



Introdução aos Escoamentos Compressíveis

José Pontes, Norberto Mangiavacchi e Gustavo R. Anjos

GESAR – Grupo de Estudos e Simulações Ambientais de Reservatórios
UERJ – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

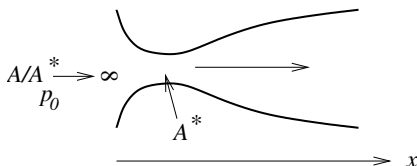
30 de julho a 5 de agosto de 2017

Conteúdo do curso

1. Escoamentos tridimensionais:
 - 1.1 Equações Básicas;
 - 1.2 Escoamentos Potenciais Compressíveis.
2. Escoamentos quase unidimensionais:
 - 2.1 Escoamentos Isoentrópicos;
 - 2.2 Choque Normal;
 - 2.3 Escoamentos com Transf. de Calor – Linha de Rayleigh;
 - 2.4 Escoamentos com Atrito – Linha de Fanno;
 - 2.5 Choque Oblíquo.
3. Resolução Numérica de Escoamentos Compressíveis.

Escoamentos Isoentrópicos

Bocal convergente - divergente



Relação área-velocidade:

Entropia:
$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

Quant. movimento:
$$u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \rightarrow u du = -\frac{dp}{\rho}$$
$$u du = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho. = -a^2 \frac{d\rho}{\rho}$$

Relação área-velocidade

$$\left. \begin{aligned} u \, du &= -a^2 \frac{d\rho}{\rho} \\ \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{du}{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \longrightarrow u \, du = a^2 \left(\frac{dA}{A} + \frac{du}{u} \right)$$

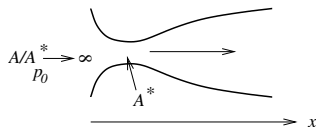
Obtém-se:

$$(M^2 - 1) \frac{du}{u} = \frac{dA}{A} \quad \text{onde:} \quad M = \frac{u}{a} \quad (\text{Compressível})$$

$$(Fr^2 - 1) \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \frac{dl}{l} \quad \text{onde:} \quad Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}} \quad (\text{Canal aberto})$$

Analogia Compressível – Hidráulica de Canal Aberto

Compressível



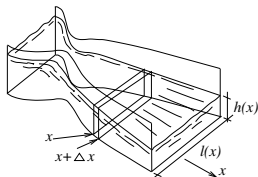
$$\rho A u = C^{te}$$

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 =$$

$$(p + \Delta p) + \frac{1}{2}\rho(u + \Delta u)^2$$

$$-\Delta p = u \Delta u$$

Canal Aberto:



$$A u = h l u = C^{te}$$

$$h + \frac{u^2}{2g} =$$

$$(h + \Delta h) + (u + \Delta u)^2 / 2g$$

$$-\Delta h = u \Delta u / g$$

Relação de T , P e ρ com o M – esc. isentrópicos

Hipóteses:

1. Gás perfeito;

$$2. C_p T_0 = C_p T + \frac{u^2}{2}$$

$$3. s = C^{te} \longrightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = a^2$$

$$4. C_p - C_v = \mathcal{R}, \quad \frac{C_p}{C_v} = \gamma$$

Obtém-se:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \qquad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma - 1)}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma - 1)}$$

onde T_0 : temperatura de estagnação

Relação de T , P e ρ com o M – esc. isentrópicos



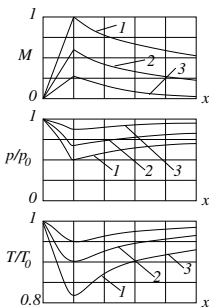
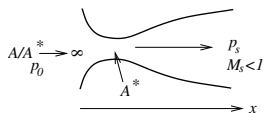
Caso $M = 1$ na garganta e $\gamma = 1,4$:

$$\frac{T^*}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1} = 0,833$$

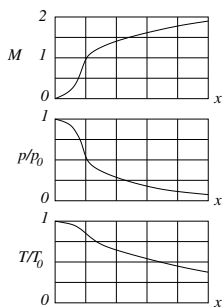
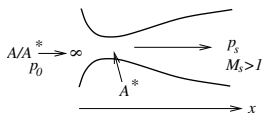
$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1/(\gamma - 1)} = 0,634$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\gamma/(\gamma - 1)} = 0,528.$$

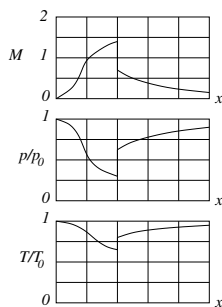
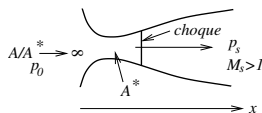
Perfis subsônicos, supersônicos e choque normal



Subsônico

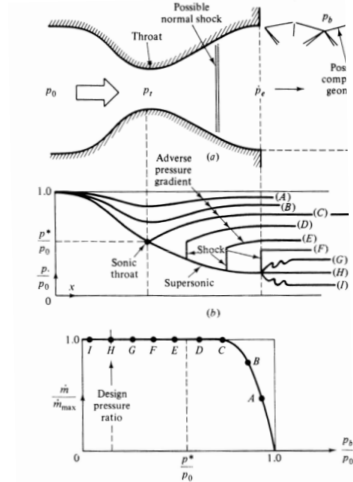
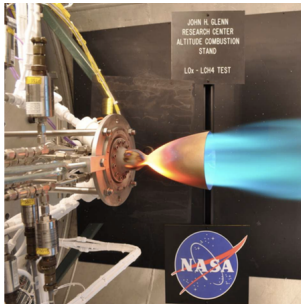


Supersônico



Choque normal

Bocal isoentrópico e com choque normal



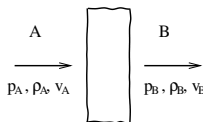
Choque normal – a relação de Rankine Hugoniot

Choque normal: Descontinuidade do campo, com passagem do supersônico para o subsônico, aumento de pressão e produção de entropia. O choque é induzido por:

1. Pressão mais alta a juzante;
2. Adição de calor ou efeitos viscosos.

Conservam-se massa, quantidade de movimento e energia:

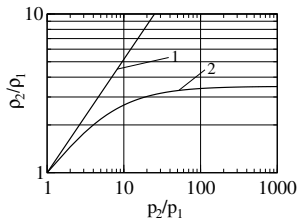
$$\begin{aligned}\rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 &= p_2 + \rho_2 u_2^2 \\ C_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} &= C_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}\end{aligned}$$



Choque normal – a relação de Rankine Hugoniot

Obtém-se:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_1}{p_2} + 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_1}{p_2}}$$
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{p_2}{p_1} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1}}{\frac{p_2}{p_1} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_1}{p_2}}$$



1. Compressão isoentrópica;
2. Choque normal.

Há um limite de aumento de ρ .

Choque normal

Outras propriedades:

1. $u_1 u_2 = a^{*2}$ (*Relação de Prandtl-Meyer*);
2. $M_1^* M_2^* = 1$;
3. Um lado é supersônico e o outro, subsônico;
4. No entanto: $\frac{s_2 - s_1}{R} \approx \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)^2} \frac{(M_1^2 - 1)^3}{3} > 0$;

O choque se dá no sentido *Supersônico* \rightarrow *Subsônico*;

5. $\frac{s_2 - s_1}{R} \approx \frac{\gamma + 1}{12\gamma^2} \left(\frac{\Delta p}{p_1} \right)^3$

Choques fracos: a produção de entropia é $\mathcal{O}(\Delta p)^3$.

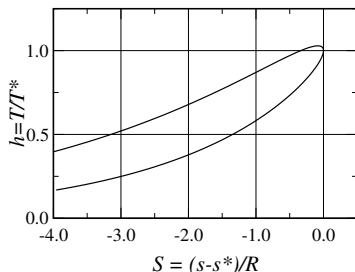
Linha de Rayleigh

Linha de Rayleigh – aquecimento em duto de seção constante.

Conservam-se massa e quantidade de movimento:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$



1. Ramo superior (supersônico): aquecimento reduz M até $M = 1$;
2. Ramo inferior (subsônico): aquecimento aumenta M até $M = 1$;
3. Há um limite de entropia, isso é, de aquecimento.

Linha de Rayleigh

Dois efeitos:

1. Aquecimento além do limite da Linha de Rayleigh provoca drástica mudança nas condições de entrada do duto:
 - 1.1 **Supersônico**, obtido em bocal convergente-divergente: choque normal na região divergente e retorno ao subsônico;
 - 1.2 **Subsônico**: Redução da pressão na entrada do duto até que $M = 1$ seja atingido com a quantidade de calor fornecido.
2. Transição entre os regimes supersônico e subsônico:
 - 2.1 **Aceleração subsônico** \rightarrow **supersônico**: fornecimento de calor até $M = 1$ e retirada de calor com $M > 1$;
 - 2.2 **Desaceleração supersônico** \rightarrow **subsônico**: fornecimento de calor até $M = 1$ e retirada de calor com $M < 1$.

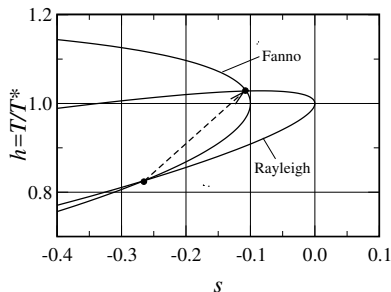
Linha de Fanno

Linha de Fanno – escoamento com atrito em duto de seção constante.

Conservam-se massa e energia:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0$$

$$C_p T_0 = C_p T + \frac{u^2}{2}.$$



Quantidade de movimento:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação} \\ \text{de quantidade de mo-} \\ \text{vimento dentro do vo-} \\ \text{lume de controle} \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de} \\ \text{quantidade de movi-} \\ \text{mento para fora do} \\ \text{volume} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Forças de pressão} \\ \text{+} \\ \text{Forças de atrito com} \\ \text{as paredes} \end{array} \right)$$

Obtém-se: $F_a = (-p_B - \rho u_B^2 + p_A - \rho u_A^2) \frac{\pi D^2}{4}$

onde: $F_a = -\tau_{xr} \pi D \Delta x = -\frac{1}{2} \rho u^2 f \pi D \Delta x$

e: $f \rightarrow \text{fator de Fanning}$

Linha de Fanno

Distância entre dois pontos cujos números de Mach são prescritos:

$$4f \frac{L}{D} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2} \right) + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{1 + M_2^2 (\gamma - 1) / 2}{1 + M_1^2 (\gamma - 1) / 2} \right]$$

Comprimento crítico L^* : distância entre o ponto onde o número de Mach é M e o ponto onde $M = 1$.

$$4f \frac{L^*}{D} = \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \frac{(\gamma + 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2}.$$

Se $M = \infty$:

$$4f \frac{L^*}{D} = 0,8215 \quad (\gamma = 1,4)$$

Dutos com comprimento maior que o crítico:

1. **Escoamento inicialmente subsônico:** redução do número de Mach e da vazão de entrada:
2. **Escoamento inicialmente supersônico:** estabelecimento de onda de choque no bocal de origem e passagem ao regime subsônico.

Linha de Fanno

Relações entre as propriedades do ponto onde o número de Mach é M e as do ponto onde $M = 1$:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right]^{1/2}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{\gamma + 1} \right]^{1/2}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{\gamma + 1} \right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}$$

Efeitos viscosos e de adição de calor – resumo:

Adição de calor Linha de Rayleigh

Supersônico:

1. Aumentam: p , T e T_0 ;
2. Diminuem: M , p_0 e u .

Subsônico:

1. Aumentam: M , T_0 e u ;
2. T aumenta para $M < \gamma^{-1/2}$
e diminui para $M > \gamma^{-1/2}$;
3. Diminuem: p e p_0 .

Atrito gás/duto Linha de Fanno

Supersônico:

1. Aumentam: p e T ;
2. Diminuem: M , p_0 e u .

Subsônico:

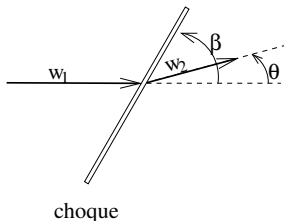
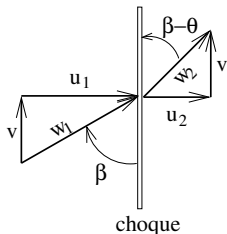
1. Aumentam: M e u ;
2. Diminuem: p , T e p_0 .

Choque oblíquo

Choque oblíquo: induzido por mudança de direção imposta ao escoamento.

$$M_1 = \frac{w_1}{a_1}$$

$$M_2 = \frac{w_2}{a_1}$$

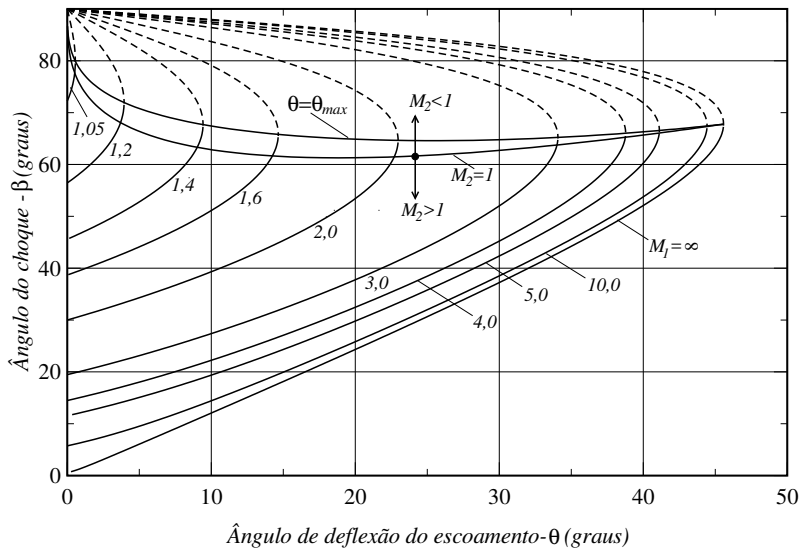


Existência do choque oblíquo: $\sin^{-1} \frac{1}{M_1} < \beta < \frac{\pi}{2}$

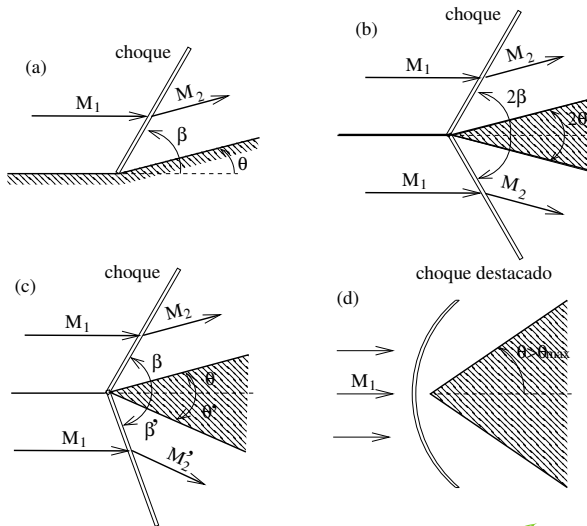
$$\left. \begin{array}{l} \beta = \frac{\pi}{2} \text{ ou:} \\ \frac{u_1}{a_1} = 1 \longrightarrow \frac{u_2}{a_1} = 1 \end{array} \right\} \text{ não há deflexão } (\theta = 0);$$

A deflexão tem um máximo entre os dois limites.

Choque oblíquo



Choque oblíquo – escoamento sobre cunhas e diedros



Choque oblíquo

Propriedades do choque oblíquo:

1. Para uma dada deflexão θ há dois valores possíveis de β ;
2. $\beta < \beta_{max} \longrightarrow$ choque fraco, $\beta > \beta_{max} \longrightarrow$ choque forte;
3. Choque fraco: $M_2 > 1$ exceto em pequena região do diagrama $\beta \times \theta$;
4. O valor de β selecionado depende da pressão a juzante;
5. Existência de valor limite θ_{max} ;
6. $\theta > \theta_{max} \longrightarrow$ choque destacado corpo;
7. Relação entre propriedades dos dois lados: obtidas das relações de choque normal, substituindo-se:
 $M_1 \longrightarrow M_1 \sin \beta$.

Propriedades do choque oblíquo:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta}$$

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \frac{\gamma M_1^2 \sin^2 \beta + 1}{M_1^2 \sin^2 \beta} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)$$