EXERCÍCIO - MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro
FEN - Faculdade de Engenharia
Departamento de Engenharia Mecânica

Prof. Gustavo R. ANJOS

http://gustavo.rabello.org http://www.gesar.uerj.br

PROBLEMA 1D - FORMA FORTE

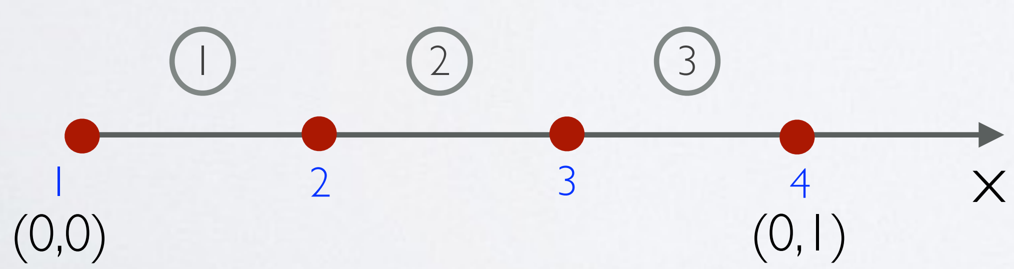
Encontrar u em $\Omega = [0,1]$ tal que:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + 1 = 0 \qquad \left| \begin{array}{l} u(0) = 0 \\ \dfrac{du}{dx}(1) = 1 \end{array} \right.$$

condição
de contorno

domain: $h_1 = h_2 = h_3 = 1/3$

Solução: u_2=1.049;
u_3=1,874;
u_4=2,386



PROBLEMA 1D - FORMA FRACA

Encontrar u em H^1 tal que:

$$\int_\Omega w\left(\frac{d^2u}{dx^2}+u+1\right)d\Omega = 0$$

função peso

procedimento matemático (integração por partes)

$$\int_0^1 w\frac{d^2u}{dx^2}dx+\int_0^1 wu dx+\int_0^1 dx = 0$$

$$w\frac{du}{dx}\bigg|_0^1-\int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx}dx+\int_0^1 wu dx+\int_0^1 w dx = 0$$

$$w\frac{du}{dx}\bigg|_1-w\frac{du}{dx}\bigg|_0-\int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx}dx+\int_0^1 wu dx+\int_0^1 w dx = 0$$

FUNÇÕES DO MEF

Propriedades do elemento finito

- as funções de forma assumem o valor unitário no nó designado e zero nos demais nós;
- a soma de todas as funções de forma em um elemento é igual a um em todo o elemento, incluindo o contorno.

Tabela

item	nó, i	nó, j	x arbitrário
Ni	1	0	entre 0 e 1
Nj	0	1	entre 0 e 1
Ni+Nj	1	1	1

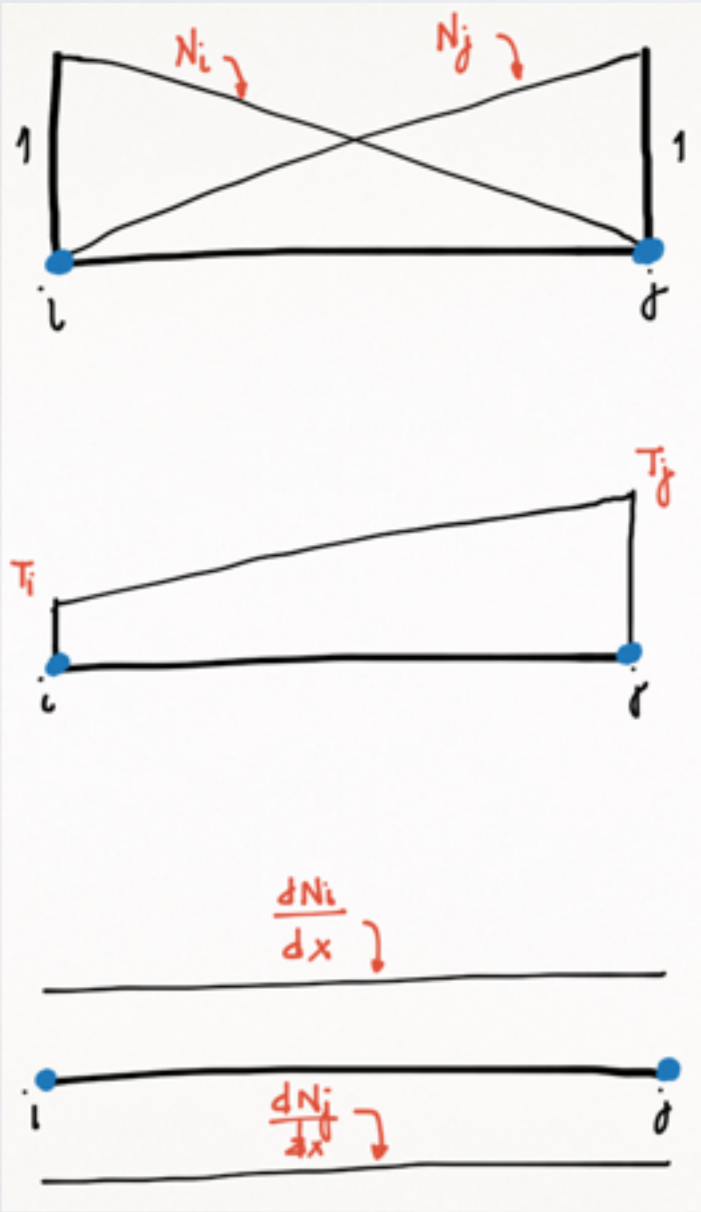
FUNÇÕES DO MEF

Problema 1D - linear:

$$T(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

Problema 1D - quadrático:

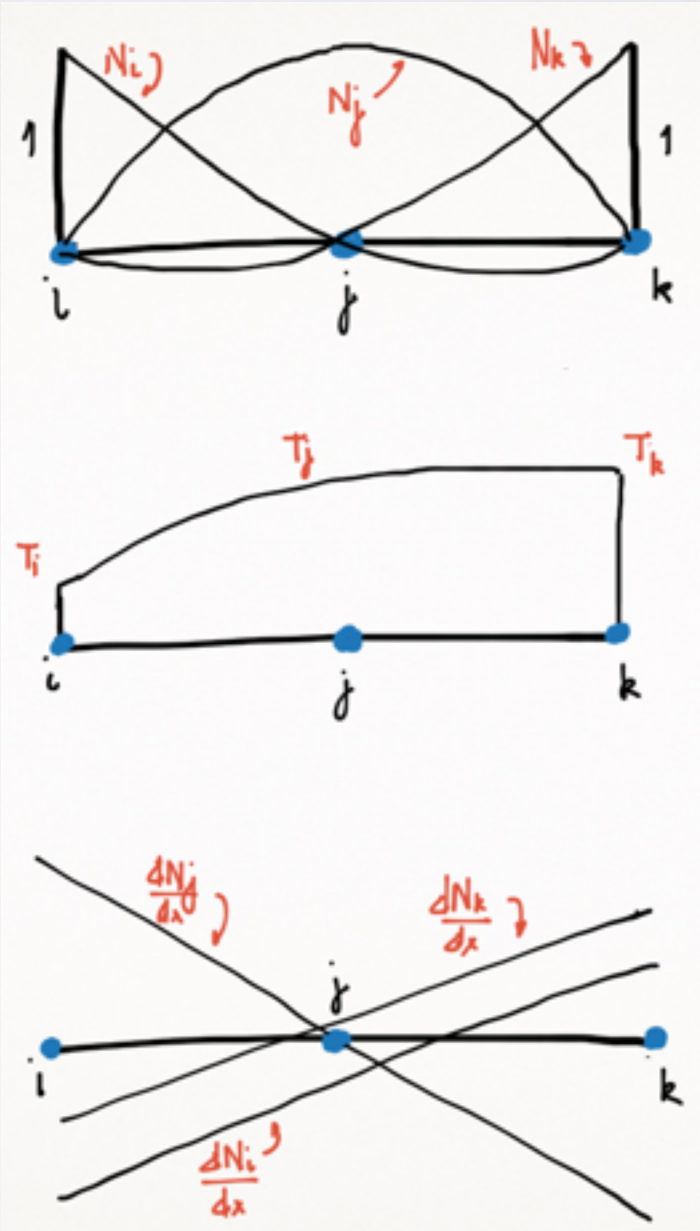
$$T(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$



função de forma

variação de temperatura

derivada da função de forma



MÉTODO DE GALERKIN

funções aproximadoras: $\hat{u} = \sum_{i=1}^{4} N_i u_i \qquad \hat{w} = \sum_{j=1}^{4} N_j w_j$

$$w(1)\frac{du}{dx}(1) - w(0)\frac{du}{dx}(0) - \sum_{i=j=1}^{4} \int_0^1 \frac{dN_i}{dx} u_i \frac{dN_j}{dx} w_j dx + \\ + \sum_{i=j=1}^{4} \int_0^1 N_i u_i N_j w_j dx + \sum_{j=1}^{4} \int_0^1 N_j w_j dx = 0$$

$$\sum_{i=j=1}^{4} \left(\boxed{\int_0^1 \frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx} dx} - \boxed{\int_0^1 N_i N_j dx} \right) {\color{red}u_i} = \sum_{j=1}^{4} \boxed{\int_0^1 N_j dx} + \boxed{\frac{du}{dx}(1) - \frac{du}{dx}(0)}$$

matriz de rigidez K_{ij}

matriz de massa M_{ij}

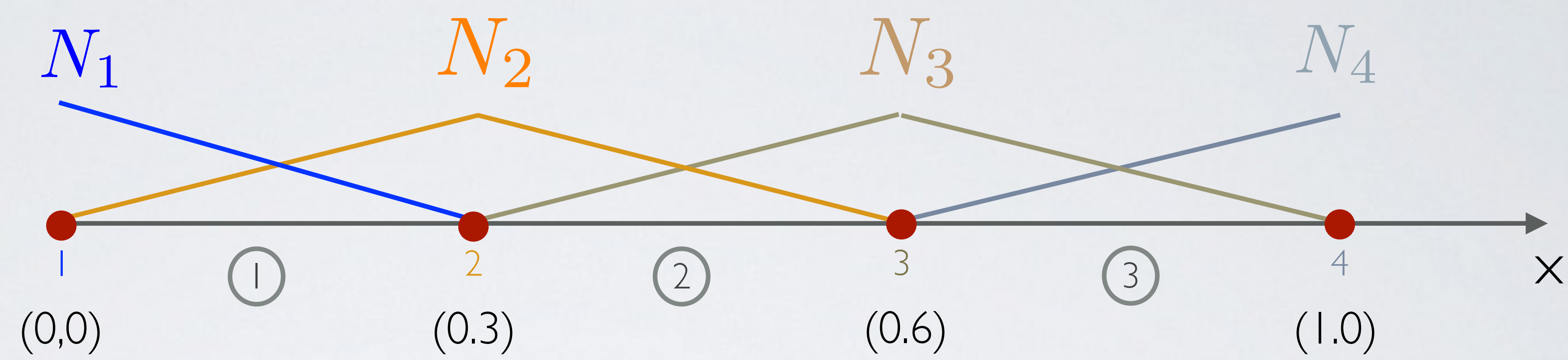
vetor lado direito b_i

condição de contorno

$$(K_{ij} - M_{ij}){\color{red}u_i} = b_i + b.c.$$

FUNÇÃO DE FORMA LINEAR

domínio
e funções
de forma



elemento 1

$$\Omega_1^e = [0, 1/3]$$

$$N_1 = -3x + 1$$

$$N_2 = 3x$$

elemento 2

$$\Omega_2^e = [1/3, 2/3]$$

$$N_2 = -3x + 2$$

$$N_3 = 3x - 1$$

elemento 3

$$\Omega_3^e = [2/3, 1]$$

$$N_3 = -3x + 3$$

$$N_4 = 3x - 2$$

FORMA MATRICIAL

$$K_{11} - M_{11} = \int_0^{1/3} \frac{dN_1}{dx}\frac{dN_1}{dx}dx - \int_0^{1/3} N_1 N_1 dx$$

$$K_{12} - M_{12} = \int_0^{1/3} \frac{dN_1}{dx}\frac{dN_2}{dx}dx - \int_0^{1/3} N_1 N_2 dx$$

$$K_{21} - M_{21} = \int_0^{1/3} \frac{dN_2}{dx}\frac{dN_1}{dx}dx - \int_0^{1/3} N_2 N_1 dx$$

$$K_{22} - M_{22} = \int_0^{1/3} \frac{dN_2}{dx}\frac{dN_2}{dx}dx - \int_0^{1/3} N_2 N_2 dx$$

matriz

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

element 1

$\Omega_1^e = [0, 1/3]$

$N_1 = -3x + 1$

$N_2 = 3x$

$$b_1 = \int_0^{1/3} N_1 dx$$

$$b_2 = \int_0^{1/3} N_2 dx$$

vetor

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

FORMA MATRICIAL

$$K_{22} - M_{22} = \int_{1/3}^{2/3} \frac{dN_2}{dx}\frac{dN_2}{dx}dx - \int_{1/3}^{2/3} N_2 N_2 dx$$

$$K_{23} - M_{23} = \int_{1/3}^{2/3} \frac{dN_2}{dx}\frac{dN_3}{dx}dx - \int_{1/3}^{2/3} N_2 N_3 dx$$

$$K_{32} - M_{32} = \int_{1/3}^{2/3} \frac{dN_3}{dx}\frac{dN_2}{dx}dx - \int_{1/3}^{2/3} N_3 N_2 dx$$

$$K_{33} - M_{33} = \int_{1/3}^{2/3} \frac{dN_3}{dx}\frac{dN_3}{dx}dx - \int_{1/3}^{2/3} N_3 N_3 dx$$

matriz

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

element 2

$$\Omega_2^e = [1/3, 2/3]$$

$$N_2 = -3x + 2$$

$$N_3 = 3x - 1$$

$$b_2 = \int_{1/3}^{2/3} N_2 dx$$

$$b_3 = \int_{1/3}^{2/3} N_3 dx$$

vetor

$$\begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

FORMA MATRICIAL

$$K_{33} - M_{33} = \int_{2/3}^{1} \frac{dN_3}{dx}\frac{dN_3}{dx}dx - \int_{2/3}^{1} N_3 N_3 dx$$

$$K_{34} - M_{34} = \int_{2/3}^{1} \frac{dN_3}{dx}\frac{dN_4}{dx}dx - \int_{2/3}^{1} N_3 N_4 dx$$

$$K_{43} - M_{43} = \int_{2/3}^{1} \frac{dN_4}{dx}\frac{dN_3}{dx}dx - \int_{2/3}^{1} N_4 N_3 dx$$

$$K_{44} - M_{44} = \int_{2/3}^{1} \frac{dN_4}{dx}\frac{dN_4}{dx}dx - \int_{2/3}^{1} N_4 N_4 dx$$

matriz

$$\begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} \\ K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{33} & M_{34} \\ M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}$$

element 3

$$\Omega_3^e = [2/3, 1]$$

$$N_3 = -3x + 3$$

$$N_4 = 3x - 2$$

$$b_3 = \int_{2/3}^{1} N_3 dx$$

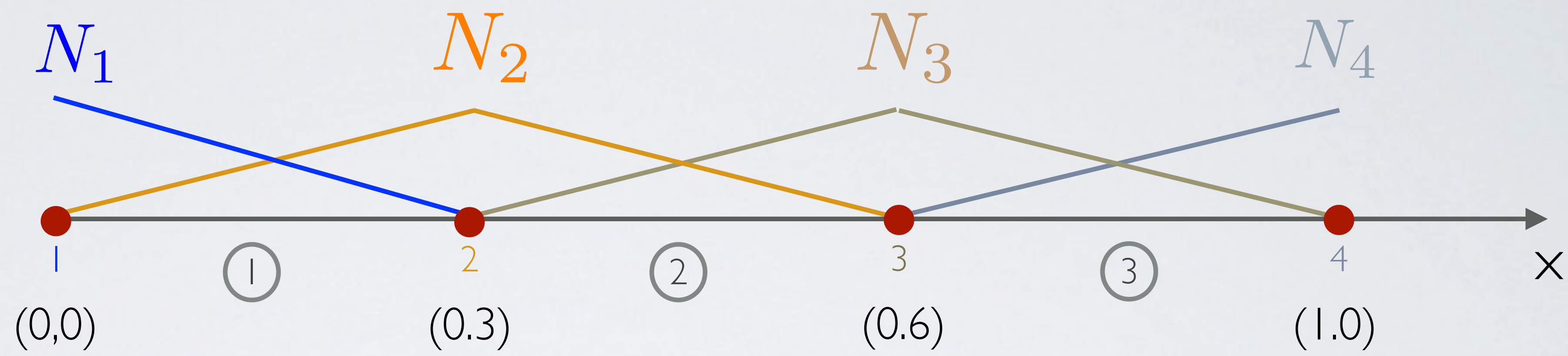
$$b_4 = \int_{2/3}^{1} N_4 dx$$

vetor

$$\begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

FORMA MATRICIAL

domain and shape functions:



element 1

$\Omega_1^e = [0, 1/3]$

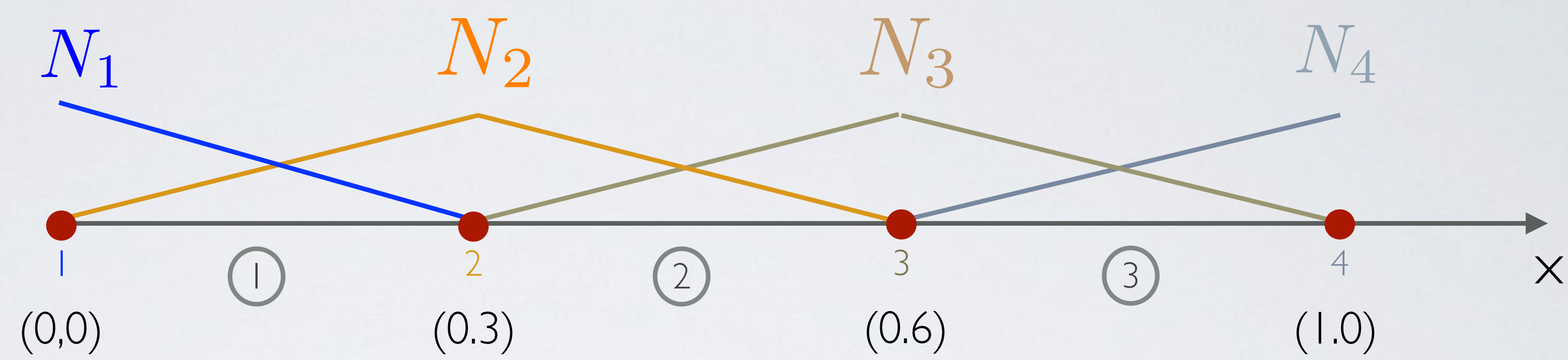
$$K_1^e - M_1^e = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$K_1^e - M_1^e = \begin{bmatrix} 3 - \frac{2}{18} & -3 - \frac{1}{18} \\ -3 - \frac{1}{18} & 3 - \frac{2}{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{52}{18} & -\frac{55}{18} \\ -\frac{55}{18} & \frac{52}{18} \end{bmatrix}$$

$$b_1^e = \begin{bmatrix} b_1 + \text{b.c. at } x = 0 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

FORMA MATRICIAL

domain and shape functions:



element 2

$\Omega_2^e = [1/3, 2/3]$

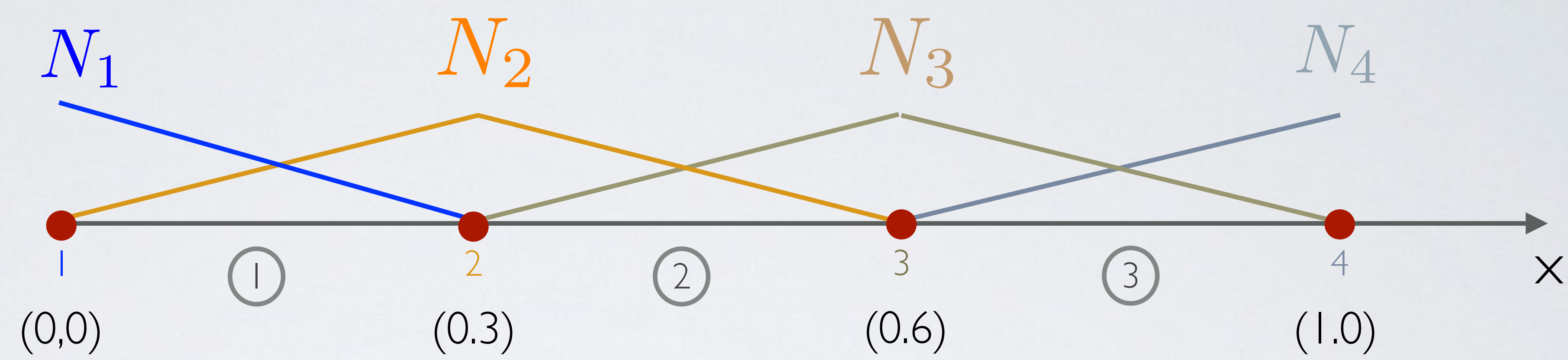
$$K_2^e - M_2^e = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$K_2^e - M_2^e = \begin{bmatrix} 3 - \frac{2}{18} & -3 - \frac{1}{18} \\ -3 - \frac{1}{18} & 3 - \frac{2}{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{52}{18} & -\frac{55}{18} \\ -\frac{55}{18} & \frac{52}{18} \end{bmatrix}$$

$$b_2^e = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

FORMA MATRICIAL

domain and shape functions:



element 3

$\Omega_3^e = [2/3, 1]$

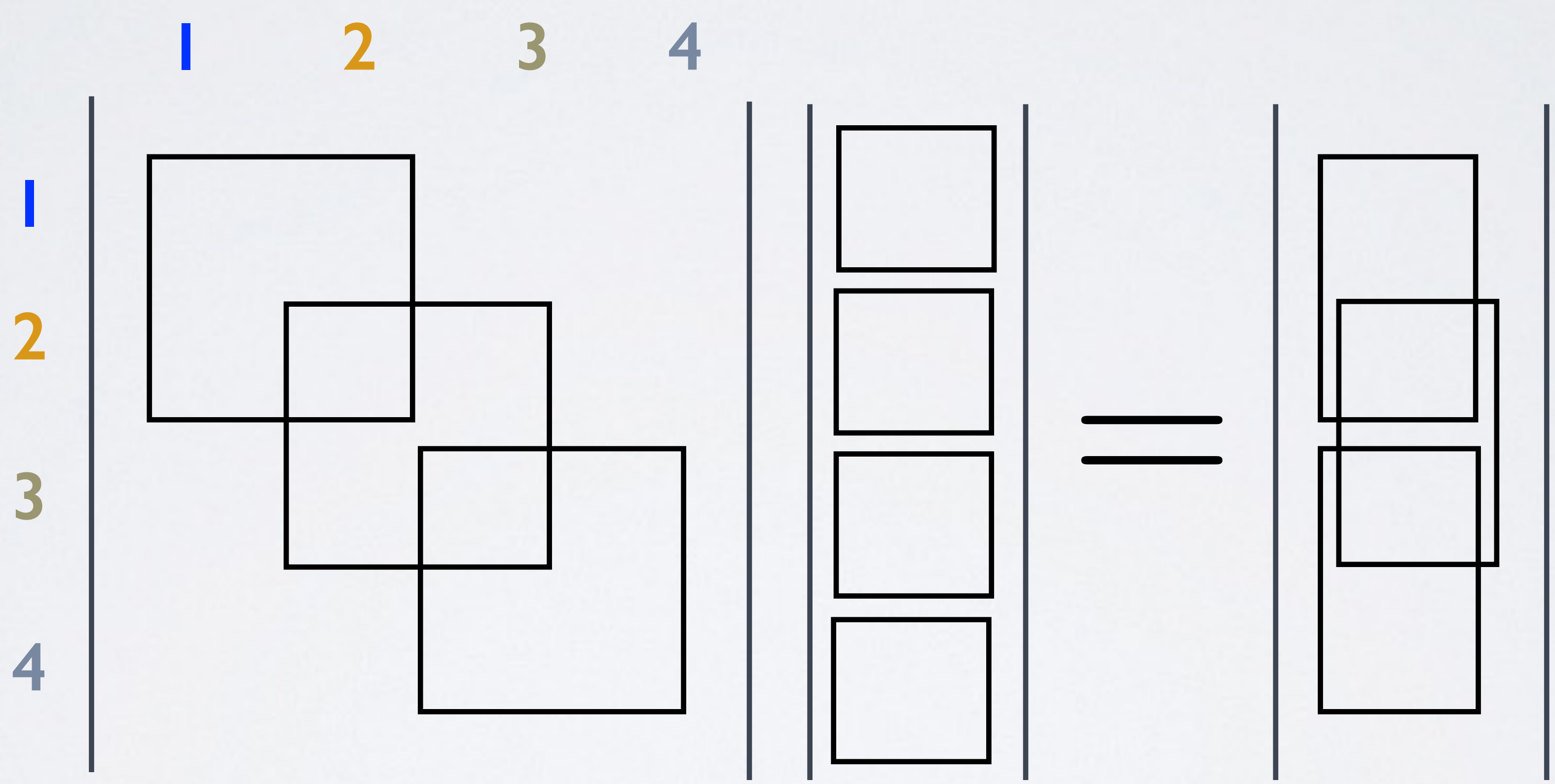
$$K_3^e - M_3^e = \begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} \\ K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{33} & M_{34} \\ M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}$$

$$K_3^e - M_3^e = \begin{bmatrix} 3 - \frac{2}{18} & -3 - \frac{1}{18} \\ -3 - \frac{1}{18} & 3 - \frac{2}{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{52}{18} & -\frac{55}{18} \\ -\frac{55}{18} & \frac{52}{18} \end{bmatrix}$$

$$b_3^e = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 + \text{b.c. at } x = 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 + 1 \end{bmatrix}$$

ASSEMBLING

linear system of equations: $(K_{ij} - M_{ij})u_i = b_i + b.c.$



$K_{ij} - M_{ij}$ $\quad u_i \quad$ $b_i + b.c.$

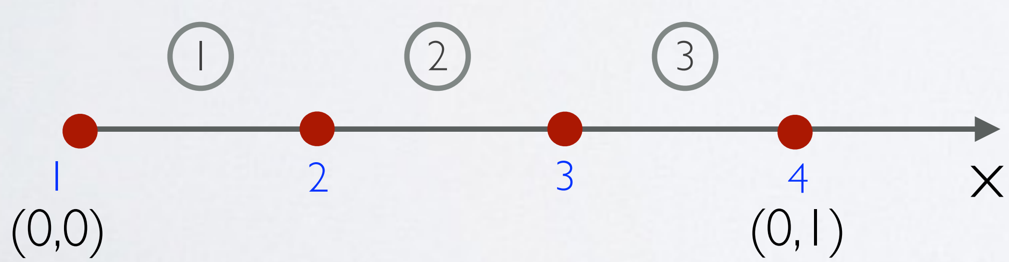
PROBLEMA 1D - EXERCÍCIO

Encontrar u no domínio $\Omega = [0, 1]$ tal que:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + 1 = 0 \qquad \left| \begin{array}{l} u(0) = 0 \\ \dfrac{du}{dx}(1) = -u \end{array} \right.$$

condição de contorno

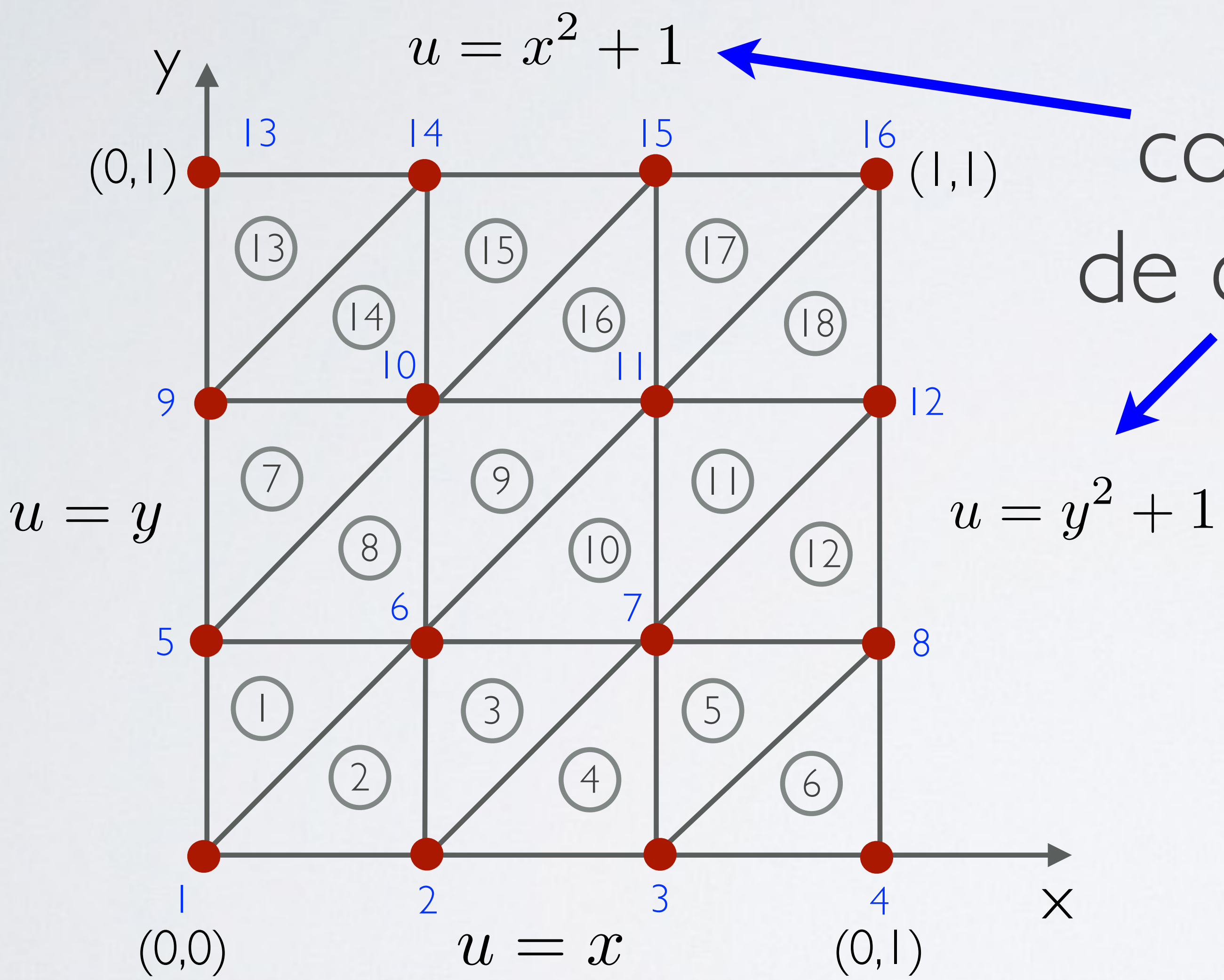
domínio: $h_1 = h_2 = h_3 = 1/3$



Solução: u_2=0.251;
u_3=0.363;
u_4=0.328

PROBLEMA 2D - EXERCÍCIO

Encontrar u no domínio $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ tal que:



condição de contorno

Equação:

$$\nabla^2 u = 0$$

Solução: $u_6=0.611$;

$u_7=0.889$;

$u_{10}=0.889$;

$u_{11}=1.167$

PROBLEMA COMPUTACIONAL

Implementar numericamente usando linguagem de programação de sua preferência (Python, Matlab, C/C++, fortran, java) para os casos 1D e 2D apresentados anteriormente:

1) para qualquer número de elementos;
2) utilizar elementos quadráticos 1D;
3) para o caso 2D, usando malha não-estruturada.
4) para o caso 2D, acrescentar a derivada temporal, considerando u=0 para os pontos no tempo inicial.