \frac{\alpha}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f^e = h \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Realizando o procedimento de *Assembling* chega-se ao sistema linear (Eq. 59):

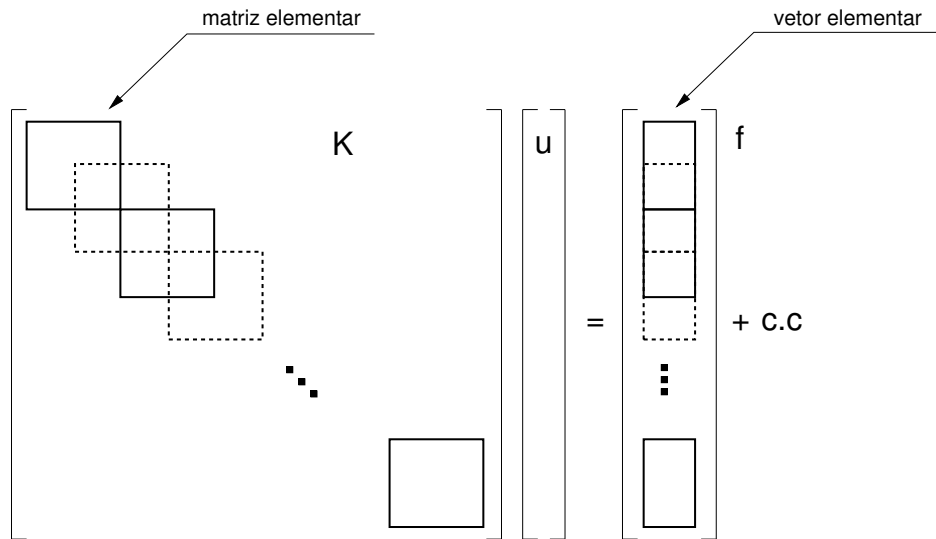


Figura 2: Sistema linear resultante da discretização pelo método de elementos finitos

e a solução do sistema linear fornece os valores da incógnita u nos nós dos elementos da malha.

A utilização do método de elementos finitos vem se tornando cada vez mais frequente na indústria, na educação e na pesquisa. A reutilização de código na forma de módulos e bibliotecas é uma grande aliada ao desenvolvimento de grandes projetos, uma vez definida a base do código (montagem de matrizes e vetores, solução do sistema linear), uma mudança na geometria e nas condições de contorno do problema altera o tipo de problema físico estudado, representando aproximadamente 10% de modificações no código numérico.

5 PARTÍCULAS

Em dinâmica dos fluidos, a equação de Basset-Boussinesq-Oseen (BBO) descreve o movimento e as forças que atuam em partículas pequenas para escoamentos transiente com baixo número de Reynolds. Sua formulação pode ser encontrada de diversas formas.

$$\frac{\pi}{6}\rho_p d_p^3 \frac{du_p}{dt} = 3\pi\mu d_p(u_f - u_p) - \frac{\pi}{6}d_p^3 \nabla p + \frac{\pi}{12}\rho_f d_p^3 \frac{d}{dt}(u_f - u_p) + \frac{3}{2}d_p^2 \sqrt{\pi\rho_f \mu} \cdots + \sum F_k \quad (65)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação representa o arrasto, o segundo termo representa o gradiente de pressão, o terceiro a força virtual, o quarto a força de Basset e o quinto termo representa qualquer outra força que deva ser levada em consideração, como por exemplo a força de gravidade.

$$\sum F = ma = m \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \quad (66)$$

Em $\sum F$ diversas forças podem ser consideradas no modelo dependendo do grau de complexidade e precisão do esquema proposto. Neste seção, consideraremos àquelas pertinentes ao desenvolvimento de um modelo simplificado, cabendo ressaltar que a consideração de outras forças varia de acordo com a aplicação em problemas mais complexos. Para maiores informações, ao leitor é sugerido as seguintes referências: [1],

$$\sum F = F_{lift} + F_{drag} + F_{gravity} + F_{virtual} \quad (67)$$

onde $F_{gravity}$ representa a força gravitacional definida como:

$$dF_{gravity} = \rho_p g dv \quad (68)$$

ao integramos no volume ocupado por uma partícula qualquer, a força gravitacional toma a forma de:

$$dF_{gravity} = \rho_p \pi \frac{d_p^3}{6} g \quad (69)$$

onde $dv = \pi d_p^3/6$. F_{lift} representa a força de sustentação (“lift”)

6 TESTES

Uma implementação dos modelos descritos possibilitará os seguintes testes:

- Para um mesmo problema, integre a solução final ao longo do domínio espacial para duas resoluções de malha diferentes. Tente observar o efeito da dissipação numérica. Quanto menor o número de pontos, maior é a quantidade de informação perdida na aproximação das derivadas. Um escoamento mais dissipativo (ainda que falsamente) resultará em valores menores de $\int_0^L u dy$.
- Os perfis turbulentos são mais “achatados” do que os laminares, o que é possível de ser explicado a partir da definição do comprimento de mistura. Uma vez que a intensidade da turbulência é proporcional ao número de Reynolds, é possível notar que o perfil se torna mais “achatado” para maiores números de Reynolds.
- A solução do perfil turbulento não representa o escoamento “real”. De fato, uma vez que a solução das equações RANS fornece os campos médios, as flutuações do escoamento não são vistas pelos perfis obtidos da solução de 48.

- Tente reproduzir os perfis da camada limite turbulenta. Calcule a solução permanente do escoamento turbulento e tente observar as subcamadas viscosa e turbulenta.

Referências

- [1] C.T. Crowe, J.D. Schwarzkopf, M. Sommerfeld, and Y. Tsuji. *Multiphase Flows with Droplets and Particles*. Taylor & Francis Group, Florida, 2012. ISBN 13:978-1-4398-4051-1.
- [2] Peter A. Davidson, Yukio Kaneda, Keith Moffatt, and Katepalli R. Sreenivasan. *A Voyage Through Turbulence*. Cambridge University Press, 2011.
- [3] Atila P. S. Freire, Philippe P. M. Menut, and Jian Su. *Turbulência*. ABCM - Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, 2002.
- [4] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, New York, 1987. ISBN 9780486135021.
- [5] Osborne Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 174:935–982, 1883.
- [6] Osborne Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 186:123–164, 1895.