
TRANSMISSÃO DE CALOR - Análise Discreta

Preparado por: Prof. Gustavo Anjos
30 de Maio de 2017

Resumo. Este texto apresenta os pontos principais da modelagem discreta de trocadores de calor usando volumes de controle em Transferência de Calor, curso este ministrado na Universidade do Estado do Rio de Janeiro, no 8º período do curso de Engenharia Mecânica. Com base no conteúdo de texto, o aluno poderá analisar em detalhes trocadores de calor de diversas geometrias, bem como se familiarizar com álgebra linear computacional e linguagem de programação numérica. Exercícios são propostos no final do texto.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Correntes Paralelas	2
3	Contracorrente	9

1 Introdução

Trocadores de calor são dispositivos usados para realizar troca térmica entre dois ou mais fluidos, com o objetivo de manter a variação de temperatura de um fluido em condições estáveis e de controle satisfatório para a continuidade de um projeto.

Os fluidos que escoam no trocador de calor recebem, cada, um nome técnico: *fluido de processo* e *fluido de serviço*. O fluido de processo é o principal fluido do sistema, nele deseja-se diminuir ou aumentar sua temperatura. O fluido de serviço, ou de trabalho, é o fluido que será usado no sistema para obter a troca térmica necessária e, conseqüentemente, mudar a temperatura do fluido de processo. O fluido de processo geralmente é colocado para escoar dentro dos tubos, uma vez que ele é o fluido mais nobre do sistema e requer cuidados especiais. Termicamente, toda a troca de energia do fluido de processo será com o fluido de serviço. Por outro lado, o fluido de serviço, que se encontra no casco (parte externa dos tubos), trocará calor com o fluido de processo (dentro dos tubos) e também com a vizinhança, já que dificilmente o trocador de calor será completamente isolado termicamente.

Uma análise discreta pode ser feita em trocadores de calor usados em diversas aplicações de engenharia. Esta análise permitirá que as temperaturas do fluido durante a troca térmica no interior do trocador de calor sejam conhecidas ao longo de toda a extensão do equipamento. Esta análise também pode determinar a temperatura de saída dos fluidos, caso o projeto do sistema desconheça tal informação. Além do mais, outros dados podem ser calculados através de processos numéricos iterativos, como por exemplo, o comprimento do trocador de calor, ou ainda o coeficiente global de transferência de calor. Além de parâmetros térmicos, a ferramenta numérica pode também calcular a perda de carga no tubo e no casco, parâmetro este de grande importância em projetos

de trocadores de calor. Conclui-se então que a análise discreta de trocadores de calor é uma ferramenta poderosa para análise, estudo e projeto de sistemas de troca térmica.

2 Correntes Paralelas

Observe o desenho esquemático de um trocador de calor de correntes paralelas como apresentado na Fig. (1). Nele, dois fluidos estão escoando no mesmo sentido, ou seja, da esquerda para direita, um passando pelo casco e o outro pelo tubo interno. Ao lado da figura pode-se também observar um corte transversal que mostra a geometria do trocador de calor.

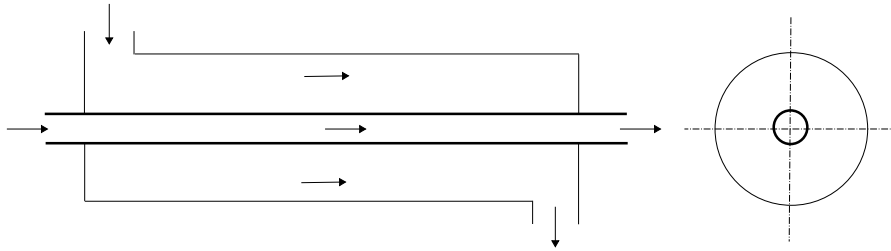


Figura 1: Trocador de calor de correntes paralelas de passo único no tubo e no casco. Ao lado, corte transversal para ilustrar a geometria do equipamento.

Considere um trocador de calor de comprimento conhecido L . Considere ainda que as perdas de calor para a vizinhança são desprezíveis e que ambos o coeficiente global de transferência de calor U e o calor específico à pressão constante c_p dos fluidos se mantêm constante ao longo de todo o trocador de calor, apesar do fluido mudar de temperatura ao longo de seu comprimento. Estas hipóteses são comumente empregadas no dimensionamento de um trocador de calor. Na Fig. (2) propõe-se uma discretização do trocador de calor em três elementos cilíndricos de comprimento constante $l_1 = l_2 = l_3 = L/3$, onde o índice representa o elemento discreto. Note que o desenho dos elementos discretos está simplificado através do uso de retângulos ao invés de cilindros de comprimento $L/3$. Deseja-se obter as temperaturas de saída dos fluidos de processo e serviço sabendo que as temperaturas de entrada de ambos os fluidos são conhecidas. Os números nos círculos representam o elemento discreto, enquanto que os outros números representam o nó de passagem dos fluidos. Note que o esquema proposto é apenas uma representação ilustrativa do processo de troca térmica que está acontecendo em cada elemento e que servirá para o desenvolvimento das equações de balanço de energia (entalpia, mais especificamente) para cada fluido, juntamente com a equação de fluxo de calor. Neste esquema, os fluidos passam através das arestas de cada elemento discreto retangular e seguem para o próximo elemento. Cabe notar que a numeração para os nós das arestas do elemento é aleatória e não influencia na solução do sistema. Neste caso, os nós 1, 2, 3 e 4 são usados para a passagem do fluido de processo (dentro do tubo) e os nós 5, 6, 7 e 8 são usados para a passagem do fluido de serviço.

Considere o elemento discreto 1 do sistema como mostrado na Fig. (3). Neste elemento, o fluido de processo entra pelo nó 1 e sai pelo nó 2. O mesmo acontece com o fluido de serviço que entra pelo nó 5 e sai pelo nó 6. O balanço de energia para o fluido de processo no elemento 1 pode ser escrito como:

$$-Q_1 = -\dot{m}c_p T_1 \quad Q_2 = \dot{m}c_p T_1 \pm U dA_1 \Delta T_{e1}$$

onde Q representa a parcela do balanço de energia que entra ou que sai do elemento, \dot{m} é o fluxo de massa (lembre-se que $\dot{m} = \rho v A_{tr}$, onde ρ e v são respectivamente a densidade e a velocidade do fluido e A_{tr} é a área transversal do tubo), c_p representa o calor específico à pressão constante, T é a temperatura, U é o coeficiente global de transferência de calor, dA é a área superficial do elemento 1 de troca de calor entre os fluidos de processo e serviço, que para este caso é $dA_1 = 2\pi r l_1$, onde r é o raio externo do tubo e L_1 é o comprimento do elemento 1 e ΔT_{e1} é a diferença de temperaturas entre os dois fluidos. É importante notar a convenção de

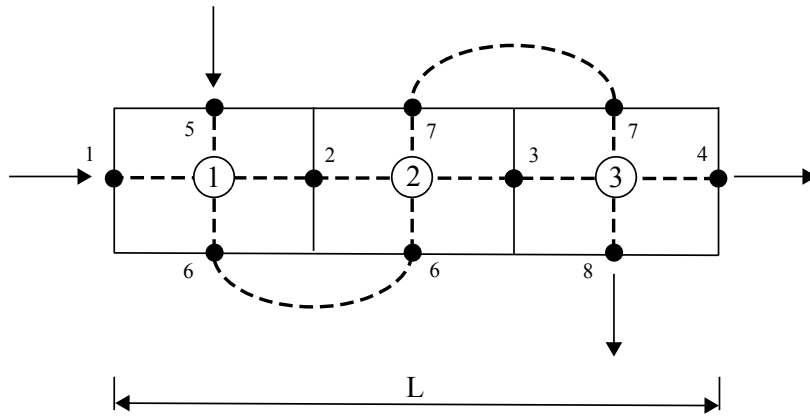


Figura 2: Discretização de Trocador de calor de correntes paralelas em 3 elementos.

sinais para a parcela do balanço de energia que entra no elemento (nó 1, sinal negativo) que sai (nó 2, sinal positivo). Isso ajudará na montagem da matriz para solução do problema térmico. Além disto, nota-se que em Q_2 aparece o sinal de \pm na equação. Isto se deve ao fato de não termos definido no início do projeto se o fluido de processo se aquece (ganha calor) ou se resfria (perde calor). Com isso, o nó 1 é equacionado com a parcela do fluxo de entalpia que entra no elemento discreto ($\dot{m}c_p T_1$) e o nó 2 é equacionado com o a parcela do fluxo de entalpia que entra no elemento ($\dot{m}c_p T_1$) através do nó 1 e a parcela de transferência de calor entre os fluidos de processo e serviço ($UdA_1 \Delta T_{e1}$).

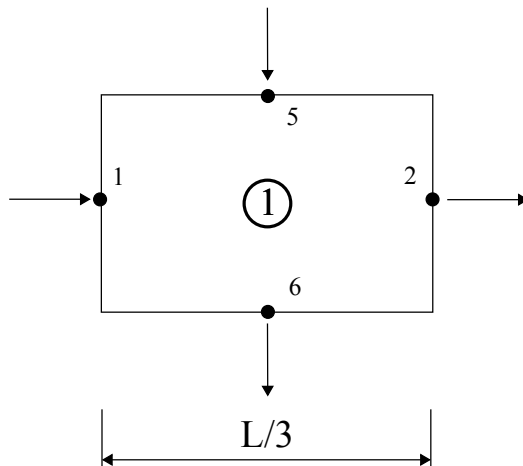


Figura 3: Elemento discreto 1 com nós na aresta do retângulo onde passam os fluidos de processo (nós 1 e 2) e de serviço (nós 5 e 6).

Para o fluido de serviço que entra pelo nó 5 e sai pelo nó 6, o balanço de energia no elemento 1 pode ser escrito como:

$$-Q_5 = -\dot{m}c_p T_5 \quad Q_6 = \dot{m}c_p T_5 \pm UdA_1 \Delta T_{e1}$$

onde \dot{m} e c_p são agora definidos para o fluido de serviço. As equações algébricas utilizada para modelar este fluido são semelhantes ao do fluido de processo, bastando apenas modificar a velocidade e as propriedades do fluido em questão, levando-se em consideração que a área transversal onde escoa o fluido deverá ser a área transversal do casco menos a área transversal do tubo.

Consideraremos agora os dois casos térmicos de troca de energia para definirmos a correta utilização do sinal antes da parcela de transferência de calor entre os fluidos e definimos como $(\bullet)_{\text{proc}}$ e $(\bullet)_{\text{serv}}$ os valores referentes ao fluido de processo e ao fluido de serviço, respectivamente:

- o fluido de processo deve ser aquecido, ou seja, ao passar do nó 1 ao nó 2 ele recebe calor

$$Q_2 = (\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_1 + U dA_1 \Delta T_{e1}$$

$$Q_6 = (\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_5 - U dA_1 \Delta T_{e1}$$

- o fluido de processo deve ser resfriado, portanto perde calor ao passar do nó 1 ao nó 2.

$$Q_2 = (\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_1 - U dA_1 \Delta T_{e1}$$

$$Q_6 = (\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_5 + U dA_1 \Delta T_{e1}$$

Para completar o balanço discreto do elemento 1 devemos definir a variação de temperatura ΔT_{e1} entre os dois fluidos ao passar pelo elemento 1. Uma possível, e talvez óbvia, solução seria definir esta variação térmica como a diferença entre as temperaturas de saída dos dois fluidos no elemento 1, ou seja $\Delta T_{e1} = T_2 - T_6$ para o caso do fluido de processo sendo resfriado ou $\Delta T_{e1} = T_6 - T_2$ para o fluido de processo aquecendo. Podemos ainda definir genericamente ΔT_{e1} , utilizando o módulo da diferença de temperatura de saída:

$$\Delta T_{e1} = |T_2 - T_6|$$

Com isso, o sistema de equações algébricas lineares para o elemento discreto 1 pode ser escrito como:

$$\text{elem 1} = \begin{cases} -Q_1 & = -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_1 \\ Q_2 & = (\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_1 \pm U dA_1 (|T_2 - T_6|) \\ -Q_5 & = -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_5 \\ Q_6 & = (\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_5 \pm U dA_1 (|T_2 - T_6|) \end{cases}$$

Este sistema de equações algébricas também pode ser escrito em notação matricial como um sistema do tipo $K_{ij}T_j = Q_j$, onde K_{ij} representa a matriz de coeficientes, ou matriz de rigidez (nomenclatura usada pelo método de elementos finitos - MEF), T_j é o vetor de incógnitas de temperatura e Q_j é o vetor do lado esquerdo do sistema, podendo também ser chamado de vetor de carregamento. Este sistema pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}} & 0 & 0 & 0 \\ (\dot{m}c_p)_{\text{proc}} & \pm U dA_1 & 0 & \pm U dA_1 \\ 0 & 0 & -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}} & 0 \\ 0 & \pm U dA_1 & (\dot{m}c_p)_{\text{serv}} & \pm U dA_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_1 \\ Q_2 \\ -Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}$$

Outra solução, que melhora a aproximação, pode ser feita utilizando-se a diferença das médias de temperaturas de entrada e saída de cada fluido. Ou seja:

$$\Delta T_{e1} = \left| \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_5 + T_6}{2} \right|$$

Novamente a definição de módulo foi usada para o caso geral. Com isto obtemos uma aproximação linear da

diferença de temperaturas entre os fluidos. O sistema linear equações algébricas do elemento 1 pode ser formado:

$$\text{elem 1} = \begin{cases} -Q_1 &= -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_1 \\ Q_2 &= (\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_1 \pm U d A_1 \left(\left| \frac{T_1+T_2}{2} - \frac{T_5+T_6}{2} \right| \right) \\ -Q_5 &= -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_5 \\ Q_6 &= (\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_5 \pm U d A_1 \left(\left| \frac{T_1+T_2}{2} - \frac{T_5+T_6}{2} \right| \right) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}} & 0 & 0 & 0 \\ (\dot{m}c_p)_{\text{proc}} \pm \frac{U d A_1}{2} & \pm \frac{U d A_1}{2} & \pm \frac{U d A_1}{2} & \pm \frac{U d A_1}{2} \\ 0 & 0 & -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}} & 0 \\ \pm \frac{U d A_1}{2} & \pm \frac{U d A_1}{2} & (\dot{m}c_p)_{\text{serv}} \pm \frac{U d A_1}{2} & \pm \frac{U d A_1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_1 \\ Q_2 \\ -Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}$$

Note que a 2ª e 3ª linhas são modificadas para incluir os termos da diferença da média de temperaturas e que as componentes do fluxo de calor agora é dividida por 2.

O mesmo procedimento deve ser feito para o elemento discreto 2 como mostra a Fig. (4). O fluido de processo atravessa o elemento discreto passando pelos nós 2 e 3 enquanto o fluido de serviço passa pelos nós 6 e 7. O balanço de energia para o fluido de processo no elemento 2 pode ser escrito como:

$$-Q_2 = -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_2 \quad Q_3 = (\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_3 \pm U d A_2 \Delta T_{e2}$$

Para o fluido de serviço que entra pelo nó 6 e sai pelo nó 7, o balanço de energia no elemento 2 pode ser escrito como:

$$-Q_6 = -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_6 \quad Q_7 = (\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_7 \pm U d A_2 \Delta T_{e2}$$

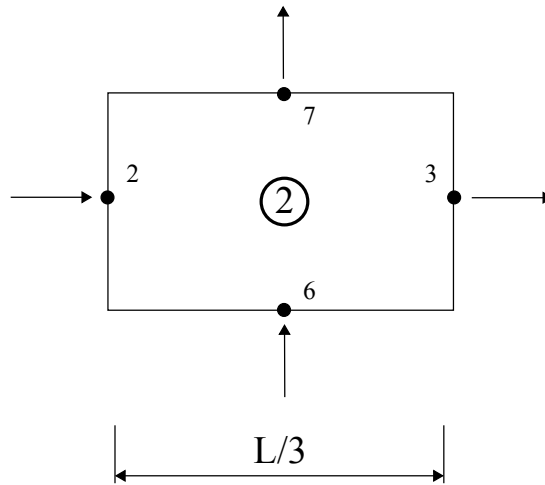


Figura 4: Elemento discreto 2 com nós na aresta do retângulo onde passam os fluidos de processo (nós 2 e 3) e de serviço (nós 6 e 7).

O sistema de equações algébricas lineares para o elemento discreto 2 pode ser escrito, utilizando a hipótese de

aproximação linear de ΔT_{e2} , ou seja como a média da diferença das temperaturas no nós 2, 3, 6 e 7, como:

$$\text{elem 2} = \begin{cases} -Q_2 & = -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_2 \\ Q_3 & = (\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_2 \pm U dA_1 \left(\left| \frac{T_2+T_3}{2} - \frac{T_6+T_7}{2} \right| \right) \\ -Q_6 & = -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_6 \\ Q_7 & = (\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_6 \pm U dA_1 \left(\left| \frac{T_2+T_3}{2} - \frac{T_6+T_7}{2} \right| \right) \end{cases}$$

Consequentemente, podemos escrever o sistema de equações algébricas do elemento 2 utilizando notação matricial como no caso anterior:

$$\begin{bmatrix} -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}} & 0 & 0 & 0 \\ (\dot{m}c_p)_{\text{proc}} \pm \frac{U dA_2}{2} & \pm \frac{U dA_2}{2} & \pm \frac{U dA_2}{2} & \pm \frac{U dA_2}{2} \\ 0 & 0 & -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}} & 0 \\ \pm \frac{U dA_1}{2} & \pm \frac{U dA_2}{2} & (\dot{m}c_p)_{\text{serv}} \pm \frac{U dA_2}{2} & \pm \frac{U dA_1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_6 \\ T_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_2 \\ Q_3 \\ -Q_6 \\ Q_7 \end{bmatrix}$$

Algumas observações podem ser feitas se compararmos os sistemas lineares para os dois elementos aqui apresentados:

- a estrutura da matriz de rigidez é constante, ou seja, a posição dos elementos iguais e diferentes de zero é a mesma;
- os valores dos elementos diferentes de zero apresentam apenas a diferença: dA_1 e dA_2 , que para o caso em discussão são iguais $dA_1 = dA_2 = A/3$, onde A é a área superficial de troca de calor;
- o vetor de incógnitas T_j foi modificado para os nós correspondentes do elemento discreto 2, isto é T_2 , T_3 , T_6 e T_7 ;
- o vetor do lado direito (ou de carregamento) Q_j obedece a mesma regra do vetor de incógnitas, resultando em Q_2 , Q_3 , Q_6 e Q_7 .

Finalmente, repete-se o procedimento adotado anteriormente para o elemento discreto 3 como mostra a Fig. (5). O fluido de processo atravessa o elemento discreto passando pelos nós 3 e 4 enquanto o fluido de serviço passa pelos nós 7 e 8. O balanço de energia para o fluido de processo no elemento 3 pode ser escrito como:

$$-Q_3 = -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_3 \qquad Q_4 = (\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_3 \pm U dA_2 \Delta T_{e3}$$

Para o fluido de serviço que entra pelo nó 7 e sai pelo nó 8, o balanço de energia no elemento 3 pode ser escrito como:

$$-Q_7 = -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_7 \qquad Q_8 = (\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_7 \pm U dA_2 \Delta T_{e3}$$

O sistema de equações algébricas lineares para o elemento discreto 3 pode ser escrito, tomando-se ΔT_{e3} como a média da diferença das temperaturas no nós 3, 4, 7 e 8, como:

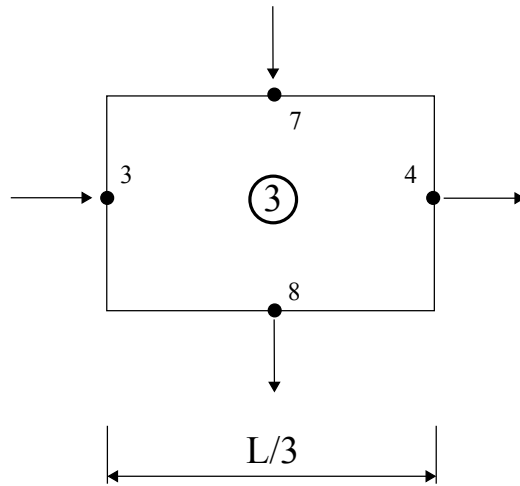


Figura 5: Elemento discreto 3 com nós na aresta do retângulo onde passam os fluidos de processo (nós 3 e 4) e de serviço (nós 7 e 8).

$$\text{elem 3} = \begin{cases} -Q_3 &= -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_3 \\ Q_4 &= (\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_3 \pm U d A_3 \left(\left| \frac{T_3+T_4}{2} - \frac{T_7+T_8}{2} \right| \right) \\ -Q_7 &= -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_7 \\ Q_8 &= (\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_7 \pm U d A_3 \left(\left| \frac{T_3+T_4}{2} - \frac{T_7+T_8}{2} \right| \right) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}} & 0 & 0 & 0 \\ (\dot{m}c_p)_{\text{proc}} \pm \frac{U d A_3}{2} & \pm \frac{U d A_3}{2} & \pm \frac{U d A_3}{2} & \pm \frac{U d A_3}{2} \\ 0 & 0 & -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}} & 0 \\ \pm \frac{U d A_3}{2} & \pm \frac{U d A_3}{2} & (\dot{m}c_p)_{\text{serv}} \pm \frac{U d A_3}{2} & \pm \frac{U d A_3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_3 \\ Q_4 \\ -Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix}$$

Para a montagem do sistema linear global, devemos somar todas as matrizes de elementos K_{ij} , os vetores de incógnitas T_j e de carregamento Q_j sucessivamente, respeitando a posição de equação, de modo que possamos sempre operar linha e coluna para se obter a equação original de balanço de energia para o nó específico.

As condições de contorno do problema são as temperaturas de entrada dos fluidos de processo e de serviço. Entretanto as temperaturas de saída não foram especificadas, devendo então ser calculadas. Como não podemos calcular o valor de Q_4 e Q_8 como fizemos anteriormente para Q_1 e Q_5 , devemos utilizar mais duas equações de modo que possamos zerar os valores de Q nas linhas 4 e 8, resultando em um sistema linear com solução para as temperaturas nos nós. As equações são:

$$-Q_4 = -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_4 \qquad -Q_8 = -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_8 \quad (1)$$

Com o auxílio destas equações adicionais, o sistema linear final toma a forma de:

Depois da montagem do sistema linear global, a matriz de rigidez e os vetores tomam a forma de:

$$K_{ij}T_j = Q_j \quad (2)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$-(\dot{m}c_p)_p$	0	0	0	0	0	0	0
2	$+(\dot{m}c_p)_p$ $\pm \frac{UdA_1}{2}$	$-(\dot{m}c_p)_p$ $\pm \frac{UdA_1}{2}$	0	0	$\pm \frac{UdA_1}{2}$	$\pm \frac{UdA_1}{2}$	0	0
3	0	$+(\dot{m}c_p)_p$ $\pm \frac{UdA_2}{2}$	$-(\dot{m}c_p)_p$ $\pm \frac{UdA_2}{2}$	0	0	$\pm \frac{UdA_2}{2}$	$\pm \frac{UdA_2}{2}$	0
4	0	0	$+(\dot{m}c_p)_p$ $\pm \frac{UdA_3}{2}$	$\pm \frac{UdA_3}{2}$	0	0	$\pm \frac{UdA_3}{2}$	$\pm \frac{UdA_3}{2}$
5	0	0	0	0	$-(\dot{m}c_p)_s$	0	0	0
6	$\pm \frac{UdA_2}{2}$	$\pm \frac{UdA_2}{2}$	0	0	$+(\dot{m}c_p)_s$ $\pm \frac{UdA_2}{2}$	$-(\dot{m}c_p)_s$ $\pm \frac{UdA_2}{2}$	0	0
7	0	$\pm \frac{UdA_3}{2}$	$\pm \frac{UdA_3}{2}$	0	0	$+(\dot{m}c_p)_s$ $\pm \frac{UdA_3}{2}$	$-(\dot{m}c_p)_s$ $\pm \frac{UdA_3}{2}$	0
8	0	0	$\pm \frac{UdA_3}{2}$	$\pm \frac{UdA_3}{2}$	0	0	$+(\dot{m}c_p)_s$ $\pm \frac{UdA_3}{2}$	$\pm \frac{UdA_3}{2}$

Para encontrarmos a solução deste problema, basta multiplicar ambos os lados pela inversa da matriz de rigidez, ou seja K_{ij}^{-1} , resultando em:

$$K_{ij}^{-1}K_{ij}T_j = K_{ij}^{-1}Q_j \quad (3)$$

Note agora que $K_{ij}^{-1}K_{ij} = I_{ij}$, onde I_{ij} é a matriz identidade. A multiplicação de uma matriz identidade por um vetor não altera o próprio vetor $I_{ij}T_j = T_j$, com isso podemos escrever a solução do problema como:

$$T_j = K_{ij}^{-1}Q_j \quad (4)$$

Para encontrarmos os valores nodais da temperatura, ou seja os valores de T_j , basta encontrarmos a matriz de rigidez inversa K_{ij}^{-1} e multiplicarmos matricialmente pelo vetor de carregamento Q_j .

Para a solução do sistema linear resultante, diversas técnicas estão disponíveis em livros textos de álgebra linear, computação científica e métodos numéricos, tais como o método de eliminação de Gauss e o método de Cramer, não cabendo a este texto discutí-los detalhadamente. Uma solução simples para este problema é a utilização de bibliotecas numéricas disponíveis em linguagens de programação como **Python**, **Mathematica**, **Matlab** e **C/C++**.

Método numérico para montagem do sistema linear global

Algorithm 1 Algoritmo de montagem da matriz de rigidez K_{ij}

```

1: for  $elem \leftarrow 0, NE$  do                                 $\rightarrow NE = \text{Número total de elementos}$ 
2:   for  $i_{\text{local}} \leftarrow 0, 3$  do                         $\rightarrow i_{\text{local}} = [0, 1, 2, 3]$ 
3:      $i_{\text{global}} \leftarrow IEN[elem, i_{\text{local}}]$            $\rightarrow i_{\text{global}} = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ 
4:     for  $j_{\text{local}} \leftarrow 0, 3$  do                     $\rightarrow j_{\text{local}} = [0, 1, 2, 3]$ 
5:        $j_{\text{global}} \leftarrow IEN[elem, j_{\text{local}}]$          $\rightarrow j_{\text{global}} = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ 
6:        $K[i_{\text{global}}, j_{\text{global}}] \leftarrow K[i_{\text{global}}, j_{\text{global}}] + k_{\text{elem}}[i_{\text{local}}, j_{\text{local}}]$ 
7:     end for
8:   end for
9: end for

```

3 Contracorrente

Passamos agora para a análise discreta de um trocador de calor casco e tubo de passo único contracorrente utilizando elementos volumétricos discretos. Observe o desenho esquemático de um trocador de calor contracorrente como apresentado na Fig. (6). Opostamente ao trocador de calor de correntes paralelas apresentado anteriormente, dois fluidos estão escoando em sentidos opostos, ou seja, da esquerda para direita escoo o fluido dentro do tubo e da direita para a esquerda escoo o fluido que está passando por fora do tudo. Ao lado da figura pode-se também observar um corte transversal que mostra a geometria do trocador de calor.

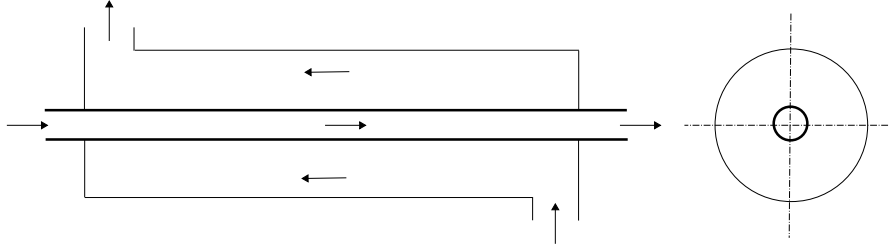


Figura 6: Trocador de calor contracorrente de passo único no tubo e no casco.

Consideraremos a mesma medida de comprimento L do exemplo anterior e que o trocador de calor está isolado termicamente do ambiente externo, com isso a análise térmica se restringerá ao balanço de energia entre os fluidos escoando no casco e no tubo, logo não levaremos em consideração as perdas térmicas do fluido do casco em contato com o fluido externo ao trocador. Considere ainda que o coeficiente global de transferência de calor U e o calor específico à pressão constante c_p dos fluidos se mantém constante ao longo de todo o trocador de calor, apesar do fluido mudar de temperatura ao longo de seu comprimento. Uma proposta de discretização utilizando três elementos discretos é apresentada na Fig. (7)

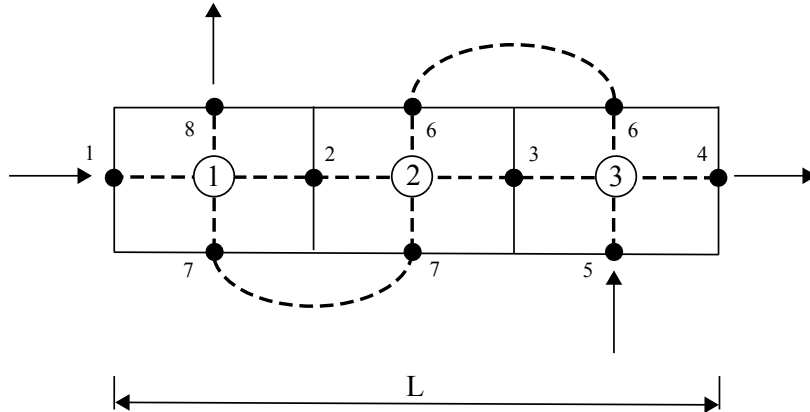


Figura 7: Discretização de Trocador de calor contracorrente em 3 elementos.

Considere o elemento discreto 1 do sistema como mostrado na Fig. (??). Neste elemento, o fluido de processo

entra pelo nó 1 e sai pelo nó 2. O mesmo acontece com o fluido de serviço que entra pelo nó 7 e sai pelo nó 8. O balanço de energia para o fluido de processo no elemento 1 pode ser escrito como:

$$-Q_1 = -\dot{m}c_pT_1 \quad Q_2 = \dot{m}c_pT_1 \pm U dA_1 \Delta T_{e1}$$

onde Q representa a parcela do balanço de energia que entra ou que sai do elemento, \dot{m} é o fluxo de massa, c_p representa o calor específico à pressão constante, T é a temperatura, U é o coeficiente global de transferência de calor, dA é a área superficial do elemento 1 de troca de calor entre os fluidos de processo e serviço, que para este caso é $dA_1 = 2\pi r l_1$, onde r é o raio externo do tubo, L_1 é o comprimento do elemento 1 e ΔT_{e1} é a diferença de temperaturas entre os dois fluidos. É importante notar a convenção de sinais para a parcela do balanço de energia que entra no elemento (nó 1, sinal negativo) que sai (nó 2, sinal positivo). Isso ajudará na montagem da matriz para solução do problema térmico. Além disto, nota-se que em Q_2 aparece o sinal de \pm na equação. Isto se deve ao fato de não termos definido no início do projeto se o fluido de processo se aquece (ganha calor) ou se resfria (perde calor). Com isso, o nó 1 é equacionado com a parcela do fluxo de entalpia que entra no elemento discreto ($\dot{m}c_pT_1$) e o nó 2 é equacionado com o a parcela do fluxo de entalpia que entra no elemento ($\dot{m}c_pT_1$) através do nó 1 e a parcela de transferência de calor entre os fluidos de processo e serviço ($U dA_1 \Delta T_{e1}$).

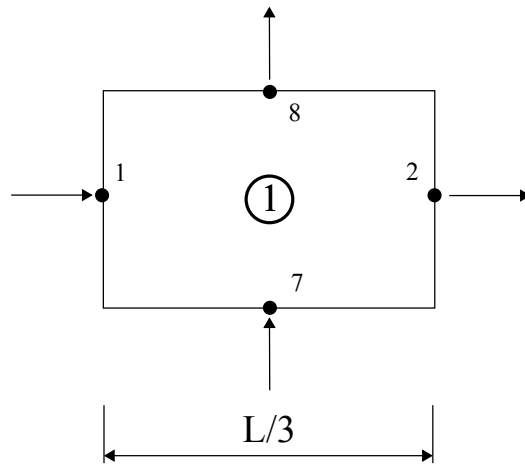


Figura 8: Elemento discreto 1 com nós na aresta do retângulo onde passam os fluidos de processo (nós 1 e 2) e de serviço (nós 7 e 8).

Para o fluido de serviço que entra pelo nó 7 e sai pelo nó 8, o balanço de energia no elemento 1 pode ser escrito como:

$$-Q_7 = -\dot{m}c_pT_7 \quad Q_8 = \dot{m}c_pT_7 \pm U dA_1 \Delta T_{e1}$$

onde \dot{m} e c_p são agora definidos para o fluido de serviço. As equações algébricas utilizada para modelar este fluido são semelhantes ao do fluido de processo, bastando apenas modificar a velocidade e as propriedades do fluido em questão, levando-se em consideração que a área transversal onde escoar o fluido deverá ser a área transversal do casco menos a área transversal do tubo.

Os dois casos térmicos de troca de energia para definição do sinal antes da parcela de transferência de calor entre os fluidos são:

- o fluido de processo deve ser aquecido, ou seja, ao passar do nó 1 ao nó 2 ele recebe calor

$$Q_2 = (\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_1 + U dA_1 \Delta T_{e1}$$

$$Q_8 = (\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_7 - U dA_1 \Delta T_{e1}$$

- o fluido de processo deve ser resfriado, portanto perde calor ao passar do nó 1 ao nó 2.

$$Q_2 = (\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_1 - U dA_1 \Delta T_{e1}$$

$$Q_8 = (\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_7 + U dA_1 \Delta T_{e1}$$

O balanço discreto do elemento 1 pode ser finalizado ao definirmos a variação de temperatura ΔT_{e1} entre os dois fluidos no elemento 1 como se segue:

$$\Delta T_{e1} = \left| \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_7 + T_8}{2} \right|$$

Novamente a definição de módulo foi usada para o caso geral. Com isto obtemos uma aproximação linear da diferença de temperaturas entre os fluidos. O sistema linear equações algébricas do elemento 1 pode ser formado:

$$\text{elem 1} = \begin{cases} -Q_1 &= -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_1 \\ Q_2 &= (\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_1 \pm U dA_1 \left(\left| \frac{T_1+T_2}{2} - \frac{T_7+T_8}{2} \right| \right) \\ -Q_7 &= -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_7 \\ Q_8 &= (\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_7 \pm U dA_1 \left(\left| \frac{T_1+T_2}{2} - \frac{T_7+T_8}{2} \right| \right) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}} & 0 & 0 & 0 \\ (\dot{m}c_p)_{\text{proc}} \pm \frac{U dA_1}{2} & \pm \frac{U dA_1}{2} & \pm \frac{U dA_1}{2} & \pm \frac{U dA_1}{2} \\ 0 & 0 & -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}} & 0 \\ \pm \frac{U dA_1}{2} & \pm \frac{U dA_1}{2} & (\dot{m}c_p)_{\text{serv}} \pm \frac{U dA_1}{2} & \pm \frac{U dA_1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_1 \\ Q_2 \\ -Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix}$$

O mesmo procedimento deve ser feito para o elemento discreto 2 como mostra a Fig. (9). O fluido de processo atravessa o elemento discreto passando pelos nós 2 e 3 enquanto o fluido de serviço passa pelos nós 6 e 7. O balanço de energia para o fluido de processo no elemento 2 pode ser escrito como:

$$-Q_2 = -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_2 \qquad Q_3 = (\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_2 \pm U dA_2 \Delta T_{e2}$$

Para o fluido de serviço que entra pelo nó 6 e sai pelo nó 7, o balanço de energia no elemento 2 pode ser escrito como:

$$-Q_6 = -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_6 \qquad Q_7 = (\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_6 \pm U dA_2 \Delta T_{e2}$$

O sistema de equações algébricas lineares para o elemento discreto 2 pode ser escrito, utilizando a hipótese de

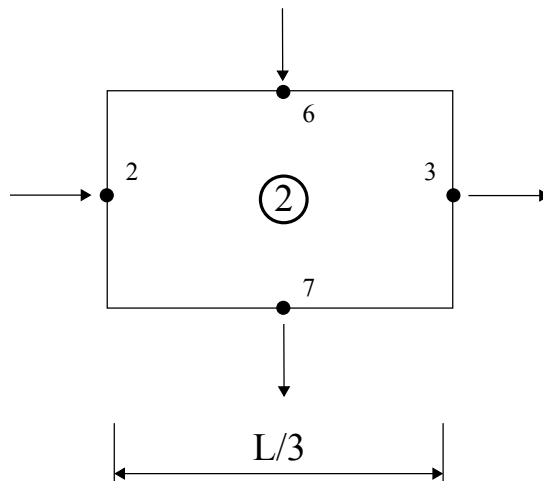


Figura 9: Elemento discreto 2 com nós na aresta do retângulo onde passam os fluidos de processo (nós 2 e 3) e de serviço (nós 6 e 7).

aproximação linear de ΔT_{e2} , ou seja como a média da diferença das temperaturas no nós 2, 3, 6 e 7, como:

$$\text{elem 2} = \begin{cases} -Q_2 &= -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_2 \\ Q_3 &= (\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_2 \pm U dA_1 \left(\left| \frac{T_2+T_3}{2} - \frac{T_6+T_7}{2} \right| \right) \\ -Q_6 &= -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_6 \\ Q_7 &= (\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_6 \pm U dA_1 \left(\left| \frac{T_2+T_3}{2} - \frac{T_6+T_7}{2} \right| \right) \end{cases}$$

Consequentemente, podemos escrever o sistema de equações algébricas do elemento 2 utilizando notação matricial como no caso anterior:

$$\begin{bmatrix} -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}} & 0 & 0 & 0 \\ (\dot{m}c_p)_{\text{proc}} \pm \frac{U dA_2}{2} & \pm \frac{U dA_2}{2} & \pm \frac{U dA_2}{2} & \pm \frac{U dA_2}{2} \\ 0 & 0 & -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}} & 0 \\ \pm \frac{U dA_1}{2} & \pm \frac{U dA_2}{2} & (\dot{m}c_p)_{\text{serv}} \pm \frac{U dA_2}{2} & \pm \frac{U dA_1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_6 \\ T_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_2 \\ Q_3 \\ -Q_6 \\ Q_7 \end{bmatrix}$$

As mesmas observações feitas para o trocador de calor de correntes paralelas podem ser feitas se compararmos os sistemas lineares para os dois elementos aqui apresentados para o trocador de calor contracorrente:

- a estrutura da matriz de rigidez é constante, ou seja, a posição dos elementos iguais e diferentes de zero é a mesma;
- os valores dos elementos diferentes de zero apresentam apenas a diferença: dA_1 e dA_2 , que para o caso em discussão são iguais $dA_1 = dA_2 = A/3$, onde A é a área superficial de troca de calor;
- o vetor de incógnitas T_j foi modificado para os nós correspondentes do elemento discreto 2, isto é T_2 , T_3 , T_6 e T_7 ;
- o vetor do lado direito (ou de carregamento) Q_j obedece a mesma regra do vetor de incógnitas, resultando em Q_2 , Q_3 , Q_6 e Q_7 .

Finalmente, repete-se o procedimento adotado anteriormente para o elemento discreto 3 como mostra a Fig. (10). O fluido de processo atravessa o elemento discreto passando pelos nós 3 e 4 enquanto o fluido de serviço passa pelos nós 5 e 6. O balanço de energia para o fluido de processo no elemento 3 pode ser escrito como:

$$-Q_3 = -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_3 \quad Q_4 = (\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_3 \pm U d A_2 \Delta T_{e3}$$

Para o fluido de serviço que entra pelo nó 5 e sai pelo nó 6, o balanço de energia no elemento 3 pode ser escrito como:

$$-Q_5 = -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_5 \quad Q_6 = (\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_5 \pm U d A_2 \Delta T_{e3}$$

O sistema de equações algébricas lineares para o elemento discreto 3 pode ser escrito, tomando-se ΔT_{e3} como a média da diferença das temperaturas no nós 3, 4, 5 e 6, como:

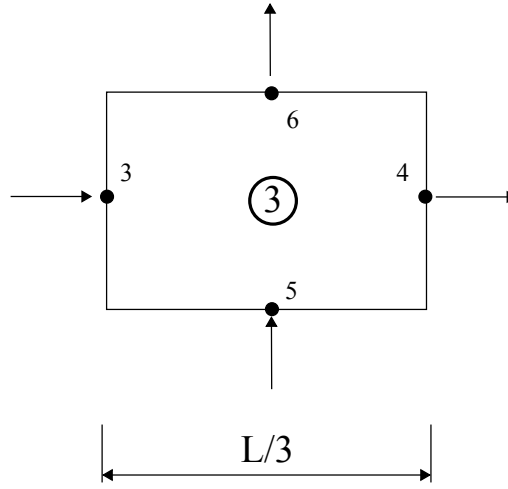


Figura 10: Elemento discreto 3 com nós na aresta do retângulo onde passam os fluidos de processo (nós 3 e 4) e de serviço (nós 5 e 6).

$$\text{elem 3} = \begin{cases} -Q_3 &= -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_3 \\ Q_4 &= (\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_3 \pm U d A_3 \left(\left| \frac{T_3+T_4}{2} - \frac{T_5+T_6}{2} \right| \right) \\ -Q_5 &= -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_5 \\ Q_6 &= (\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_5 \pm U d A_3 \left(\left| \frac{T_3+T_4}{2} - \frac{T_5+T_6}{2} \right| \right) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}} & 0 & 0 & 0 \\ (\dot{m}c_p)_{\text{proc}} \pm \frac{U d A_3}{2} & \pm \frac{U d A_3}{2} & \pm \frac{U d A_3}{2} & \pm \frac{U d A_3}{2} \\ 0 & 0 & -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}} & 0 \\ \pm \frac{U d A_3}{2} & \pm \frac{U d A_3}{2} & (\dot{m}c_p)_{\text{serv}} \pm \frac{U d A_3}{2} & \pm \frac{U d A_3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_3 \\ Q_4 \\ -Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}$$

Para a montagem do sistema linear global, devemos somar todas as matrizes de elementos K_{ij} , os vetores de incógnitas T_j e de carregamento Q_j sucessivamente, respeitando a posição de equação, de modo que possamos sempre operar linha e coluna para se obter a equação original de balanço de energia para o nó específico.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$-(\dot{m}c_p)_p$	0	0	0	0	0	0	0
2	$+(\dot{m}c_p)_p$ $\pm \frac{UdA_1}{2}$	$-(\dot{m}c_p)_p$ $\pm \frac{UdA_1}{2}$	0	0	0	0	$\pm \frac{UdA_1}{2}$	$\pm \frac{UdA_1}{2}$
3	0	$+(\dot{m}c_p)_p$ $\pm \frac{UdA_2}{2}$	$-(\dot{m}c_p)_p$ $\pm \frac{UdA_2}{2}$	0	0	$\pm \frac{UdA_2}{2}$	$\pm \frac{UdA_2}{2}$	0
4	0	0	$+(\dot{m}c_p)_p$ $\pm \frac{UdA_3}{2}$	$\pm \frac{UdA_3}{2}$	$\pm \frac{UdA_3}{2}$	$\pm \frac{UdA_3}{2}$	0	0
5	0	0	0	0	$-(\dot{m}c_p)_s$	0	0	0
6	0	0	$\pm \frac{UdA_3}{2}$	$\pm \frac{UdA_3}{2}$	$+(\dot{m}c_p)_s$ $\pm \frac{UdA_3}{2}$	$-(\dot{m}c_p)_s$ $\pm \frac{UdA_3}{2}$	0	0
7	0	$\pm \frac{UdA_2}{2}$	$\pm \frac{UdA_2}{2}$	0	0	$+(\dot{m}c_p)_s$ $\pm \frac{UdA_2}{2}$	$-(\dot{m}c_p)_s$ $\pm \frac{UdA_2}{2}$	0
8	$\pm \frac{UdA_1}{2}$	$\pm \frac{UdA_1}{2}$	0	0	0	0	$+(\dot{m}c_p)_s$ $\pm \frac{UdA_1}{2}$	$\pm \frac{UdA_1}{2}$

As condições de contorno do problema são as temperaturas de entrada dos fluidos de processo e de serviço. Entretanto as temperaturas de saída não foram especificadas, devendo então ser calculadas. Como não podemos calcular o valor de Q_4 e Q_8 como fizemos anteriormente para Q_1 e Q_5 , devemos utilizar mais duas equações de modo que possamos zerar os valores de Q nas linhas 4 e 8, resultando em um sistema linear com solução para as temperaturas nos nós. As equações são:

$$-Q_4 = -(\dot{m}c_p)_{\text{proc}}T_4 \qquad -Q_8 = -(\dot{m}c_p)_{\text{serv}}T_8 \quad (5)$$

Com o auxílio destas equações adicionais, o sistema linear final toma a forma de:

Depois da montagem do sistema linear global, a matriz de rigidez e os vetores tomam a forma de:

$$K_{ij}T_j = Q_j \quad (6)$$

podemos escrever a solução do problema como:

$$T_j = K_{ij}^{-1}Q_j \quad (7)$$

Para encontrarmos os valores nodais da temperatura, ou seja os valores de T_j , basta encontrarmos a matriz de rigidez inversa K_{ij}^{-1} e multiplicarmos matricialmente pelo vetor de carregamento Q_j .

Método numérico para montagem do sistema linear global

Algorithm 2 Algoritmo de montagem da matriz de rigidez K_{ij}

1: for $elem \leftarrow 0, NE$ do	$\rightarrow NE = \text{Número total de elementos}$
2: for $i_{\text{local}} \leftarrow 0, 3$ do	$\rightarrow i_{\text{local}} = [0, 1, 2, 3]$
3: $i_{\text{global}} \leftarrow IEN[elem, i_{\text{local}}]$	$\rightarrow i_{\text{global}} = [v_1, v_2, v_3, v_4]$
4: for $j_{\text{local}} \leftarrow 0, 3$ do	$\rightarrow j_{\text{local}} = [0, 1, 2, 3]$
5: $j_{\text{global}} \leftarrow IEN[elem, j_{\text{local}}]$	$\rightarrow j_{\text{global}} = [v_1, v_2, v_3, v_4]$
6: $K[i_{\text{global}}, j_{\text{global}}] \leftarrow K[i_{\text{global}}, j_{\text{global}}] + k_{\text{elem}}[i_{\text{local}}, j_{\text{local}}]$	
7: end for	
8: end for	
9: end for	
