

Departamento/Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
Metalúrgica e de Materiais – Escola Politécnica/COPPE  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Fenômenos de Transferência**  
Com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia  
**Volume 1: Fundamentos**

**José da Rocha Miranda Pontes**  
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

**Norberto Mangiacacchi**  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

Abril 2014

Fenômenos de Transferência com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia  
José da Rocha Miranda Pontes  
Norberto Mangiavacchi  
Maio 2010

Cadastrado no Registro de Direitos Autorais da Fundação Biblioteca Nacional  
sob o número 351717, livro 648, folha 377

À memória de  
Júlia Adriana da Rocha Miranda



# Sumário

<b>Prefácio</b>	<b>ix</b>
<b>Prefácio dos autores</b>	<b>xi</b>
<b>I Fundamentos</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>3</b>
1.1 Objetivos . . . . .	3
1.2 Princípios de Conservação e Equações Constitutivas . . . . .	4
1.3 Operador Derivada Substancial . . . . .	7
1.4 Desenvolvimento da Mecânica dos Fluidos . . . . .	8
1.5 Problemas . . . . .	9
<b>2 Conservação da Massa</b>	<b>11</b>
2.1 Equação da Continuidade . . . . .	11
2.2 Problemas . . . . .	19
<b>3 A Quantidade de Movimento de um Meio Contínuo</b>	<b>23</b>
3.1 Introdução . . . . .	23
3.2 Equação da Quantidade de Movimento de um Meio Contínuo . . . . .	24
3.3 Propriedades do Tensor de Tensões . . . . .	27
3.4 Outras Propriedades do Tensor de Tensões . . . . .	31
3.5 Decomposição do Tensor de Tensões: Pressão e Tensor Desviatório . . . . .	32
3.6 Equação de Euler . . . . .	35
3.7 Fluidos Newtonianos . . . . .	36
3.8 O Caso de Sólidos . . . . .	39
3.9 Equação de Navier-Stokes . . . . .	43

3.10 Os Números de Reynolds e de Froude . . . . .	45
3.11 Equação de Bernoulli . . . . .	46
3.12 Perdas de Carga em Tubulações . . . . .	52
3.13 Equação da Vorticidade . . . . .	55
3.14 Equação da Circulação . . . . .	58
3.15 O Teorema de Crocco . . . . .	61
3.16 Hidrostática . . . . .	62
3.17 Efeitos da Não Linearidade das Leis de Evolução . . . . .	63
3.18 Problemas . . . . .	70
<b>4 Conservação da Energia</b>	<b>79</b>
4.1 Introdução . . . . .	79
4.2 Equação da Energia Cinética ( $v^2/2$ ) . . . . .	80
4.3 Equação da Energia Total ( $e + v^2/2$ ) . . . . .	80
4.4 Equação da Energia Interna ( $e$ ) . . . . .	84
4.5 Função Dissipação ( $\Phi$ ) . . . . .	84
4.6 Equação da Entalpia de Estagnação ( $h_0 = h + v^2/2$ ) . . . . .	87
4.7 Equação da Entalpia ( $h$ ) . . . . .	88
4.8 Nota Sobre a Forma Integral das Equações da Entalpia . . . . .	89
4.9 Equação da Entropia ( $s$ ) . . . . .	91
4.10 Equação da Temperatura . . . . .	91
4.11 Equação de Condução de Calor em Sólidos . . . . .	93
4.12 Os Números de Péclet e de Prandtl . . . . .	94
4.13 A Aproximação Boussinesq . . . . .	95
4.14 Transporte de um Escalar por um Fluido Incompressível . . . . .	96
4.15 Resumo das Equações de Energia – Notação Vetorial . . . . .	98
4.16 Resumo das Equações de Energia – Notação Tensorial Cartesiana . . . . .	99
4.17 Problemas . . . . .	100
<b>5 Escoamentos Compressíveis Quase-Unidimensionais</b>	<b>103</b>
5.1 Introdução . . . . .	103
5.2 Escoamento Quase-unidimensional Isoentrópico . . . . .	103
5.3 Ondas Fracas: Velocidade do Som . . . . .	110
5.4 Ondas Fortes: Compressão por Choque . . . . .	112
5.5 Analogia com a Hidráulica de Canal Aberto . . . . .	117

5.6	Problemas . . . . .	120
<b>6</b>	<b>Escoamentos Potenciais</b>	<b>123</b>
6.1	Introdução . . . . .	123
6.2	Escoamentos Potenciais Compressíveis . . . . .	124
6.3	Uma Classificação das Equações a Derivadas Parciais . . . . .	127
6.4	Considerações sobre o Escoamento Não Viscoso em Torno de um Aerofólio .	130
6.5	Escoamentos Potenciais Incompressíveis Bi-dimensionais . . . . .	132
6.6	O Teorema de Kutta-Joukowski . . . . .	144
6.7	Transformações Conformes . . . . .	146
6.8	A Transformação de Kutta-Joukowski . . . . .	147
6.9	A Hipótese de Kutta . . . . .	151
6.10	Perfis de Kutta-Joukowski . . . . .	151
6.11	Outras Transformações Conformes . . . . .	154
6.12	Problemas . . . . .	155
<b>7</b>	<b>Escoamentos Viscosos</b>	<b>159</b>
7.1	Introdução . . . . .	159
7.2	Escoamento de Stokes em Torno de uma Esfera sob $\text{Re} < 1$ . . . . .	161
7.3	Escoamento Sobre uma Placa Plana Inclinada . . . . .	167
7.4	Escoamento de Couette . . . . .	173
7.5	Escoamento Entre Duas Placas Paralelas Imóveis . . . . .	175
7.6	Escoamento Entre Duas Placas Paralelas sob Fluxo de Calor Constante .	177
7.7	Problema de Rayleigh . . . . .	182
7.8	Transferência de Calor por Convecção e Evaporação . . . . .	187
7.9	Escoamento Sobre um Disco Rotatório . . . . .	193
7.10	Escoamento entre Dois Discos Rotatórios Concêntricos . . . . .	195
7.11	Escoamento em Canais Convergentes e Divergentes . . . . .	198
7.12	Problemas . . . . .	210
<b>8</b>	<b>Introdução à Teoria da Camada Limite</b>	<b>231</b>
8.1	Introdução . . . . .	231
8.2	As Equações de Prandtl . . . . .	232
8.3	A Equação de Blasius . . . . .	234
8.4	A Equação de Falkner-Skan . . . . .	236

8.5	Métodos Integrais na Teoria da Camada Limite Laminar . . . . .	239
8.6	Estabilidade de Camadas Limite – A Equação de Orr-Sommerfeld . . . . .	245
8.7	Problemas . . . . .	249
<b>9</b>	<b>Introdução à Turbulência</b>	<b>257</b>
9.1	Introdução . . . . .	257
9.2	Descrição da Turbulência . . . . .	257
9.3	As Equações de Reynolds . . . . .	263
9.4	As Equações Médias de Favre . . . . .	265
9.5	Equações de Navier-Stokes Filtradas – Fluidos Incompressíveis . . . . .	266
9.6	Modelos para o Tensor de Reynolds . . . . .	267
9.7	Problemas . . . . .	272
<b>10</b>	<b>Transferência de Calor</b>	<b>275</b>
10.1	Introdução . . . . .	275
10.2	Mecanismos de Transferência de Calor . . . . .	275
10.3	Condução de Calor Unidimensional em Sólidos . . . . .	276
10.4	O Método de Separação de Variáveis . . . . .	281
10.5	O Método de Diferenças Finitas . . . . .	293
10.6	Trocadores de Calor . . . . .	301
10.7	Radiação . . . . .	306
10.8	Problemas . . . . .	307
<b>II</b>	<b>Apêndices</b>	<b>313</b>
<b>A</b>	<b>Elementos de Análise Dimensional</b>	<b>315</b>
A.1	Séries Completas de Produtos Adimensionais . . . . .	315
A.2	Outras Séries Completas de Produtos Adimensionais . . . . .	320
A.3	O Teorema $\Pi$ de Buckingham . . . . .	324
A.4	Similaridade . . . . .	324
A.5	Principais Grupos Adimensionais . . . . .	325
A.6	Problemas . . . . .	329
<b>B</b>	<b>Elementos de Cálculo Vetorial</b>	<b>335</b>
B.1	Introdução . . . . .	335

B.2	Principais Operadores Vetoriais e Teoremas	335
B.3	Notação de Índices (Notação Tensorial Cartesiana)	342
B.4	O Teorema de Helmholtz (Teorema Fundamental do Cálculo Vetorial)	347
B.5	Aplicação ao Método de Elementos Finitos – O Método da Projeção	350
B.6	Problemas	355
<b>C</b>	<b>Elementos de Análise Complexa</b>	<b>359</b>
C.1	Números complexos	359
C.2	Funções de Variáveis Complexas – Derivadas	360
<b>D</b>	<b>Elementos de Termodinâmica Clássica</b>	<b>365</b>



# Prefácio

Esta obra que tem o Professor José da Rocha Miranda Pontes, da UFRJ, e o Professor Norberto Mangiavacchi, da UERJ, como autores e editores, divide-se em dois volumes distintos. O primeiro volume é didático tendo como principal característica a abrangência sem superficialidade. Distingue-se portanto como um livro texto por excelência. O título, Fenômenos de Transferência, é modesto com relação ao conteúdo e à organização da obra. O primeiro volume apresenta desenvolvimentos muito bem elaborados que levam o leitor a entender fenômenos de maior complexidade partindo da formulação simples, não simplificada, dos princípios básicos da mecânica. Merece destaque a derivação das equações governantes do escoamento de fluidos, que parte dos princípios mais fundamentais de conservação de massa, quantidade de movimento e energia para chegar a equações que descrevem os diversos tipos característicos de escoamento, desde fluidos ideais até escoamentos compressíveis. As hipóteses subjacentes às diversas teorias particulares são introduzidas quando se fazem necessárias, sempre a partir da base construída nos primeiros capítulos. Várias aplicações também são exploradas, tanto ao longo do texto como nos exercícios, o que torna a obra muito atrativa para disciplinas básicas em um curso de engenharia. A extensa lista de referências complementa o primeiro volume remetendo o leitor a textos especializados que completam e aprofundam a matéria exposta.

O segundo volume trata de oito temas de transporte de massa acoplado com transporte de energia, distribuídos em quatro partes. Além dos Profs. Pontes e Mangiavacchi, outros cinco autores, Profs. Leonardo Santos de Brito Alves, Profa. Silvia da Costa Hirata, Prof. Reinaldo Roberto Rosa, Profa. Kémelli Campanharo Estacio-Hiroms e Prof. Gustavo Rabello dos Anjos, todos pesquisadores muito ativos na área, se unem aos primeiros nesse volume de Aplicações, para tratar de temas mais avançados e de maneira mais aprofundada, sem o compromisso de ser um texto mais didático, mas sim uma obra de referência. São tópicos modernos, de aplicação da teoria desenvolvida no primeiro volume em fenômenos mais complexos. A leitura desse volume requer uma base matemática mais extensa do que a necessária para o primeiro volume, além do próprio embasamento dado pelo primeiro volume. No entanto isso não representa grande dificuldade, uma vez que a leitura é facilitada pela exposição muito bem elaborada, sem saltos que poderiam dificultar o acompanhamento da dedução das equações fundamentais bem como das técnicas de solução, dos problemas analisados nas diversas secções. Especialmente a parte IV, que trata do problema de Rayleigh-Bénard, está muito bem elaborada, desenvolvida em etapas de dificuldade crescente, levando o leitor a acompanhar os desenvolvimentos analíticos sem desanimar. O segundo volume serve tanto como texto de apoio para cursos mais avançados, como também para referência de pesquisadores nos temas específicos de cada capítulo. Nessa segunda alternativa serve como excelente introdução aos temas abordados, incluindo

uma extensa lista de referências que complementam a matéria exposta no texto.

Em seu conjunto, é sem dúvida uma obra de fôlego que trata do assunto de transferência de massa, quantidade de movimento e energia através de transporte via escoamento e difusão. É um material characteristicamente didático, preciso, justificando as simplificações quando necessárias. Nesse sentido o leitor fica seguro no uso de teorias particulares uma vez que sabe como elas foram deduzidas e as limitações nas possíveis aplicações. Um livro que merece estar em todas as bibliotecas universitárias, sem dúvida nas de língua portuguesa, e ao alcance das mãos de todos aqueles que trabalham na área. Conhecendo os autores, sabemos quanto esforço foi colocado na preparação dessa obra, quantas revisões e discussões foram necessárias, e quanto carinho e dedicação no ensinar existem nessas linhas, para se chegar a essa forma e a esse conteúdo. De certo com sacrifício do tempo disponível para avançar em suas pesquisas científicas, e até mesmo, do nobre tempo para dedicar-se às suas famílias. Portanto, só nos resta agradecê-los por esse esforço em prol do avanço da literatura científica nacional, e pela importante contribuição à formação de novos pesquisadores em Fenômenos de Transferência, doravante com suporte dessa obra.

Rio de Janeiro, 12 de abril de 2014

Prof. Luiz Bevilacqua

Prof. Renato Machado Cotta

# Prefácio dos autores

Este livro destina-se a estudantes em nível de graduação e de pós-graduação em ciências físicas, matemáticas, engenharia e ao público em geral, com interesse na área de Fenômenos de Transferência. O livro está dividido em dois volumes. O primeiro volume aborda os fundamentos da disciplina e o segundo, material mais especializado.

O texto do primeiro volume se origina das notas de aulas ministradas pelos autores em cursos de engenharia na Universidade Federal do Rio de Janeiro e na Universidade do Estado do Rio de Janeiro sobre os fundamentos da disciplina. O conteúdo ultrapassa a quantidade normalmente incluída em um curso introdutório de um semestre, permitindo a quem o adote selecionar os tópicos segundo a própria conveniência. Além da maior parte do material coberto normalmente em cursos introdutórios de Mecânica dos Fluidos, quer em nível de graduação, quer de pós-graduação, o primeiro volume engloba também parte do que é normalmente ministrado a respeito de condução de calor em sólidos e de convecção, em um primeiro curso sobre o assunto. Há também algum material sobre transferência de massa e evaporação. Trata-se portanto, em sua maior parte, de material clássico, apresentado segundo nosso ponto de vista sobre como abordar os princípios de Fenômenos de Transferência. Entendemos, em primeiro lugar, que o tratamento deve enfatizar os fundamentos teóricos, sem os quais não se avança de forma segura nas aplicações. Dentro dessa linha, os exemplos de aplicação em engenharia servem para ilustrar o enfoque teórico que buscamos e para quebrar o ritmo de apresentação que imprimimos em sala de aula.

Estabelecido esse primeiro objetivo, entendemos que devemos iniciar expondo os fundamentos da disciplina, que são as equações de evolução resultantes da aplicação aos meios contínuos, do princípio de conservação da massa, das leis que regem a quantidade de movimento do meio e do princípio de conservação da energia. Assim, nossa exposição não se inicia por situações mais simples, como pelo equacionamento e pela resolução de problemas da hidrostática, de problemas unidimensionais, permanentes, ou ainda, de problemas em que os efeitos viscosos são desprezados. Ao contrário, optamos por apresentar, logo no início, as equações completas e, a partir deles, abordar as soluções clássicas e os exemplos.

Vemos vantagens em apresentar o princípio de conservação da energia logo após os capítulos referentes à conservação da massa e às leis da quantidade de movimento: ganha-se tempo, pois o método de equacionamento é o mesmo utilizado com os dois outros princípios e está bem presente na mente dos alunos. Além disso, dá-se aos alunos, cedo, uma visão razoavelmente completa das equações e o tempo necessário, até o fim de um semestre de curso, para que possam assimilá-las e para que ganhem a familiaridade necessária com o significado de seus termos. Esse conhecimento permite que a escolha dos problemas que serão abordados a partir de então se faça sem restrições.

Nossa experiência mostra a necessidade de iniciarmos o primeiro curso de Fenômenos de Transferência revendo os princípios do cálculo vetorial. Para a consecução desse objetivo incluímos um apêndice sobre o assunto. O apêndice inclui algumas questões nem sempre tratadas nas cadeiras introdutórias de cálculo vetorial e aborda, de forma aplicada, a notação tensorial cartesiana ou indicial, que utilizamos e recomendamos, mesmo em nível de graduação. Não vemos maiores dificuldades em levar os alunos a compreenderem e manipularem os índices da notação. As equações tornam-se concisas e as regras sobre como escrever explicitamente todos os termos das mesmas estão na própria notação, o que não ocorre quando escritas em forma vetorial. Não é necessário contornar questões como o fato do gradiente de um vetor ser um tensor de segunda ordem. E, embora consiga-se equacionar os princípios de conservação da massa e da quantidade de movimento e expô-los utilizando-se a notação vetorial, entendemos que é muito difícil prosseguir e apresentar as equações de energia usando essa notação. Ao contrário, ao usarmos a notação tensorial cartesiana, não temos dificuldades, por exemplo, com o problema da dupla contração que ocorre no termo de dissipação viscosa dessas equações. O formalismo da notação é discutido no apêndice B.

O princípio de conservação da massa é introduzido no capítulo 2, com a notação vetorial mas as equações obtidas são apresentadas logo a seguir, na forma tensorial. Já a partir do equacionamento das leis da quantidade de movimento, adotamos a notação tensorial cartesiana desde o início. Assim, parte do apêndice B é pré-requisito para o estudo do material apresentado a partir do capítulo 3, para leitores que não tenham familiaridade com a notação e com o significado de alguns operadores que intervêm nas equações deduzidas desse ponto em diante.

Não obstante, a notação vetorial tem sua utilidade, permitindo por vezes, uma interpretação mais fácil dos termos das equações. E, em alguns casos, as deduções se tornam mais intuitivas quando se usa a notação vetorial. Assim, damos preferência ao uso da notação tensorial a partir do capítulo que trata das leis da quantidade de movimento, mas voltamos à vetorial sempre que seu uso simplifica a exposição e a clareza das deduções.

Tomamos a liberdade de citar, dentre os partidários dessa abordagem, o nome do prof. Jacek Piotr Gorecki, um dos responsáveis pela implantação das cadeiras de aerodinâmica ministradas no Instituto Tecnológico de Aeronáutica, de quem um dos autores (JP) teve o privilégio de ter sido aluno.

Uma vez apresentadas as equações que resultam da aplicação dos princípios de conservação passamos às aplicações e nos defrontamos com a necessidade de escolher os problemas dos quais tratar. Optamos em abordar duas classes de problemas: de um lado, o dos escoamentos unidimensionais compressíveis e os escoamentos potenciais. Nessa classe de escoamentos desprezam-se os efeitos viscosos. Procuramos ressaltar a analogia entre os fenômenos que ocorrem nos escoamentos de alta velocidade e os que se observam na hidráulica de canal aberto. Acreditamos que os paralelos sirvam para ajudar na compreensão do que ocorre nos dois casos. Na sequência, abordamos os escoamentos potenciais, incluindo os compressíveis.

A segunda classe de problemas abordados comprehende o caso diametralmente oposto ao dos escoamentos compressíveis, que é o dos escoamentos viscosos, em que abordamos parte das soluções clássicas, que têm solução analítica. Há problemas que são estudados em coordenadas cartesianas e outros, em coordenadas cilíndricas. No primeiro caso, resolvemos não apenas o campo hidrodinâmico, mas também o campo de temperaturas, incluindo

efeitos do aquecimento viscoso. Ganha-se tempo, resolvendo-se os problemas hidrodinâmico e térmico simultaneamente e o benefício de apontarmos as analogias, que facilitam a compreensão de ambos. Sempre que possível, procuramos mostrar as similaridades e analogias entre os problemas relativos à mecânica dos fluidos e os de transferência de calor e de massa. Como exemplo de situação em que lançamos mão dessas analogias citamos o uso dos resultados do problema do escoamento sobre uma placa plana alinhada ao fluxo, para justificar a forma das correlações empíricas largamente utilizadas em engenharia, para a resolução de problemas de convecção e evaporação forçadas.

Mas não apresentamos nenhuma dedução sobre transformação das equações, que são sempre obtidas em coordenadas cartesianas, para coordenadas cilíndricas, esféricas, ou naturais. Entendemos que, para fazê-lo deve-se usar a notação dos tensores não-cartesianos, que não abordamos nesse texto. Assim, apresentamos apenas parte das equações, reescritas em coordenadas cilíndricas e, em alguns casos, em esféricas.

O primeiro volume comprehende também capítulos introdutórios sobre as teorias da camada limite e turbulência. Compreende ainda quatro apêndices que contém os princípios de análise dimensional, do cálculo vetorial, da análise complexa e da termodinâmica clássica. O apêndice referente à análise dimensional apresenta o teorema **Π** de Buckingham sob ótica da álgebra linear.

O segundo volume aborda tópicos orientados a estudantes de graduação em nível mais avançado e a estudantes de cursos de pós-graduação. A maior parte do material é nova e sintetiza resultados e aspectos ainda em desenvolvimento dentro de nossas linhas de pesquisa. Há algum material bem conhecido, mas que incluímos de modo a dar ao leitor uma visão ampla do problema.

Temos a agradecer a várias pessoas que contribuiram para que o texto chegasse até esse ponto: Aos profs. Renato Machado Cotta e Luiz Bevilacqua da COPPE/UFRJ. Ao Departamento/Programa de Pós-graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, onde a maior parte desse trabalho foi escrito. Aos profs. Oscar Rosa Mattos, Su Jian, Álvaro L. G. A. Coutinho, Fernando Pereira Duda, Átila P. S. Freire e Roberto Fernandes de Oliveira da COPPE/UFRJ, a Vladimir Neves do Instituto de Matemática/UFRJ, Helio Salim Amorim e Nicim Zagury do Instituto de Física/UFRJ pelo interesse com que acompanharam, por anos, o desenvolvimento do trabalho. Ao professor Luiz M. Portela, da Universidade de Delft, pela cessão de alguns problemas propostos no Cap. 7. Aos profs. Elbert Einstein N. Macau (INPE), à prof.<sup>a</sup> Rosana Sueli da Motta Jafelice, da Universidade Federal de Uberlândia e em especial ao prof. José Alberto Cuminato, do Instituto de Ciências Matemáticas e da Computação – ICMC/USP – S. Carlos, pela orientação na escolha da SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, como a editora à qual submetemos o trabalho para publicação. A nossos alunos, pela recepção do texto, pelas críticas, sugestões e por apontarem por várias vezes aspectos que nos escapavam e incorreções do texto. Citamos em particular os nomes de Wagner Ferreira Lima, pela revisão do texto e de Filipe Esteves Cortes Sálvio, pela participação na elaboração do manual do professor (em andamento). Citamos ainda o Dr. Gustavo Rabello dos Anjos, que nos cedeu o material referente aos princípios do Método da Projeção, incluído na Sec. B.5 e Davi Vaz de Andrade Ferreira, pelo material referente ao campo hidrodinâmico que se desenvolve entre dois discos rotatórios coaxiais, exposto na Sec. 7.10.

JP agradece também ao Engº Luiz Fernando Bonilauri pelo exame cuidadoso do ma-

nuscrito, por suas observações pertinentes e por seu exemplo como pessoa e como profissional. Agradece em especial ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica e à Universidade Livre de Bruxelas, a quem deve sua formação acadêmica.

Os autores agradecem apoio financeiro da agências de fomento CNPq, CAPES e FAPERJ.

E agradecemos a nossos familiares, pelo tempo de convívio que nos cederam, para que pudéssemos nos dedicar aos resultados aqui incluídos e à preparação do texto.

Rio de Janeiro, 12 de abril de 2014

José da Rocha M. Pontes  
Norberto Mangiavacchi

# Parte I

## Fundamentos



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Objetivos

Esse texto comprehende o estudo de três tópicos interrelacionados, da mecânica dos meios contínuos:

1. Mecânica dos Fluidos;
2. Transferência de Calor;
3. Transporte de Massa.

A hipótese de meio contínuo é necessária para que possamos fazer uso das noções do cálculo diferencial e integral e definir propriedades de um fluido, ou de um sólido, em um ponto. Cabe notar que os elementos do meio considerado devem ser suficientemente pequenos para que suas propriedades se mantenham constantes dentro do mesmo e suficientemente grandes para que os efeitos de descontinuidade da matéria não apareçam.

Como muitos dos mecanismos de transporte de calor e de massa se processam na presença de fluidos, como é o caso do resfriamento por convecção e dos processos de evaporação, começaremos o curso abordando a mecânica dos fluidos.

O objetivo da mecânica dos fluidos é determinar o *estado* de um meio, esteja ele em movimento ou em repouso. Para fazê-lo devemos conhecer as variáveis que determinam este estado, as quais dependem em geral da *posição no espaço* e do *tempo*. Consequentemente, para conhecermos o estado de um fluido devemos determinar o valor das variáveis que o identificam, ao longo do tempo e em cada ponto do espaço ocupado pelo fluido.

As variáveis que identificam o estado de um fluido são:

1. A *velocidade* em cada ponto,  $\mathbf{v}$ , que é uma grandeza vetorial. Usaremos normalmente uma das notações abaixo, em um sistema de coordenadas cartesiano e ortogonal:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k} && \text{ou} \\ \mathbf{v} &= v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} && \text{ou} \\ \mathbf{v} &= v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Na equações acima  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  são vetores unitários (de comprimento igual a 1) nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, enquanto  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  são, analogamente, vetores unitários nas direções de cada um dos eixos de coordenadas. As variáveis  $u$ ,  $v$  e  $w$ , assim como  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  são as componentes da velocidade em cada uma das direções acima.

O vetor velocidade também pode ser expresso na seguinte forma:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i.$$

Temos já três incógnitas, a saber as três componentes da velocidade e necessitamos de três equações que nos permitam determiná-las.

2. Outra variável de um fluido é a *pressão* em cada ponto, que pode ser tratada como uma grandeza *escalar*. Representaremos a pressão pela letra  $p$ .
3. Se o fluido for compressível sua *massa específica*  $\rho$  será também uma variável a determinar. A massa específica é definida por:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \infty} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

4. Finalmente, se a *temperatura*  $T$  do fluido variar, será também uma das variáveis que definem o estado do fluido.

Em resumo, a Mecânica dos Fluidos procura determinar as funções:

$$\begin{aligned} u &= u(t, x, y, z) \\ v &= v(t, x, y, z) \\ w &= w(t, x, y, z) \\ p &= p(t, x, y, z) \\ \rho &= \rho(t, x, y, z) \\ T &= T(t, x, y, z) \end{aligned}$$

Em problemas envolvendo reação e transporte de espécies químicas procuramos determinar também a concentração de cada espécie no tempo e no espaço.

## 1.2 Princípios de Conservação e Equações Constitutivas

Para resolvermos um problema de mecânica dos fluidos no qual a temperatura varia necessitamos de seis equações de evolução. Essas equações são obtidas pela aplicação dos seguintes princípios:

1. Conservação da *Massa*. A aplicação deste princípio conduz à *Equação da Continuidade*;

2. Conservação da *Quantidade de Movimento* em cada uma das três direções. Obtém-se três equações. Um caso de particular importância ocorre quando se aplica o princípio de conservação da quantidade de movimento a um tipo particular de fluido denominado *fluido newtoniano*, definido na Sec. (3.7);
3. Conservação da *Energia*;
4. Equação de estado.

Ao aplicarmos os três princípios de conservação acima, nos deparamos com o problema de expressarmos as forças agindo sobre uma partícula de fluido em função do campo de velocidades, assim como de expressar o fluxo de calor em função do campo de temperaturas. Trata-se de um problema semelhante ao de especificarmos a força agindo sobre uma mola comprimida, em função do nível de compressão ou de tração a que a mesma é submetida. No caso de uma mola a força é expressa através da *lei de Hook* (ver Fig. 1.1). A lei de Hook é um exemplo de *relação constitutiva*, que consiste de uma *hipótese* adicional e, não de um resultado obtido da aplicação de um dos princípios de conservação anteriormente mencionados.

No caso da mecânica dos fluidos não há, como ocorre no caso de uma mola, uma força restituidora, que tende a trazê-la de volta à posição de equilíbrio. No entanto, o escorregamento de uma camada de fluido sobre a outra produz uma *tensão de cisalhamento* entre as camadas, conforme mostrado na Fig. (1.2).

Consideremos o caso do escoamento de um fluido sobre uma placa plana infinita.

$\tau_{xy}$  → Tensão de cisalhamento na direção  $x$ , atuando na face  $y$ , isto é, na face perpendicular à direção  $y$ .

Unidades da tensão de cisalhamento  $\tau$ :

$$[\tau_{xy}] = \frac{[\text{Força}]}{[\text{Área}]}$$

Da mesma forma como ocorre no caso da lei de Hook, há uma relação constitutiva para  $\tau_{xy}$ :

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (1.1)$$

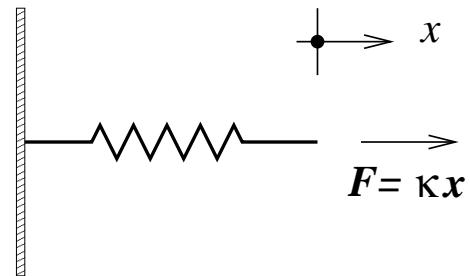


Figura 1.1: Força agindo sobre uma mola.  
Figura 1.2: Campo de velocidades de um fluido nas proximidades de uma placa plana e tensões de cisalhamento agindo sobre um elemento do mesmo.

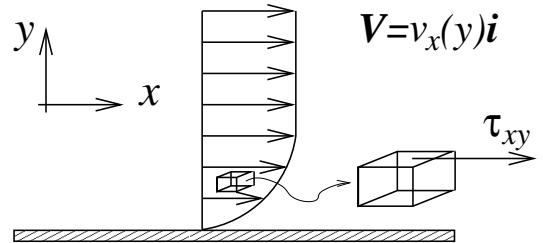


Figura 1.2: Campo de velocidades de um fluido nas proximidades de uma placa plana e tensões de cisalhamento agindo sobre um elemento do mesmo.

onde  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade dinâmica (ou simplesmente a viscosidade dinâmica) do fluido e  $\partial v_x / \partial y$ , um dos componentes do gradiente de velocidade.

Fluidos cuja tensão de cisalhamento é descrita pela Eq. (1.1) denominam-se *newtonianos*. São os mais comumente encontrados nos problemas de engenharia, embora existam outros tipos de fluidos cuja tensão de cisalhamento se exprime de outras formas em função do campo de velocidades<sup>1</sup>. A relação constitutiva acima será generalizada no capítulo 3.

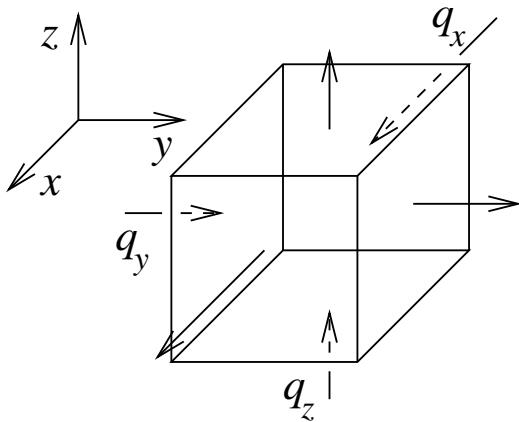


Figura 1.3: Fluxo de calor em um elemento de fluido

$$[\mathbf{q}] = \frac{[\text{Calor/tempo}]}{[\text{Área}]}$$

A relação constitutiva que relaciona o fluxo de calor com o campo de temperaturas é da forma:

$$q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i},$$

(Lei de Fourier) onde  $\kappa$  é o coeficiente de condutividade térmica do material,  $q_i$  e  $\partial T / \partial x_i$  são, respectivamente, o fluxo de calor e a componente do *gradiente de temperaturas* na direção  $x_i$ . As três componentes do fluxo de calor são :

$$\begin{aligned} q_x &= -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y &= -\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \\ q_z &= -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

Tratamos de casos em que a condutividade térmica é a mesma nas três direções, isso é, de meios *isotrópico*. Substituindo-se as expressões acima na Eq. (1.2) obtemos:

$$\mathbf{q} = q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k} = -\kappa \left( \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

---

<sup>1</sup>Exemplos: fluido viscoelástico, plástico Bingham etc.

ou:

$$\mathbf{q} = -\kappa \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T}{\partial x_i} \mathbf{e}_i,$$

ou ainda:

$$\mathbf{q} = -\kappa \mathbf{grad} T. \quad (1.3)$$

A Eq. (1.3) denomina-se *lei de Fourier*.

Resumindo o que foi dito até aqui, as equações que descrevem a evolução do estado de um fluido são obtidas pela aplicação dos princípios de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia, suplementadas por relações constitutivas como a que permitem expressar, as forças de superfície que agem sobre um elemento de fluido em função do campo de velocidades, o fluxo de calor em função do campo de temperaturas. A equação de estado de um gás perfeito é outro exemplo de equação constitutiva, necessário no estudo do escoamento de gases.

### 1.3 Operador Derivada Substancial

Outra noção utilizada no desenvolvimento da mecânica dos fluidos é a do operador *Derivada Substancial*. Esse operador, quando aplicado a uma propriedade de uma partícula de fluido em movimento, com velocidade  $\mathbf{v}$ , fornece como resultado a derivada total em relação ao tempo da propriedade daquela partícula em movimento. Consideremos a componente  $v_x$  da velocidade da partícula de fluido. Temos que  $v_x = v_x(t, x(t), y(t), z(t))$ . A derivada total de  $v_x$  em relação ao tempo é dada por:

$$\frac{D v_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Observando que  $dx/dt$ ,  $dy/dt$  e  $dz/dt$  são, respectivamente, as componentes de velocidade  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$ , re-escrevemos a derivada  $D v_x / Dt$  na forma:

$$\frac{D v_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} v_x$$

ou ainda:

$$\frac{D}{Dt} v_x = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \right) v_x$$

Utilizando a notação de índices, ou tensorial cartesiana (ver apêndice B):

$$\frac{D v_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_x}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_x}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_x}{\partial x_3} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_x$$

A informação de que a soma deve se fazer sobre todos os valores que o índice  $j$  toma já existe no fato de o mesmo aparecer duas vezes no termo e, com isso, o sinal de somatório é redundante e pode ser dispensado. Obtemos:

$$\frac{D v_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_x = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) v_x$$

Definimos portanto o operador *Derivada Substancial* como:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}$$

Em notação tensorial cartesiana:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

## 1.4 Desenvolvimento da Mecânica dos Fluidos

O desenvolvimento da mecânica dos fluidos pode ser dividido em três fases:

1. Até o fim do século XVII: os trabalhos até essa fase foram essencialmente de natureza experimental;
2. A partir do século XVIII, foram desenvolvidos trabalhos analíticos por nomes como Euler, D'Alembert e Laplace, que não descreviam no entanto muitos dos fenômenos observados experimentalmente. Essa fase coincide com o do apogeu do desenvolvimento da mecânica;
3. No início do século XX ocorreu notável avanço no desenvolvimento da mecânica dos fluidos, com a descoberta e a formulação das seguintes teorias:
  - Camada limite (Prandtl);
  - Sustentação aerodinâmica (Lanchester-Prandtl);
  - Limite de estabilidade dos escoamentos (Reynolds).

A resolução das equações da mecânica dos fluidos exige frequentemente enorme esforço analítico. Em muitos casos não se consegue uma solução analítica, sendo necessário recorrer ao cálculo numérico. Ainda assim, faz-se necessário simplificar as equações. Em alguns casos restringe-se o número de variáveis espaciais do problema, elimina-se a dependência do tempo e obtém-se equações que se aplicam a importantes classes de problemas de interesse tecnológico, como o do aproveitamento de recursos hídricos para a geração de energia elétrica, o dimensionamento de tubulações e a especificação dos parâmetros de equipamentos de processo, como bombas e compressores.

A dificuldade em tratar os fenômenos que ocorrem nos fluidos decorre de que a evolução do estado do mesmo é regida por leis que se exprimem através de equações a derivadas parciais *não-lineares*. As equações a derivadas parciais refletem a dependência do estado do fluido em relação à posição: o estado em um ponto não determina o que ocorre em outro, o que equivale a dizer que há muitos graus de liberdade.

A não-linearidade das equações de evolução, a variedade das condições iniciais e de contorno de cada problema são responsáveis pela formidável riqueza dos fenômenos observados nos fluidos, dos quais os fenômenos meteorológicos são exemplo eloquente.

Na segunda metade do século XX descobriu-se, a partir dos trabalhos de Poincaré (1900), que mesmo sistemas com pequeno número de graus de liberdade e cuja evolução

é descrita por equações não-lineares determinísticas, podem evoluir de forma imprevisível. Trata-se do fenômeno hoje conhecido como caos determinístico, que discutimos brevemente na Sec. (3.17).

Nesse texto, procuraremos apresentar as equações gerais que regem os fenômenos de transferência, simplificá-las de modo a obter equações de caráter ainda bastante geral e identificar alguns resultados qualitativos. Não deixamos, no entanto, de abordar alguns problemas de interesse tecnológico.

## 1.5 Problemas

1. Mostrar que:

$$(a) \frac{D}{Dt}(f + g) = \frac{Df}{Dt} + \frac{Dg}{Dt}$$

$$(b) \frac{D}{Dt}(\alpha f) = \alpha \frac{Df}{Dt}$$

$$(c) \frac{D}{Dt}(f^\alpha) = \alpha f^{\alpha-1} \frac{Df}{Dt}$$

onde  $f = f(t, x, y, z)$ ,  $g = g(t, x, y, , z)$  e  $\alpha$  é um número.

2. Mostrar que:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \frac{v^2}{2}$$

onde  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x, y, z)$  e  $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$

3. A temperatura dentro de um túnel varia na forma:

$$T = T_0 - \alpha e^{-x/L} \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

onde  $T_0$ ,  $\alpha$ ,  $L$  e  $\tau$  são constantes e  $x$  é medido a partir da entrada do túnel. Uma partícula move-se com velocidade  $v_x = U_0 \cos(2\pi t/\tau)$  dentro do túnel. Determinar a taxa de variação de temperatura da partícula.

4. A temperatura  $T$  do ar em uma região da atmosfera é dada por:

$$T = \theta_0 \left( \frac{2x}{d} + \frac{3y}{d} + \frac{t^2}{t_0^2} \right)$$

A velocidade do vento é dada por  $v_x = U(1 + x/d)$ ,  $v_y = U(1 - y/d)$  e  $v_z = 0$ . Os parâmetros  $\theta_0$ ,  $U$ ,  $d$  e  $t_0$  são constantes. Determine a taxa de variação da temperatura de uma partícula de fluido localizada em  $x = 2d$ ,  $y = 3d$ , quando  $t = 2t_0$ .



# Capítulo 2

## Conservação da Massa

### 2.1 Equação da Continuidade

Consideremos um volume de controle  $V$ , fixo no espaço, simplesmente conexo, através do qual um fluido com massa específica  $\rho$  escoa, sendo  $\mathbf{v}$  o campo de velocidades do escoamento. Sejam  $S$  a superfície externa que delimita o volume e  $\mathbf{n}$  o vetor unitário (de comprimento igual a 1), perpendicular à superfície em cada ponto da mesma e orientado para fora, conforme mostrado na Fig. (2.1). O princípio de conservação da massa estabelece que:

$$\left( \begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação de massa dentro} \\ \text{do volume, isto é, a quantidade de} \\ \text{massa acumulada dentro do volume por} \\ \text{unidade de tempo} \end{array} \right) = - \left( \begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de massa para fora} \\ \text{do volume} \end{array} \right) \quad (2.1)$$

Expressemos de forma matemática a igualdade acima. A taxa de acumulação de massa dentro do volume  $V$  pode ser expressa como a integral sobre todo o volume, da variação da quantidade de massa em cada ponto do mesmo:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm$$

Por outro lado, a quantidade infinitesimal de massa  $dm$  pode ser expressa como  $dm = \rho dV$ . Substituindo essa última expressão na integral acima e observando que os volumes  $dV$  não variam com o tempo temos:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \rho \frac{\partial dV}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.2)$$

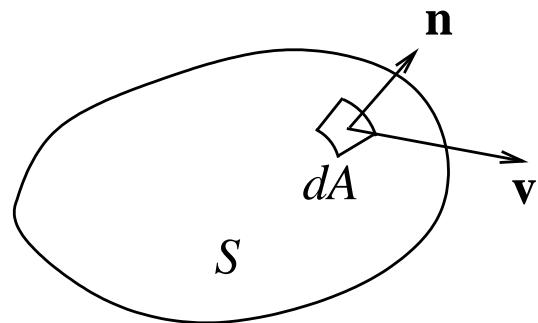


Figura 2.1: Volume de controle ao qual se aplica o princípio de conservação da massa.  $\mathbf{n}$  é o vetor de comprimento unitário perpendicular à superfície e  $\mathbf{v}$ , a velocidade no elemento de superfície considerado.

Para darmos forma matemática ao fluxo líquido de massa para fora do volume  $V$  consideramos inicialmente uma pequena parte da superfície  $S$  conforme mostrado na Fig (2.2). Seja  $\Delta V$  um elemento de volume do fluido que cruza a superfície em um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Sejam  $\mathbf{n}$  o vetor unitário perpendicular à superfície e  $\mathbf{v}$ , a velocidade do elemento de fluido considerado. Esta velocidade pode ser decomposta em duas componentes, uma delas paralela a  $\mathbf{n}$ , que denominamos  $v_n$  e outra perpendicular a  $\mathbf{n}$ , que denominamos  $v_p$ .

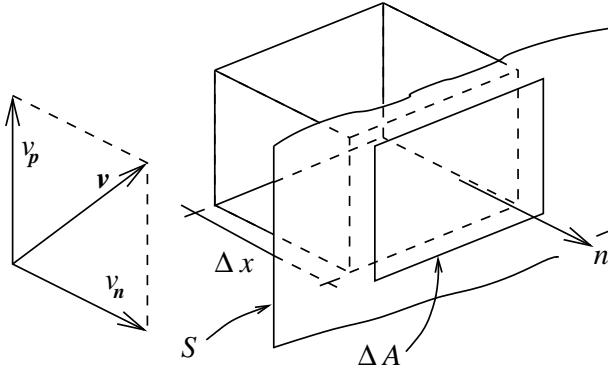


Figura 2.2: Volume de fluido cruzando um elemento da superfície de controle  $S$ .  $v_n$  e  $v_p$  são, respectivamente, as componentes de velocidade perpendicular e paralela à superfície  $S$ .

Figura 2.2: Volume de fluido cruzando um elemento da superfície de controle  $S$ .  $v_n$  e  $v_p$  são, respectivamente, as componentes de velocidade perpendicular e paralela à superfície  $S$ .

A contribuição do elemento de fluido para o fluxo de massa que cruza a superfície é dada por:

$$\rho \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

O elemento de volume  $\Delta V$  pode ser escrito como o produto de seu comprimento  $\Delta x$  por sua área transversal  $\Delta A$ , que consideraremos paralela à superfície  $S$ . Assim,  $\Delta V = \Delta x \Delta A$  e podemos re-escrever o fluxo de massa que cruza a superfície como:

$$\rho \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta A$$

O termo  $\Delta x / \Delta t$  é precisamente a componente da velocidade do elemento de fluido paralelo a  $\mathbf{n}$ . Apenas essa componente contribui para o fluxo de massa que cruza a superfície. Esta componente pode ser escrita como  $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ . Dessa forma, a contribuição do elemento  $dV$  para o fluxo de massa toma a forma:

$$\rho \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta A.$$

Se a componente  $v_n$  tiver o mesmo sentido da normal  $\mathbf{n}$ , isso é, se o elemento de volume  $dV$  estiver cruzando a superfície para *fora* da mesma, o produto  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  será positivo e se a componente  $v_n$  tiver sentido *oposto* a  $\mathbf{n}$  o produto escalar será negativo. Ao integrarmos a expressão acima ao longo de toda a superfície  $S$  fazemos automaticamente o balanço do fluxo de massa que *sai* menos o que *entra* no volume  $V$ . Assim, o fluxo líquido para fora do volume é:

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (2.3)$$

Substituindo as expressões (2.2) e (2.3) no balanço de massa (2.1) obtemos a forma integral da equação de conservação da massa[43, 38, 5, 3, 56, 20, 63, 13]:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (2.4)$$

Essa equação relaciona a taxa de acumulação de massa em um volume finito com o balanço dos fluxos de massa que cruzam a superfície. Trata-se de uma equação *integral*. Procuramos agora uma expressão local, isto é, uma equação *diferencial* que traduza o princípio

de conservação da massa. Lembrando que, de acordo com o teorema de Gauss:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{q} dV = \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA$$

ou

$$\int_V \operatorname{div} \rho \mathbf{v} dV = \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$$

utilizamos esse teorema para reescrever a Eq. (2.4):

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div} \rho \mathbf{v} dV.$$

ou:

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) dV = 0$$

Como essa equação deve ser válida para quaisquer volumes de controle, devemos ter, para um volume infinitesimal:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \quad (2.5)$$

que é a equação da continuidade[43, 38, 5, 3, 56, 20, 63]:

Em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (2.6)$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (2.7)$$

Em coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) = 0. \quad (2.8)$$

Podemos reescrever a equação da continuidade (coordenadas cartesianas) como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) &= \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned}$$

ou:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Essa equação pode também ser escrita como:

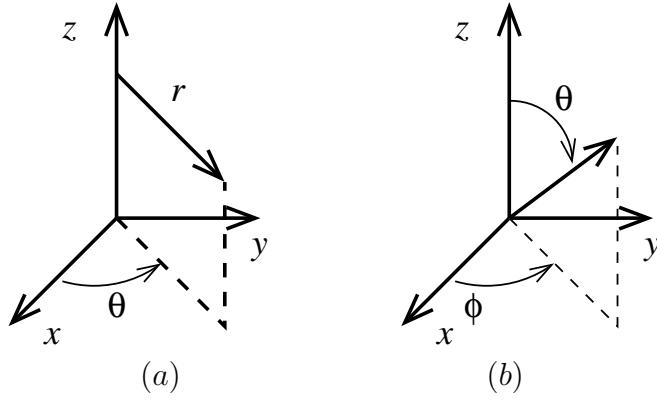


Figura 2.3: Sistemas de coordenadas cilíndricas (a) e esféricas (b). A definição das coordenadas curvilíneas acima mostrada é usada em todo esse trabalho.

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \right) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

ou:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Na notação dos tensores cartesianos, a equação da continuidade toma a forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0. \quad (2.9)$$

Em resumo, a equação da continuidade pode ser escrita em qualquer das formas abaixo, em coordenadas cartesianas:

Tabela 2.1: Formas da equação da continuidade

Forma vetorial	Forma tensorial
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0$
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$
$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$	$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$
$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$	$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$

As fórmulas de transformação das componentes da velocidade, do sistema de coordenadas cartesiano para o cilíndrico e vice-versa, bem como entre os sistemas de coordenadas cartesianas e esférico são dadas abaixo (Bird *et al.*, 1960 [5]):

Tabela 2.2: Relações entre as componentes da velocidade em diversos sistemas de coordenadas

Do sistema cartesiano para o cilíndrico		Do sistema cilíndrico para o cartesiano	
$v_r = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta + 0 v_z$		$v_x = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta + 0 v_z$	
$v_y = v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta + 0 v_z$		$v_\theta = -v_x \sin \theta + v_y \cos \theta + 0 v_z$	
$v_z = 0 v_x + 0 v_y + v_z$		$v_z = 0 v_x + 0 v_y + v_z$	
Do sistema cartesiano para o esférico			
$v_r = v_x \sin \theta \cos \phi + v_y \sin \theta \sin \phi + \cos \theta v_z$			
$v_\theta = v_x \cos \theta \cos \phi + v_y \cos \theta \sin \phi - v_z \sin \theta$			
$v_\phi = -v_x \sin \phi + v_y \cos \phi + 0 v_z$			
Do sistema esférico para o cartesiano			
$v_x = v_r \sin \theta \cos \phi + v_\theta \cos \theta \cos \phi - v_\phi \sin \phi$			
$v_y = v_r \sin \theta \sin \phi + v_\theta \cos \theta \sin \phi + v_\phi \cos \phi$			
$v_z = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta + 0 v_\phi$			

A não-linearidade inerente aos fenômenos que ocorrem em fluidos já se manifesta na equação da continuidade, onde o termo  $\operatorname{div} \rho \mathbf{v}$  é não-linear pois contém o produto de duas incógnitas: a massa específica e a própria velocidade. Em alguns casos no entanto, a equação da continuidade torna-se linear:

1.  $\partial \rho / \partial t = 0$  e  $\operatorname{grad} \rho = 0$ , que é o caso de fluidos incompressíveis. Nesse caso a equação da continuidade reduz-se a:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

2. Escoamento estratificado, isto é, em camadas de fluidos imiscíveis. Neste caso  $\partial \rho / \partial t = 0$  e  $\operatorname{grad} \rho \perp \mathbf{v}$ . A equação da continuidade toma a forma:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

3. Acústica: Trata-se do caso em que a massa específica do fluido está sujeita a variações pequenas em torno de um valor médio,  $\rho_0$ . Escrevemos  $\rho = \rho_0 + \rho'$ , onde  $\rho_0$  não depende nem do tempo nem da posição no espaço. A equação da continuidade toma a forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}(\rho_0 + \rho') + (\rho_0 + \rho') \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Essa equação se simplifica se considerarmos que  $\rho_0$  não depende nem do tempo nem da posição, que  $(\rho_0 + \rho') \approx \rho_0$  e que  $\mathbf{v} \ll \partial \rho' / \partial t$ . A equação da continuidade se reduz a:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

que é uma equação linear.

*Linhas de Corrente* são linhas tangentes em todos os pontos, ao vetor velocidade. As linhas de corrente coincidem com as trajetórias quando o escoamento se dá em regime permanente. Um *tubo de Corrente* é formado pelas linhas de corrente que se apoiam em uma curva fechada, conforme mostrado na Fig. (2.4).

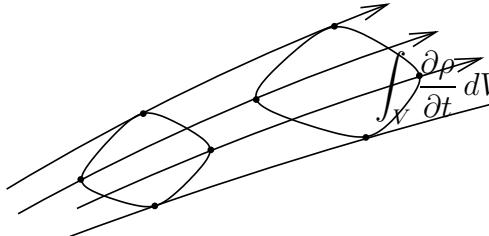


Figura 2.4: Tubo de corrente.  
 $-(\rho v A)_{\text{entrada}} + (\rho v A)_{\text{saída}} = 0.$

A equação da continuidade aplicada a tubos de corrente, em regime permanente, resulta em:

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad \rightarrow \quad \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \\ \oint_{C_1} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA + \oint_{C_2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0.$$

Se a velocidade for constante ao longo de cada entrada ou saída do tubo de corrente:

Havendo mais de uma entrada e uma saída do tubo de corrente:

$$-\sum(\rho v A)_{\text{entradas}} + \sum(\rho v A)_{\text{saídas}} = 0 \quad \rightarrow \quad \sum(\rho v A)_s = \sum(\rho v A)_e$$

No sistema de unidades SI:

$$[\rho v A] = \frac{kg}{m^3} \frac{m}{s} m^2 = \frac{kg}{s}$$

Se a massa específica for constante:

$$-\sum(v A)_e + \sum(v A)_s = 0 \quad \rightarrow \quad \sum(v A)_s = \sum(v A)_e$$

Unidades:

$$[v A] = \frac{m}{s} m^2 = \frac{m^3}{s}$$

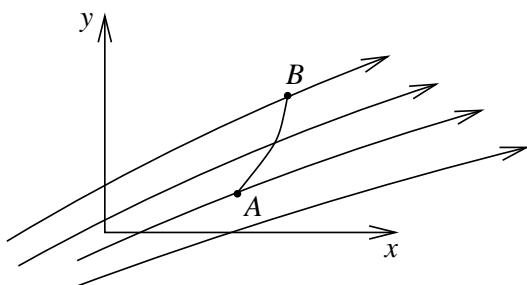


Figura 2.5: Vazão através de uma curva ligando duas linhas de corrente.

dado por:

$$\frac{\dot{m}}{L} = \int_A^B \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl.$$

O princípio de conservação da massa permite definir, para o caso de escoamentos bi-dimensionais, uma função corrente, a partir da qual pode-se determinar o campo de velocidades. O emprego da função corrente reduz o número de incógnitas e, consequentemente, o numero de equações do problema.

Consideremos um escoamento permanente e bi-dimensional ( $\partial/\partial z = 0$ ) entre duas linhas de corrente, conforme mostrado na Fig. 2.5. O fluxo de massa por unidade de altura na direção  $z$ , ao longo do arco  $AB$  é

As componentes do vetor  $\mathbf{n}$  são definidas a partir do vetor tangente à curva, de comprimento  $dl = (dx; dy)$ . O vetor perpendicular à tangente e orientado para fora da curva tem componentes  $(dy; -dx)$ . Para obtermos o vetor  $\mathbf{n}$ , de comprimento unitário, dividimos as componentes do vetor normal por seu comprimento,  $[(dy)^2 + (-dx)^2]^{1/2} = dl$ . O vetor normal à direção da curva e de comprimento unitário é definido portanto como:

$$\mathbf{n} = \frac{dy}{dl}\mathbf{i} - \frac{dx}{dl}\mathbf{j}.$$

Obtemos a seguinte expressão para a vazão por unidade de altura do canal:

$$\frac{\dot{m}}{L} = \int_A^B \rho(v_x; v_y) \cdot \left( \frac{dy}{dl}; -\frac{dx}{dl} \right) dl = \int_A^B \rho(v_x dy - v_y dx).$$

Cada linha de corrente pode ser caracterizada pela vazão entre a mesma e a origem. Este fluxo é a base da descrição de campos bi-dimensionais pelo método das linhas de corrente. Definimos a *Função Corrente* como sendo:

$$\Psi = \int_O^P \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl = \int_O^P \rho(v_x dy - v_y dx).$$

Outra definição da função corrente, aplicável a escoamentos com massa específica constante é:

$$\psi = \int_O^P (v_x dy - v_y dx).$$

Unidades:

$$[\Psi] = \frac{kg}{m^3} \frac{m}{s} m = \frac{kg}{ms} \quad [\psi] = \frac{m}{s} m = \frac{m^2}{s}$$

A vazão entre duas linhas de corrente será:

$$\Delta\psi = \psi_B - \psi_A$$

No limite de  $A \rightarrow B$ :

$$d\psi = v_x dy - v_y dx$$

Como as variações de  $\psi$  só dependem dos pontos inicial e final,  $d\psi$  pode ser considerada como uma diferencial total:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy$$

Comparando as duas últimas equações vemos que:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Substituindo a função corrente na equação da continuidade para o caso de escoamentos incompressíveis obtemos:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

o que mostra que a função corrente só existe em escoamentos tri-dimensionais se  $\partial v_z / \partial z = 0$ .

Consideremos o caso de coordenadas polares, conforme Fig. (2.6): a contribuição de  $v_r$  para a vazão total através do arco  $AB$  é dada por  $v_r r d\theta$ , ao passo que a contribuição de  $v_\theta$  é  $-v_\theta dr$ .

Vazão total:

$$\begin{aligned} d\psi &= v_r r d\theta - v_\theta dr \\ d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} v_r r = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &\longrightarrow v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ -v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} &\longrightarrow v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned}$$

Exemplo: A componente de velocidade  $v_x$  de um escoamento bi-dimensional incompressível é  $v_x = Ax^3 + By^2$ . Determinar a expressão de  $v_y$ . O escoamento é irrotacional? Determinar a forma da função corrente.

$$\begin{aligned} \text{Continuidade:} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} &= -3Ax^2 \quad \rightarrow \quad v_y = \int -3Ax^2 dy = -3Ax^2 y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Ax^3 + By^2 & -3Ax^2y & 0 \end{pmatrix} = \\ \left( \frac{\partial}{\partial x}(-3Ax^2y) - \frac{\partial}{\partial y}(Ax^3 + By^2) \right) \mathbf{k} &= -(6Axy + 2By)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Função corrente:

$$\psi = \int_0^P (v_x dy - v_y dx) = \int_0^y (Ax^3 + By^2) dy + \int_0^x 3Ax^2 y dx = 2Ax^3 y + \frac{B}{3} y^3$$

Exemplo: Um escoamento incompressível tem as seguintes componentes de velocidade:

$$v_r = \frac{A}{r} \quad v_\theta = \frac{A}{r} \quad v_z = 0$$

Mostrar que o escoamento satisfaz à equação da continuidade e deduzir a equação das linhas de corrente.

$$\begin{aligned} \text{Continuidade:} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0 \\ \text{Incompressível:} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

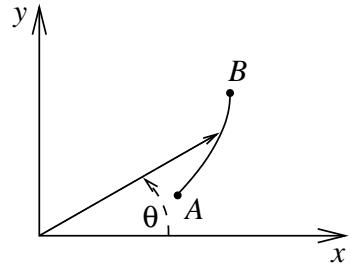


Figura 2.6: Cálculo da vazão através de uma curva ligando duas linhas de corrente, utilizando coordenadas cilíndricas.

Equação da continuidade em coordenadas polares:

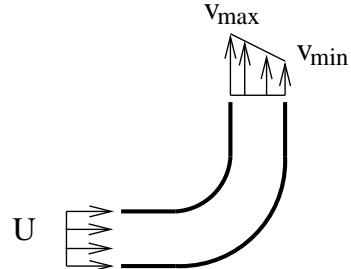
$$\begin{aligned}\rho \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \rho \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = v_r + r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{A}{r} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{A}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{A}{r} \right) = \left( \frac{A}{r} \right) - r \left( \frac{A}{r^2} \right) &= 0\end{aligned}$$

Função corrente:

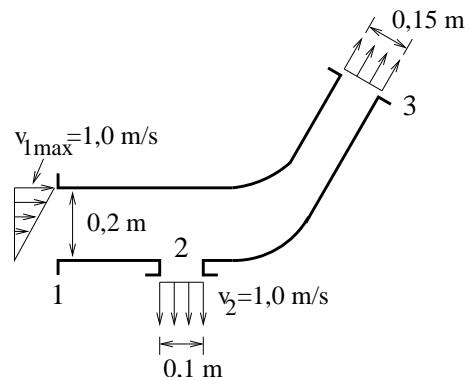
$$\begin{aligned}v_r = \frac{A}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &\rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = A \\ v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} &\rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{A}{r} \\ \psi = \int_0^P \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \psi}{\partial r} dr = \int_0^P A d\theta - A \frac{dr}{r} &\rightarrow \psi = A(\theta - \ln r)\end{aligned}$$

## 2.2 Problemas

- Água entra em um canal bi-dimensional de largura constante  $h = 100\text{ mm}$ , com velocidade uniforme  $U$ . O canal faz uma curva de  $90^\circ$ , que distorce o escoamento, de tal modo que o perfil de velocidades na saída tem a forma linear mostrada na figura ao lado, com  $v_{max} = 2,5 v_{min}$ . Determinar  $v_{max}$ , sabendo que  $U = 5\text{ m/s}$ .



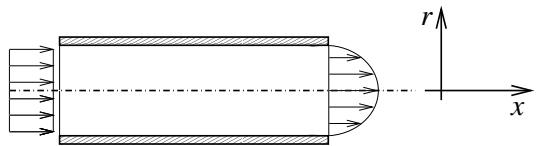
- Uma curva redutora de um conduto com seção transversal retangular opera conforme o esquema ao lado. O perfil de velocidades varia ao longo da entrada (seção 1) de forma linear e é uniforme nas seções 2 e 3. Determinar a magnitude e sentido da velocidade na seção 3.



- Água escoa em regime permanente através de um tubo de seção transversal circular e raio  $R = 3\text{ m}$ . Calcular a velocidade uniforme  $U$  na entrada do tubo, sabendo que a distribuição de velocidades na saída é dada por:

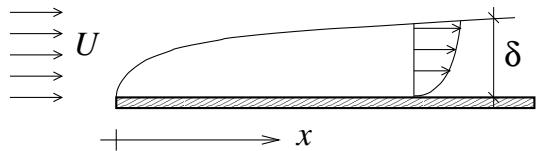
$$v_x = V_{max} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$V_{max} = 3 \text{ m/s}$$



4. Uma aproximação para a componente  $v_x$  da velocidade em uma camada-limite bi-dimensional, permanente e incompressível que se forma sobre uma placa plana é dada pela forma:

$$\frac{v_x}{U} = 2 \frac{y}{\delta} - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2$$



com  $v_x = 0$  na superfície da placa ( $y = 0$ ) e  $v_x = U$  em  $y = \delta$ , onde  $\delta = cx^{1/2}$  e  $c$  é uma constante. Obter uma expressão para  $v_y$ .

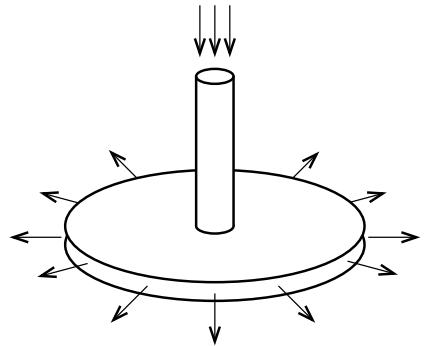
5. O campo de velocidades de um fluido é apresentado por  $\mathbf{v} = (Ax + B)\mathbf{i} + Cy\mathbf{j} + Dt\mathbf{k}$ , onde  $A = 2 \text{ s}^{-1}$ ,  $B = 4 \text{ ms}^{-1}$  e  $D = 5 \text{ ms}^{-2}$  e as coordenadas são medidas em metros. Pede-se:

- Sendo o escoamento incompressível, determinar o valor de  $C$ ;
- Calcular a aceleração de uma partícula que passe pelo ponto  $(x, y) = (3, 2)$ .

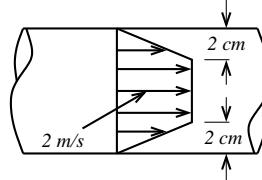
6. Verificar se os campos de velocidade abaixo correspondem a fluidos compressíveis ou não:

- $\mathbf{v} = (y \ln x + 3xy^2 - xz^2)\mathbf{i} - (y^2/(2x) + y^3)\mathbf{j} + z^3/3\mathbf{k}$
- $\mathbf{v} = x \sin y \mathbf{i} + y \cos x \mathbf{j}$

7. Água ( $\rho = 995 \text{ kg/m}^3$ ) escoa em um tubo vertical de raio  $R_1 = 25 \text{ mm}$ , com velocidade de  $6 \text{ m/s}$ . O tubo é conectado ao espaço compreendido entre duas placas paralelas, espaçadas de  $5 \text{ mm}$  entre si. Nesta região, a água escoa radialmente. Calcular a velocidade do escoamento em um raio  $R_2 = 60 \text{ mm}$ .



8. Água ( $\rho = 995 \text{ kg/m}^3$ ) escoa em um tubo de diâmetro  $d = 80 \text{ mm}$ , com perfil de velocidades conforme mostrado na figura ao lado. Calcular a vazão em massa e o fluxo de quantidade de movimento através de uma seção transversal do tubo.



9. A componente tangencial de um escoamento incompressível com simetria axial é dada por:

$$v_\theta = \left( 10 + \frac{40}{r^3} \right) \sin \theta$$

Determinar  $v_r(r, \theta)$  e  $\text{rot } \mathbf{v}$  sabendo que  $v_r(2, \theta) = 0$ . O operador rotacional é dado pela expressão abaixo, em coordenadas cilíndricas:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z$$

10. Um fluido incompressível com massa específica  $\rho$  escoa em regime permanente, em um tubo de raio  $R$ . O perfil de velocidades é dado por:

$$v_z(r) = \frac{-dp/dz}{4\mu} (R^2 - r^2)$$

onde  $p = p(z)$  é a pressão na seção transversal de coordenada  $z$ ,  $dp/dz$ , uma constante e  $\mu$ , a viscosidade do fluido. Calcular os fluxos de massa, quantidade de movimento e energia cinética através da seção transversal do tubo.

11. Qual é a forma mais geral de um campo de velocidades com simetria esférica e puramente radial, isso é, quando  $v_r \neq 0$  e  $v_\theta = v_\phi = 0$ ?



# Capítulo 3

## A Quantidade de Movimento de um Meio Contínuo

### 3.1 Introdução

Este capítulo aborda as equações que resultam da aplicação do leis de Newton sobre a quantidade de movimento a um meio contínuo. As equações são obtidas em um referencial inercial, seguindo o mesmo procedimento adotado na obtenção das de conservação da massa: consideramos um volume de controle fixo no campo de velocidades de um fluido e estabelecemos uma equação integral aplicável a esse volume. A seguir obtemos a equação diferencial à qual a quantidade de movimento de uma partícula do meio obedece, utilizando o teorema de Gauss. A maior parte das deduções é feita usando a notação tensorial cartesiana, já utilizada no capítulo 2.

Para expressarmos as tensões que atuam na superfície de uma partícula de fluido necessitamos de uma *relação constitutiva*. Exemplo de relação constitutiva é a lei de Hook, que relaciona o estado de tensões em um sólido com o campo de deformações a que o mesmo está submetido. No caso de um fluido, o único tipo de tensões que o mesmo suporta em estado de repouso é o de compressível causado por efeito da pressão termodinâmica, definida como a média das tensões normais nas três direções. No entanto, por efeito da viscosidade, os fluidos em movimento suportam tensões de cisalhamento, paralelas à superfície, bem como de tração. O estado de tensões é afetado pelo movimento das camadas de fluido. Em muitos casos depende da taxa de deformação de uma partícula de fluido. Estudamos algumas propriedades do tensor de tensões e o caso de fluidos newtonianos, que abrange a maior parte dos fluidos de interesse na engenharia. No caso de fluidos newtonianos obtém-se a equação de Navier-Stokes. Caso particular das equações obtidas ocorre quando a viscosidade do fluido pode ser desprezada. Para esse caso, obtemos as equações de Euler e de Bernoulli.

O equacionamento das leis da quantidade de movimento, tal como aqui apresentado, aplica-se à determinação do estado de tensões em sólidos. Sólidos e fluidos diferenciam-se apenas pela equação constitutiva, que exprime as tensões em função de gradientes de deformação, no primeiro caso e do gradiente de velocidades no segundo. Dada a proximidade entre os dois problemas, apresentamos brevemente as equações fundamentais que regem a distribuição de tensões em sólidos, tratamos do caso de pequenas deformações e da equação

constitutiva de sólidos elásticos, isotrópicos ou não. Finalmente, abordamos o caso de fluidos em repouso, isso é a hidrostática.

Consideremos inicialmente a variação da quantidade de movimento de um corpo rígido apoiado sobre uma superfície horizontal. A taxa de variação de uma componente genérica da quantidade de movimento é dada por:

$$m \frac{dv_i}{dt} = \sum F_i$$

Na direção vertical:

$$F_z = -mg + F_v = 0$$

Distinguimos dois tipos de forças na expressão acima: o peso, que é uma força de *volume*, aplicada à distância, sem contato direto do corpo que a aplica e a reação da superfície horizontal, que é uma força de *superfície*, aplicada por contato.

Na direção horizontal, temos:

$$\begin{aligned} F_x &= F - \mu mg \quad (F > \mu mg) \\ \frac{d}{dt}(mv_x) &= F - \mu mg \end{aligned}$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de atrito entre o corpo e a superfície e  $F$ , a resultante das forças na direção, excetuando-se a de atrito. O exemplo acima ilustra o caso de um corpo sólido, em que a taxa de variação da quantidade de movimento é igual à resultante das forças aplicadas.

## 3.2 Equação da Quantidade de Movimento de um Meio Contínuo

Consideremos agora um volume fixo no campo de velocidades de um fluido. A taxa de variação da quantidade de movimento deste volume deve incluir, além da resultante das forças aplicadas, o balanço do fluxo de quantidade de movimento através das paredes do volume [43, 38, 5, 3, 56, 20, 63]. Esquematicamente (ver Fig. 3.1):

$$\left( \begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação de quantidade de} \\ \text{movimento dentro do volume de con-} \\ \text{trole, isto é, variação da quantidade de} \\ \text{movimento dentro do volume por uni-} \\ \text{dade tempo} \end{array} \right) = - \left( \begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de quantidade de} \\ \text{movimento para fora do volume} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Resultante das forças aplicadas à} \\ \text{superfície de controle} \end{array} \right) + (\text{Resultante das forças de volume}) \quad (3.1)$$

Expressemos cada uma das parcelas acima em forma matemática. A taxa de acumulação da componente na direção genérica na direção do vetor unitário  $e_i$ , da quantidade de movimento dentro do volume de controle é dada por:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) dV$$

Vimos no capítulo 2, que o fluxo de massa através de um elemento de área  $dA$  da superfície de controle é dado por  $\rho v_j n_j dA$ . Esse termo expressa a quantidade de massa que cruza o elemento de área por unidade de tempo. Se o multiplicarmos pela componente na direção genérica  $i$  da quantidade de movimento por unidade de massa, isso é, pela componente do vetor velocidade nessa direção, teremos uma expressão para o fluxo daquela componente da quantidade de movimento que cruza o elemento de área:  $\rho v_i v_j n_j dA$ . Integrando esse termo ao longo de toda a superfície de controle teremos o fluxo líquido dessa componente da quantidade de movimento para fora da superfície de controle:

$$\oint_S \rho v_i v_j n_j dA$$

No que se refere à forças que atuam na superfície do elemento fazemos as seguintes hipóteses:

1. Admitimos que possam ser expressas como uma combinação linear das componentes do vetor elemento de área,  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$ . Sendo a força proporcional a uma combinação linear desses três vetores, não tem, de forma geral, a direção do vetor normal. (ver também Apêndice B);
2. O fator de proporcionalidade acima mencionado é a área do elemento de superfície à qual a força é aplicada, isso é, admitimos que a magnitude da força é proporcional à área do elemento.

Com base nas hipóteses acima representamos a força atuando sobre o elemento de área por:

$$d\mathbf{F} = \sigma \mathbf{n} dA.$$

Como  $d\mathbf{F}$  e  $\mathbf{n}$  não tem, de forma geral a mesma direção é necessário que  $\sigma$  seja um tensor de segunda ordem, de modo que, aplicado ao vetor  $\mathbf{n}$  resulte em um vetor com outra direção.

Sendo a área um objeto vetorial, os elementos de área da superfície de controle podem ser projetados nas direções dos eixos de coordenadas. Assim, a força que age na direção  $x$  de um elemento de área se expressa como:

$$dF_x = (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z) dA, \quad (3.2)$$

onde  $n_x dA$ ,  $n_y dA$ ,  $n_z dA$  são as projeções da área elementar na direção de cada um dos eixos. Na direção genérica, do eixo  $x_i$ :

$$dF_i = \sigma_{ij} n_j dA, \quad (3.3)$$

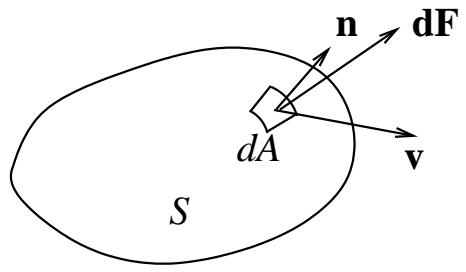


Figura 3.1: Volume de controle ao qual se aplicam as leis da quantidade de movimento.  $\mathbf{n}$  é o vetor de comprimento unitário perpendicular à superfície no elemento de área considerado,  $\mathbf{v}$ , a velocidade do fluido nesse ponto e  $d\mathbf{F}$ , a força de superfície agindo no mesmo.

onde  $\sigma$  pode ser representado, em um dado referencial, por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

As Eqs. (3.2) e (3.3) estão baseadas na hipótese de que a força agindo sobre o elemento de área se expressam como uma combinação linear das projeções do vetor unitário  $\mathbf{n}$ . E, sendo esse vetor multiplicado por um tensor de segunda ordem, o vetor força resultante não tem necessariamente a direção normal à superfície, o que ocorre quando a partícula do meio está sujeita a tensões de cisalhamento.

A resultante das forças que atuam sobre a superfície de controle é obtida pela integração da Eq. (3.2) ao longo daquela:

$$F_i = \oint_S \sigma_{ij} n_j dA \quad (3.5)$$

Por fim, a resultante das forças de volume é dada por:

$$\int_V \rho g_i dV$$

Reagrupando os quatro termos obtemos a forma integral da equação de conservação da quantidade de movimento:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dV = - \oint_S \rho v_i v_j n_j dA + \oint_S \sigma_{ij} n_j dA + \int_V \rho g_i dV \quad (3.6)$$

Em notação vetorial:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \oint_S \sigma \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (3.7)$$

O passo seguinte consiste em transformar as integrais de superfície em integrais de volume por intermédio do teorema de Gauss, de forma a que possamos obter a equação de conservação da quantidade de movimento na forma diferencial. Observamos que o termo  $\rho v_i v_j$  representa o elemento geral de um tensor de segunda ordem. O divergente desse tensor é obtido da mesma forma que o do tensor de tensões (ver apêndice B). Reescrevendo a Eq. (3.6) com todos os termos na forma de integrais de volume, temos para a taxa de variação da quantidade de movimento na direção  $x_i$  dentro do volume de controle:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dV = - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho g_i dV$$

Essa equação deve ser válida para volumes de controle de qualquer dimensão, inclusive para volumes infinitesimais. Considerando um volume infinitesimal e dividindo a equação resultante por  $dV$  encontramos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i$$

Reagrupando os termos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i. \quad (3.8)$$

Na forma vetorial:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}$$

O membro esquerdo da Eq. (3.8) simplifica-se conforme abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = \\ \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) v_i + v_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) &= \rho \frac{D v_i}{D t} + v_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

A expressão que se encontra dentro do último par de parênteses acima é igual a zero pela equação da continuidade (Eq. 2.9). A Eq. (3.8) toma portanto, a forma:

$$\frac{D v_i}{D t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + g_i \quad (3.9)$$

Na forma vetorial:

$$\frac{D \mathbf{v}}{D t} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g}$$

### 3.3 Propriedades do Tensor de Tensões

#### 3.3.1 Mudança de sentido das tensões atuando sobre faces opostas dos elementos do meio contínuo

Sem perda de generalidade, consideremos o estado de tensões bidimensional mais comumente encontrado, atuando sobre um elemento de um meio contínuo. As tensões aplicadas encontram-se representadas na Fig. 3.2. O estado de tensões compreende as normais às faces do elemento e as de cisalhamento. Caso o elemento seja tracionado em uma das faces, no caso mais comumente encontrado é também tracionado na face oposta. Caso seja comprimido, é em geral comprimido na face oposta. Situação semelhante ocorre com as tensões de cisalhamento: as tensões atuando na mesma direção em faces opostas tem, em geral, sentido oposto.

Cabe notar que as componentes  $\sigma_{ij}$  do tensor de tensões são consideradas suficientemente regulares para que possam ser derivadas. Não obstante, as forças por unidade de área (tensões) em cada direção, que agem em faces opostas, têm, de forma geral, sentidos opostos, conforme discutido acima. Essa alterância de sentido em distâncias infinitesimais que caracterizam as dimensões de um elemento do meio contínuo não é incompatível com a condição de continuidade e de diferenciabilidade das componentes do tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ . Formalmente, a propriedade de inversão do sentido entre as forças por unidade de área em cada direção, agindo em faces opostas, é obtida multiplicando-se o tensor de tensões pelo vetor normal, que tem sentidos opostos em faces opostas.

A Fig. 3.2 ressalta então que as tensões agindo nas faces de um elemento do contínuo são parcelas do resultado da ação do tensor de tensões sobre a normal e não apenas as componentes do tensor, cujo sinal não se inverte entre faces opostas. É comum a literatura indicar as tensões agindo sobre um elemento do meio como as componentes do tensor, omitindo o produto por componente da normal. Por ser essa a forma comumente adotada na literatura optamos por incluir as componentes da normal na Fig. 3.2 e em não inclui-las na Fig. B.2 do apêndice B, onde discutimos o divergente de um tensor de segunda ordem.

Ressaltamos ainda que a possibilidade da existência de estados de tensão com o mesmo sentido em faces opostas não é excluída. Notando que, por exemplo:

$$\sigma_{xy+dy} = \sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy,$$

vemos que, para que isso ocorra é necessário que  $\tau_{xy}$  tenha valor suficientemente próximo de zero para que o acréscimo  $(\partial \sigma_{xy}/\partial y) dy$  resulte em componentes  $\sigma_{xy}$  e  $\sigma_{xy+dy}$  com sinais opostos.

### 3.3.2 Tensões em superfícies com orientação arbitrária: o tetraedro de Cauchy

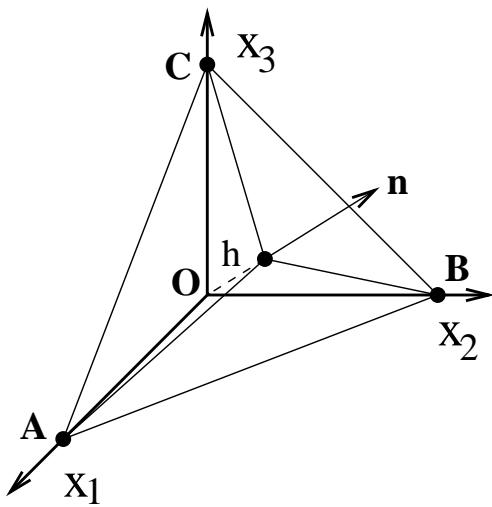


Figura 3.3: O tetraedro de Cauchy.

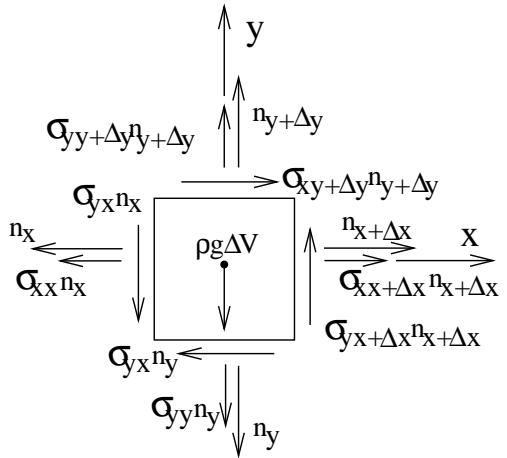


Figura 3.2: Forças por unidade de área (tensões) agindo sobre um elemento do meio contínuo. As diversas componentes da tensão são obtidas da aplicação do tensor de tensões sobre o vetor normal, não sendo portanto apenas as componentes do tensor. As tensões normais à superfície não dão origem a momento, por passar a linha de ação das mesmas pelo centro de massa do elemento.

Consideremos um elemento do meio contínuo constituído pelo tetraedro representado na Fig. 3.3. Expressemos as componentes nas direções dos três eixos de coordenadas, da tensão que atua sobre a superfície definida pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , em função das componentes nas três direções, das tensões atuando nas faces  $OCB$  (face  $x_1$ ),  $OAC$  (face  $x_2$ ) e  $OAB$  (face  $x_3$ ).

Sejam  $T$ , de componentes  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$ , a tensão (força por unidade de área) agindo na face  $ABC$ . Sejam  $\Delta A$  a área da face,  $h$  a altura do tetraedro, medida a partir da face  $ABC$ ,  $\rho$  a massa específica do meio,  $F_c$  a força de campo por unidade de massa atuando sobre o elemento e  $\mathbf{a}$ , a aceleração a que

está sujeito. Designamos a área do triângulo  $OBC$  como  $\Delta A_1$ , a do triângulo  $OAC$  como  $\Delta A_2$  e a do triângulo  $OAB$  como  $\Delta A_3$ . Essas áreas são as projeções da área do triângulo  $ABC$  nos planos dos três outros triângulos, respectivamente. As projeções são dadas por:

$$\begin{aligned}\Delta A_1 &= \Delta A \cos \theta_1 = \Delta A n_1 \\ \Delta A_2 &= \Delta A \cos \theta_2 = \Delta A n_2 \\ \Delta A_3 &= \Delta A \cos \theta_3 = \Delta A n_3\end{aligned}$$

onde  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  são os ângulos entre o vetor  $\mathbf{n}$ , normal à superfície  $ABC$  e as direções 1, 2 e 3, respectivamente.

Aplicando a lei de Newton ao tetraedro ao elemento do meio delimitado pelo tetraedro de Cauchy escrevemos:

$$\frac{1}{3} \rho h \Delta A \mathbf{a} = \frac{1}{3} \rho h \Delta A \mathbf{F}_c + \sum \mathbf{F}_s, \quad (3.10)$$

onde  $\mathbf{F}_s$  é a força de superfície aplicada ao tetraedro. Admitindo que as componentes da tensão na direção de cada eixo de coordenadas, mas em faces opostas, tenham sentidos opostos temos para a direção do eixo  $x_1$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \rho h \Delta A a_x &= F_1 \frac{1}{3} \rho h \Delta A + T_1 \Delta S - \sigma_{11} \Delta A_1 - \sigma_{12} \Delta A_2 - \sigma_{13} \Delta A_3 = \\ &= F_1 \frac{1}{3} \rho h \Delta A + T_1 \Delta A - \sigma_{11} n_1 \Delta A - \sigma_{12} n_2 \Delta A - \sigma_{13} n_3 \Delta A,\end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $F_1$  é a componente na direção do eixo  $x_1$  da força de campo por unidade de massa e  $h$ , a altura do tetraedro. Dividindo a equação por  $\Delta A$  obtemos:

$$\frac{1}{3} \rho h a_x = F_1 \frac{1}{3} \rho h + T_1 - \sigma_{11} n_1 - \sigma_{12} n_2 - \sigma_{13} n_3.$$

Aplicando a equação acima ao caso limite em que as dimensões do tetraedro de Cauchy tendem a zero o mesmo ocorre com a altura  $h$ . O termo do lado esquerdo da equação e o primeiro termo do membro direito tendem também a zero. Obtemos:

$$T_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3.$$

De forma análoga obtemos para as tensões atuando nas direções dos eixos  $x_2$  e  $x_3$ :

$$\begin{aligned}T_2 &= \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 \\ T_3 &= \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3.\end{aligned}$$

De forma geral:

$$T_j = \sigma_{ij} n_j.$$

A equação acima permite determinar as tensões atuando em uma superfície de direção especificada, conhecidas as tensões nas três direções, em três faces ortogonais. A força atuando na mesma superfície é obtida multiplicando-se a equação acima pela área  $dA$ , do triângulo delimitado pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Obtém-se:

$$dF_i = T_j dA = \sigma_{ij} n_j dA,$$

qua é a mesma Eq. 3.3, acima obtida.

### 3.3.3 Simetria do tensor de tensões

Motremos que o tensor de tensões  $\sigma$  é simétrico, isso é  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . As tensões que agem sobre um elemento do meio contínuo na direção  $x$  são mostradas na Fig. 3.2. A propriedade de simetria decorre da aplicação da lei de Newton referente à quantidade de movimento angular de uma partícula do meio. A lei estabelece que a taxa de variação da quantidade de movimento angular de uma partícula é igual à resultante dos momentos aplicados:

$$\mathbf{M} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt},$$

onde  $\boldsymbol{\omega}$  é a velocidade angular da partícula e  $I$ , seu momento de inércia.

Consideramos um elemento de fluido, conforme a Fig. (3.2) e calculamos o momento aplicado ao mesmo. As componentes do tensor de tensões perpendiculares a cada face e o peso não produzem momento, poise estão alinhadas com o centro de massa do elemento. Portanto, apenas as forças devidas à tensões de cisalhamento podem dar origem a momento. Levando em conta que as tensões em faces opostas de um elemento do meio diferem pouco expressamos o torque aplicado à partícula na direção  $z$ , devido às tensões nas duas faces na perpendiculares à direção  $x$  e nas duas faces perpendiculares à direção  $y$  por:

$$\begin{aligned} M_z &= I_z \dot{\omega}_z \mathbf{e}_z = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_z = \\ &\left( \frac{dy}{2} \sigma_{xy} n_y - \frac{dy}{2} \sigma_{xy+\Delta y} n_{y+\Delta y} \right) dx dz + \left( \frac{dx}{2} \sigma_{yx+\Delta x} n_{x+\Delta x} - \frac{dx}{2} \sigma_{yx} n_x \right) dy dz = \\ &\left( \frac{dy}{2} \sigma_{xy} (-1) - \frac{dy}{2} \sigma_{xy+\Delta y} (+1) \right) dx dz + \left( \frac{dx}{2} \sigma_{yx+\Delta x} (+1) - \frac{dx}{2} \sigma_{yx} (-1) \right) dy dz. \end{aligned}$$

onde  $I_z$  é o momento de inércia em torno do eixo  $z$  que passa pelo centro de massa da partícula e  $\omega_z$ , a componente da velocidade angular na direção  $z$ . Levando em conta que:

$$\sigma_{xy+dy} = \sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} d \approx \sigma_{xy},$$

o mesmo valendo para as demais componentes do tensor de tensões, podemos escrever a equação acima como:

$$M_z = I_z \dot{\omega}_z = \left( -\frac{dy}{2} \sigma_{xy} - \frac{dy}{2} \sigma_{xy} \right) dx dz + \left( \frac{dx}{2} \sigma_{yx} + \frac{dx}{2} \sigma_{yx} \right) dy dz = (\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) dV,$$

onde  $dV = dx dy dz$ .

A massa do elemento de fluido é proporcional a  $dx^3$ , enquanto que seu momento de inércia é proporcional a  $dx^5$ . O fator  $I_z$  é portanto duas ordens de grandeza inferior ao termo  $dV$ , que multiplica  $(\sigma_{yx} - \sigma_{xy})$ . Para que a equação acima seja satisfeita é necessário portanto que o termo  $(\sigma_{yx} - \sigma_{xy})$  seja da ordem de  $dx^2$ , o que exige que  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ . O mesmo raciocínio aplicado ao momento resultante das demais componentes de cisalhamento do tensor de tensões, o que implica na simetria do tensor de tensões,  $\sigma$ . Cabe observar que os argumentos acima expostos, que mostram a simetria do tensor não fazem nenhuma hipótese sobre como se desenvolvem as tensões que agem sobre o elemento do contínuo. As tensões podem se originar do deslizamento de camadas adjacentes de fluidos ou de sólidos. O tensor de tensões que agem em sólidos ou fluidos é simétrico.

## 3.4 Outras Propriedades do Tensor de Tensões

Com frequência, é necessário representar as componentes do tensor de tensões, em um novo referencial. A relação entre as componentes do tensor em dois referenciais é dada por [25]:

$$\sigma'_{kl} = a_{ki} a_{lj} \sigma_{ij}$$

onde  $a_{kl}$  representa o cosseno do ângulo entre os eixos  $x'_k$  e  $x_l$ :  $a_{kl} = \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_l$ . Um sistema de coordenadas de especial interesse é o definido pelos *eixos principais*. Esse referencial caracteriza-se pela inexistência de tensões de cisalhamento nas faces perpendiculares às três direções principais. A tensão  $T_i$ , atuando em direção principal é perpendicular à face do elemento e dada por:

$$T_i = \sigma_{ij} n_j = \sigma \delta_{ij} n_j$$

onde  $\sigma$  é o valor algérico da resultante das tensões atuando na direção normal à face. As direções principais são as dos autovetores  $\mathbf{n}$  de  $\boldsymbol{\sigma}$ , cujas componentes  $n_j$  satisfazem à equação:

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = z_i$$

onde  $z_i$  é o elemento geral do vetor nulo. Pode-se interpretar o valor algébrico  $\sigma$  como um dos autovalores do operador linear que representa o tensor de tensões  $\boldsymbol{\sigma}$ . Os autovalores  $\sigma$  são as raízes da equação característica:

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}) = 0$$

A equação característica é dada, no caso de matrizes  $3 \times 3$ , por:

$$\sigma^3 - 3I\sigma^2 - II\sigma - III = 0$$

Os números  $I$ ,  $II$  e  $III$  são os três *invariante*s do tensor de tensões  $\boldsymbol{\sigma}$ , que não dependem do referencial e são dados por (ver Vol. II dessa obra).

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{jj} \\ II &= \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \sigma_{ij} - \sigma_{ii} \sigma_{jj}) \\ III &= \det \boldsymbol{\sigma} \end{aligned}$$

Como o operador  $\boldsymbol{\sigma}$  é simétrico, seus autovalores são reais e seus autovetores, perpendiculares entre si. Os autovalores  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as tensões principais e um deles assume o valor máximo. Em seções cujo vetor normal forma um ângulo de  $45^\circ$  com as direções principais, uma das tensões de cisalhamento  $\tau$  atinge o valor máximo. As tensões de cisalhamento nessas direções são dadas por:

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Outro referencial de importância no estudo da distribuição de tensões em sólidos é o *octaedrico*. Esse referencial caracteriza-se por eixos que formam o mesmo ângulo com as direções principais. As tensões normal,  $\sigma_{oct}$  e de cisalhamento,  $\tau_{oct}$  são dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma_{oct} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_{ii}}{3} \\ \tau_{oct} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}\end{aligned}$$

A tensão  $\sigma_{oct}$  pode ser interpretada como o valor médio  $\sigma_m$ , das tensões normais agindo ao longo de três direções diferentes.

### 3.5 Decomposição do Tensor de Tensões: Pressão e Tensor Desviatório

Decompomos o tensor de tensões  $\sigma$  na soma de dois outros, o primeiro representado por uma matriz cujos elementos da diagonal principal são idênticos, de valor  $\text{tr } \sigma / 3$  e cujos elementos fora da diagonal principal são iguais a zero. Representamos os elementos do segundo tensor da decomposição por  $\tau_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (3.12)$$

Em notação vetorial:

$$\sigma = \frac{1}{3} \text{tr } \sigma \mathbf{1} + \tau$$

onde  $\mathbf{1}$  é o tensor identidade. O tensor  $(\text{tr } \sigma / 3) \mathbf{1}$  tem as seguintes propriedades:

1.  $\text{tr } \sigma / 3$  é o valor médio das tensões normais agindo nas faces perpendiculares às três direções do referencial utilizado;
2. Como o tensor  $\mathbf{1}$ , aplicado ao vetor  $\mathbf{n}$  (e a qualquer outro vetor) resulta no mesmo vetor sobre o qual atua, a força:

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{3} \sigma \mathbf{n} dA$$

tem a mesma direção que  $\mathbf{n}$ , isso é, é perpendicular ao elemento de área;

3. Sendo o traço um invariante de  $\sigma$  e o tensor identidade representado pela mesma matriz em qualquer referencial a força gerada por  $\text{tr } \sigma \mathbf{1} / 3$  tem o mesmo valor algébrico em qualquer direção e é sempre perpendicular à superfície do elemento.

Definimos então o escalar pressão como:

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr } \sigma$$

e o tensor de segunda ordem pressão como o de componentes:

$$P_{ij} = -\frac{1}{3} \operatorname{tr} \sigma \delta_{ij} = p \delta_{ij}.$$

Sendo o traço um invariante do tensor  $\sigma$  a força gerada pela pressão tem o mesmo valor em qualquer direção, é perpendicular à superfície e sentido contrário ao do vetor normal  $\mathbf{n}$ .

Definimos também o tensor desviatório, de componentes  $\tau_{ij}$  pela relação:

$$\tau_{ij} = p \delta_{ij} + \sigma_{ij}.$$

Decorre dessa definição que:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$$

e que o tensor  $\tau$  é simétrico. Seus invariantes são dados por:

$$I_\tau = 0 \quad (3.13)$$

$$II_\tau = \frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (3.14)$$

$$III_\tau = \frac{1}{3} \tau_{ij} \tau_{jk} \tau_{ki} \quad (3.15)$$

O tensor  $\tau$  recebe o nome de desviatório por abir a possibilidade da existência de tensões normais à superfície de valores diferentes em diferentes direções e por permitir que a força que atua na superfície do elemento tenha direção diferente da normal, isso é que contenha componentes de cisalhamento. No caso de fluidos, esse tensor contém as componentes das tensões viscosas.

Introduzindo as definições de pressão e do tensor desviatório na Eq. 3.8 obtemos:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (p \delta_{ij}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i. \quad (3.16)$$

Em notação vetorial:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(p \mathbf{1}) + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \tau + \mathbf{g}. \quad (3.17)$$

Desenvolvemos a seguir o termo  $\frac{\partial}{\partial x_j} (p \delta_{ij})$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (p \delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_1} (p \delta_{i1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (p \delta_{i2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (p \delta_{i3})$$

Como  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$  apenas o termo em que  $j$  toma o valor particular atribuído a  $i$  é diferente de zero, o que faz com que a soma acima se reduza a:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (p \delta_{ij}) = \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (3.18)$$

Mas  $\partial p / \partial x_i$  é uma das componentes de  $\mathbf{grad} p$ , o que nos permite escrever, em notação vetorial:

$$-\operatorname{div}(p \mathbf{1}) = -\mathbf{grad} p.$$

Levando o resultados obtido com a Eq. (3.18) à Eq. (3.16) obtemos:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i. \quad (3.19)$$

Em notação vetorial:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{g}. \quad (3.20)$$

Tabela 3.1: Formas da equação conservação da quantidade de movimento (coordenadas cartesianas).

Forma vetorial	Forma tensorial
$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{g}$	$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i$
$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{g}$	$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i$

Em coordenadas cilíndricas [3, 5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right] + g_r \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right] + g_\theta \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] + g_z \end{aligned} \quad (3.23)$$

Em coordenadas esféricas<sup>1</sup> [3, 5]:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta} \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right] + g_r \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot \theta}{r} \tau_{\phi\phi} \right] + g_\theta \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r} \cot \theta = -\frac{1}{\rho r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2 \cot \theta}{r} \tau_{\theta\phi} \right] + g_\phi \quad (3.26)$$

### 3.6 Equação de Euler

No caso de fluido com coeficiente de viscosidade nulo, a Eq. (3.20) reduz-se a:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathbf{g} \quad (3.27)$$

ou:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \quad (3.28)$$

que é a Equação de Euler (1775).

A equação de Euler pode ser reescrita sem a pressão, utilizando-se a seguinte identidade vetorial:

$$\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} = \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} \quad (3.29)$$

onde  $v^2/2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/2$  Combinando a Eqs. (3.20) e (3.29) obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + \mathbf{g}$$

Tomamos agora o rotacional da equação acima. Os termos que contém o operador gradiente se anulam pois  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$  (ver Apêndice B). O termo  $\mathbf{g}$  também se anula ao calcularmos o rotacional pois as derivadas de uma constante são iguais a zero. Temos então:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) \quad (3.30)$$

---

<sup>1</sup>Ver a definição do referencial em coordenadas esféricas na Fig. 2.3 (Pág.14).

## 3.7 Fluidos Newtonianos

### 3.7.1 A equação constitutiva de fluidos newtonianos

Vimos no capítulo 1, que a tensão de cisalhamento agindo entre camadas de fluido que deslizam uma sobre as outras podem ser escritas na forma  $\tau_{xy} = \mu \partial v_x / \partial y$ , onde  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade dinâmica (ou simplesmente a viscosidade dinâmica) do fluido. O termo  $\partial v_x / \partial y$  representa a taxa de deformação angular de um elemento de fluido transportado pelo fluido. Assim, podemos afirmar que a tensão de cisalhamento  $\tau_{xy}$  é proporcional à taxa de deformação angular de um elemento de fluido. Essa observação permite generalizar a expressão acima para o caso em que o fluido tem as duas componentes de velocidade,  $v_x$  e  $v_y$ . Neste caso, devemos levar em conta também a componente  $\partial v_y / \partial x$ , no cálculo da taxa de deformação angular de um elemento de fluido. Considerando a soma das duas contribuições, obtemos:

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (3.31)$$

De forma geral:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.32)$$

Essa é a forma da tensão de cisalhamento de um fluido incompressível. Trata-se de uma *relação constitutiva*. Fluidos para os quais a tensão de cisalhamento pode ser descrita na forma acima denominam-se *newtonianos*. Líquidos cuja estrutura molecular é relativamente simples obedecem em geral a essa relação. As tensões de cisalhamento agindo em líquidos com estrutura molecular mais complexa, em particular os que de cadeia molecular muito longa, em certas emulsões e em misturas, assim como em líquidos com comportamento elástico, não são descritas pela relação acima. Tais fluidos são encontrados com certa freqüência em problemas de engenharia química e de solidificação de materiais fundidos. Trataremos aqui somente de fluidos newtonianos.

Cabe ressaltar que ao escrevermos a expressão para a tensão de cisalhamento agindo na face  $x$ , na direção  $y$  obteremos:

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

que é idêntica à Eq. (3.31). O tensor de tensões  $\tau$  obedece ao requisito de simetria, discutido na Sec. (3.3.3).

A equação (3.34) pode ser generalizada para o caso de fluidos compressíveis. Consideramos uma esfera de um fluido compressível dilatando-se e se comprimindo sem alteração

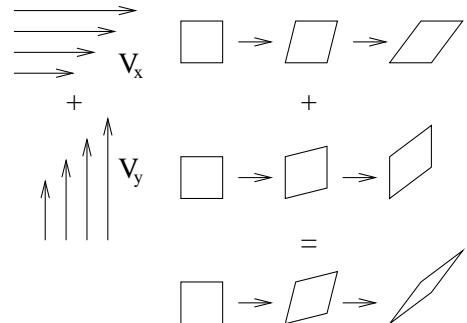


Figura 3.4: Deformação de um elemento de fluido em presença de um gradiente de velocidade.

de forma. Neste caso não há deslizamento entre camadas adjacentes e portanto não há tensões de cisalhamento paralelas à superfície de cada camada. O único tipo possível de tensão é o perpendicular à superfície do elemento de fluido.

Entretanto espera-se que o movimento pulsante se atenue, terminando por cessar inteiramente e que a atenuação seja tanto mais rápida quanto mais rapidamente a esfera pulsar. Este movimento implica em variação da massa específica da partícula, que pode ser expressa por  $1/\rho D\rho/Dt = -\operatorname{div} \mathbf{v}$ , de acordo com a equação da continuidade. A tensão normal resultante é proporcional a  $\operatorname{div} \mathbf{v}$ . Como foi visto no caso da pressão termodinâmica, para que a tensão seja perpendicular à superfície os elementos da diagonal principal do tensor de tensões devem ser iguais e os de fora da diagonal devem se anular. Assim, esse tipo de tensão normal deve ser da forma:

$$\lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \quad \text{ou:} \quad \lambda \mathbf{I} \operatorname{div} \mathbf{v}$$

Levando a expressão do termo viscoso devido à variação volumétrica à Eq.(3.34) obtemos a equação constitutiva do tensor de tensões de um fluido newtoniano compressível em sua forma mais geral[43, 56]:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_m}{\partial x_m}. \quad (3.33)$$

O coeficiente  $\lambda$  denomina-se coeficiente de segunda viscosidade (ou segunda viscosidade, de forma abreviada). Observamos que a primeira derivada dentro dos parênteses da equação acima é o termo geral do tensor de segunda ordem  $\operatorname{grad} \mathbf{v}$ . O termo da forma  $a_{ij}$ . A segunda derivada é da forma  $a_{ji}$ , isso é, trata-se do tensor transposto do gradiente da velocidade. A Eq. (3.33), escrita em notação vetorial é portanto:

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \mathbf{I} \operatorname{div} \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}).$$

### 3.7.2 A hipótese de Stokes – fluidos newtonianos

Para o caso de um fluido newtoniano, definimos a pressão hidrostática  $p_H$ , como o valor residual das tensões normais aplicadas em qualquer direção do elemento de fluido, que se mantém mesmo quando não há movimento do fluido. O tensor associado à pressão hidrostática é então dado por  $p_H \delta_{ij}$ . Nessas condições, O elemento geral do tensor de tensões  $\sigma$ , de fluidos newtonianos compressíveis compreende então os termos referentes à pressão hidrostática, às tensões viscosas normais e de cisalhamento existentes na ausência de efeitos de compressibilidade e às tensões viscosas que surgem na presença de efeitos de compressibilidade toma então a forma::

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_m}{\partial x_m}. \quad (3.34)$$

Determinemos então as condições para que a pressão hidrostática atuando em um elemento de fluido newtoniano seja igual a  $\bar{p} = -\operatorname{tr} \sigma / 3$ . A grandeza  $\bar{p}$  é portanto o negativo da média

Tabela 3.2: O tensor de tensões de fluidos newtonianos – coordenadas cilíndricas e esféricas [3, 5]

Coordenadas cilíndricas	Coordenadas esféricas <sup>2</sup>
$\tau_{rr} = \mu \left( 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right)$	$\tau_{rr} = \mu \left( 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right)$
$\tau_{\theta\theta} = \mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right]$	$\tau_{\theta\theta} = \mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right]$
$\tau_{zz} = \mu \left( 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right)$	$\tau_{\phi\phi} = \mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right]$
$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$	$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$
$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)$	$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = \mu \left[ \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\phi}{\operatorname{sen} \theta} \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right]$
$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)$	$\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} = \mu \left( \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\phi}{r} \right)$
$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 v_r + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$

das tensões normais atuando no elemento. Temos então:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{1}{3} \operatorname{tr} \sigma = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ &= \frac{\delta_{ij}}{3} \left[ p_h \delta_{ij} - \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} - \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = p_h - \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial v_m}{\partial x_m}. \end{aligned}$$

Vê-se que a pressão, definida como a média das tensões normais atuando nas faces perpendiculares às três direções do referencial adotado, esteja o fluido em movimento ou não, é igual à pressão hidrostática acima definida se pelo menos uma das duas condições abaixo for satisfeita:

1. O fluido é incompressível;
2.  $\lambda + \frac{2}{3} \mu = 0$ .

---

<sup>2</sup>Ver a definição do referencial em coordenadas esféricas na Fig. 2.3 (Pág.14).

Os coeficientes de viscosidade  $\mu$  e  $\lambda$  não guardem, em princípio, relação entre si [43]. Através de argumentos termodinâmicos mostra-se que  $\mu$  e  $\lambda + 2/3\mu$  não podem assumir valores negativos [18]. Stokes formulou a hipótese de que [56]:

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0, \quad (3.35)$$

A hipótese é confirmada por numerosos experimentos [56], embora não seja válida de forma geral [18]. Nas condições em que a hipótese de Stokes se aplica as tensões normais às faces de um elemento do meio são dadas, em coordenadas cartesianas, por [56]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \sigma_y &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \sigma_z &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

e a pressão, definida como a média das tensões normais atuando nas faces perpendiculares às direções dos três eixos de coordenadas, coincide com a pressão hidrostática.

## 3.8 O Caso de Sólidos

A Eq. 3.9 mostra que a aceleração a qual uma partícula do meio contínuo está submetida é proporcional ao divergente do tensor de tensões, acrescida da aceleração da gravidade. No caso de sólidos as acelerações são freqüentemente iguais a zero. A Eq. 3.9 simplifica-se e toma a forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + g_i = 0 \quad (3.36)$$

Assim como no caso de fluidos, a matriz  $\boldsymbol{\sigma}$ , de elemento geral  $\sigma_{ij}$ , é simétrica para que a resultante de momentos aplicados ao elemento de volume seja nula. Introduzimos a definição:

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad \text{ou:} \quad \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

onde  $\mathbf{t}$  é a tensão, ou força por unidade de área, atuando em uma seção do sólido e  $t_i$ , sua componente geral.

### 3.8.1 O círculo de Mohr

O estado de tensões em uma face perpendicular a uma direção especificada é caracterizado pelo valor algébrico  $\sigma$  da tensão normal e pela resultante das tensões de cisalhamento. Esse estado de tensões pode ser representado em um gráfico  $\sigma \times \tau$ . O módulo da resultante das tensões que atuam em uma seção de direção arbitrária, em um ponto dado do sólido,

é determinado por  $\sigma^2 + \tau^2$ . Expressamos o quadrado do módulo da tensão resultante em função das tensões principais,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , que atuam no ponto considerado:

$$\sigma^2 + \tau^2 = t_i t_i = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

Quanto ao valor algébrico da tensão normal na direção especificada, é dado por:

$$\sigma = t_i n_i = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

Substituindo as expressões de  $\sigma^2 + \tau^2$  e de  $\sigma$  no lado direito da identidade:

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 = -\sigma (\sigma_2 + \sigma_3) + \left( \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + (\sigma^2 + \tau^2)$$

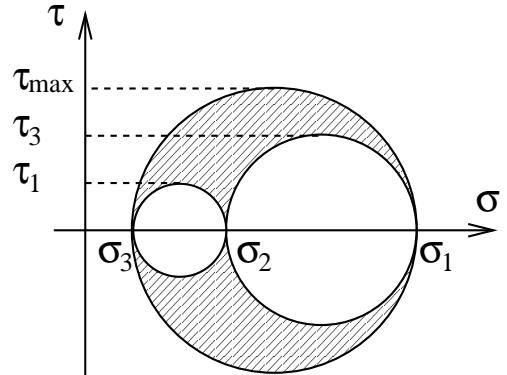
e levando em conta que  $n_i n_i = 1$  obtemos:

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 = n_1^2 (\sigma_1 - \sigma_2) (\sigma_1 - \sigma_3) + \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (3.37)$$

que é a equação de uma circunferência com centro em  $\sigma = (\sigma_2 + \sigma_3)/2$ ,  $\tau = 0$  e raio dependendo de  $n_1$ . Ordenando as tensões principais de modo que  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  vê-se que o raio mínimo do círculo ocorre quando  $n_1 = 0$ . Nessa condição, o valor máximo da tensão de cisalhamento é  $\tau_1 = (\sigma_2 - \sigma_3)/2$ . O círculo de maior raio ocorre quando  $n_1 = 1$ . Obtemos:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) (\sigma_1 - \sigma_3) + \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 = \left( \sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2$$

o que mostra que o valor máximo da tensão de cisalhamento é  $\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_3)/2$ . Duas outras equações análogas à Eq. 3.37 podem ser obtidas de modo a expressar o raio do círculo de Mohr em função das componentes  $n_2$  e  $n_3$  da normal. Os resultados se encontram representados na Fig. 3.5, onde se observa que os possíveis pontos de tensão  $(\sigma, \tau)$  a que o sólido está submetido se encontram dentro da região hachurada.



### 3.8.2 O tensor de pequenas deformações

Figura 3.5: O círculo de Mohr.

A cinemática de um corpo deformável é descrita normalmente, em termos do vetor deslocamento de um ponto e do tensor de deformações. Consideramos um ponto  $P$ , cuja posição inicial, antes do corpo se deformar, é definida pelo vetor de componentes  $X_i$ , como mostrado na Fig. 3.6. Um ponto  $Q$ , localizado inicialmente a uma pequena distância  $dS$  de  $P$ , tem coordenadas  $X_i + dX_i$ . Os pontos  $P$  e  $Q$  sofrem pequenos deslocamentos e movem-se para  $P'$  e  $Q'$ , respectivamente, ao fim de um intervalo de tempo, sob efeito do carregamento a

que o corpo é submetido. Denotamos as coordenadas de  $P'$  e de  $Q'$  por  $x_i$  e  $x_i + dx_i$ , respectivamente. A distância entre  $P'$  e  $Q'$  é  $ds$ . A mudança de posição  $P \rightarrow P'$  é representada pelo vetor deslocamento, de coordenadas:

$$u_i = x_i - X_i \quad (3.38)$$

Como cada ponto  $P'$  resulta do deslocamento de um ponto  $P$  único, podemos escrever:

$$u_i = u_i(X_j, t) \quad \text{e} \quad x_i = x_i(X_j, t) \quad (3.39)$$

O quadrado das distâncias  $dS$  e  $ds$  é dado por:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_k dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_i dX_j \\ dS^2 &= dX_k dX_k = dX_i dX_j \delta_{ij} \end{aligned}$$

Calculando a diferença  $ds^2 - dS^2$  e usando a Eqs. 3.38 e 3.39 obtemos:

$$ds^2 - dS^2 = \left( \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) dX_i dX_j = 2E_{ij} dX_i dX_j$$

onde:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \delta_{ik} \right) \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \delta_{ij} \right) - \delta_{ij} \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right)$$

$E_{ij}$  é um tensor simétrico de segunda ordem, conhecido como *tensor de Green*. Para o caso de pequenos deslocamentos  $\partial u_i / \partial X_j \approx \partial u_i / \partial x_j$  e o produto de dois gradientes do deslocamento é de ordem superior e pode ser desprezado. A deformação infinitesimal é representada, nesse caso, por um tensor simétrico  $\varepsilon$ , cujas componentes são dadas por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.40)$$

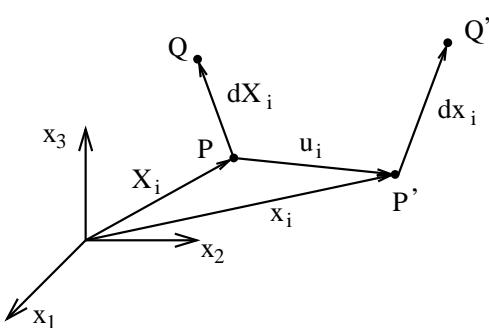


Figura 3.6: Deformação de um sólido sujeito a carregamento externo.

fazer à condição de compatibilidade dada por:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0.$$

As componentes de deformação  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  e  $\varepsilon_{33}$ , perpendiculares às faces, podem ser interpretadas como mudanças relativas na dimensão da partícula do corpo, que alteram seu volume. As demais são variações dos ângulos entre as faces da partícula. Quando se denominam os eixos aos quais os pontos do corpo são referenciados por  $x$ ,  $y$  e  $z$ , costuma-se a denominar as três componentes da deformação da diagonal do tensor de  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$ , enquanto que as deformações angulares recebem a denominação  $\gamma_{xy}/2$ ,  $\gamma_{yz}/2$  e  $\gamma_{zx}/2$ .

As componentes do tensor deformação não são independentes entre si, devendo satisfazer à condição de compatibilidade dada por:

As propriedades do tensor de formação são semelhantes às do tensor de tensões. Há um sistema de eixos principais, ao longo dos quais não existem deformações de cisalhamento. O tensor de deformações tem três invariantes  $I_\varepsilon$ ,  $II_\varepsilon$  e  $III_\varepsilon$ . O primeiro invariante caracteriza a variação volumétrica relativa da partícula:

$$I_\varepsilon = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

O tensor de pequenas deformações pode ser decomposto como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{ij} + e_{ij} \quad \text{ou:} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_V}{3} \mathbf{I} + \mathbf{e}$$

A primeira parcela corresponde à variação volumétrica e a segunda, à *distorção* ou deformação angular local.

### 3.8.3 Elasticidade linear

A generalização da lei de Hook ( $\sigma = E \varepsilon$ ) para um material elástico, em que as tensões são proporcionais às deformações, conduzem a uma equação constitutiva da forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.41)$$

ou:

$$\varepsilon_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.42)$$

onde  $C_{ijkl}$  e  $M_{ijkl}$  são os componentes de dois tensores  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{M}$ , respectivamente, de quarta ordem, caracterizados pelas constantes elásticas do material.  $\mathbf{C}$  é o *tensor de rigidez* e  $\mathbf{M}$ , o de *compliance*. Pode-se mostrar que, no caso mais geral de anisotropia, o tensor  $\mathbf{C}$  tem 21 constantes independentes e as simetrias  $C_{ijkl} = C_{jikl}$  e  $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ . No caso de um material totalmente isotrópico, o tensor  $\mathbf{C}$  é caracterizado por apenas duas constantes, dadas por:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Substituindo essa última na Eq. 3.41 obtemos:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij}$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são as *constantes de Lamé*, dadas, em função dos módulos de Young,  $E$ , e de Poisson,  $\nu$ , por:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{Módulo de cisalhamento}) \end{aligned}$$

Quando as variações de volume das partículas de um sólido são causadas exclusivamente por tensões normais e as deformações angulares são da forma  $\varepsilon_{ij} \propto S_{ij}$ , diz-se que o material

do sólido é *ortotrópico*. Nesse caso, a Eq. 3.42 toma a forma:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & 0 & 0 & 0 \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} & 0 & 0 & 0 \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

onde as componentes  $M_{ijkl}$  não-nulas do tensor de compliança são dadas por:

$$\left. \begin{array}{l} h_{11} = M_{1111} = \frac{1}{E_1} \quad h_{12} = M_{1122} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \quad h_{44} = M_{2323} = \frac{1}{\mu_{23}} \\ h_{22} = M_{2222} = \frac{1}{E_2} \quad h_{23} = M_{2233} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3} \quad h_{55} = M_{3131} = \frac{1}{\mu_{31}} \\ h_{33} = M_{3333} = \frac{1}{E_3} \quad h_{13} = M_{1133} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} \quad h_{66} = M_{1212} = \frac{1}{\mu_{12}} \end{array} \right\} \quad (3.44)$$

### 3.9 Equação de Navier-Stokes

A equação de Navier-Stokes é obtida substituindo-se o tensor de tensões  $\tau$  da equação do movimento, Eq. (3.17), pela equação constitutiva dos fluidos newtonianos. Consideraremos apenas o caso de fluido incompressível (Eq. 3.33). Nesse caso o divergente do tensor de tensões  $\tau$  pode ser escrito como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_i$$

pois, pela equação da continuidade  $\partial v_j / \partial x_j = 0$ . O coeficiente  $\mu/\rho$  é denominado como coeficiente de viscosidade cinemática do fluido,  $\nu$  (ou viscosidade cinemática, de forma abreviada). A Tab. 3.3 apresenta o valor da viscosidade cinemática de alguns fluidos a  $20^\circ C$ :

Tabela 3.3: Coeficientes de viscosidade cinemática e dinâmica de alguns fluidos a  $20^\circ C$ .

Fluido	Viscosidade dinâmica $\mu - kg/s m$	Viscosidade cinemática $\nu - m^2/s$
Água	$1,0 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-6}$
Ar	$1,8 \times 10^{-5}$	$1,5 \times 10^{-5}$
Álcool	$1,1 \times 10^{-3}$	$1,34 \times 10^{-6}$
Azeite de oliva	$8,4 \times 10^{-2}$	$1,0 \times 10^{-4}$
Glicerina	$1,42 \times 10^{-1}$	$3,68 \times 10^{-4}$
Mercúrio	$1,56 \times 10^{-3}$	$1,20 \times 10^{-5}$

Substituindo a definição da viscosidade cinemática e levando em conta que  $\partial v_j / \partial x_j = 0$  na Eq. (3.19) obtemos a equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i + g_i \quad (3.45)$$

A equação de Navier-Stokes, na forma aplicável a fluidos incompressíveis, pode ser escrita de uma das seguintes formas, em coordenadas cartesianas:

Tabela 3.4: Formas da equação de Navier-Stokes aplicável a fluidos incompressíveis (coordenadas cartesianas).

Forma vetorial	Forma tensorial
$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}$	$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i$
$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}$	$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i$

Em coordenadas cilíndricas [3, 5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ \nu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] &+ g_r \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ \nu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_\theta \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] &+ g_\theta \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] &+ g_z \end{aligned} \quad (3.48)$$

Em coordenadas esféricas<sup>3</sup> [3, 5]:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi^2}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_\theta \cot \theta - \frac{2}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + g_r \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + g_\theta \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r} \cot \theta = -\frac{1}{\rho r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \left( \nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \operatorname{sen} \theta} + \frac{2}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + g_\phi, \quad (3.51)$$

onde<sup>4</sup>:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.52)$$

### 3.10 Os Números de Reynolds e de Froude

Frequentemente trabalha-se com as variáveis da mecânica dos fluidos na forma adimensional. Surgem então alguns grupos adimensionais como os números de Reynolds e de Froude, conforme mostrado abaixo.

Consideremos o escoamento de um gás sobre um corpo de comprimento  $d$  e sejam  $p_0$  e  $U_0$  a pressão e a velocidade do escoamento longe do aerofólio. A equação de Navier-Stokes toma a forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}$$

Sejam:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= U_0 \mathbf{v}^* & x_i &= x_i^* d \\ t &= t^* d / U_0 & p &= p^* \rho U_0^2 \end{aligned}$$

onde o asterisco indica variáveis adimensionais. Substituindo as expressões acima na equação de Navier-Stokes encontramos:

$$\frac{U_0^2}{d} \left( \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}^* \right) = -\frac{U_0^2}{d} \operatorname{grad} p^* + \frac{U_0}{d^2} \nu \nabla^2 \mathbf{v}^* + \mathbf{g}.$$

---

<sup>3</sup>Ver a definição do referencial em coordenadas esféricas na Fig. 2.3 (Pág.14).

<sup>4</sup>O laplaciano de uma variável escalar é obtido, em coordenadas esféricas, pela aplicação sobre a mesma, do operador  $\nabla^2$ , conforme definido pela Eq. 3.52 [5].

Multiplicando essa equação por  $d/U_0^2$  obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}^* = -\mathbf{grad} p^* + \frac{1}{U_0 d / \nu} \nabla^2 \mathbf{v}^* + \frac{gd}{U_0^2 g} \mathbf{g}.$$

O grupo adimensional  $Re = U_0 d / \nu$  denomina-se número de Reynolds do problema. Depende das propriedades físicas do fluido e de características geométricas do corpo sobre o qual o fluido escoa. O número de Reynolds existe quando o problema tem uma velocidade (ou velocidade angular) imposta como parâmetro.

O grupo adimensional  $Fr = (U_0^2/gd)^{1/2}$  chama-se número de Froude. Usando a definição dos números de Reynolds e de Froude e desprezando os asteriscos reescrevemos a equação de Navier-Stokes na forma adimensional:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = -\mathbf{grad} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{Fr^2 g} \mathbf{g}. \quad (3.53)$$

A adimensionalização dessas equações e a introdução do conceito de número de Reynolds permitem identificar a importância relativa de alguns termos. O termo  $(1/Re)\nabla^2 \mathbf{v}$  representa os efeitos viscosos do escoamento. Vê-se que tais efeitos são menos importantes quando o número de Reynolds do escoamento é elevado.

Consideremos um caso em que os efeitos gravitacionais possam ser desprezados. A Eq. 3.53 reduz-se a:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathbf{grad} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}$$

Essa equação mostra que um gradiente de pressões disponível para movimentar o fluido é utilizado para vencer efeitos viscosos e para acelerar a partícula. Se o número de Reynolds for baixo, a maior parte do gradiente de pressões será usada para vencer os efeitos viscosos. Se, no entanto, o número de Reynolds for alto, o gradiente de pressões disponível será usado principalmente para vencer a inércia. O número de Reynolds mede portanto a importância relativa entre efeitos de inércia e de viscosidade. Há uma diferença fundamental entre os casos de números de Reynolds muito baixos e muito altos. No primeiro, a evolução temporal da partícula obedece a uma lei linear. No segundo, os efeitos não lineares são dominantes.

### 3.11 Equação de Bernoulli

Sabe-se do cálculo vetorial, que:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = \mathbf{grad} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}$$

Substituindo o termo  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}$  da equação de Euler pela expressão acima obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} pg$$

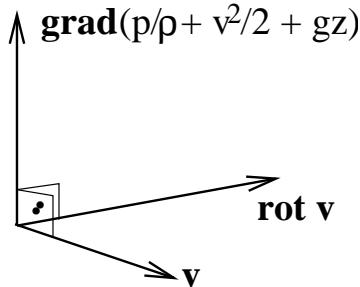


Figura 3.7: A equação de Bernoulli: se o campo for irrotacional,  $(p/\rho + v^2/2 + gz)$  é constante ao longo da superfície cujo plano tangente é definido, em cada ponto do espaço pelos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\text{rot } \mathbf{v}$ . Observar que o ângulo entre esses dois vetores pode ser diferente de  $\pi/2$ .

essa característica  $\text{grad}(p/\rho + v^2/2 + gz) = 0$ , isto é,  $p/\rho + v^2/2 + gz = C^{te}$  em todo o campo. Se  $\text{rot } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  então  $\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}$  é perpendicular ao vetor velocidade. Consequentemente,  $\text{grad}(p/\rho + v^2/2 + gz)$  é perpendicular à superfície cujo plano tangente é definido, em cada ponto do espaço pelos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\text{rot } \mathbf{v}$ . Ao longo dessa superfície, têm-se a forma mais conhecida da equação de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = C^{te} \quad (3.55)$$

que é válida no campo todo se o escoamento for irrotacional. Nessa forma, a constante da equação é medida em unidades de  $[v^2/2]$ . Outras formas possíveis são:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = C^{te} \quad [N/m^2] \quad (\text{Aerodinâmica}) \quad (3.56)$$

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = H \quad [m] \quad (\text{Hidráulica}) \quad (3.57)$$

A equação de Bernoulli é usada em tubos de corrente, nos escoamentos unidimensionais permanentes.

Como exemplo de aplicação da equação de Bernoulli e das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento, resolvemos o seguinte problema:

Um vórtice estacionário, que se desenvolve em uma massa de água com superfície livre, tem as seguintes características:

1. Região  $0 < r \leq 1$ : rotação em bloco com velocidade angular  $\Omega = 2$ ;
2. Região  $1 < r < \infty$ : vórtice potencial com velocidade tangencial  $v_\theta = 2/r$ ;

Pede-se:

Consideramos o caso de um escoamento incompressível e estacionário ( $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ ) e escrevemos  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/2 = v^2/2$ . Obtemos:

$$\text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{g} = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}$$

O termo  $\mathbf{g}$  pode ser incorporado ao que contém o gradiente multiplicando-o por  $z$ , pois  $\text{grad } gz = -\mathbf{g}$ , onde  $g = |\mathbf{g}|$ . Obtemos:

$$\text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} \quad (3.54)$$

que é a Equação de Bernoulli [38]. Essa equação mostra a importância dos escoamentos irrotacionais: Se o campo de velocidades tiver

essa característica  $\text{grad}(p/\rho + v^2/2 + gz) = 0$ , isto é,  $p/\rho + v^2/2 + gz = C^{te}$  em todo o campo. Se  $\text{rot } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  então  $\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}$  é perpendicular ao vetor velocidade. Consequentemente,  $\text{grad}(p/\rho + v^2/2 + gz)$  é perpendicular à superfície cujo plano tangente é definido, em cada ponto do espaço pelos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\text{rot } \mathbf{v}$ . Ao longo dessa superfície, têm-se a forma mais conhecida da equação de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = C^{te} \quad (3.55)$$

que é válida no campo todo se o escoamento for irrotacional. Nessa forma, a constante da equação é medida em unidades de  $[v^2/2]$ . Outras formas possíveis são:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = C^{te} \quad [N/m^2] \quad (\text{Aerodinâmica}) \quad (3.56)$$

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = H \quad [m] \quad (\text{Hidráulica}) \quad (3.57)$$

A equação de Bernoulli é usada em tubos de corrente, nos escoamentos unidimensionais permanentes.

Como exemplo de aplicação da equação de Bernoulli e das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento, resolvemos o seguinte problema:

Um vórtice estacionário, que se desenvolve em uma massa de água com superfície livre, tem as seguintes características:

1. Região  $0 < r \leq 1$ : rotação em bloco com velocidade angular  $\Omega = 2$ ;
2. Região  $1 < r < \infty$ : vórtice potencial com velocidade tangencial  $v_\theta = 2/r$ ;

Pede-se:

1. A vorticidade (rotacional) nas regiões interna e externa;
2. A circulação sobre uma circunferência de raio  $r_0 = 1$  com centro na origem;
3. Mostrar que o vórtice é uma solução estacionária das equações de Navier-Stokes;
4. Calcular o perfil da superfície livre, admitindo como referência ( $z = 0$ ), o nível da superfície livre em  $r \rightarrow \infty$ .
5. Verificar que as soluções interna e externa do campo hidrodinâmico satisfazem à Equação de Bernoulli nas formas (3.54) e (3.55), respectivamente;

O problema é resolvido utilizando-se as equações da continuidade e de Navier-Stokes escritas em coordenadas cilíndricas (Eqs. 2.7, 3.46, 3.47 e 3.48), com o eixo  $z$  na direção vertical, orientado para cima e tomando a cota  $z = 0$  na superfície livre da água, longe do eixo do vórtice.

O perfil de velocidades do vórtice contém apenas a componente na direção tangencial e essa componente é função de  $r$  apenas, não variando nas direções  $\theta$  e  $z$ :

$$\mathbf{v} = v_\theta \mathbf{e}_\theta = \begin{cases} 2r \mathbf{e}_\theta & (\text{região interna}) \\ \frac{2}{r} \mathbf{e}_\theta & (\text{região externa}) \end{cases}$$

O rotacional do campo de velocidades é dado, em coordenadas cilíndricas, pela equação:

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z$$

Essa equação se simplifica, tendo em vista a forma do campo de velocidades, reduzindo-se a:

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{d r v_\theta}{dr} \mathbf{e}_z = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 v_\theta) \mathbf{e}_z = 4 \mathbf{e}_z = 2\Omega & (\text{região interna}) \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{2}{r} \right) \mathbf{e}_z = 0 & (\text{região externa}) \end{cases}$$

O rotacional do campo de velocidades é igual, portanto, a duas vezes o valor da velocidade angular, na região interna do vórtice (ver Sec. B.3.1, Pág. 346). Na região externa, o campo é irrotacional.

A circulação sobre uma circunferência de raio  $r = 1$  é dada por:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = v_\theta 2\pi r|_{r=1} = 4\pi$$

A circulação também pode ser calculada através do teorema de Stokes:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_S 4 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z dA = 4\pi$$

Admitindo-se que o campo de velocidades não varie na direção  $z$  e que todas as derivadas na direção  $\theta$  se anulem, a equação da continuidade reduz-se a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0$$

o que requer que  $rv_r$  seja igual a uma constante e que  $v_r = C^{te}/r$ . Como a velocidade deve ser finita no eixo do vórtice ( $r = 0$ ) concluímos que a constante é igual a zero e que, portanto, a componente radial da velocidade também o é.

As equações de Navier-Stokes (Eqs. 3.46, 3.47 e 3.48) simplificam-se, tendo em vista que  $\partial/\partial t = \partial/\partial\theta = \partial/\partial z \equiv 0$  e que  $v_r = 0$ . Obtém-se:

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.58)$$

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dv_\theta}{dr} \right) = 0 \quad (3.59)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad (3.60)$$

A Eq. (3.59) pode ser integrada diretamente, conforme abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dr} &= C & \int dr v_\theta &= \int Cr dr + C_2 \\ rv_\theta &= C_1 r^2 + C_2 & v_\theta &= C_1 r + \frac{C_2}{r} \end{aligned}$$

O perfil de velocidades acima obtido diverge no eixo do vórtice ( $r = 0$ ) e longe do mesmo ( $r \rightarrow \infty$ ). Para contornar o problema é necessário dividir o campo em duas regiões, sendo uma interna, em que  $C_2 = 0$  e outra externa, em que  $C_1 = 0$ . Dessa forma, o perfil de velocidades proposto no enunciado do problema satisfaz às equações da continuidade e de Navier-Stokes.

Substituindo-se o valor de  $v_\theta$  nas Eqs. (3.58) e (3.60), determina-se o campo de pressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho \frac{(2r)^2}{r} \longrightarrow p = 2\rho r^2 + f_1(z) + C_1 && \text{(região interna)} \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho \left( \frac{2}{r} \right)^2 \longrightarrow p = -\frac{1}{2} \rho \frac{4}{r^2} + f_1(z) + C_2 && \text{(região externa)} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g \longrightarrow p = -\rho g z + f_2(r) \end{aligned}$$

Da última equação acima, vê-se que  $f_1(z) = -\rho g z$ . Substituindo-se esse resultado nas duas primeiras equações obtém-se:

$$p = 2\rho r^2 - \rho g z + C_1 \quad (\text{região interna}) \quad (3.61)$$

$$p = -\frac{2\rho}{r^2} - \rho g z + C_2 \quad (\text{região externa}) \quad (3.62)$$

A constante  $C_2$  é determinada aplicando-se a condição de contorno segundo a qual a superfície livre, longe do eixo do vórtice ( $r \rightarrow \infty$ ) se encontra na elevação  $z = 0$ . Nesse ponto, a pressão é igual à atmosférica. Em consequência,  $C_2 = p_{atm}$ , o que resulta em:

$$p + \frac{2\rho}{r^2} + \rho g z = p_{atm} \quad (\text{região externa}) \quad (3.63)$$

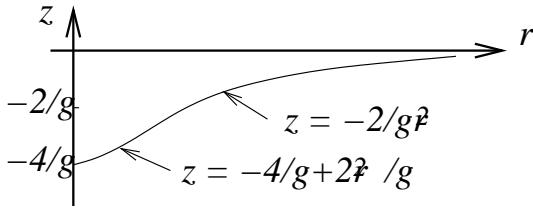


Figura 3.8: Elevação da superfície livre de um vórtice.

No limite entre as regiões externa e interna,  $r = 1$ , a elevação da superfície livre é  $z = -2/g$ . Determina-se a constante  $C_1$  impondo-se à Eq. (3.61), essa condição relativa à elevação de superfície livre:

$$p_{atm} = 2\rho - \rho g \left( \frac{-2}{g} \right) + C_1$$

Donde obtém-se que  $C_1 = p_{atm} - 4\rho$ . O campo de pressões obedece portanto à seguinte equação, na região interna:

$$p - 2\rho r^2 + \rho g z = p_{atm} - 4\rho \quad (3.64)$$

A equação da superfície livre é o lugar geométrico dos pontos em que a pressão é igual à atmosférica:

$$p_{atm} - 2\rho r^2 + \rho g z = p_{atm} - 4\rho$$

O que resulta em:

$$z = -\frac{4}{g} + \frac{2\rho r^2}{g}$$

No eixo do vórtice:

$$z = -\frac{4}{g}$$

Notamos que os termos  $2\rho r^2$  e  $2\rho/r^2$ , das Eqs. (3.64) e (3.63), respectivamente, são iguais a  $\rho v^2/2$ , o que permite que essas equações sejam escritas como:

$$\begin{aligned} p - \frac{1}{2}\rho v_\theta^2 + \rho g z &= p_{atm} - 4\rho && (\text{região interna}) \\ p + \frac{1}{2}\rho v_\theta^2 + \rho g z &= p_{atm} && (\text{região externa}) \end{aligned}$$

Isso é, a equação de Bernoulli aplica-se à região externa, na forma (3.56), mas não à região interna. Nessa última, o campo de velocidades é rotacional e é necessário usar a equação

A equação da superfície livre é obtida observando-se que a pressão que atua sobre a mesma é a atmosférica. Obtém-se:

$$p_{atm} + \frac{2\rho}{r^2} + \rho g z = p_{atm}$$

O que resulta na equação da superfície livre, para a região externa do vórtice:

$$z = -\frac{2}{gr^2}$$

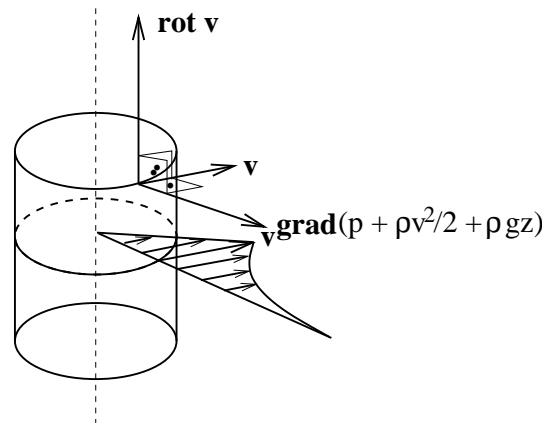


Figura 3.9: Aplicação da Eq. de Bernoulli (Eq. 3.54) a um campo rotacional: ao longo do cilindro cujo plano tangente é definido em cada ponto, pelos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{rot} \mathbf{v}$ , têm-se que  $p + \rho v_\theta^2/2 + \rho g z = C^{te}$ .

de Bernoulli na forma (3.54). No entanto, mesmo no caso do rotacional de velocidades ser diferente de zero, a Eq. (3.56) é válida ao longo das superfícies cujo plano tangente é definido em cada ponto, pelos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\text{rot } \mathbf{v}$  (ver Fig. 3.7). Essa família de superfícies se constitui, no problema em questão, de cilindros concêntricos, de raio constante. Sobre a superfície de cada cilindro, o termo  $2\rho r^2 = \rho v_\theta^2/2$  é constante e a Eq. (3.64) reduz-se a:

$$p + \rho g z = c^{te}$$

que é a forma da Eq. (3.56) para o caso em que a velocidade é constante.

Concluindo, verificamos que o campo hidrodinâmico satisfaz à equação de Bernoulli na forma (3.54), na região interna do vórtice:

$$\text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}.$$

O lado esquerdo da Eq. de Bernoulli é calculado como:

$$\text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v_\theta^2}{2} + gz \right) = \left( \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v_\theta^2}{2} + gz \right). \quad (3.65)$$

Notando que  $\partial/\partial\theta = 0$  e que, na região interna:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{v_\theta^2}{2} - gz + C^{te},$$

reescrevemos a Eq. 3.65 como:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \left( \frac{v_\theta^2}{2} - gz + \frac{v_\theta^2}{2} + gz \right) &= \left( \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) v_\theta^2 = \\ \left( \frac{\partial 4r^2}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial 4r^2}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) &= 8r \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

Têm-se portanto, que:

$$\text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) = 8r \mathbf{e}_r$$

Enquanto que:

$$\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = 2r \mathbf{e}_\theta \times 4 \mathbf{e}_z = 8r \mathbf{e}_r = \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right)$$

o que confirma que a solução interna do campo hidrodinâmico satisfaz à equação de Bernoulli na forma da Eq. (3.54).

### 3.12 Perdas de Carga em Tubulações

A constante da equação de Bernoulli, escrita na forma utilizada na hidráulica (Eq: 3.57) denomina-se *altura de carga*. Na prática há um *declive hidráulico*, que vem a ser um decréscimo do nível da altura de carga ao longo de uma tubulação, em virtude dos efeitos viscosos que foram desprezados na dedução da equação de Bernoulli. Os termos que compõem a altura de carga de uma tubulação se encontram representados esquematicamente na Fig. (3.10).

Nos problemas de engenharia trabalha-se com uma equação de Bernoulli corrigida de modo a levar em conta estas perdas:

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z + \sum \text{perdas} = H_0 \quad (3.66)$$

As perdas subdividem-se em distribuídas e localizadas. As perdas localizadas ocorrem devido à presença de válvulas, instrumentos, mudanças de direção e de diâmetro da tubulação, entradas e saídas, etc. A essas, somam-se as distribuídas, que são causadas pelas tensões de cisalhamento entre o fluido e as paredes da tubulação. O estudo das perdas de carga distribuídas foi feito de forma empírica e o resultado é dado por um gráfico de *perdas de carga* adimensionais em relação a  $v^2/2g$  por unidade de comprimento da tubulação. Esse comprimento é expresso em número de diâmetros. Obtém-se um coeficiente adimensional,  $f$ , denominado fator de atrito, ou fator de Darcy-Weisbach. O fator de atrito é função do número de Reynolds do escoamento e da rugosidade relativa da tubulação.

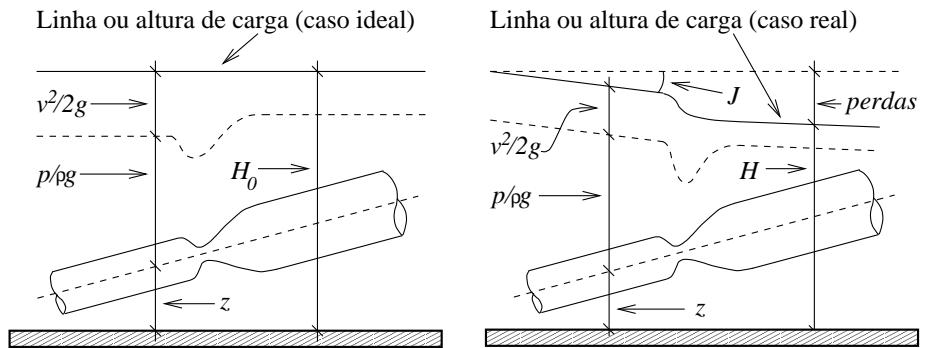


Figura 3.10: Esquema de composição da carga hidráulica de uma tubulação para o caso ideal, sem perdas e para o caso real. A carga se divide em três parcelas que correspondem, respectivamente, à altura média da tubulação ( $z$ ), ao termo de pressão ( $p/\rho g$ ) e ao termo de velocidade, ( $v^2/2g$ ). O parâmetro  $J$  é a *declividade hidráulica* da linha.

formalmente, a equação da carga hidráulica é dada por:

$$H = H_0 - \frac{\sum \text{perdas}}{v^2/2g}$$

onde  $H_0$  é a altura de carga total no topo da tubulação,  $v$  é a velocidade média da tubulação e  $\sum \text{perdas}$  é a soma das perdas de carga ao longo da tubulação.

Para o caso ideal (sem perdas), a equação simplifica-se para:

$$H = H_0 - \frac{J}{v^2/2g}$$

Onde  $J$  é a declividade hidráulica da tubulação.

$$f = \frac{\Delta H/(v^2/2g)}{L/D} = f(Re, \varepsilon/D) \quad (3.67)$$

onde  $\varepsilon$  e  $D$  são a altura média da rugosidade do material e o diâmetro hidráulico do tubo, respectivamente. A relação  $\varepsilon/D$  é a rugosidade relativa da tubulação. O diâmetro hidráulico é definido como:

$$D_h = \frac{4A}{p}$$

onde  $A$  e  $p$  são, respectivamente, a área e o perímetro da seção transversal do tubo.  $Re$  é o número de Reynolds, definido por:

$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

onde  $V$  é a velocidade média do escoamento. O escoamento em tubos é laminar para números de Reynolds inferiores a 2000. A faixa compreendida entre 2000 e 4000 representa uma região crítica, em que o escoamento pode ser laminar ou turbulento, dependendo de vários fatores, dentre eles a condição do fluido na entrada do tubo. Acima de  $Re = 4000$  tem-se uma região de transição, em que o fator de atrito decai até atingir um valor constante, na região em que o escoamento é completamente turbulento.

O coeficiente de atrito foi determinado por Reynolds, Hagen, Poiseuille, Bazin, Nikuradse e Moody. O coeficiente é dado na forma de um gráfico  $f \times Re$ , conhecido como diagrama de Moody, que é mostrado na Fig. (3.11). O diagrama apresenta quatro regiões: a primeira corresponde a escoamentos laminares e estende-se até  $Re = 2000$ . O coeficiente de atrito é determinado através de uma curva única. A faixa seguinte, compreendida entre  $2000 < Re < 4000$ , corresponde à região denominada de crítica, onde o escoamento pode ser laminar ou turbulento, dependendo da sua história anterior e da rugosidade relativa da tubulação. O fator de atrito decai com o número de Reynolds e passa a depender também, da rugosidade relativa do tubo,  $\varepsilon/D$ , definida como a relação entre o valor médio da espessura da rugosidade da parede e o diâmetro do tubo. Os valores típicos da rugosidade de alguns materiais são dados no diagrama de Moody.

Acima de  $Re = 4000$ , o fator de atrito decresce até atingir valores independentes do número de Reynolds. Essa é a região de transição. O limite da região de transição é obtido ligando-se os pontos de cada curva, além do qual o fator de atrito se torna praticamente independente do número de Reynolds.

As curvas do fator de atrito, mostradas no diagrama de Moody são calculadas através das seguintes fórmulas empíricas, válidas para  $Re > 4000$ :

$$\text{Escoamento em tubo liso} \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = 0,86 \ln Re \sqrt{f} - 0,8 \quad (3.68)$$

$$\text{Zona completamente turbulenta} \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -0,86 \ln \frac{\varepsilon/D}{3,7} \quad (3.69)$$

$$\text{Zona de transição} \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -0,86 \ln \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (3.70)$$

A Eq. (3.70) é conhecida como equação de Colebrook. As Eqs. (3.68) e (3.69) são casos particulares da Eq. de Colebrook, para  $\varepsilon = 0$  e para o limite de  $Re \rightarrow \infty$ , respectivamente.

Na região laminar, o coeficiente de atrito é dado por:

$$f = \frac{64}{Re} \quad (3.71)$$

A dedução dessa equação é deixada para o Cap. 7, como exercício (problema 21, pág. 220).

Curvas, mudanças de direção, registros, e outros acessórios da tubulação, contribuem para perdas localizadas, que são calculadas acrescentando-se um comprimento equivalente

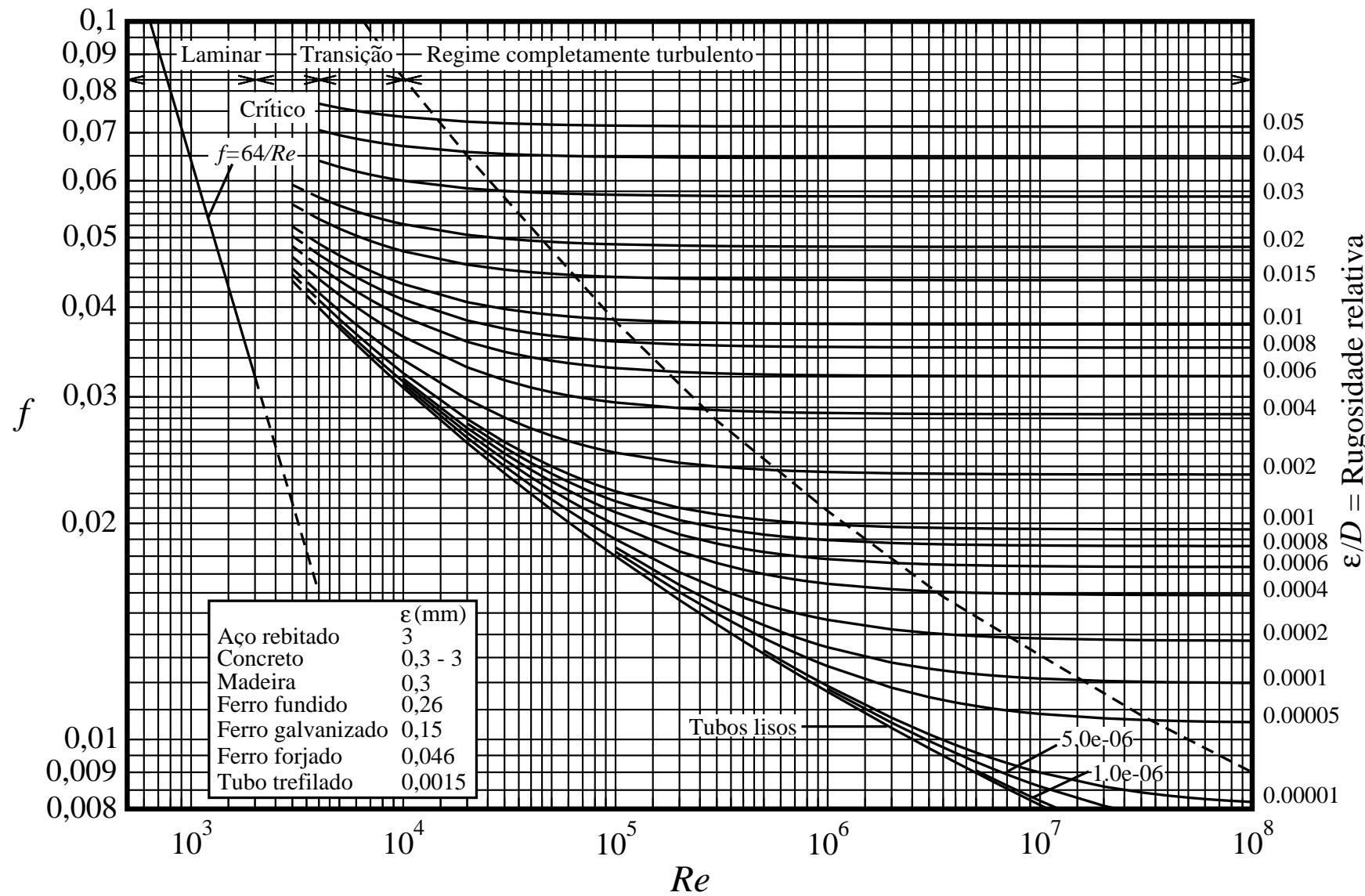


Figura 3.11: O diagrama de Moody.

adimensional,  $(L/D)_e$ , característico do acidente. Alternativamente, as perdas localizadas são calculadas através da fórmula:

$$h_l = K \frac{v^2}{2g} = f \left( \frac{L}{D} \right)_e \frac{V^2}{2g}$$

onde  $K$  é o coeficiente de perda de carga localizada característico do acidente. Da fórmula acima têm-se que:

$$K = f \left( \frac{L}{D} \right)_e \quad (3.72)$$

Tabela 3.5: Coeficientes de perda de carga  $K$ , conforme Eq. (3.72), de acessórios de tubulação.

Tipo de acessório Diâmetro nominal (mm)	Rosqueado			Flangeado		
	25	50	100	25	50	100
Válvula globo (aberta)	8,2	6,9	5,7	8,5	6,0	5,8
Válvula em ângulo (aberta)	20	17	14	21	15	14
Válvula de retenção (aberta)	2,9	2,1	2,0	2,0	2,0	2,0
Válvula gaveta (aberta)	0,24	0,16	0,11	0,35	0,17	0,07
Curva de retorno (em "U")	1,5	0,95	0,64	0,35	0,16	0,07
Tê (ramal)	1,8	1,4	1,1	0,80	0,64	0,58
Tê (em linha)	0,9	0,9	0,9	0,19	0,14	0,10
Curva 90°	1,5	0,95	0,64	0,39	0,30	0,26
Curva 90° longa	0,72	0,41	0,23	0,30	0,19	0,15
Curva de 45°	0,32	0,30	0,29			

Mais informações acerca do cálculo de perda de carga em tubulações podem ser obtidos no manual *Flow of Fluids in Valves, Fittings & Pipe TP-410* [12].

### 3.13 Equação da Vorticidade

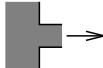
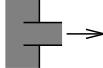
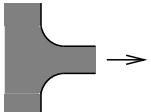
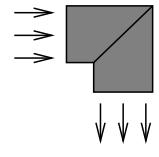
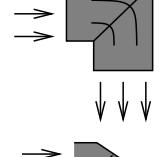
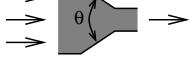
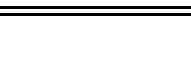
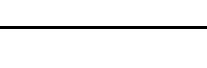
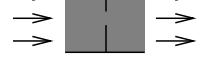
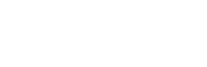
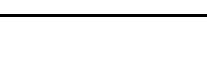
A equação de Navier-Stokes pode ser escrita sem a pressão, seguindo-se o mesmo procedimento que usamos na dedução da Eq. (3.30). Obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}) + \nu \nabla^2 \mathbf{rot} \mathbf{v} \quad (3.73)$$

O rotacional da velocidade recebe o nome de *vorticidade*. A equação acima também pode ser escrita sob a forma:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (3.74)$$

Tabela 3.6: Coeficientes de perda de carga  $K$ , conforme Eq. (3.72), de outros acessórios de tubulação.

Tipo de acessório	$K$
Entrada com cantos vivos	 0,5
Entrada com reentrância	 0,8
Entrada arredondada	 0,03
Saída de tubo	 1,0
Alargamento súbito	 $\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$
Curva mitra 90° sem guias	 1,1
Curva mitra 90° com guias	 0,2
Contração ( $\theta = 30^\circ$ )	 0,02
Contração ( $\theta = 70^\circ$ )	 0,07
Razão de áreas	
2:1	 0,25
Contração súbita <sup>5</sup>	 0,41
5:1	 0,46
Razão de áreas $A/A_o$	
1,5:1	 0,85
Placa de orifício <sup>6</sup>	 3,4
2:1	 29
4:1	
$\geq 6 : 1$	$2,78 \left( \frac{A}{A_o} - 0,6 \right)^2$

onde  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ . Demonstramos essa última, que é conhecida como equação da vorticidade [52]. Aplicando o operador rotacional à equação de Navier-Stokes com o termo  $\mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v}$  escrito, em notação tensorial, na forma  $\text{grad } v^2/2 + \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v}$  obtemos:

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{v_p v_p}{2} + \epsilon_{kpq} \omega_p v_q \right) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_p \partial x_p} + g_k \right)$$

onde  $\omega_p$  é a componente geral de  $\text{rot } \mathbf{v}$ . O rotacional de um gradiente e o de uma constante são iguais a zero. Em consequência, os termos contendo o gradiente de  $v^2/2$ , o da pressão e a aceleração da gravidade se anulam. Adicionalmente, trocamos a ordem de derivação de alguns termos e obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_{ijk} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) + \epsilon_{kij} \epsilon_{kpq} \left( v_q \frac{\partial \omega_p}{\partial x_j} + \omega_p \frac{\partial v_q}{\partial x_j} \right) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_p} \left( \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)$$

O primeiro termo do lado esquerdo e o do lado direito da equação acima são, respectivamente, os elementos gerais de  $\partial \boldsymbol{\omega} / \partial t$  e de  $\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$ . Fazendo essa substituição e a de  $\epsilon_{kij} \epsilon_{kpq} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$  obtemos:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) \left( v_q \frac{\partial \omega_p}{\partial x_j} + \omega_p \frac{\partial v_q}{\partial x_j} \right) = \nu \nabla^2 \omega_i$$

Desenvolvendo o segundo termo do lado esquerdo da equação anterior obtemos:

$$(\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) \left( v_q \frac{\partial \omega_p}{\partial x_j} + \omega_p \frac{\partial v_q}{\partial x_j} \right) = v_q \frac{\partial \omega_i}{\partial x_q} - v_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} + \omega_i \frac{\partial v_q}{\partial x_q} - \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_q \frac{\partial \omega_i}{\partial x_q} - \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Reagrupando os termos chega-se a:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_q \frac{\partial}{\partial x_q} \right) \omega_i = \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \nu \nabla^2 \omega_i$$

o que completa a demonstração da Eq. (3.74).

Observamos que, no caso de escoamentos bidimensionais, a vorticidade é perpendicular ao vetor velocidade. As linhas do tensor  $\text{grad } \mathbf{v}$  contém o gradiente de cada componente da velocidade e são perpendiculares à vorticidade. Consequentemente,  $\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad } \mathbf{v} = 0$ . A Eq. (3.74) reduz-se a:

$$\frac{D \boldsymbol{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$$

Essa última equação pode ser obtida de outra forma, conforme exercício 17 desse capítulo.

Cabe também mencionar a relação existente entre vorticidade e efeitos viscosos. Utilizamos a identidade vetorial (ver Apêndice B):

$$\text{rot} (\text{rot } \mathbf{v}) = \text{grad} (\text{div } \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}.$$

Levando em conta que  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  para fluidos incompressíveis, têm-se que:

$$\text{rot} (\text{rot } \mathbf{v}) = -\nabla^2 \mathbf{v} = -\frac{1}{\mu} \text{div } \tau.$$

Essa equação pode ser reescrita na forma:

$$\text{rot } \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\mu} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}. \quad (3.75)$$

O resultado acima mostra que, havendo desbalanceamento das forças viscosas, o rotacional naquele ponto será diferente de zero. Escoamentos incompressíveis e isentrópicos nos quais a vorticidade é diferente de zero estão, ou estiveram no passado, sob ação de efeitos viscosos. Como regra geral, efeitos viscosos produzem vorticidade.

Os resultados dessa seção aplicam-se ao caso de fluidos incompressíveis. Efeitos de compressibilidade, ou variações de entropia são outros fatores de produção de vorticidade, como será visto na Sec. (3.14).

### 3.14 Equação da Circulação

Nessa seção, identificaremos os mecanismos que dão origem à *vorticidade*, isto é, ao movimento de rotação de massas de um fluido. Iniciamos dando uma interpretação ao movimento relativo das camadas de um escoamento. Esse movimento relativo é caracterizado pela existência de um gradiente não nulo do campo de velocidades.

O gradiente do campo de velocidades é um tensor de segunda ordem. Os componentes deste tensor, quando representado em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, formam uma matriz cujos elementos são da forma  $\partial v_i / \partial x_j$ . Este tensor pode ser decomposto em duas parcelas, uma das quais é simétrica e a outra, anti-simétrica:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

A primeira parcela é o tensor velocidade de deformação do fluido. O *traço* deste tensor, dado pela soma dos elementos da diagonal principal do mesmo é o divergente do campo de velocidades:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{v}$$

e caracteriza a taxa de dilatação do fluido. Os componentes fora da diagonal principal são os termos que caracterizam a deformação angular, sem dilatação:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

A segunda parcela é o tensor cujos elementos são da forma:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

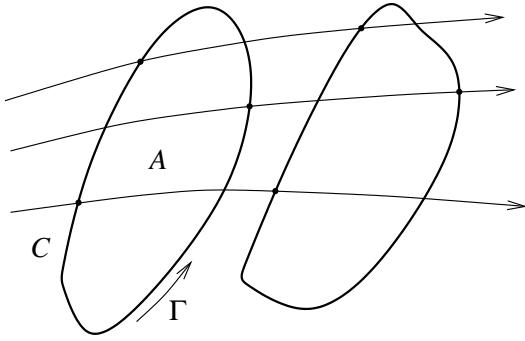


Figura 3.12: Circulação em torno de uma massa de fluido que se desloca.

Esse fluxo é igual à circulação do vetor velocidade ao longo da curva que delimita a região considerada, de acordo com o teorema de Stokes. A existência de uma circulação indica que a velocidade média ao longo da curva é diferente de zero e o teorema de Stokes assegura que neste caso o valor médio do rotacional na região interna à curva também é diferente de zero. Procuramos determinar os fatores que influem na evolução da circulação ao longo de uma curva que se desloca de forma solidária a uma massa de fluido, isso é, procuramos determinar  $D\Gamma/Dt$ . Podemos escrever:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \oint_C \frac{D}{Dt} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{D}{Dt} v_i dx_i = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i + \oint_C v_i d \frac{Dx_i}{Dt}$$

ou então :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i + \oint_C v_i dv_i = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i + \oint_C \frac{1}{2} dv^2$$

onde  $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ . A última integral representa a soma das variações de uma função ao longo de uma curva fechada. Como o ponto final da integração coincide com o inicial, o valor da função nos dois pontos é o mesmo e a integral acima é igual a zero. Temos então:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i$$

Levando em conta que, pela equação da quantidade de movimento:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

temos:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i + \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dx_i$$

ou ainda:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_C \frac{dp}{\rho} + \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dx_i \quad (3.76)$$

Esse tensor contém os termos do rotacional ou vorticidade do campo de velocidades. A vorticidade pode ser interpretada como a velocidade angular no ponto (ver apêndice B).

Consideremos uma superfície  $A$  do espaço, delimitada por uma curva  $C$  conforme Fig. (3.12) e seja  $d\mathbf{l}$  um elemento de arco desta curva. O fluxo  $\Gamma$  do vetor vorticidade através da superfície  $A$  é definido como:

$$\Gamma = \int_A \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

Sabe-se da termodinâmica que:

$$T ds = dh - \frac{dp}{\rho}$$

onde obtém-se que:

$$-\frac{dp}{\rho} = T ds - dh$$

Substituindo o resultado acima na primeira integral do membro direito da Eq. (3.76) obtemos:

$$-\oint_C \frac{dp}{\rho} = \oint_C T ds - \oint_C dh$$

A segunda integral do membro direito da igualdade acima representa a soma de variações de uma função ao longo de uma curva fechada. A integral é igual a zero, conforme discutido acima. Portanto:

$$-\oint_C \frac{dp}{\rho} = \oint_C T ds$$

A Eq. (3.76) pode portanto, ser escrita na forma:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C T ds + \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dx_i$$

Como a temperatura é um número sempre positivo, a primeira integral do membro direito da equação acima se anula nos processos isentrópicos, ou em casos onde hajam variações para mais e para menos na entropia do fluido ao longo da curva sobre a qual a circulação é calculada. E é, normalmente, diferente de zero quando a entropia varia ao longo da curva, quer devido a processos reversíveis, como o de aquecimento, quer devido a irreversibilidades que ocorrem, por exemplo, na mistura de massas de ar de temperaturas diferentes, ou de massas de água do mar com salinidades diferentes.

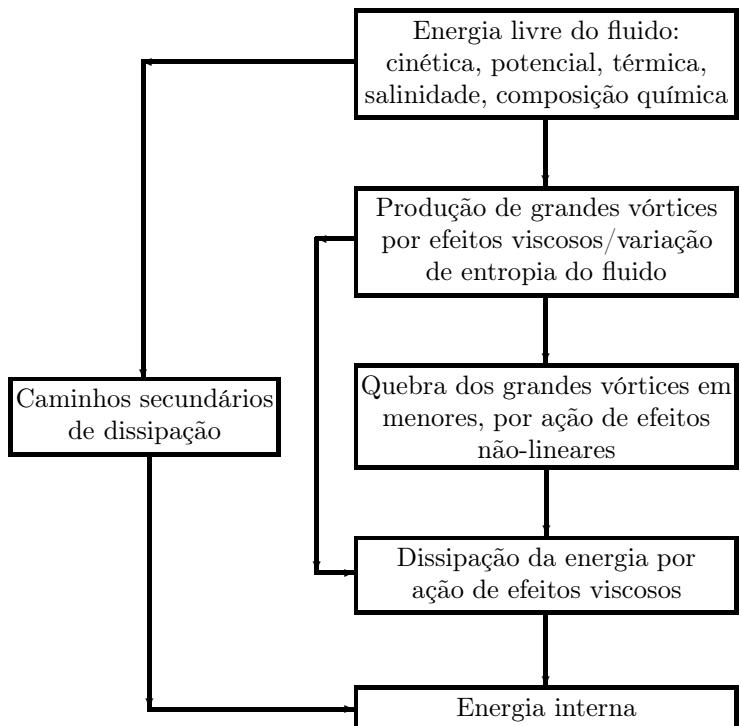


Figura 3.13: Mecanismos de produção e dissipação de vorticidade em fluidos em movimento.

A segunda integral caracteriza variações da circulação em virtude da ação de efeitos viscosos.

A Eq. (3.76) apresenta um resultado completamente geral, que dá origem a dois teoremas sobre a formação de vórtices. O primeiro é o *Teorema de Bjerknes*, que afirma que, na ausência de efeitos viscosos:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_C \frac{dp}{\rho} \quad (3.77)$$

Esse resultado mostra que, de forma geral, as irreversibilidades geram circulação. O segundo resultado é conhecido como *Teorema de Kelvin*, e afirma que, na ausência de variações de entropia e de efeitos viscosos:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (3.78)$$

Esse último resultado ressalta a importância dos escoamentos irrotacionais, pois mostra que quando os efeitos viscosos e de variação de entropia são pequenos e o campo é irrotacional em um dado ponto, o escoamento será sempre irrotacional. Por outro lado, se uma determinada massa de fluido apresenta circulação diferente de zero em um dado instante, essa circulação se conserva à medida em que a massa se desloca.

Um mecanismo de geração de vorticidade nos sistemas naturais provém portanto, das irreversibilidades viscosas ou de misturas de massas de fluido com características distintas. Se, em um instante inicial, a vorticidade contiver um modo da forma:

$$v_x = \exp(i\kappa x) + \dots$$

o termo não linear da equação de Navier dará origem progressivamente, a modos com vetores de onda maiores, pois:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \dots = -\exp(i\kappa x)i\kappa \exp(i\kappa x) + \dots = -i\kappa \exp(2i\kappa x) + \dots$$

isso é os vórtices se quebram progressivamente, até que atinjam números de Reynolds suficientemente baixos para que os efeitos dissipativos se manifestem e o vórtice se desfaça por efeito da viscosidade (ver também a Sec. 3.17). Os mecanismos de produção e de dissipação de vorticidade em fluidos em movimento estão representados esquematicamente na Fig. 3.13

### 3.15 O Teorema de Crocco

O Teorema de Crocco mostra a relação entre variações de entropia e produção de vorticidade sob outro aspecto. O teorema é válido na ausência de efeitos viscosos.

Consideremos a equação de Euler (Eq. 3.27), desprezando efeitos gravitacionais:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p$$

Por outro lado sabe-se da termodinâmica que

$$T \mathbf{grad} s = \mathbf{grad} h - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p$$

Substituindo o termo  $-1/\rho \mathbf{grad} p$  da equação de Euler pela expressão acima obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = T \mathbf{grad} s - \mathbf{grad} h$$

Passando o termo  $\mathbf{grad} h$  para o lado esquerdo da equação e agrupando-o com o termo  $\mathbf{grad} (v^2/2)$  obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = T \mathbf{grad} s$$

ou:

$$T \mathbf{grad} s = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} h_0 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} \quad (3.79)$$

que é a forma geral do Teorema de Crocco. Em notação tensorial:

$$T \frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial h_0}{\partial x_i} - \varepsilon_{ijk} v_j \varepsilon_{kmn} \frac{\partial v_n}{\partial x_m}$$

No caso de campos de velocidade permanentes com entalpia de estagnação constante  $T \mathbf{grad} s = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}$ , o que mostra que o gradiente de entropia tem a direção de  $-\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}$ .

O teorema de Crocco generaliza a equação de Bernoulli, pois no caso de escoamentos permanentes, isoentrópicos e a temperatura constante  $\mathbf{grad} s = 0$  e  $\mathbf{grad} h_0 = \mathbf{grad} (p/\rho + v^2/2)$ . O teorema de Crocco reduz-se a:

$$\mathbf{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}$$

que é uma das formas da equação de Bernoulli.

### 3.16 Hidrostática

No caso de fluidos em repouso no campo gravitacional a equação de Euler toma a forma:

$$\mathbf{grad} p = \rho \mathbf{g} \quad (3.80)$$

Se um fluido como a atmosfera estiver em equilíbrio no campo gravitacional o gradiente de pressão é paralelo à aceleração da gravidade, isto é, a pressão só depende de  $z$ . Consequentemente a massa específica é dada por:

$$\rho = -\frac{1}{g} \frac{dp}{dz}$$

e depende da temperatura somente. A pressão e a massa específica determinam a temperatura, que por sua vez, também depende apenas de  $z$ . Portanto, pressão, massa específica e temperatura dependem apenas da altitude, se a atmosfera estiver em equilíbrio. Esta propriedade mostra que se a temperatura na mesma cota for diferente em diferentes latitudes o estado de repouso não é mais possível.

## 3.17 Efeitos da Não Linearidade das Leis de Evolução

### 3.17.1 Introdução

Equações não lineares são, por definição, as que contém termos com produtos de incógnitas ou de funções das incógnitas. Mostramos nessa seção, que a não-linearidade das leis de evolução age muitas vezes, como um mecanismo de saturação de instabilidades e de multiplicação do conteúdo harmônico das funções que descrevem o estado do sistema. No entanto, para que os novos modos do conteúdo harmônico sejam intensos o bastante para alterar de forma significativa o estado inicial dos sistemas é necessário que o mesmo se encontre suficientemente longe do equilíbrio. Mas os efeitos não lineares não se restringem à saturação de instabilidades e ao aumento do conteúdo harmônico do estado do sistema. Mostramos como há casos em que condições iniciais arbitrariamente próximas se afastam rapidamente, o que faz com que se perca a capacidade de prever o estado futuro de sistemas regidos por leis de evolução determinísticas, uma vez que a precisão com que se conhece a condição inicial dos mesmos nunca é completa [4, 27, 28, 57, 47]. Finalmente, mostramos que é necessário que o sistema disponha de um número mínimo de graus de liberdade, do contrário a capacidade de multiplicação do conteúdo harmônico não se expressa por completo. Essas questões são abordadas nas seções que se seguem.

### 3.17.2 Multiplicação do conteúdo harmônico em dinâmicas não lineares

Examinemos alguns exemplos de evolução de sistemas físicos:

#### Sistema massa-mola

Consideremos o sistema massa-mola ilustrado na Fig. (3.14), onde  $m$  e  $\kappa$  são constantes. A equação do movimento desse sistema é dada por  $m\ddot{x} + \kappa x = F(t)$ . Seja qual for a forma da força  $F(t)$  aplicada ao sistema, como por exemplo:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 \\ \text{sen}^2 \omega t \\ \text{sen} \omega t + \text{sen} 2\omega t \end{cases}$$

Essa equação é linear, pois não contém produtos das incógnitas, que são  $x$  e suas derivadas.

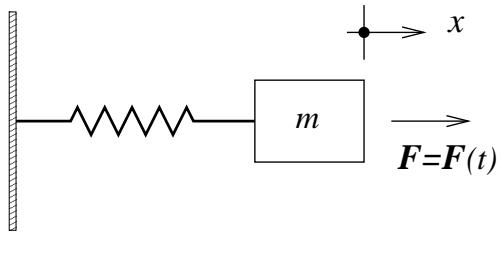


Figura 3.14: Força atuando em um sistema massa-mola

#### Equação de difusão da temperatura em sólidos

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho C_p} \nabla^2 T,$$

onde  $C_p$  é o calor específico do material. Essa equação é linear se  $\kappa/\rho C_p$  for constante e não-linear se  $\kappa/\rho C_p$  depender da temperatura.

## Pêndulo

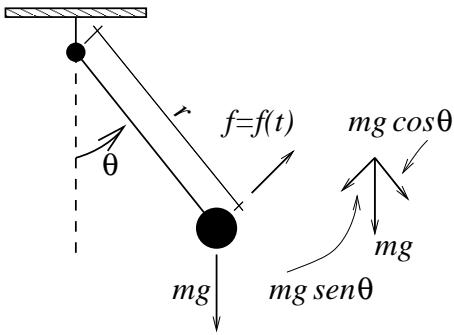


Figura 3.15: Esquema de forças atuando em um pêndulo

que é linear. Esse exemplo mostra que o comportamento não-linear depende não apenas da dinâmica do sistema, mas também do nível de forçagem aplicado ao mesmo, conforme mencionado na Sec. (3.17.1).

Sabe-se que sistemas lineares apresentam resposta proporcional ao sinal de *entrada*, ou forçagem. Consideremos o sistema cuja dinâmica é descrita por:

$$m\ddot{x} + \kappa x = A \operatorname{sen} \omega t \quad t = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

Procuramos uma solução da forma:

$$x = X_0 \operatorname{sen} \omega t,$$

que é uma solução particular da equação acima. Substituindo a solução na equação do movimento encontramos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X_0 \omega \cos \omega t \\ \ddot{x} &= -X_0 \omega^2 \operatorname{sen} \omega t \\ -mX_0 \omega^2 \operatorname{sen} \omega t + \kappa X_0 \operatorname{sen} \omega t &= A \operatorname{sen} \omega t \\ -mX_0 \omega^2 + \kappa X_0 &= A \end{aligned}$$

onde se obtém finalmente:

$$X_0 = \frac{A}{m\omega^2 - \kappa}$$

o que mostra que, ao forçarmos o sistema com  $f(t) = A \operatorname{sen} \omega t$  o mesmo responde na forma:

$$x = \frac{A}{m\omega^2 - \kappa} \operatorname{sen} \omega t,$$

isso é, na mesma freqüência. Situação diferente ocorre no caso de um sistema não-linear.

## A equação de Duffing

Consideremos a equação de Duffing, cuja forma é:

$$\ddot{x} + x - x^3 = A \operatorname{sen} \omega t$$

A equação de Duffing pode ser re-escrita na forma:

$$\ddot{x} + x = A \operatorname{sen} \omega t + x^3$$

Podemos interpretar a equação de Duffing como sendo a de um sistema linear forçado por  $A \operatorname{sen} \omega t$  e, simultaneamente, por  $x^3$ . Se esse último contiver novas freqüências, o que de fato ocorre, a resposta do sistema conterá essas novas freqüências. O processo se repetirá e em pouco tempo a resposta do sistema conterá um largo espectro de harmônicos.

Mostramos a seguir que o termo  $x^3$  contém de fato novos harmônicos:

$$x = A \operatorname{sen} \omega t = A \left( -i \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} \right)$$

$$x^3 = -i A^3 \left( \frac{e^{3i\omega t} - 3e^{i\omega t} + 3e^{-i\omega t} - e^{-3i\omega t}}{8} \right)$$

O exemplo acima mostra capacidade de geração de harmônicos, dos sistemas não lineares. Podemos dar uma interpretação ao significado do aumento do conteúdo harmônico do estado de um sistema através de uma analogia entre os componentes de um vetor e da decomposição de uma função nos elementos de uma base. No caso de um vetor, podemos escrever:

$$\mathbf{X} = \sum x_i \mathbf{e}_i \quad (3.81)$$

onde  $x_i$  é a coordenada do vetor na direção do elemento de base  $\mathbf{e}_i$ . Podemos interpretar as coordenadas de um vetor, como a “quantidade” do elemento de base correspondente, necessária para descrever o vetor  $\mathbf{X}$ . No caso de uma função:

$$f = \sum A_n \mathbf{e}_n \quad (3.82)$$

onde  $\mathbf{e}_n$  são os elementos de uma base, como senos e cossenos e  $A_n$ , a amplitude de cada modo, necessária para compor a função. A amplitude  $A_n$  funciona portanto como a “coordenada” da função, relativa ao elemento de base, ou modo correspondente. Como no caso dos vetores, as funções são definidas em espaços cuja dimensão é igual ao número de modos necessários para descrevê-la. E vimos que a não linearidade dos sistemas naturais aumenta o número de modos que descreve o estado dos mesmos, isso é as funções que caracterizam o estado dos sistemas são descritas em espaços cuja dimensão varia com o tempo. O estado dos sistemas torna-se portanto, progressivamente mais complexo. Os sub-harmônicos não estão excluídos, podendo igualmente ser descritos por um harmônico fundamental, de referência, e por seus múltiplos [19, 14].

### 3.17.3 Caos determinístico em sistemas dinâmicos discretos

O fato de o conteúdo harmônico das funções que descrevem o estado de um sistema governado por uma lei de evolução não linear em geral aumentar com o tempo abre a possibilidade

de que o comportamento do mesmo possa apresentar um caráter aperiódico. Mostremos, através de um exemplo, que o fenômeno pode de fato ocorrer e que, adicionalmente, condições iniciais arbitrariamente próximas podem dar origem a evoluções que são inicialmente próximas, mas que se afastam progressivamente, o que faz com que nossa capacidade de previsão da evolução dos sistemas seja, frequentemente, restrita a um horizonte limitado de tempo.

Consideremos a dinâmica discreta, definida por (mapa logístico):

$$X^{n+1} = 4\mu X^n (1 - X^n)$$

em que o valor de  $X$  é calculado recursivamente, em sucessivas iterações.  $n$  é o número da iteração considerada,  $0 < \mu < 4$  e  $X^0$  é o valor inicial atribuído a  $X$ , com  $0 < X < 1$ . Escolhe-se um valor fixo para o parâmetro  $\mu$  e determina-se  $X^1$ , o valor de  $X$  na primeira iteração. O resultado,  $X^1$ , é usado para calcular  $X^2$ , que é o valor de  $X$  na segunda iteração e procede-se assim, sucessivamente. O membro direito da Eq. (3.83) é uma parábola, cujas raízes estão nos pontos  $X = 0$  e  $X = 1$ . Esses dois valores são *pontos fixos* da dinâmica, no sentido de que, se escolhidos como condição inicial, então  $X^{n+1} = X^n$ . A construção da sequência de valores sucessivos pontos, ou série temporal, pode ser visualizada graficamente: parte-se de um valor inicial e obtém-se o valor de  $X$  da primeira iteração, sobre a parábola. Esse valor é transportado para o eixo das abscissas através da reta  $X^{n+1} = X^n$  e usado para calcular o valor de  $X$  na iteração seguinte. A dinâmica tem um terceiro ponto fixo, no cruzamento da reta  $X^{n+1} = X^n$  com a parábola.

Identificamos seis comportamentos diferentes da sequência obtida pela aplicação recursiva da

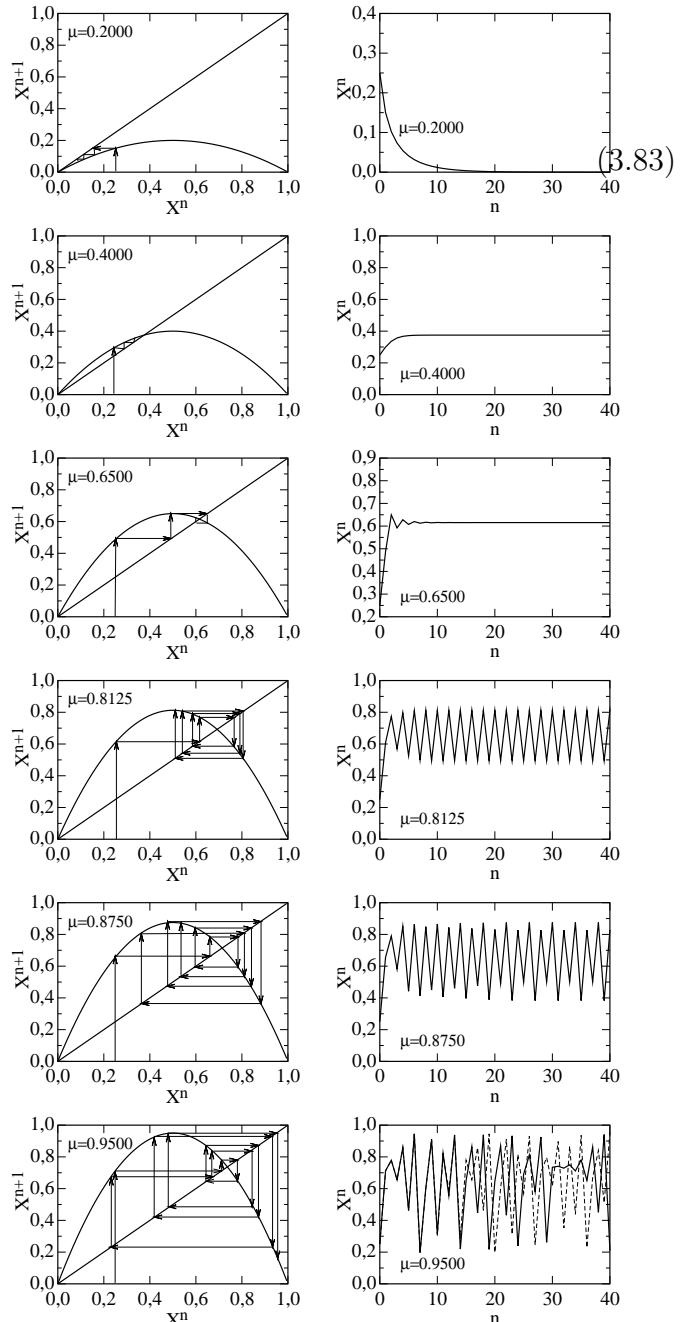


Figura 3.16: Caos determinístico em sistemas dinâmicos discretos.

Eq. (3.83), dependendo do valor de  $\mu$ , que representa o nível de forçagem, ou *parâmetro de bifurcação* do sistema. Os resultados são mostrados na Fig. (3.16). Para valores de  $\mu < 0.25$  ( $\mu = 0,2$  no exemplo), a sequência converge para o ponto fixo  $X = 0$ . Aumentando-se  $\mu$  para um valor acima de 0,25 ( $\mu = 0,4$  no exemplo), ocorre a primeira alteração qualitativa (bifurcação) no comportamento do sistema: a evolução se processa de forma monotônica para o ponto fixo definido pela intersecção da reta  $X^{n+1} = X^n$  com a parábola. Pode-se verificar sem dificuldades, que a sequência converge sempre para esse ponto fixo, partindo de qualquer condição inicial diferente de  $X = 0$  ou  $X = 1$ . Aumentando-se o valor de  $\mu$  para o valor 0,650, observa-se o comportamento da sequência após a segunda bifurcação: o sistema evolui para o mesmo ponto fixo, oscilando porém, antes de atingi-lo. Em  $\mu = 0,8125$ , o sistema já passou por nova bifurcação: a sequência oscila indefinidamente, com uma freqüência bem definida, sem convergir para nenhum ponto fixo. Aumentos subsequentes do valor de  $\mu$  levam a sucessivas bifurcações, em que o período de oscilação dobra. A Fig. (3.16) mostra apenas o primeiro dobramento de período. Adicionalmente, a distância entre duas bifurcações sucessivas diminui progressivamente, de forma que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta\mu^n}{\Delta\mu^{2n}} = 4,6692016\dots$$

Esse valor independe da forma exata do mapa, sendo suficiente que o mesmo tenha um ponto de mínimo. A partir de  $\mu = 0,8924864\dots$ , a sequência torna-se aperiódica. Além disso, trajetórias que partem de condições iniciais arbitrariamente próximas afastam-se progressivamente e tornam-se não mais comparáveis depois de um número de finito de iterações.

Trata-se de um caso de *caos determinístico*, com trajetórias aperiódicas, *sensibilidade às condições iniciais*, mas com a evolução regida por uma lei *determinística* [57, 4, 23]. Os números  $4,6692016\dots$  e  $\mu = 0,8924864\dots$  são chamados de constantes de Feigenbaum.

Em todas as sequências mostradas na Fig. (3.16), a condição inicial é  $X = 0.25$ . A última linha mostra também uma sequência que se inicia em  $X = 0.2501$  (em linha tracejada). As duas trajetórias se confundem inicialmente, mas se afastam aos poucos e tornam-se muito diferentes após certo número de ciclos, ilustrando o fenômeno de sensibilidade às condições iniciais.

A Eq. (3.83) pode ser interpretada como proveniente da discretização de uma equação de evolução do tipo:

$$\frac{dX}{dt} = \lambda X - gX^2 \quad (3.84)$$

que pode se originar do truncamento da série que representa uma dinâmica não linear, em que apenas os dois primeiros termos foram mantidos. Subtraindo  $X^n$  da Eq. (3.83) e remanejando os termos, obtemos:

$$\begin{aligned} X^{n+1} - X^n &= \\ (4\mu - 1)X^n - 4\mu(X^n)^2 & \end{aligned}$$

O membro esquerdo da última equação, que é equivalente à Eq. (3.83), pode ser interpretado como uma representação discreta da Eq. (3.84), em que o passo de tempo é igual a 1.

### 3.17.4 Saturação como mecanismo de perda de informação e de amplificação de ruído – o Deslocamento de Bernoulli

A dinâmica representada pelo mapa logístico (Eq. 3.83) inclui mecanismo de saturação, representado pelo termo  $-(X^n)^2$ , que atua progressivamente com o aumento da variável  $X^n$ . Mostramos através do exemplo abaixo, como a saturação não linear dota os sistemas de mecanismo de perda de informação e, ao mesmo tempo, de amplificação de ruído [57].

Consideremos a função:

$$X^{n+1} = 2X^n \mod 2 \quad (\text{Deslocamento de Bernoulli}). \quad (3.85)$$

Essa função dá como resultado o valor inicialmente atribuído a  $x$  multiplicado por 2. Se o valor obtido ultrapassar 2, subtrai-se 2 do número obtido. Diferentemente do mecanismo contínuo de saturação contido na Eq. 3.83, o da Eq. 3.85 permite o crescimento do valor da função sem atuar até que esse ultrapasse um valor de corte, quando então atua. O efeito é melhor observado considerando números em base 2. Seja por exemplo, um número irracional, cujos primeiros algarismos são, em base 2  $X = 0,10110100100101$ . Multiplicar esse número por 2 equivale a deslocar a vírgula para a direita. Se o resultado ultrapassar 2, subtrai-se 2 do número obtido. Assim procedendo sucessivamente suprime-se de forma progressiva os algarismos mais significativos do número original, que mais informação contém, ao tempo em que se amplifica os menos significativos, isso é amplificada-se ruído.

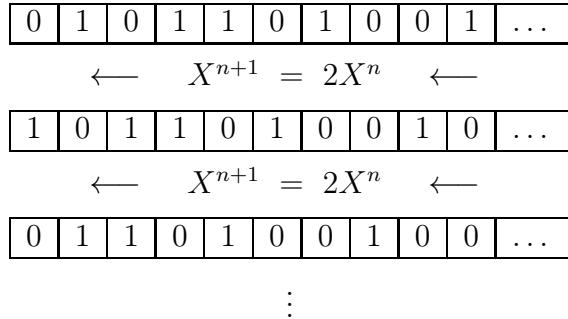


Figura 3.17: O deslocamento de Bernoulli. A multiplicação sucessiva por 2 resulta no deslocamento dos algarismos que o representam para a direita, com a supressão do mais à esquerda, isso é, do mais significativo, quando esse ultrapassa o valor 1. Ao mesmo tempo, os algarismos menos significativos são progressivamente amplificados.

### 3.17.5 Limitação dos efeitos não lineares

Consideremos um sistema físico com duas variáveis,  $u$  e  $v$ , sem dependência espacial, cuja evolução é regida por uma lei do tipo:

$$\frac{du}{dt} = f(u, v) \quad (3.86)$$

$$\frac{dv}{dt} = g(u, v) \quad (3.87)$$

Como exemplo, as variáveis  $u$  e  $v$  podem representar a concentração de duas espécies químicas que evoluem em um reator bem agitado e as funções  $f$  e  $g$ , representam a cinética da reação. Trata-se, por definição, de um sistema *autônomo*, onde o lado direito das equações não contém o tempo de forma explícita. Esse sistema tem dois graus de liberdade, no sentido de que pode-se atribuir qualquer valor às variáveis  $u$  e  $v$ , em um instante inicial. Sua evolução pode ser representada no *espaço de fases*, que é o plano das variáveis independentes do sistema. A condição inicial desse sistema é representada por um ponto no espaço de fases. Os estados estacionários, ou pontos fixos desse sistema são tais que  $f(u, v) = g(u, v) = 0$ . À medida que o tempo passa, o ponto que representa o estado do sistema desloca-se e descreve uma trajetória no espaço de fases. O objetivo da teoria de sistemas dinâmicos é determinar o conjunto de todas as trajetórias possíveis no espaço de fases do sistema. A inclinação da tangente às trajetórias é obtida dividindo-se a Eq. 3.86 pela Eq. 3.87. Obtém-se:

$$\frac{du}{dv} = \frac{f(u, v)}{g(u, v)}$$

Sendo a dinâmica determinística, a inclinação da tangente é bem definida, isso é, tem um único valor e a trajetória que passa pelo ponto é única. Exceção a essa regra são os pontos fixos, nos quais o cruzamento das trajetórias é possível. A unicidade das trajetórias, a partir de uma condição inicial especificada impõe severa restrição a sistemas com dois graus de liberdade. De fato, esses sistemas não podem exibir comportamento caótico [4]. A passagem de dois para três graus de liberdade altera de forma radical essa restrição, pois, em três dimensões ou mais, as trajetórias podem se deslocar entre dois pontos quaisquer do espaço de fases, sem nunca interceptar outra trajetória.

Dinâmicas descritas por leis de evolução contendo derivadas em relação de ordem mais alta podem ser reescritos na forma de um sistema de equações de primeira ordem. Tomemos como exemplo um sistema massa-mola-amortecedor, da forma:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \kappa x = 0 \quad (3.88)$$

Fazendo  $\dot{x} = y$ , reescrevemos essa equação na forma de um sistema autônomo de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -by - \kappa x\end{aligned}$$

O que mostra tratar-se de um sistema com dois graus de liberdade. O número de graus de liberdade pode também ser identificado a partir da equação original (Eq. 3.88), pois pode-se atribuir valor a duas das variáveis da mesma, como por exemplo, a  $x$  e a  $\dot{x}$ . O valor de  $\ddot{x}$  fica determinado por esses dois valores e pela lei de evolução. O pêndulo não pode portanto, exibir comportamento caótico, em virtude de só dispor de dois graus de liberdade. Essa situação se altera, caso o pêndulo seja movido por forçagem externa, que se constitui de um novo grau de liberdade, acrescentado à dinâmica. O pêndulo forçado apresenta de fato, comportamento caótico.

Em conclusão, três são os requisitos para a ocorrência de caos determinístico, em sistemas com número finito de graus de liberdade:

1. Leis de evolução não-lineares e distância suficiente de pontos de equilíbrio, para que os efeitos não-lineares possam agir;

2. Sensibilidade às condições iniciais;
3. Ao menos três graus de liberdade.

### 3.17.6 Sistemas com dependência espacial

Sistemas com dependência espacial são de dimensão infinita, pois o estado de cada ponto do espaço é descrito por uma equação diferente. O número de graus de liberdade é muito maior do que no caso de sistemas sem dependência. Trata-se dos sistemas cuja evolução é regida por equações a derivadas parciais. As propriedades gerais da solução dessas equações não se restringem à mera generalização das propriedades de sistemas regidos por equações ordinárias.

## 3.18 Problemas

1. A componente de velocidade  $v_y$  de um escoamento bi-dimensional, estacionário e incompressível, de um fluido newtoniano é dada por  $v_y = e^{-2y} \cos x$ . Determinar a componente  $v_x$  da velocidade e o gradiente de pressões.
2. O campo de velocidades incompressível de um escoamento de água é dado por  $\mathbf{v} = (Ax + By)\mathbf{i} - Ay\mathbf{j}$ , onde  $A = 1\text{ s}^{-1}$  e  $B = 2\text{ s}^{-1}$  e as coordenadas são medidas em metros. Determinar a magnitude e o sentido da aceleração de uma partícula no ponto  $(x, y) = (1, 2)$  e o gradiente de pressão no mesmo ponto. Massa específica da água:  $\rho = 993\text{ kg/m}^3$ . Viscosidade dinâmica da água:  $\mu = 1,0 \times 10^{-3}\text{ Ns/m}^{-2}$ .
3. O campo de velocidades dado por:

$$v_r = 10 \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta \quad v_\theta = 10 \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta \quad v_z = 0$$

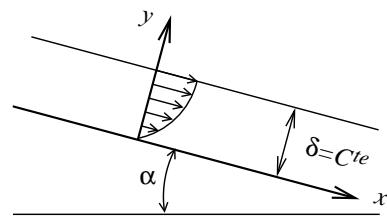
representa um possível escoamento incompressível? Em caso afirmativo determine o gradiente de pressão desprezando efeitos viscosos e gravitacionais.

4. A componente radial de um escoamento incompressível é dada, no plano  $(r, \theta)$  por  $v_r = -A \cos(\theta/r^2)$ . Determinar uma solução possível para a componente  $v_\theta$ , o gradiente de pressões e calcular o **rot**  $\mathbf{v}$ .
5. A pressão medida na atmosfera, em um ponto distante de um tornado, que pode ser representado simplificadamente como um vórtice irrotacional em que  $v_r \equiv 0$  e  $v_\theta = -\Gamma/2\pi r$ , é zero. Se a velocidade em  $r = 200\text{ m}$  for de  $200\text{ m/s}$ , estime a velocidade e a pressão em  $r = 20\text{ m}$ . Obtenha uma expressão para a pressão em função do raio.
6. A distribuição de velocidades em um escoamento permanente, bidimensional, no plano  $x, y$  é dada por:

$$v_x = ax - b; \quad v_y = c - ay; \quad v_z = 0.$$

onde  $a = 2\text{ s}^{-1}$ ,  $b = 5\text{ m/s}$ ,  $c = 3\text{ m/s}$  e a distribuição de forças de campo é  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ . Determine:

- O campo de velocidades representa o escoamento de um fluido incompressível?
  - Encontre o ponto de estagnação do campo;
  - Obtenha uma expressão para o gradiente de pressão;
  - Determine o raio de curvatura da linha de corrente em  $(1, 3)$ ;
  - Avalie a diferença de pressão entre a origem e o ponto  $(1, 3)$  sabendo que a massa específica do fluido é  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ .
7. Calcular a vazão e os fluxos de quantidade de movimento e de energia cinética por unidade de comprimento na direção  $z$ , de uma lâmina de fluido com espessura  $\delta$ , que escoa sobre uma placa plana conforme figura ao lado. A massa específica do fluido é  $\rho$ . O campo de velocidades é dado por:
- $$\mathbf{v} = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{\nu} \left( y\delta - \frac{y^2}{2} \right) \mathbf{i}$$
- Calcular o perfil de velocidades se a viscosidade do fluido variar ao longo da direção  $y$  segundo a lei  $\mu = \mu_0 (1 + y/\delta)$ .
8. Um campo de velocidades é dado por  $\mathbf{v} = (Ax - B)\mathbf{i} + Cy\mathbf{j} + Dt\mathbf{k}$ , onde  $A = 0,2 \text{ s}^{-1}$ ,  $B = 0,6 \text{ ms}^{-1}$ ,  $D = 5 \text{ ms}^{-2}$  e as coordenadas são medidas em  $m$ . Determinar os valores de  $C$ , para que o escoamento seja incompressível e a aceleração de uma partícula ao passar pelo ponto  $(x; y) = (3; 2)$ .
9. O número de Reynolds crítico para a transição laminar-turbulento em tubos é  $Ud/\nu = 2000$ . Qual é o valor crítico da velocidade  $U$  em tubos de diâmetro  $d = 6 \text{ cm}$  e  $d = 60 \text{ cm}$  para:
- |                   | T (K) | $\mu (\text{Ns/m}^2)$  | $\rho (\text{kg/m}^3)$ |
|-------------------|-------|------------------------|------------------------|
| água              | 300   | $855 \times 10^{-6}$   | 1017                   |
| Ar                | 300   | $18,46 \times 10^{-6}$ | 0,861                  |
| óleo lubrificante | 350   | $3,56 \times 10^{-2}$  | 853,9                  |
| Etilenoglicol     | 350   | $0,342 \times 10^{-2}$ | 1079                   |
10. Um bombeiro reduz a área de saída do bocal de uma mangueira de incêndio, de modo que a velocidade dentro da mangueira seja muito pequena quando comparada com a da saída. Qual é a altura máxima que a água pode atingir se a pressão dentro da mangueira for de  $700 \text{ kPa}$ ? Massa específica da água:  $\rho = 1016 \text{ kg/m}^3$ ; Pressão atmosférica:  $P_{atm} = 101,3 \text{ kPa}$ .
11. Uma tubulação é utilizada para elevar água ( $\rho = 1013 \text{ kg/m}^3$ ) entre dois pontos. A diferença de nível (altura) entre os dois pontos é de  $5,0 \text{ m}$ . A curva característica da bomba e a curva da perda de carga da tubulação por efeito viscoso são dadas pela tabela abaixo. Pede-se determinar:
- A vazão de operação do sistema de bombeamento;
  - A potência de bombeamento requerida, no ponto de operação do sistema.

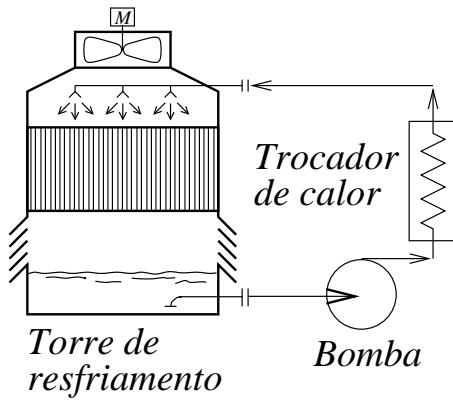


$Q_{vol} (m^3/s)$	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
$\Delta H_B (m)$	13,0	12,5	11,9	11,4	10,8	10,3	9,50	8,65	7,80	6,90	5,70
$\Delta H_T (m)$	5,93	6,45	7,08	7,83	8,70	9,69	10,8	12,0	13,3	14,8	16,3

onde:

- $Q_{vol}$ : Vazão volumétrica da bomba ou da tubulação;
- $\Delta H_B$ : Altura manométrica da bomba;
- $\Delta H_T$ : Perda de carga da tubulação por efeito viscoso.

12. Água a  $20^\circ C$  ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  e  $\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$ ) escoa em um canal de concreto, com largura  $a = 0,3 \text{ m}$  e profundidade  $b = 0,2 \text{ m}$ . Se a velocidade do escoamento for de  $0,1 \text{ m/s}$  qual deve ser a inclinação do canal? Assumir  $f = 0,027$ .
13. Água a  $20^\circ C$  ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 1,0 \times 10^{-3} \text{ NS/m}^2$ ) corre por efeito gravitacional em um tubo de  $1 \text{ mm}$  de diâmetro. Calcule a vazão supondo que o escoamento seja laminar e a pressão, constante ao longo do tubo. É razoável supor que o escoamento seja laminar?
14. Calcular a altura manométrica total e a potência da bomba de um sistema de água de resfriamento conforme fluxograma abaixo.



- Vazão do sistema:  $240 \text{ m}^3/\text{h}$ ;
- Diâmetro da tubulação:  $\phi = 150 \text{ mm}$ ;
- Comprimento da tubulação:  $200 \text{ m}$ ;
- Massa específica da água:  $991 \text{ kg/m}^3$ ;
- $\nu = 1,0019 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ;
- Perda de carga na torre:  $\Delta H = 6 \text{ m}$ ;
- Perda de carga no trocador (em  $m$ ):  $\Delta H = 15(v^2/2g)$ , onde  $v$  é velocidade do escoamento através dos tubos do trocador (diâmetro dos tubos:  $\phi_T = 125 \text{ mm}$ );

15. Água escoa verticalmente para baixo saindo de uma torneira cujo diâmetro de saída é  $D$ . Determinar o perfil do filete d'água em função da altura,  $D = D(z)$ , considerando  $z = 0$  na saída da torneira e sabendo que a velocidade nesse ponto é  $V_s$ . Considerar que a aceleração da gravidade tem módulo  $g$  e que o escoamento se faz em regime laminar. Utilizar a equação da continuidade para obter uma relação entre a velocidade e o diâmetro ao longo do filete para complementar a equação de Bernoulli e desprezar os efeitos viscosos (perdas).

16. Ar quente ( $\rho_q = 1,08 \text{ kg/m}^3$ ) escoa por uma chaminé vertical de seção quadrada com lado  $b = 0,20 \text{ m}$  e altura  $h = 3,0 \text{ m}$ . Determine a velocidade e a vazão em massa pela chaminé sabendo que a massa específica do ar exterior é  $\rho_f = 1,2 \text{ kg/m}^3$ . Considere  $K = 1,0$  na entrada,  $K = 0,3$  na saída e  $f = 0,003$  no trecho reto da chaminé.

17. As equações da continuidade e de Navier-Stokes para o escoamento bi-dimensional de um fluido incompressível são:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$ . Mostrar que este sistema pode ser reduzido à forma:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Sugestão: Derivar a equação de  $v_y$  em relação a  $x$ , a de  $v_x$  em relação a  $y$ , subtrair uma da outra, utilizar a equação da continuidade e a definição de  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ .

18. Escrever as equações de Euler e de Navier-Stokes sem a pressão, (Eqs. 3.30 e 3.73) utilizando a notação tensorial cartesiana; Nos casos em que a viscosidade cinemática não é constante a Eq. 3.73 toma a forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) + \operatorname{rot} [\operatorname{div} \nu (\mathbf{grad} \mathbf{v} + \mathbf{grad}^T \mathbf{v})].$$

Reescrever essa equação na forma tensorial cartesiana.

19. Mostrar que a equação da vorticidade  $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ , aplicável a um fluido compressível, e na presença de um campo de forças de corpo por unidade de massa  $\mathbf{F}$ , é dada por:

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \omega_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{km}}{\partial x_m} \right) + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial x_j}.$$

Reescrever essa equação na forma vetorial.

20. O campo de velocidades de um vórtice livre é dado por  $\mathbf{v} = v_\theta \mathbf{e}_\theta = (C/r) \mathbf{e}_\theta$ . Avaliar a vazão volumétrica por unidade de profundidade entre  $r_1 = 0,05 \text{ m}$  e  $r_2 = 0,07 \text{ m}$ , supondo  $C = 0,5 \text{ m/s}$ .

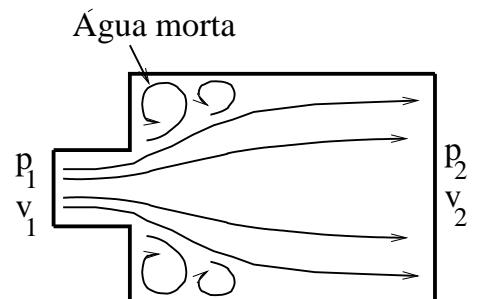
21. A experiência mostra que num alargamento brusco da seção de um tubo ocorre o descolamento dos filetes e a formação de uma região de *água morta*, que praticamente não exerce tensões tangenciais sobre as paredes. Mostrar que:

- No caso de um fluido incompressível, um alargamento brusco de seção resulta em:

$$p_1 - p_2 = \rho v_2 (v_2 - v_1)$$

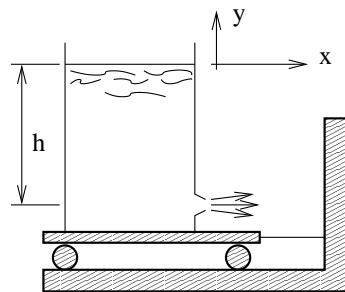
- A “perda de carga” em comparação com a equação de Bernoulli é:

$$\Delta p = \frac{\rho(v_1 - v_2)^2}{2}$$



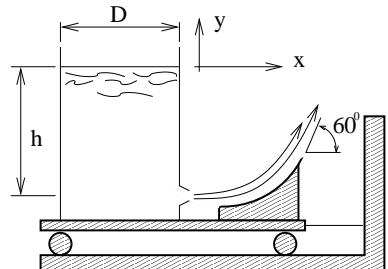
22. Um tanque de diâmetro  $D$  é cheio com água e preso a um carro conforme a figura abaixo. A água escoa através de um bocal de diâmetro  $d$ , situado na parte inferior do tanque e o carro é impedido de se movimentar através de um cabo, fixo à parede vertical. Pede-se:

- Deduzir uma expressão para a velocidade da água na saída do bocal;
- Uma expressão para a força atuando no cabo, em função da altura  $h$ ;
- O tempo de esvaziamento do tanque.

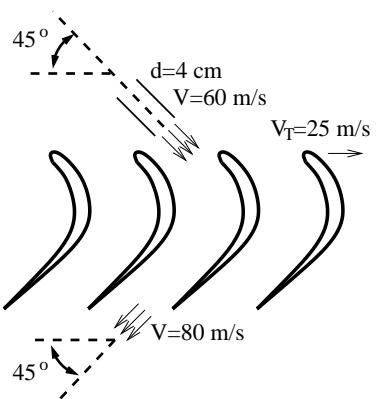


23. Um tanque de diâmetro  $D$  é cheio com água e preso a um carro conforme a figura abaixo. A água escoa através de um bocal de diâmetro  $d$ , situado na parte inferior do tanque e o carro é impedido de se movimentar através de um cabo, fixo à parede vertical. Pede-se:

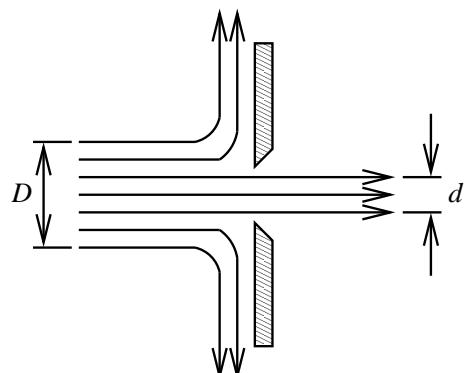
- Deduzir uma expressão para a velocidade da água na saída do bocal;
- Uma expressão para a força atuando no cabo, em função da altura  $h$ .



24. Água proveniente de um tubo com diâmetro de  $4\text{ cm}$  choca-se com as lâminas de uma turbina como mostra a figura ao lado. Determinar a potência de uma turbina com 50 pás, sabendo que a velocidade com a qual as mesmas se deslocam é de  $25\text{ m/s}$ . Massa específica da água:  $\rho = 1016\text{ kg/m}^3$ .



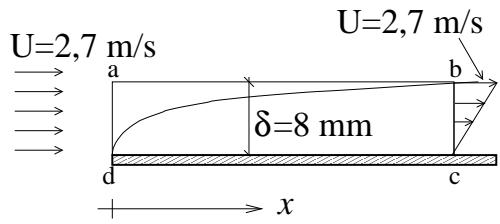
25. Um jato de fluido com massa específica  $\rho$  e diâmetro  $D$  incide com velocidade  $V$  sobre um anteparo conforme figura ao lado. Parte do jato atravessa o anteparo através de um orifício de diâmetro  $d$ , saindo com velocidade  $V$  e o restante é desviado perpendicularmente ao jato incidente. Determinar a magnitude e sentido da força que deve ser aplicada ao anteparo para mantê-lo em equilíbrio.



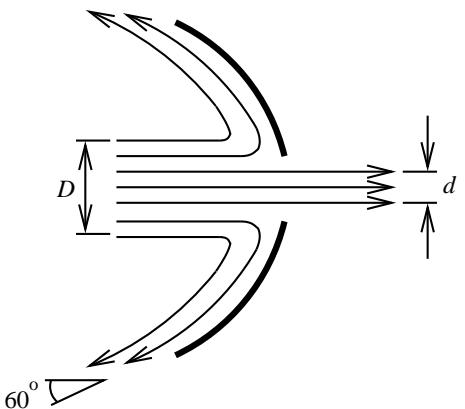
26. Ar ( $\rho = 1,02 \text{ kg/m}^3$ ) escoa sobre uma placa plana delgada com  $1,0 \text{ m}$  de comprimento e  $0,30 \text{ m}$  de largura. A velocidade do ar antes de atingir o bordo de ataque da placa é uniforme ( $U = 2,7 \text{ m/s}$ ). Ao atingir a placa, o escoamento desenvolve uma camada limite em que o campo de velocidades é independente de  $z$  e tal que:

$$\frac{v_x}{U} = \frac{y}{\delta}.$$

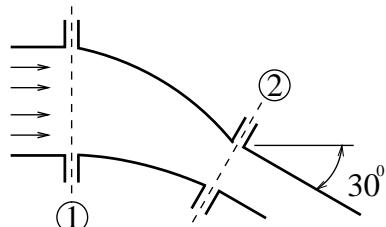
Usando o volume de controle  $abcd$  mostrado na figura ao lado, determinar a vazão em massa através da superfície  $ab$ . Qual é o valor e o sentido da força na direção  $x$  necessária para que a placa não se movimente?



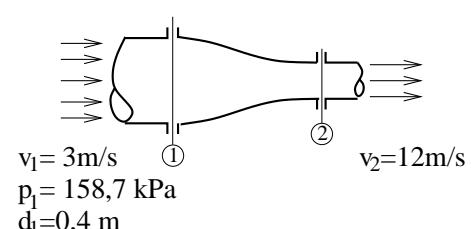
27. Um jato de fluido com massa específica  $\rho$  e diâmetro  $D$  incide com velocidade  $V$  sobre um anteparo. Parte do jato atravessa o anteparo através de um orifício de diâmetro  $d$  e o restante é desviado conforme figura ao lado. Determinar a magnitude e sentido da força que deve ser aplicada ao anteparo para mantê-lo em equilíbrio, sabendo que a velocidade dos jatos que deixam o anteparo é igual a  $V$ .



28. A figura ao lado mostra uma curva reduutora de  $30^\circ$  no plano horizontal, através da qual escoa água ( $\rho = 1010 \text{ kg/m}^3$ ). Determinar as forças horizontais aplicadas pelos tubos adjacentes sobre a curva para sustentá-la, sabendo que a vazão volumétrica é  $Q = 0,11 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $p_1 = 200 \text{ kPa}$ ,  $A_1 = 0,0182 \text{ m}^2$ , e  $A_2 = 0,0081 \text{ m}^2$ .

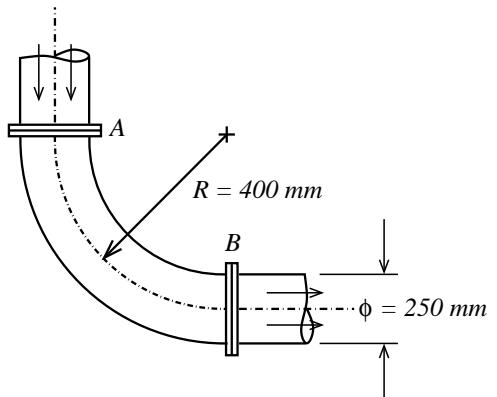


29. A figura ao lado mostra uma redução em um tubo que conduz gasolina ( $\rho = 720 \text{ kg/m}^3$ ). O volume interno da redução é de  $0,2 \text{ m}^3$  e sua massa, de  $25 \text{ kg}$ . Determinar a força exercida pela tubulação adjacente, para suportar a redução. Determinar a pressão no ponto 2 usando a equação de Bernoulli.

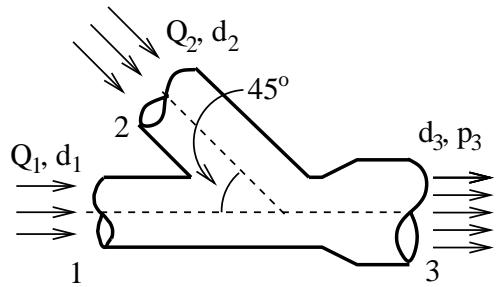


30. Uma tubulação de água ( $\rho = 1010 \text{ kg/m}^3$ ) contém uma curva  $AB$  no plano vertical, conforme mostrado na figura ao lado. A pressão na linha de centro do flange  $B$  é  $p_B = 0,5 \text{ MPa}$ . Calcular os esforços (forças e momentos) que agem nos flanges  $A$  e  $B$  nas seguintes situações:

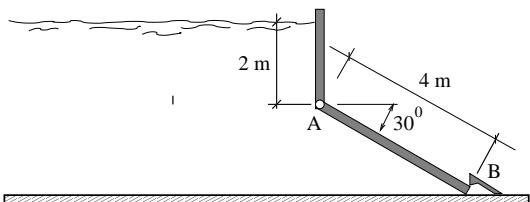
- (a) Com a água em repouso;
- (b) Com uma vazão de  $360 \text{ m}^3/\text{h}$ .



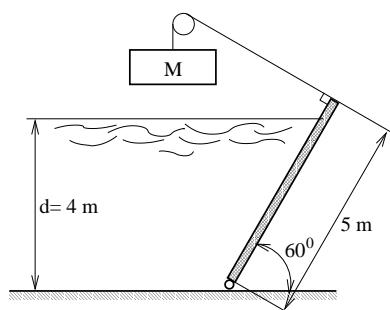
31. Uma peça de tubulação em forma de "Y" opera em regime estacionário, conduzindo um fluido de peso específico  $\rho$ , nas condições mostradas na figura ao lado. Os diâmetros dos bocais N.<sup>os</sup> 1, 2 e 3 são  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$ , enquanto as vazões volumétricas através dos bocais N.<sup>os</sup> 1 e 2, são  $Q_1$  e  $Q_2$ , respectivamente. A pressão no bocal N.<sup>o</sup> 3 é  $p_3$ . Determinar a força que deve ser aplicada à peça para mantê-la em equilíbrio.



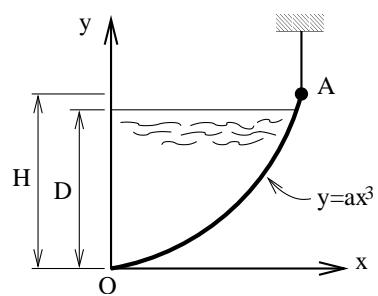
32. Se uma flutuação de pressão de  $-10^3 \text{ Pa}$  passar lentamente sobre o oceano, qual será a elevação local do nível do mar?
33. Uma comporta plana de espessura uniforme e largura de  $5 \text{ m}$  suporta a pressão de uma camada de água ( $\rho = 1010 \text{ kg/m}^3$ ), conforme figura ao lado. Determinar os esforços nos pontos A e B devidos à pressão hidrostática.



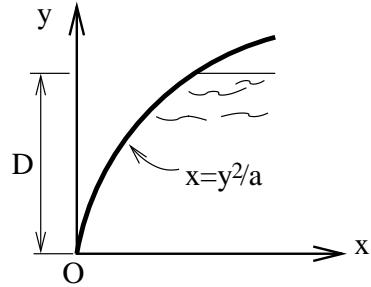
34. A comporta mostrada na figura ao lado tem  $3 \text{ m}$  de largura e massa desprezível. Para que valor da massa  $M$  a comporta ficará em equilíbrio? Massa específica da água:  $\rho = 1010 \text{ kg/m}^3$ .



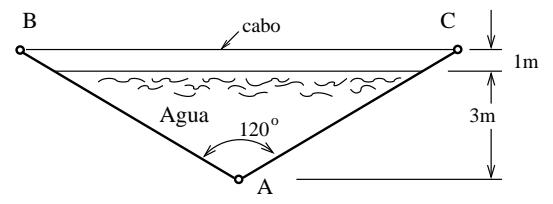
35. A comporta mostrada na figura ao lado é articulada no ponto O e suspensa por um cabo no ponto A. Determinar as forças aplicadas à comporta nos pontos O e A para que a mesma permaneça em equilíbrio. A massa específica do líquido e a largura da comporta na direção perpendicular à folha são, respectivamente,  $\rho$  e  $L$ .



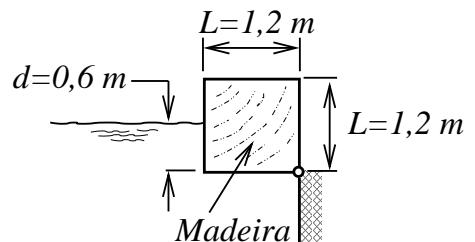
36. Determinar a força atuando sobre a comporta mostrada na figura ao lado e o momento aplicado pela coluna d'água no ponto O. Largura da comporta:  $w = 5\text{ m}$ , Espessura da lâmina d'água:  $D = 4\text{ m}$ ,  $a = 4\text{ m}$ , massa específica da água:  $\rho = 1010\text{ kg/m}^3$ .



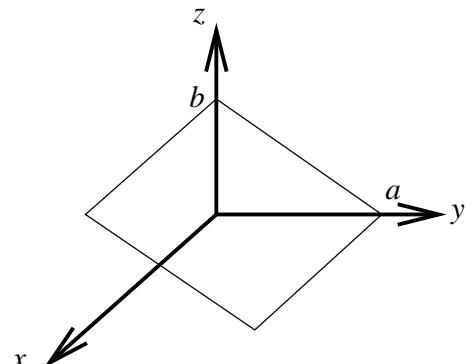
37. Um recipiente constituído por duas placas articuladas, de largura  $w = 2\text{ m}$ , é cheio com água, conforme a figura ao lado. As duas placas são mantidas na forma indicada por um cabo de aço, preso aos pontos B e C. Determinar a força que atua no cabo. Massa específica da água:  $\rho = 1016\text{ kg/m}^3$ .



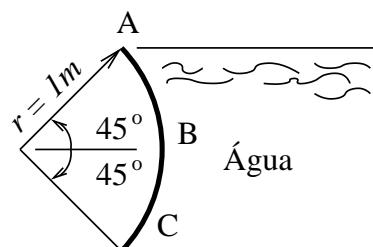
38. Um bloco de madeira longo, de seção quadrada, é articulado em uma de suas arestas e se encontra em equilíbrio quando imerso em água à profundidade mostrada. Avalie a massa específica relativa da madeira,  $\rho_{\text{madeira}}/\rho_{\text{água}}$ , desprezando o atrito no pivô.



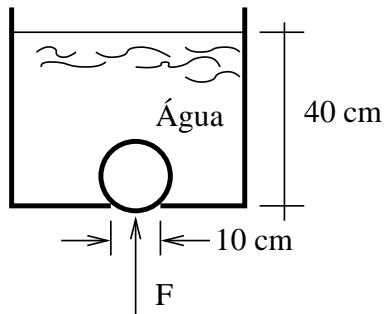
39. O campo de velocidades de um fluido incompressível com massa específica  $\rho$  é dado por  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$ , onde  $v_x = Axy^2$ , sendo  $A$  uma constante. Determinar a componente  $v_y$  do campo e os fluxos de massa, quantidade de movimento e energia cinética transportados por este escoamento através do retângulo que tem dois lados paralelos ao eixo  $x$ , localizados em  $y = a$  e  $z = b$ , respectivamente, conforme mostrado na figura.



40. Uma comporta ABC tem a forma de um arco de circunferência de  $45^\circ$ , conforme figura ao lado. Determinar as forças horizontal e vertical que agem sobre a comporta, em virtude da carga hidrostática exercida pela coluna de água.



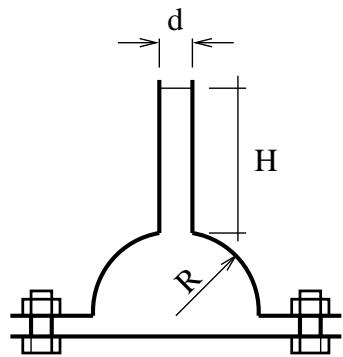
41. Uma esfera de  $20\text{ cm}$  de diâmetro pesando  $20\text{ kg}$  fecha um furo de  $10\text{ cm}$  de diâmetro existente no fundo de um tanque, conforme figura ao lado. Determinar a força necessária para deslocar a esfera do furo.



42. Uma calota semi-esférica de massa  $M$  e raio interno  $R$  é cheia até uma altura  $H$  acima do polo superior, com um líquido de massa específica  $\rho$ , conforme figura ao lado. A calota é fixa a uma superfície horizontal por meio de seis parafusos igualmente espaçados. Mostrar que a força atuando em cada parafuso, em decorrência da pressão interna, é dada por:

$$F = \frac{\pi \rho g R^2}{6} \left( H - \frac{R}{3} \right).$$

Considerar  $d \ll R$ .



# Capítulo 4

## Conservação da Energia

### 4.1 Introdução

Esse capítulo apresenta as diversas equações que resultam da aplicação do princípio de conservação da energia ao escoamento de um fluido. Se de um lado o tratamento é facilitado pelo fato de ser a energia uma grandeza *escalar*, ao contrário do que ocorre no caso da equação de conservação da quantidade de movimento que é *vetorial*, de outro, o número de equações que resultam da aplicação do princípio de conservação da energia é maior.

Obtemos as equações de evolução da energia cinética de uma partícula de fluido, da soma de sua energia cinética com a energia interna e de sua energia interna somente. Obtemos duas equações de evolução da entalpia de uma partícula, das quais uma é largamente utilizada em problemas de escoamentos compressíveis unidimensionais. Abordamos também o problema do balanço de energia de equipamentos de processo.

A equação de evolução da entropia surge da comparação da equação da entalpia com uma equação da termodinâmica e mostra que a dissipação viscosa torna irreversível o processo de evolução de massas de fluido. No entanto, em escoamentos onde o número de Reynolds é alto a dissipação viscosa é pequena na maior parte do campo. Neste caso a dissipação devido a efeitos viscosos só é importante em regiões onde o gradiente de velocidade é elevado, como por exemplo em camadas limite e em interfaces entre jatos e meios que se encontram em repouso. A produção de entropia devido a efeitos viscosos se concentra portanto apenas nestas regiões.

Mas a irreversibilidade não ocorre somente na presença de efeitos viscosos. Ela surge também em processos de mistura como por exemplo, o de massas contendo espécies químicas diferentes, ou o de massas a temperaturas diferentes. Estes processos ocorrem comumente na dinâmica da atmosfera e dos oceanos.

Obtemos por fim, a equação da evolução da temperatura de uma partícula para o caso de fluido incompressível. Essa equação redonda na de condução de calor em sólidos, no caso em que o campo de velocidades é identicamente nulo.

## 4.2 Equação da Energia Cinética ( $v^2/2$ )

A equação da energia cinética é obtida multiplicando-se a equação de conservação da quantidade de movimento escalarmente pela velocidade. Consideraremos essa equação na forma:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) + g_i$$

Multiplicando-a escalarmente pela velocidade obtemos um equação escalar, isso é, sem índices livres. Como o índice livre da equação é  $i$  devemos multiplicá-la por  $v_i$ . Obtemos [5, 13]:

$$v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v_i v_i}{2} \right) + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_i v_i}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \left( v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) + v_i g_i.$$

Como  $v_i v_i = v_x v_x + v_y v_y + v_z v_z = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$  temos:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + v_i g_i. \quad (4.1)$$

Em notação vetorial:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}.$$

Mas:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = v_x \frac{Dv_x}{Dt} + v_y \frac{Dv_y}{Dt} + v_z \frac{Dv_z}{Dt} = \frac{D}{Dt} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right)$$

Portanto:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}. \quad (4.2)$$

O membro esquerdo das Eqs. (4.1) e (4.2) representa a derivada substancial da energia cinética por unidade de massa de uma partícula de fluido em movimento, ou seja, a taxa de variação por unidade de tempo da energia cinética da partícula. Conseqüentemente, ao multiplicarmos a equação de conservação da quantidade de movimento escalarmente pela velocidade obtemos a primeira das equações procuradas, da energia cinética.

## 4.3 Equação da Energia Total ( $e + v^2/2$ )

A equação da energia total é obtida através de procedimento Semelhante ao adotado quando deduzimos as equações da continuidade e de conservação da quantidade de movimento: considera-se um volume de controle fixo no espaço e iguala-se a taxa de variação da energia dentro do mesmo com o balanço dos diversos fatores que contribuem para que a energia total contida dentro do volume varie. Obtém-se a forma integral da equação de energia. Com o auxílio do teorema de Gauss passa-se à forma diferencial.

Consideremos um volume fixo no espaço, conforme a Fig. (4.1). A taxa de variação da energia total ( $e + v^2/2$ ) dentro desse volume deve incluir o balanço do fluxo de energia através das paredes do volume, o trabalho das forças de superfície e de volume, o balanço do fluxo de calor através da superfície de controle e o calor eventualmente gerado dentro do volume por reações químicas, efeito Joule ou de outra forma [5, 13].

Esquematicamente:

$$\begin{aligned}
 & \left( \text{Taxa de acumulação de } (e + v^2/2) \text{ dentro do volume de controle, isto} \right) \\
 & \left( \text{é, variação de } (e + v^2/2) \text{ dentro do volume por unidade de tempo} \right) = \\
 & - \left( \text{Fluxo líquido de } (e + v^2/2) \text{ para fora} \right) + \left( \text{Trabalho das forças aplicadas à su-} \right. \\
 & \left. \text{perfície de controle por unidade de tempo} \right) \\
 & + \\
 & \left( \text{Trabalho das forças de volume por} \right) - \left( \text{Fluxo líquido de calor para fora do} \right. \\
 & \left. \text{volume} \right) \\
 & + \\
 & \left( \text{Taxa de geração de calor dentro do volume} \right)
 \end{aligned}$$

Essa forma exclui algumas formas de transferência de energia entre o meio e o volume de controle, como por exemplo o trabalho que entra ou sai por uma pequena região, através de um eixo, como é o caso de motores, geradores ou turbinas. Esse caso é tratado na Sec. (4.8). Procuramos expressar cada uma das parcelas acima em forma matemática. A taxa de acumulação de  $(e + v^2/2)$  dentro do volume de controle é dada por:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV$$

Para calcularmos o fluxo líquido de  $(e + v^2/2)$  para fora do volume lembramos que o fluxo de massa através de um elemento de área  $dA$  da superfície de controle é dado por  $\rho v_j n_j dA$ . Se o multiplicarmos pela energia total por unidade de massa, isso é, por  $(e + v^2/2)$ , teremos uma expressão para o fluxo de energia total que cruza o elemento de área:  $\rho (e + v^2/2) v_j n_j dA$ . Integrando esse termo ao longo de toda a superfície de controle teremos o fluxo líquido de energia para fora da superfície de controle:

$$\oint_S \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) v_j n_j dA.$$

O trabalho por unidade de tempo das forças de superfície é dado pelo produto escalar da força com a velocidade local. O elemento de força de superfície é, por sua vez, dado por

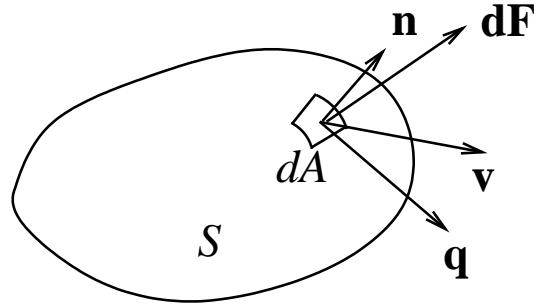


Figura 4.1: Volume de controle ao qual se aplica o princípio de conservação da energia.  $\mathbf{n}$  é o vetor de comprimento unitário perpendicular à superfície no ponto considerado,  $\mathbf{v}$ ,  $d\mathbf{F}$  e  $\mathbf{q}$  são, a velocidade, a força e o fluxo de calor nesse ponto da superfície.

$\sigma_{ij}n_j dA$ , conforme visto no capítulo anterior. O trabalho elementar por unidade de tempo das forças de superfície é então dado por  $v_i \sigma_{ij} n_j dA$ .

O trabalho elementar por unidade de tempo das forças de volume é dado pelo produto escalar das forças de volume, que no caso presente é a força gravitacional, com o vetor velocidade:  $\rho v_i g_i dV$ .

Integrando o termo referente ao trabalho das forças de superfície ao longo de toda a superfície de controle e o das forças de volume em todo o volume obtemos:

$$\oint_S v_i \sigma_{ij} n_j dA + \int_V \rho v_i g_i dV$$

O fluxo de calor para fora do volume de controle através de um elemento de área  $dA$  da superfície é dado por  $q_j n_j dA$ .

O calor gerado em um elemento de volume por unidade de tempo é dado por  $\dot{Q} dV$ .

Integrando o primeiro termo ao longo de toda a superfície de controle e o segundo em todo o volume obtemos:

$$-\oint_S q_j n_j dA + \int_V \dot{Q} dV$$

Cabe notar que a primeira integral acima, com o sinal negativo à frente, calcula a taxa líquida de transferência de calor para dentro do volume de controle. Reagrupando todos os termos obtemos a equação da energia total na forma integral:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV &= -\oint_S \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) v_j n_j dA + \oint_S v_i \sigma_{ij} n_j dA + \\ &\quad \int_V \rho v_i g_i dV - \oint_S q_j n_j dA + \int_V \dot{Q} dV \end{aligned} \quad (4.3)$$

Os termos que multiplicam o fator  $\mathbf{n} dA$  nas integrais de superfície são grandezas vetoriais. O teorema de Gauss aplica-se portanto e estas integrais podem ser transformadas em integrais de volume. A forma integral da equação da energia total pode então ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV &= - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) v_j dV + \int_V \frac{\partial v_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV + \\ &\quad \int_V \rho v_i g_i dV - \int_V \frac{\partial q_j}{\partial x_j} dV + \int_V \dot{Q} dV. \end{aligned}$$

A equação acima deve se aplicar para volumes de qualquer tamanho, particularmente, para volumes infinitesimais  $dV$ . Considerando esse último caso e dividindo a equação resultante por  $dV$  e passando o primeiro termo do lado direito da equação acima para o esquerdo obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) v_j = \frac{\partial v_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i g_i - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \dot{Q}. \quad (4.4)$$

Os dois termos do membro esquerdo da equação acima se simplificam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) v_j = \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) = \rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \end{aligned}$$

pois  $\partial \rho / \partial t + \partial(\rho v_j) / \partial x_j = 0$  (equação da continuidade).

Reescrevemos o termo de  $\partial(v_i \sigma_{ij}) / \partial x_j$  e  $-\partial q_j / \partial x_j$  da Eq. (4.4), lembrando que  $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$  (Eq. 3.12):

$$\frac{\partial v_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} v_i (-p \delta_{ij} + \tau_{ij}) = -\frac{\partial}{\partial x_j} v_i p \delta_{ij} + \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial v_i p}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

O fluxo de calor é substituído por sua expressão, dada pela lei de Fourier:

$$q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (4.5)$$

Em notação vetorial:

$$\mathbf{q} = -\kappa \mathbf{grad} T \quad (4.6)$$

Essa equação é dada, em coordenadas cilíndricas e esféricas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= -\kappa \left( \frac{\partial q_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial q_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial q_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \\ \mathbf{q} &= -\kappa \left( \frac{\partial q_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial q_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \right). \end{aligned}$$

Obtemos para o divergente do fluxo de calor:

$$-\frac{\partial q_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} = \kappa \nabla^2 T$$

Reagrupando os termos e dividindo por  $\rho$ , obtemos a equação da energia total:

$$\frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.7)$$

Na forma vetorial:

$$\frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} p + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.8)$$

## 4.4 Equação da Energia Interna ( $e$ )

Subtraindo-se a equação da energia cinética, Eq. (4.1) da Eq. (4.7) obtemos a equação de evolução da *energia interna*,  $De/Dt$  [5, 13]. Antes porém reescrevemos a Eq. (4.7) desenvolvendo os dois primeiros termos do membro direito da mesma:

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) &= -\frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) &= -\frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + v_i g_i.\end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira obtemos:

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{1}{\rho} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.9)$$

Na forma vetorial:

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{1}{\rho} p \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.10)$$

onde os dois pontos entre o tensor  $\boldsymbol{\tau}$  e o gradiente de velocidades representam a operação de contração em que o produto dos dois fatores resulta em um escalar. A forma como essa contração se faz fica clara quando se emprega a notação tensorial cartesiana.

Podemos interpretar os termos das equações da energia total e da energia interna: o termo  $v_i \partial p / \partial x_i$  representa a contribuição do trabalho devido à resultante das forças de pressão, na variação da energia cinética da partícula de fluido. O termo  $v_i \partial \tau_{ij} / \partial x_j$  representa a contribuição dos efeitos viscosos sobre a energia cinética.

O termo  $\tau_{ij} \partial v_i / \partial x_j$  ( $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad} \mathbf{v}$ , em notação vetorial) representa a contribuição dos efeitos viscosos na variação da energia interna da partícula.

O termo  $p \partial v_i / \partial x_i$  representa a variação da energia interna devido ao trabalho de compressão da partícula de fluido sob efeito da pressão. Essa conclusão decorre do fato de que  $1/\rho D\rho/Dt = -\operatorname{div} \mathbf{v}$ , de acordo com a equação da continuidade. Em outras palavras,  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  é a taxa de variação da massa específica da partícula.

## 4.5 Função Dissipação ( $\Phi$ )

Mostramos a seguir, que, no caso de fluidos newtonianos, o termo  $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad} \mathbf{v}$  é sempre positivo, o que implica em deduzir que, nesse tipo de fluido, os efeitos viscosos contribuem sempre para o aumento da energia interna da partícula. Trataremos apenas do caso de fluidos incompressíveis [5, 13].

Rescrevendo o termo  $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad} \mathbf{v}$  na forma tensorial e substituindo  $\boldsymbol{\tau}$  pela relação constitutiva dos fluidos newtonianos temos:

$$\tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

O tensor de componentes  $\tau_{ij}$  é simétrico, isto é, o elemento localizado na linha  $i$ , coluna  $j$  é igual ao elemento localizado na linha  $j$ , coluna  $i$ . Isto pode ser verificado substituindo-se  $i$  por  $j$  na equação constitutiva do tensor de tensões:

$$\tau_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \tau_{ij}$$

O gradiente de velocidades é um tensor de segunda ordem, que pode ser decomposto na soma de um tensor simétrico com outro anti-simétrico. Um tensor de segunda ordem, cujo elemento geral é  $a_{ij}$  é anti-simétrico se  $a_{ij} = -a_{ji}$ . Mostremos a propriedade acima enunciada: decomponemos cada elemento do tensor de velocidades na soma de duas parcelas iguais e ao resultado, somamos e subtraímos  $1/2 \partial v_j / \partial x_i$ . Obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

O primeiro termo do membro direito da igualdade acima é um tensor simétrico, sendo na realidade idêntico ao fator que é multiplicado pela viscosidade na equação constitutiva dos fluidos newtonianos. O segundo termo é um tensor anti-simétrico. Verificamos esta propriedade escrevendo:

$$a_{ji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = -a_{ij}$$

O termo  $\tau_{ij} \partial v_i / \partial x_j = \Phi$  denomina-se *Função Dissipação*. Desenvolvendo todos os termos do mesmo encontramos:

$$\begin{aligned} \Phi = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = \\ &\quad \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \\ &\quad \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 - \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] \end{aligned} \tag{4.11}$$

O termo:

$$\frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2$$

é dado por um quadrado perfeito, sendo portanto maior ou igual a zero. De fato, a Função Dissipação se reduz a este termo somente, pois o último termo do membro direito da Eq. (4.11) é igual a zero, como mostramos abaixo:

$$\frac{\mu}{2} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 - \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] = \frac{\mu}{2} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 - \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] = 0$$

Como as derivadas aparecem na igualdade acima sobre a forma de quadrados, os índices  $i$  e  $j$  são, de fato, repetidos, sendo portanto mudos e podem ser trocados com foi feito acima. Portanto:

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (4.12)$$

Este resultado mostra que a dissipação viscosa em fluidos newtonianos contribui sempre para o aumento da energia interna e, em última análise, da temperatura do fluido.

A função dissipação se escreve na forma abaixo, em coordenadas cilíndricas [5]:

$$\begin{aligned} \tau : \mathbf{grad} \mathbf{v} &= \tau_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \tau_{r\theta} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \\ &\quad \tau_{\theta z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + \tau_{rz} \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

No caso de fluido newtoniano com viscosidade constante [5]:

$$\begin{aligned} \tau : \mathbf{grad} \mathbf{v} &= 2\mu \left\{ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \right]^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right\} + \mu \left[ \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\theta}{r} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Em coordenadas esféricas [5]:

$$\begin{aligned} \tau : \mathbf{grad} \mathbf{v} &= \tau_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \tau_{\phi\phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) + \\ &\quad \tau_{r\theta} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + \tau_{r\phi} \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \right) \\ &\quad \tau_{\theta\phi} \left( \frac{1}{r} \frac{v_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{\cot \theta}{r} v_\phi \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

No caso de fluido newtoniano com viscosidade constante [5]:

$$\begin{aligned} \tau : \mathbf{grad} \mathbf{v} &= 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right)^2 \right] + \\ &\quad \mu \left[ \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

## 4.6 Equação da Entalpia de Estagnação ( $h_0 = h + v^2/2$ )

A equação da entalpia de estagnação é obtida a partir da equação da energia total, que surge ao transformarmos essa última, da forma integral para a forma diferencial, empregando o teorema de Gauss [43]. Substituindo as Eqs. (3.12) e (4.5) na Eq. (4.4) obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) v_j - \frac{\partial v_j p}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i g_i + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + \dot{Q}$$

Agrupando os dois primeiros termos do membro direito da equação acima e os passando para o membro esquerdo, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) v_j = \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i g_i + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + \dot{Q}$$

Somando o termo  $\partial p / \partial t$  aos dois membros da última equação :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) v_j = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i g_i + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + \dot{Q}$$

O termo  $\partial p / \partial t$  do membro esquerdo da equação acima pode ser incorporado a  $\partial(e+v^2/2)/\partial t$ , resultando em:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) v_j = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i g_i + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + \dot{Q}$$

Como  $h_0 = e + p/\rho + v^2/2$  por definição, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h_0 + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho h_0 v_j = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \tau_{ij} + \rho v_i g_i + \kappa \nabla^2 T + \dot{Q}$$

Desenvolvendo os termos do membro esquerdo dessa última equação obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho h_0 + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho h_0 v_j &= \rho \frac{\partial h_0}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial h_0}{\partial x_j} + h_0 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) = \\ \rho \frac{\partial h_0}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial h_0}{\partial x_j} &= \rho \frac{D h_0}{D t} \end{aligned}$$

pois  $\partial \rho / \partial t + \partial \rho v_j / \partial x_j = 0$  (equação da continuidade). A equação da entalpia de estagnação toma portanto a forma:

$$\frac{D h_0}{D t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.17)$$

Na forma vetorial:

$$\frac{D h_0}{D t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.18)$$

No caso de um escoamento permanente sem efeitos viscosos, sem fontes internas de calor e desprezando efeitos gravitacionais a equação da entalpia de estagnação se torna:

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T$$

o que mostra que a adição de calor através da superfície da partícula de fluido faz aumentar a entalpia de estagnação da mesma.

Pode-se incorporar o termo  $v_i g_i$ , da Eq. (4.17), ao membro esquerdo dessa equação, o que resulta adicionar à entalpia de estagnação, um termo referente à energia potencial. De fato, considerando um referencial com o eixo  $z$  na direção vertical e orientado para cima, têm-se que:

$$\frac{Dh_0}{Dt} - v_i g_i = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) h_0 + \rho v_z g$$

Pode-se escrever também, que:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) gz = g \frac{\partial z}{\partial t} + gv_j \frac{\partial z}{\partial x_j} = gv_j \frac{\partial z}{\partial x_j} = gv_z \frac{\partial z}{\partial z} = gv_z$$

pois:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{x,y,z=c^{te}} = 0$$

Portanto:

$$\frac{Dh_0}{Dt} - v_i g_i = \frac{D}{Dt} \left( h + \frac{v^2}{2} + gz \right)$$

e a Eq. (4.17) pode ser reescrita como:

$$\frac{D}{Dt} \left( h + \frac{v^2}{2} + gz \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.19)$$

## 4.7 Equação da Entalpia ( $h$ )

A equação da entalpia é obtida de maneira semelhante à seguida na dedução da equação da energia interna. Naquele caso subtraímos a equação da energia cinética da equação da energia total. No caso presente subtrairemos a equação da energia cinética da equação da entalpia de estagnação.

Reescrevemos estas duas equações desenvolvendo o termo  $\partial v_i \tau_{ij} / \partial x_j = v_i \partial \tau_{ij} / \partial x_j + \tau_{ij} \partial v_i / \partial x_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{Dh_0}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v^2}{2} \right) + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + v_i g_i. \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira obtemos:

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + v_i \frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

Notando que:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt}$$

obtemos:

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.20)$$

ou:

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{\rho} \tau : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.21)$$

## 4.8 Nota Sobre a Forma Integral das Equações da Entalpia

A forma integral da equação da energia total se simplifica no caso em que algumas hipóteses possam ser feitas. Consideraremos o campo de velocidades em que os termos viscosos possam ser desprezados e na condição em que não há geração de calor,  $\dot{Q}$ , dentro do volume de controle. Não havendo efeitos viscosos o trabalho das forças de superfície se reduz ao das forças de pressão. Substituindo a Eq. (3.12) em (4.3) e levando em conta as hipóteses acima, obtemos:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV = - \oint_S \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) v_j n_j dA - \oint_S p v_j n_j dA + \int_V \rho g_j v_j dV - \oint_S q_j n_j dA$$

O integrando do segundo termo do membro esquerdo da equação,  $p v_j n_j dA$  representa o trabalho por unidade de tempo da força de pressão ( $p n_j dA$ ) multiplicada escalarmente pela velocidade do escoamento naquele ponto, isso é, o trabalho realizado por unidade de tempo para que um elemento de volume  $dx dA$  entre (ou saia) do volume de controle. Esse termo pode ser incorporado ao primeiro, resultando em:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV = - \oint_S \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) v_j n_j dA + \int_V \rho g_j v_j dV - \oint_S q_j n_j dA \quad (4.22)$$

Considerando um referencial com o eixo  $z$  na direção vertical e orientado para cima, reescrevemos o segundo termo do membro direito dessa equação, na forma:

$$\int_V \rho g_j v_j dV = - \int_V \rho v_j \frac{dgz}{dz} dV = - \int_V \rho v_j \frac{\partial g z}{\partial x_j} dV = - \int_V \frac{\partial \rho v_j g z}{\partial x_j} dV + \int_V g z \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} dV \quad (4.23)$$

Substituindo a Eq. (4.23) em (4.22) e somando

$$\int_V \frac{\partial \rho g z}{\partial t} dV$$

aos dois membros da equação resultante, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \rho g z}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV &= - \oint_S \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) v_j n_j dA - \\ \int_V \frac{\partial \rho v_j g z}{\partial x_j} dV + \int_V \frac{\partial \rho g z}{\partial t} dV + \int_V g z \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} dV - \oint_S q_j n_j dA \end{aligned}$$

O terceiro e o quarto termo do membro direito da última equação se anulam, em virtude da equação da continuidade. Agrupamos os dois termos do membro esquerdo, reescrevemos o penúltimo termo do membro direito na forma de uma integral de superfície, usando o teorema de Gauss e o agrupamos ao primeiro termo desse membro. Obtemos:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} + g z \right) dV = - \oint_S \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z \right) v_j n_j dA - \oint_S q_j n_j dA$$

O volume de controle pode produzir ou receber trabalho mecânico por unidade de tempo, que não é devido nem a forças viscosas, de pressão ou ao peso. É o caso de máquinas rotatórias em geral, como bombas, turbinas, ventiladores, etc., que recebem ou produzem trabalho através de um eixo. Acrescentamos o termo  $\dot{W}$ , que representa esse trabalho por unidade de tempo, produzido pelo sistema, obtemos:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} + g z \right) dV = - \oint_S \rho \left( h + \frac{v^2}{2} + g z \right) v_j n_j dA - \oint_S q_j n_j dA - \dot{W} \quad (4.24)$$

Essa equação reduz-se a formas semelhantes às da primeira lei da termodinâmica, normalmente apresentadas nos livros introdutórios dessa disciplina. Por exemplo, no caso de sistemas fechados, que não trocam massa com o meio:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} + g z \right) dV = - \oint_S q_j n_j dA - \dot{W}$$

No caso de sistemas abertos, que não produzem trabalho, como o de trocadores de calor, obtém-se:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} + g z \right) dV = - \oint_S \rho \left( h + \frac{v^2}{2} + g z \right) v_j n_j dA - \oint_S q_j n_j dA$$

Em regime permanente:

$$\oint_S q_j n_j dA = - \oint_S \rho \left( h + \frac{v^2}{2} + g z \right) v_j n_j dA$$

Essa equação mostra que a taxa de transferência de calor para fora do volume de controle é igual ao fluxo líquido de entalpia total para dentro do mesmo.

No caso de sistemas abertos, em regime permanente, que não trocam calor com o meio, como é o caso de bombas e de turbinas:

$$\dot{W} = - \oint_S \rho \left( h + \frac{v^2}{2} + g z \right) v_j n_j dA$$

Essa equação mostra que o trabalho produzido é igual à diferença entre o fluxo de entalpia total que entra e o que sai do volume de controle.

## 4.9 Equação da Entropia ( $s$ )

A equação de evolução da entropia de uma partícula de fluido é obtida a partir da equação da energia interna (Eq. 4.9)i [43]. Passando o termo  $1/\rho Dp/Dt$  desta última para o lado esquerdo obtemos:

$$\frac{De}{Dt} + p \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.25)$$

Sabe-se da termodinâmica que  $T ds = de + p d(1/\rho)$ , para substâncias simples. Esta equação pode ser escrita como:

$$T \frac{Ds}{Dt} dt = \frac{De}{Dt} dt + p \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) dt = \frac{De}{Dt} dt + p \frac{D}{Dt} \rho^{-1} dt$$

ou:

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \rho^{-1} = \frac{De}{Dt} - p \frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \quad (4.26)$$

Da equação da continuidade temos:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (4.27)$$

Combinando as Eqs. (4.26 e 4.27) reescrevemos:

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \rho^{-1} = \frac{De}{Dt} + p \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (4.28)$$

Das Eqs. (4.25) e (4.28) obtemos a equação da entropia:

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.29)$$

ou:

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.30)$$

o que mostra que a entropia de uma partícula em movimento varia em função do fluxo líquido de calor a que está submetida e aumenta por efeitos do calor “gerado” internamente e da viscosidade. Cabe notar que no caso de fluidos newtonianos, o efeito viscoso contribui sempre no sentido de aumentar a entropia da partícula, pois  $\tau : \mathbf{grad} v = \Phi > 0$

## 4.10 Equação da Temperatura

A equação da temperatura é obtida a partir da equação da energia interna (Eqs. 4.9 e 4.10), notando-se que aquela pode ser escrita como  $e = C_v T$ . Substituindo-se a expressão da energia interna na primeira equação acima e dividindo o resultado por  $C_v$  obtemos [5]:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho C_v} p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho C_v p} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho C_v} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_v}$$

O termo  $\alpha = \kappa/\rho C_v$  contém apenas propriedades físicas do fluido sendo portanto uma propriedade física, denominada *difusividade térmica* do material. Reescrevendo a equação da temperatura temos:

$$\frac{DT}{Dt} = -\frac{1}{\rho C_v} p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho C_v} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_v}. \quad (4.31)$$

Em forma vetorial:

$$\frac{DT}{Dt} = -\frac{1}{\rho C_v} p \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho C_v} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_v} \quad (4.32)$$

A função dissipação é dada, em coordenadas cilíndricas e esféricas, para fluidos com newtonianos com viscosidade constante ou variável, pelas Eqs. 4.13 a 4.16, respectivamente. Se o aquecimento devido à compressão e à dissipação puder ser desprezado a equação da temperatura toma a forma:

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p}. \quad (4.33)$$

A equação da temperatura pode ser escrita, alternativamente, notando-se que a energia interna de uma partícula é função de seu volume específico  $\hat{v}$  e da temperatura:

$$de = \left( \frac{\partial e}{\partial \hat{v}} \right)_T d\hat{v} + \left( \frac{\partial e}{\partial \hat{v}} \right)_{\hat{v}} dT = \left[ -p + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{v}} \right] d\hat{v} + C_v dT.$$

Pode-se então reescrever a derivada substancial da energia interna na forma:

$$\frac{De}{Dt} = \left[ -p + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{v}} \right] \frac{D\hat{v}}{Dt} + C_v \frac{DT}{Dt}. \quad (4.34)$$

O termo  $D\hat{v}/Dt$  pode ser reescrito como segue, com o emprego da equação da continuidade:

$$\frac{D\hat{v}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (4.35)$$

Substituindo-se a Eq. 4.35 em 4.34 e levando o resultado à Eq. 4.10 obtém-se:

$$\frac{De}{Dt} = \left[ -p + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{v}} \right] \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} + C_v \frac{DT}{Dt} = -\frac{1}{\rho} p \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

e, finalmente:

$$\frac{DT}{Dt} = -\frac{T}{\rho C_v} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{v}} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho C_v} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_v} \quad (4.36)$$

Em coordenadas cilíndricas, em função das componentes do tensor de tensões e dos termos do fluxo de calor dados pela lei de Fourier [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} &= -\frac{T}{\rho C_v} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{v}} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \\ &\quad \frac{1}{\rho C_v} \left[ \tau_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{\theta\theta} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \\ &\quad \frac{1}{\rho C_v} \left[ \tau_{r\theta} \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \tau_{rz} \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \tau_{\theta z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \right] + \\ &\quad \frac{1}{\rho C_v} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \frac{\dot{Q}}{\rho C_v}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Em coordenadas esféricas [5]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} = \\
-\frac{T}{\rho C_v} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{v}} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + \\
\frac{1}{\rho C_v} \left[ \tau_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \tau_{\phi\phi} \left( \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) \right] + \\
\frac{1}{\rho C_v} \left[ \tau_{r\theta} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + \tau_{r\phi} \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \right) + \right. \\
\left. \tau_{r\phi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{\cot \theta}{r} v_\phi \right) \right] + \frac{1}{\rho C_v} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \right. \\
\left. \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \kappa \operatorname{sen} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \right] + \frac{\dot{Q}}{\rho C_v}. \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Em coordenadas cilíndricas, para fluidos newtonianos incompressíveis com coeficientes de viscosidade e de condutividade térmica constante, obedecendo a lei de Fourier [5]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{2\mu}{\rho C_v} \left\{ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \right]^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
\frac{\mu}{\rho C_v} \left\{ \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right]^2 \right\} \\
\alpha \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Em coordenadas esféricas [5]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} = \\
\frac{2\mu}{\rho C_v} \left\{ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right)^2 \right\} + \\
\frac{\mu}{\rho C_v} \left\{ \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 + \left[ \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) \right]^2 + \right. \\
\left. \left[ \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\phi}{\operatorname{sen} \theta} \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right]^2 \right\} + \\
\alpha \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \operatorname{sen} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] + \frac{\dot{Q}}{\rho C_v}. \quad (4.40)
\end{aligned}$$

## 4.11 Equação de Condução de Calor em Sólidos

Esta equação é obtida da equação da temperatura, no caso em que o campo de velocidades é identicamente nulo ( $\mathbf{v} \equiv 0$ ). Neste caso as derivadas da velocidade também se anulam. A

equação da temperatura toma a forma:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho C_p} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p}$$

isto é:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p} \quad (4.41)$$

## 4.12 Os Números de Péclet e de Prandtl

A adimensionalização da equação da temperatura, Eq. (4.33), conduz ao surgimento de dois novos grupos adimensionais, os números de *Péclet* e de *Prandtl*. Consideremos a Eq. (4.33), sem o termo referente à geração interna de calor:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \alpha \nabla^2 T = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i}$$

ou:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i}$$

e sejam  $U_0$  a velocidade média do escoamento,  $T_0$  sua temperatura média e  $d$  uma dimensão característica da geometria do problema, como por exemplo o diâmetro da tubulação onde ocorre o escoamento. Definimos as variáveis adimensionais abaixo, representadas com o índice superior \*, conforme abaixo:

$$\begin{aligned} v_i &= U_0 v_i^* & x_i &= x_i^* d \\ t &= t^* d / U_0 & T &= T^* T_0 \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis dimensionais da equação da temperatura pelas definições acima encontramos:

$$\frac{T_0 U_0}{d} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{T_0 U_0}{d} v_j^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} = \frac{\alpha T_0}{d^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*}$$

Dividindo esta equação por  $T_0 U_0 / d$  obtemos:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v_j^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} = \frac{\alpha}{U_0 d} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*}$$

O grupo adimensional:

$$Pe = \frac{U_0 d}{\alpha} \quad (4.42)$$

denomina-se *número de Péclet*. Utilizando esta definição reescrevemos a equação da temperatura na forma adimensional:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v_j^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} = \frac{1}{Pe} \nabla^2 T^* \quad (4.43)$$

Esta equação mostra que o número de Péclet mede a importância relativa do mecanismo de difusão da temperatura em um processo envolvendo transporte de energia através de fluxos de massa e de difusão térmica.

O número de Péclet pode ser reescrito como:

$$Pe = \frac{U_0 d}{\nu} \frac{\nu}{\alpha} = Re Pr$$

O grupo adimensional  $\nu/\alpha$  denomina-se *número de Prandtl*. Como esse número relaciona duas propriedades físicas do fluido, quais sejam sua viscosidade cinemática e sua difusividade térmica, o número de Prandtl é também uma propriedade física do meio. O número de Prandtl de gases é da ordem de 1 a 10; o dos líquidos é, em geral maior e aumenta com a viscosidade do fluido considerado. O da água, por exemplo, é igual a 7, na temperatura ambiente. Para o caso de líquidos muito viscosos e o de sólidos, é maior ainda. Como o termo difusivo da Eq. (4.43) contém o fator  $Re Pr$  no denominador, o efeito de difusivo perde importância na mesma, à medida em que se considera fluidos crescentemente mais viscosos. No caso de escoamentos sobre números de Reynolds elevados, os efeitos viscosos tornam-se pouco importantes face aos de inércia, que são intrinsecamente não lineares, o que leva ao surgimento da turbulência. No caso de escoamentos viscosos, feitos sob baixos números de Reynolds, em que os campos hidrodinâmico e o de temperatura se acoplam através da dependência da massa específica com a temperatura, a hidrodinâmica torna-se essencialmente linear, pois as forças disponíveis para mover o fluido são usadas para vencer os efeitos viscosos. No entanto, o número de Reynolds é multiplicado pelo de Prandtl na equação da temperatura, o que reduz a importância da difusão nessa última. A equação da temperatura torna-se não linear, o que pode levar ao surgimento de turbulência de origem térmica e não, hidrodinâmica. Um caso onde esse efeito eventualmente possa ocorrer é o da movimentação das placas da crosta terrestre.

## 4.13 A Aproximação Boussinesq

Problemas de convecção livre se caracterizam pela ausência de uma velocidade imposta ao fluido. O movimento do fluido decorre da imposição de um gradiente vertical de temperaturas voltado para baixo, de modo que as camadas inferiores do fluido se encontrem mais quentes e menos densas do que as superiores. O estado de repouso torna-se instável acima de um certo valor do gradiente de temperatura imposto e é substituído por células de convecção que se formam, com o fluido frio descendo e o quente subindo. Nessa situação a massa específica do fluido não se pode mais considerar a massa específica do fluido como constante, mas suas variações são muito menores do que as observadas na compressão de um gás, por exemplo. Vejamos como introduzir este efeito de compressibilidade, típico dos líquidos, nas equações da continuidade e de Navier-Stokes.

A equação da continuidade para fluidos incompressíveis se escreve como  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , que traduz o fato de que a soma das vazões volumétricas que entram e saem de um elemento de volume é igual a zero. As variações de massa específica devidas a alterações de temperatura em líquidos não são suficientes para alterar a vazão volumétrica e com isso trabalha-se com a equação da continuidade na forma  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ . Com relação à equação de Navier-Stokes,

tornamos a escrevê-la como:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathbf{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}$$

Considera-se que as variações de massa específica não são suficientes para alterar significativamente a massa de uma partícula e, consequentemente, o termo de força inercial,  $\rho D\mathbf{v}/Dt$ . A massa específica aparece também no termo gravitacional. Nesse, levamos em conta o efeito de compressibilidade, escrevendo a massa específica na forma  $\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)]$ , onde  $\rho_0$  e  $T_0$  são, respectivamente, a massa específica e uma temperatura de referência e  $\beta = -1/\rho_0 (\partial\rho/\partial T)_p$ , o coeficiente de dilatação volumétrica do fluido. Esse termo é responsável pelo surgimento de força de empuxo de magnitude importante, mesmo em condições de repouso. Adicionalmente, esse termo acopla a equação de Navier-Stokes à equação da temperatura. A aproximação Boussinesq consiste das equações da continuidade e de Navier-Stokes conforme descrito acima e da equação da temperatura:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (4.44)$$

$$\rho_0 \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathbf{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \mathbf{g} \quad (4.45)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \quad (4.46)$$

## 4.14 Transporte de um Escalar por um Fluido Incompressível

As Eqs. 4.3 e 4.4 podem ser generalizadas para o caso de uma grandeza escalar genérica  $\theta$ , cuja dimensão física é a de um escalar (energia, massa, etc.) por unidade de volume. A grandeza é transportada por um fluido em movimento e se difunde em virtude da existência de gradientes da variável. Nesse caso, substitui-se o termo:

$$\rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \longrightarrow c$$

e considera-se que o fluxo difusivo é da forma:

$$\mathbf{J} = -\kappa \mathbf{grad} c, \quad (4.47)$$

onde  $\mathbf{J}$  tem dimensões do escalar por unidade de tempo e área. O produto  $\rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right)$  tem dimensões de  $J/m^3$  e pode ser considerado como uma massa específica de energia por unidade de volume.

O princípio de conservação postula que a taxa de acumulação do escalar dentro de um volume de controle fixo no espaço é igual ao fluxo líquido do mesmo para dentro do volume, acrescido da taxa de geração interna. Obtém-se, na forma integral:

$$\int_V \frac{\partial c}{\partial t} dV = - \oint v_j c n_j dA - \int_V J_j n_j dA + \int_V S dV,$$

onde  $S$  é a taxa de geração do escalar por unidade de volume. Utilizando o teorema de Gauss e a Eq. 4.47 obtém-se a equação de conservação em forma diferencial:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial v_j c}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) + \frac{S}{\rho}. \quad (4.48)$$

Levando em consideração que considera-se o fluido como incompressível, a equação reescrevemos a equação acima na forma:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v_j \frac{\partial c}{\partial x_j} = \frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) + \frac{S}{\rho}. \quad (4.49)$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} = \\ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \kappa \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \kappa \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial c}{\partial z} \right) \right] + \frac{S}{\rho}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial c}{\partial \phi} = \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \kappa \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \kappa \operatorname{sen} \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \kappa \frac{\partial c}{\partial \phi} \right) \right] + \frac{S}{\rho}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

## 4.15 Resumo das Equações de Energia – Notação Vetorial

1. Energia Cinética

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}.$$

2. Energia Total

$$\frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} p + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

3. Energia Interna

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{1}{\rho} p \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

4. Função Dissipação

$$\Phi = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad} \mathbf{v}$$

5. Entalpia de Estagnação

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

6. Entalpia

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad} v + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

7. Entropia

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad} v + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

8. Temperatura (Fluidos Incompressíveis)

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho C_p} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p}$$

9. Condução de Calor em Sólidos

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p}$$

## 4.16 Resumo das Equações de Energia – Notação Tensorial Cartesiana

1. Energia Cinética

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \left( v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) + v_i g_i.$$

2. Energia Total

$$\frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p v_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \tau_{ij} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

3. Energia Interna

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{1}{\rho} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

4. Função Dissipação (Fluidos Newtonianos Incompressíveis)

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2$$

5. Entalpia de Estagnação

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \tau_{ij} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

6. Entalpia

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

7. Entropia

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

8. Temperatura (Fluidos Incompressíveis)

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho C_p} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p}$$

9. Condução de Calor em Sólidos

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p}$$

## 4.17 Problemas

1. Mostrar que a função dissipação de um fluido newtoniano incompressível é dada por:

$$\tau : \mathbf{grad} \mathbf{v} = \mu \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

2. Mostrar que:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i g_i.$$

3. O campo bi-dimensional, estacionário e incompressível de um fluido newtoniano é tal que  $v_x = Ax^2y^2$ . Determinar a taxa de variação com o tempo, da energia cinética de uma partícula que se move nesse campo.
4. Um fluido newtoniano incompressível, escoa em regime permanente, em um campo bi-dimensional de velocidades,  $(v_x, v_y)$ . A componente  $v_x$  é dada por  $v_x = Ax^2y^2$ , onde  $A$  é uma constante. Pede-se determinar a forma mais simples da componente  $v_y$  deste escoamento e a função dissipação.
5. O campo bi-dimensional, estacionário e incompressível de um fluido newtoniano, no qual ocorre uma reação química que libera calor, é tal que  $v_x = Axy$  e  $T = T_0(1 - e^{-xy/L^2})$ , onde  $L$  é uma constante,  $0 \leq x \leq L$  e  $0 \leq y \leq L$ . Determinar:
- (a) A forma mais simples da componente  $v_y$  da velocidade;
  - (b) A Função Dissipação;
  - (c) A taxa de variação da temperatura com o tempo, de uma partícula que se move com a velocidade do campo;
  - (d) A taxa de produção de calor por unidade de volume,  $\dot{Q}$ .
6. A componente  $v_x$  do campo de velocidades bi-dimensional de um fluido incompressível, sem fontes de calor, é dada, em um certo instante de tempo, por  $v_x = x \sin y$ . O campo de temperaturas é dado, nesse mesmo instante, por  $T = T_0 \sin x \cos y$ . Pede-se:
- (a) A forma mais simples da componente  $v_y$  do campo de velocidades nesse instante;
  - (b) A função dissipação nesse instante;
  - (c) O valor de  $\partial T / \partial t$  nesse instante.
7. Obter os perfis de pressão  $p = p(z)$  e massa específica  $\rho = \rho(z)$  para um oceano em repouso com perfis de temperatura e salinidade dados por:

$$T(z) = T_0 + T_1 \exp(z/H) \quad \text{e} \quad \mathcal{S}(z) = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_1 \exp(z/H),$$

onde  $\mathcal{S}$  é a salinidade do mar, normalmente medida em partes por mil,  $z = 0$  na superfície e negativo abaixo. Admitir que a massa específica da água do mar obedece a uma equação de estado de Boussinesq da forma:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (T - T_0) + \gamma (\mathcal{S} - \mathcal{S}_0)],$$

com os coeficientes  $\beta$  e  $\gamma$  definidos por:

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad \text{e:} \quad \gamma = +\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \mathcal{S}} \right)_p.$$

8. Obter os perfis de pressão e massa específica da atmosfera em repouso, na qual o perfil de temperaturas é dado por:

$$T = T_0 + T_1 \exp(-z/H).$$

Considerar a atmosfera como um gás ideal. O eixo vertical  $z$  do sistema de coordenadas aponta para cima e o nível  $z = 0$  situa-se na superfície do oceano.

9. Definir o potencial gravitacional  $\phi$ , tal que a força gravitacional por unidade de massa,  $F_i$ , que se origina desse potencial e age sobre uma partícula do meio contínuo, seja da forma  $F_i = \partial \phi / \partial x_i$ . Definir também a energia total por unidade de massa  $e_t$ , de um meio contínuo por:

$$e_t = e + \frac{1}{2}v^2 + \phi.$$

Mostrar que a equação da energia interna (Eq. 4.9) pode ser escrita na forma [52]:

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i e_t}{\partial x_j} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i \sigma_{ij}}{\partial x_j}.$$

10. Partindo da equação da energia interna (Eq. 4.9), da definição potencial gravitacional (ver Prob. 9) e de entalpia,

$$h = e + \frac{1}{2}v^2 + \phi$$

Mostrar que:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \beta T \frac{Dp}{Dt},$$

com  $\beta$  definido conforme Prob. 7 [52].

11. Mostrar que a equação da entropia (Eq. 4.30) pode ser escrita na forma [52]:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{q_i}{T} \right) - \frac{1}{T^2} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

O primeiro termo do membro direito da equação acima representa a variação reversível de entropia de uma partícula do meio devido a transferência de calor. O sinal desse termo muda segundo o sentido do fluxo de calor. A segunda e a terceira parcelas representam acréscimos irreversíveis de entropia da partícula em virtude de efeitos de transferência de calor e viscosos. Essa análise não inclui efeitos irreversíveis de difusão e mistura. A equação mostra que o escoamento de um fluido de composição uniforme, sem efeitos viscosos e sem transferência de calor é isoentrópico.



# Capítulo 5

## Escoamentos Compressíveis Quase-Unidimensionais

### 5.1 Introdução

Este capítulo trata do escoamento *quase-unidimensional*, isoentrópico, de um fluido compressível, sem viscosidade [43]. Estuda-se a analogia entre esse tipo de escoamento e o de líquidos que escoam em canais de pequena profundidade e largura variável. Calcula-se a velocidade de propagação de pequenas perturbações, isso é a velocidade do som e obteremos a forma geral do potencial de um escoamento irrotacional, compressível de um fluido sem viscosidade.

### 5.2 Escoamento Quase-unidimensional Isoentrópico

Consideremos o escoamento quase-unidimensional, permanente, de um gás perfeito, através de um bocal convergente-divergente, conforme Fig. (5.1). Por quase-unidimensional entendemos o escoamento em que a componente de velocidade  $u$  é muito maior do que as componentes  $v$  e  $w$  e estas últimas podem ser desprezadas. Nesse caso redefinimos a velocidade  $u$  como a relação entre a vazão volumétrica  $Q$  e a área  $A$  da seção transversal do bocal ( $u = Q/A$ ). Desprezando-se os efeitos gravitacionais, o balanço dos fluxos da componente  $x$  da quantidade de movimento entrando e saindo em uma seção de espessura  $dx$ , perpendicular ao escoamento, resulta em:

$$u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

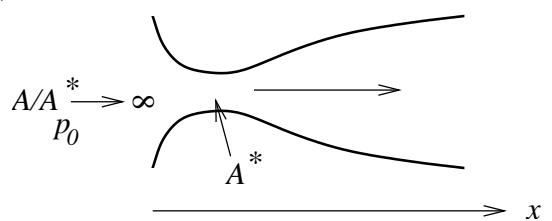


Figura 5.1: Esquema de um bocal convergente-divergente.

Multiplicando essa equação por  $dx$  obtemos:

$$u \, du = -\frac{dp}{\rho}$$

Essa relação mostra que, na ausência de efeitos viscosos e gravitacionais, a pressão sempre diminui quando a velocidade aumenta.

Além de desprezarmos os efeitos viscosos consideramos que não haja transferência de calor entre as partículas do fluido nem geração interna de calor. Conseqüentemente a equação da entropia,

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau : \mathbf{grad} v + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

simplifica-se e toma a forma:

$$T \frac{Ds}{Dt} = 0$$

isso é, o escoamento é *isoentrópico*. Em cada ponto do campo temos que:

$$\begin{aligned} p &= p(\rho, s) \\ dp &= \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho \end{aligned}$$

pois  $ds = 0$ . Nos casos em que os efeitos viscosos não são desprezíveis, em que haja transferência de calor, ou, de forma geral, em processos onde a entropia varie,  $p = p(\rho, s)$ . Nesses casos, a equação de Euler passa a conter um termo em que a variação de entropia,  $\partial s / \partial x$ , aparece explicitamente:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{\partial s}{\partial x}$$

No caso isoentrópico, a equação de Euler se escreve como:

$$u \, du = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho.$$

O termo  $(\partial p / \partial \rho)_s$  tem dimensões de uma velocidade ao quadrado. De fato:

$$\left[ \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \right] = \left[ \frac{F}{L^2 \times \rho} \right] = \left[ \frac{M \times L}{t^2} \right] \left[ \frac{1}{L^2} \right] \left[ \frac{L^3}{M} \right] = \left[ \frac{L^2}{t^2} \right]$$

Denominamos essa velocidade por  $a$ , isto é,  $(\partial p / \partial \rho)_s = a^2$ . Veremos adiante que  $a$  é a velocidade do som. Substituindo  $(\partial p / \partial \rho)_s$  por  $a^2$ , na equação da quantidade de movimento, obtemos:

$$u \, du = -a^2 \frac{d\rho}{\rho}. \tag{5.1}$$

Essa relação mostra que a massa específica sempre cai quando a velocidade aumenta, pois  $a^2$  é positivo. Além disso vemos que quanto maior for a velocidade, maior será a queda da massa específica. Acima de um determinado valor da velocidade, a queda da massa específica é tão acentuada que torna-se necessário que a seção transversal do bocal *aumente* para que a velocidade aumente. A variação da massa específica com a velocidade é responsável pela diferença qualitativa entre os escoamentos compressíveis e incompressíveis.

Procuramos expressar  $a$  em função das demais variáveis do escoamento. Para um processo isoentrópico temos que  $p/\rho^\gamma = C^{te}$ , onde  $\gamma$  é a relação entre os calores específicos a pressão e a volume constante do gás, respectivamente  $C_p$  e  $C_v$ . Portanto:

$$\begin{aligned} p &= C^{te} \rho^\gamma \\ \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s &= C^{te} \gamma \rho^{\gamma-1} = \frac{p}{\rho^\gamma} \gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho} \end{aligned}$$

Como  $p/\rho = RT$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma RT \quad (5.2)$$

O termo  $dp/\rho$  da Eq. (5.1) pode ser substituído utilizando-se a equação da continuidade,  $\rho Au = C^{te}$ , de modo a obtermos uma relação entre a velocidade do escoamento e a área da seção transversal do bocal. A equação da continuidade também pode ser escrita como:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{du}{u} = 0$$

pois integrando-se esta última obtém-se:

$$\log \rho + \log A + \log u = C^{te}$$

ou  $\rho Au = C^{te}$ . Substituindo-se:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dA}{A} + \frac{du}{u}$$

na Eq. (5.1) obtemos:

$$u du = a^2 \left( \frac{dA}{A} + \frac{du}{u} \right)$$

Remanejando os termos dessa equação, obtemos:

$$\frac{u}{a^2} du - \frac{du}{u} = \frac{dA}{A}$$

Definimos o número de Mach, como sendo:

$$M = u/a \quad (5.3)$$

Trata-se da relação entre a velocidade do escoamento e a velocidade do som no ponto considerado. Utilizando essa definição e pondo em evidência o termo  $du/u$  do membro esquerdo da equação acima, obtemos finalmente:

$$(M^2 - 1) \frac{du}{u} = \frac{dA}{A} \quad (5.4)$$

Podemos tirar várias conclusões da Eq. (5.4): em primeiro lugar esta equação indica que, para números de Mach menores do que 1, o coeficiente do termo  $du/u$  é *negativo*. Em consequência, a velocidade aumenta quando a área transversal do bocal diminui. Para números de Mach menores do que 1 o comportamento do escoamento é portanto qualitativamente o mesmo dos escoamentos incompressíveis. Entretanto, quando o número de Mach é maior do que 1 o coeficiente de  $du/u$  é positivo, indicando que a área da seção transversal deve *aumentar* para que a velocidade aumente.  $M = 1$  é o valor, além do qual, a massa específica passa a cair mais depressa do que a velocidade aumenta, alterando qualitativamente o comportamento do escoamento. Velocidades maiores do que essa só são obtidas, se a área transversal do bocal também aumentar. Por fim, a Eq. (5.4) indica que o escoamento isoentrópico só atinge a velocidade sônica ( $M = 1$ ) em locais do canal, onde a área da seção transversal não varia ( $dA/A = 0$ ), como por exemplo em uma *garganta*. Neste ponto tanto o escoamento pode se acelerar ( $du > 0$ ), quanto desacelerar ( $du < 0$ ).

Portanto, para que um escoamento isoentrópico alcance velocidade supersônica é necessário que o mesmo se faça através de um bocal convergente-divergente e que atinja  $M = 1$  na garganta. Para que o escoamento passe ao regime supersônico na parte divergente do bocal há condições de pressão a serem satisfeitas, que estudaremos a seguir.

Cabe por fim notar que a passagem do regime subsônico ao supersônico pode ser feita sem bocal convergente-divergente, como é o caso de explosões, em que a condição de escoamento isoentrópico não é satisfeita.

Procuramos agora relacionar a temperatura, pressão e massa específica com o número de Mach do escoamento. Para isto utilizaremos a equação da entalpia de estagnação,  $h_0$ , sendo  $h_0 = h + u^2/2$ :

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \tau_{ij} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

Na ausência de efeitos viscosos, gravitacionais, sem transferência de calor e em condições de regime permanente esta equação toma a forma:

$$\frac{Dh_0}{Dt} = 0$$

isto é  $h_0 = C^{te}$ . Temos então que:

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2} = C^{te}$$

Como a entalpia de um gás perfeito é dada por  $h = C_p T$ , podemos escrever:

$$C_p T_0 = C_p T + \frac{u^2}{2} = C^{te} \quad (5.5)$$

onde  $T_0$  é a *temperatura de estagnação*, isso é, a temperatura absoluta do fluido em condições de velocidade nula.

Procuramos eliminar os calores específicos da equação acima. Lembrando que  $C_p - C_v = R$ , temos:

$$\frac{C_p}{C_v} - 1 = \frac{R}{C_v} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{C_v} = \gamma - 1$$

Por outro lado:

$$a^2 = \gamma RT = \frac{C_p}{C_v} RT \implies C_p T = \frac{a^2}{R/C_v} = \frac{a^2}{\gamma - 1}$$

Podemos então reescrever a Eq. (5.5) na forma:

$$\frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = C^{te} \quad (5.6)$$

onde  $a_0$  e  $a$  são os valores da velocidade do som nas temperaturas de estagnação e local, respectivamente,  $T_0$  e  $T$ . Multiplicando a equação acima por  $(\gamma - 1)/a^2$  obtemos:

$$\frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u^2}{a^2}$$

Mas  $a_0^2/a^2 = \gamma RT_0/\gamma RT = T_0/T$  e  $u^2/a^2 = M^2$ . Obtemos uma equação que relaciona a temperatura de estagnação do escoamento com a temperatura local e o correspondente número de Mach:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (5.7)$$

Usando as relações:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{1/(\gamma-1)} \text{e} \quad \frac{p_0}{p} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

obtemos:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (5.8)$$

e

$$\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (5.9)$$

Diz-se que no ponto em que o número de Mach é igual a 1 o escoamento encontra-se em *condições críticas* e representam-se as propriedades do mesmo, nessas condições, com um asterisco ( $\rho^*$ ,  $p^*$ ,  $T^*$ , etc). A velocidade do som na temperatura  $T^*$  é representada por  $a^*$ . Calculamos a relação entre a temperatura crítica e a temperatura de estagnação, massa específica crítica e a massa específica de estagnação e entre a pressão crítica e a pressão de estagnação para o caso do ar ( $\gamma = 1,4$ ), utilizando as Eqs. (5.7), (5.8), e (5.9)

$$\begin{aligned} \frac{T^*}{T_0} &= \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \right)^{-1} = 0,833 \\ \frac{\rho^*}{\rho_0} &= \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \right)^{-1/(\gamma-1)} = 0,634 \\ \frac{p^*}{p_0} &= \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \right)^{-\gamma/(\gamma-1)} = 0,528 \end{aligned}$$

Procuramos agora exprimir a relação entre a área de uma seção qualquer onde o número de Mach é  $M$  e a área crítica do bocal em função de  $M$ , isso é, procuraremos uma relação da forma  $A/A^* = f(M)$ . Para isso utilizaremos a equação da continuidade em regime permanente,  $\rho A u = C^{te}$ . Em particular:

$$\rho A u = \rho^* A^* u^*$$

Essa equação pode ser reescrita como:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* a^*}{\rho u} = \frac{\rho^* \rho_0}{\rho_0 \rho} \frac{1}{M^*}$$

$M^*$  é o número de Mach calculado dividindo-se a velocidade local do escoamento pelo valor da velocidade do som, não no ponto em consideração, mas pela velocidade do som onde  $u = a$ .

As relações  $\rho^*/\rho_0$  e  $\rho_0/\rho$  podem ser obtidas da Eq. (5.8):

$$\begin{aligned} \frac{\rho^*}{\rho_0} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{-1/(\gamma-1)} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{-1/(\gamma-1)} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{1/(\gamma-1)} \\ \frac{\rho_0}{\rho} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\frac{\rho^* \rho_0}{\rho_0 \rho} = \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) M^2\right]^{1/(\gamma-1)}$$

e

$$\left(\frac{A}{A^*}\right) = \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)\right]^{1/(\gamma-1)} \frac{1}{M^*} \quad (5.10)$$

Procuramos agora expressar  $1/M^{*2} = f(M)$ . Utilizando a Eq. (5.6) podemos escrever:

$$\frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a^{*2}}{\gamma - 1} + \frac{a^{*2}}{2}$$

ou:

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a^{*2}$$

Dividindo esta última equação por  $u^2$  obtemos:

$$\frac{1}{M^2} \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \frac{1}{M^{*2}}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^{*2}} &= \left(\frac{1}{M^2} \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\right) \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} = \frac{2}{M^2(\gamma + 1)} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = \\ &= \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{(\gamma + 1)M^2} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}{\frac{\gamma + 1}{2} M^2} \end{aligned}$$

Donde conclui-se que:

$$\frac{1}{M^{*2}} = \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \frac{1}{M^2} \quad (5.11)$$

Levando esse resultado à Eq. (5.10) encontramos:

$$\left( \frac{A}{A^*} \right)^2 = \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{2/(\gamma-1)} \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \frac{1}{M^2}$$

Portanto:

$$\left( \frac{A}{A^*} \right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}$$

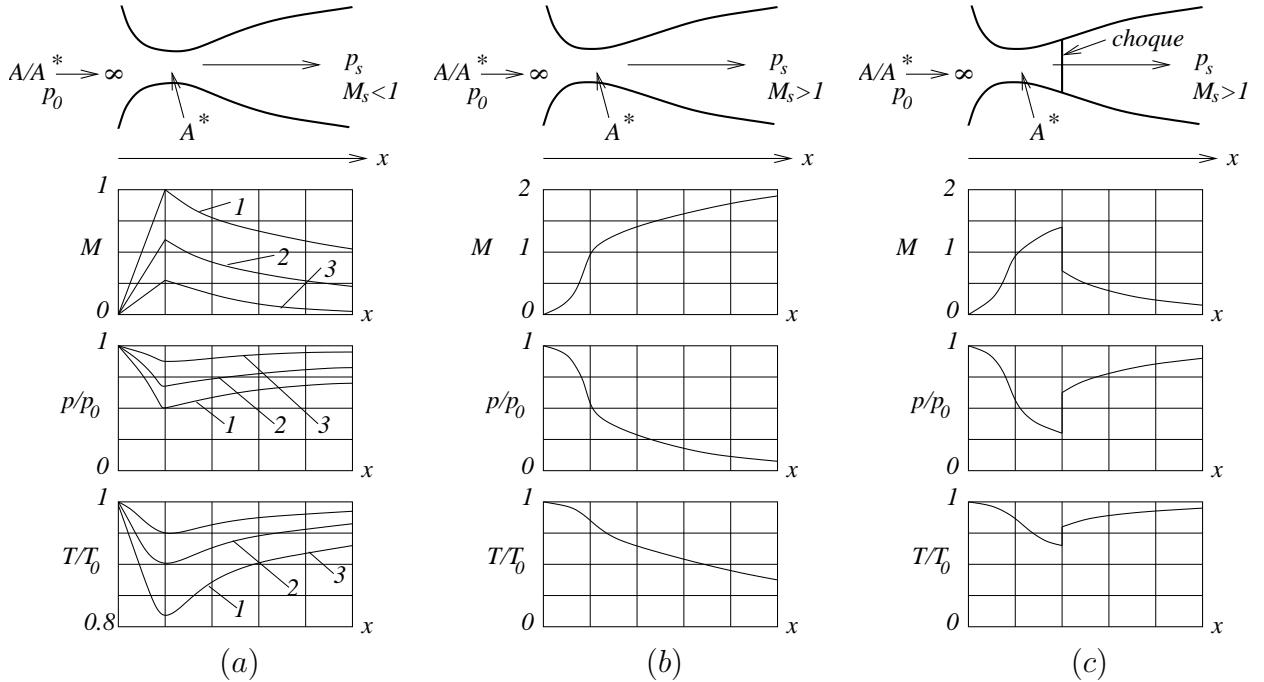


Figura 5.2: Distribuição do Número de Mach, pressões e temperaturas em um bocal convergente-divergente, nos regimes subsônico (a) e supersônico (b), com o escoamento isoentrópico em todo o bocal, em ambos os casos. Número de Mach, distribuição de pressões e de temperaturas em, com uma onda de choque estacionária, na parte divergente (diagramas fora de escala).

Essa equação relaciona a área da seção em que o número de Mach do escoamento é  $M$ , com a área da garganta na condição de que o número de Mach na mesma seja igual a 1. A Fig. (5.2) mostra os perfis do número de Mach, da relação  $p/p_0$  e de  $T/T_0$  ao longo de um bocal quando o escoamento na região divergente se encontra, respectivamente, em regime subsônico e supersônico.

Cabe observar que, para que o escoamento seja isoentrópico e supersônico na região divergente é necessário que a pressão na saída do mesmo tenha um valor bem determinado,

que é sensivelmente menor do que a pressão de saída no regime subsônico, com  $M = 1$  na garganta.

Caso a pressão na saída, que pode ser imposta, tenha valor fixo e intermediário entre os dois acima mencionados, não há solução totalmente isoentrópica para o escoamento. Uma onda de choque estacionária se estabelece na parte divergente, conforme mostrado na Fig. (5.2c). O escoamento volta ao regime subsônico e isoentrópico após a onda de choque, a velocidade diminui a partir deste ponto e a pressão aumenta até o valor imposto na saída do bocal. O choque é um processo irreversível, com produção de entropia.

### 5.3 Ondas Fracas: Velocidade do Som

Vimos na seção anterior, que a velocidade do som em um gás perfeito é dada por:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = (\gamma RT)^{1/2}$$

Justificamos agora a afirmativa acima. As hipóteses para o desenvolvimento que se seguem:

1. A perturbação que se propaga é fraca;
2. A propagação da mesma se faz em uma única direção;
3. o processo é adiabático e reversível, isto é, isoentrópico. Consequentemente os efeitos viscosos são desprezíveis;
4. O meio onde a perturbação se propaga é um gás perfeito;
5. Os efeitos gravitacionais são desprezíveis.

Com base nas hipóteses acima as equações da continuidade e de Euler simplificadas se escrevem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}$$

Como o processo é adiabático e reversível podemos escrever:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{\partial \rho}{\partial x} = \gamma RT \frac{\partial \rho}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

As equações da continuidade e de Euler tornam-se então:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \tag{5.12}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{5.13}$$

Passamos à linearização das duas equações. Consideramos que a propagação da perturbação da qual procuramos calcular a velocidade se faz em um meio onde a massa específica é  $\rho_0$  em todos os pontos. Sobre este valor da massa específica superponemos uma pequena perturbação,  $\rho'$ , dependente do tempo e da posição. Supomos também que, na ausência da perturbação, o campo de velocidades seja identicamente nulo. Assim sendo temos que:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \rho' \\ u &= u_0 + u'\end{aligned}$$

onde  $u'_0 = 0$ . Levando as expressões acima à Eq. (5.12) temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 + \rho')u' = \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho' u') = 0$$

O termo  $\partial(\rho' u')/\partial x$  contém o produto de duas variáveis com valores pequenos, sendo portanto desprezível diante dos demais. A equação da continuidade resulta então:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0$$

Substituindo as expressões da velocidade e da massa específica perturbadas na Eq. (5.13) temos:

$$(\rho_0 + \rho') \frac{\partial u'}{\partial t} + (\rho_0 + \rho') u' \frac{\partial u'}{\partial x} = -a^2 \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 + \rho')$$

O fator  $\rho_0 + \rho'$  que multiplica os dois termos do lado esquerdo dessa equação pode ser substituído por  $\rho_0$ , pois  $\rho_0 + \rho' \approx \rho_0$ . Lembrando também que  $\rho_0$  é constante, temos:

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + \rho_0 u' \frac{\partial u'}{\partial x} = -a^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x}$$

Espera-se que as derivadas da equação acima sejam todas da mesma ordem de grandeza. Nesse caso o segundo termo do membro esquerdo é muito menor do que os demais pois está multiplicado pela perturbação de velocidade  $u'$ , que é pequena por hipótese. Desprezando este termo chegamos então à equação linearizada da quantidade de movimento:

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x}$$

Temos então o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \tag{5.14}$$

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + a^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0 \tag{5.15}$$

Trata-se de um sistema de duas equações a duas incógnitas. Podemos eliminar uma das incógnitas de modo a obtermos uma única equação. Para eliminarmos a perturbação de

velocidade  $u'$  observamos que se derivarmos a primeira equação em relação a  $t$  e a segunda em relação a  $x$  ambas as equações conterão o termo  $\partial^2 \rho' / (\partial t \partial x)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial t \partial x} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial t \partial x} + a^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} &= 0\end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira temos:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = 0$$

ou:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} \quad (5.16)$$

que é a equação de propagação de ondas fracas.

A equação de evolução de  $u'$  é obtida de forma semelhante: Partindo-se das Eqs. (5.14) e (5.15) procura-se fazer com que o termo que contém  $\rho'$  seja o mesmo em ambas as equações. Subtraindo-se então uma da outra obtém-se a equação procurada:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \quad (5.17)$$

As Eqs. (5.16) e (5.17) são satisfeitas por qualquer função suficientemente regular de  $x - at$ , ou de  $x + at$ , isso é, qualquer função cujas derivadas presentes na Eq. (5.17), existam. Justifiquemos esta afirmação: Seja, por exemplo,  $u' = f_1(x - at)$ . Definimos  $\xi = x - at$ . Nesse caso,  $\partial \xi / \partial x = 1$  e  $\partial \xi / \partial t = -a$ . Utilizando este resultado e definindo  $df_1 / d\xi = f'_1$  temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial t} &= f'_1 \frac{\partial \xi}{\partial t} = -a f'_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = \frac{d}{d\xi} (-a f'_1) f'_1 \frac{\partial \xi}{\partial t} = a^2 f''_1 \\ a^2 \frac{\partial f_1}{\partial x} &= a^2 f'_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} = a^2 f'_1 \quad \text{e} \quad a^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = a^2 \frac{df'_1}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = a^2 f''_1\end{aligned}$$

o que mostra que  $f(x - at)$  é de fato solução da Eq. (5.17). O tipo de argumento de  $f_1$  é característico dos fenômenos de propagação:  $f_1$  permanece invariante para substituições de  $x$  por  $x - at$ , ou  $x + at$ , isso é, para valores crescentes ou decrescentes de  $x$ , respectivamente, pois o tempo sempre aumenta. Em outras palavras,  $u'$  se propaga sem atenuação e com velocidade  $a$ , que é portanto a velocidade de propagação das pequenas perturbações, ou do som.

## 5.4 Ondas Fortes: Compressão por Choque

### 5.4.1 Equações básicas

Tratamos nessa seção, do problema da compressão de um gás perfeito ao passar por uma onda de choque estacionária. Mostramos que o processo é irreversível, com a entropia do

escoamento sendo maior após o choque do que antes, o que define a direção em que o processo ocorre.

Consideremos uma onda de choque estacionária, uni-dimensional, em um gás perfeito cuja constante é  $R$  (ver Fig. 5.3). Ao passar pela onda, a velocidade do escoamento reduz-se de  $u_1$  para  $u_2$ , ao passo que a massa específica e a pressão aumentam, de  $\rho_1$  para  $\rho_2$  e de  $p_1$  para  $p_2$ , respectivamente. Como a espessura da onda de choque é muito pequena em relação à dimensão característica do canal, ou do corpo onde ocorre, a área transversal da seção imediatamente após a onda é praticamente igual à da seção imediatamente antes da mesma. Nessas condições, a equação de conservação da massa, a da quantidade de movimento e a de conservação da energia na forma integral (Eqs. 2.4, 3.6 e 4.24) aplicadas a um volume de controle de seção transversal constante que envolve a onda de choque, e desprezando os efeitos gravitacionais e as forças viscosas que agem sobre o volume de controle, obtemos:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (5.18)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (5.19)$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (5.20)$$

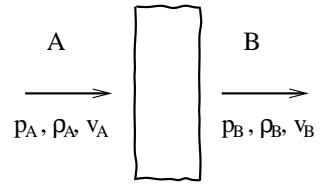


Figura 5.3: Escoamento através de uma onda de choque com seção transversal constante.

### 5.4.2 A relação de Rankine-Hugoniot

A entalpia de um gás perfeito pode ser escrita sob a forma:

$$h = e + \frac{p}{\rho} = C_v T + \frac{p}{\rho} = C_v \frac{p}{\rho R} + \frac{p}{\rho} = \frac{p}{\rho} \left( \frac{C_v}{R} + 1 \right) = \frac{p}{\rho} \frac{C_p}{C_p - C_v} = \frac{p}{\rho} \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

Levando esse resultado à Eq. (5.20) obtemos:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \quad (5.21)$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{\rho_1 u_1^2}{\rho_1} = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{\rho_2 u_2^2}{\rho_2}$$

Rearranjando os termos:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \left[ \frac{2\gamma}{\gamma - 1} p_1 + \rho_1 u_1^2 \right] = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} p_2 + \rho_2 u_2^2$$

Dividindo os dois membros da equação acima por  $p_1$ , obtemos:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \left[ \frac{2\gamma}{\gamma - 1} + \frac{\rho_1 u_1^2}{p_1} \right] = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{p_1} + \frac{\rho_2 u_2^2}{p_1} \quad (5.22)$$

Da Eq. (5.19):

$$\frac{\rho_1 u_1^2}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} + \frac{\rho_2 u_2^2}{p_1} - 1 \quad \frac{\rho_2 u_2^2}{p_1} = 1 - \frac{p_2}{p_1} + \frac{\rho_1 u_1^2}{p_1}$$

Substituindo os resultados acima na Eq. (5.22), encontramos:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \left[ \frac{2\gamma}{\gamma-1} - 1 + \frac{p_2}{p_1} + \frac{\rho_2 u_2^2}{p_1} \right] = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} + 1 + \frac{\rho_1 u_1^2}{p_1}$$

Rearranjando novamente os termos:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \left[ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1} \right] = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1} + 1 - \frac{\rho_2^2 u_2^2}{\rho_1 p_1} + \frac{\rho_1 u_1^2}{p_1}$$

Observando que, pela Eq. (5.18),  $\rho_2^2 u_2^2 = \rho_1^2 u_1^2$ . Por isso, os dois últimos termos da equação acima se cancelam e obtém-se a relação de Rankine-Hugoniot, que descreve o processo de compressão de um gás perfeito, ao passar por uma onda de choque:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_1}{p_2} + 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_1}{p_2}} \quad (5.23)$$

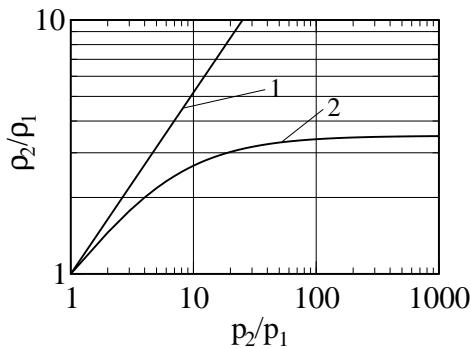


Figura 5.4: Comparação entre o aumento da massa específica em uma compressão isoentrópica (curva No. 1) e em uma onda de choque (curva No. 2), conforme Eq. (5.23).

Essa equação pode ser escrita como a relação entre as temperaturas imediatamente depois e antes do choque, levando em conta a lei dos gases perfeitos. Obtém-se:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_1}{p_2}}{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_1}{p_2}} \quad (5.24)$$

A diferença entre a compressão isoentrópica e a compressão irreversível, através de uma onda de choque, é mostrada na Fig. (5.4). Vê-se que, quando a relação entre as pressões depois e antes do choque são inferiores a 2, a variação de massa específica segue aproximadamente o comportamento da compressão isoentrópica. Para valores maiores da relação de pressões, como no caso de detonações, o comportamento da massa específica e, consequentemente, da entropia, se afastam do isoentrópico. Esse ponto é mais discutido na Sec. (5.4.3).

### 5.4.3 Irreversibilidade das ondas de choque

Da Eq. (5.19), obtemos:

$$\rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2 = p_2 - p_1$$

Levando em conta que  $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ , obtemos, da equação acima:

$$u_2 - u_1 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1}{\rho_1 u_1}$$

Como, pela Eq. (5.2)  $p/\rho = a^2/\gamma$ :

$$u_2 - u_1 = \frac{a_2^2}{\gamma u_2} - \frac{a_1^2}{\gamma u_1} \quad (5.25)$$

A Eq. (5.21) pode ser reescrita, levando em conta a Eq. (5.2) e a definição de  $a^*$ , na forma:

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\gamma - 1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{a_2^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} a^*$$

Donde têm-se que:

$$u_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{a^{*2}}{u_1} - \frac{a_1^2}{u_1} \frac{2}{\gamma - 1} \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{a^{*2}}{u_2} - \frac{a_2^2}{u_2} \frac{2}{\gamma - 1}$$

Subtraindo a segunda equação acima, da primeira e multiplicando o resultado por  $\gamma$ , encontramos:

$$\frac{u_2 - u_1}{\gamma} = \frac{\gamma + 1}{\gamma(\gamma - 1)} a^{*2} \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} - \frac{2}{\gamma - 1} \left( \frac{a_1^2}{\gamma u_1} - \frac{a_2^2}{\gamma u_2} \right)$$

Levando em conta a Eq. (5.25), reescrevemos:

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma(\gamma - 1)} a^{*2} \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} = -\frac{u_2 - u_1}{\gamma} - \frac{2}{\gamma - 1} (u_1 - u_2) = \frac{\gamma + 1}{\gamma(\gamma - 1)} (u_2 - u_1)$$

Donde conclui-se que:

$$u_1 u_2 = a^{*2} \quad (\text{relação de Prandtl-Meyer}) \quad (5.26)$$

Da Eq. (5.11), obtemos:

$$M^{*2} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2} \quad (5.27)$$

A relação entre as velocidades a montante e a jusante da onda de choque podem ser escritas, utilizando-se a relação de Prandtl-Meyer:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{u_1 u_2} = \frac{u_1^2}{a^{*2}} = M_1^{*2}$$

Da relação de Prandtl-Meyer, obtém-se:

$$\frac{u_1}{a^*} \frac{u_2}{a^*} = M_1^* M_2^* = 1$$

o que mostra que, se  $M_1^* > 1$ , têm-se, necessariamente, que  $M_2^* < 1$  e vice-versa. Cabe notar que  $M_1^* > 1$  implica em que  $M_1 > 1$  e que  $M_2^* < 1$  implica em  $M_2 < 1$ . Portanto, se de um lado da onda de choque o escoamento for supersônico, ele será subsônico do outro.

A relação entre as massa específicas depois e antes da onda de choque é obtida da relação entre velocidades, levando em conta a equação da continuidade Eq. (5.18):

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2} \quad (5.28)$$

A relação entre as pressões é obtida, partindo-se das equações da continuidade e da quantidade de movimento (Eqs. 5.18 e 5.19):

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2 = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2)$$

A intensidade do choque é obtida reescrevendo-se a equação acima na forma adimensional:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\Delta p}{p_1} = \frac{\rho_1 u_1^2}{p_1} \left( 1 - \frac{u_2}{u_1} \right)$$

Lembrando que  $a_1^2 = \gamma p_1 / \rho_1$  e utilizando a Eq. (5.28) obtemos:

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \gamma \frac{u_1^2}{a_1^2} \left[ 1 - \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right] = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1)$$

Donde obtem-se:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \quad (5.29)$$

A variação de entropia através da onda de choque pode ser expressa em função das variações de pressão e de da massa específica. A variação de entropia de um gás perfeito e dada por:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1/(\gamma-1)} \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \right]$$

Substituindo as Eqs. (5.29) e (5.28) na equação acima obtemos:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left\{ \left[ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right]^{1/(\gamma-1)} \left[ \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \right]^{-\gamma/(\gamma-1)} \right\}$$

Definindo:  $M_1^2 - 1 = m$ , reescrevemos a última equação:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left[ \left( 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} m \right)^{1/(\gamma-1)} (1 + m)^{-\gamma/(\gamma-1)} \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} m + 1 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \right]$$

Pode-se simplificar essa equação para o caso em que  $M_1 \approx 1$ , observando-se que os termos dentro dos três pares de parênteses são da forma  $1 + b\varepsilon$ , com  $\varepsilon \ll 1$ . Lembrando que  $\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2/2 + \varepsilon^3/3 + \dots$ , identificamos os termos em  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$ ,  $\varepsilon^3$ , etc. O coeficiente dos termos em  $\varepsilon$  e em  $\varepsilon^2$  se anulam, o que conduz a:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)^2} \frac{m^3}{3} + \text{termos de ordem mais alta}$$

Pode-se escrever essa equação na forma:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} \approx \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)^2} \frac{(M_1^2 - 1)^3}{3}$$

Como a entropia não pode decrescer no processo adiabático da passagem pela onda choque é necessário que  $M_1 > 1$ , isso é, a passagem no choque se faz do regime supersônico para o subsônico. Outra conclusão importante é que a produção de entropia é de terceira ordem, sendo portanto pequena se o número de Mach do escoamento a montante do choque não for muito maior do que 1.

Pode-se expressar a variação de entropia em termos da variação de pressão no choque, utilizando-se a Eq. (5.29). Obtém-se:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} \approx \frac{\gamma + 1}{12\gamma^2} \left( \frac{\Delta p}{p_1} \right)^3$$

Portanto, uma pequena variação de pressão no choque, que resulta em variações da mesma ordem de grandeza de velocidade e de massa específica, resulta em variações de entropia de terceira ordem. Os choques fracos são, portanto, quase isoentrópicos.

## 5.5 Analogia com a Hidráulica de Canal Aberto

Mostraremos nessa seção a analogia que existe entre o escoamento compressível quase-unidimensional estudado nas seções (5.2) e (5.3) e o escoamento permanente, sem viscosidade, de fluidos incompressíveis com superfície livre, em canais de pequena profundidade e largura variável, conforme Fig. (5.5):

A hipótese de que o escoamento se faz com superfície livre é utilizada ao admitirmos que a pressão na superfície é constante e independente da espessura  $h$ , da lâmina de fluido. Definimos como sendo igual a zero, a pressão na superfície livre. Como estamos considerando o escoamento quase-unidimensional, desprezamos as componentes  $v_y$  e  $v_z$ . De fato, definimos a velocidade do escoamento  $u = Q/A$ , onde  $Q$  é a vazão volumétrica e  $A$ , a área da seção transversal do canal. Nessas condições, a componente da equação da quantidade de movimento na direção  $y$  se escreve, como  $dp = -\rho g dy$ . Essa equação, integrada, fornece a distribuição vertical de pressões na forma  $p = \rho g(h - y)$ . A constante de integração é determinada de modo a que a pressão se anule na superfície livre, onde  $y = h$ .

Seja um volume de controle de comprimento  $\Delta x$ , perpendicular à direção do escoamento e sejam  $l$  e  $h$  a largura do canal e a espessura da lâmina de fluido na seção considerada.

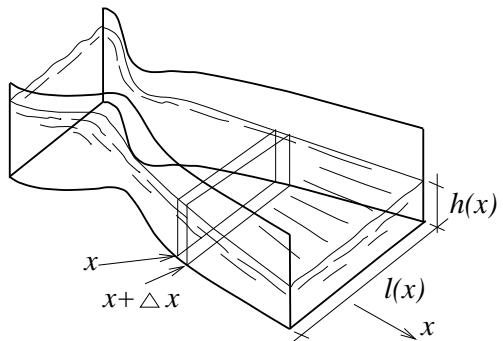


Figura 5.5: Escoamento em um canal de largura variável, com superfície livre.

A equação da continuidade em regime permanente se escreve  $Q = C^{te}$ , ou  $uhl = C^{te}$ . Da mesma forma que no caso de escoamentos compressíveis, essa última equação pode ser escrita na forma diferencial, como:

$$\frac{du}{u} + \frac{dl}{l} + \frac{dh}{h} = 0$$

ou:

$$\frac{dh}{h} = -\frac{du}{u} - \frac{dl}{l} \quad (5.30)$$

A taxa de variação da quantidade de movimento dentro do volume de controle elementar se escreve:

$$\begin{pmatrix} \text{Taxa de acumulação} \\ \text{de quantidade de mo-} \\ \text{vimento dentro do vo-} \\ \text{lume de controle} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \text{Fluxo líquido de quan-} \\ \text{tidade de movimento} \\ \text{para fora do volume} \\ \text{de controle} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Resultante das forças} \\ \text{aplicadas} \end{pmatrix}$$

Aplicamos esse princípio à componente da quantidade de movimento na direção do eixo do canal. Como o escoamento se faz em regime permanente a taxa de acumulação de quantidade de movimento dentro do volume de controle é igual a zero. O fluxo da componente axial da quantidade de movimento para dentro do volume de controle é dado por:

$$\int_0^L \rho u^2 l dy = \rho u^2 lh = f(x)$$

O fluxo de quantidade de movimento que sai do volume de controle em  $x + \Delta x$  é dado por:

$$-f(x + \Delta x) = - \left[ f(x) + \frac{df}{dx} \Delta x \right] = - \left[ \rho u^2 lh + \frac{d}{dx} (\rho u^2 lh) \Delta x \right]$$

O fluxo líquido de quantidade de movimento para dentro do volume de controle é dado pela diferença entre os fluxos entrando e saindo da seção:

$$-\frac{d}{dx} (\rho u^2 lh) \Delta x$$

Como a massa específica é constante e como pela equação da continuidade  $uhl$  também o é podemos passá-la para fora do operador de derivação da expressão acima, que se torna:

$$-\frac{d}{dx} (\rho u^2 lh) \Delta x = -\rho u l h \frac{du}{dx} \Delta x$$

As forças que atuam sobre o volume de controle são devidas à pressão que atua sobre cada lado do mesmo. A força  $F(x)$ , que atua na seção considerada, é dada pela integral da pressão em cada cota,  $\rho g(h - y)$ , multiplicada pelo elemento de área  $l dy$ :

$$F(x) = \int_0^L \rho g(h - y) l dy = pgl \left( hy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^h = \rho g l \frac{l^2}{2}$$

A força atuando em  $x + \Delta x$  é dada por  $F(x + \Delta x) = -(F(x) + dF/dx \Delta x)$  e a resultante é portanto:

$$-\frac{d}{dx} F(x) \Delta x = -\rho g \frac{d}{dx} \left( l \frac{h^2}{2} \right) \Delta x$$

O balanço de quantidades de movimento torna-se portanto:

$$0 = -\rho u l h \frac{du}{dx} \Delta x - \rho g \frac{d}{dx} \left( l \frac{h^2}{2} \right) \Delta x$$

ou:

$$u l h \frac{du}{dx} = -g \frac{d}{dx} \left( l \frac{h^2}{2} \right) = -g l \frac{d}{dx} \frac{h^2}{2} - g \frac{h^2}{2} \frac{dl}{dx} = -g l h \frac{dh}{dx} - g \frac{h^2}{2} \frac{dl}{dx}$$

Multiplicando essa última equação por  $dx/(glh^2)$  obtemos:

$$\frac{u}{gh} du = -\frac{dh}{h} - \frac{1}{2} \frac{dl}{l}$$

Substituindo  $dh/h$  pela expressão dada pela Eq. (5.30) obtemos:

$$\frac{u}{gh} du = \frac{du}{u} + \frac{dl}{l} - \frac{1}{2} \frac{dl}{l}$$

ou:

$$\frac{u}{gh} du - \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \frac{dl}{l}$$

Pondo em evidência o termo  $du/u$  do membro esquerdo obtemos:

$$\left( \frac{u^2}{gh} - 1 \right) \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \frac{dl}{l}$$

O termo  $u^2/gh$  é o número de Froude ao quadrado,  $Fr^2$ . Utilizando essa definição, temos:

$$(Fr^2 - 1) \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \frac{dl}{l} \quad (5.31)$$

Comparando essa equação com a Eq. (5.4) vê-se a analogia entre o comportamento dos escoamentos de líquidos em canais abertos e os escoamentos compressíveis: a largura  $l$  do canal desempenha o mesmo papel da área  $A$ , da seção transversal do duto de seção variável, em que o gás perfeito em consideração escoa. Da mesma forma, o número de Froude é o equivalente do número de Mach, para o caso da hidráulica de canais abertos. Para números de Froude inferiores a 1 (escoamentos sub-críticos), o alargamento do canal resulta em aumento da velocidade do escoamento, enquanto que para números de Mach maiores do que 1 (escoamentos super-críticos), a velocidade aumenta com o alargamento do mesmo. E os escoamentos críticos, em que  $Fr = 1$ , somente ocorrem em seções onde  $dl/dx = 0$ , analogamente ao que ocorre com os escoamentos compressíveis, em que a velocidade sônica só ocorre onde  $dA/dx = 0$ .

## 5.6 Problemas

1. Mostrar que, para um gás perfeito:

$$M = \frac{u}{a_0} \left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \left( \frac{u}{a_0} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

e que essa equação reduz-se, no caso de baixos números de Mach, a:

$$M = \frac{u}{a_0} \left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \left( \frac{u}{a_0} \right)^2 \right]$$

2. Mostrar que a relação entre a temperatura local em um escoamento compressível e a temperatura de referência (escoamento não perturbado), é dada por:

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left[ \left( \frac{u}{U_\infty} \right)^2 - 1 \right]$$

3. Mostrar que a velocidade máxima que o escoamento de um gás perfeito oriundo de um reservatório pode atingir é dada por:

$$u_{max} = 2h_0 = \frac{2}{\gamma - 1} a_0^2$$

Quais são os valores correspondentes da temperatura e do número de Mach? Interpretar o resultado.

4. Mostrar que, para um choque normal fraco ( $\frac{\Delta p}{p} = \frac{p_2 - p_1}{p_1} \ll 1$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho}{\rho_1} &\approx -\frac{\Delta u}{u_1} \approx \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta p}{p_1} & M_1^2 &= 1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{\Delta p}{p_1} & \text{(exata)} \\ M_2^2 &\approx 1 - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{\Delta p}{p_1} & \frac{\Delta p_0}{p_0} &\approx \frac{\gamma + 1}{12\gamma^2} \left( \frac{\Delta p}{p_1} \right)^3 \end{aligned}$$

5. O campo eletromagnético obedece às equações da Maxwell, que são:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} & \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0 & \text{rot } \mathbf{B} &= \mu\sigma\mathbf{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são, respectivamente, os campos elétrico e magnético,  $\rho$  é a massa específica local de cargas elétricas,  $\sigma$ , a condutividade elétrica do meio,  $\mu$  e  $\varepsilon$ , a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do meio, respectivamente. Mostrar que os campos elétrico e magnético satisfazem às equações de ondas na forma:

$$\begin{aligned} \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \nabla^2 \mathbf{E} - \mathbf{grad} (\text{div } \mathbf{E}) \\ \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla^2 \mathbf{B} \end{aligned}$$

e que:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \exp(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 \exp(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\end{aligned}$$

satisfazem às equações de onda para o caso de meio onde não hajam cargas elétricas.  $\mathbf{E}_0$  e  $\mathbf{B}_0$  são duas constantes,  $\boldsymbol{\kappa}$  e  $\omega$  são o vetor de onda e a frequência da perturbação eletromagnética que se propaga e  $\mathbf{r}$  é o vetor de posição no campo.



# Capítulo 6

## Escoamentos Potenciais

### 6.1 Introdução

A circulação em torno de uma massa de fluido em movimento altera-se por efeitos viscosos ou termodinâmicos, como transferência de calor e irreversibilidades causadas, por exemplo, por mistura de massas de composição ou de temperaturas diferentes (ver Eq. 3.76). No caso dos fenômenos associados ao movimento de grandes massas de fluidos, como os que ocorrem na atmosfera ou nos oceanos o número de Reynolds associado aos mesmos é em geral alto, limitando a ação dos efeitos viscosos como geradores de circulação e de vorticidade na massa de fluido. A formação de vorticidade na atmosfera e nos oceanos é então devida principalmente a efeitos de transferência de calor ou mistura. Como esses são fenômenos comuns na atmosfera e oceanos o movimento de tais massas é caracterizado, nas grandes escalas, pela existência de vorticidade.

Outra classe de fenômenos ocorre no escoamento de fluidos pouco viscosos como o ar ou a água em torno de corpos de qualquer forma. Mostramos nos Caps. 7 e 8, que, no caso de corpos esbeltas, os efeitos viscosos confinam-se em uma fina camada que se forma em torno do corpo (camada limite) e na esteira deixada a jazante do corpo, para onde a vorticidade gerada na camada limite é transportada. Fora da camada limite e da esteira o escoamento não está sujeito a efeitos viscosos nem, em muitos casos, a efeitos termodinâmicos. Adicionalmente, é comum que o escoamento que incide sobre o corpo seja uniforme, isso é,  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$  no escoamento incidente não perturbado. Fora da camada limite e da esteira o teorema de Kelvin (Eq. 3.78) se aplica: a circulação sobre qualquer curva traçada sobre o escoamento incidente se conserva. E sendo nula o escoamento incidente é irrotacional e assim permanece em toda a região onde o teorema de Kelvin se aplica. Obtém-se o mesmo resultado a partir da equação da vorticidade (Eq. 3.74) sem o termo viscoso. A equação toma a forma:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad } \mathbf{v}.$$

Essa equação mostra que, sendo a vorticidade nula  $D\boldsymbol{\omega}/Dt = 0$ , isso é, sendo o campo inicialmente irrotacional, assim permanece. Em escoamentos irrotacionais o campo de velocidades admite um potencial  $\phi$ , tal que:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \phi$$

Adicionalmente, a equação de Bernoulli, na forma dada pela Eq. 3.55, aplica-se no campo todo, no caso de escoamentos incompressíveis.

## 6.2 Escoamentos Potenciais Compressíveis

Escoamentos irrotacionais caracterizam-se pela existência de um potencial  $\phi$ , cujo gradiente é o campo de velocidades  $\mathbf{v}$ . De forma geral, o potencial é função do tempo e da posição, isto é,  $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ . Obtemos a seguir uma equação de evolução para o potencial  $\phi$ .

A equação de Euler pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p$$

onde  $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ . No caso de um campo irrotacional de velocidades esta equação torna-se:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{v^2}{2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Exprimindo a componente de velocidade em função do potencial,  $v_i = \partial \phi / \partial x_i$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{v^2}{2} = 0$$

Integrando essa última equação obtém-se:

$$\int \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i + \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i + \int \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{v^2}{2} dx_i = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = F(t)$$

A função  $F(t)$  pode ser incorporada ao potencial, o que resulta em:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = 0$$

Derivando-se esta ultima equação com relação ao tempo obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} = 0 \quad (6.1)$$

O termo que contém a integral na equação acima pode ser reescrito como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{dp}{\rho} = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{a^2}{\rho} d\rho = a^2 \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d\rho}{\rho} = a^2 \frac{\partial}{\partial t} \ln \rho = \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

onde  $a^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$  é a velocidade do som. Substituindo o termo acima na eq. (6.1) obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} = 0 \quad (6.2)$$

Multiplicando a equação de Euler por  $v_i$  e lembrando que  $v_i \partial v_i / \partial t = 1/2 \partial v^2 / \partial t$ , obtém-se:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{v_i}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

ou:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{a^2}{\rho} v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

uma vez que  $\partial p / \partial x_i = a^2 \partial \rho / \partial x_i$ , nas condições vistas na Sec. (5.3). Utilizando a equação da continuidade substituímos o termo  $v_i \partial \rho / \partial x_i$  da equação acima por:

$$v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = - \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)$$

e obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{a^2}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)$$

Utilizando a eq. (6.2) substituímos o termo  $(a^2 \rho)(\partial \rho / \partial t)$  na equação acima:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = a^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t}$$

Substituindo  $\frac{1}{2} \partial v^2 / \partial t = v_i \partial v_i / \partial t$  obtemos:

$$2v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = a^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

Substituindo  $v_i = \partial \phi / \partial x_i$  temos:

$$2 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

e finalmente:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right). \quad (6.3)$$

Em notação vetorial:

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{a^2} \left[ (\mathbf{v} \mathbf{v}) : \mathbf{grad} \mathbf{v} + 2 \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right]. \quad (6.4)$$

A equação potencial dos escoamentos compressíveis é representada nas formas tensorial cartesiana e vetorial pelas Eqs. 6.3 e 6.4. A equação é válida em regiões onde não haja produção de entropia, desde que o escoamento incidente sobre a região considerada seja também irrotacional.

Condições de contorno para o potencial  $\phi$ :

a) Sobre sólidos estacionários:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

$n$  é a coordenada ao longo da direção  $\mathbf{n}$ , perpendicular à superfície do sólido. Esta condição é equivalente a  $\mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{n} = 0$

b) Sobre sólidos em movimento permanente com velocidade  $\mathbf{U}$ .

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}$$

Esta condição também pode ser escrita como  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{U}) = 0$ , onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade local.

Consideramos agora alguns casos limite da equação potencial dos escoamentos compressíveis.

Notação: indicamos a operação de derivação por um índice contendo a variável em relação à qual o potencial  $\phi$  é derivado:  $\partial \phi / \partial t = \phi_t$ ,  $\partial^2 \phi / \partial x^2 = \phi_{xx}$ , etc.

1. Escoamento bi-dimensional permanente:

$$(\phi_x^2 - a^2)\phi_{xx} + (\phi_y^2 - a^2)\phi_{yy} + 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} = 0 \quad (6.5)$$

ou:

$$(v_x^2 - a^2)\phi_{xx} + (v_y^2 - a^2)\phi_{yy} + 2v_x v_y \phi_{xy} = 0$$

2. Escoamento tri-dimensional permanente,  $v_x \gg v_y, v_x \gg v_z$  (corpos esbeltos sob baixo ângulo de ataque, fora da região transônica):

$$(1 - M^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0$$

Nesse caso a presença de um corpo esbelto, alinhado, ou quase alinhado ao escoamento gera pequenas componentes de velocidade nas direções perpendiculares ao campo uniforme incidente, introduzindo ao mesmo tempo pequenas perturbações na direção da velocidade incidente.

3. Escoamento tri-dimensional permanente, com todas as componentes de velocidade pequenas em relação à velocidade do som. Nesse caso  $1/a^2 \rightarrow 0$  e obtemos:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0$$

Esta última, conhecida como Equação de Laplace, pode ser obtida a partir da equação da continuidade para fluidos incompressíveis e usa ando a condição de que escoamentos irrotacionais admitem um potencial tal que  $v_i = \partial \phi / \partial x_i$ . Substituindo essa equação na da continuidade temos:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \nabla^2 \phi = 0 \quad (6.6)$$

Cabe mencionar que a hipótese de escoamento incompressível é equivalente à de velocidade do som infinita. O membro direito da Eq. (6.3) se anula. Portanto, a Eq. (6.6) se aplica a qualquer escoamento potencial compressível e não apenas para o caso em  $v_x \gg v_y$  e  $v_x \gg v_z$ . Problemas aos quais essa equação se aplica se constituem de uma classe consideravelmente mais simples do que os não potenciais. Têm-se na realidade uma única incógnita, o potencial  $\phi$ , que satisfaz à Equação de Laplace. Uma vez conhecido, as componentes da velocidade são obtidas através do gradiente do potencial. O gradiente de pressões é determinado a partir da Equação de Navier-Stokes.

Outro aspecto importante da Eq. (6.6) é sua linearidade. Em consequência dessa linearidade a soma de duas soluções para o potencial  $\phi$  é solução da mesma. As soluções para cada componente do campo de velocidades satisfaz à Equação de Laplace, assim como a soma de dois campos de velocidade potenciais. O princípio de superposição se aplica.

#### 4. Escoamento uni-dimensional não-permanente:

$$\phi_{xx} = \frac{1}{a^2} (\phi_x^2 \phi_{xx} + \phi_{tt} + 2\phi_x \phi_{tx})$$

ou:

$$\phi_{xx} = \frac{1}{a^2} (v_x^2 \phi_{xx} + \phi_{tt} + 2v_x \phi_{tx})$$

#### 5. Escoamento uni-dimensional não-permanente, $v_x^2 \ll a^2$ , $v_x \partial v_x / \partial t \ll a^2$ :

$$\phi_{xx} = \frac{1}{a^2} \phi_{tt}.$$

Têm-se nesse caso, a equação de ondas fracas, caracterizadas como pequenas perturbações que se propagam no meio (ver também a Sec. 5.3).

### 6.3 Uma Classificação das Equações a Derivadas Parciais

Seja o caso de um campo potencial bi-dimensional. Suponhamos que sejam dados  $\phi$  e **grad**  $\phi$  sobre uma curva  $\Sigma$ . Reescrevemos a Eq. 6.5 sob a forma:

$$A\phi_{xx} + B\phi_{xy} + C\phi_{yy} + D = 0,$$

com variáveis independentes  $x$  e  $y$ , variável dependente  $\phi$  e os coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , funções de  $a$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $\phi$ ,  $\phi_x$  e  $\phi_y$ . Suponhamos que  $x = x(\sigma)$  e  $y = y(\sigma)$ . Adotamos a notação:

$$\begin{aligned} p &= \phi_x & r &= \phi_{xx} \\ q &= \phi_y & s &= \phi_{xy} & t &= \phi_{yy}. \end{aligned}$$

Têm-se então:

$$\begin{aligned} Ar + Bs + Ct &= -D \\ \frac{dp}{d\sigma} &= \frac{d\phi_x}{d\sigma} = \frac{dx}{d\sigma}r + \frac{dy}{d\sigma}s \\ \frac{dq}{d\sigma} &= \frac{d\phi_y}{d\sigma} = \frac{dx}{d\sigma}s + \frac{dy}{d\sigma}t. \end{aligned}$$

Reescrevendo o sistema de equações acima sob a forma matricial:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ \frac{dx}{d\sigma} & \frac{dy}{d\sigma} & 0 \\ 0 & \frac{dx}{d\sigma} & \frac{dy}{d\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \\ \frac{dp}{d\sigma} \\ \frac{dq}{d\sigma} \end{pmatrix}.$$

Procuramos as condições para que as derivadas da velocidade sejam descontínuas e, consequentemente, que as derivadas de ordem mais alta  $\phi_{xx}$ ,  $\phi_{xy}$  e  $\phi_{yy}$  divirjam. Seja  $\sigma$  o parâmetro de uma curva característica ao longo da qual as derivadas de ordem mais alta, isso é, as derivadas da velocidade, são descontínuas. Impõe-se a condição de descontinuidade exigindo-se que o determinante da matriz de coeficientes do sistema acima se anule. Essa condição se traduz por:

$$A \left( \frac{dy}{d\sigma} \right)^2 - B \left( \frac{dx}{d\sigma} \right) \left( \frac{dy}{d\sigma} \right) + C \left( \frac{dx}{d\sigma} \right)^2 = 0,$$

ou dividindo a última equação por  $(dx/d\sigma)^2$ :

$$A \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - B \left( \frac{dy}{dx} \right) + C = 0,$$

onde obtém-se:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

As derivadas do campo de velocidades serão contínuas se as raízes da equação forem imaginárias e descontínuas se forem reais. A Eq. 6.5 pode ser classificada em três grupos, dependendo de seus parâmetros:

1. Parabólica se  $B^2 - 4AC = 0$ ;
2. Hiperbólica se  $B^2 - 4AC > 0$ ;
3. Elíptica se  $B^2 - 4AC < 0$  (não há características no campo, ao longo das quais as derivadas da velocidade são descontínuas);

Alguns exemplos:

1. A equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

não tem características reais. Todas as derivadas são contínuas. Os campos regidos pela equação de Laplace são uniformes.

2. A equação da temperatura em regime não-permanente e unidimensional,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

apresenta uma família de características. Trata-se de uma equação parabólica.

3. A equação de ondas:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

apresenta duas famílias de características ao longo das retas  $dx/dt = \pm a$ . Essa equação sempre apresenta uma região de descontinuidade. Trata-se de uma equação hiperbólica.

4. No caso da Eq. 6.5, reescrita sob a forma:

$$(u^2 - a^2) \phi_{xx} + 2uv \phi_{xy} + (v^2 - a^2) \phi_{yy} = 0,$$

onde  $u = \phi_x$ ,  $v = \phi_y$ ,  $A = (u^2 - a^2)$ ,  $B = 2uv$  e  $C = (v^2 - a^2)$ ,

têm-se que:

$$B^2 - 4AC = a^2 [(u^2 + v^2) - a^2].$$

Se  $|\mathbf{v}|^2 = (u^2 + v^2) < a^2$ , isso é, se o regime do escoamento for subsônico, a equação é elíptica e não há descontinuidades nas derivadas da velocidade.

Se  $|\mathbf{v}|^2 = (u^2 + v^2) > a^2$ , isso é se o regime for supersônico,  $B^2 - 4AC > 0$ , a equação é hiperbólica. Nesse caso:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{uv \pm \sqrt{a^2(u^2 + v^2 - a^2)}}{u^2 - a^2} = \frac{\frac{v}{u} \pm \frac{a^2}{u^2} \sqrt{M^2 - 1}}{1 - \frac{a^2}{u^2}} = \tan(\alpha \pm \theta), \quad (6.7)$$

onde:

$$M = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{a} \quad \tan \alpha = \frac{v}{u} \quad \sin \theta = \frac{a}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{1}{M}.$$

Se  $v = 0$  a Eq. 6.7 reduz-se a:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\pm \theta) = \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}},$$

onde  $\theta$  é o ângulo que as características formam com a velocidade de um ponto que se desloca no campo. Têm-se também que:

$$\sin \theta = \frac{a}{u} = \frac{1}{M} \quad \text{e:} \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M}.$$

Vê-se, da Fig. 6.1 (c), que, ao fim de um intervalo de tempo igual a 1, uma perturbação emitida por um ponto que desloca com velocidade  $u$  terá percorrido uma distância numericamente igual a  $a$  enquanto a distância que o ponto percorreu será numericamente igual a  $u$ . Da mesma figura conclui-se que  $\sin \theta = a/u = 1/M$ .

Para um ponto que se desloca com  $v = u$ , as características ao longo das quais as derivadas da velocidade são descontínuas e as regiões que recebem sinal de pequenas perturbações emitidas pelo ponto se encontram ilustradas na Fig. 6.1. A região interna às características, que recebem sinais das perturbações emitidas pelo ponto em deslocamento, recebe o nome de Cone de Mach.

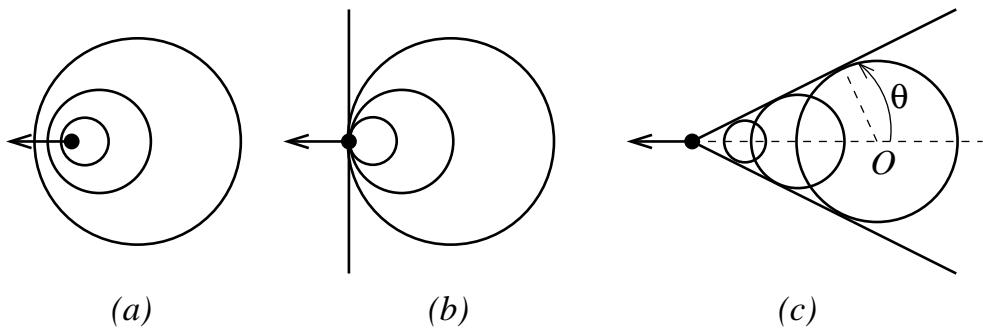


Figura 6.1: Características de um escoamento bidimensional, permanente, compressível. (a): O ponto que se desloca com velocidade subsônica emite pequenas perturbações que se propagam acima de sua velocidade; não há descontinuidades nas derivadas da velocidade. A equação potencial do escoamento é elíptica. (b): O ponto se desloca com a velocidade do som. Há uma família de características ao longo da qual as derivadas da velocidade são descontínuas. A região à frente (à esquerda) da característica se encontra na zona de silêncio e não recebe sinais de perturbação emitidos pelo ponto. A equação potencial do escoamento é parabólica. (c): O ponto se desloca com velocidade acima da velocidade do som. O campo tem duas famílias de características, ao longo das quais as derivadas da velocidade são descontínuas. Pontos à frente das características se encontram na zona de silêncio. A equação potencial é hiperbólica. Uma pequena perturbação localizada inicialmente no ponto  $O$  encontra-se sobre a característica que delimita o Cone de Mach e avança na direção perpendicular à mesma, enquanto a partícula que a gerou avança sempre sobre o vértice do cone.

## 6.4 Considerações sobre o Escoamento Não Viscoso em Torno de um Aerofólio

Consideramos o escoamento uniforme de um fluido compressível ou não, sem viscosidade que incide sobre um aerofólio. Uma das linhas de corrente que se aproxima do perfil termina em um ponto de estagnação, como mostrado na Fig. (6.2). Linhas de corrente acima dessa passam por cima do perfil e abaixo da mesma passam por baixo, como indicado na mesma figura. Sendo uniforme, o escoamento incidente é irrotacional a montante do perfil. Em virtude do teorema de Kelvin (Eq. 3.78) o escoamento se mantém irrotacional ao passar pelo corpo. Adicionalmente, a equação de Bernoulli, na forma dada pela Eq. 3.55, se aplica em todos os pontos do campo.

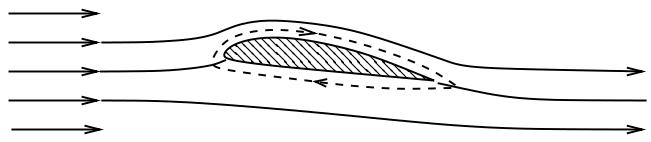


Figura 6.2: Escoamento não viscoso e irrotacional, incidente sobre um aerofólio. Ao passar pelo aerofólio, o escoamento permanece irrotacional, em virtude do teorema de Kelvin (Eq. 3.78). No entanto, a circulação sobre a curva tracejada que circunda o aerofólio é positiva.

A circulação sobre uma curva orientada no sentido horário, que envolva o perfil é diferente de zero. A Fig. (6.2) mostra também uma linha de estagnação e uma curva

tracejada e orientada, ao longo da qual se calcula a circulação. A integral da componente da velocidade tangencial à curva é positiva no trecho acima da linha de estagnação, pois essa componente tem o mesmo sentido da orientação da curva, e negativa no trecho inferior. Por dois motivos a circulação ao longo dessa curva é positiva: o trecho acima da linha de estagnação é mais longo do que o inferior e a velocidade acima do perfil é maior do que a velocidade abaixo. E sendo a velocidade acima do perfil maior do que a velocidade abaixo do mesmo, a pressão acima é inferior do que a pressão abaixo do perfil, o que resulta em uma força de sustentação elevada.

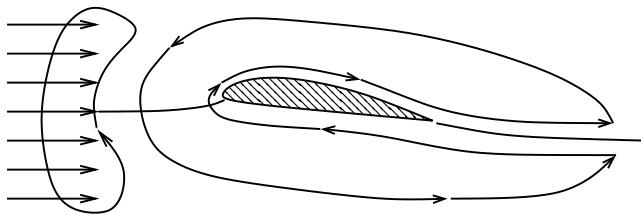


Figura 6.3: Circulação sobre um aerofólio. Uma curva fechada, sobre a qual a circulação é zero, se aproxima e avança sobre o perfil sem se fechar completamente sobre o mesmo. A circulação sobre essa curva e o rotacional na região interna à curva são sempre nulos.

sempre à frente do mesmo. Os demais avançam com o escoamento, fazendo com que a curva envolva progressivamente o perfil. A circulação sobre essa curva é sempre igual a zero.

$$\int_S \text{rot } \mathbf{v} = \oint_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

O ponto sobre o lado direito da curva, localizado sobre a linha de estagnação se aproxima progressivamente do perfil, o mesmo acontecendo com os trechos da curva próximos desse ponto. Ao fim de algum tempo a curva toma a forma mostrada na Fig. (6.4 a). Os pontos da curva próximos ao perfil, que são transportados para jusante se aproximam e terminam por se confundir com a linha tracejada. A contribuição desse trecho para a circulação é nula pois integra-se num sentido e no contrário, ao longo da linha tracejada. E a circulação sobre a curva fechada do perfil, somada à circulação sobre a curva externa, em sentido contrário é igual à integral do rotacional na superfície limitada pela curva que é transportada sobre o perfil e igual a zero. Essa é a essência do teorema de Stokes.

Cabe ressaltar que essa circulação positiva não é incompatível com o teorema de Kelvin. De fato, a circulação sobre uma curva traçada no escoamento incidente é igual a zero, mas uma tal curva nunca evolui de forma a se fechar em torno do perfil. De fato, o campo não é definido na região interna ao perfil. A evolução de uma curva incidente sobre o perfil é mostrada na Fig. (6.3). A curva se aproxima do perfil, no primeiro instante e o envolve nos instantes seguintes, sem no entanto se fechar em torno do mesmo. Os dois pontos da localizados sobre a linha de estagnação que se aproxima do perfil permanecem

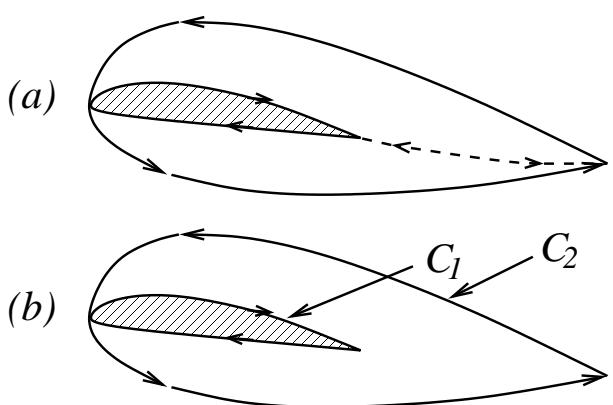


Figura 6.4: A soma das circulações sobre o aerofólio (curva  $C_1$ ) e sobre a curva externa ( $C_2$ ), feita em sentido contrário, é igual a zero.

Outro aspecto referente ao problema da circulação sobre um aerofólio diz respeito à forma como a circulação sobre a curva externa, mostrada na Fig. (6.4), se desenvolve. Ao se pôr o aerofólio em movimento desenvolve-se a circulação positiva em torno do mesmo. A circulação contrária, que se desenvolve na curva externa, concentra-se inicialmente em uma região próxima ao bordo de fuga e é transportada pelo escoamento para longe do perfil. Trata-se de fenômeno conhecido como *vórtice de partida*, mostrado na Fig. (6.5).

Cabe por fim notar que os resultados apresentados nessa seção aplicam-se a escoamentos incompressíveis ou não e a escoamentos estratificados, em que dois fluidos diferentes incidem sobre um corpo, como ocorre no caso de embarcações, que se movimentam na interface entre a água e o ar.

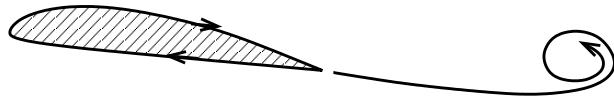


Figura 6.5: Formação do vórtice de partida: ao mesmo tempo em que a circulação e a sustentação se desenvolvem sobre o aerofólio, um vórtice de sinal contrário se forma no bordo de fuga e é transportado pelo escoamento para longe do aerofólio.

## 6.5 Escoamentos Potenciais Incompressíveis Bi-dimensionais

### 6.5.1 O potencial complexo de velocidades

Escoamentos potenciais incompressíveis satisfazem a equação de Laplace (Eq. 6.6). Funções que satisfazem à equação de Laplace denominam-se *funções harmônicas*. Como a Eq. 6.6 é linear, o campo de velocidades também o é. O campo hidrodinâmico de escoamentos potenciais incompressíveis é determinado da seguinte forma: obtém-se inicialmente uma solução para o potencial de velocidades, que atenda às condições de contorno do problema. O campo de velocidades é obtido a partir do potencial e não depende do de pressões. A equação da continuidade fica automaticamente satisfeita. O campo hidrodinâmico deve ainda satisfazer às equações de conservação da quantidade de movimento. A pressão é então determinada de forma que essas equações fiquem satisfeitas. O procedimento é aplicável em virtude da existência de uma única variável, o potencial, a partir do qual as velocidades são determinadas. Se o potencial não existir a equação da continuidade não é suficiente para a determinação do campo de velocidades. Nesse caso é necessário resolver a equação da continuidade juntamente com a da quantidade de movimento. O campo de velocidades não é mais independente do de pressões.

Sendo o campo de velocidades regido por uma equação linear o princípio de superposição se aplica: a soma de soluções da equação de Laplace também é solução do potencial de velocidades. O caso de escoamentos bidimensionais apresenta uma particularidade adicional, decorrente das existência de uma função corrente. Nesse caso:

$$v_x = \phi_x = \psi_y \quad (6.8)$$

$$v_y = \phi_y = -\psi_x \quad (6.9)$$

Em coordenadas polares:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (6.10)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (6.11)$$

As linhas de equipotencial e linhas de corrente são perpendiculares entre si. Para demonstrarmos essa propriedade é suficiente mostrarmos que o gradiente do potencial e o da função corrente são perpendiculares entre si. Temos que:

$$\mathbf{grad} \phi = \phi_x \mathbf{i} + \phi_y \mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{grad} \psi = \psi_x \mathbf{i} + \psi_y \mathbf{j}$$

Fazendo o produto escalar dos dois gradientes:

$$\mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \psi = \phi_x \psi_x + \phi_y \psi_y = -\phi_x \phi_y + \phi_y \phi_x = 0,$$

Os requisitos definidos pelas Eqs. 6.8 e 6.9 e impostos às variáveis  $\phi$  e  $\psi$ , denominam-se *condições de Cauchy-Riemann* (ver apêndice B). Funções complexas da forma:

$$f(z) = u + iv, \quad \text{onde} \quad z = x + iy, \quad u = u(z) \quad \text{e} \quad v = v(z)$$

satisfazem às condições de Cauchy-Riemann e ambas as funções  $u$  e  $v$  satisfazem à equação de Laplace, individualmente. Têm-se portanto que  $\nabla^2 f = 0$ . O potencial  $\phi$  e a função corrente  $\psi$  satisfazem a todos os requisitos acima relacionados, impostos a funções complexas. Pode-se então definir um potencial complexo:

$$F(z) = \phi + i\psi, \quad (6.12)$$

que satisfaz à Eq. de Laplace:

$$\nabla^2 F(z) = 0. \quad (6.13)$$

Para uma função complexa têm-se que:

$$F'(z) = \phi_x + i\psi_x = \phi_x - i\phi_y.$$

Pode-se definir também uma velocidade complexa  $W$ , cujas partes real e imaginária são as componentes  $v_x$  e  $v_y$  da velocidade, respectivamente:

$$W(z) = v_x + iv_y. \quad (6.14)$$

A velocidade complexa é dada portanto, pelo complexo conjugado da derivada do potencial:

$$W = \frac{dF^*}{dz}, \quad (6.15)$$

onde o asterisco indica o conjugado de uma variável complexa.

### 6.5.2 Campos potenciais elementares

Abordamos nessa seção, soluções elementares da Eq. 6.13. Além do interesse por se tratar de um grupo elementar de soluções exatas, pode-se combiná-las, em virtude da linearidade das equações que as governam, de modo a descrever campos de velocidade mais complexos.

## Fontes e sumidouros

O primeiro exemplo refere-se a um escoamento radial. Trata-se do escoamento proveniente de uma fonte ou convergindo para um sumidouro. O potencial complexo é da forma:

$$F = \phi + i\psi = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln z = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln re^{i\theta} = \frac{\Lambda}{2\pi} (\ln r + i\theta). \quad (6.16)$$

As componentes do campo de velocidades são dadas por:

$$v_r = \frac{\Lambda}{2\pi r} \quad \text{e:} \quad v_\theta = 0.$$

Se a constante  $\Lambda$  for positiva trata-se do escoamento radial que emerge de uma fonte. Se for negativa, do escoamento em direção a um sumidouro.  $\Lambda$  é a vazão do campo. As linhas de corrente dos dois casos estão representadas na Fig. 6.6.

## Vórtice potencial

Outra solução para o potencial complexo é dada por:

$$F = \phi + i\psi = i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln z = i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln re^{i\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi} (-\theta + i \ln r). \quad (6.17)$$

O potencial e a função corrente são dados por:

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi &= \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + C^{te}. \end{aligned}$$

O valor da constante da função corrente pode ser arbitrado em  $-(\Gamma/2\pi) \ln R$ , onde  $R$  é um raio de referência. A função corrente torna-se:

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R}.$$

As componentes do campo de velocidades são dadas por:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}. \end{aligned}$$

Trata-se de um vórtice potencial já abordado na Sec. 3.11, que gira em sentido horário. O campo de velocidades não é definido na origem.  $\Gamma$  é a intensidade do vórtice, ou circulação sobre qualquer curva que envolva a origem. A circulação de um vórtice potencial é igual a zero se a curva não envolver a origem.

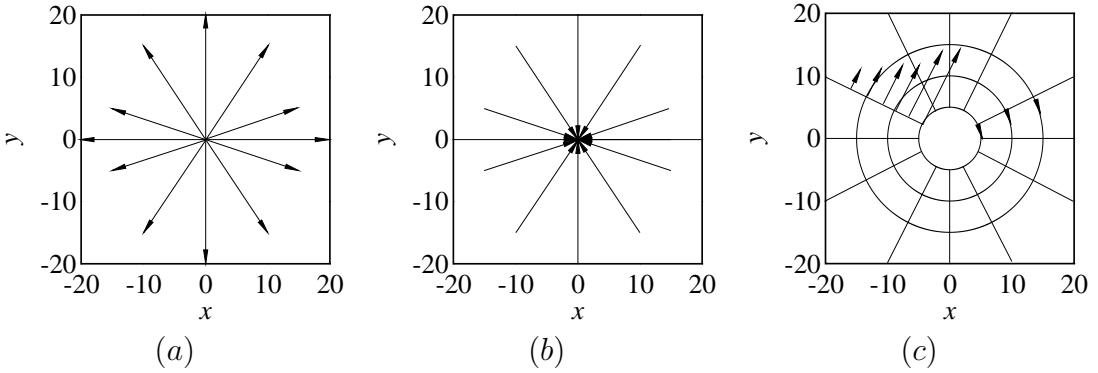


Figura 6.6: Linhas de corrente do escoamento potencial de um fluido incompressível emergente de uma fonte (a), convergente para um sumidouro (b) e de um vórtice potencial (c). O último diagrama mostra também as linhas equipotenciais, que são retas partindo da origem.

### Potenciais complexos da forma $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{A}\mathbf{z}^n$

Funções da forma:

$$F(z) = Az^n = Ar^n e^{in\theta} = \phi + i\psi = = Ar^n \cos n\theta + iAr^n \sin n\theta \quad (6.18)$$

são, efetivamente, soluções para o potencial complexo de velocidades, de vez que ambas as funções  $\phi$  e  $\psi$  satisfazem à equação de Laplace,  $\nabla^2\phi = \nabla^2\psi = 0$ , em coordenadas polares:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (6.19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (6.20)$$

A constante  $A$  representa um fator de escala. Seu módulo,  $|A|$ , determina a escala do potencial. Seu argumento introduz um ângulo no potencial e na função corrente e, consequentemente, nas componentes da velocidade.

As componentes da velocidade são dadas por:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = nAr^{n-1} \cos n\theta \quad (6.21)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -nAr^{n-1} \sin n\theta. \quad (6.22)$$

O potencial complexo dado pela Eq. 6.18 descreve escoamentos próximos ao vértice do ângulo formado por duas placas planas que se interceptam.  $n = \pi/\alpha$ , onde  $\alpha$  é o ângulo entre as placas.

Utilizamos coordenadas polares  $r, \theta$  no plano perpendicular à linha de interseção dos dois planos e a origem no vértice do ângulo. Os planos que delimitam o diedro encontram-se em  $\theta = 0$  e  $\theta = \alpha$ . As condições de contorno para exigem que a velocidade na direção  $\theta$  se anule nas paredes do diedro:

$$v_\theta = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha} = 0.$$

Essas condições são satisfeitas.

Consideremos os os casos em que  $n = 1$ ,  $n = 1/2$ ,  $n = 2/3$ ,  $n = 3/2$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$  e  $n = -1$ .

- O caso em que  $n = 1$  corresponde a  $\alpha = \pi$ . Trata-se do escoamento uniforme sobre uma placa plana, paralelo à placa. A característica do escoamento fica clara ao se escrever o potencial em coordenadas cartesianas:

$$F = U_\infty (x + iy).$$

As linhas de corrente, dadas por  $\psi = C^{te}$ , são as retas  $y = C^{te}$ . O vetor velocidade tem componentes  $v_x = V_\infty$  e  $v_y = 0$ . É paralelo às linhas de corrente, que são paralelas ao eixo  $x$ . As linhas de corrente e equipotenciais são mostradas na Fig. 6.7 (a).

- Quando  $n = 1/2$  as duas placas formam um ângulo  $\alpha = 2\pi$  entre si. Têm-se o escoamento que contorna uma placa semi-infinita. As linhas de corrente e equipotenciais são mostradas na Fig. 6.7 (b).
- O escoamento externo sobre um diedro formado por dois planos que se interceptam formando um ângulo de  $270^\circ$  é mostrado na Fig. 6.7 (c). Têm-se  $n = 2/3$ . Cabe ressaltar que esse caso, como o anterior e todos casos em que  $n < 1$ , descrevem o campo de velocidades que se desenvolve pelo lado externo de diedros. As Eqs. 6.21 e 6.22 mostram que a velocidade diverge na origem. Na prática, essa situação não ocorre, pois o gradiente de velocidades também diverge e os efeitos viscosos, então desprezados, tornam-se importantes. Os efeitos viscosos induzem a formação de vorticidade e, nessas regiões, o escoamento não é mais potencial.

Esses princípios aplicam-se também à distribuição de tensões em sólidos, pois o campo de tensões obedece à equação:

$$\operatorname{div} \sigma = 0.$$

Da mesma forma como a velocidade tende a um valor infinito próximo a cantos vivos externos, a tensão em cantos vivos de sólidos côncavos se torna infinita. O caso em que  $n = 1/2$  corresponde a uma trinca. A tensão na extremidade da mesma diverge, o que, na prática, induz à sua propagação.

- O caso em que  $n = 3/2$  descreve o campo de velocidades que se forma próximo ao vértice de um diedro cujos planos se interceptam a  $120^\circ$ , como mostrado na Fig. 6.7 (d). A velocidade se anula no vértice.
- No caso em que  $n = 2$  o potencial complexo toma a forma  $F = Az^2$ . O potencial e função corrente assumem a forma:

$$\phi = Ar^2 \cos 2\theta \tag{6.23}$$

$$\psi = r^2 \sin 2\theta. \tag{6.24}$$

As linhas de corrente formam hipérboles retangulares. Essa configuração pode ser observada notando-se que:

$$\psi = Ar^2 \sin 2\theta = 2Ar^2 \sin \theta \cos \theta = 2Axy.$$

O campo de velocidades é dado por:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2Ax \\ v_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2Ay. \end{aligned}$$

As linhas de corrente em que  $\psi = 0$  coincidem com os eixos  $x$  e  $y$ . Como as demais linhas de corrente, pode-se considerá-las como paredes de sólidos, dado que as partículas do fluido não cruzam linhas de corrente.

O caso pode ser interpretado como o do escoamento interno nas proximidades do vértice de um diedro de  $90^\circ$ , como mostrado na Fig. 6.7 (e). Pode ser também interpretado como o de um jato que incide sobre uma placa plana, formando com a mesma um ângulo de  $90^\circ$ . Nesse caso têm-se  $y > 0$  e  $-\infty < x < \infty$ .

6. Quando  $n = 3$  têm-se o campo de velocidades que se forma próximo ao vértice de um diedro cujos planos se interceptam a  $60^\circ$ , como mostrado na Fig. 6.7 (f). A velocidade se anula no vértice.
7. O campo descrito pelo caso em que  $n = -1$  pode ser interpretado como o que se forma pela existência de um par fonte-sumidouro superposto na origem. As linhas de corrente partem e retornam à origem. As linhas de corrente e equipotenciais tomam a forma:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\Lambda}{r} \cos \theta \\ \psi &= -\frac{\Lambda}{r} \sin \theta. \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação das linhas de corrente em coordenadas cartesianas, têm-se

$$\psi = -\frac{\Lambda y}{r^2} = -\frac{\Lambda y}{x^2 + y^2},$$

onde conclui-se que:

$$x^2 + y^2 + \frac{\Lambda y}{\psi} = 0 \quad \text{e:} \quad x^2 + \left( y + \frac{\Lambda}{2\psi} \right)^2 = \left( \frac{\Lambda}{2\psi} \right)^2.$$

As linhas de corrente são circunferências tangentes à origem. As circunferências localizadas no semi-plano superior delimitam regiões de campos que giram em sentido horário, enquanto no semi-plano inferior o campo gira no sentido horário. A velocidade próximo à origem diverge por um fator proporcional a  $r^{-2}$ . O campo de velocidades é dado por:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ v_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \Lambda \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

As linhas de corrente e as equipotenciais são mostradas na Fig. 6.7 (g).

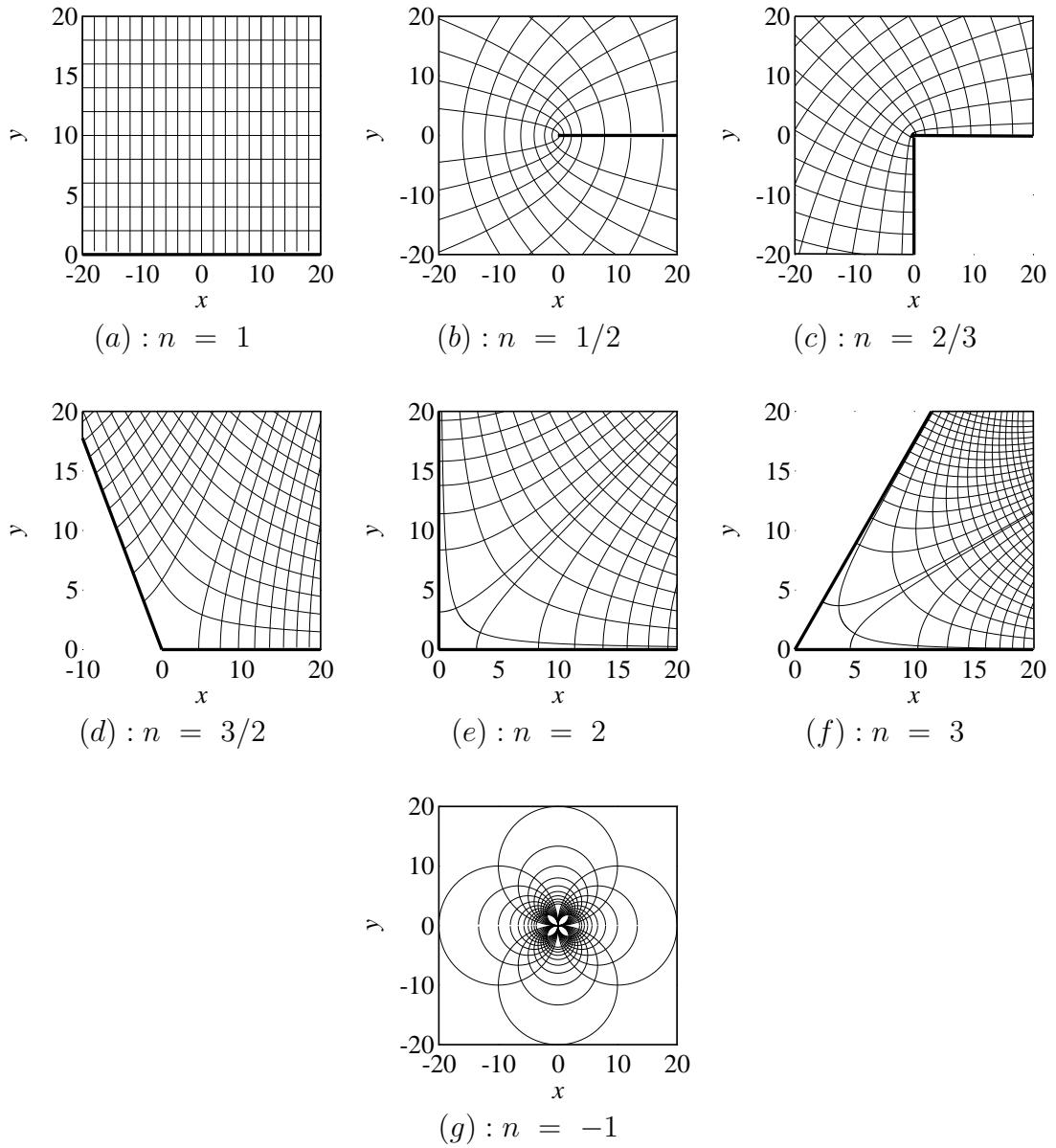


Figura 6.7: Linhas de corrente e equipotenciais do campo de velocidades bi-dimensional, com o potencial complexo dado por  $F = Az^n$ . Caso (a): Escoamento uniforme paralelo a uma placa plana infinita; Caso (b): Escoamento que contorna uma placa semi-infinita com origem em  $x = 0$ ; Caso (c): Escoamento externo contornando um diedro formado por dois planos que se interceptam com um ângulo de  $90^\circ$ ; Caso (d): Escoamento interno paralelo a um diedro cujas placas formam um ângulo de  $120^\circ$ ; Caso (e): Semelhante ao anterior, com as placas formando um ângulo de  $90^\circ$  entre si. Pode-se interpretar esse caso como o de um jato incidente a  $90^\circ$  sobre uma placa plana. A figura mostra a metade do jato; Caso (f): Escoamento interno paralelo a um diedro cujas placas formam um ângulo de  $60^\circ$ . Nos casos (b) e (c) ( $n < 1$ ) as componentes de velocidade,  $v_r = nAr^{n-1} \cos n\theta$  e  $v_\theta = -nAr^{n-1} \sin n\theta$ , divergem na origem. Nos casos (d), (e) e (f) a velocidade se anula em  $x = y = 0$ ; Caso (g): Escoamento de uma fonte para um sumidouro justapostos na origem. As linhas de corrente têm origem e fim na origem. A velocidade torna-se infinita nesse ponto. As linhas de corrente são as circunferências com centro no eixo vertical  $x = 0$  e as equipontenciais, as circunferências com centro no eixo horizontal  $y = 0$ .

### 6.5.3 O princípio de superposição

A Sec. 6.5.2 tratou do estudo de algumas soluções elementares da Eq. 6.13. Em prosseguimento, estudamos os campos de velocidades que resultam da combinação linear de soluções elementares. Sendo a Equação de Laplace linear, a soma de duas soluções é também solução da mesma. Esse é o princípio de superposição. O princípio permite a construção de soluções mais complexas, a partir de potenciais e funções corrente elementares como as acima obtidas. Discutimos alguns campos de velocidades de importância, descritos pela superposição de campos potenciais elementares.

#### Superposição de campo uniforme e uma fonte

Consideremos o campo resultante da superposição de um escoamento uniforme com o de uma fonte. A equação das linhas de corrente é dada por:

$$\psi = U_\infty r \sin \theta + \frac{\Lambda}{2\pi} \theta,$$

onde  $V_\infty$  é a velocidade do campo incidente sobre a fonte, longe da mesma e  $\Lambda$ , a vazão da fonte. As componentes da velocidade são dadas por:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\infty \cos \theta + \frac{\Lambda}{2\pi r} \\ v_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty \sin \theta. \end{aligned}$$

O campo resultante é mostrado na Fig. 6.8. Este campo tem um único ponto de estagnação em  $(\Lambda/2\pi U_\infty, \pi)$ . Para esse ponto convergem uma linhas de corrente originária do campo uniforme e uma que emerge da fonte. Substituindo-se as coordenadas do ponto de estagnação na equação das linhas de corrente verificamos que o valor da função corrente que contém o ponto de estagnação é  $\psi = \Lambda/2$ .

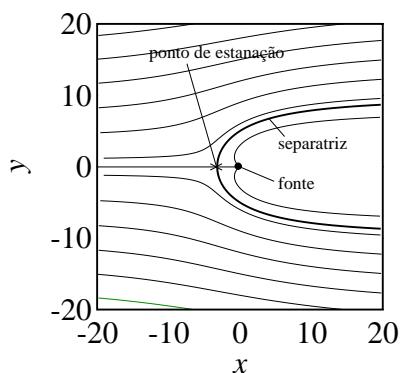


Figura 6.8: Escoamento potencial uniforme incidente sobre uma fonte.

Como as linhas de corrente são paralelas à velocidade as partículas do fluido não as cruzam. As linhas de corrente podem ser consideradas como paredes de um sólido. Em particular, a linha de corrente que contém o ponto de estagnação é uma *separatriz*: essa linha separa as regiões que contêm o fluido incidente da que contém o que emerge da fonte. Nenhuma partícula do escoamento incidente cruza a linha  $\psi = \Lambda/2$  e nenhuma partícula que emerge da fonte escapa para a região externa à separatriz. A região interna pode ser substituída por um corpo rígido que, nesse caso, se estende até o infinito. Estuda-se nesse caso o escoamento sobre um corpo rígido.

## Campo uniforme e par fonte-sumidouro não justapostos

O primeiro campo de interesse se constitui da superposição de um par fonte-sumidouro, localizados no eixo  $x$  e separados por uma distância  $d$ . Seja o caso em que a fonte e o sumidouro têm a mesma intensidade  $\Lambda$  em valor absoluto, sendo a da fonte positiva e a do sumidouro, negativa. O potencial complexo da fonte, localizada no ponto  $z_f$  e o do sumidouro, localizado no ponto  $z_s$ , são dadas por:

$$\begin{aligned} F_f &= \frac{\Lambda}{2\pi} \ln(z - z_f) \\ F_s &= -\frac{\Lambda}{2\pi} \ln(z - z_s). \end{aligned}$$

Compondo o par fonte-sumidouro e acrescentando o potencial correspondente ao de um campo de velocidades uniforme temos:

$$F = U_\infty z + \frac{\Lambda}{2\pi} \ln \frac{z - z_f}{z - z_s}.$$

Separando as partes real e imaginária obtém-se o potencial e a função corrente:

$$\phi = U_\infty x + \frac{\Lambda}{2\pi} \ln \left| \frac{z - z_f}{z - z_s} \right| = U_\infty x + \frac{\Lambda}{2\pi} \ln \frac{r_f}{r_s} \quad (6.25)$$

$$\psi = U_\infty y + \frac{\Lambda}{2\pi} \arg \frac{z - z_f}{z - z_s} = U_\infty y + \frac{\Lambda}{2\pi} (\theta_f - \theta_s), \quad (6.26)$$

onde  $r_f$  é o comprimento do vetor que liga os pontos  $z_f$  e  $z$  e  $\theta_f$ , o ângulo que esse vetor forma com o eixo  $x$ .  $r_s$  e  $\theta_s$  são as variáveis correspondentes do sumidouro (Ver Fig. 6.9 a).

No caso de um par fonte-sumidouro alinhado com o escoamento incidente (ver Fig. 6.9 (b)) o campo tem dois pontos de estagnação localizados ao longo do eixo  $x$  (ver problema 7).

## Escoamento uniforme incidente sobre um cilindro

Outro exemplo de importância diz respeito ao campo resultante da superposição do campo referente a um par fonte-sumidouro justaposto ( $n = -1$ ) com a de um escoamento uniforme ( $n = 1$ ). O potencial de velocidades e a função corrente se escrevem:

$$\phi = U_\infty r \cos \theta + \frac{\Lambda}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} \quad (6.27)$$

$$\psi = U_\infty r \sin \theta - \frac{\Lambda}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}. \quad (6.28)$$

As componentes da velocidade são dadas por:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\infty \cos \theta - \frac{\Lambda}{2\pi r^2} \cos \theta$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty \sin \theta - \frac{\Lambda}{2\pi r^2} \sin \theta.$$

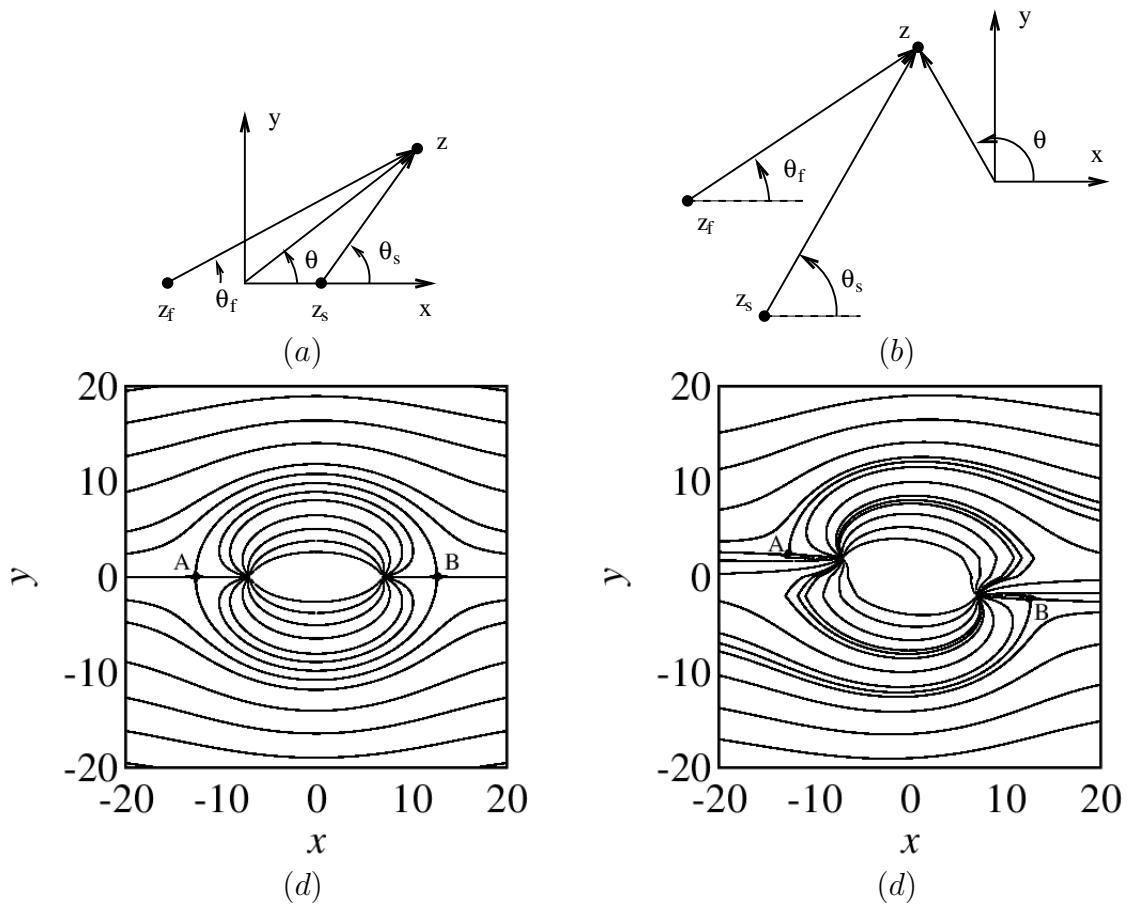


Figura 6.9: (a): Par fonte-sumidouro alinhado ao escoamento incidente. (b): Par fonte sumidouro arbitrariamente localizado em relação ao escoamento incidente.  $z_f$  e  $\theta_f$  são as coordenadas da fonte e o ângulo do vetor que liga a fonte a um ponto qualquer do campo.  $z_s$  e  $\theta_s$  são os equivalentes do sumidouro. (c): Linhas de corrente do campo formado por par fonte-sumidouro alinhado ao escoamento. O campo divide-se em duas regiões, delimitadas por um oval (Oval de Rankine), de tal modo que o escoamento incidente não penetra na região interna ao oval e o escoamento gerado pelo par fonte-sumidouro fica confinado ao interior do oval. O campo tem dois pontos de estagnação,  $A$  e  $B$ , localizados sobre o oval. (d): Linhas de corrente do campo formado por par fonte-sumidouro desalinhado em relação ao escoamento incidente. Como no caso precedente, o campo apresenta dois pontos de estagnação,  $A$  e  $B$ , mas não forma superfície fechada separando os escoamentos incidente e gerado pelo par fonte-sumidouro.

Esse campo admite dois pontos de estagnação, em:

$$r^2 = R^2 = \frac{\Lambda}{2\pi U_\infty} \quad \text{e:} \quad \theta = 0 \quad \text{ou:} \quad \theta = \pi.$$

Utilizando-se a definição de  $R^2$  acima, pode-se escrever o potencial, a função corrente e as componentes da velocidade como:

$$\begin{aligned} \phi &= U_\infty r \cos \theta \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) & \psi &= U_\infty r \sin \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \\ v_r &= U_\infty \cos \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) & v_\theta &= -U_\infty \sin \theta \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right). \end{aligned}$$

A linha de corrente que contém os dois pontos de estagnação tem o valor  $\psi = 0$ . Os pontos que satisfazem a essa condição situam-se no eixo  $y = 0$  ( $\theta = 0$ , ou  $\theta = \pi$ ), ou ainda quando  $r = R$  para qualquer valor de  $\theta$ , isso é, sobre uma circunferência de raio  $R$ . Como o fluido não cruza linha de corrente o escoamento incidente não penetra na região  $r < R$  e a vê como um corpo cilíndrico imerso no mesmo. Por seu lado, o fluido que emerge e retorna ao ponto  $r = 0$  não ultrapassa a região  $r > R$ .

A superposição de um vórtice de intensidade  $\Gamma$  ao campo formado por um escoamento uniforme que incide sobre um par fonte-sumidouro justapostos resulta em um campo cuja função corrente e cujas componentes da velocidade tomam a forma:

$$\begin{aligned} \psi &= U_\infty r \sin \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \\ &\quad \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R} \end{aligned} \tag{6.29}$$

$$v_r = U_\infty \cos \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \tag{6.30}$$

$$v_\theta = -U_\infty \sin \theta \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r}. \tag{6.31}$$

Da Eq. 6.30 identifica-se a existência de pontos de estagnação na circunferência  $r = R$ . Substituindo-se esse valor na Eq. 6.31

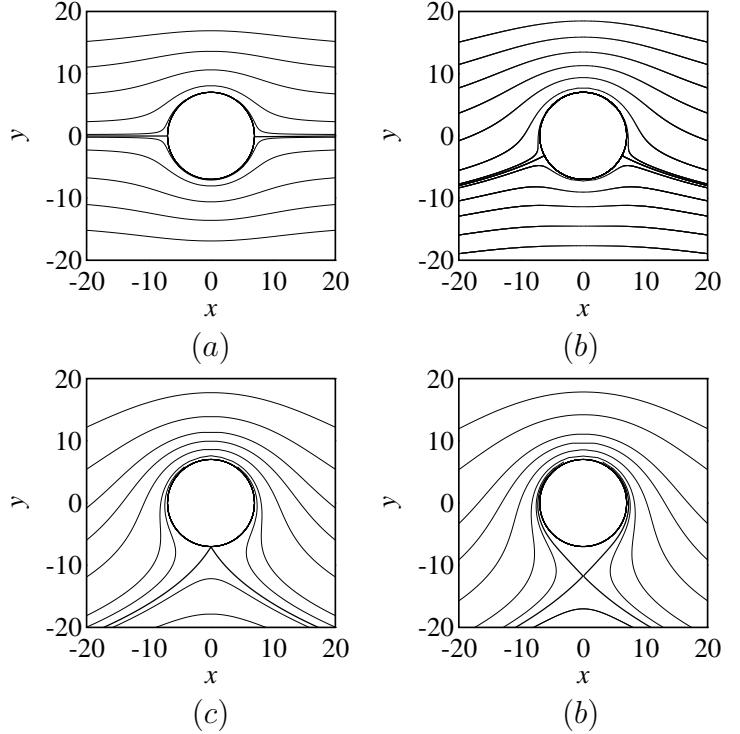


Figura 6.10: Linhas de corrente do campo hidrodinâmico de um escoamento uniforme incidente sobre um cilindro com circulação especificada. (a): Circulação  $\Gamma = 0$ ; O campo tem dois pontos de estagnação diametralmente opostos e alinhados com o campo incidente; (b):  $\Gamma < 4\pi U_\infty R$ : o campo tem dois pontos de estagnação situados sobre o cilindro, mas não mais diametralmente opostos; (c):  $\Gamma = 4\pi U_\infty R$ : o campo tem apenas um ponto de estagnação situado sobre o cilindro; (d):  $\Gamma > 4\pi U_\infty R$ : o campo tem apenas um ponto de estagnação localizado fora do cilindro.

obtém-se:

$$\theta = \arcsen \left( -\frac{\Gamma}{4\pi U_\infty R} \right).$$

Se  $\Gamma > 4\pi U_\infty R$  não há mais pontos de estagnação sobre a circunferência de raio  $R$ . Não obstante, os possíveis pontos de estagnação situam-se em  $\theta = \pm\pi/2$ . Não há solução para  $v_\theta = 0$  se  $\theta = \pi/2$ . Se  $\theta = -\pi/2$  os valores de  $r$  para os quais  $v_\theta = 0$  são dados por:

$$r = \frac{\Gamma}{4\pi U_\infty} \pm \left[ \left( \frac{\Gamma}{4\pi U_\infty} \right)^2 - R^2 \right]^{1/2}.$$

Um dos pontos de estagnação encontra-se dentro do cilindro de raio  $R$  e o outro, fora, abaixo do cilindro. Ambos situam-se sobre o eixo das ordenadas. As linhas de corrente do campo externo são mostradas na Fig. 6.10.

Cabe observar que a circulação  $\Gamma$  em torno de um cilindro é um parâmetro do campo, cujo valor pode ser especificado arbitrariamente.

### Sustentação e arraste de um cilindro

Como  $\Gamma > 0$  os pontos de estagnação encontram-se no terceiro e quarto quadrante. Se  $\Gamma < 4\pi U_\infty R$  o campo tem dois pontos de estagnação, sendo um no terceiro quadrante e outro no quarto. Se  $\Gamma = 4\pi U_\infty R$  o campo tem apenas um ponto de estagnação em  $\theta = -\pi/2$ . Nos dois casos o fluido incidente sobre a singularidade formada pelo par fonte-sumidouro e vórtice superpostos não penetra na região  $r < R$ .

O campo aerodinâmico potencial e incompressível que se forma em torno de um cilindro é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, mas não ao das abcissas. Essa propriedade decorre da simetria do perfil de velocidades em relação ao eixo vertical, dado pela Eq. 6.31 e mostrado na Fig. 6.10. Levando em conta que a Eq. de Bernoulli (Eq. 3.55), conclui-se que o campo de pressões apresenta a mesma simetria. Em consequência, a distribuição de pressões pode gerar uma força de sustentação, perpendicular ao escoamento incidente, mas não uma força de arraste, paralela a esse último. As tensões de cisalhamento são nulas, pois as componentes do termo  $\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{grad} \mathbf{v}$  se anulam, como mostrado a seguir:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

Conclui-se que o arraste gerado pelo campo potencial incompressível em torno de um cilindro, com ou sem circulação, é nulo (Paradoxo de D'Alembert [1]).

O campo aerodinâmico não exercendo tensões de cisalhamento, a força resultante que atua sobre o cilindro é necessariamente simétrica em relação ao eixo das ordenadas, isso é, necessariamente vertical e devida exclusivamente à pressão. Determinemos essa força.

A velocidade sobre a superfície do cilindro ( $R = r$ ) contém apenas a componente  $v_\theta$ , obtida da Eq. 6.31:

$$v_\theta = -2U_\infty \sen \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (6.32)$$

A distribuição de pressões sobre o cilindro é obtida da Eq. de Bernoulli (Eq. 3.55):

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p + \frac{1}{2}\rho v_\theta^2,$$

onde obtém-se:

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho v_\theta^2. \quad (6.33)$$

A força de sustentação aerodinâmica por unidade de comprimento do cilindro,  $L$ , (“*Lift*”) é dada por:

$$L = -2 \int_0^\pi p R n_y d\theta = -2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p R \sin \theta d\theta,$$

onde  $n_y = \sin \theta$  é a componente vertical do vetor unitário  $\mathbf{n}$ , normal à superfície do cilindro. Como a integral dos dois primeiros termos da Eq. 6.33 se anula, obtém-se para a força de sustentação:

$$\begin{aligned} L &= -\rho R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} v_\theta^2 \sin \theta d\theta \\ &\quad -\rho R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ 4U_\infty^2 \sin^3 \theta - \frac{2U_\infty \Gamma \sin^2 \theta}{\pi R} + \left( \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \sin \theta \right] d\theta. \end{aligned}$$

Notando que:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta d\theta = 0 \quad \text{e que:} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2},$$

obtém-se o resultado simples, que mostra que a força de sustentação por unidade de comprimento do cilindro é proporcional à circulação:

$$L = \rho U_\infty \Gamma. \quad (6.34)$$

## 6.6 O Teorema de Kutta-Joukowski

O resultado acima obtido, estabelecendo a proporcionalidade da sustentação aerodinâmica que age sobre um cilindro com a circulação em torno do corpo é, em verdade, caso particular do teorema de Kutta-Joukowski. O teorema estende o resultado para corpos quaisquer, imersos em um campo totalmente potencial, ou para corpos esbeltos alinhados ao campo incidente, mesmo sob ação de efeitos viscosos, conforme mostrado na Fig. 6.11 [1, 38]. A hipótese de corpo esbelto, alinhado ao escoamento está presente na consideração de que, exceto em uma fina camada junto ao corpo – a camada limite, o campo é irrotacional. E que a pressão atuando sobre o corpo é determinada pelo campo potencial. Portanto, o teorema de Kutta-Joukowski aplica-se não apenas a campos potenciais, mas também a casos em que os efeitos viscosos estão presentes, mas confinados.

Consideremos um volume de controle conforme mostrado na Fig. 6.11 (b). O volume de controle consiste essencialmente de um retângulo envolvendo o corpo, com duas superfícies planas, perpendiculares ao escoamento incidente, uma localizada à frente do corpo, a uma distância onde o desvio do campo em relação ao incidente é pequeno. A outra superfície perpendicular ao campo incidente localiza-se a jusante do corpo. O trecho vertical a jusante é interrompido por uma curva que se origina de um ponto logo acima da linha de estagnação, contorna junta-se à superfície vertical localizada em  $x = x_2$  logo abaixo da linha de estagnação. Na presença de efeitos viscosos forma-se uma camada limite entre o corpo e o volume de controle, onde o escoamento é intrinsecamente rotacional. Na ausência de efeitos viscosos os ponto  $A$  e  $B$ , mostrados na Fig. 6.11 coincidem.

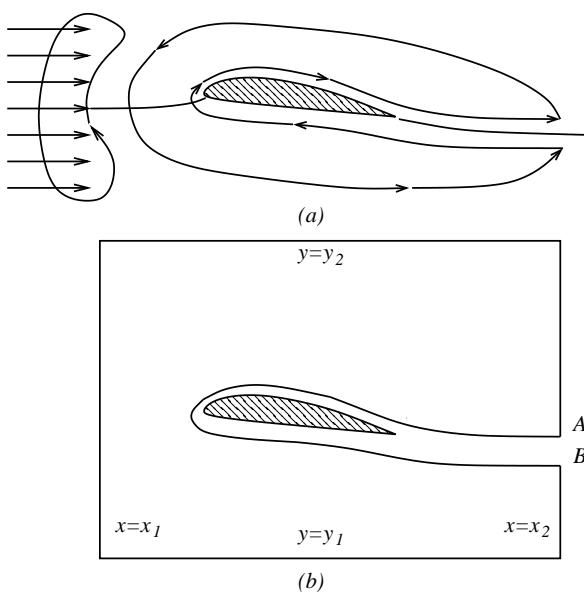


Figura 6.11: (a) : Evolução de uma massa de fluido o encontrar o corpo; (b) : Volume de controle usado na determinação da força de sustentação atuando sobre o corpo.

brio. Essa força é obtida simplificando-se a forma integral da equação de conservação da quantidade de movimento (Eq. 3.6):

$$F_y = L = - \oint_V \rho v_y \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA.$$

O fluxo da componente na direção  $y$  de quantidade de movimento através da superfície vertical  $x = x_1$  (por unidade de comprimento na direção  $z$ ) é dado por:

$$-\rho U_\infty \int_{y_1}^{y_2} v_y dy.$$

Como ao longo da superfície  $x = x_1$  o campo é potencial  $v_y = \partial\phi/\partial y$ . A integral acima

As outras duas superfícies são alinhadas ao campo e situam-se acima e abaixo do corpo, longe do mesmo. O corpo é excluído do volume de controle.

O campo de velocidade é decomposto na forma  $\mathbf{V} = \mathbf{U}_\infty + \mathbf{v}$ . As superfícies horizontais e verticais do volume de controle estão suficientemente afastadas do corpo para que se tenha  $\mathbf{U}_\infty + \mathbf{v} \approx \mathbf{U}_\infty$ .

As condições de contorno para o potencial são:

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{U_\infty} &= x && (\text{longe do corpo}) \\ \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{n} &= 0 && (\text{sobre a superfície}), \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário, normal à superfície do corpo.

A força atuando sobre o corpo é igual ao negativo da força que deve ser aplicada ao volume de controle para mantê-lo em equilíbrio.

toma a forma:

$$\begin{aligned} -\rho U_\infty \int_{y_1}^{y_2} v_y dy &= -\rho U_\infty \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = -\rho U_\infty [\phi(y=y_2) - \phi(y=y_1)] = \\ -\rho U_\infty (U_\infty x_1 - U_\infty x_1) &= 0. \end{aligned}$$

O fluxo da componente na direção  $y$  de quantidade de movimento através da superfície superior  $y = y_2$  é dado por:

$$\rho \int_{x_1}^{x_2} v_y^2 dx.$$

Por conter o termo  $v_y^2$  esse fluxo é muito menor do que o que cruza as superfícies verticais e pode ser desprezado. De forma análoga, o fluxo da componente na direção  $y$  da quantidade de movimento através da superfície inferior  $y = y_1$  é desprezível.

O fluxo de quantidade de movimento através da curva que se origina no ponto  $A$  da Fig 6.11 (b), contorna o corpo e retorna à superfície vertical  $x = x_2$  em  $B$  é nulo, pois a curva é sempre paralela à linha de corrente imediatamente vizinha. O fluxo da componente na direção  $y$  da quantidade de movimento através do volume de controle restringe-se ao fluxo ao longo da superfície vertical  $x = x_2$ . Obtém-se:

$$\begin{aligned} \rho U_\infty \int_{y_1}^B v_y dy + \rho U_\infty \int_A^{y_2} v_y dy &= \rho U_\infty \int_{y_1}^B \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \rho U_\infty \int_A^{y_2} \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = \\ \rho U_\infty (\phi_B - U_\infty x_2) + \rho U_\infty (U_\infty x_2 - \phi_A) &= \rho U_\infty (\phi_B - \phi_A). \end{aligned}$$

Mas:

$$\phi_B - \phi_A = \int_A^B \mathbf{grad} \phi \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = -\Gamma,$$

onde obtém-se o resultado prescrito pelo teorema de Kutta-Joukowski:

$$L = - \oint_V \rho v_y \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \rho U_\infty \Gamma. \quad (6.35)$$

Na ausência de efeitos viscosos o domínio do campo potencial estende-se até a superfície do corpo. Os pontos  $A$  e  $B$  (Fig. 6.11) coincidem e há portanto uma descontinuidade do potencial ao longo da linha de corrente que parte do bordo de fuga do perfil. Essa descontinuidade implica em que o arco formado pela linha de estagnação entre os pontos de intersecção com duas linhas de potencial especificado tem um comprimento quando se considera as equipotenciais do extradorso e outro, quando se considera as do intradorso. Consequentemente a derivada  $\partial \phi / \partial s$ , onde  $s$  é a coordenada ao longo da linha de estagnação, tem valores diferentes acima e abaixo dessa linha.

## 6.7 Transformações Conformes

O campo hidrodinâmico que se forma sobre alguns sólidos pode ser obtido a partir dos campos obtidos nas seções anteriores, através de transformações conformes de coordenadas

(ver Apêndice B) que associam pontos do plano  $z = x + iy$  a pontos do plano  $w = u + iv$ . Transformações conformes são, por definição, tais que, se o ângulo entre as tangentes a duas curvas  $C_1$  e  $C_2$  que passam pelo ponto  $z_0$  for  $\gamma$ , o ângulo entre as tangentes às curvas  $C'_1$  e  $C'_2$  que são as imagens de  $C_1$  e  $C_2$  no plano  $w$ , obtidas através da transformação conforme através da transformação no plano  $w$  formam entre si o mesmo ângulo  $\gamma$ .

As linhas de corrente e as equipotenciais se deformam sob ação de uma transformação conforme, mas as curvas resultantes permanecem perpendiculares entre si no plano  $w$

Seja  $w = \xi + i\eta$  e  $H = H(w) = H(\xi + i\eta) = c$ , uma curva de nível no plano  $w$ . Sendo os pontos  $w$  imagens de pontos no plano  $z$  sob ação de uma transformação conforme, têm-se que:

$$H = H(\xi(x, y) + i\eta(x, y)) = G(x, y) = c.$$

Os pontos  $w$  do contorno do domínio transformado são imagem de pontos  $z$  do contorno do domínio original. Têm-se que  $H(w) = G(z) = c$  é uma condição de contorno do tipo Dirichlet do problema. Condições de contorno do tipo Dirichlet preservam-se sob ação de transformações conformes.

Da mesma forma, condições de fluxo nulo no contorno, aplicáveis a curvas de nível preservam-se sob ação de transformações conformes. De fato:

$$\frac{dH}{dw} = \frac{dG}{dz} f'(z).$$

Sendo  $dG/dz = 0$  têm-se igualmente que  $dH/dw = 0$ ;

## 6.8 A Transformação de Kutta-Joukowski

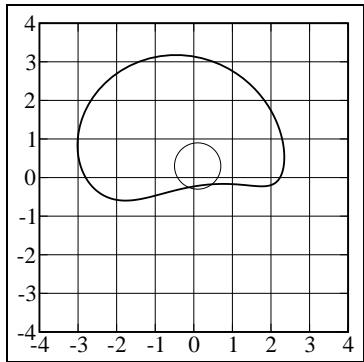
De particular interesse é a transformação de Kutta-Joukowski, dada por:

$$w = f(z) = z + \frac{1}{z}. \quad (6.36)$$

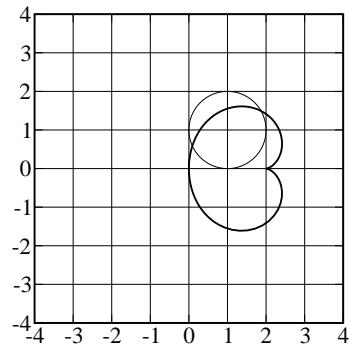
Algumas geometrias obtidas como imagens de circunferências pela aplicação da transformação de Kutta-Joukowski são mostradas na Fig. 6.12 [50]. A tangente a uma curva  $C'$  no plano  $w$ , cujos pontos são imagem dos pontos de um plano  $z$  sob ação da transformação de Kutta-Joukowski são tais que [50]:

$$\dot{w} = \dot{z} f'(z) = \dot{z} \left(1 - \frac{1}{z^2}\right).$$

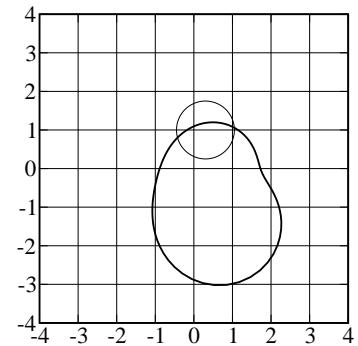
O ângulo entre as tangentes a duas curvas que passam pelo mesmo ponto  $z_0$  preservam-se exceto na singularidade  $z = 0$  e nos pontos em que  $f'(z) = 0$ . Em tais pontos o ângulo com o qual as curvas são giradas,  $\arg(z)$  é indefinido. Trata-se nesse caso de *pontos críticos* da transformação. Os perfis obtidos como imagem sob a transformação de Kutta-Joukowski, de circunferências que passam pelo ponto  $z_c = 1, 0 + 0, 0i$  são mostrados na Fig. 6.12 (f), (g), (h) (i).  $z_c$  é um ponto crítico, pois  $f'(z_c) = 0$ . A tangente às curvas é descontínua na



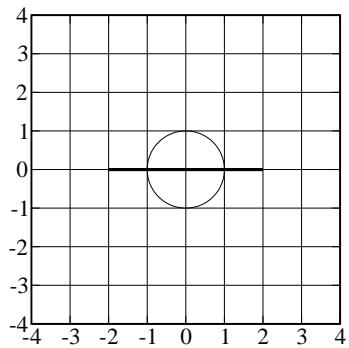
$$(a) \begin{cases} R &= 0,60 \\ z_0 &= 0,10 + 0,30i \end{cases}$$



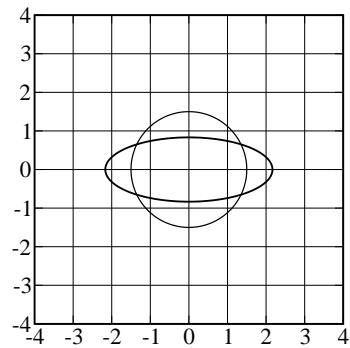
$$(b) \begin{cases} R &= 1,00 \\ z_0 &= 1,00 + 1,00i \end{cases}$$



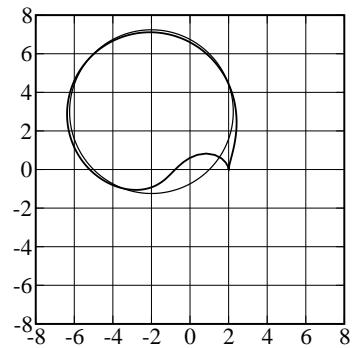
$$(c) \begin{cases} R &= 0,75 \\ z_0 &= 0,30 + 1,00i \end{cases}$$



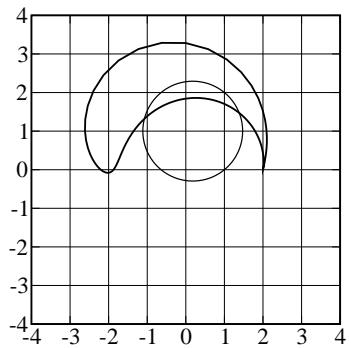
$$(d) \begin{cases} R &= 1,00 \\ z_0 &= 0,00 + 0,00i \end{cases}$$



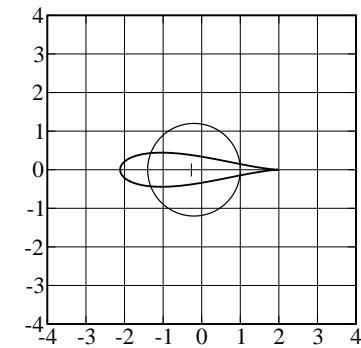
$$(e) \begin{cases} R &= 1,50 \\ z_0 &= 0,00 + 0,00i \end{cases}$$



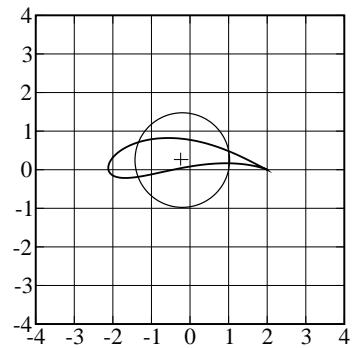
$$(f) \begin{cases} R &= \sqrt{3,0^2 + 3,0^2} \\ z_0 &= -2,0 + 3,0i \end{cases}$$



$$(g) \begin{cases} R &= \sqrt{0,82^2 + 1,0^2} \\ z_0 &= 0,18 + 1,00i \end{cases}$$



$$(h) \begin{cases} R &= 1,20 \\ z_0 &= -0,20 + 0,00i \end{cases}$$



$$(i) \begin{cases} R &= \sqrt{1,25^2 + 0,25^2} \\ z_0 &= -0,20 + 0,25i \end{cases}$$

Figura 6.12: Imagens de circunferências, obtidas pela aplicação da transformação de Kutta-Joukowski e as circunferências de origem.  $R$  e  $z_0$  são, respectivamente, o raio e a posição do centro da circunferência no plano complexo  $z$ .

imagem desse ponto. Calculemos o ângulo como qual a tangente ao arco de circunferência na vizinhança de  $z_c$  é girada sob ação da transformação de Kutta-Joukowski:

$$f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}.$$

Na vizinhança de  $z = 1$  têm-se que  $z \rightarrow e^{i\theta}$ , com  $\theta \rightarrow 0$ .

$$\lim_{z \rightarrow 1} f'(z) = \lim_{\theta \rightarrow 0} 1 - e^{-2i\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} 1 - \cos 2\theta + i \sin 2\theta.$$

O ângulo com o qual à tangente à circunferência é girado é dado por:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \arg(f'(z)) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \tan^{-1} \frac{\sin 2\theta}{1 - \cos 2\theta}.$$

Aplicando-se a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \arg(f'(z)) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \tan^{-1} \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & (\theta > 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (\theta < 0) \end{cases}$$

O limite acima tende a  $+\pi/2$  em pontos imediatamente acima de  $z = 1$  e a  $-\pi/2$  em pontos imediatamente abaixo. A tangente à imagem do arco de circunferência imediatamente acima de  $z = 1$  tem a mesma direção da tangente à imagem do arco imediatamente abaixo desse ponto, porém os sentidos das duas tangentes são opostos. Têm-se um ponto transformado com características de um diedro com os dois planos que o compõem formando um ângulo de  $360^\circ$ . A velocidade do campo potencial que contorne o diedro diverge no vértice, como discutido na Sec. 6.5.2.

A transformação de Kutta-Joukowski só altera o campo em uma vizinhança da origem pois o termo  $1/z \rightarrow 0$  em pontos afastados dessa região. Em consequência, os campos hidrodinâmicos que se desenvolvem na em torno de cilindros e os que se desenvolvem em torno de imagens de cilindros são idênticos longe do corpo. Em particular, a circulação sobre uma curva que envolve o cilindro, mas construída sobre pontos afastados da influência do corpo é a mesma nos dois casos e igual ao negativo da circulação em torno do cilindro. Dito de outra forma, a circulação sobre um corpo obtido pela transformação de Kutta-Joukowski é a mesma que se tem sobre o cilindro de origem, quando o escoamento incidente é o mesmo nos dois casos.

A sustentação que atua sobre um corpo que é imagem de um cilindro é igual à que atua sobre o cilindro. E sendo o arraste sobre o cilindro nulo, também é nulo o arraste sobre corpos bidimensionais que são imagem do cilindro.

### 6.8.1 Escoamento Uniforme Sobre uma Elipse

O campo hidrodinâmico desenvolvido por um escoamento uniforme que incide sobre uma elipse é obtido pela transformação de Kutta-Joukowski, aplicada ao escoamento sobre um cilindro com a origem centrada na origem e raio  $R \neq 1$ . Se  $R > 1$  o eixo maior da elipse é o alinhado ao eixo  $x$ . Se for menor, o eixo maior é o alinhado ao eixo  $y$ . O campo em torno

de uma elipse desalinhada em relação ao escoamento incidente pode ser obtido dotando o campo incidente de um ângulo  $\gamma$  em relação ao eixo das abscissas  $x$ . Isso é feito com a transformação  $z \rightarrow ze^{i\gamma}$ , onde  $\gamma$  é o ângulo que o escoamento incidente forma com o eixo das abscissas.

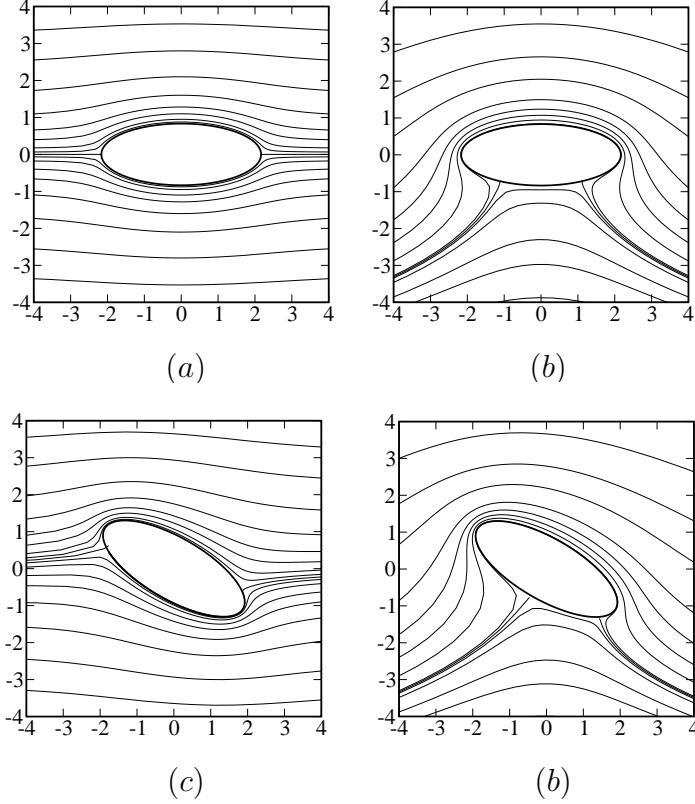


Figura 6.13: Linhas de corrente do campo hidrodinâmico de um escoamento uniforme incidente sobre uma elipse. (a): Elipse alinhada ao escoamento incidente, sem circulação; (b): Elipse alinhada, com circulação diferente de zero e dois pontos de estagnação sobre a superfície do sólido; (c): Elipse com ângulo de ataque em relação ao escoamento incidente, sem circulação; (d): Elipse com ângulo de ataque, circulação diferente de zero e dois pontos de estagnação sobre o corpo.

O potencial complexo é obtido pela superposição do campo uniforme com um par fonte-sumidouro justaposto e com um vórtice potencial. Como o potencial de um par fonte-sumidouro superposto e o de um vórtice potencial são invariantes pela transformação  $z \rightarrow z + \gamma$  incluímos o fator  $e^{i\gamma}$  nos dois potenciais. Denominando  $\alpha = \cos \gamma$  e  $\beta = \sin \gamma$ , obtém-se:

$$F = U_\infty ze^{i\gamma} + \frac{\Lambda}{2\pi ze^{i\gamma}} + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln ze^{i\gamma}.$$

Desenvolvendo os termos e separando as partes real e imaginária:

$$\begin{aligned} \phi &= \left( U_\infty r + \frac{\Lambda}{2\pi r} \right) (\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta) - \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta + \gamma) \\ \psi &= \left( U_\infty r - \frac{\Lambda}{2\pi r} \right) (\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R}. \end{aligned}$$

Adotando a definição  $R^2 = \Lambda / (2\pi U_\infty)$  têm-se:

$$\phi = U_\infty r (\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta) \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta + \gamma) \quad (6.37)$$

$$\psi = U_\infty r (\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta) \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R}, \quad (6.38)$$

onde  $\alpha = \cos \gamma$  e  $\beta = \sin \gamma$ . As linhas de corrente do campo que se forma em torno de uma elipse alinhada ou não ao escoamento incidente e com ou sem circulação são mostradas na Fig. 6.13. O campo obtido é girado de um ângulo  $= -\gamma$  de volta a realinhar o escoamento incidente com o eixo das abscissas.

## 6.9 A Hipótese de Kutta

Embora a circulação sobre o cilindro, ou sobre uma elipse possa ser especificada sem restrições, geometrias que contém um vértice, com a inclinação da tangente à superfície do perfil descontínua, introduzem um mecanismo de seleção da circulação que se desenvolve em torno dos mesmos. O escoamento na vizinhança da descontinuidade assemelha-se ao que se desenvolve próximo a diedros externos, como mostrado na Fig. 6.14. Ao contornar o diedro, a velocidade diverge naquele ponto. Os elevados gradientes de velocidade que ali surgem resultam em efeitos viscosos que não podem mais ser desprezados, como o são quando se admite que o campo é inteiramente potencial, e forçam à busca de outra solução do campo. Nenhuma das configurações mostradas na Fig. 6.14 é encontrada na natureza.

A solução que contorna o problema da divergência surge pela seleção de um valor da circulação que leve os pontos de estagnação perfil exatamente para o vértice. Nesse caso as linhas de corrente originárias tanto do intradorso quanto do extradorso do corpo encontram um diedro com ângulo inferior a  $180^\circ$ . A velocidade não mais diverge nesse ponto e estabelece-se uma circulação que resulta no desenvolvimento de uma força de sustentação atuando sobre o perfil.

A *hipótese de Kutta* estabelece que a circulação que se desenvolve sobre um perfil sobre o qual incide um escoamento com ângulo de ataque especificado, e cujo bordo de fuga tem a forma de um diedro externo, é tal que o ponto de estagnação que surge na parte de jusante do perfil localiza-se no vértice, impedindo a velocidade de divergir naquele ponto.

## 6.10 Perfis de Kutta-Joukowski

De particular importância para a problemas de hidro e de aerodinâmica é a transformação de Kutta-Joukowski, que associa pontos de uma circunferência de raio  $R$ , centrada no ponto  $z_0 = x_0 + iy_0$  a pontos do plano  $w$ , através da relação:

$$w = z + \frac{1}{z}.$$

Examinemos o efeito da transformação sobre uma circunferência centrada no ponto  $z = x_0 + 0i$ , com  $x_0 < 0$  e raio  $1 - x_0$ . Essa circunferência intercepta o eixo real positivo no ponto  $z = 1 + 0i$ . O ponto transforma-se em  $w = 2 + 0i$ , afastando-se portanto da origem. Da mesma forma, o ponto de cruzamento da circunferência com o eixo real negativo transforma-se no ponto  $w = -1 + 2x_0 + 1/(-1 + 2x_0)$ . O novo ponto é real, negativo, afasta-se da origem, porém menos do que o ponto de cruzamento da circunferência com o eixo real positivo. Pode-se verificar que os pontos de cruzamento da circunferência com o eixo imaginário aproximam-se da origem. Em resultado, os pontos da circunferência transformam-se no perfil simétrico, mostrado na Fig. 6.15 (a). Se a circunferência estiver centrada em ponto acima do eixo e cruzar o eixo real no ponto  $z = 1 + 0i$  o perfil resultante é assimétrico, como mostrado na Fig. 6.15 (b).

Perfis aerodinâmicos esbeltos, com o bordo de fuga consistindo de um diedro externo cujos planos que o formam fazem um ângulo de  $360^\circ$  entre si, ou pouco menos e operando alinhados, ou quase alinhados ao escoamento incidente, reúnem portanto os requisitos para o desenvolvimento de elevados valores da força de sustentação, ao tempo em limitam o arraste a ser vencido:

1. A geometria esbelta e alinhada ao campo incidente mantém válida a hipótese de que os gradientes do campo na direção do escoamento são muito menores do que os da direção normal ao perfil. Nessas condições os resultados da teoria da camada limite aplicam-se, em particular o de que a camada limite é fina e não afeta significativamente o campo potencial externo. A distribuição de pressões sobre o perfil é a determinada pelo campo potencial;
2. O diedro externo do bordo de fuga impede o ponto de estagnação de jusante de movimentar-se como ocorre com o de montante e o localiza na extremidade do perfil. Fica excluída a possibilidade de ser a circulação nula quando o ângulo de ataque do

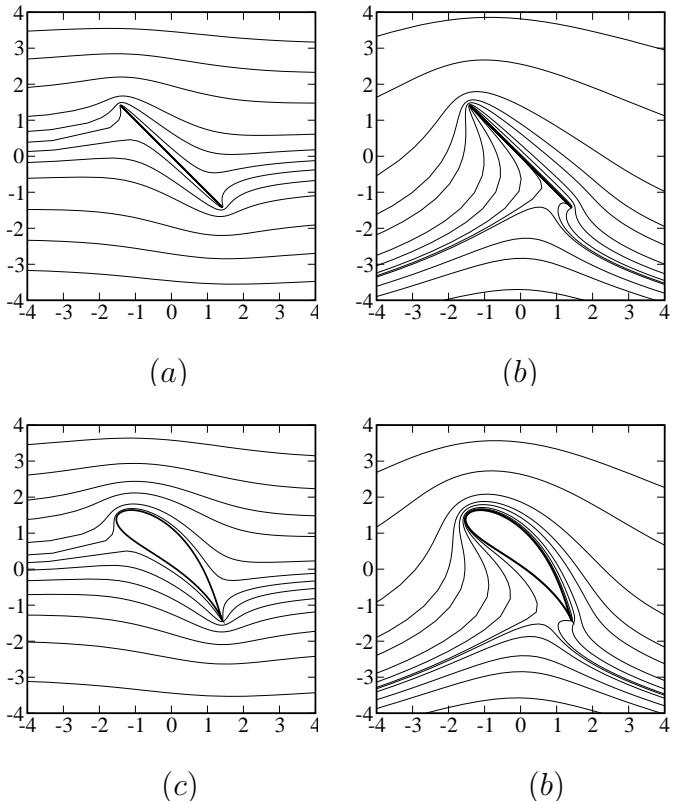


Figura 6.14: Nos quatro casos acima mostrado o escoamento contorna diedros com vértices externos (ver Sec. 6.5.2). Nesse ponto, a velocidade do campo potencial diverge. Os efeitos viscosos não podem mais ser desprezados em virtude dos elevados valores do gradiente de velocidade. Os efeitos viscosos obrigam o campo a selecionar um valor da circulação onde as linhas de corrente não tenham que contornar um diedro externo. No caso da placa plana com ângulo de ataque, não se consegue contornar o problema. Nenhuma das configurações acima apresentadas é encontrada na natureza.

perfil é diferente zero, no caso de perfis simétricos, ou quando o ângulo de ataque é nulo, com perfis assimétricos. A circulação fica determinada pela velocidade do campo incidente e pelo ângulo de ataque do perfil;

3. O bordo de ataque em forma de curva suave dá a flexibilidade necessária para que o ponto de estagnação desloque-se para a frente ou para trás, sem que o escoamento encontre o vértice característico de um diedro externo.

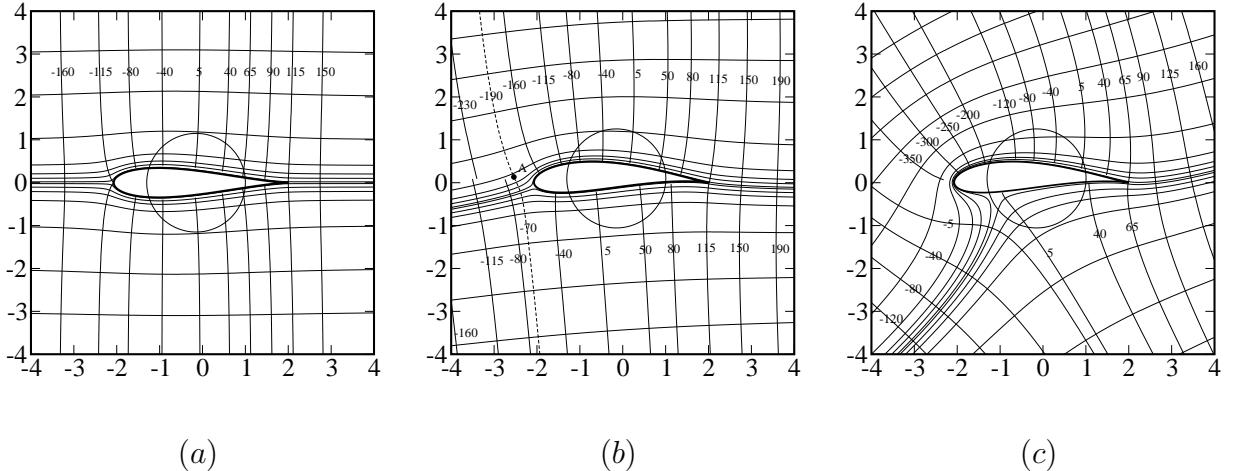


Figura 6.15: Linhas de corrente equipotenciais em torno de três perfis de Kutta-Joukowski. As figuras mostram ainda a circunferência que dá origem aos perfis. Nos três casos, a velocidade do campo incidente é  $U_\infty = 50$ . (a): perfil simétrico, alinhado ao campo incidente. A circulação em torno do mesmo é nula, o que resulta em linhas equipotenciais sempre contínuas. (b): perfil assimétrico, com a circunferência que origina perfil centrada no ponto  $z = -0,15 + 0,10i$  e circulação  $\Gamma = 113$ , resultando descontinuidades no valor do potencial. Não obstante, não há descontinuidade na direção das equipotenciais no ponto onde há um salto no valor da função (ver ponto A). O campo incidente forma um ângulo de  $4^\circ$  com o eixo do perfil. (c): Mesmo perfil mostrado em (b), com o campo incidente formando um ângulo de  $30^\circ$  com o eixo do perfil. A circulação é  $\Gamma = 400$ . Na prática, os efeitos viscosos, desprezados na formulação presente, induzem ao descolamento dos filetes de velocidade no extradorso para ângulos de ataque elevados, o que resulta em campos de velocidade qualitativamente diferentes do mostrado em (c).

A distribuição de pressões sobre o perfil é calculada com o auxílio da equação de Bernoulli. A queda de pressão em relação à pressão do meio é igual à variação da pressão dinâmica resultante da perturbação introduzida pelo corpo no escoamento incidente.

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad \rightarrow \quad p_\infty - p = \Delta p = \frac{1}{2}\rho (v^2 - U_\infty^2)$$

A Fig. 6.15 mostra as linhas de corrente e as equiponteciais em torno de perfis obtidos através de transformações de Kutta-Joukowski de campos que se desenvolvem em torno de cilindros com ou sem circulação. Quando a circulação é diferente observa-se uma descontinuidade no potencial (ver Sec. 6.6).

Para a determinação do campo de velocidades transformado observa-se que a velocidade complexa é dada por  $\dot{w} = d\psi/dw$ . Usando a regra da cadeia têm-se [6, 50]:

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{d\psi}{dw} \frac{dw}{dz},$$

Donde obtém-se:

$$\frac{d\psi}{dw} = \frac{d\psi/dz}{dw/dz}.$$

Em particular:

$$\left| \frac{d\psi}{dw} \right| = \frac{|d\psi/dz|}{|dw/dz|}. \quad (6.39)$$

A velocidade sobre a superfície do cilindro é dada por  $\mathbf{v} = v_\theta \mathbf{e}_\theta$ . O termo  $\rho v^2/2$  sobre o perfil transformado é calculado com o emprego da Eq. C.7 ou 6.39. A Fig. 6.16 mostra a distribuição da pressão dinâmica normalizada,  $v^2/U_\infty^2$ , sobre dois perfis de Kutta-Joukowski que formam um ângulo de  $4^\circ$  com o campo incidente não perturbado.

No primeiro caso, a geometria mais esbelta do perfil aproxima o bordo de ataque do vértice de um diedro externo o que conduz a velocidades excessivas nessa região. Velocidades excessivas antecipam a transição do escoamento para o regime turbulento, o que conduz a um aumento do arraste do perfil. No segundo caso, o bordo de ataque mais arredondado resulta em uma melhor distribuição de pressão dinâmica sobre o perfil.

## 6.11 Outras Transformações Conformes

A transformação de Kutta-Joukowski transforma circunferências passando pelo ponto  $1+0i$  em perfis cujo ângulo entre as superfícies superior e inferior no bordo de fuga é igual a zero (“cusp”). A transformação conforme de Kármán-Trefftz, dada por:

$$w = n \frac{\left(1 + \frac{1}{z}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{z}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{z}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{z}\right)^n},$$

contorna o inconveniente dando origem a perfis cujas superfícies superior e inferior formam um ângulo no bordo de fuga, dado por:

$$\alpha = (2 - n)\pi,$$

com  $n$  pouco menor do que 2. A derivada  $dw/dz$ , usada na determinação do campo de velocidades, é igual a:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{4n^2}{z^2 - 1} \frac{\left(1 + \frac{1}{z}\right)^n \left(1 - \frac{1}{z}\right)^n}{\left[\left(1 + \frac{1}{z}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{z}\right)^n\right]^2}.$$

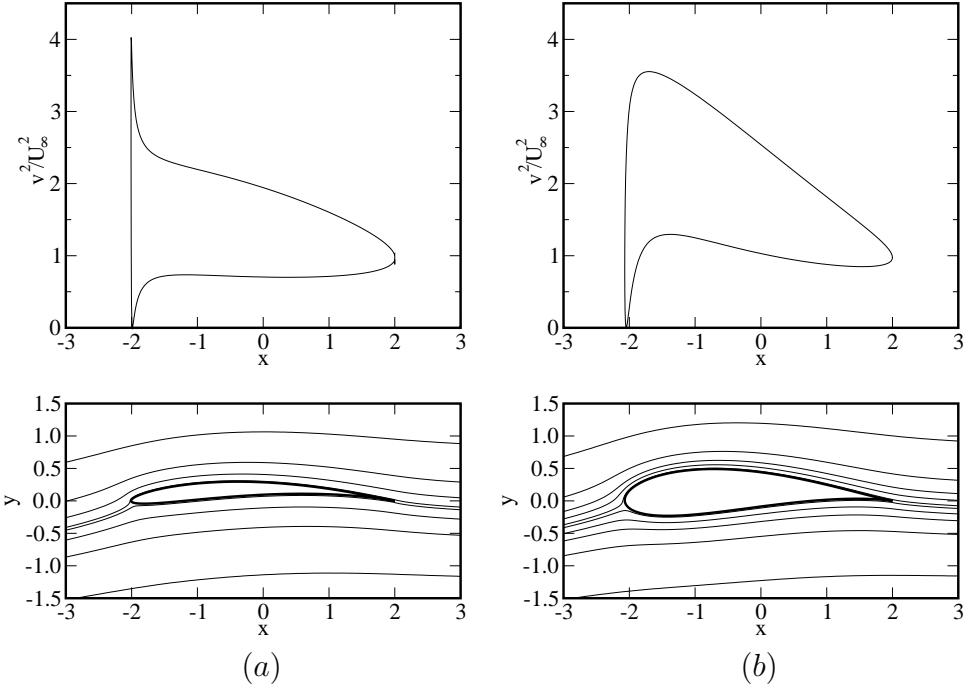


Figura 6.16: Distribuição da pressão dinâmica normalizada,  $v^2/U_\infty^2$ , sobre dois perfis de Kutta-Joukowski. (a): perfil muito delgado, obtido a partir de circunferência centrada em  $z = -0,04 + 0,05i$  e circulação  $\Gamma = 109$ . A pequena espessura faz com que o escoamento próximo ao bordo de ataque se aproxime do que se desenvolve em torno do vértice de um diedro externo, onde a velocidade diverge. O pico de pressão dinâmica é indesejável, pois conduz a gradientes elevados de velocidade, ao surgimento de efeitos viscosos que levam ao descolamento precoce dos filetes e ao aumento do arraste do perfil. (b): Mesmo perfil e mesmas condições de escoamento mostrados na Fig. 6.15b. O bordo de ataque mais arredondado resulta em melhor distribuição de pressão dinâmica nessa região. Nos dois casos  $U_\infty = 50$  e o ângulo de ataque dos perfis é de  $4^\circ$ .

## 6.12 Problemas

1. Mostrar que o campo de velocidades de um escoamento potencial compressível e estacionário obedece à equação:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{a^2} \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \frac{v^2}{2}.$$

2. Mostrar que a equação das linhas de corrente de um escoamento uniforme formando um ângulo  $\gamma$  com o eixo  $x$ , que incide sobre um cilindro de raio  $R$  em torno do qual a circulação é  $\Gamma$  é dada por:

$$\psi = U_\infty r (\sin \theta \cos \gamma + \sin \theta \cos \gamma) \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R}.$$

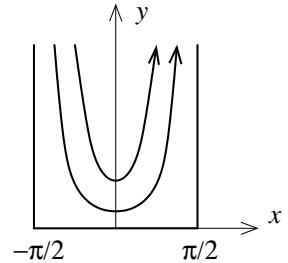
3. Mostrar que o potencial e a velocidade complexos, referentes ao escoamento uniforme que incide sobre um cilindro podem ser escritos, respectivamente, sob a forma:

$$F = A \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{e:} \quad W = A \left( z - \frac{1}{(z^*)^2} \right).$$

Mostrar que a pressão sobre a superfície do cilindro é máxima em  $(x = \pm 1; y = 0)$  e mínima em  $(x = 0; y = \pm 1)$ .

4. Seja o campo potencial de um fluido que escoa nas proximidades de um diedro cujos planos formam um ângulo reto, como mostrado na Fig. 6.7(e). Em que ponto do diedro a pressão é máxima?
5. Mostrar que o potencial complexo de um campo potencial que se desenvolve na região semi-infinita  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, y \geq 0$ , conforme mostrado na figura ao lado, é dado por  $F = A \operatorname{sen} z$

6. Mostrar que o potencial complexo de um campo potencial que se desenvolve na região semi-infinita  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, y \geq 0$ , conforme mostrado na figura ao lado, é dado por  $F = A \operatorname{sen} z$ .



7. Mostrar que os pontos de estagnação de um campo formado por um par fonte-sumidouro de intensidade  $\Lambda$  separados por uma distância  $2d$  e alinhado a um escoamento incidente com velocidade  $U_\infty$  (ver Fig. 6.9) são dados pelas raízes da equação:

$$U_\infty + \frac{\Lambda}{\pi} \frac{x}{(x+d)^2} = 0$$

8. Determinar as linhas de corrente de um campo formado por uma fonte de intensidade  $3\Lambda$ , localizada em  $(a; 0)$  e um sumidouro de intensidade  $-\Lambda$ , localizado em  $(-a; 0)$ .
9. Determinar as linhas de corrente de um campo formado uma fonte de intensidade  $\Lambda$ , localizada em  $(a; 0)$  e outra de intensidade  $3\Lambda$ , localizada em  $(-a; 0)$ .
10. Seja um escoamento uniforme que incide sobre três singularidades com as seguintes características, alinhadas com o escoamento incidente:
  - (a) Duas fontes de intensidade  $\Lambda$ , localizada em  $(\pm a; 0)$ ;
  - (b) Um sumidouro de intensidade  $2\Lambda$ , localizado em  $(0; 0)$ .

A velocidade do escoamento incidente longe das singularidades é  $U_\infty$ . O campo forma uma superfície fechada, separando o escoamento incidente do gerado pela três singularidades? Identificar possíveis pontos de estagnação.

11. Sejam três fontes de intensidade  $\Lambda$  localizadas nos vértices de um triângulo cujas coordenadas são  $(\pm a/2; 0)$  e  $(0; a)$ . Calcular as linhas de corrente desse campo. O campo admite a existência de pontos de estagnação?
12. Calcular as linhas de corrente de um campo formado por duas fontes de intensidade  $\Lambda$ , localizadas em  $(0; \pm a)$ , sobre as quais incide um escoamento uniforme cuja velocidade em um ponto a montante das fontes e distante das mesmas é igual a  $U_\infty$ .

13. Quatro fontes de igual intensidade  $\Lambda$  localizam-se nas bissetrizes do sistema de eixos cartesianos  $(a; a)$ ,  $(-a; a)$ ,  $(-a; -a)$  e  $(a; -a)$ . Calcular e esboçar as linhas de corrente e equipotenciais. O campo forma paredes planas (linhas de corrente retas) separando regiões?
14. Determinar as linhas de corrente de um campo formado por um vórtice de intensidade  $\Gamma$ , localizado em  $(a; 0)$  e outro de intensidade  $-2\Gamma$ , localizado em  $(-a; 0)$ . Identificar os pontos de estagnação do campo.
15. Determinar as linhas de corrente e a posição dos pontos de estagnação de um campo formado pela superposição de um escoamento incidente sobre uma placa com o de uma fonte de intensidade  $\Lambda$ , localizada na origem. A função corrente resultante tem a forma  $\psi = 2Axy + \Lambda\theta$ .
16. Um Oval de Kelvin é formado por um par de vórtices de circulação  $\Gamma$ , localizados em  $(0; \pm a)$ . Qual é a altura  $H$  do oval e o valor da velocidade em  $(0; \pm H)/2$ ?
17. Determinar a velocidade no ponto  $A$ , induzida por um campo formado por um escoamento uniforme, com velocidade  $U_\infty = 6 \text{ m/s}$ , que incide com um ângulo de  $30^\circ C$  sobre três singularidades formadas por um par fonte-sumidouro de intensidade  $\Lambda = \pm 12 \text{ m}^2/\text{s}$  e um vórtice de intensidade  $\Gamma = -9 \text{ m}^2/\text{s}$ .
18. A imagem das retas  $y = \pm\pi$  resultam, respectivamente, nas semi-retas  $u < -1; v = \pm\pi$ , no plano  $w$ , sob a transformação conforme:

$$w = e^z + z.$$

Notar que a mudança de direção  $\arg(dw/dz) \rightarrow 0$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ . Mostrar que as linhas de corrente de um fluido escoando em um canal formado pelas semi-retas acima descritas no plano  $w$  são imagens das linhas  $y = c$ , com  $-\pi < c < \pi$ , no plano  $z$ . Essas linhas representam também as equipotenciais do campo elétrico nas proximidades das placas de um capacitor formado por duas placas paralelas.

19. A transformação  $z = w + 1/w$  associa pontos da circunferência  $|w| = 1$  ao segmento de reta localizado entre os pontos  $z = -2$  e  $z = 2$  e os pontos externos à circunferência, ao restante do plano  $z$ . Seja:

$$\begin{aligned} z - 2 &= r_1 e^{i\theta_1} \\ z + 2 &= r_2 e^{i\theta_2} \\ (z^2 - 4)^{1/2} &= \frac{\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}}{2} \exp \left[ i \left( \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} \right) \right] \quad 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_2 < 2\pi. \end{aligned}$$

A função  $(z^2 - 4)^{1/2}$  é univoca e analítica em todos os pontos, exceto no segmento de reta compreendido entre os pontos  $z = -2$  e  $z = 2$ . Mostre que a transformação inversa de  $z = w + 1/w$ , válida para pontos fora da circunferência ( $|w| > 1$ ), é dada por:

$$w = \frac{1}{2} \left[ z + (z^2 - 4)^{1/2} \right] = \frac{1}{4} (\sqrt{r_1} e^{i\theta_1/2} + \sqrt{r_2} e^{i\theta_2/2})^2.$$

Em consequência a transformação e sua inversa associam pontos dos dois domínios de forma bi-unívoca.

20. A transformação  $w = u + iv = e^z + z$  transforma os eixo  $y = \pm\pi$  nas semi retas  $u \leq -1$ ,  $v = \pm\pi$  e o segmento de reta  $-\pi \leq y \leq \pi$ , nos pontos do plano  $w$ . Verificar que a mudança de direção  $\arg(dw/dz)$  feita sob a transformação tende a zero quando  $z \rightarrow \infty$ . Mostrar que a transformação das retas  $y = c$  modela as linhas de corrente do escoamento potencial de um fluido escoa com velocidade uniforme em um canal de lados paralelos, próximo à saída do canal. Essas linhas de corrente representam igualmente as equipotenciais do campo elétrico nas proximidades das bordas de um capacitor de placas paralelas.

# Capítulo 7

## Escoamentos Viscosos

### 7.1 Introdução

A riqueza dos fenômenos observados em meios fluidos decorre da sensibilidade dos mesmos às condições iniciais, à geometria do problema, às condições de contorno do mesmo e ainda, ao acoplamento com efeitos térmicos, a presença de espécies químicas reativas, ou que, de alguma forma alteram parâmetros do fluido. Todos esses efeitos são muito ampliados pelo do caráter não-linear das leis de evolução dos mesmos. Essas leis são descritas em sua maior parte, pelas equações apresentadas nos capítulos anteriores. O universo dos fenômenos engloba situações que incluem por exemplo a acústica, problemas de engenharia relacionados ao escoamento de fluidos em tubulações, a construção de máquinas de fluxo como turbinas e compressores, a hidráulica de canal aberto, a aerodinâmica de aviões, o estudo da movimentação da crosta terrestre, a oceanografia, a meteorologia e a dinâmica da atmosfera e ainda, fenômenos biológicos. Nesses últimos deve-se levar em conta reações e transporte de espécies químicas. Esses aspectos foram parcialmente tratados na Sec. 4.14 e em outro volume desse trabalho. Face à variedade dos fenômenos mencionados não causa surpresa o fato de que não se conheçam soluções gerais das equações da mecânica dos fluidos. Na maior parte dos casos é necessário que se façam hipóteses simplificadoras levando em conta as particularidades de cada problema para resolvê-lo. É o que fazemos nesse capítulo.

Uma possível classificação dos escoamentos, visando a simplificação das equações de evolução, pode ser feita quando se considera apenas escoamentos forçados, isto é, escoamentos em que, de alguma forma, há uma velocidade imposta. Nesse caso, quando os efeitos viscosos predominam e se estendem por todo o campo tem-se os escoamentos sob baixo número de Reynolds. No outro extremo encontram-se os escoamentos sob número de Reynolds elevado, onde os efeitos viscosos se concentram em regiões confinadas do campo de velocidades. Fora dessas regiões, esses efeitos são desprezíveis e os fenômenos que aí ocorrem podem ser estudados através da equação de Euler. Dentro dessa classe é de particular importância o caso dos escoamentos *irrotacionais*, em que se pode associar um *potencial* ao campo de velocidades.

Nesse capítulo, abordamos alguns problemas clássicos de escoamentos sob baixo número de Reynolds, ou em que número de Reynolds não é definido, para os quais existe solução exata das equações de Navier-Stokes. Os efeitos viscosos desempenham papel im-

portante nessa situação, no sentido de estabilizar o escoamento, impedindo a formação de estruturas mais complexas dentre as quais, a turbulência é o exemplo mais importante. Aplicamos o formalismo desenvolvido nos capítulos precedentes na resolução dos campos de velocidades e, em alguns casos, no de temperaturas. Os resultados obtidos dão indicações sobre a extensão da região em que os efeitos viscosos são importantes, particularmente, sobre a espessura da camada limite hidrodinâmica e, a partir dessa, da espessura das camadas limite térmica e de concentração, que se desenvolvem em situações onde ocorrem fenômenos de transferência de calor e de massa, como por exemplo, a evaporação. O conhecimento da espessura dessas três camadas limite, e das variáveis da qual dependem, permite identificar a forma geral das correlações empíricas largamente empregadas em engenharia, para a determinação dos coeficientes de transferência de calor e de massa por convecção, mesmo fora das condições em que o escoamento se mantém laminar. Por esse motivo discutimos nesse capítulo, além dos escoamentos viscosos, os princípios de transferência de calor e massa por convecção forçada e livre e apresentamos algumas correlações empíricas para cálculo dos respectivos coeficientes.

Em resumo, esse capítulo aborda os seguintes problemas:

1. Escoamento de Stokes em torno de uma esfera;
2. Escoamento permanente de uma película de um fluido incompressível e viscoso sobre uma placa plana inclinada. Estabelecemos as equações do movimento do problema obtidas através de uma simplificação das equações de Navier-Stokes, determinamos a forma do perfil de velocidades e da função dissipaçāo;
3. Escoamento de Couette: Escoamento permanente de um fluido newtoniano viscoso, incompressível, entre duas placas paralelas, uma das quais se desloca com velocidade  $U_\infty$ . Estabelecemos as equações do movimento, o perfil de velocidades, a equação do balanço de energia e o perfil de temperaturas gerado em virtude dos efeitos viscosos;
4. Escoamento permanente de um fluido viscoso e incompressível entre duas placas paralelas imóveis. O escoamento se faz sob efeito de um gradiente de pressões imposto,  $\partial p / \partial x$ , paralelo às placas. Estabelecemos as equações do movimento e o perfil de velocidades;
5. Escoamento em um canal formado por duas placas horizontais, paralelas, sob a ação de um gradiente de pressão especificado e submetido a um fluxo de calor constante. Considera-se os perfis de velocidades e temperaturas completamente desenvolvidos, no sentido de que o primeiro é independente da posição ao longo do canal e de que  $dT/dy$  não é função de  $x$ ;
6. Problema de Rayleigh: Esse problema trata do campo de velocidades dependente do tempo, gerado por uma placa plana infinita, posta em movimento com velocidade constante  $U$ , na direção  $x$ , contida em seu plano, a partir de  $t = 0$ . Os resultados obtidos são adaptados para o problema da determinação do campo de velocidades sobre uma placa plana com origem em  $x = 0$ , alinhada ao escoamento. Sobre essa placa, desenvolve-se uma camada limite na qual a velocidade varia de zero, sobre a superfície, até o valor aproximado do fluxo incidente, não perturbado. Os resultados do estudo do problema de Rayleigh permitem estimar a espessura dessa camada limite;

7. Definição e identificação da forma geral dos coeficientes de transferência de calor e massa por convecção. Complementando, apresentaremos algumas correlações empíricas para cálculo desses coeficientes;
8. Escoamento tri-dimensional de um fluido newtoniano incompressível na proximidade do eixo de um disco rotatório e de dois discos rotatórios coaxiais;
9. Escoamento em canais convergentes/divergentes.

## 7.2 Escoamento de Stokes em Torno de uma Esfera sob $\text{Re} < 1$

No estudo de escoamentos estacionários sob baixos números de Reynolds, duas aproximações podem ser feitas. A primeira é a aproximação de Stokes, válida para números de Reynolds menores do que um. Esse é o caso de alguns fenômenos meteorológicos, como neblina, a suspensão de poeira no ar, o do escoamento de corpos em fluidos muito viscosos e o de problemas de lubrificação. Stokes desprezou completamente a aceleração à qual as partículas de fluido estão submetidas. As equações resultantes desta simplificação formam um sistema linear que contém apenas o gradiente da pressão e o termo viscoso. A segunda aproximação, estudada por Oseen, não despreza a aceleração das partículas, isto é, as forças de inércia que agem sobre a mesma, mas lineariza o termo  $\mathbf{v} \cdot \nabla p$ . Essa aproximação é válida para escoamentos com  $Re < 5$ .

A abordagem apresentada abaixo para o problema do escoamento em torno de uma esfera sob número de Reynolds inferior a um segue, em linhas gerais, a proposta por Landau & Lifshitz (1959) [38].

As equações de Stokes para o escoamento de um fluido incompressível se escrevem:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (7.1)$$

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p = \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (7.2)$$

ou, de forma desenvolvida, em coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Escoamentos regidos por essas equações têm a propriedade de ser a pressão uma função potencial. De fato ao aplicarmos o operador divergente sobre a eq. (7.2) obtemos:

$$\operatorname{div} \mathbf{grad} p = \nabla^2 p = \nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

pode-se eliminar a pressão da eq. 7.2 aplicando-se a essa última o operador rotacional. obtém-se:

$$\nabla^2 \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0. \quad (7.3)$$

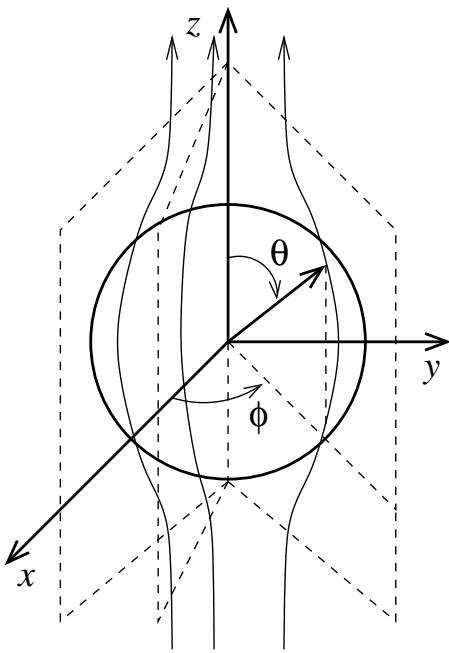


Figura 7.1: Escoamento de Stokes em torno de uma esfera e referencial usado na abordagem do problema. O campo incidente tem magnitude  $W_\infty$ , direção e sentido do eixo  $z$ .

natural portanto decomponha-lo na forma  $\mathbf{v} = \mathbf{W} + \mathbf{v}'$ , com  $\mathbf{v}'$  se anulando longe da esfera.  $\mathbf{W}$  é um parâmetro do campo. Algumas observações a respeito do campo estacionário cabem inicialmente:

1. A componente de perturbação  $\mathbf{v}'$  é uma função linear de  $\mathbf{W}$ ;
2. A perturbação  $\mathbf{v}'$  se localiza no plano definido, em cada ponto do campo, pelos vetor velocidade incidente  $\mathbf{W}$  e pelo vetor de posição  $\mathbf{r}$  do ponto em consideração (O módulo do vetor  $\mathbf{r}$  é dado por  $r = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$ );
3. Na região em que a esfera afeta o campo, os efeitos viscosos fazem com que  $\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$  (ver Sec.<sup>s</sup> 3.13 e 3.14);
4. O rotacional do campo é perpendicular ao plano definido pelas duas componentes da velocidade e, em sentido oposto, o rotacional de um vetor ortogonal a esse plano pertence ao próprio plano;

Seja  $R$  o raio da esfera. Posicionamos o referencial com a origem no centro da esfera e com o eixo  $z$  alinhado com o campo incidente não perturbado. Longe da esfera, a velocidade é dada por  $\mathbf{v} = \mathbf{W} = W_\infty \mathbf{e}_z$ , com  $W_\infty > 0$ .

Em virtude da simetria do problema as linhas de corrente desenvolvem-se em planos definidos pela velocidade incidente  $\mathbf{W}$  e pelo vetor de posição  $\mathbf{r}$ , como mostrado na Fig. 7.1. O campo de velocidades é bidimensional, planar, com simetria esférica. A velocidade, dada em coordenadas esféricas, tem apenas as componentes  $\mathbf{v}_r$  e  $\mathbf{v}_\theta$ . Consequentemente, têm-se que:

$$v_\phi = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0.$$

Próximo à esfera, o campo de incidente é perturbado pela presença do corpo. Exceto nos pontos sobre a superfície da esfera, em que a velocidade é nula, o campo sempre apresenta uma componente na direção do vetor  $\mathbf{W}$ . É

É natural portanto decomponha-lo na forma  $\mathbf{v} = \mathbf{W} + \mathbf{v}'$ , com  $\mathbf{v}'$  se anulando longe da esfera.  $\mathbf{W}$  é um parâmetro do campo. Algumas observações a respeito do campo estacionário cabem inicialmente:

5. Como  $\operatorname{div} \mathbf{W} = 0$  têm-se também que  $\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0$ . Como o divergente do rotacional de um vetor é igual a zero  $\mathbf{v}' = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , onde  $\mathbf{A}$  é um vetor a determinar, satisfaz à condição de divergência nula à qual a perturbação obedece;
6. O teorema de Helmholtz (ver Sec. B.4) assegura que qualquer campo vetorial suficientemente regular pode ser decomposto de forma unívoca, na soma do negativo do gradiente de um escalar  $\phi(\mathbf{r})$  com o rotacional de um campo vetorial  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ . Procuramos então a decomposição de Helmholtz do campo em torno da esfera, com  $\phi = -W_\infty z$ , na forma:

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \phi + \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{W} + \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Como  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'(\mathbf{r}, \mathbf{W})$  é necessário que  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'(\mathbf{A}) = \mathbf{v}'(\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{W}))$ . Adicionalmente,  $\mathbf{A}$  deve ser uma função linear de  $\mathbf{W}$ .

O vetor  $f'(\mathbf{r})\mathbf{n} \times \mathbf{W}$ , com  $f'(\mathbf{r})$  sendo uma função escalar e  $\mathbf{n}$ , o vetor unitário na direção de  $\mathbf{r}$ , satisfaz a todas as condições prescritas para  $\mathbf{A}$ . Quanto ao vetor  $f'(\mathbf{r})\mathbf{n}$ , pode, por seu lado, ser escrito como  $\operatorname{grad} f(\mathbf{r})$ . Procuramos então uma solução para o campo de velocidades na forma:

$$\mathbf{v}' = \operatorname{rot} (\operatorname{grad} f \times \mathbf{W}).$$

Como  $\mathbf{W}$  é constante  $\operatorname{grad} f \times \mathbf{W} = \operatorname{rot} (f\mathbf{W})$  (ver problema 2, Apêndice B), donde resulta que:

$$\mathbf{v} = \mathbf{W} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} (f\mathbf{W}). \quad (7.4)$$

Para determinarmos a função  $f$  usamos a Eq. 7.2. Como:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} (f\mathbf{W}) = (\operatorname{grad} \operatorname{div} - \nabla^2) \operatorname{rot} (f\mathbf{W}) = -\nabla^2 \operatorname{rot} (f\mathbf{W}),$$

(ver problema 2, Apêndice B) a Eq. 7.3 toma a forma  $\nabla^4 \operatorname{rot} (f\mathbf{W}) = 0$ , ou, como  $\mathbf{W}$  é constante,

$$\nabla^2 \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\nabla^4 (\operatorname{grad} f \times \mathbf{W}) = -(\nabla^4 \operatorname{grad} f) \times \mathbf{W} = 0.$$

Segue-se dessa última equação, que:

$$\nabla^4 \operatorname{grad} f = 0.$$

Uma primeira integração dessa equação resulta em:

$$\nabla^4 f = \text{constante}. \quad (7.5)$$

Sendo a perturbação  $\mathbf{v}'$  da velocidade nula em pontos longe da esfera, suas derivadas também o são. E  $\nabla^4 f$  é formado por derivadas espaciais da velocidade. Em consequência, a constante da Eq. 7.5 é igual a zero. A equação pode ser escrita, em coordenadas esféricas, como (ver Eq. B.12):

$$\nabla^4 f = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) \nabla^2 f$$

e, integrada fornece:

$$\nabla^2 f = \frac{2a}{r} + C. \quad (7.6)$$

A constante  $C$  se anula por serem a perturbação da velocidade e suas derivadas nulas longe da esfera. Integrando a Eq. 7.6 obtém-se:

$$f = ar + \frac{b}{r}. \quad (7.7)$$

A constante de integração pode ser descartada, uma vez que a perturbação de velocidade  $\mathbf{v}'$  é dada pelas derivadas de  $f$ . Substituindo-se a expressão de  $f$  na Eq. 7.4 têm-se:

$$\mathbf{v} = \mathbf{W} + \mathbf{rot} \mathbf{rot} (f\mathbf{W}) = \mathbf{W} + \mathbf{rot} \mathbf{rot} \left[ \left( ar + \frac{b}{r} \right) W_\infty (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \right].$$

Como o rotacional da velocidade tem apenas a componente na direção  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} (f\mathbf{W}) &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (-rfW_\infty \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (fW_\infty \cos \theta) \right] \mathbf{e}_\phi = \\ &= \frac{-W_\infty}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (ar^2 + b) \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( ar + \frac{b}{r} \right) \cos \theta \right] \mathbf{e}_\phi = W_\infty \left( -a \sin \theta + \frac{b}{r^2} \sin \theta \right) \mathbf{e}_\phi. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o termo  $\mathbf{rot} \mathbf{rot} (f\mathbf{W})$  (ver também Eq. B.12):

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{rot} (f\mathbf{W}) &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ (\mathbf{rot} f\mathbf{W})_\phi \sin \theta \right] \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r (\mathbf{rot} f\mathbf{W})_\phi \right] \mathbf{e}_\theta = \\ &= \frac{W_\infty}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ -a \sin^2 \theta + \frac{b}{r^2} \sin^2 \theta \right] \mathbf{e}_r + \frac{W_\infty}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ ar \sin \theta - \frac{b}{r} \sin \theta \right] \mathbf{e}_\theta = \\ &= -2W_\infty \cos \theta \left( \frac{a}{r} - \frac{b}{r^3} \right) \mathbf{e}_r + W_\infty \sin \theta \left( \frac{a}{r} + \frac{b}{r^3} \right) \mathbf{e}_\theta = \end{aligned}$$

Somando e subtraindo  $W_\infty \cos \theta b/r^3 \mathbf{e}_r$  têm-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{rot} (f\mathbf{W}) &= \\ &= - \left( \frac{a}{r} + \frac{b}{r^3} \right) (W_\infty \cos \theta \mathbf{e}_r - W_\infty \sin \theta \mathbf{e}_\theta) - W_\infty \cos \theta \left( \frac{a}{r} - 3 \frac{b}{r^3} \right) \mathbf{e}_r = \\ &= - \left( \frac{a}{r} + \frac{b}{r^3} \right) \mathbf{W} - \frac{a}{r} \mathbf{n} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}) + 3 \frac{b}{r^3} \mathbf{n} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}). \end{aligned}$$

Têm-se então para a velocidade perturbada:

$$\mathbf{v} = \mathbf{W} + \mathbf{rot} \mathbf{rot} (f\mathbf{W}) = \mathbf{W} - a \frac{\mathbf{W} + \mathbf{n} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n})}{r} + b \frac{3\mathbf{n} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{W}}{r^3}.$$

Determina-se as constantes  $a$  e  $b$  a partir das condições de contorno, que prescrevem velocidade nula sobre a superfície da esfera, isso é:

$$\mathbf{W} - a \frac{\mathbf{W} + \mathbf{n} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n})}{R} + b \frac{3\mathbf{n} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{W}}{R^3} = 0.$$

Como a equação acima é obedecida para qualquer  $\mathbf{n}$  os coeficientes de  $\mathbf{W}$  e de  $\mathbf{n}(\mathbf{W} \cdot \mathbf{n})$  devem se anular :

$$\frac{a}{R} + \frac{b}{r^3} - 1 = 0, \quad -\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3} = 0,$$

onde conclui-se que  $a = 3R/4$  e  $b = R^3/4$ . Obtém-se finalmente que:

$$f = \frac{3}{4}Rr + \frac{R^3}{4}$$

e a seguinte expressão para o campo de velocidades:

$$\mathbf{v} = \mathbf{W} - \frac{3}{4}R \frac{\mathbf{W} + \mathbf{n}(\mathbf{W} \cdot \mathbf{n})}{r} - \frac{R^3}{4} \frac{\mathbf{W} - 3\mathbf{n}(\mathbf{W} \cdot \mathbf{n})}{r^3}.$$

As componentes da velocidade, em coordenadas esféricas, são (ver Fig. 7.1);

$$v_r = W_\infty \cos \theta \left( 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (7.8)$$

$$v_\theta = -W_\infty \sin \theta \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \quad (7.9)$$

$$v_\phi = 0. \quad (7.10)$$

Em coordenadas cartesianas (ver Fig. 7.1 e Tab. 2.2 à Pág. 15):

$$v_x = W_\infty \frac{3}{4} \frac{Rxz}{r^3} \left[ \frac{R^2}{r^2} - 1 \right] \quad (7.11)$$

$$v_y = W_\infty \frac{3}{4} \frac{Ryz}{r^3} \left[ \frac{R^2}{r^2} - 1 \right] \quad (7.12)$$

$$v_z = W_\infty \left[ \frac{3}{4} \frac{Rz^2}{r^3} \left( \frac{R^2}{r^2} - 1 \right) - \frac{1}{4} \frac{R}{r} \left( 3 + \frac{R^2}{r^2} \right) + 1 \right]. \quad (7.13)$$

Para a determinação da distribuição de pressões substitui-se a Eq. 7.4 em 7.2:

$$\mathbf{grad} p = \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \mu \nabla^2 \mathbf{rot} \mathbf{rot} (f \mathbf{W}) = \mu \nabla^2 [\mathbf{grad} \operatorname{div} (f \mathbf{W}) - \mathbf{W} \nabla^2 f].$$

Levando em consideração que  $\nabla^4 f = 0$ :

$$\mathbf{grad} p = \mu \mathbf{grad} [\nabla^2 \operatorname{div} (f \mathbf{W})] = \mu \mathbf{grad} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{grad} \nabla^2 f).$$

Essa equação, integrada fornece como resultado:

$$p - p_\infty = \mu \mathbf{W} \cdot \mathbf{grad} \nabla^2 f,$$

onde  $p_\infty$  é a pressão longe da esfera. Substituindo-se  $f$  pela expressão dada na Eq. 7.7 obtém-se o campo de pressões, na forma:

$$p - p_\infty = -\frac{3}{2} \frac{\mu \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}}{r^3} R.$$

A equação acima pode ser reescrita como:

$$p - p_\infty = -\frac{3}{2} \frac{\mu W_\infty R}{r^3} z.$$

A pressão junto às paredes da esfera pode ser obtida diretamente fazendo-se  $r = R$  (ver Fig. 7.2):

$$p - p_\infty = -\frac{3}{2} \frac{\mu W_\infty}{R^2} z.$$

O máximo e o mínimo da pressão atuando sobre a esfera são dados por:

$$p_{max,min} - p_\infty = \pm \frac{3}{2} \frac{\mu W_\infty}{R}.$$

As tensões de cisalhamento que agem sobre a esfera podem ser obtidas a partir do campo de velocidades. Da Tab. 3.2 e da Eq. 7.9 têm-se:

$$\tau_{rr} = \mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \quad (7.14)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) = -\frac{3}{2} \frac{\mu W_\infty}{R} \sin \theta, \quad (7.15)$$

com  $\tau_{rr} = 0$  sobre a esfera, pois  $\partial v_r / \partial r = 0$  em  $r = R$  (ver Eq. 7.8) e  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . Os valores máximo e mínimo localizam-se no polos (ponto  $x = y = 0, z = \mp R$ , conforme Fig.<sup>s</sup> 7.1 e 7.2), sendo iguais, respectivamente, a:

$$\tau_{max} = \pm \frac{3}{2} \frac{\mu W_\infty}{R}$$

Dada a simetria dos campos de velocidades e de pressão a força que o escoamento exerce sobre a esfera (arraste) tem a direção  $z$ . Essa força é dada por (ver Fig.<sup>s</sup> 7.1 e 7.2):

$$\mathbf{F} = \oint_S \sigma \mathbf{n} dA = \oint_S [(-p + \tau_{rr}) \mathbf{e}_r + \tau_{r\theta} \mathbf{e}_\theta] dA.$$

Na direção  $z$  e notando que  $\tau_{rr} = 0$ :

$$F_z = \int_0^\pi (-p \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) 2\pi R^2 \sin \theta d\theta. \quad (7.16)$$

Observando-se que  $z = R \cos \theta$ , têm-se para a pressão:

$$p = p_\infty - \frac{3}{2} \frac{\mu W_\infty}{R^2} z = p_\infty - \frac{3}{2} \frac{\mu W_\infty}{R} \cos \theta$$

Substituindo-se a expressão da pressão e de  $\tau_{r\theta}$ , dada pela Eq. 7.15, na Eq. 7.16 obtém-se:

$$\begin{aligned} F_z &= -2\pi R^2 \int_0^\pi \left( p_\infty - \frac{3}{2} \frac{\mu W_\infty}{R} \cos \theta \right) \sin \theta \cos \theta d\theta + 2\pi R^2 \int_0^\pi \frac{3}{2} \frac{\mu W_\infty}{R} \sin^3 \theta d\theta \\ &= -\pi R^2 p_\infty \sin^2 \theta \Big|_0^\pi - \pi \mu R W_\infty \cos^3 \theta \Big|_0^\pi - 3\pi \mu R W_\infty \sin^2 \theta \cos \theta \Big|_0^\pi \\ &\quad - 2\pi \mu R W_\infty \cos^3 \theta \Big|_0^\pi = 2\pi \mu R W_\infty + 4\pi \mu R W_\infty. \end{aligned}$$

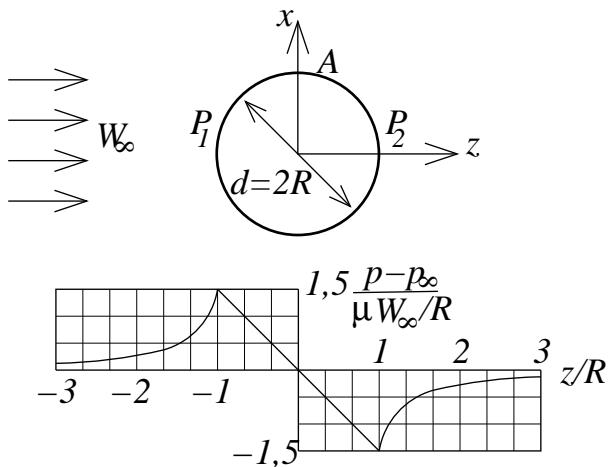


Figura 7.2: Campo de pressões em torno de uma esfera sob  $Re < 1$  ao longo do plano  $y = 0$  (ver Fig. 7.1). O diagrama da figura está fora de escala.

(7.14)

(7.15)

Agrupando os dois termos da última igualdade obtém-se a fórmula de Stokes para a força de arraste  $D$ , agindo sobre a esfera:

$$D = 6\pi\mu RW_\infty. \quad (7.17)$$

A fórmula de Stokes mostra que o arraste aumenta linearmente com a velocidade, ao contrário do que ocorre sob números de Reynolds elevados, onde o arraste é proporcional ao quadrado da velocidade.

O desenvolvimento acima mostra que um terço da força de arraste deve-se à distribuição de pressões e os dois terços restantes, a forças de cisalhamento. Definimos o coeficiente de arraste  $C_D$ , como sendo  $C_D = D/\frac{1}{2}\rho W_\infty^2 A$ , onde  $A$  é a área da seção transversal da esfera, dada por  $A = \pi R^2$ . Obtém-se para o coeficiente de arraste da esfera:

$$C_D = \frac{24}{Re},$$

onde  $Re = W_\infty d/\nu$  e  $d$  é o diâmetro da esfera.

No caso da queda livre de uma esfera sob  $Re < 1$ , determina-se a velocidade terminal igualando-se a força de arraste, dada pela Eq. 7.17 ao peso da esfera,  $4/3 \rho_f g \pi R^3$ .

As equações de Stokes (Eq.<sup>s</sup> 7.1 e 7.2) não levam em conta acelerações convectivas nem o transporte da vorticidade, excluindo por isso a existência de esteiras, que se observam em escoamentos sob números de Reynolds mais elevados.

### 7.3 Escoamento Sobre uma Placa Plana Inclinada

Consideramos o escoamento de um líquido viscoso com peso específico  $\rho g$  e viscosidade  $\mu$  que escoa em regime laminar, permanente, sobre uma placa plana com declividade  $\theta$ , conforme Fig. (7.3). O escoamento é submetido a um fluxo de calor  $q_0$ , transmitido da placa inferior e a temperatura superior do fluido é mantida à temperatura  $T = T_1$ . Despreza-se o efeito de atrito entre o fluido e o ar, bem como entre o fluido e as paredes laterais. Pede-se:

1. Estabelecer as equações e condições de contorno dos campos de velocidade, pressão e temperatura;
2. Determinar os perfis de velocidade, pressão e a velocidade média do escoamento;
3. Determinar a função dissipaçāo e o perfil de temperaturas considerando e desprezando o aquecimento viscoso;
4. Reescrever o perfil de temperaturas em forma adimensional e calcular o número de Brinkman;
5. Calcular o coeficiente de transferência por convecção  $h$  e o número de Nusselt,  $Nu$ , desprezando a dissipaçāo viscosa.

Trata-se de um problema incompressível e bidimensional, pois não há variação das propriedades do escoamento na direção  $z$ . Sejam  $v_x$  e  $v_y$  as componentes do campo de

velocidades nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. As equações da continuidade, de Navier-Stokes e da temperatura, descartando o termo de geração interna de calor tomam a forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x + g \sin \theta \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v_y - g \cos \theta \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{\rho C_p} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \alpha \nabla^2 T\end{aligned}$$

As condições de contorno do campo de velocidades podem ser estabelecidas da seguinte forma: As duas componentes de velocidade,  $v_x$  e  $v_y$  se anulam junto à placa. A componente  $v_x$  é igual a zero em virtude da hipótese feita sempre em mecânica dos fluidos, de que a velocidade do escoamento junto a qualquer superfície sólida é igual à da superfície.

Como o escoamento é permanente e suas características não devem se alterar ao longo da direção  $x$  as derivadas em relação a essa variável devem se anular. Consequentemente, a equação da continuidade se reduz a  $\partial v_y / \partial y = 0$ . Como  $v_y = 0$  junto à superfície inferior e não varia com  $y$ , concluímos que  $v_y$  é identicamente nula em todo o campo. Por outro lado, a inexistência de atrito entre o fluido e a superfície livre implica que a tensão de cisalhamento é nula naquele ponto:

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = 0 \quad (y = y_0)$$

Como  $v_y \equiv 0$  esta condição de contorno se expressa por:

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = y_0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = y_0$$

As equações de Navier-Stokes se reduzem a:

$$\nu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = -g \sin \theta \tag{7.18}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = -g \cos \theta \tag{7.19}$$

As Eq.<sup>s</sup> (7.18) e (7.19) são desacopladas no sentido de que a primeira só contém uma incógnita, a componente de velocidade  $v_x$  e a segunda também só contém uma incógnita, a pressão  $p$ . Cada equação pode ser integrada independentemente da outra. Começando com

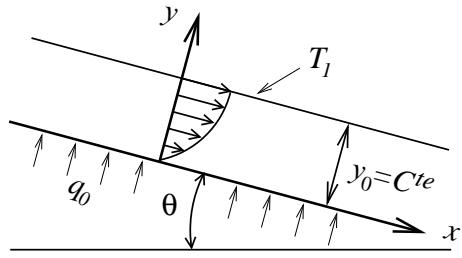


Figura 7.3: Escoamento laminar de uma lâmina de fluido sobre uma placa plana infinita inclinada.

a primeira obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{d^2v_x}{dy^2} &= -\frac{g \operatorname{sen} \theta}{\nu} = -\frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{\mu} \\ \frac{dv_x}{dy} &= -\frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{\mu} y + C_1 \\ y = y_0 &\implies \frac{dv_x}{dy} = 0 \implies C_1 = \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{\mu} y_0 \\ \frac{dv_x}{dy} &= \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{\mu} (y_0 - y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{\mu} \left( y_0 y - \frac{y^2}{2} \right) + C_2 \\ v_x &= 0 \quad \text{em } y = 0 \implies C_2 = 0 \\ v_x &= \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{\mu} \left( y y_0 - \frac{y^2}{2} \right)\end{aligned}$$

A velocidade média é dada por:

$$V_m = \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} v_x dy = \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{\mu} \int_0^{y_0} \left( y y_0 - \frac{y^2}{2} \right) dy = \frac{\rho g y_0^2 \operatorname{sen} \theta}{3\mu} \quad (7.20)$$

A eq. (7.19) pode ser integrada diretamente e fornece a distribuição vertical de pressões ao longo da lâmina de fluido:

$$dp = -\rho g \cos \theta dy \implies p = -\rho g \cos \theta y + C$$

Determinamos o valor da constante de integração  $C$  impondo que a pressão seja igual a  $p_{atm}$  na superfície livre:

$$p_{atm} = -\rho g \cos \theta y_0 + C \implies C = p_{atm} + \rho g \cos \theta y_0$$

Portanto:

$$p = p_{atm} + \rho g \cos \theta (y_0 - y)$$

Cabe notar que a distribuição de pressões é a mesma que se obtém no caso de fluido em repouso. Essa situação ocorre quando a componente vertical de velocidades e suas derivadas podem ser desprezadas.

Passamos à determinação do campo de temperaturas. Fazemos a hipótese de que, assim como o campo de velocidades, o de temperaturas também não depende de  $x$ . Como a componente  $v_y$  da velocidade é igual a zero, a equação da temperatura se reduz a:

$$\frac{1}{\rho C_p} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho C_p} \frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \implies \frac{d^2 T}{dy^2} = -\frac{1}{\kappa} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

A função dissipação é dada por:

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \tau_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x_x} + \tau_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial x_y} + \tau_{yx} \frac{\partial v_y}{\partial x_x} + \tau_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial x_y}$$

Como  $v_y \equiv 0$  e  $v_x = v$  é função de  $y$  somente, a função dissipação se reduz a:

$$\Phi = \tau_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial x_y} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 = \frac{(\rho g \operatorname{sen} \theta)^2}{\mu} (y_0 - y)^2$$

Portanto:

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = -\frac{(\rho g \operatorname{sen} \theta)^2}{\mu \kappa} (y_0^2 - 2y_0 y + y^2)$$

Integrando uma vez temos:

$$\frac{dT}{dy} = C_1 - \frac{(\rho g \operatorname{sen} \theta)^2}{\mu \kappa} \left( y_0^2 y - y_0 y^2 + \frac{y^3}{3} \right)$$

A primeira condição de contorno para o campo de temperaturas permite definir o valor da derivada do mesmo em  $y = 0$ , na direção normal à placa, através do fluxo de calor imposto ao escoamento. Por uma questão de conveniência, denomina-se de convecção o mecanismo de transferência de calor de um corpo para um fluido em movimento. Convecção não é na realidade um novo mecanismo de transferência de calor, pois sendo a velocidade do escoamento junto à placa igual a zero a transferência de calor da mesma para a primeira camada de fluido se faz por *condução*. Da mesma forma, a transferência de calor entre duas camadas adjacentes de fluido se faz igualmente por condução uma vez que a diferença de velocidades entre ambas é igual a zero. Podemos portanto aplicar a lei de Fourier para o fluxo de calor transferido da placa à primeira camada de fluido:

$$q_0 = -\kappa \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} = -\kappa C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = -\frac{q_0}{\kappa}$$

Integrando outra vez:

$$T = C_2 - \frac{q_0}{\kappa} y - \frac{(\rho g \operatorname{sen} \theta)^2}{\mu \kappa} \left( y_0^2 \frac{y^2}{2} - y_0 \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{12} \right)$$

A segunda condição de contorno é dada pelo valor especificado para a temperatura na superfície livre do escoamento,  $T = T_1$ . Obtemos:

$$C_2 = T_1 + \frac{q_0}{\kappa} y_0 + \frac{(\rho g \operatorname{sen} \theta)^2}{\mu \kappa} \frac{y_0^4}{4}$$

A expressão do campo de temperaturas é portanto:

$$T = T_1 + \frac{q_0}{\kappa} (y_0 - y) + \frac{(\rho g y_0^2 \operatorname{sen} \theta)^2}{\mu \kappa} \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{y_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{y}{y_0} \right)^3 - \frac{1}{12} \left( \frac{y}{y_0} \right)^4 \right]$$

ou, utilizando a velocidade média,  $V_m$ :

$$T = T_1 + \frac{q_0}{\kappa} (y_0 - y) + 3 \frac{\mu V_m^2}{\kappa} \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{y_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{y}{y_0} \right)^3 - \frac{1}{12} \left( \frac{y}{y_0} \right)^4 \right] \quad (7.21)$$

Esta última expressão mostra que a dissipação viscosa cresce com o quadrado da velocidade média do escoamento. O perfil de temperaturas desprezando a dissipação viscosa é dado por:

$$T = T_1 + \frac{q_0}{\kappa} (y_0 - y)$$

A temperatura junto à superfície da placa é dada por:

$$T = T_1 + \Delta T_{conv}$$

onde  $\Delta T_{conv} = q_0 y_0 / \kappa$  é a elevação de temperatura entre as superfícies superior e inferior da lámina de fluido, sem levar em conta a dissipação viscosa, isto é, considerando apenas o aquecimento devido ao fluxo de calor de convecção imposto,  $q_0$ . Reescrevemos o perfil de temperaturas dado pela Eq. (7.21) em forma adimensional. Para isso passamos o termo  $T_1$  para o membro esquerdo e dividimos o resultado por  $\Delta T_{conv} = q_0 y_0 / \kappa$ . Obtemos:

$$\frac{T - T_1}{\Delta T_{conv}} = 1 - \frac{y}{y_0} + 3 \frac{\mu V_m^2}{q_0 y_0} \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{y_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{y}{y_0} \right)^3 - \frac{1}{12} \left( \frac{y}{y_0} \right)^4 \right]$$

O fator:

$$\frac{\mu V_m^2}{q_0 y_0} = Br$$

denomina-se *número de Brinkman*. Trata-se de um adimensional que mede a importância do aquecimento devido aos efeitos viscosos, com relação ao aquecimento devido apenas à convecção. Utilizando a definição do número de Brinkman obtemos para o perfil adimensional de temperaturas:

$$\frac{T - T_1}{\Delta T_{conv}} = 1 - \frac{y}{y_0} + 9Br \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{y_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{y}{y_0} \right)^3 - \frac{1}{12} \left( \frac{y}{y_0} \right)^4 \right]$$

Concluindo a discussão do problema calcularemos agora o coeficiente de transferência de calor por convecção  $h$  e do *número de Nusselt*,  $Nu = hy_0 / \kappa$ . Conforme já tivemos a oportunidade de comentar, convecção *não* é um novo mecanismo de transferência de calor, mas uma conveniência, frequentemente usada em engenharia. Procuramos justificar esta afirmativa. O coeficiente  $h$  é definido através da relação:

$$q_0 = h(T_{sup} - T_{fluido}) \quad (7.22)$$

onde  $T_{sup}$  é a temperatura da superfície com a qual o fluido troca calor e  $T_{fluido}$  é a temperatura característica do fluido. Em muitos problemas de engenharia essa última é a temperatura fora da *camada limite* (ver capítulo 8), ou simplesmente, a temperatura do fluido. Essa definição permite contornar o problema do cálculo da componente do gradiente de temperaturas junto à superfície, na direção normal à mesma, que, como vimos na discussão acima, requer que se determine *a priori*, os campos hidrodinâmico e de temperaturas. O conhecimento completo desses campos resulta em uma descrição excessivamente completa dos mesmos, em muitos casos difícil e desnecessária. Por isso, utiliza-se o conceito de convecção, com o fluxo de calor sendo calculado pela expressão acima.

Como no problema em discussão a temperatura do fluido varia ao longo de toda a espessura da lâmina, definimos o coeficiente de transferência de calor por convecção  $h$  pela relação:

$$q_0 = h(T_{sup} - T_m) \quad (7.23)$$

onde  $T_m$  é a temperatura média do escoamento, definida pela relação:

$$\dot{m}C_p T_m = \int_0^{y_0} \rho C_p v_x T dy$$

Donde obtemos:

$$T_m = \frac{\int_0^{y_0} \rho C_p v_x T dy}{\int_0^{y_0} \rho C_p v_x dy} = \frac{\int_0^{y_0} T v_x dy}{\int_0^{y_0} v_x dy} = \frac{\int_0^{y_0} \left( T_1 + \frac{q_0 y_0}{\kappa} - \frac{q_0 y}{\kappa} \right) \left( yy_0 - \frac{y^2}{2} \right) dy}{\int_0^{y_0} \left( yy_0 - \frac{y^2}{2} \right) dy}$$

Desenvolvendo as integrais:

$$T_m = T_1 + \frac{q_0 y_0}{\kappa} - \frac{q_0}{\kappa} \frac{\int_0^{y_0} \left( y^2 y_0 - \frac{y^3}{2} \right) dy}{\int_0^{y_0} \left( yy_0 - \frac{y^2}{2} \right) dy} = T_{sup} - \frac{q_0 y_0}{\kappa} \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{8}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = T_{sup} - \frac{5}{8} \frac{q_0 y_0}{\kappa}$$

Portanto:

$$q_0 = \frac{8}{5} \frac{\kappa}{y_0} (T_{sup} - T_m) \quad \rightarrow \quad h = \frac{8}{5} \frac{\kappa}{y_0} \quad \text{e} \quad Nu = \frac{h y_0}{\kappa} = \frac{8}{5}$$

Podemos interpretar o número de Nusselt como uma medida da intensificação da transferência de calor de uma superfície para um fluido, quando o aquecimento provoca a movimentação do fluido. Para o caso do fluido em repouso, o número de Nusselt é igual a 1. Justificamos essa afirmativa:

Consideremos o caso de uma fina lâmina de fluido, de espessura  $e$ , confinada entre duas superfícies horizontais. A superfície superior é mantida à temperatura  $T$  e a inferior, a  $T + \Delta T$  (Problema de Bénard). Se o fluido estiver em repouso, pode-se tratá-lo, para fins de cálculo do fluxo de calor que o atravessa, como um sólido e a lei de Fourier se aplica. O fluxo de calor no estado condutivo é dado por:

$$q_{cond.} = \kappa \frac{\Delta T}{d}$$

O aquecimento da superfície inferior leva a uma situação instável, em que as camadas de fluido de menor massa específica se encontram em baixo e as mais densas, em cima. Quando o gradiente adimensional de temperaturas, representado pelo número de Rayleigh, ultrapassa

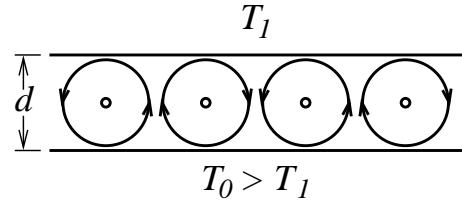


Figura 7.4: Formação de células de convecção de Bénard em uma fina lâmina de fluido aquecida por baixo.

um valor crítico, o estado de repouso torna-se instável a pequenas perturbações, que estão sempre presentes, e formam-se células de convecção, conforme esquematizado na Fig. (7.4). Havendo convecção, o fluxo de calor é calculado por:

$$q_{conv.} = h\Delta T$$

onde  $h$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção. Dividindo esse fluxo pelo de condução encontramos:

$$\frac{q_{conv.}}{q_{cond.}} = \frac{hd}{\kappa} = Nu$$

o que demonstra que o número de Nusselt representa a intensificação da transferência de calor, em virtude do movimento do fluido.

## 7.4 Escoamento de Couette

Consideramos o escoamento permanente de um fluido newtoniano viscoso, incompressível, entre duas placas horizontais paralelas sendo que a superior se desloca com velocidade  $U_\infty$  conforme Fig. (7.5). A placa inferior é isolada termicamente, de modo que não haja transferência de calor entre o fluido e a mesma. A placa superior é mantida na temperatura  $T_\infty$ .

Estabelecemos as equações do movimento, da temperatura e determinamos os perfis de velocidades e de temperatura para o caso incompressível.

O escoamento é bidimensional, em regime permanente. Nesse caso, as equações da continuidade, de Navier-Stokes e da temperatura tomam a forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) - g \\ v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{\rho C_p} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p} \end{aligned}$$

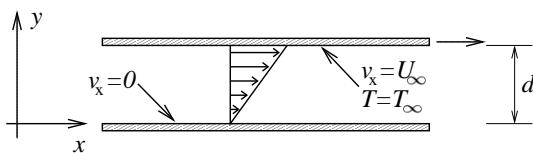


Figura 7.5: Escoamento de Couette entre duas placas planas horizontais.

Como no caso do escoamento em uma placa inclinada, todas as derivadas em relação a  $x$  devem ser anuladas. Consequentemente a equação da continuidade se reduz a  $\partial v_y / \partial y = 0$ . Como  $v_y = 0$  junto à superfície inferior e não varia com  $y$  concluímos que esta componente da velocidade é identicamente nula em todo o campo. Cabe notar que no caso de fluido incompressível a massa específica não depende da temperatura. Em consequência as equações da continuidade e de Navier-Stokes podem ser resolvidas independentemente da equação

da temperatura. Uma vez conhecido os campos de velocidade e de pressão, determina-se o campo de temperaturas.

Obtemos a seguir o perfil de velocidades. As equações de Navier-Stokes e da temperatura simplificadas se escrevem como:

$$\nu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = 0 \quad (7.24)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = -g \quad (7.25)$$

$$\tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\kappa \nabla^2 T \quad (7.26)$$

Integrando duas vezes a primeira equação obtemos:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = C_1 \quad v_x = C_1 y + C_2$$

Para determinarmos as constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$  utilizamos as condições de contorno nas placas inferior e superior. A velocidade do escoamento junto à placa deve ser igual à velocidade da mesma. Na placa inferior ( $y = 0$ ) temos que  $v_x = 0$ . Portanto é necessário que  $C_2$  se anule. Na placa superior ( $y = d$ )  $v_x = U_\infty$ , o que implica em que  $U_\infty = C_1 d$  e  $C_1 = U_\infty/d$ . Obtemos:

$$v_x = \frac{U_\infty}{d} y$$

Integrando a Eq. (7.25) obtemos o perfil de pressões como  $p = \rho g(d - y)$ .

Desenvolvendo o termo  $\tau_{ij} \partial v_i / \partial x_j$  da Eq. (7.26) como feito na Sec. (7.3) obtemos:

$$\tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 = \mu \left( \frac{U_\infty}{d} \right)^2 = -\kappa \frac{d^2 T}{dy^2}$$

Portanto:

$$-\kappa \frac{d^2 T}{dy^2} = \mu \left( \frac{U_\infty}{d} \right)^2$$

Integrando uma vez obtemos:

$$\kappa \frac{dT}{dy} = -\mu \left( \frac{U_\infty}{d} \right)^2 y + C$$

Determinamos o valor da constante  $C$ . Na parede inferior temos que  $q_w = -\kappa dT/dy$ , onde  $q_w$  é o fluxo de calor entre o fluido e a parede. Sendo esse fluxo nulo por hipótese, a constante é igual a zero.

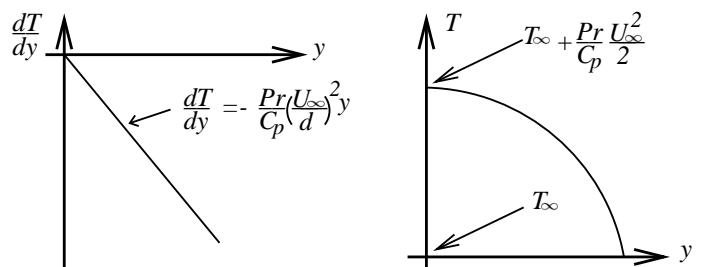


Figura 7.6: Perfis de  $dT/dy$  e de temperatura no escoamento de Couette.

O número de Prandtl é dado por:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu \rho C_p}{\rho \kappa} = \frac{\mu}{\kappa} C_p$$

Portanto  $\mu/\kappa = Pr/C_p$ . Temos então:

$$\frac{dT}{dy} = -\frac{Pr}{C_p} \left( \frac{U_\infty}{d} \right)^2 y \quad (7.27)$$

O perfil de temperaturas é obtido integrando-se a eq. (7.27):

$$T = -\frac{Pr}{C_p} \left( \frac{U_\infty}{d} \right)^2 \frac{y^2}{2} + C$$

A constante  $C$  é determinada levando-se em conta a condição de contorno  $T = T_\infty$  em  $y = d$ :

$$T_\infty = -\frac{Pr U_\infty^2}{C_p 2} + C \quad C = T_\infty + \frac{Pr U_\infty^2}{C_p 2}$$

Portanto:

$$T = T_\infty + \frac{Pr U_\infty^2}{C_p 2} \left[ 1 - \left( \frac{y}{d} \right)^2 \right]$$

A expressão acima mostra que a temperatura do fluido aumenta da placa inferior para cima. A elevação de temperatura se deve à dissipação viscosa.

Os perfis da derivada da temperatura e da temperatura encontram-se ilustrados na Fig. (7.6).

## 7.5 Escoamento Entre Duas Placas Paralelas Imóveis

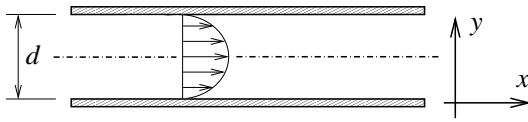


Figura 7.7: Escoamento laminar forçado entre duas placas horizontais.

Consideraremos o escoamento de um fluido viscoso e incompressível entre duas placas horizontais paralelas conforme Fig. (7.7), com fluxo de calor nulo através das mesmas e perda de carga específica,  $\partial p / \partial x$ . Esse problema difere dos dois anteriores quanto à forma com que a energia é fornecida ao escoamento de forma a compensar a dissipação viscosa. No caso do escoamento de uma lâmina de fluido sobre um placa inclinada, a energia fornecida ao escoamento provém da perda de energia potencial do fluido. No caso do escoamento de Couette, a energia é fornecida ao fluido pelo movimento da placa superior. No presente caso o movimento é mantido em virtude de um gradiente de pressão  $\partial p / \partial x$ , imposto. Outra diferença entre os dois problemas anteriores e o presente reside no fato de que naqueles, todas as derivadas em relação a  $x$  se anulam. No caso presente o perfil de velocidades não se altera ao longo de  $x$ , mas a pressão varia nessa direção.

Estabelecemos as equações que governam o campo hidrodinâmico, determinar o perfil de velocidades e a vazão volumétrica  $Q$ , para uma perda de carga específica imposta.

Como no caso escoamento de Couette o problema é bidimensional, em regime permanente. As equações da continuidade e de Navier-Stokes tomam a forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) - g\end{aligned}$$

Sendo as derivadas da velocidade em relação a  $x$  nulas, a equação da continuidade se reduz a  $\partial v_y / \partial y = 0$ , o que implica em que  $v_y$  é constante ao longo de  $y$ . Como  $v_y = 0$  junto às placas, concluímos que essa componente de velocidade é identicamente nula em todo o campo. As equações de Navier-Stokes se reduzem a:

$$\nu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7.28)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \quad (7.29)$$

A segunda equação pode ser integrada diretamente e fornece:

$$p = -\rho gy + f(x) \quad (7.30)$$

Cabe notar que (7.29) é uma equação a *derivadas parciais* e que neste caso a constante de integração pode ser substituída por qualquer função de  $x$ . Derivando a pressão (Eq. 7.30) em relação a  $x$  obtemos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f'(x)$$

isto é,  $\partial p / \partial x$  não é função de  $y$ . Face a esse resultado concluímos que o termo do membro direito da Eq. (7.28) é função de  $x$  somente, enquanto que o do membro esquerdo é função de  $y$  apenas, isto é, esta equação é da forma  $F(y) = G(x)$ . A única solução possível é termos  $F(y) = G(x) = \text{constante}$ . Consequentemente, a perda de carga específica imposta,  $\partial p / \partial x$ , deve ser constante. A Eq. (7.28) pode ser reescrita como:

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Integrando duas vezes obtemos:

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + C_1 \quad v_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

As constantes de integração são determinadas impondo-se que a velocidade se anule junto às duas placas. Consequentemente:

$$C_2 = 0 \quad 0 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{d^2}{2} + C_1 d \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{d}{2}$$

e obtemos o perfil de velocidades na forma:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y (y - d)$$

Deve-se observar que  $y$  é sempre menor do que  $d$  e que portanto  $\partial p/\partial x$  deve ser *negativo*, isto é, a pressão deve decrescer ao longo de  $x$ , para que a velocidade  $v_x$  seja positiva.

A vazão volumétrica  $Q$  é dada por:

$$Q = L \int_0^d v_x dy$$

onde  $L$  é a largura da placa. A vazão por unidade de largura é portanto:

$$\frac{Q}{L} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^d (y^2 - yd) dy = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} d \right) \Big|_0^d \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{L} = -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} d^3$$

A vazão é positiva quando  $\partial p/\partial x$  é negativo.

## 7.6 Escoamento Entre Duas Placas Paralelas sob Fluxo de Calor Constante

Complementando o tratamento dado ao problema de convecção apresentaremos uma solução exata para o problema de transferência em um canal formado por duas placas horizontais paralelas, conforme mostrado na Fig. (7.8). Consideraremos que o fluxo de calor aplicado seja constante e independente da posição. Por outro lado, desprezamos o aquecimento do fluido devido a efeitos viscosos e consideraremos que os campos de velocidade e de temperaturas estejam *completamente desenvolvidos*.

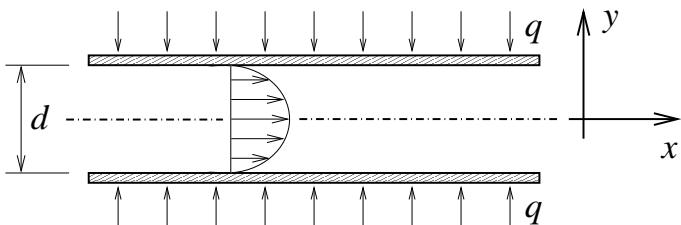


Figura 7.8: Escoamento entre duas placas paralelas sob fluxo de calor constante.

Esclarecemos inicialmente as noções de campos de velocidade e de temperatura *completamente desenvolvidos*: dizemos que o campo de velocidades é completamente desenvolvido se a velocidade não se alterar ao longo da direção do escoamento, isto é, se  $D\mathbf{v}/Dx = 0$ . A pressão normalmente diminui ao longo de  $x$  como requisito para que o escoamento se mantenha. No caso em estudo, a temperatura

do fluido aumenta necessariamente ao longo da direção do escoamento em virtude da aplicação de um fluxo de calor constante às placas. Ao entrar no canal, a temperatura das camadas de fluido mais próximas das paredes sobem mais do que a das camadas próximas ao eixo do escoamento, que se encontram mais longe da fonte de calor. À medida em que o fluido avança no canal, a evolução do perfil de temperatura da região próxima ao eixo se aproxima progressivamente da evolução de camadas situadas próximo às paredes. Dizemos que o campo de temperaturas está *completamente desenvolvido* quando  $\partial T/\partial x$  tem o mesmo valor qualquer que seja a posição ao longo da direção perpendicular ao escoamento, isto é, quando  $\partial T/\partial x \neq f(y)$ . Essas são as condições em que determinaremos os campos de velocidade e de temperatura do fluido.

As equações da continuidade, de Navier-Stokes e da temperatura, aplicáveis ao problema, tomam a forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \\ v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)\end{aligned}$$

Como  $\partial v_x/\partial x = 0$  temos, pela equação da continuidade que  $\partial v_y/\partial y = 0$ , isto é  $v_y$  é constante ao longo da direção  $y$ . Como  $v_y = 0$  junto às placas, concluímos que esta componente da velocidade é identicamente nula. Em consequência, as equações do problema se reduzem a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= \frac{dp/dx}{\mu} \\ v_x \frac{\partial T}{\partial x} &= \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)\end{aligned}$$

onde  $dp/dx$  é o gradiente de pressão ou perda de carga por unidade de comprimento imposta ao escoamento. Essa perda de carga específica é constante, conforme já discutido. A equação da componente de velocidade  $v_x$  é desacoplada da equação da temperatura e pode ser facilmente integrada.

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dy} &= \frac{dp/dx}{\mu} y + C_1 \\ v_x &= -\frac{dp/dx}{2\mu} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right)\end{aligned}\tag{7.31}$$

A vazão em massa por unidade de largura do canal (direção  $z$ ) é dada por:

$$\dot{m} = \int_{-d/2}^{d/2} \rho \frac{-dp/dx}{2\mu} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) dy = -\rho \frac{dp/dx}{2\mu} \left( \frac{d^2}{4}y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-d/2}^{d/2} = \\ -\rho \frac{dp/dx}{2\mu} \left[ \left( \frac{d^3}{8} - \frac{d^3}{24} \right) - \left( \frac{-d^3}{8} - \frac{-d^3}{24} \right) \right]$$

Tem-se portanto para a vazão em massa por unidade de largura do canal:

$$\dot{m} = -\rho \frac{dp/dx}{12\mu} d^3 \quad (7.32)$$

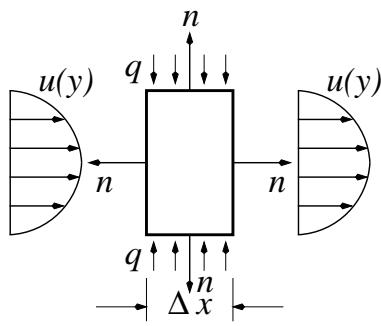


Figura 7.9: Balanço de energia em uma seção do canal de comprimento  $\Delta x$ .

Devemos determinar agora o campo de temperaturas. Iniciamos fazendo o balanço de energia em um volume de controle conforme Fig. (7.9), de comprimento  $\Delta x$ . Sendo o problema bi-dimensional fazemos o balanço por unidade de comprimento ao longo da direção  $x$ . Aplicando a forma integral da equação da energia total a esse volume infinitesimal obtemos:

$$\oint \rho \left( e + \frac{v_x^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dy = - \oint \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dy \quad (7.33)$$

Como o perfil de velocidades não se altera ao longo de  $x$  temos que:

$$\oint \rho \frac{v_x^2}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dy = 0$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \oint \rho \left( e + \frac{v_x^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dy &= \oint \rho e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dy = \\ - \int_{-d/2}^{d/2} \rho v_x C_p T dy \Big|_x &+ \int_{-d/2}^{d/2} \rho v_x C_p T dy \Big|_{x+\Delta x} + \frac{d}{dx} \int_{-d/2}^{d/2} \rho v_x C_p T dy \Delta x = \\ \frac{d}{dx} \int_{-d/2}^{d/2} \rho v_x C_p T dy \Delta x &= \rho C_p \frac{d}{dx} \int_{-d/2}^{d/2} v_x T dy \Delta x \end{aligned}$$

No que diz respeito ao balanço dos diversos fluxos de calor no elemento de volume notamos que  $dT/dx$  não varia ao longo da direção  $x$  por ser constante o fluxo de calor aplicado às paredes do canal. Consequentemente:

$$-\oint \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dy = 2q\Delta x$$

O balanço de energia torna-se então:

$$\rho C_p \frac{d}{dx} \int_{-d/2}^{d/2} v_x T dy = 2q$$

Utilizamos o balanço de energia na forma acima para definir a *temperatura média* do escoamento  $T_m$ , em um dado ponto  $x$  ao longo do canal, através da relação:

$$\dot{m} C_p \frac{dT_m}{dx} = 2q$$

onde  $\dot{m}$  é a vazão em massa por unidade de largura do canal, dada pela eq. (7.32). Como estamos considerando o caso do campo de temperaturas completamente desenvolvido, em que  $dT/dx \neq f(y)$  a derivada  $dT_m/dx$  da última equação pode ser substituída por  $dT/dx$ . Obtemos:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{2q}{\dot{m} C_p}$$

o que mostra que  $dT/dx$  é constante ao longo do canal. Substituindo  $\dot{m}$  pelo valor dado pela eq. (7.32) temos:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{24\mu q}{\rho C_p d^3 (-dp/dx)} \quad (7.34)$$

Essa equação pode ser integrada, fornecendo a distribuição de temperaturas das paredes, a partir de um ponto de referência, onde a temperatura é  $T_0$ :

$$T = T_0 + \frac{24\mu q}{\rho C_p d^3 (-dp/dx)} x \quad (7.35)$$

Passamos agora à determinação do campo de temperaturas do fluido. Como os perfis de temperatura variam linearmente ao longo de  $x$ , a equação da temperatura reduz-se a:

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

substituindo as expressões de  $v_x$  e de  $dT/dx$ , conforme Eqs. (7.31 e 7.34) obtemos:

$$\frac{\kappa}{\rho C_P} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{dp/dx}{2\mu} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) \frac{24\mu q}{\rho C_p d^3 dp/dx}$$

Desenvolvendo os termos da equação acima:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{12q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right)$$

Essa equação pode ser integrada, fornecendo a expressão da componente  $\partial T/\partial y$ , do gradiente de temperatura do fluido:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{12q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^2}{4} y - \frac{y^3}{3} \right) + f_1(x)$$

como  $-\kappa\partial T/\partial y = q \neq f_1(x)$  a função  $f_1(x)$  deve se anular. Resulta então que:

$$\frac{dT}{dy} = \frac{12q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^2}{4}y - \frac{y^3}{3} \right)$$

Integrando novamente obtemos:

$$T = \frac{12q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^2}{8}y^2 - \frac{y^4}{12} \right) + f_2(x) + C$$

A dependência do perfil de temperaturas com a posição ao longo de  $x$  é dada pela eq. (7.35). Substituindo  $f_2(x)$  obtemos:

$$T = T_0 + \frac{24\mu q}{\rho C_p d^3 (-dp/dx)} x + \frac{3q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^2}{2}y^2 - \frac{y^4}{3} \right) + C$$

A constante  $C$  é determinada a partir da condição de que o perfil de temperaturas nas paredes do canal deve ser dado pela eq. (7.35), isto é:

$$\frac{3q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^2}{2}y^2 - \frac{y^4}{3} \right) + C = 0$$

em  $y = \pm d/2$ . Obtém-se:

$$C = -\frac{3q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^4}{8} - \frac{d^4}{48} \right) = -\frac{15qd}{48\kappa}$$

O perfil de temperaturas é portanto:

$$T = T_0 - \frac{15qd}{48\kappa} + \frac{24\mu q}{\rho C_p d^3 (-dp/dx)} x + \frac{3q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^2}{2}y^2 - \frac{y^4}{3} \right) \quad (7.36)$$

Passamos à determinação da temperatura média do fluido em uma dada seção, que dada é por:

$$T_m = \frac{1}{\dot{m}C_p} \int_{-d/2}^{d/2} \rho C_p v_x T dy$$

Utilizando as expressões da vazão em massa  $\dot{m}$ , conforme eq. (7.32) e do perfil de velocidades  $v_x$ , conforme eq. (7.31) encontramos:

$$T_m = \frac{12\mu}{(-dp/dx)d^3} \int_{-d/2}^{d/2} v_x T dy = \frac{6}{d^3} \int_{-d/2}^{d/2} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) T dy$$

Substituindo a expressão do perfil de temperaturas, dada pela eq. (7.36) obtemos:

$$T_m = \frac{6}{d^3} \int_{-d/2}^{d/2} (T_p(x) + f(y)) \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) T dy$$

onde  $T_p(x)$  é a temperatura das paredes, dada pela eq. (7.35) e:

$$f(y) = -\frac{15qd}{48\kappa} + \frac{3q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^2}{2}y^2 - \frac{y^4}{3} \right)$$

Notando que:

$$\frac{6}{d^3} \int_{-d/2}^{d/2} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) dy = 1$$

temos:

$$T_m = T_p - \frac{15}{48} \frac{qd}{\kappa} + \frac{6}{d^3} \frac{3q}{\kappa d^3} \int_{-d/2}^{d/2} \left( \frac{d^2}{2} y^2 - \frac{y^4}{3} \right) \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) dy$$

Desenvolvendo os termos:

$$T_m = T_p - \frac{15}{48} \frac{qd}{\kappa} + \frac{18q}{\kappa d^6} \int_{-d/2}^{d/2} \left( \frac{d^4}{8} y^2 - \frac{7d^2}{12} y^4 + \frac{y^6}{3} \right) dy$$

Calculando a integral encontramos:

$$\begin{aligned} T_m &= T_p - \frac{15}{48} \frac{qd}{\kappa} + \frac{18q}{\kappa d^6} \left( \frac{d^4}{24} y^3 - \frac{7d^2}{60} y^5 + \frac{y^7}{21} \right) \Big|_{-d/2}^{d/2} = \\ T_p &- \frac{15}{48} \frac{qd}{\kappa} + \frac{18q}{\kappa d^6} \frac{94}{96} \frac{d^7}{280} = T_p - \frac{qd}{\kappa} \left( \frac{15}{48} - \frac{18 \cdot 392}{64 \cdot 840} \right) = T_p - 0,2492 \frac{qd}{\kappa} \end{aligned}$$

Obtém-se então:

$$T_p - T_m = 0,2492 \frac{qd}{\kappa}$$

e:

$$q = \frac{\kappa}{0,492d} (T_p - T_m)$$

Definimos o *coeficiente de transferência de calor por convecção* através da relação:

$$q = h(T_p - T_m)$$

Portanto:

$$h = \frac{\kappa}{0,492d}$$

Pode-se calcular o *Número de Nusselt*, dado por  $Nu = hd/\kappa$ , e obtém-se:

$$Nu = 4,01$$

## 7.7 Problema de Rayleigh

O problema de Rayleigh consiste da determinação do campo de velocidades induzido por uma placa horizontal infinita, inicialmente em repouso, que é posta em movimento com velocidade  $U$  no instante  $t = 0$ . Determinamos o campo de velocidades e os mecanismos

de transmissão e dissipação de energia no fluido. Esse problema também é conhecido como primeiro problema de Stokes[43, 56].

As condições de contorno do problema são:

$$\begin{aligned} y = 0 \implies v_x &= 0 & y = 0 \implies v_x &= U & y \rightarrow \infty \implies v_x &= 0 \\ t < 0 \implies v_y &= 0 & t \geq 0 \implies v_y &= 0 & \frac{\partial v_x}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Ao contrário dos problemas que abordamos anteriormente, temos desta vez um problema dependente do tempo. As equações da continuidade e de Navier-Stokes são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) - g \end{aligned}$$

Nesse caso todas as derivadas em relação a  $x$  são nulas. A equação da continuidade se reduz a  $\partial v / \partial y = 0$ , o que implica em que  $v_y$  é constante ao longo de  $y$ . Como  $v_y = 0$  junto à placa concluímos que essa componente de velocidade é identicamente nula em todo o campo. As equações de Navier-Stokes se reduzem a:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (7.37)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = g \quad (7.38)$$

A segunda equação pode ser integrada diretamente e fornece o perfil da distribuição de pressões:

$$p = -\rho gy + C$$

Não se conhece nenhuma solução analítica que satisfaça à eq. (7.37) e às condições de contorno do problema. Entretanto, essa equação pode ser reescrita, derivando-a em relação a  $y$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (7.39)$$

Tomamos a derivada da equação da componente  $v_x$  porque se conhece uma solução analítica para a equação acima na forma:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{-A}{\sqrt{t}} \exp \left( -\frac{y^2}{4\nu t} \right) \quad (7.40)$$

o que pode ser verificado substituindo-se a forma (7.40) na eq. (7.37). Adicionalmente, essa solução satisfaz às condições iniciais e de contorno aplicáveis, que são:

$$\begin{aligned} y = 0 \implies \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \infty & y \rightarrow \infty \implies \frac{\partial v_x}{\partial y} &= 0 \\ t = 0 \implies v_x &= 0 & & \end{aligned}$$

A derivada  $\partial v_x / \partial y$  é de fato a única componente do rotacional do campo de velocidades, diferente de zero, pois:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \mathbf{k}$$

O termo  $\partial v_x / \partial y$  representa portanto o rotacional, ou a *vorticidade* do campo de velocidades.

Cabem aqui algumas observações: Antes da placa ser posta em movimento a vorticidade do campo é nula, pois todas as derivadas da velocidade o são. A vorticidade surge no momento em que a placa se move. O movimento é *instantaneamente* percebido em todo o campo pois  $\partial v_x / \partial y$  é diferente de zero, para qualquer valor de  $y$  e  $t > 0$ , conforme a Eq. 7.40. Trata-se de uma propriedade de equações parabólicas (ver Sec. 6.3), como a Eq. 7.40 e decorrente da hipótese de que o meio é contínuo, o que de fato não ocorre. A descontinuidade da matéria faz com que a velocidade de propagação de pequenas perturbações seja finita.

A Eq. 7.40 mostra que a vorticidade é elevada junto à placa nos instantes iniciais, pois o denominador de  $A/\sqrt{t}$  é pequeno. Entretanto, a vorticidade decresce rapidamente à medida em que aumenta a distância da placa, nos instantes iniciais, pois  $y^2/4\nu t$  toma valores elevados e portanto  $\exp(-y^2/4\nu t)$  é muito pequeno. À medida que o tempo passa a vorticidade diminui junto à placa e se espalha pelo campo todo.

Se calcularmos:

$$\int_0^\infty \frac{\partial v_x}{\partial y} dy$$

apenas a região próxima à placa contribuirá para o resultado, pois  $\partial v_x / \partial y$  tende a zero longe da mesma. Essa integral fornece portanto uma medida da espessura da camada na qual a vorticidade é diferente de zero. Para que a mesma tenha efetivamente a dimensão física de uma espessura ou comprimento é suficiente dividirmos por um valor de referência do rotacional, que escolhemos arbitrariamente. Dividiremos por  $-A/\sqrt{t}$ , que é o valor do rotacional em  $y = 0$ .

Definimos portanto a *espessura de vorticidade*  $\delta$  como sendo:

$$\delta = \frac{1}{(\partial v_x / \partial y)_{y=0}} \int_0^\infty \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \quad (7.41)$$

O valor dessa integral pode ser calculado, substituindo-se o integrando pelo valor dado pela eq. (7.40):

$$\delta = \frac{1}{-A/\sqrt{t}} \int_0^\infty \frac{-A}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) dy = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) dy$$

Fazendo-se a transformação de variáveis  $\eta^2 = y^2/(4\nu t)$ , isso é  $\eta = y/(2\sqrt{\nu t})$  temos que  $d\eta = dy/(2\sqrt{\nu t})$ , ou  $dy = (2\sqrt{\nu t}) d\eta$ . Portanto:

$$\delta = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) dy = \int_0^\infty \exp(-\eta^2)(2\sqrt{\nu t}) d\eta = (2\sqrt{\nu t}) \int_0^\infty \exp(-\eta^2) d\eta$$

A última integral é igual a  $\sqrt{\pi}/2$  e portanto:

$$\delta = \sqrt{\pi\nu t} \quad (7.42)$$

isso é, a espessura de vorticidade aumenta com a raiz quadrada do tempo. Essa grandeza mede de fato a espessura da *camada limite* que se desenvolve acima da placa.

A velocidade com que a espessura de vorticidade aumenta é dada por:

$$c = \frac{d\delta}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\pi\nu t} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\nu}{t}} \quad (7.43)$$

O resultado acima possibilita que apresentemos duas interpretações para o número de Reynolds.

Consideremos a Eq. (7.42) e fazemos a transformação  $t = x/U$ , onde  $U$  é a velocidade da placa. Essa transformação corresponde a estudarmos de forma aproximada o escoamento de um fluido que se aproxima com velocidade uniforme  $U_\infty$  de uma placa plana semi-infinita com origem em  $x = 0$ . O problema se encontra esquematizado na Fig. (7.10) A vorticidade nesse caso é gerada essencialmente na direção perpendicular à placa. Uma partícula de fluido localizada em um plano vertical situado a uma distância  $x$  da origem da placa em movimento recebe o sinal de aumento da vorticidade desde o tempo  $t = x/U$ . A espessura de vorticidade ou da camada limite toma a forma:

$$\delta = \sqrt{\pi\nu t} = \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

Consequentemente:

$$\frac{x}{\delta} = x \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Ux}{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Re}$$

onde  $Re$  é o número de Reynolds. Essa igualdade pode ser reescrita como:

$$Re = \pi \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \quad (7.44)$$

isso é, o número de Reynolds é proporcional ao quadrado da relação entre a dimensão característica de um corpo que se desloca imerso em um fluido viscoso e a espessura da camada limite existente em torno do corpo.

A segunda interpretação do número de Reynolds é feita considerando-se a expressão

Figura 7.10: Campo de velocidades sobre uma placa plana semi-infinita sobre a qual incide um escoamento com velocidade  $U_\infty$ .

da velocidade de crescimento da espessura de vorticidade ou da camada limite. Fazendo-se a substituição  $t = x/U$  na eq. (7.43) obtemos:

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\nu}{t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}$$

Consequentemente:

$$\frac{U}{c} = U \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{x}{\nu U}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Ux}{\nu}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Re}$$

ou ainda:

$$Re = \frac{\pi}{4} \left( \frac{U}{c} \right)^2$$

isso é, o número de Reynolds é proporcional ao quadrado da relação entre a velocidade do escoamento e a velocidade de difusão da vorticidade.

Procedemos agora à determinação da constante  $A$ , da expressão da vorticidade (Eq. 7.40). Para isso utilizamos o teorema de Stokes, segundo o qual:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (7.45)$$

Tomamos a superfície  $S$  como um retângulo com um dos lados apoiado sobre a placa em movimento e o lado oposto em  $y \rightarrow \infty$ , conforme Fig. (7.11). A superfície  $S$  é limitada pela curva  $C$ . Seja  $L$  o comprimento de cada um desses lados. Os outros dois lados do retângulo são perpendiculares à velocidade. Calculamos inicialmente o lado esquerdo da Eq. (7.45): A integral sobre os dois lados verticais do retângulo é nula por serem os mesmos perpendiculares à velocidade. A integral sobre o lado horizontal localizado em  $y = \infty$  também é nula pois  $v_x = 0$  em  $y \rightarrow \infty$ . A única contribuição para a circulação provém do lado localizado sobre a placa, onde a velocidade é  $v_x = U$ . Portanto:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = UL$$

Calculamos o termo  $\int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$ . Como  $\partial v_x / \partial y$  é independente de  $x$ , temos:

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = L \int_0^\infty \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = L \frac{A}{\sqrt{\nu t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) dy$$

Fazendo novamente a mudança de variáveis  $x^2 = y^2/(4\nu t)$ , isto é  $x = y/(2\sqrt{\nu t})$  temos que  $dx = dy/(2\sqrt{\nu t})$ , ou  $dy = (2\sqrt{\nu t}) dx$ . Portanto:

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = L \frac{A}{\sqrt{\nu t}} 2\sqrt{\nu t} \int_0^\infty \exp(-x^2) dx$$

Como a última integral é igual a  $\sqrt{\pi}/2$ , temos:

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = LA\sqrt{\pi\nu} \quad (7.46)$$

Portanto:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = UL = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = LA\sqrt{\pi\nu} \quad \rightarrow \quad A = \frac{U}{\sqrt{\pi\nu}}$$

A vorticidade toma portanto a forma:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{-U}{\sqrt{\pi\nu t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right)$$

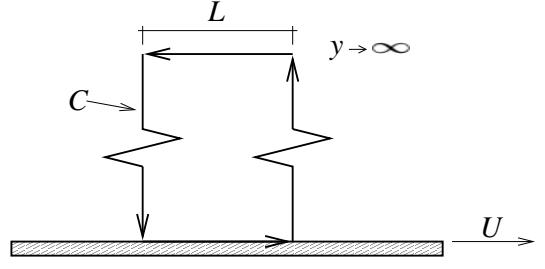


Figura 7.11: Determinação da constante  $A$ , da expressão da vorticidade, conforme Eq. (7.40).

É interessante observar que  $\int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$  é independente do tempo, conforme a eq. (7.46). Esse resultado mostra que embora a vorticidade gerada no momento em que a placa é posta em movimento se difunda por todo o campo, a *circulação* se conserva. Trata-se de fenômeno que tem analogia com a difusão da concentração de uma espécie química, onde a *massa* contida em todo o campo se conserva e com a difusão da temperatura, onde a *energia* se conserva.

Concluindo, estudamos os mecanismos de difusão e dissipação da energia cinética transmitida ao fluido pela placa em movimento.

A energia cinética contida em uma coluna de fluido de base unitária é dada por:

$$E_c(t) = \int_0^\infty \frac{\rho v_x^2}{2} dy$$

Por outro lado, a taxa de variação da energia cinética da coluna é dada por:

$$\frac{d}{dt} E_c(t) = \rho \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \frac{v_x^2}{2} dy = \rho \int_0^\infty v_x \frac{\partial v_x}{\partial t} dy$$

Substituindo  $\partial v_x / \partial t$  pela expressão dada pela eq. (7.37) obtemos:

$$\frac{d}{dt} E_c(t) = \rho \nu \int_0^\infty v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy = \mu \int_0^\infty v_x \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial y} dy$$

Integrando por partes obtemos:

$$\frac{d}{dt} E_c(t) = \mu v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_0^\infty - \mu \int_0^\infty \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 dy = -\tau_{xy} U - \mu \int_0^\infty \Phi dy$$

onde  $\tau_{xy}$  é a tensão de cisalhamento junto à placa. O termo  $\tau_{xy} U$  representa portanto a taxa de fornecimento de energia ao fluido pela placa em movimento. O último termo da igualdade acima contém a integral da função dissipação e representa portanto a perda de energia cinética da coluna de fluido em virtude dos efeitos viscosos.

## 7.8 Transferência de Calor por Convecção e Evaporação

### 7.8.1 Convecção

Os problemas de transferência de calor em engenharia envolvem com freqüência o cálculo do fluxo de calor entre superfícies sólidas e fluidos, como por exemplo o ar ou um fluido de resfriamento. Muitas vezes a temperatura da superfície é conhecida  $T_1$ , assim como a do fluido,  $T_2$ , a uma certa distância da superfície, isso é fora da *camada limite térmica*. Uma forma de abordar este problema consiste em resolver as equações da continuidade, de Navier-Stokes e da temperatura, determinar a componente do gradiente de temperatura na direção perpendicular à superfície,  $\partial T / \partial n$  e obter o fluxo de calor como sendo  $q_n = -\kappa \partial T / \partial n$ . Ao abordar o problema dessa forma obtém-se também o campo de velocidades. Esse foi o procedimento que adotamos nas seções (7.3), (7.4) e (7.6), quando abordamos

os escoamentos sobre uma placa inclinada, de Couette e do escoamento de um fluido em um canal, sob fluxo de calor constante. O procedimento é, na maior parte dos casos, muito trabalhoso e requer frequentemente o uso do cálculo numérico. Além disto, fornece um nível de descrição dos campos de temperatura e de velocidades muito maior do que o necessário. Nos problemas de transferência de calor de uma superfície para um fluido em movimento, procura-se calcular o fluxo de calor em função das temperaturas da superfície e do fluido longe da mesma. A pergunta que se faz é se é possível exprimir o fluxo de calor na forma:

$$\dot{q} = h(T_1 - T_2) \quad (7.47)$$

onde  $h$  é um coeficiente a determinar, semelhante ao definido nas seções (7.3), (7.4) e (7.6). A resposta é afirmativa. A equação acima é na verdade, uma definição do coeficiente  $h$ . Identificamos as variáveis das quais o coeficiente  $h$  depende e apresentamos algumas relações empíricas que permitem o cálculo do mesmo.

Pela importância dos processos de transferência de calor em fluidos, ou entre superfícies e fluidos, esses processos recebem o nome de *convecção*. O coeficiente  $h$  denomina-se coeficiente de transferência de calor por convecção, ou simplesmente coeficiente de convecção, de película, ou de filme.

Distingue-se três mecanismos de convecção:

1. Convecção *forçada*, quando o campo de velocidades do fluido é imposto, isso é não depende do campo de temperaturas;
2. No outro extremo, o campo de velocidades é totalmente determinado pelo campo de temperaturas. Na ausência de gradientes de temperatura, o campo de velocidades é identicamente nulo. Esse fenômeno ocorre por exemplo com o movimento de massas de ar na atmosfera, cuja massa específica se altera ao ser aquecida pelo solo. Têm-se um caso de convecção *livre*;
3. Há também casos de convecção *mista* em que o campo de velocidades imposto é alterado pelo campo de temperaturas. Como exemplo desta situação pode-se mencionar o caso de um fluido que escoa em uma tubulação horizontal aquecida por baixo. Ao campo de velocidades definido pela vazão imposta, superpõe-se correntes ascendentes e descendentes secundárias.

Outro importante mecanismo de transferência de calor é o associado à evaporação de uma substância. Esse mecanismo é largamente utilizado em sistemas biológicos, que devem rejeitar o calor gerado pelo metabolismo. No caso de seres vivos que habitam regiões quentes, a evaporação desempenha função vital pois a capacidade de rejeição por convecção diminui podendo se inverter à medida que a temperatura ambiente sobe. Nessas condições extremas os seres vivos absorvem calor por convecção e rejeitam por evaporação, de modo que o fluxo líquido de calor ainda seja voltado para fora do organismo. Como resultado destes dois processos um ser vivo consegue, dentro de certos limites, manter sua temperatura abaixo da temperatura ambiente e ainda rejeitar o calor gerado pelo metabolismo.

## 7.8.2 Correlações empíricas para a determinação do número de Nusselt

No estudo do campo de velocidades de um fluido viscoso nas proximidades de uma placa plana que é posta em movimento no tempo  $t = 0$  (problema de Rayleigh, Sec. 7.7) vimos que o numero de Reynolds pode ser interpretado como função da relação entre a dimensão característica do corpo e a espessura da camada limite hidrodinâmica,  $\delta_H$ :

$$\frac{L}{\delta_H} = a Re^{1/2} = a \left( \frac{UL}{\nu} \right)^{1/2} \quad (7.48)$$

onde  $a$  é uma constante. Utilizamos este resultado para identificar as variáveis das quais o coeficiente de transferência de calor por convecção depende.

O número de Reynolds envolve a velocidade  $U$ , característica do campo, um parâmetro característico da geometria do corpo e um parâmetro característico do fluido, a viscosidade  $\nu$ . Se substituirmos a viscosidade  $\nu$  pela difusividade térmica  $\alpha$  no número de Reynolds podemos esperar como resultado, uma estimativa da espessura da camada limite térmica,  $\delta_T$ :

$$\frac{L}{\delta_T} = a \left( \frac{UL}{\nu} \right)^{1/2} \left( \frac{\nu}{\alpha} \right)^{1/2} = a Re^{1/2} Pr^{1/2} \quad (7.49)$$

Dividindo a Eq. (7.49) pela Eq. (7.48) obtemos:

$$\frac{\delta_H}{\delta_T} = Pr^{1/2} \quad (7.50)$$

O resultado acima permite interpretar o número de Prandtl como sendo a relação entre a espessura das camadas limite hidrodinâmica e térmica. O número de Prandtl é uma propriedade física de cada fluido. Fluidos com número de Prandtl maior do que 1 desenvolvem camada limite hidrodinâmica mais espessa do que a térmica. Esse é o caso de líquidos. Gases têm, em geral, número de Prandtl próximo a um e metais líquidos têm número de Prandtl menor do que 1. Cabe ressaltar que o expoente  $1/2$ , ao qual o número de Prandtl é elevado na Eq. (7.50) aplica-se ao caso de convecção laminar sobre uma placa plana. No caso de escoamento turbulento, ou de outras configurações, o expoente acima é diferente de  $1/2$ .

Utilizamos a Eq. (7.48) para avaliar o gradiente de temperatura junto à superfície de um corpo que troca calor com um fluido em movimento. Seja  $T$  a temperatura da superfície e  $T + \Delta T$  a temperatura do fluido fora da camada limite térmica. Fazemos uma estimativa da componente do gradiente de temperatura perpendicular à superfície,  $\partial T / \partial n$ , dividindo  $\Delta T$  por  $\delta_T$ :

$$\frac{\partial T}{\partial n} \approx \frac{\Delta T}{\delta_T} = \frac{1}{L} \left( \frac{L}{\delta_T} \right) \Delta T = \frac{1}{L} (a Re^{1/2} Pr^{1/2}) \Delta T$$

Multiplicando o gradiente de temperaturas pelo coeficiente de condutividade térmica do fluido temos uma estimativa do *fluxo de calor*. Esse fluxo por seu lado, é igual a  $h \Delta T$ . Temos então:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial n} \approx \frac{\kappa}{L} (a Re^{1/2} Pr^{1/2}) \Delta T = h \Delta T$$

Dividindo a forma acima por  $\Delta T$  encontramos:

$$\frac{\kappa}{L} a Re^{1/2} Pr^{1/2} = h$$

ou:

$$Nu = \frac{hL}{\kappa} = a Re^{1/2} Pr^{1/2}$$

A fração  $Nu = hL/\kappa$  é um grupo adimensional denominado *número de Nusselt*. Os argumentos apresentados acima permitem inferir que no caso de convecção forçada, o número de Nusselt seja função dos números de Reynolds e de Prandtl, o que efetivamente ocorre. Apresentamos abaixo algumas correlações empíricas para o número de Nusselt.

No caso de corpos submersos em um campo com número de Reynolds na faixa  $10^3 < Re < 5 \times 10^4$  o número de Nusselt é dado por [22]:

$$Nu = 0,26 Re^{0,60} Pr^{0,3} \quad (7.51)$$

No caso de escoamento turbulento dentro de tubos com as camadas limite hidrodinâmica e térmica totalmente desenvolvidas, temos [36]:

$$0,5 < Pr < 1,0 \quad (\text{gases}) \quad Nu = 0,022 Re^{0,8} Pr^{0,6} \quad (7.52)$$

$$1,0 < Pr < 20 \quad (\text{água e líquidos leves}) \quad Nu = 0,0155 Re^{0,83} Pr^{0,5} \quad (7.53)$$

$$Pr > 20 \quad (\text{óleos}) \quad Nu = 0,0118 Re^{0,9} Pr^{0,3} \quad (7.54)$$

Cabe ressaltar que as correlações acima apresentadas aplicam-se a problemas de convecção em que o campo de velocidades é imposto, isto é, a problemas de convecção forçada. No caso de convecção livre, o número de Nusselt é função dos números de Rayleigh e Prandtl. O número de Rayleigh é definido como sendo  $Ra = g\beta \Delta T d^3/\alpha\nu$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\beta$ , o coeficiente de dilatação térmica a pressão constante do fluido,  $\Delta T$ , a diferença de temperaturas imposta e  $d$ , a dimensão característica do sistema.

Outras correlações empíricas para o número de Nusselt são[33]:

1. Placa vertical, convecção livre:

$$Nu = \left( 0,825 + \frac{0,387 Ra^{1/6}}{\left[ 1 + \left( \frac{0,492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right)^2$$

2. Superfície inferior de uma placa aquecida ou superfície superior de uma placa resfriada:

$$Nu = 0,27 Ra^{0,25} \quad 10^5 \leq Ra \leq 10^{10}$$

3. Superfície superior de uma placa aquecida ou superfície inferior de uma placa resfriada:

$$Nu = 0,54 Ra^{0,25} \quad 10^4 \leq Ra \leq 10^7$$

$$Nu = 0,15 Ra^{1/3} \quad 10^7 \leq Ra \leq 10^{11}$$

### 7.8.3 Transferência de calor por evaporação

O problema da determinação da quantidade de calor retirada por evaporação envolve duas questões:

- A determinação da taxa de evaporação da substância resfriada;
- O cálculo da taxa de transferência de calor associada ao processo de evaporação.

Essa última é facilmente determinada multiplicando-se a taxa de evaporação de massa pelo calor latente na temperatura em que a evaporação se faz. Assim a dificuldade maior reside na determinação da taxa de evaporação e na identificação das variáveis das quais a mesma depende. Iniciamos abordando essa questão.

Observa-se inicialmente, que há analogias importantes entre os mecanismos de transferência de calor e de massa. O calor se difunde em uma substância segundo a lei de Fourier,  $\mathbf{q} = -\kappa \mathbf{grad} T$ . De forma análoga, uma espécie química  $\mathcal{A}$  se difunde através de outra,  $\mathcal{B}$ , segundo uma lei semelhante, conhecida como Primeira Lei de Fick:

$$\mathbf{J}_{\mathcal{A}} = -\mathcal{D}_{\mathcal{AB}} \mathbf{grad} c_{\mathcal{A}} \quad (7.55)$$

onde  $\mathbf{J}$  é o fluxo da espécie  $\mathcal{A}$  em moles por unidade de área e tempo,  $c_{\mathcal{A}}$ , a concentração de  $\mathcal{A}$  em moles por unidade de volume e  $\mathcal{D}_{\mathcal{AB}}$ , a *difusividade* ou coeficiente de difusão de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{B}$ .

Viu-se que quando há transferência de calor por convecção na interface entre um sólido e o fluido em escoamento forma-se uma camada limite hidrodinâmica e outra térmica, sendo que a relação entre ambas é governada pelo número de Prandtl do fluido. A relação entre a dimensão característica do corpo e a espessura da camada limite hidrodinâmica é dada pelas Es.<sup>s</sup> (7.44 e 7.48). Analogamente, quando um fluido escoa em contato com a superfície livre de uma substância que se evapora forma-se uma camada limite de massa. As camadas mais internas do fluido se saturam da substância que se evapora enquanto que pontos distantes da interface, não afetados pela presença da substância contém a concentração contida a priori no escoamento.

Em outras palavras, a concentração ou pressão de vapor da substância que se evapora varia do valor de saturação *na temperatura da interface* até o valor encontrado em pontos distantes.

A espessura da camada limite de massa pode ser estimada substituindo-se a viscosidade do fluido (ou coeficiente de difusão da velocidade) pelo coeficiente de difusão  $\mathcal{D}_{\mathcal{AB}}$  da substância que se evapora no fluido em escoamento:

$$\frac{L}{\delta_m} = a \left( \frac{UL}{\nu} \right)^{1/2} \left( \frac{\nu}{\mathcal{D}_{\mathcal{AB}}} \right)^{1/2} = a Re^{1/2} \frac{\nu^{-1/2}}{\mathcal{D}_{\mathcal{AB}}} = a Re^{1/2} Sc^{1/2} \quad (7.56)$$

A relação  $\nu/\mathcal{D}_{\mathcal{AB}} = Sc$  denomina-se Número de Schmidt. Dividindo a Eq. (7.56) pela Eq. (7.48) obtemos:

$$\frac{\delta_H}{\delta_c} = Sc^{1/2} \quad (7.57)$$

O número de Schmidt é portanto, semelhante ao de Prandtl (Eq. 7.50) e define a relação entre a espessura das camadas limite hidrodinâmica e de concentração da espécie química transportada para o fluido. Da mesma forma com o que ocorre com o número de Prandtl (ver Sec. 7.8.2, Pág. 189), cabe ressaltar que o expoente  $1/2$ , ao qual o número de Schmidt é elevado na Eq. (7.57) aplica-se ao caso de convecção laminar sobre uma placa plana. No caso de escoamento turbulento, ou de outras geometrias, como por exemplo, no caso dos campos hidrodinâmico e de concentração que se formam sobre um disco rotatório, o expoente em questão é diferente de  $1/2$ .

Seguindo o mesmo procedimento adotado no caso transferência de calor por convecção, utilizamos o resultado acima para avaliar o gradiente de concentração na interface entre a substância que se evapora e o fluido que escoa. Seja  $c_A$  a concentração de  $\mathcal{A}$  na superfície e  $c_A + \Delta c_A$  a concentração fora da camada limite de massa.

Fazemos uma estimativa da componente do gradiente de concentração perpendicular à superfície,  $\partial c_A / \partial n$ , dividindo  $\Delta c_A$  por  $\delta_m$ :

$$\frac{\partial c_A}{\partial n} \approx \frac{\Delta c_A}{\delta_m} = \frac{1}{L} \left( \frac{L}{\delta_m} \right) \Delta c_A = \frac{1}{L} (a Re^{1/2} Sc^{1/2}) \Delta c_A$$

Multiplicando o gradiente de concentração pela difusividade  $D_{AB}$  temos uma estimativa do fluxo  $\mathbf{J}_A$  da espécie química  $\mathcal{A}$ . Esse fluxo por seu lado, é igual a  $h \Delta c_A$ . Temos então:

$$\mathbf{J}_A = D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial n} \approx \frac{D_{AB}}{L} (a Re^{1/2} Sc^{1/2}) \Delta c_A = h_m \Delta c_A$$

Dividindo a forma acima por  $\Delta c_A$  encontramos:

$$\frac{D_{AB}}{L} a Re^{1/2} Sc^{1/2} = h_m$$

ou:

$$Sh = \frac{h_m L}{D_{AB}} = a Re^{1/2} Sc^{1/2}$$

onde  $h_m$  é o coeficiente de transferência por evaporação da substância  $\mathcal{A}$ . A fração  $Sh = hL/D_{AB}$  é um grupo adimensional denominado *número de Sherwood*. Os argumentos apresentados acima permitem inferir que no caso de convecção forçada, o número de Sherwood seja função dos números de Reynolds e de Schmidt, o que efetivamente ocorre. Assim, o coeficiente de transferência de massa por convecção pode ser estimado utilizando-se as correlações empíricas já apresentadas, substituindo-se o número de Prandtl pelo de Schmidt.

No desenvolvimento acima escrevemos o fluxo  $\mathbf{J}_A$  na forma:

$$\mathbf{J}_A = h_m \Delta c_A$$

O termo  $\Delta c_A$  acima deve ser entendido com a diferença entre a concentração de saturação da substância evaporada *na temperatura da interface* e a concentração da mesma fora da camada limite de massa.

## 7.9 Escoamento Sobre um Disco Rotatório

Esta seção trata da solução clássica das equações de Navier-Stokes, descoberta por Von Kármán (1921) [41, 38, 56], que diz respeito ao campo estacionário de velocidades e pressão de um fluido incompressível com viscosidade  $\mu$ , que se desenvolve próximo ao eixo de um disco rotatório de grande diâmetro que gira com velocidade angular  $\Omega$ . Trata-se de um escoamento em que a rotação do disco impõe, em virtude da condição de não-escorregamento da camada de fluido em contato com a superfície, que a velocidade junto à mesma seja igual à velocidade do disco, isso é:

$$\mathbf{v}|_{z=0} = v_\theta \mathbf{e}_\theta = r\Omega \mathbf{e}_\theta$$

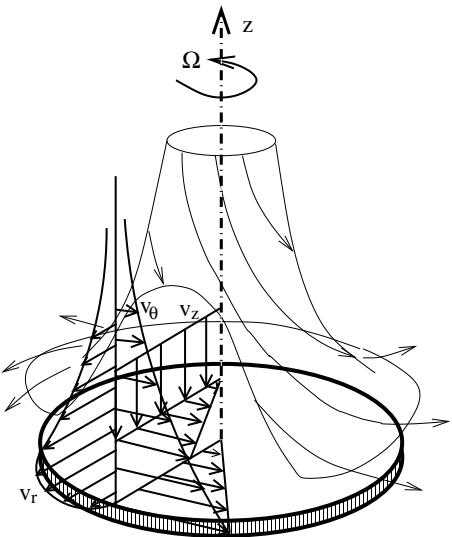


Figura 7.12: As componentes  $v_r$ ,  $v_\theta$  e  $v_z$ , do campo de velocidades na proximidade do eixo de um disco rotatório.

ocorre também em células eletroquímicas que utilizam eletrodos de disco rotatório.

O primeiro passo na solução do problema consiste em identificar a possível forma do campo de velocidades deve tomar. Inicia-se com a hipótese de que as componentes da velocidade e da pressão não dependem de  $\theta$ , isso é, todas as derivadas na direção tangencial se anulam. Supomos além disso, que  $\partial p / \partial r = 0$ . As equações da continuidade e de Navier-Stokes, escritas em coordenadas cilíndricas (Eq.<sup>s</sup> 2.7 e 3.46 a 3.48) simplificam-se e tomam a forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (7.58)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right] + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right\} \quad (7.59)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right] + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right\} \quad (7.60)$$

O movimento de rotação do fluido junto à superfície do disco tem como efeito secundário a indução pela força centrífuga, de componente radial  $v_r$ , que o impele para longe do eixo. A vazão devida à força centrífuga, que afasta o fluido para longe do eixo de rotação, deve ser repostada por outra na direção axial, que se aproxima da superfície do disco. Pelo fato de possuir uma solução exata, este problema é usado no estudo da influência de um escoamento transversal, no caso  $v_r$ , sobre a estabilidade de um campo imposto,  $v_\theta$ .

Essa situação ocorre particularmente em asas enflexadas de aviões, em que o campo de velocidades se decompõe em uma componente perpendicular à asa e em outra paralela, que tem o efeito de desestabilizar a primeira e de antecipar o ponto de transição em que a camada limite se torna turbulenta perto do bordo de ataque da asa, aumentando o arraste da mesma. Esse tipo de escoamento

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (7.61)$$

As condições de contorno para a velocidade são:

$$\left. \begin{array}{l} z = 0 : \quad v_r = 0 \quad v_\theta = r\Omega \quad v_z = 0 \\ z = \infty : \quad v_r = 0 \quad v_\theta = 0 \quad v_z = C^{te} \end{array} \right\} \quad (7.62)$$

A componente  $v_\theta$  deve portanto decrescer de valor igual ao da velocidade de rotação do disco junto à superfície do mesmo, até zero, longe do disco. Esse comportamento pode ser descrito por:

$$v_\theta = r\Omega G(z)$$

onde  $G(z)$  é uma função adimensional tal que  $G(z) = 1$  em  $z = 0$  e  $G(z) = 0$  em  $z = \infty$ . A forma desse perfil pode ser generalizada de modo a torná-lo função de uma variável  $z$  adimensionalizada que leve em conta os efeitos da velocidade angular do disco e da viscosidade do fluido. Definindo:

$$z^* = z \left( \frac{\Omega}{\nu} \right)^{1/2} \quad (7.63)$$

reescrevemos:

$$v_\theta = r\Omega G(z^*)$$

No que diz respeito à componente  $v_r$  procuramos uma solução semelhante à buscada para  $v_\theta$ , escrevendo:

$$v_r = r\Omega F(z^*)$$

onde  $F(z^*)$  é uma função adimensional que se anula na superfície do disco, longe do mesmo e passa por um máximo próximo à superfície (ver Fig. 7.12). Quanto à componente  $v_z$  e à pressão, procuramos uma solução independente de  $r$  e  $\theta$ :

$$v_z = (\nu\Omega)^{1/2} H(z^*) \quad p = \rho\nu\Omega P(z^*)$$

Em resumo:

$$v_r = r\Omega F(z^*) \quad (7.64)$$

$$v_\theta = r\Omega G(z^*) \quad (7.65)$$

$$v_z = (\nu\Omega)^{1/2} H(z^*) \quad (7.66)$$

$$p = \rho\nu\Omega P(z^*) \quad (7.67)$$

As condições de contorno para  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $P$  são:

$$\left. \begin{array}{l} z^* = 0 : \quad F = 0 \quad G = 1 \quad H = 0 \quad P = 0 \\ z^* \rightarrow \infty : \quad F = 0 \quad G = 0 \quad H = C^{te} \end{array} \right\} \quad (7.68)$$

Substituindo as Eq.s (7.64) e (7.66) na Eq. (7.58) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \Omega F(z^*)] + \frac{\partial}{\partial z} (\nu\Omega)^{1/2} H(z^*) &= 2r\Omega F + (\nu\Omega)^{1/2} \frac{dH}{dz^*} \frac{dz^*}{dz} = \\ 2\Omega F + (\nu\Omega)^{1/2} H' \left( \frac{\Omega}{\nu} \right)^{1/2} &= 2\Omega F + \Omega H' = 0 \end{aligned}$$

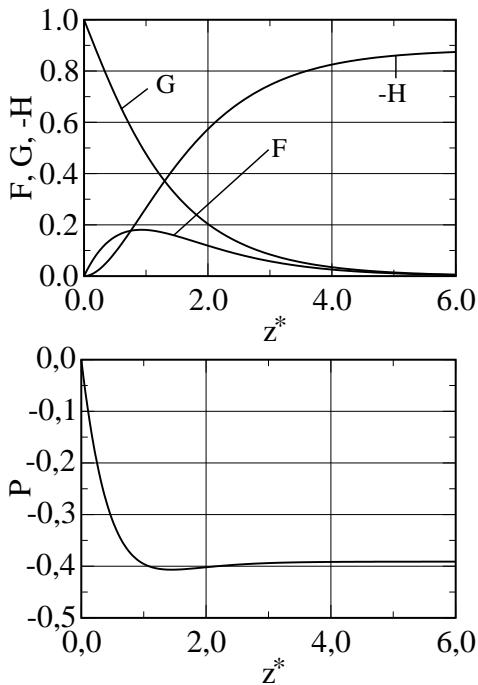


Figura 7.13: Funções adimensionais  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $P$ , que descrevem a dependência dos perfis de velocidade próximo ao eixo de um disco rotatório.

Donde obtém-se:

$$2F + H' = 0 \quad (7.69)$$

$$F^2 - G^2 + HF' = F'' \quad (7.70)$$

$$2FG + HG' = G'' \quad (7.71)$$

$$P' + HH' = H'' \quad (7.72)$$

As três primeiras equações estão desacopladas da última e podem ser resolvidas independentemente daquela. A Fig. (7.13) mostra o resultado da integração numérica das Eq.<sup>s</sup> (7.69) a (7.72). A espessura da camada limite próxima ao disco, descrita pela solução de von Kármán tem a importante propriedade de ser constante.

## 7.10 Escoamento entre Dois Discos Rotatórios Concêntricos

O campo hidrodinâmico estacionário de um fluido incompressível que se forma entre dois discos coaxiais co-rotatórios, contra-rotatórios ou com um disco parado admite solução de similaridade semelhante à encontrada por von Kármán em 1931 e apresentada na Sec. 7.9.

Sejam  $\Delta z$  a distância entre os dois discos, e  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , a velocidade angular de cada disco, respectivamente. Algumas diferenças fundamentais existem entre o problema de von Kármán e o de dois discos rotatórios coaxiais:

1. O campo hidrodinâmico confinado entre dois discos separados por uma distância característica  $\Delta z$  leva à existência de um número de Reynolds baseado nessa dimensão, mesmo quando os discos tem raio infinito. Esse número de Reynolds é dado por:

$$Re_2 = \Delta z \left( \frac{\nu}{\Omega_1} \right)^{1/2}. \quad (7.73)$$

2. Não se conhecem soluções para o campo com  $p = p(z)$  na forma da Eq. 7.67.

Os primeiros estudos sobre o problema datam de 1951 (Batchelor [2]), que estudou os casos de um disco giratório e um parado, e o dos discos girando em sentido contrário. No primeiro caso, Batchelor sugeriu que o fluido contido na maior parte do espaço compreendido

entre os dois discos giraria aproximadamente como um cilindro rígido e previu a formação de camada limite entre a região central e a superfície de cada disco. No segundo caso, Batchelor sugeriu que o corpo principal do fluido se dividiria em duas regiões, em que o fluido contido em cada uma giraria aproximadamente como cilindro rígido, com a formação de uma camada limite entre as duas regiões, além da formada próximo à superfície de cada disco.

Stewartson (1953) [61] levantou a hipótese da formação de gradientes de velocidade importantes na região central, tanto no caso de um disco parado, como na de discos contra rotatórios. Nessas condições o corpo central não giraria como um, ou como dois corpos rígidos.

Pearson (1965) [54] admitiu que a velocidade independa da coordenada azimutal  $\theta$ , a existência de perfis de similaridade representativos das componentes azimutal e axial dependentes do tempo, na forma  $G = G(z, t)$  e  $H = H(z, t)$  e de perfis de pressão da forma  $p = p(r, z, t)$ . Pearson procedeu à integração numérica das equações resultantes nos seguintes casos:

1. Um disco fixo e o outro posto em movimento impulsivo;
2. Dois discos inicialmente em repouso e postos impulsivamente em movimento, com velocidades angulares de mesma magnitude e sentido contrário;
3. Dois discos inicialmente em repouso e postos impulsivamente em movimento, com velocidades angulares de magnitude diferentes e sentido contrário.

O campo estacionário foi obtido como caso limite para tempos longos de evolução do campo transiente. Pearson observou a dependência das soluções com relação ao número de Reynolds baseado na distância entre os discos e mostrou que, para valores elevados desse parâmetro e configuração de dois discos girando em sentido oposto, com velocidades angulares de mesma magnitude, o campo de velocidades não é simétrico em relação ao ponto médio da distância entre os discos. Pearson obteve soluções em que algumas regiões do fluido giram com velocidade angular de magnitude superior à de rotação dos discos (ver Fig. 7.16 h) e também, soluções com várias células com o fluido movimentando-se no sentido do eixo de rotação de outras com o fluido afastando-se do eixo.

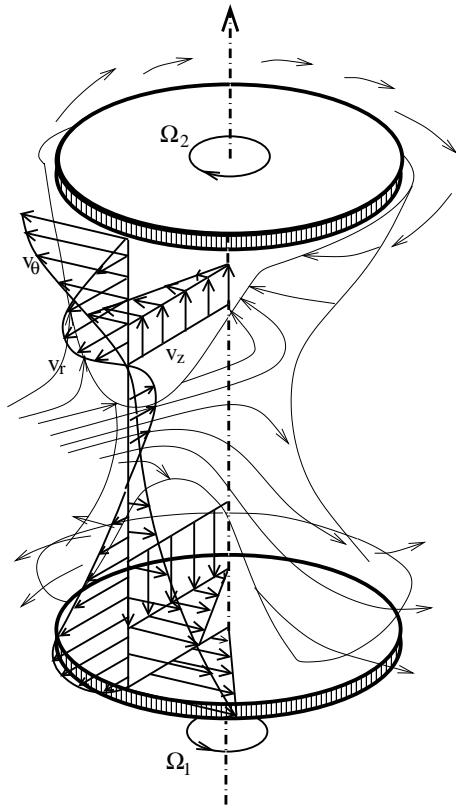


Figura 7.14: Esquema de uma das múltiplas soluções do campo de velocidades desenvolvido entre dois discos contra rotatórios, com o fluido escoando para fora por efeito centrífugo próximo ao discos e movendo-se em direção ao eixo de rotação no centro.

Holdniok *et al.* (1987, 1981) [31, 32] e Roberts & Shipman (1976) [54] confirmaram a existência de múltiplas soluções estacionárias das equações generalizadas de von Kármán, dependendo do valor do parâmetro  $\kappa$  e do número de Reynolds baseado na distância  $\Delta z$  entre os mesmos. Incluem-se nessa nova classe, soluções assimétricas em relação ao ponto médio do eixo de rotação. Outros autores, como Zandbergen (1987) [64], trataram o problema teoricamente desde então.

Gauthier *et al.* (2002) [21] e Moisy *et al.* (2004) [46] estudaram experimentalmente o campo estacionário, que satisfaz às Eq.<sup>s</sup> 7.69, 7.75 e 7.71 e a formação de estruturas que se desenvolvem a partir das primeiras instabilidades da solução do campo estacionário.

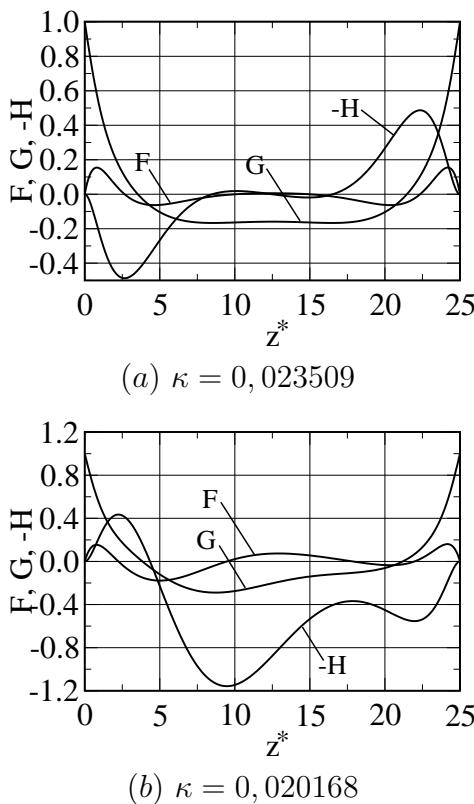


Figura 7.15: Funções adimensionais  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , que descrevem a dependência dos perfis de velocidade desenvolvidos entre dois discos corrotatórios, girando com mesma velocidade angular e separados por uma distância adimensional  $\Delta z^* = Re_2 = 25$ . (Perfis reproduzidos por Ferreira (2012)[15]).

Coube a Batchelor a generalização da solução clássica de von Kármán [41, 38, 56] incorporando o termo de dependência da pressão com a coordenada ao longo da direção radial<sup>1</sup>

$$p = \rho\nu\Omega_1 P(z^*) + \kappa\frac{1}{2}\rho r^2\Omega_1^2; \quad (7.74)$$

A equação da componente radial da conservação da quantidade de movimento, obtida levando-se em conta a pressão dada pela Eq. 7.74, toma forma diferente da Eq. 7.70, passando a escrever-se como:

$$F^2 - G^2 + HF' + \kappa = F'''. \quad (7.75)$$

As equações das componentes azimutal e radial são idênticas às Eq.<sup>s</sup> 7.71 e 7.72. As condições de contorno são:

$$\text{Em } z^* = 0 :$$

$$F = 0, \quad G = 1 \quad \text{e:} \quad H = 0$$

$$\text{Em } z^* = \Delta z \left( \frac{\Omega_1}{\nu} \right)^{1/2} :$$

$$F = 0, \quad G = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \quad \text{e:} \quad H = 0,$$

onde  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são, respectivamente, as velocidades angulares de cada disco. Os resultados da integração numérica das Eq.<sup>s</sup> 7.69, 7.75 e

<sup>1</sup>Recentemente, uma dissertação de mestrado defendida por Ferreira (2012)[15] no Programa Pós-graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais – Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação em Engenharia – COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro abordou a questão do campo hidrodinâmico entre dois discos rotatórios coaxiais, comparando as soluções obtidas por integração das Eqs. 7.69, 7.71 e 7.75, com as obtidas por integração numérica das equações tridimensionais de Navier-Stokes pelo método de Elementos Finitos. Esse autor obteve novos perfis de velocidade, dos quais alguns se encontram aqui reproduzidos.

7.71, com as condições de contorno referentes a dois discos girando no mesmo sentido e com a mesma velocidade angular, as referentes a um disco girando e outro parado e as referentes a dois discos girando em sentido oposto com velocidades angulares de mesma magnitude, encontram-se nas Fig.<sup>s</sup> 7.15 e 7.16, respectivamente. Essas figuras mostram a existência de múltiplas soluções estacionárias, comuns em sistemas cujo estado é descrito por leis não lineares (ver também Sec. 7.11).

## 7.11 Escoamento em Canais Convergentes e Divergentes

### 7.11.1 Colocação do problema

Consideramos o problemas do escoamento incompressível, estacionário e bidimensional que se desenvolve em um canal delimitado por duas placas planas convergentes ou divergentes, que formam entre si um ângulo  $\alpha$  [38, 56]. O conjunto de retas radiais que convergem para um ponto pode ser considerado como as linhas de corrente do campo hidrodinâmico. Os raios ao longo dos quais a velocidade se anula formam as paredes do canal. Admitimos que:

$$v_\theta = 0, \quad v_r = v_r(r, \theta)$$

e procuramos soluções para o campo hidrodinâmico. Trata-se de problema com apenas a componente radial da velocidade, mas no qual a pressão pode variar nas direções radial e azimutal. A vazão  $Q$  é definida por:

$$Q = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} v_r r d\theta.$$

A vazão  $Q$  pode ser negativa ou positiva. Se for positiva, a origem  $r = 0$  é uma fonte e o canal, denominado divergente. Se for negativa, a origem é um sumidouro e o canal, convergente.

### 7.11.2 Análise dimensional

Procedemos inicialmente à análise dimensional do problema, para identificar o número e as variáveis adimensionais das quais o campo hidrodinâmico depende (séries completas de produtos adimensionais – ver Apêndice A). As grandezas que intervêm nas leis que regem o comportamento estacionário do campo encontram-se na Tab. 7.1.

A lei que rege o campo hidrodinâmico no canal é da forma (ver Apêndice A):

$$(\nabla p)^{-a} = \sum C_{abcdef} U^b R^c \rho^d \nu^e \alpha^f$$

A equação acima pode ser reescrita como:

$$\sum C_{abcdef} (\nabla p)^a U^b R^c \rho^d \nu^e \alpha^f = 1 \quad (7.76)$$

A homogeneidade dimensional da Eq. 7.76 impõe restrições aos expoentes  $a, b, c, d, e$  e  $f$ . Os expoentes de cada termo da série devem ser satisfazer à equação:

$$[L^0 M^0 T^0] = [L^{-1} M T^{-2}]^a [L T^{-1}]^b [L]^c [M L^{-3}]^d [L^2 T^{-1}]^e [L^0 M^0 T^0]^f,$$

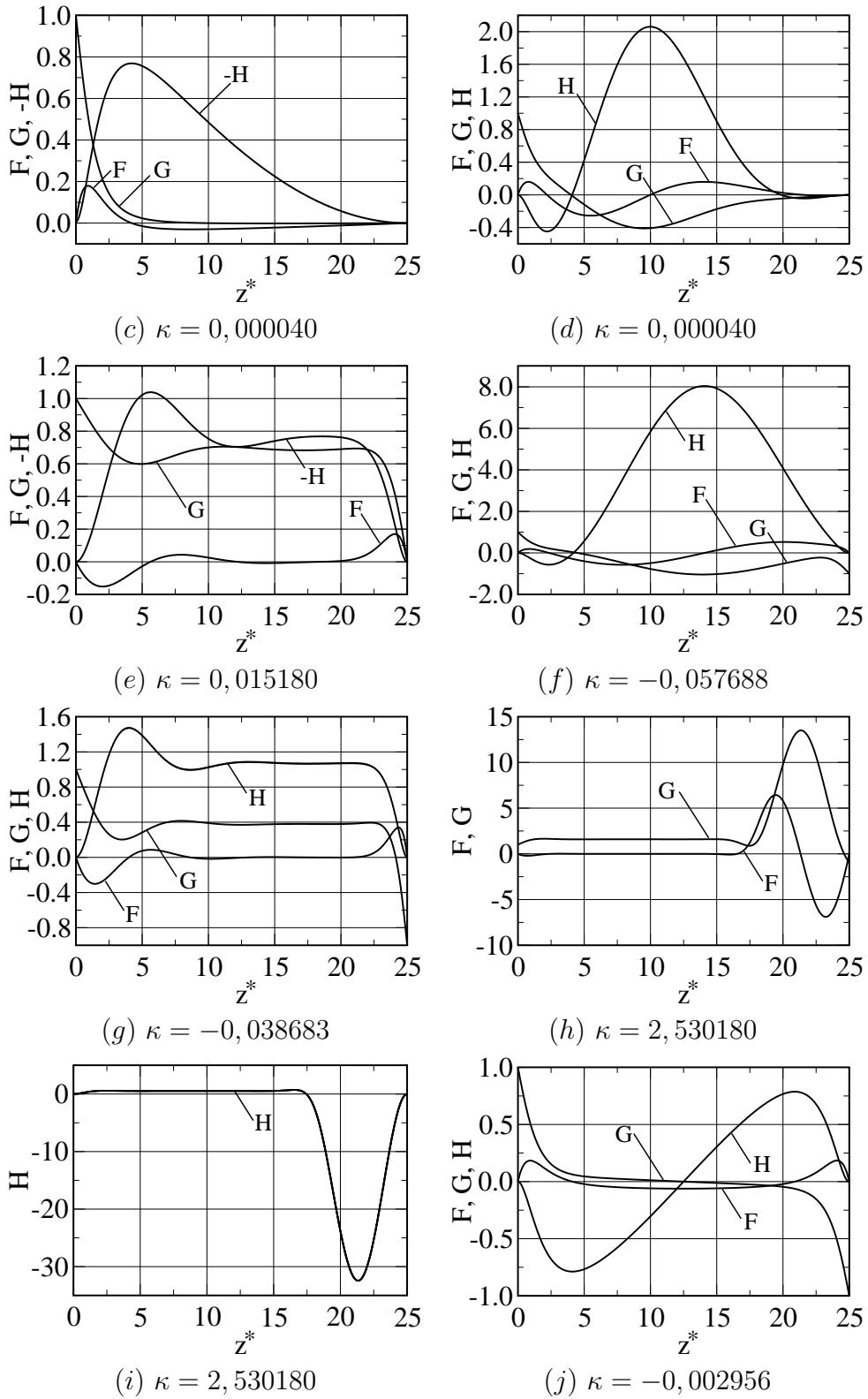


Figura 7.16: Funções adimensionais  $F$ ,  $G$  e  $H$ , que descrevem a dependência dos perfis de velocidade desenvolvidos entre um disco rotatório e outro parado (casos  $c$ ,  $d$  e  $e$ ), ou contra rotatório (casos  $f$  a  $i$ ). Nesse último caso os discos giram com velocidades angulares de mesma magnitude. Nos dois casos os discos se encontram separados por uma distância adimensional  $\Delta z^* = Re_2 = 25$ . (Perfis reproduzidos por Ferreira (2012)[15], com exceção dos mostrados em  $(g)$ , que foram obtidos por esse autor).

Tabela 7.1: Grandezas que intervêm na lei que rege o campo hidrodinâmico em canais convergentes ou divergentes: componente radial do gradiente de pressão em uma parede do canal, velocidade do escoamento em uma posição radial especificada, massa específica e viscosidade cinemática do fluido e ângulo entre as paredes do canal. As grandezas fundamentais que definem as demais têm dimensão de massa ( $M$ ), de comprimento ( $L$ ) e de tempo ( $T$ ).

Grandezas	Símbolo	Unidades
$\partial p / \partial r _{\theta=\alpha/2}$	$\nabla p$	$L^{-1}MT^{-2}$
Velocidade média no canal	$U$	$LT^{-1}$
Dimensão radial característica	$R$	$L$
massa específica	$\rho$	$ML^{-3}$
Viscosidade cinemática	$\nu$	$L^2T^{-1}$
Ângulo do canal	$\alpha$	$M^0L^0T^0$

o que requer:

$$\left. \begin{array}{l} L : -a + b + c - 3d + 2e + 0f = 0 \\ M : \quad \quad \quad a + d + 0f = 0 \\ T : \quad \quad \quad -2a - b - e + 0f = 0. \end{array} \right\} \quad (7.77)$$

A Eq. 7.77 pode ser reescrita na forma matricial, como:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz do membro esquerdo da equação acima denomina-se *matriz dimensional*. A matriz pode ser simplificada no presente caso, com a eliminação da última coluna, que é identicamente nula e do expoente  $f$ . Na prática, isso significa que não há restrições ao expoente com o qual o ângulo do canal aparece nas equações que regem o comportamento do campo hidrodinâmico. Obtém-se:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.78)$$

Procura-se os vetores de componentes  $a, b, c, d$  e  $e$ , que satisfaçam a Eq. 7.78. Das cinco colunas da matriz dimensional, apenas três são linearmente independentes. Em consequência, o espaço nulo da matriz tem dimensão dois e pode ser descrito pela combinação linear de dois vetores de base. Procuramos portanto, dois vetores de componentes  $a, b, c, d$  e  $e$ , linearmente independentes, que satisfaçam a Eq. 7.78. O vetor genérico do espaço nulo é dado por uma combinação linear dos dois elementos da base.

Pode-se interpretar a Eq. 7.78 como uma combinação das colunas da matriz dimensional, cujo resultado é o vetor zero:

$$a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.79)$$

Tomando como base do espaço varrido pelos vetores coluna da matriz dimensional, a segunda, a terceira e a quarta coluna da mesma, expressamos a primeira e a quinta colunas em função das três primeiras:

$$a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.80)$$

$$e \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.81)$$

Donde obtém-se:

$$\begin{aligned} b &= -2a & c &= 0 & d &= -a & \text{(da Eq. 7.80)} \\ b &= -e & c &= -e & d &= 0 & \text{(da Eq. 7.81)} \end{aligned}$$

O vetor genérico do espaço nulo da matriz dimensional, expresso na base formada pela segunda, terceira e quarta colunas é portanto:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -2a \\ 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -e \\ -e \\ 0 \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -2a - e \\ -e \\ -a \\ e \end{pmatrix}. \quad (7.82)$$

Substituindo-se os valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  e  $e$  na Eq. 7.76 obtém-se:

$$\sum C_{aef} (\nabla p)^a U^{-2a-e} R^{-e} \rho^{-a} \nu^e \alpha^f = 1,$$

onde  $\nabla p$  é a componente radial do gradiente de pressões em  $\theta = \alpha$ . Agrupando os fatores com mesmo expoente:

$$\sum C_{aef} \left( \frac{\nabla p}{\rho U^2} \right)^a \left( \frac{UR}{\nu} \right)^{-e} \alpha^f = 1.$$

A equação acima contém três produtos adimensionais:

$$\pi_1 = \frac{\nabla p}{\rho U^2} \quad (7.83)$$

$$\pi_2 = \left( \frac{UR}{\nu} \right) = Re \quad (7.84)$$

$$\pi_3 = \alpha, \quad (7.85)$$

onde  $Re$  é o número de Reynolds do problema. O ângulo  $\alpha$ , entre as paredes do canal pode ser desmembrado em duas parcelas, uma das quais é incorporada ao produto  $\pi_2$ . Esse produto passa a ser, portanto:

$$\pi_2 = Re = \frac{UR}{\nu} \alpha.$$

Transformando a soma dos produtos  $\pi_2$  obtidos em uma integral e substituindo a velocidade de referência  $V$  por  $v_r$ , obtém-se a vazão  $Q$  por unidade de comprimento e outra definição do número de Reynolds:

$$\pi_2 = \frac{1}{\nu} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} v_r R d\theta = \frac{Q}{\rho\nu} = Re, \quad (7.86)$$

onde  $Q$  é a vazão em massa por unidade de comprimento. A lei física à qual o campo hidrodinâmico obedece é descrita por uma relação funcional da forma:

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0.$$

A especificação de dois dos produtos adimensionais faz com que o terceiro fique automaticamente definido. O problema tem portanto, dois parâmetros que podem ser fixados arbitrariamente como, por exemplo, o número de Reynolds e o ângulo  $\alpha$ . Cabe observar que as duas definições acima conduzem a números de Reynolds que podem ser positivos ou negativos. Pode-se tomar o módulo do valor obtido, guardando-se a informação de ser o canal convergente ou divergente.

### 7.11.3 Equações do campo hidrodinâmico

Em virtude das hipóteses assumidas na Sec. 7.11.1, as Eq.<sup>s</sup> 2.7, 3.46 e 3.47 simplificam-se e tomam a forma:

$$\frac{\partial r v_r}{\partial r} = 0 \quad (7.87)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \right] \quad (7.88)$$

$$-\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0. \quad (7.89)$$

Da Eq. 7.87 vê-se que  $r v_r$  é função de  $\theta$  apenas, donde obtém-se que  $v_r \propto F(\theta)/r$ . Uma possível solução para a componente  $v_r$  consiste em adotar a constante de proporcionalidade como  $6\nu/r$ , que tem dimensão de uma velocidade. Essa solução exige que  $F(\theta)$  seja adimensional. Têm-se então:

$$v_r = 6 \frac{\nu}{r} F(\theta). \quad (7.90)$$

Substituindo essa forma na Eq. 7.89 obtém-se:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{12\nu^2}{r^2} \frac{dF}{d\theta}.$$

Integrando a última equação chega-se a:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{12\nu^2}{r^2}F + f(r). \quad (7.91)$$

Substituindo a forma da velocidade, dada pela Eq. 7.90 em 7.88, têm-se:

$$-36\frac{\nu^2}{r^2}F^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\nu F\right] + 6\frac{\nu^2}{r^3}F'',$$

onde:

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{p}{\rho} = 6\frac{\nu^2}{r^3}(F'' + 6F^2).$$

Substituindo a forma da pressão, dada por 7.91, na equação acima, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{12\nu^2}{r^2}F + f(r)\right] = -\frac{24\nu^2}{r^3}F + f'(r) = 6\frac{\nu^2}{r^3}(F'' + 6F^2).$$

Rearranjando os termos:

$$6F^2 + 4F + F'' = \frac{r^3}{6\nu^2}f'(r). \quad (7.92)$$

Como o lado esquerdo dessa equação depende apenas de  $r$  e o direito, de  $\theta$ , os dois membros da equação são constantes, que designamos como  $-K$ . Portanto,  $f'(r) = -(6\nu^2/r^3)K$  e  $f(r) = (3\nu^2/r^2)K + C$ . O campo de pressões toma a forma:

$$\frac{p}{\rho} = 12\frac{\nu^2}{r^2}F + 3\frac{\nu^2}{r^2}K + C = 3\frac{\nu^2}{r^2}(4F + K) + C.$$

Da equação acima obtém-se:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = -6\frac{\nu^2}{r^3}(4F - K). \quad (7.93)$$

Como a velocidade se anula nas paredes do canal e  $F = 0$  nesses pontos, vê-se que o valor de  $K$  é determinado pela componente radial do gradiente de pressões nas paredes do canal:

$$K = -\frac{1}{6\rho}\frac{r^3}{\nu^2}\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{\theta=\pm\alpha/2}$$

Essa componente tem o mesmo valor nas duas paredes do canal. Observa-se também da Eq. 7.93, que  $\partial p/\partial r$  pode mudar de sinal ao longo da direção  $\theta$ , devido à presença do termo  $4F$ . Substituindo a expressão de  $f'(r)$  na Eq. 7.92 encontra-se:

$$6F^2 + 4F + F'' + K = 0. \quad (7.94)$$

Multiplicando essa equação por  $F'$  e integrando:

$$2F^3 + 2F^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dF}{d\theta}\right)^2 + KF + 2C = 0$$

A última equação pode ser reescrita como:

$$\frac{dF}{d\theta} = \pm 2(-F^3 - F^2 - KF/2 - C)^{1/2} \quad (7.95)$$

ou ainda:

$$2\theta(F) = \pm \int \frac{dF}{(-F^3 - F^2 - KF/2 - C)^{1/2}} + C', \quad (7.96)$$

o que fornece a dependência da velocidade radial com  $\theta$ . As constantes  $K$ ,  $C$  e  $C'$  são determinadas das condições de contorno  $F(\pm\alpha/2) = 0$ , especificando-se o valor de  $K$ , (ou de  $\partial p/\partial r$ ) nas paredes e o ângulo do canal. Alternativamente, pode-se especificar a vazão  $Q$ , que deve ser constante em cada seção transversal do canal. A vazão é dada por:

$$Q = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} v_r r d\theta = 6\nu \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} F d\theta.$$

A grandeza  $|Q|/\nu = Re_Q$  é o número de Reynolds do problema:

$$Re = \frac{1}{6} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} F d\theta.$$

#### 7.11.4 Cálculo numérico do perfil de velocidades

Por uma questão de conveniência, redefinimos a função  $F(\theta)$ , através da relação [56]:

$$v_r = \frac{\nu}{r} F^*(\theta), \quad (7.97)$$

onde obtém-se  $F = F^*/6$ . Substitui-se a forma acima nas Eq.<sup>s</sup> 3.46 e 3.47, e obtêm-se uma  $F$ , reescrito sem o asterisco, na forma:

$$F^2 + 4F + F'' + K = 0, \quad (7.98)$$

onde a constante  $K$  é redefinida como:

$$K = -\frac{1}{\rho} \frac{r^3}{\nu^2} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (7.99)$$

e  $\partial p/\partial r$  é o gradiente de pressão nas paredes do canal ( $\theta = \pm\alpha$ ) (ver também problema 7.15). Vê-se que  $K$  é igual ao valor de  $F''$  nas duas paredes do canal. Define-se, alternativamente, o número de Reynolds pela relação:

$$Re = \frac{U_0 r}{\nu}, \quad (7.100)$$

onde  $U_0$  é o valor máximo do módulo da velocidade no ponto onde  $r = R$ . Substituindo-se a forma da velocidade, dada pela Eq. 7.97, na definição acima do número de Reynolds, vê-se que  $Re = F_{max}$ . Os perfis de velocidade mostrados nas Fig.<sup>s</sup> 7.18, 7.19 e 7.20 foram obtidos por integração numérica da Eq. 7.98, usando o método de *shooting* e um integrador do tipo Runge-Kutta de quarta ordem [55].

### 7.11.5 Canais convergentes

Consideremos o caso de um canal convergente. Fazemos a hipótese, que justificaremos adiante, de que a velocidade é sempre negativa, que o perfil decresce de forma monotônica até a linha de centro do canal e que é simétrico em relação a essa linha. Seja  $-F_0$ , com  $F_0 > 0$ , o valor de  $F$  na linha de centro do canal.  $-F_0$  é portanto, o único zero real negativo da Eq. 7.95. O polinômio da equação pode ser fatorado, fazendo-se:

$$\begin{aligned} -F^3 - F^2 - KF/2 - C &= (F + F_0) [-F^2 + AF + B] \\ &= (F + F_0) [-F^2 - (1 - F_0)F + q], \end{aligned} \quad (7.101)$$

onde  $q = C = BF_0$  e  $B = F_0(F_0 - 1) - K/2$ . Reescrevemos a Eq. 7.96:

$$2\theta = \pm \int_{-F_0}^F \frac{dF}{\{(F + F_0)[-F^2 - (1 - F_0)F + q]\}^{1/2}}, \quad (7.102)$$

com as constantes  $F_0$  e  $q$  determinadas de:

$$\alpha = \int_{-F_0}^0 \frac{dF}{\{(F + F_0)[-F^2 - (1 - F_0)F + q]\}^{1/2}} \quad (7.103)$$

$$\frac{1}{6}Re = \int_{-F_0}^0 \frac{F dF}{\{(F + F_0)[-F^2 - (1 - F_0)F + q]\}^{1/2}}, \quad (7.104)$$

onde  $Re = |Q|/\nu$ . O polinômio do denominador da Eq. 7.102 deve ser sempre positivo, para que a solução seja real. Como  $F + F_0 \geq 0$ , é necessário que:

$$p(F) = -F^2 - (1 - F_0)F + q > 0. \quad (7.105)$$

O termo  $q$  representa o negativo do produto das raízes do polinômio dado pela Eq. 7.105. Como procuramos soluções simétricas, com a velocidade  $v_r < 0$  em qualquer ponto ao longo da coordenada  $\theta$ , a única raiz negativa do polinômio deve ser  $-F_0$ . Para que a condição dada pela Eq. 7.105 seja satisfeita é necessário que a outra raiz seja positiva, o que implica em  $q > 0$  (ver Fig. 7.17) e na existência de uma raiz  $F = -F_0$ , de multiplicidade dois, do polinômio do membro direito da Eq. 7.95.

O integrando das Eq.<sup>s</sup> 7.102 a 7.104 tem a forma mostrada na Fig. 7.17. As Eq.<sup>s</sup> 7.103 e 7.104 acima admitem solução  $F_0$  e  $q$  para qualquer valor de  $\alpha$  e de  $Re$ , o que implica na existência de escoamentos simétricos e com um mínimo na linha de centro do canal.

O caso de escoamentos em canais convergentes sob alto número de Reynolds merece atenção especial. Esse caso corresponde a situações em que  $F_0$  é elevado. Nessas condições pode-se escrever:

$$2\left(\frac{1}{2}\alpha - \theta\right) = \pm \int_F^0 \frac{dF}{\{(F + F_0)[-F^2 - (1 - F_0)F + q]\}^{1/2}}.$$

O integrando é pequeno quando  $F$  difere muito de  $-F_0$ , o que ocorre próximo às paredes do canal. Em consequência, o ângulo varia  $\theta$  varia pouco nas proximidades da parede. Ao atingir valores suficientemente próximos de  $-F_0$  o integrando torna-se grande e  $\theta$  varia mais. Conclui-se que a velocidade difere pouco de seu valor na linha de centro do canal até próximo às paredes, quando cai bruscamente, formando uma fina camada limite. Fora dessa região, isso é, no centro do canal, o escoamento se aproxima da solução potencial da equação de Euler, com a velocidade independente de  $\theta$  e inversamente proporcional à coordenada radial.

Os resultados numéricos da integração da Eq. 7.98 encontram-se na Fig. 7.18.

### 7.11.6 Canais divergentes

Consideremos inicialmente, o caso de canais divergentes, com o campo hidrodinâmico simétrico e com apenas um máximo no eixo do canal. Seja  $F_0 > 0$  o valor de  $F(\theta = 0)$ . As Eq.<sup>s</sup> 7.103 e 7.104 tomam a forma:

$$\alpha = \int_0^{-F_0} \frac{dF}{\{(F_0 - F)[F^2 + (1 + F_0)F + q]\}^{1/2}} \quad (7.106)$$

$$\frac{1}{6}Re = \int_0^{-F_0} \frac{F dF}{\{(F_0 - F)[F^2 + (1 + F_0)F + q]\}^{1/2}}. \quad (7.107)$$

O termo  $F_0 - F$  do integrando da Eq. 7.106 é sempre positivo. Para que o valor da integral resulte real, é necessário que o polinômio  $F^2 + (1 + F_0)F + q$  seja positivo. O valor mínimo desse polinômio ocorre quando  $q = 0$ . Quando isso ocorre, o integrando toma o valor máximo e  $\alpha$  é máximo:

$$\alpha_{max} = \int_0^{-F_0} \frac{dF}{[F(F_0 - F)(F + F_0 + 1)]^{1/2}} \quad (7.108)$$

Examinemos o efeito de variação de  $F_0$  sobre o valor do ângulo de abertura máximo do canal. O integrando da Eq. 7.108 é dado por:

$$\frac{1}{[F(F_0 - F)(F + F_0 + 1)]^{1/2}} = f(F_0)^{-1/2}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial F_0} f(F_0)^{-1/2} &= -\frac{1}{2f(F_0)^{3/2}} \frac{\partial f}{\partial F_0} = -\frac{F(F + F_0 + 1) + FF_0 - F^2}{2[F(F_0 - F)(F + F_0 + 1)]^{3/2}} \\ &= -\frac{2FF_0 + F}{2[F(F_0 - F)(F + F_0 + 1)]^{3/2}}. \end{aligned}$$

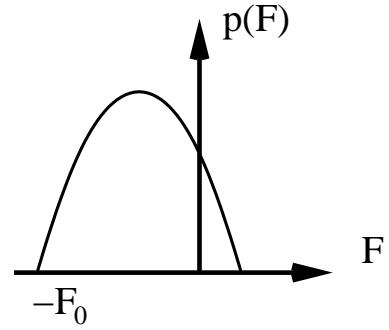
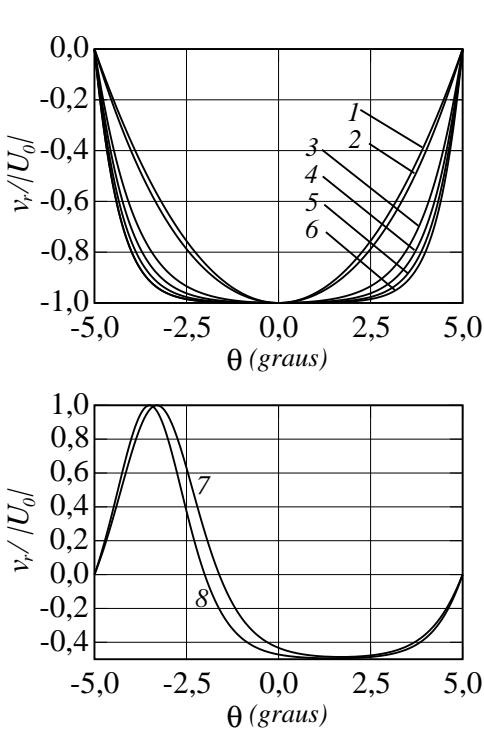


Figura 7.17: Possível forma do polinômio dado pelo membro direito da Eq. 7.105. O polinômio deve ser positivo para  $F < 0$ , de modo a assegurar que a solução das Eq.<sup>s</sup> 7.103 e 7.104 seja real. Para isso, as duas raízes do polinômio devem ter sinais contrários.



Curva	$Re$	$Re_Q$	$K = -\frac{1}{\rho \nu^2} \frac{\partial p}{\partial r} \Big _{\theta=\pm\alpha/2}$
1	35,07	4,10	$-1,000 \times 10^4$
2	230,15	27,82	$-1,000 \times 10^5$
3	2007,77	283,60	$-4,100 \times 10^6$
4	3010,29	441,26	$-9,100 \times 10^6$
5	4004,31	600,96	$-1,651 \times 10^7$
6	5000,03	762,86	$-2,500 \times 10^7$
7	6003,89	118,90	$-9,020 \times 10^6$
8	7691,99	290,96	$-1,480 \times 10^7$

Figura 7.18: Zoologia de perfis de velocidade em um canal convergente, isso é, com vazão total em direção ao vértice. O ângulo de abertura é igual a  $10^\circ$ . A variável do eixo das ordenadas é definida como a relação entre a velocidade  $v_r$  no ângulo dado no eixo das abcissas e o módulo da velocidade máxima,  $U_0$ . Ambas as velocidades são medidas em uma mesma posição radial. O número de Reynolds,  $Re$ , cujos valores são apresentados na segunda coluna da tabela acima é definido pela Eq. 7.100. O número de Reynolds mostrado na terceira coluna,  $Re_Q$ , baseia-se na vazão, conforme definido pela Eq. 7.86. Embora, no caso de canais convergentes a Eq. 7.98 admita sempre solução com um único mínimo para o valor da velocidade no centro do canal e máximo igual a zero nas paredes, encontra-se também perfis de velocidade assimétricos, com refluxo para fora do canal. No caso de campos de velocidade sem refluxo, o aumento da vazão resulta em perfis praticamente uniformes no centro do canal e no desenvolvimento de camadas limite próximo às paredes.

Como o numerador e o denominador da última expressão acima são positivos, o integrando da Eq. 7.108 diminui à medida em que  $F_0$  aumenta. Fazendo a substituição  $F = F_0 \cos^2 x$  e  $\kappa^2 = F_0/(1 + 2F_0)$  obtém-se:

$$\begin{aligned} \alpha_{max} &= \int_0^{\pi/2} \frac{2F_0 \sin x \cos x dx}{[F_0 \cos^2 x (F_0 - F_0 \cos^2 x) (F_0 \cos^2 x + F_0 + 1)]^{1/2}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2 dx}{F_0 (F_0 \cos^2 x + F_0 + 1)^{1/2}} = 2\sqrt{\frac{\kappa^2}{F_0}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 x}} \\ \alpha_{max} &= 2\sqrt{1 - 2\kappa^2} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 x}}. \end{aligned}$$

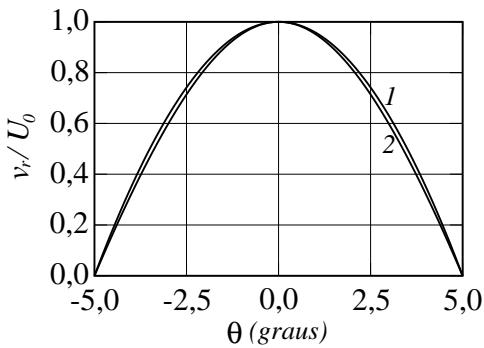
Da equação acima vê-se que  $\kappa \rightarrow 0$ , quando  $\alpha_{max} \rightarrow 0$ , isso é, que  $F_0$  e, consequentemente, o valor máximo de  $v_r$ , tendem a zero quando  $\alpha_{max} \rightarrow 0$ . A vazão máxima tende, da mesma

forma, a zero. Portanto, a ocorrência de campos de velocidade inteiramente divergentes, sem regiões de refluxo e com um único máximo, não se justifica para velocidades e vazões máximas acima de um limite. Acima desse limite, o campo de velocidades passa a admitir regiões de refluxo, um ou mais mínimos e mais de um máximo. em vários pontos ao longo da direção azimutal, a função  $F$  atinge valores tais que  $dF/d\theta = 0$  (Eq. 7.95). As Es.<sup>s</sup> 7.87 a 7.89 admitem portanto, solução simétrica e sem refluxo em canais divergentes em certas condições apenas.

A Eq. 7.98 aplica-se a qualquer tipo de campo em canais convergentes o divergentes, onde a velocidade é dada pela Eq. 7.90. Os resultados da integração numérica dessa equação encontram-se nas Fig.<sup>s</sup> 7.19 e 7.20.

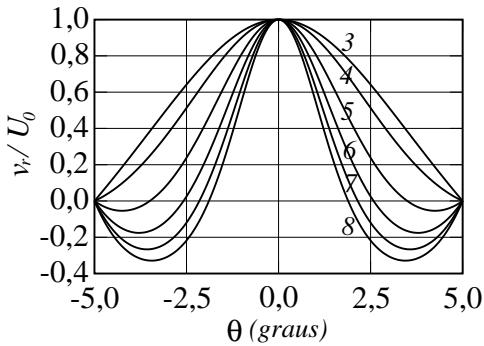
Sobre os resultados apresentados nas Fig.<sup>s</sup> 7.19 e 7.20 cabem as seguintes observações:

1. As curvas N.<sup>os</sup> 1 e 2, correspondentes a  $Re = 43,99$  e  $Re = 186,93$  respectivamente, referem-se a casos em que a velocidade radial é sempre positiva, isso é, voltada para fora do vértice em toda a largura do canal.  $K$  é positivo, o que significa que o gradiente de pressões nas paredes é negativo;
2. Aumentando-se esse gradiente de pressão chega-se, já a partir de  $Re = 512,73$  a situação em que a pressão nas paredes aumenta no sentido para fora do vértice e, no entanto, a vazão ainda é inteiramente para fora. Aumentando-se progressivamente o gradiente de pressão nas paredes, passa-se a ter um escoamento em direção ao vértice junto às mesmas e, em sentido oposto no centro do canal;
3. Embora a vazão seja sempre positiva o número de Reynolds baseado na mesma,  $Re_Q$ , deixa de ser uma função crescente da velocidade máxima, em casos onde há refluxo, como mostrado nas curvas 3 a 14. O valor crescente da velocidade máxima e a existência de refluxos produzem camadas de cisalhamento intenso. Esse cisalhamento, juntamente com a inflexão nos perfis de velocidade, tornam os perfis mostrados nas curvas 3 a 14 instáveis e, portanto, não observados na prática (ver Sec. 8.6, Pág. 249). Trata-se de casos que ilustram o fato de que uma solução das equações que regem um fenômeno físico só é observada na prática se for estável [38].

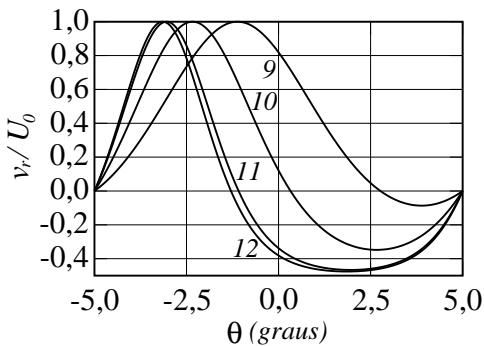


$$\text{Curva} \quad Re \quad Re_Q \quad K = -\frac{1}{\rho \nu^2} \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{\theta=\pm\alpha/2}$$

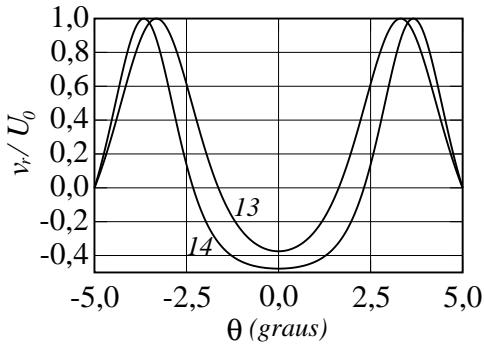
1	43,99	5,07	$1,000 \times 10^4$
2	186,93	41,93	$2,376 \times 10^4$



3	512,73	53,32	$-4,000 \times 10^4$
4	1003,15	90,35	$-3,230 \times 10^5$
5	2000,99	123,33	$-1,270 \times 10^6$
6	3002,88	119,03	$-2,575 \times 10^6$
7	4001,95	96,44	$-4,300 \times 10^6$
8	5003,76	63,95	$-6,510 \times 10^6$

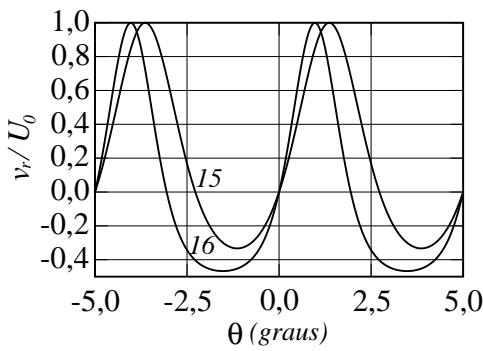


9	1507,11	210,65	$-7,000 \times 10^5$
10	2500,76	165,07	$-1,615 \times 10^6$
11	4502,23	18,76	$-1,270 \times 10^6$
12	5015,90	26,31	$-2,575 \times 10^6$



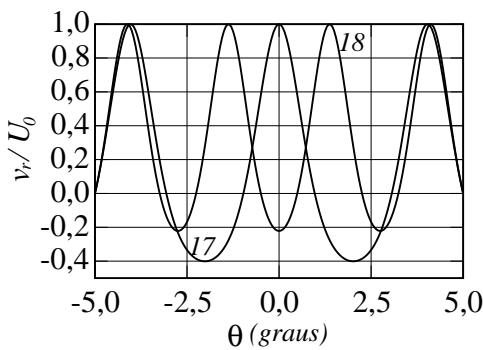
13	6209,97	641,62	$-9,850 \times 10^6$
14	9611,31	459,01	$-2,312 \times 10^7$

Figura 7.19: Zoologia dos perfis de velocidade em um canal divergente com mesma geometria do canal utilizado para os cálculos cujos resultados se encontram na Fig. 7.18 - parte I. As curvas estão ordenadas pelo valor crescente da velocidade máxima no canal, medida pelo número de Reynolds,  $Re$ . Embora a vazão seja sempre positiva o número de Reynolds baseado na mesma,  $Re_Q$ , deixa de ser uma função crescente da velocidade máxima, em casos onde há refluxo, como mostrado nas curvas 3 a 14. O valor crescente da velocidade máxima e a existência de refluxos produzem camadas de cisalhamento intenso. Esse cisalhamento, juntamente com a inflexão nos perfis de velocidade, tornam os perfis mostrados nas curvas 3 a 14 instáveis e, portanto, não observados na prática. Cabe observar que apenas nas duas primeiras curvas, o valor de  $K = F''(\pm\theta_{max})$  (Eq. 7.99) é positivo. Outros perfis de velocidade em canal divergente são mostradas na Fig. 7.20.



$$\text{Curva} \quad Re \quad Re_Q \quad K = -\frac{1}{\rho \nu^2} \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{\theta=\pm\alpha/2}$$

15	9618,34	684,43	$-2,400 \times 10^7$
16	18238,43	57,98	$-8,330 \times 10^7$



17	18606,18	1374,33	$-8,770 \times 10^7$
18	25054,83	1338,92	$-1,600 \times 10^8$

Figura 7.20: Zoologia dos perfis de velocidade em um canal divergente - parte II (ver também Fig. 7.19). Observar a vazão elevada do caso correspondente às curvas N.<sup>o</sup>s 17 e 18.

## 7.12 Problemas

- Outra formulação para o problema do escoamento laminar, que se faz sob  $Re < 1$  em torno de uma esfera, é proposta como segue: partindo das expressões de  $v_r$  e  $v_\theta$  do campo incidente mostrar que a função corrente longe da esfera é dada por:

$$\psi = \frac{W_\infty}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad (r \rightarrow \infty).$$

Mostrar que, usando a identidade  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$ , e aplicando-se o operador rotacional à Eq. 7.2, obtém-se:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0, \tag{7.109}$$

Mostrar que o campo de velocidades pode ser expresso por:

$$\mathbf{v} = \nabla \times \frac{\psi \mathbf{e}_\phi}{r \sin \theta}$$

e que o rotacional do campo é dado por:

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] \mathbf{e}_\phi.$$

Substituir a forma do rotacional do campo, acima dada, na Eq. 7.109 e obter:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \psi = 0.$$

A equação acima está sujeita às condições de contorno:

$$\begin{aligned} v_r &= v_\theta = 0 \quad \text{em:} \quad r = R \\ \psi &= \frac{W_\infty}{2} r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Mostrar que a equação da função corrente admite uma solução da forma:

$$\psi(r, \theta) = f(r) \sin^2 \theta,$$

que, por sua parte, deve satisfazer à equação:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right) f = 0.$$

Mostrar que a solução dessa última é dada por:

$$f(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4$$

e que, aplicando-se as condições de contorno obtém-se:

$$A = \frac{1}{4} W_\infty R^3, \quad B = -\frac{3}{4} W_\infty R, \quad C = \frac{W_\infty}{2} \quad \text{e:} \quad D = 0,$$

onde obtém-se para a função corrente:

$$\psi = \frac{W_\infty}{2} \left( r^2 + \frac{R^3}{2r} - \frac{3Rr}{2} \right) \sin^2 \theta.$$

As componentes da velocidade (Eq.s 7.8 e 7.9) decorrem imediatamente da função corrente acima obtida.

2. Mostrar que a velocidade de queda de uma partícula de areia na água é dada por:

$$W_\infty = \frac{2}{9} g \frac{R^2}{\nu} \frac{\Delta\rho}{\rho_f},$$

onde  $\Delta\rho = \rho_a - \rho_f$ , com  $\rho_a$  e  $\rho_f$  sendo, respectivamente, as massas específicas da areia e da água. Calcular a velocidade de queda na água, de partículas de areia com diâmetros de  $10^{-2} \text{ cm}$  e  $10^{-3} \text{ cm}$ . Considerar a viscosidade cinemática da água como sendo  $\nu = 1,0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

3. Determinar a velocidade de queda livre no ar e o número de Reynolds, de uma gotícula de água de diâmetro  $d = 0,1 \text{ mm}$ . Dados: viscosidade do ar:  $\mu = 1,85 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$ ; massa específica da água:  $\rho = 1017 \text{ kg/m}^3$ .
4. Mostrar que no caso do escoamento bi-dimensional de Stokes, regido pelas Eqs. (7.1) e (7.2), a função corrente, definida por  $v_x = \partial\psi/\partial y$ ,  $v_y = -\partial\psi/\partial x$ , satisfaz à equação:

$$\nabla^4 \psi = 0, \quad \text{onde:} \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

5. **Segundo problema de Stokes [56]:** Uma placa plana infinita imersa em um fluido incompressível com viscosidade  $\nu$  oscila em seu próprio plano com velocidade  $v_x = U \cos \omega t$ . Pede-se:

- (a) As equações do campo hidrodinâmico e as condições de contorno do problema;
  - (b) Mostrar que  $v_x = U e^{-\kappa y} \cos(\kappa y - \omega t)$ , com  $\kappa = (\omega/2\nu)^{1/2}$ , satisfaz às equações do campo e às condições de contorno;
  - (c) A distância  $\Delta y$  entre dois pontos onde a velocidade  $v_x$  tem a mesma fase.
6. Uma placa infinita, inicialmente parada, é posta em movimento no tempo  $t = 0$ , pela aplicação de uma força constante, por unidade de área da placa. A força por unidade de área, dada por:

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0}$$

é constante. Essa força movimenta o fluido acima da placa que é incompressível e de viscosidade constante. A velocidade longe da superfície  $f(\eta)$  da placa é igual a zero. Obter a distribuição de velocidades do fluido que se encontra acima da placa e a velocidade da placa, em função do tempo. Seguir o procedimento abaixo, para a obtenção das equações e das condições de contorno que o campo de velocidades obedece:

- (a) Simplificar as equações da continuidade e de Navier-Stokes;
- (b) Como considera-se o movimento impulsivo da placa, obter uma solução de similaridade da forma  $v_x = Ut^m f(\eta)$ , onde  $\eta = y/(at^n)$  e  $U, a, m$  e  $n$  são constantes a serem determinadas da condição de que a equação diferencial e as condições de contorno para  $f(\eta)$  devem ser independentes do tempo. Definir  $a^2 = 4\nu$ . Obter a equação a que  $f(\eta)$  deve obedecer e as correspondentes condições de contorno. Obter os valores de  $m$  e  $n$  e escolher o valor de  $U$  tal que  $f'(\eta = 0) = 1$ ;
- (c) Obter a solução para  $f(\eta)$ . Sugestão: obter uma solução em que  $f(\eta)$  é igual a uma potência de  $\eta$  e usar o método de variação dos parâmetros para obter uma solução geral para  $f(\eta)$ . Mostrar que a solução geral é da forma:

$$f(\eta) = -\frac{\exp(-\eta^2)}{\sqrt{\pi}} + \eta \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(\xi^2) d\xi \right];$$

- (d) Obter a solução para  $v_x(y, t)$  e o valor da velocidade da placa em termos de  $\tau_0$ ,  $\rho$ ,  $\nu$  e  $t$ .
7. Seja o campo hidrodinâmico de um fluido incompressível, com viscosidade constante, que se desenvolve entre duas placas infinitas paralelas infinitas. A placa superior se encontra em  $y = h$ , com velocidade  $v_x(y = h) = 0$ . A placa inferior oscila com velocidade  $v_x(y = 0) = U \cos \omega t$ . Pede-se:

- (a) O campo de velocidades do fluido que se encontra entre as duas placas,  $v_x(y, t)$ ;
- (b) Seja o caso limite em que  $wh^2/\nu = \varepsilon \ll 1$ . Expandir a solução em potências de  $\varepsilon$  e manter apenas o primeiro termo da série; Explicar o resultado obtido em termos físicos;

- (c) Seja o caso limite em que  $\omega h^2/\nu = \varepsilon \gg 1$ . Obter uma solução simplificada para esse caso e discutir a solução em termos físicos.
8. Mostrar que o campo de velocidades entre duas placas planas paralelas, separadas por uma lâmina de fluido de espessura  $h$ , em que a pressão varia segundo a lei [38]:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = a \exp(i\omega t) + cc,$$

é da forma:

$$v_x = \frac{ia}{\omega} \exp(i\omega t) \left( 1 - \frac{\cos \kappa y}{\cos \kappa h/2} \right) + cc,$$

com  $\kappa = (\omega/2\nu)^{1/2}$  e a origem do eixo  $y$  situada na linha de centro do canal. Mostrar que a velocidade média é dada por:

$$\bar{v}_x = \frac{ia}{\omega} \exp(i\omega t) \left( 1 - \frac{2}{\kappa h} \tan \kappa h/2 \right) + cc.$$

Seja  $\delta$  a distância da parede do canal em que a velocidade  $v_x(y=0)/v_x(y=h-\delta) = e$ . Mostrar que, se  $h/\delta \ll 1$ :

$$\bar{v}_x \approx a \exp(i\omega t) \frac{h^2}{12\nu} + cc$$

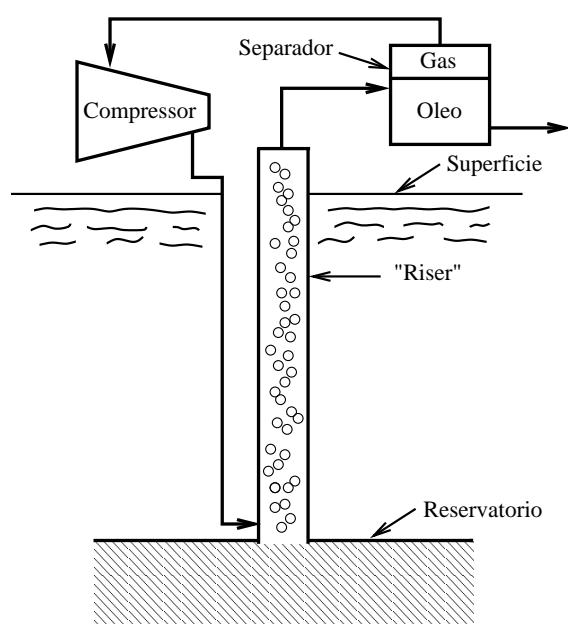
e que, se  $h/\delta \gg 1$ :

$$\bar{v}_x \approx \frac{ia}{\omega} \exp(i\omega t) + cc,$$

o que mostra que a velocidade é aproximadamente uniforme, exceto em uma fina lâmina próxima às paredes do canal.

## 9. Extração de petróleo de um poço utilizando injeção de gás (*gas lift*):

A pressão encontrada em reservatórios submarinos de petróleo, no início da vida útil dos mesmos, é normalmente maior do que a pressão hidrostática associada ao desnível entre a superfície e a saída do poço. À medida que o petróleo é extraído a pressão no poço decresce e torna-se insuficiente para propulsioná-lo até a superfície (Isso é, a pressão no poço é menor do que a pressão hidrostática da coluna de petróleo). Quando isso ocorre é necessário bombeá-lo até a superfície. A técnica de propulsão a gás (*gas lift*), esquematizada na figura ao lado é largamente utilizada em poços onde a pressão interna não é mais suficiente



para elevar o petróleo até a superfície. A técnica consiste em injetar bolhas de gás na saída do poço, reduzindo o peso da coluna de petróleo. Uma das principais vantagens da mesma consiste em evitar a instalação dispendiosa e sujeita a falhas de uma bomba na saída do poço. A técnica é usada há muitos anos e avalia-se que 40% do petróleo atualmente produzido no mundo se faça pela mesma. Recentemente propôs-se o uso de injetores de gás que produzem bolhas de pequeno diâmetro, de modo a aumentar sua eficiência. O departamento de produção de uma empresa petrolífera é solicitado pela gerência a fazer uma avaliação preliminar sobre a viabilidade da idéia e da conveniência de aprofundar os estudos sobre a mesma.

- (a) Considere a situação em que a pressão no reservatório é igual à gerada pelo peso da coluna de petróleo, da superfície até a saída do poço. Admitindo que a superfície interna do tubo (*riser*) que conduz o petróleo à superfície seja a de aço liso e seu diâmetro interno, de  $15\text{ cm}$ , estimar o porcentual de volume que o gás deve ocupar no tubo para que a velocidade no mesmo seja de  $1\text{ m/s}$ . Considere que o poço se situa a  $1000\text{ m}$  de profundidade, que o separador opera à pressão atmosférica, que a injeção do gás se faz na saída do poço e despreze perdas de carga nos tubos de gás;
- (b) Estimar a velocidade das bolhas no *riser* e a vazão de gás para as condições propostas em (a). Admitir que as características das bolhas não se alteram à medida que se movem do ponto de injeção até a superfície do mar. Considerar bolhas de diâmetro (i)  $d = 100\text{ }\mu\text{m}$  e (ii)  $d = 1000\text{ }\mu\text{m}$ ;
- (c) Estimar a potência do compressor para as condições propostas em (a) e em (b) (para os dois diâmetros). Mostrar que a potência de compressão isotérmica é dada por:

$$\dot{W} = \dot{m}\mathbf{R}T \ln p_0/p_1, \quad \text{onde:} \quad \mathbf{R} = \mathcal{R}/M$$

onde  $\dot{m}$  e  $M$  são, respectivamente, a vazão em massa do gás injetado e sua massa molecular,  $p_0$  e  $p_1$ , a pressão na entada e saída do compressor e  $\mathcal{R}$ , a constante universal dos gases perfeitos;

- (d) Uma técnica que compete com a acima proposta consiste em bombear o óleo até a superfície com bombas acionadas por motor elétrico, instaladas na saída do poço. Embora a técnica tenha se tornado mais viável nos últimos anos, é ainda muito custosa. Avaliar a potência de bombeamento do petróleo para as condições de (a);
- (e) Considere que as características das bolhas variam à medida que as mesmas são transportadas ao longo do *riser* para os dois diâmetros acima especificados. (i) obter uma expressão aproximada para a variação do diâmetro das bolhas em função da profundidade em que a mesma se encontra, (b) obter uma expressão aproximada para a variação da velocidade das bolhas em função de profundidade, desde a saída do poço até a superfície. Avaliar a velocidade de bolhas dos dois diâmetros na saída do poço, a  $500\text{ m}$  de profundidade e na superfície;
- (f) Esquematizar uma forma de levar em consideração os resultados obtidos em (e), isso é, variações das propriedades das bolhas à medida em que se elevam, para fins de cálculo da vazão de gás e da potência do compressor. Comentar sobre as

diferenças em relação aos resultados obtidos em (b) e em (c), onde as variações das propriedades das bolhas não foram consideradas.

10. Um líquido viscoso, com peso específico  $\rho g$  e coeficiente de viscosidade  $\mu$ , escoa em regime laminar permanente entre duas placas planas horizontais. A placa inferior é imóvel mantida à temperatura  $T_0$ . A placa superior move-se com velocidade  $U$  e é isolada termicamente.

Considerando que os perfis de temperatura não variam na direção  $x$  e levando em conta o aquecimento do fluido, devido à dissipação viscosa, pede-se:

- As equações dos campos de velocidades e temperatura e as condições de contorno para os mesmos;
- Os perfis de velocidade e pressão, a velocidade média do escoamento e o perfil de temperatura considerando e desprezando a dissipação viscosa;
- O fluxo de calor através da placa inferior;

Considere-se o caso em que a viscosidade do fluido obedece à lei  $\mu = \mu_0 e^{-y/d}$ , onde  $\mu_0$  é uma constante. Mostrar que os perfis de velocidade e de temperatura são dados, respectivamente, por:

$$v_x = \frac{U}{e - 1} (e^{y/d} - 1) \quad T = T_0 + \frac{\mu_0 U d}{\kappa(e - 1)} (e^{y/d} - ey - 1)$$

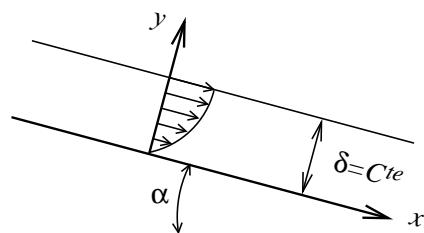
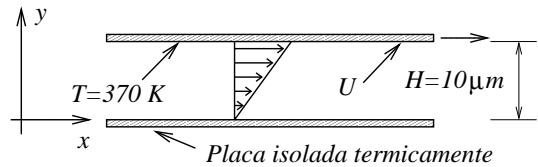
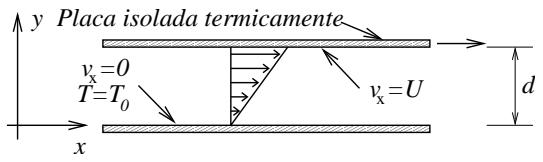
11. Considera-se o problema do aquecimento viscoso de uma película de óleo entre duas superfícies horizontais planas, sendo a distância entre ambas de  $10 \mu m$ . A superfície inferior é fixa e isolada termicamente. A superfície superior move-se com velocidade  $U$  e se encontra à temperatura de  $370 K$ .

A viscosidade e a condutividade térmica do óleo são, respectivamente,  $\mu = 0,8 \times 10^{-2} Ns/m^2$  e  $\kappa = 0,135 W/mK$ . Determinar o campo de temperaturas no óleo e a velocidade da superfície móvel, para que a temperatura o óleo não ultrapasse  $420 K$ .

12. Uma película de espessura  $\delta$ , de um fluido incompressível com massa específica  $\rho$ , escoa em regime permanente sobre uma placa inclinada, conforme figura ao lado. O coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido varia ao longo da direção  $y$ , segundo a lei:

$$\mu = \mu_0 \exp(y/\delta)$$

A superfície superior do fluido está em contato com o ar. Pede-se:

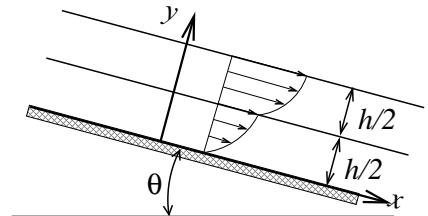
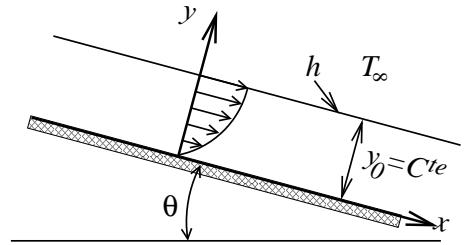


- (a) As equações do campo hidrodinâmico do problema;  
 (b) Uma expressão para o perfil de velocidades;  
 (c) A vazão por unidade de largura (direção  $z$ );  
 (d) A força  $F_x$ , por unidade de largura (direção  $z$ ), necessária manter uma placa de comprimento  $L$  em repouso.
13. Um líquido viscoso de massa específica  $\rho$  e coeficiente de viscosidade dinâmica  $\mu$  escoa sobre uma placa inclinada e isolada termicamente. A superfície superior do fluido troca calor por convecção com o ambiente que se encontra à temperatura  $T_\infty$ . O coeficiente de transferência de calor por convecção é  $h$ . Pede-se:
- (a) As equações dos campos de pressão velocidade e temperatura; justificar todas as simplificações;  
 (b) O campo de velocidades;  
 (c) O campo de temperaturas levando-se em conta a dissipação viscosa;  
 (d) A temperatura do fluido nas superfícies inferior e superior.
14. Seja o escoamento laminar e permanente de dois fluidos incompressíveis e imiscíveis sobre uma placa inclinada, infinita. O líquido inferior tem massa específica e coeficientes de viscosidade dinâmica iguais a  $\rho_1$  e  $\mu_1$ , respectivamente. A massa específica e a viscosidade do líquido superior são iguais a  $\rho_2$  e  $\mu_2$ , respectivamente. A lâmina superior de líquido está em contato com o ar. Pode-se admitir que  $\rho_{ar} \ll \rho_2$  e que  $\mu_{ar} \ll \mu_1$ . Pede-se:
- (a) As equações diferenciais e as condições de contorno que regem o campo hidrodinâmico do problema;  
 (b) Os campos de pressão e velocidades;  
 (c) A velocidade na interface entre os dois líquidos; Comparar essa velocidade com a velocidade na parede e na interface com o ar, nos limites  $\mu_1 \ll \mu_2$  e  $\mu_1 \gg \mu_2$ .
15. O campo bi-dimensional que se forma em um canal convergente ou divergente, abordado na Sec.7.11, pode ser tratado da forma exposta por Schlichting (1999) [56]. Substituir a forma da velocidade, dada pela Eq. (7.97) nas Eq.<sup>s</sup> (3.46) e 3.47, eliminar a pressão por diferenciação cruzada e mostrar que  $F$  deve satisfazer à equação:

$$2FF' + 4F' + FF''' = 0.$$

A equação pode ser integrada uma vez, resultando em:

$$F^2 + 4F + F'' + K = 0.$$

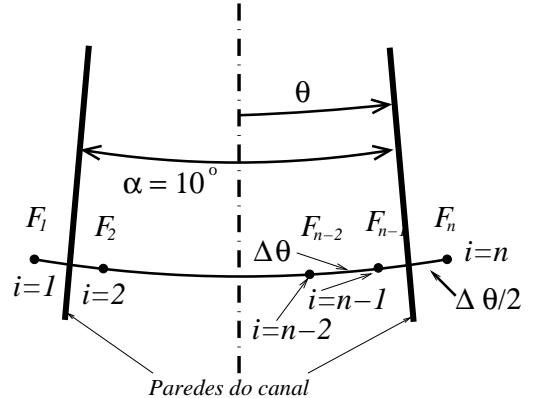


Mostrar que a constante de integração  $K$  é dada por:

$$K = -\frac{1}{\rho \nu^2} \frac{\partial p}{\partial r},$$

onde  $\partial p / \partial r$  é o gradiente de pressão nas paredes do canal ( $\theta = \pm\alpha/2$ ), onde  $F = 0$ .

Os resultados da integração da Eq. (7.98), mostrados nas Fig.s 7.18, 7.19 e 7.20 foram obtidos numericamente, por intermédio do método de *shooting*, com um integrador de *Runge-Kutta* de quarta ordem [55]. A equação pode ser resolvida, alternativamente, [55] pelo método de Newton, em uma malha de pontos deslocada (*staggered*), como mostrado na figura ao lado. A derivada espacial é representada por uma aproximação de segunda ordem no espaço, da forma:



$$F_i'' = \frac{F_{i-1} - 2F_i + F_{i+1}}{\Delta\theta}$$

As condições de contorno são  $F(\theta = \pm\alpha/2) = 0$ , que, na malha deslocada se expressam por  $F_1 + F_2 = 0$  e  $F_{n-1} + F_n = 0$ . Obtém-se um sistema de equações algébricas não lineares da forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{Z},$$

onde  $X_i = 0$  é o valor da Eq. 7.98 em cada ponto  $i$  da malha e  $\mathbf{Z}$ , o vetor zero. Assume-se um perfil inicial, em que se especifica os valores de  $F$  em todos os pontos da malha. Substituindo-se os valores desse perfil na equação acima obtém-se  $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{E}$ , onde  $\mathbf{E}$  é o vetor de erros em cada ponto da malha. Procura-se então reduzir o erro até que  $F_i / \sup F_i < \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é um valor especificado, como  $10^{-7}$ , por exemplo. Fazemos:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}) = \mathbf{Z}.$$

Se o perfil inicial estiver suficientemente próximo ao que satisfaz à equação  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{Z}$  pode-se escrever:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0) + J\Delta\mathbf{F} = \mathbf{Z} = \mathbf{E} + J\Delta\mathbf{F} = \mathbf{Z},$$

onde  $J$  é o Jacobiano cujos elementos são  $\partial X_i / \partial F_j$ , calculados no ponto  $\mathbf{X}_0$ . Usando a notação indicial:

$$E_i + \left. \frac{\partial X_i}{\partial F_j} \right|_{\mathbf{X}_0} \Delta F_j = 0,$$

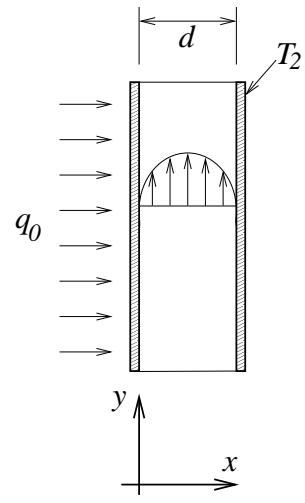
onde obtém-se a expressão para a correção a ser aplicada a cada ponto do perfil assumido inicialmente:

$$\Delta F_j = - \left( \frac{\partial X_i}{\partial F_j} \right)^{-1}_{\mathbf{X}_0} E_i.$$

A escolha de um perfil inicial suficientemente próximo do correto, que satisfaz à Eq. (7.98) é de crucial importância na resolução da mesma. Assumir um perfil parabólico inicial e reproduzir os resultados mostrados nas Fig.s 7.18, 7.19 e 7.20, começando pelos que mais se aproximam do perfil parabólico. Utilizar os valores de  $K$  indicados nas figuras.

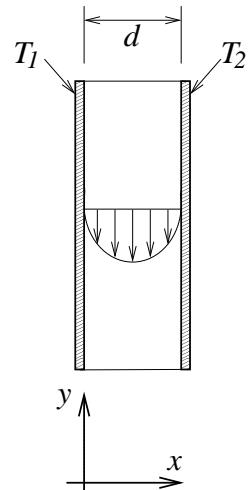
16. Um líquido viscoso de peso específico  $\rho g$  e coeficiente de viscosidade dinâmica  $\mu$  escoa entre duas placas verticais, sob a ação da gravidade e de um gradiente vertical de pressão  $\partial p / \partial y$  especificado. A placa localizada em  $x = 0$  é submetida a um fluxo de calor  $q_0$  e a localizada em  $x = d$  é mantida à temperatura  $T_2$ . Pede-se:

- (a) Obter as equações dos campos de velocidades, pressões e temperaturas;
- (b) O campo de velocidades;
- (c) O campo de temperaturas levando-se em conta a dissipação viscosa;
- (d) O fluxo de calor em  $x = d$ , levando em conta a dissipação viscosa;
- (e) O campo de temperaturas desprezando-se a dissipação viscosa;
- (f) O coeficiente de transferência de calor por convecção  $h$  e o número de Nusselt, desprezando a dissipação viscosa.



17. Um líquido viscoso, de peso específico  $\rho g$  e coeficiente de viscosidade dinâmica  $\mu$ , escoa sob a ação da gravidade entre duas placas verticais, uma delas mantida à temperatura  $T_1$  e a outra, à temperatura  $T_2$ . Pede-se:

- (a) As equações dos campos de velocidades, pressões e temperaturas;
- (b) O campo de velocidades;
- (c) O campo de temperaturas levando-se em conta a dissipação viscosa;
- (d) O fluxo de calor através das duas paredes, levando em conta a dissipação viscosa;
- (e) O campo de temperaturas, desprezando-se a dissipação viscosa;



18. Uma fina lâmina de fluido incompressível, de espessura  $\delta$ , escorre em regime permanente sobre uma parede vertical. A temperatura do fluido é uniforme, igual à da parede e igual a  $T_0$ , para  $x \leq 0$ . Em  $x = 0$  a temperatura da parede se altera para  $T = T_s$  e permanece com esse valor para  $z \geq 0$ . Pede-se:

- (a) Obter uma expressão para o campo de velocidades;
- (b) Mostrar que a equação da temperatura se reduz a:

$$v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2};$$

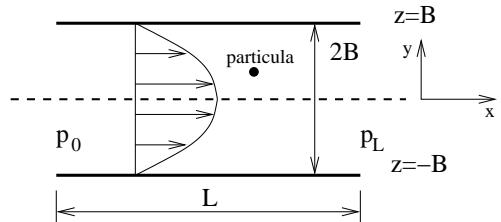
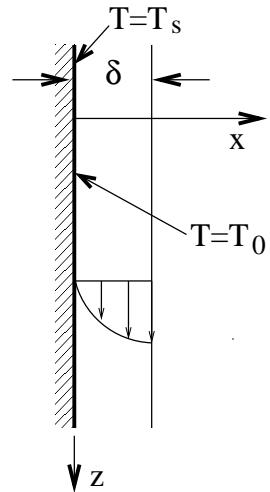
- (c) Mostrar que as condições de contorno são  $T = T_0$  para  $z = 0$  e  $x > 0$ ,  $T = T_0$  para  $0 < z < L$  e  $x = \infty$  e  $T = T_s$  para  $0 < z < L$  e  $x = 0$ ;
- (d) Reescrever a equação diferencial e as condições em termos das variáveis reduzidas:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}, \quad \eta = \frac{x}{9\beta z},$$

onde  $\beta = \mu\kappa/\rho^2 g\delta$ . Integrar a equação resultante e obter o perfil de temperaturas.

19. **Dimensionamento de um coletor eletrostático de poeira:** um coletor eletrostático de poeira consiste de um par de placas horizontais, carregadas com cargas elétricas contrárias, entre as quais escoa um gás com partículas de poeira, conforme esquema ao lado. Quer-se estabelecer um critério para definir o comprimento mínimo do coletor,  $L$ , em termos da carga elétrica  $e$  e da massa  $m$  das partículas, da intensidade do campo elétrico  $E$ , da viscosidade do gás  $\mu$ , da diferença de pressões  $p_0 - p_L$  entre a entrada e a saída do canal formado pelas duas placas e da distância  $2B$  entre ambas. A força elétrica vertical atuando nas partículas é  $F_e = eE$ . Admite-se que o perfil de velocidades se encontra totalmente desenvolvido e o escoamento é laminar, isso é, que o perfil de velocidades é parabólico e que a componente horizontal da velocidade das partículas é igual à do gás. Determinar o comprimento mínimo do coletor para que a menor partícula de massa  $m$  atinja a placa inferior antes de deixá-lo, para os seguintes casos:

- (a) Desprezando o arraste de Stokes, a força gravitacional agindo sobre as partículas de poeira e acelerações na direção  $z$ ;
- (b) Considerando o arraste de Stokes e desprezando a força gravitacional e acelerações na direção  $z$ ;



- (c) Desprezando a força gravitacional, mas incluindo o arraste de Stokes e acelerações na direção  $z$ . Considerar que a componente horizontal da velocidade da partícula é igual à do gás apenas na entrada (e não, ao longo de todo o coletor, como nos casos anteriores);
- (d) Comparar a validade dos resultados obtidos nos três casos anteriores, considerando que as partículas de poeira têm diâmetros na faixa de 1 a  $10 \mu\text{m}$  e massa específica de  $1000 \text{ kg/m}^3$ .
20. Refazer o problema anterior, para o caso em que a placa vertical esquerda está termicamente isolada do fluido.
21. **Escoamento de Hagen-Poiseuille [56]:** Considera-se o escoamento laminar permanente de um fluido viscoso em um tubo de seção circular e eixo paralelo ao eixo  $z$ . Pede-se:
- (a) Mostrar que as equações de Navier-Stokes (Eq.<sup>s</sup> 3.46 a 3.48) se reduzem a:
- $$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad v_r = v_\theta = 0$$
- e portanto:
- $$\frac{dp}{dz} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) = C^{te} < 0$$

- (b) Mostrar que a equação de  $v_z$  é satisfeita por:

$$v_z = Ar^2 + B \ln r + C$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes escolhidas para satisfazer às condições de contorno,  $v_z = 0$  na parede e  $v_z$  finito em  $r = 0$ ;

- (c) Mostrar que o perfil de velocidade  $v_z(r)$  a velocidade média  $\bar{V}$  e a vazão  $Q$  para uma perda de carga específica dada,  $dp/dz$ , em um tubo cilíndrico de raio  $a$ , são, respectivamente:

$$v_z(r) = \frac{-dp/dz}{4\mu} (a^2 - r^2) \quad \bar{V} = \frac{-dp/dz}{8\mu} a^2 \quad Q = \frac{-dp/dz}{8\mu} \pi a^4$$

- (d) Mostrar que, no caso do escoamento de um fluido confinado no anel entre dois tubos coaxiais, o externo de raio  $a$  e o interno de raio  $b$ , o perfil de velocidade  $v_z(r)$  e a vazão  $Q$  para uma perda e carga específica dada,  $dp/dz$ , são, respectivamente, da forma:

$$v_z(r) = \frac{-dp/dz}{4\mu} \left( a^2 - r^2 + \frac{b^2 - a^2}{\ln b/a} \ln \frac{r}{a} \right)$$

$$Q = \frac{\pi}{8} \frac{(-dp/dz)}{\mu} \left( b^4 - a^4 - \frac{(b^2 - a^2)^2}{\ln b/a} \right)$$

- (e) Mostrar que o coeficiente de atrito para o caso do escoamento laminar em um tubo de raio  $a$  é dado por:

$$f = \frac{64}{Re}$$

onde  $Re = \bar{V}a/\nu$ , sendo o fator de atrito  $f$  definido através da equação:

$$\Delta p = f \frac{L}{a} \frac{\rho \bar{V}^2}{2}$$

e  $\Delta p$  é a perda de carga ao longo de um trecho reto de tubulação de comprimento  $L$ ;

- (f) Recalcular o campo de velocidades do caso anterior, considerando que o tubo interno desloca-se com velocidade  $v_z = U$ ;  
 (g) Considerar a questão do item anterior, no caso limite em que  $a/b \ll 1$ . Discutir os principais aspectos da solução em função do parâmetro:

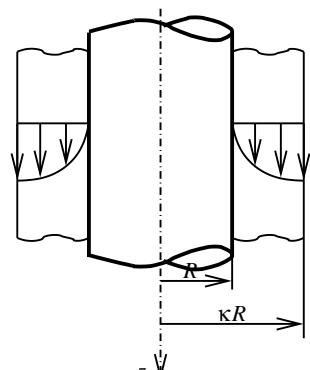
$$K = \frac{dp}{dz} \frac{b^2}{2\mu U};$$

- (h) Considerar o caso limite em que  $h \ll a$ , onde  $2h = b - a$ . Mostrar que a distribuição de velocidades entre os cilindros se aproxima da solução do campo de Couette.
22. Um fluido newtoniano incompressível, de massa específica  $\rho$  escoa sob ação de um gradiente de pressão especificado no anel compreendido entre dois tubos concêntricos, cujo eixo  $z$  encontra-se no plano horizontal. Os raios interno e externo do anel são  $R_1$  e  $R_2$ , respectivamente. O coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido varia com a posição radial, conforme a lei  $\mu = \mu_0 r$ . Pede-se:
- Simplificar as equações que regem o escoamento;
  - Especificar as condições de contorno;
  - Obter uma expressão para o perfil de velocidade,  $v_z = v_z(r)$  e para a vazão volumétrica através que escoa no anel.

23. Mostrar que o campo de velocidades que se forma em uma película de um líquido com massa específica  $\rho$  e coeficiente de viscosidade dinâmica  $\mu$ , escoando pelo lado externo de um tubo de raio  $R$ , é dado por:

$$v_z = \frac{\rho g R^2}{4\mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 + 2\kappa^2 \ln \frac{r}{R} \right]$$

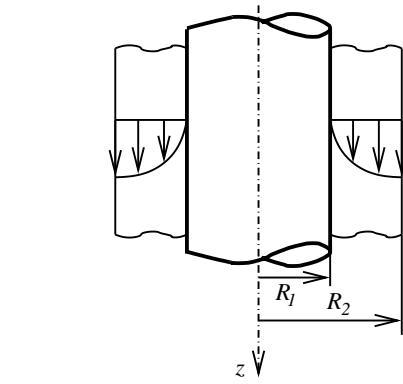
Determinar a vazão do líquido que escoa por fora do tubo.



24. Um fluido newtoniano incompressível escoa sob ação da gravidade, em regime permanente pelo lado externo de um tubo vertical longo, de raio  $R_1$ , conforme figura ao lado. A espessura da lâmina de fluido é  $(R_2 - R_1)$  e a superfície externa do fluido ( $r = R_2$ ) encontra-se em contato com o ar. O coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido obedece à lei  $\mu = \mu_0 r$ . Pede-se:

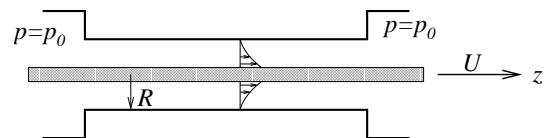
- (a) Modelar o problema, isso é estabelecer as hipóteses, equações e condições de contorno que governam o campo hidrodinâmico;
- (b) Mostrar que o campo de velocidades e a vazão através de uma seção reta perpendicular à velocidade são dados, respectivamente, por:

$$v_z = \rho g \left( \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1} - r - \frac{R_2^2}{r} \right)$$

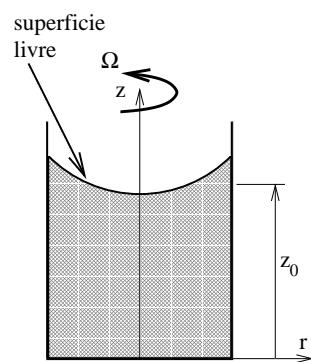


$$Q = 2\pi\rho g \left( R_2^2 R_1 - \frac{2R_2^3}{3} - \frac{R_1^3}{6} \right)$$

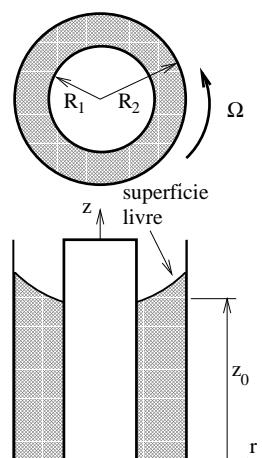
25. Um bastão cilíndrico de raio  $\kappa R$  desloca-se com velocidade  $U$  dentro de um tubo de raio  $R$ , na direção axial. Determinar o perfil de velocidades e a vazão do fluido que preenche o espaço entre o bastão e o tubo.



26. Um cilindro longo de raio  $R$  contendo um fluido com coeficiente de viscosidade dinâmica  $\mu$  e massa específica  $\rho$  gira em trono de seu eixo vertical com velocidade angular  $\Omega$ , conforme figura ao lado. Determinar a forma da superfície livre e o desnível da mesma entre o eixo e a parede do cilindro.

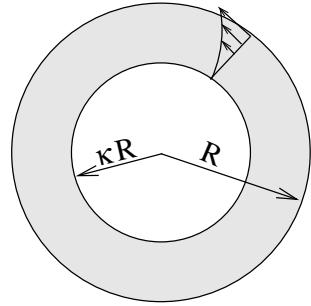


27. Um líquido de massa específica  $\rho$  e coeficiente de viscosidade cinemática  $\nu$  encontra-se confinado entre dois cilindros concêntricos, de raios interno e externo iguais a  $R_1$  e  $R_2$ , respectivamente. O cilindro interno é imóvel e o externo gira com velocidade angular  $\Omega$ . Determinar a forma da superfície livre.



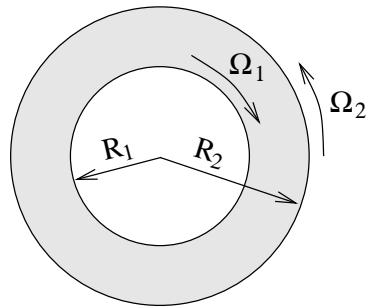
28. Um líquido de massa específica  $\rho$  e coeficiente de viscosidade cinemática  $\nu$  encontra-se confinado entre dois cilindros concêntricos, de comprimento infinito e raios interno e externo iguais a  $\kappa R$  e  $R$ , respectivamente. O cilindro interno é imóvel e o externo gira com velocidade angular  $\Omega$ . Mostrar que o perfil de velocidades, a tensão de cisalhamento tangencial e o momento por unidade de comprimento, necessário para fazer o cilindro externo girar, são dados, respectivamente, por:

$$v_\theta = \frac{\Omega R}{1 - \kappa^2} \left( \frac{r}{R} - \kappa^2 \frac{R}{r} \right) \quad \tau_{\theta r} = 2\mu\Omega R^2 \frac{\kappa^2}{r^2(1 - \kappa^2)} \quad M = 4\pi\mu\Omega R^2 \frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2}$$



29. Dois cilindros coaxiais de comprimento infinito e raios  $R_1$  e  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) giram com velocidades angulares iguais a  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ . Mostrar que o campo de velocidades de um fluido com coeficiente de viscosidade dinâmica  $\mu$  que ocupa o anel entre os dois cilindros, a tensão de cisalhamento tangencial e o momento por unidade de comprimento, aplicado ao cilindro interno, são dados, respectivamente, por:

$$v_\theta = -\frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \quad \tau_{\theta r} = 2\mu \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad M = 4\pi\mu \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$



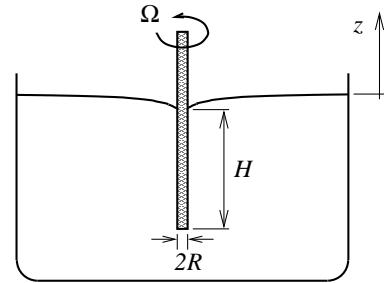
Obter o campo de pressões entre os dois cilindros.

30. Seja o campo de velocidades que se desenvolve entre dois cilindros coaxiais que giram. O cilindro externo tem raio  $b$  e não se move ( $v_\theta = 0$ ). O cilindro interno tem raio  $a$  e move-se em movimento oscilatório com velocidade  $v_\theta(r = a) = V \cos \omega t$ . Pede-se
- Obter a equação diferencial e as condições de contorno para  $v_\theta$ ;
  - Considerar soluções para o campo de velocidades na forma  $v_\theta = V \Re [f(r/a) \exp(i\omega t)]$ . Mostrar que a equação diferencial que rege o comportamento da função  $f(r^*)$  tem a forma:
- $$\frac{d^2 f}{dr^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{df}{dr^*} - f \left[ i \frac{\omega a^2}{\nu} + \frac{1}{r^{*2}} \right] = 0, \quad (7.110)$$
- onde  $r^* = r/a$ ;
- Seja o caso em que  $\omega a^2/\nu = \varepsilon \ll 1$ . Obter  $f(r^*)$  no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Discutir as características principais do campo de velocidades nesse caso limite;

- (d) Seja o caso em que  $\omega a^2/\nu = \varepsilon \gg 1$ . Defina a variável  $\eta$ , tal que  $r = a + \eta\sqrt{\nu/\omega}$ . Obter  $f(\eta)$  no caso em que  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Discutir as principais características do campo de velocidades desse caso limite.

Sugestão: Simplificar a Eq. 7.110 nos limites  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $\varepsilon \rightarrow \infty$  para resolver as duas últimas questões acima.

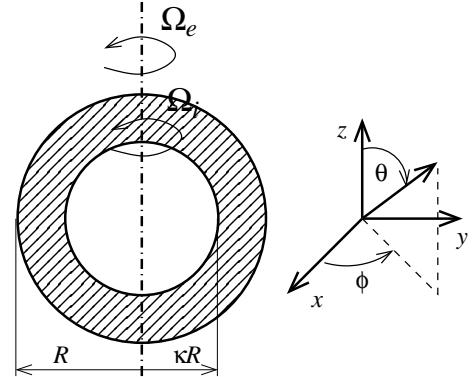
31. Um bastão cilíndrico, de raio  $R$ , com eixo vertical gira com velocidade angular  $\Omega$ , parcialmente imerso em um fluido com superfície livre, que se encontra em um recipiente cuja largura é muito maior do que  $R$ . O comprimento da parte imersa do bastão é  $H$ . Determinar os campos de velocidades, pressão, a equação da curva da superfície livre e o momento necessário para girar o bastão. Considerar a origem do eixo vertical  $z$  na superfície livre do líquido, longe do bastão.
32. Refazer o problema anterior para o caso em que o diâmetro do recipiente,  $R_r$ , é comparável ao do bastão.



33. **Campo hidrodinâmico formado entre duas esferas giratórias concêntricas:** Sejam duas esferas concêntricas cujos raios interno e externo são, respectivamente,  $\kappa R$  e  $R$ . Pede-se determinar o campo hidrodinâmico estacionário de um fluido incompressível que se forma entre a esfera interna, que gira com velocidade angular  $\Omega_i$  em torno do eixo  $z$  e a externa, que gira com velocidade angular  $\Omega_e$ , em torno do mesmo eixo. As esferas giram com velocidades suficientemente baixas para que o movimento do fluido entre ambas seja laminar. Desprezando efeitos gravitacionais e admitindo que  $v_\theta = 0$ , mostrar que:

$$v_r = 0 \quad \text{e:} \quad v_\phi = v_\phi(r, \theta).$$

Mostrar que as equações de Navier-Stokes (Eq.<sup>s</sup> 3.49 a 3.51) reduzem-se a:



$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ 0 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\phi \sin \theta}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

com as condições de contorno:

$$\begin{aligned} v_\phi &= \Omega_i \kappa R \sin \theta & \text{em:} & \quad r = \kappa R \\ v_\phi &= \Omega_e R \sin \theta & \text{em:} & \quad r = R. \end{aligned}$$

Mostrar que  $v_\phi = f(r) \sin \theta$  é solução das equações de Navier-Stokes, com  $f(r)$  satisfazendo a equação:

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} - 2f = 0,$$

o que resulta em  $f = r^n$ , com  $n$  satisfazendo a equação característica  $n^2 + n - 2 = 0$ , cuja solução é  $n = 1$  ou  $n = -2$ . Obtém-se:

$$f(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \quad \text{e:} \quad v_\theta = \left( C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta$$

e, substituindo os valores de  $C_1$  e de  $C_2$ , obtidos pela aplicação das condições de contorno, em:

$$v_\theta = \frac{\kappa R}{1 - \kappa^3} \left[ (\Omega_e - \Omega_i \kappa^3) \left( \frac{r}{\kappa R} \right) + (\Omega_i - \Omega_e) \left( \frac{\kappa R}{r} \right)^2 \right] \sin \theta,$$

ou, de forma equivalente, em:

$$v_\theta = \left[ \Omega_e \frac{\kappa R}{1 - \kappa^3} \left( \frac{r}{\kappa R} - \frac{\kappa^2 R^2}{r^2} \right) + \Omega_i \frac{\kappa^3 R}{1 - \kappa^3} \left( \frac{R^2}{r^2} - \frac{r}{R} \right) \right] \sin \theta.$$

Na forma acima, o primeiro termo do membro direito corresponde ao perfil de velocidades quando  $\Omega_i = 0$  e o segundo, ao perfil, quando  $\Omega_e = 0$ .

Mostrar que a tensão de cisalhamento atuando na parede das esferas é dada por:

$$\tau_{\phi r} = \mu r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} = 3\mu \frac{\Omega_i - \Omega_e}{1 - \kappa^3} \frac{\kappa^3 R^3 \sin \theta}{r^3}$$

e que o torque necessário para girar a esfera interna é obtido pela integração do torque elementar aplicado aos elementos da superfície:

$$\begin{aligned} dT_z &= (\tau_{\phi r})_{r=\kappa R} (\kappa R \sin \theta) (2\pi \kappa^2 R^2 \sin \theta) d\theta \\ &= 3\mu \frac{\Omega_i - \Omega_e}{1 - \kappa^3} \sin \theta (\kappa R \sin \theta) (2\pi \kappa^2 R^2 \sin \theta) d\theta, \end{aligned}$$

o que resulta em:

$$T = 6\pi\mu (\Omega_o - \Omega_i) \frac{\kappa^3 R}{1 - \kappa^3} = 8\pi\mu (\Omega_i - \Omega_o) \frac{\kappa^3 R^3}{1 - \kappa^3}.$$

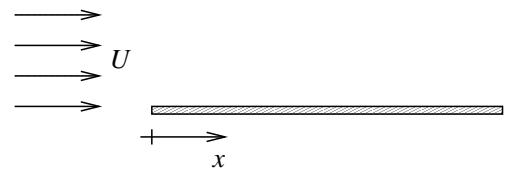
Verificar que o torque aplicado à esfera externa é dado por:

$$T = 8\pi\mu (\Omega_o - \Omega_i) \frac{\kappa^3 R^3}{1 - \kappa^3}.$$

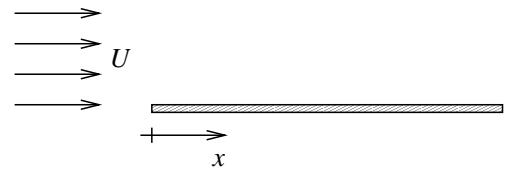
No caso limite em que a esfera interna de raio  $R_i$  gira em um meio infinito, em repouso a grande distância da mesma, verificar que o campo de velocidades e o torque necessário para girar a esfera são dados por:

$$v_\phi = \Omega_i \frac{R_i^3}{r^2} \sin \theta \quad \text{e:} \quad T_z = 8\pi\mu \Omega_i R_i^3.$$

34. Esboçar os perfis de velocidade e temperatura para os casos de uma placa plana com origem em  $x = 0$ , mantida à temperatura  $T_0$ , sobre a qual escoa um fluido com número de Prandtl  $Pr = 5$  e  $Pr = 0,5$ . A temperatura do fluido longe da placa é  $T_\infty$ .



35. Um fluido escoa sobre uma placa plana com origem em  $x = 0$ , sobre a qual é depositada uma substância volátil. Esboçar os perfis de velocidade e concentração da substância no fluido em escoamento, para os casos de  $Sc > 1$  e  $Sc < 1$ .
36. Mostrar que o momento necessário para manter um disco de raio  $R$ , girando com velocidade angular  $\Omega$ , cujas duas faces estão em contato com um fluido de massa específica  $\rho$  e viscosidade  $\nu$ , é dado por:



$$M = 2 \int_0^R 2\pi r^2 \tau_{\theta z} dr = \pi \rho R^4 (\nu \Omega^3)^{1/2} G'(0)$$

37. Um disco plano de grande diâmetro e raio  $R$ , imerso em um fluido de viscosidade  $\nu$ , oscila com baixa amplitude em torno de seu eixo, sendo o ângulo de rotação dado por  $\theta = \theta_0 \cos \omega t$ , com  $\theta_0 \ll 1$ . Mostrar que a velocidade angular  $\Omega$  do fluido obedece à equação:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}$$

e que o momento que o disco aplica ao fluido em contato com as duas faces é dado por:

$$M = \omega \theta_0 \pi R^2 \sqrt{\omega \rho \mu \cos(\omega t - \pi/4)}.$$

38. Dois discos paralelos planos, de raio  $R$  se encontram a uma pequena distância  $h$ . Os discos se aproximam a uma velocidade constante  $U$ , deslocando o fluido que se encontra entre os dois, para fora. Determinar a força de resistência ao movimento dos discos [56].

**Sugestão:** O campo hidrodinâmico é axissimétrico e, como a lâmina de fluido é fina,  $v_z \ll v_r$  e  $\partial v_r / \partial r \ll \partial v_r / \partial z$ . Mostrar que as equações de Navier-Stokes se reduzem a:

$$\mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

com as condições de contorno:

$$\begin{aligned} v_r &= v_z &= 0 & (z = 0) \\ v_r &= 0 & \text{e} & v_z = -U & (z = h) \\ && p = p_0 & & (r = R), \end{aligned}$$

onde  $p_0$  é a pressão externa. Integrar as equações de Navier-Stokes e mostrar que:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z(z-h) \\ U &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^h r v_r dz = -\frac{h^3}{12\mu r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dp}{dr} \right) \end{aligned}$$

e que, portanto:

$$p = p_0 + \frac{3\mu U}{h^3} (R^2 - r^2),$$

onde obtém-se que:

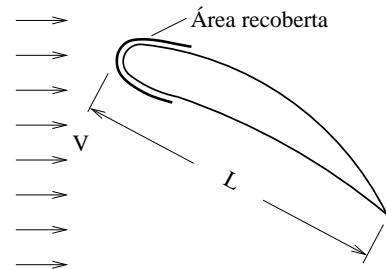
$$F = \frac{3\pi\mu U R^4}{2h^3}$$

39. Ar seco escoa sobre uma placa molhada de comprimento  $L = 500\text{ mm}$  e largura  $b = 150\text{ mm}$ . A velocidade e a temperatura do ar são  $U_\infty = 20\text{ m/s}$  e  $T_\infty = 35^\circ\text{C}$ , respectivamente. Um aquecedor elétrico embutido na placa fornece potência para manter a temperatura da superfície em  $20^\circ\text{C}$ . Determinar a taxa de evaporação de água sobre a placa ( $\text{kg}/\text{h}$ ) e a potência necessária para manter as condições de regime estacionário.

Dados do ar:  $\nu = 15,89 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ ,  $\kappa = 26,3 \times 10^{-6}\text{kW/mK}$ ,  $\rho = 1,1614\text{ kg/m}^3$ ,  $C_p = 1,007\text{ kJ/kg K}$ ; Constante universal dos gases perfeitos:  $\mathcal{R} = 8,314\text{ kJ/kmol K}$ ; Massa molecular da água:  $M = 18\text{ kg/kmol}$ ; Coeficiente de difusão do vapor d'água no ar:  $D = 0,26 \times 10^{-4}\text{ m}^2/\text{s}$ ; Pressão de vapor saturado da água a  $20^\circ\text{C}$ :  $p_v = 1,917 \times 10^3\text{ Pa}$ ; Calor latente de vaporização da água a  $20^\circ\text{C}$ :  $L = 2449\text{ kJ/kg K}$ .

$$Nu = 0,680 Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad J = h_m(\rho - \rho_\infty)$$

40. Uma lâmina de turbina de comprimento  $L = 250\text{ mm}$ , é ensaiada em um túnel de vento, com velocidade  $V = 100\text{ m/s}$ , para a determinação do coeficiente de transferência de calor por convecção. O ensaio consiste em recobrir uma área  $A_{sup} = 0,05\text{ m}^2$  com naftaleno, em ensaiá-la durante três horas a  $300\text{ K}$  e em medir a massa de naftaleno sublimada, pela diferença entre o peso da lâmina antes e depois do ensaio. A diferença de peso medida foi de  $0,056\text{ kg}$ . Admitindo que o coeficiente de transferência de calor por convecção possa ser determinado de uma correlação empírica da forma  $Nu = C Re^m Pr^{1/3}$ , pede-se calcular o valor desse coeficiente. Peso molecular do naftaleno:  $M = 18,2 \times 10^{-3}\text{ kg/mol}$ ; Pressão de vapor do naftaleno:  $p_s = 13,08\text{ Pa}$ . Coeficiente de difusão do naftaleno no ar a  $300\text{ K}$ :  $D = 0,62 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ . Propriedades físicas do ar a  $300\text{ K}$ :  $\nu = 15,89 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\alpha = 22,5 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\kappa = 26,3 \times 10^{-3}\text{ W/mK}$ ,  $\mathcal{R} = 8,314\text{ J/mol K}$ .



41. A água de resfriamento de uma usina termoelétrica é armazenada em uma lagoa com  $1000\ m$  de comprimento por  $500\ m$  de largura. Devido à evaporação é necessário manter uma vazão de reposição para manter o nível da lagoa. Calcular esta vazão considerando que a água e o ar ambiente se encontram a  $27^\circ C$ , que a umidade relativa do ar seja de 70% e que haja um vento de  $2m/s$  na direção do comprimento da lagoa. Dados do ar:  $\nu = 15,89 \times 10^{-6} m^2/s$ ,  $\kappa = 26,3 \times 10^{-3} kW/mK$ ,  $\rho = 1,1614 kg/m^3$ ,  $C_p = 1,007 kJ/kg K$ ; Constante universal dos gases perfeitos:  $R = 8134 J/kmol K$ ; Massa molecular da água:  $M = 18 kg/kmol$ ; Coeficiente de difusão do vapor d'água no ar:  $D = 0,26 \times 10^{-4} m^2/s$ ; Pressão de vapor saturado da água a  $27^\circ C$ :  $p_v = 3,531 \times 10^3 Pa$ .  $Nu = 0,680 Re^{1/2} Pr^{1/3}$
42. Avaliar o tempo necessário para a secagem de um lençol molhado, de dimensões  $2,0 \times 2,5\ m$ , contendo  $1\ kg$  de água, em um dia encoberto, em que a temperatura e a umidade relativa do ar são, respectivamente, de  $27^\circ C$  e 50%. A velocidade do vento é de  $2\ m/s$ . Massa molecular da água:  $18\ kg/kmol$ . Dados do ar:  $\nu = 15,89 \times 10^{-6} m^2/s$ ,  $\rho = 1,2614 kg/m^3$ ,  $\kappa = 2,63 \times 10^{-3} W/mK$ ,  $C_p = 1,007 kJ/kg K$ . Pressão do vapor d'água a  $27^\circ C = 3,53 \times 10^3 Pa$ . Coeficiente de difusão do vapor d'água no ar:  $D = 0,26 \times 10^{-4} m^2/s$ .  $Nu = 0,0296 Re^{4/5} Pr^{1/3}$ .  $R = 8,314 kJ/kmol K$ .
43. Um coletor solar horizontal consiste de uma placa superior de vidro, mantida a  $29^\circ C$  e de uma placa inferior, absorvedora de radiação, que opera à temperatura média de  $50^\circ C$ . O espaço entre as placas é ocupado por ar e as bordas do coletor são isoladas termicamente. A distância entre as placas é de  $60\ mm$ . Estimar a taxa de perda de calor do absorvedor para o vidro. Qual será o valor dessa perda se o espaçamento entre as placas for reduzido para  $10\ mm$ ?  
Dados do ar: viscosidade cinemática:  $\nu = 1,8 \times 10^{-5} m^2/s$ ; difusividade térmica:  $\alpha = 2,6 \times 10^{-5} m^2/s$ ; condutividade térmica:  $\kappa = 26,3 W/mK$ .
44. Seja o problema de transferência de massa de uma esfera em meio infinito, tal que a concentração de massa na superfície da esfera é  $C(r = R) = C_0$  e igual a zero longe da mesma:  $C(r \rightarrow \infty) = 0$ .
- Obter a equação que rege transporte de massa dependente do tempo em coordenadas esféricas, considerando o meio estagnado;
  - Simplificar a equação obtida para condições estacionárias e obter uma expressão para o perfil de concentração  $C = C(r)$  e para o número de Sherwood,  $Sh$ ;
  - Considere a situação transitória, em que  $C(t = 0, r > r) = 0$  e obtenha uma expressão para o perfil de concentração  $C = C(t, r)$  e para o número de Sherwood,  $Sh = Sh(t)$ . Sugestão: usar a transformação de variáveis  $\alpha = Cr$  e  $x = r - R$  para transformar a equação de evolução obtida em uma forma mais simples;
  - Considere agora uma pequena esfera de naftaleno, de raio  $R = 0,5\ mm$  em uma corrente de ar cuja velocidade é  $v_{ar} = 1\ m/s$ . Obter uma expressão aproximada para o número de Sherwood médio,  $Sh$ . Sugestão: usar a expressão acima obtida. Comparar a expressão obtida com a correlação empírica de Ranz-Marshall:

$$Sh = 2 + 0,66 Re^{1/2} Sc^{1/3}$$

e tirar as conclusões apropriadas;

- (e) Obter uma estimativa razoável do tempo necessário para que a esfera de naftaleno se evapore completamente (a) em ambiente de ar estagnado e (b) com a esfera posta em uma corrente de ar com velocidade de  $v_{ar} = 1 \text{ m/s}$ .

Dados: temperatura do ar:  $T = 20^\circ$ , pressão do ar:  $p = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$ , massa específica do ar:  $\rho_{ar} = 1,2 \text{ kg/m}^3$ , peso molecular do ar:  $M_{ar} = 29$ , Peso molecular do naftaleno:  $M_n = 128$ , massa específica do naftaleno:  $\rho_{ar} = 1145 \text{ kg/m}^3$ , pressão de vapor do naftaleno:  $p_v = 12 \text{ Pa}$ , difusividade do naftaleno no ar:  $D = 5,5 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , aceleração da gravidade:  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Explicar e discutir a validade das hipóteses feitas.

45. Um reator tubular de diâmetro  $d = 15 \text{ cm}$  é usado para misturar dois fluidos de mesmas massa específica e viscosidade, em um processo de produção de polímeros. Como taxas de deformação muito altas tendem a manter as moléculas que formarão o polímero separadas, a máxima taxa de deformação aceitável é  $S = 100 \text{ s}^{-1}$ . Estimar vazão máxima  $\dot{m}$ , em  $\text{kg/s}$ . Dados: massa específica dos fluidos:  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ , viscosidade cinemática dos dois fluidos:  $\nu = 1 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ . Explicar e discutir a validade de todas as hipóteses feitas.



# Capítulo 8

## Introdução à Teoria da Camada Limite

### 8.1 Introdução

Temos discutido ao longo deste trabalho, sobre a dificuldade de estabelecermos uma classificação simples dos fenômenos observados nos fluidos. Esta dificuldade, que decorre da variedade de tais fenômenos, tem origem no caráter não-linear das leis que regem a evolução dos mesmos e na variedade das condições iniciais e de contorno de cada problema. Uma possível classificação torna-se possível se nos ativermos ao caso dos escoamentos, isso é aos casos em que, de alguma forma, há uma velocidade imposta ao fluido. Nessas condições podemos considerar três casos:

1. Os escoamentos nos quais o número de Reynolds é baixo ou não é definido, como é o caso do Problema de Rayleigh e do Segundo Problema de Stokes. Esses escoamentos foram abordados no Capítulo 7;
2. No outro extremo encontram-se os escoamentos sob altos números de Reynolds, em que os efeitos viscosos têm pouca importância, isso é, em que  $Re \rightarrow \infty$  e os efeitos de compressibilidade não podem ser desprezados. A velocidade é comparável à do som, caso em que, adicionalmente o número de Mach (ver Sec. 5.2 e Eq. 5.3) é da ordem de 1. Enquadra-se nesse caso parte considerável da aerodinâmica de alta velocidade;
3. Entre esses dois extremos encontramos os escoamentos sob elevado número de Reynolds, nos quais os efeitos viscosos se concentram junto à superfície dos corpos, na esteira que se forma atrás dos mesmos e em regiões de forte cisalhamento entre camadas adjacentes do fluido. No restante do campo, o escoamento é regido pela equação de Euler.

Ao estudarmos o problema de Rayleigh (Seção 7.7) vimos que junto à superfície de uma placa plana imersa no escoamento de um fluido pouco viscoso forma-se uma fina camada denominada camada limite onde a velocidade varia de zero à velocidade do fluxo longe da placa. Esse resultado foi obtido a partir de uma transformação de variáveis, em que passamos do escoamento sobre uma placa infinita para o que se forma sobre uma placa com origem em  $x = 0$ . A componente vertical da velocidade no problema da placa infinita se anula. Nesse capítulo trataremos de generalizar estes resultados para o caso de camadas limite que se formam sob elevados números de Reynolds, junto a corpos de pequena curvatura.

## 8.2 As Equações de Prandtl

As equações que descrevem o campo de velocidades e pressão que se forma junto à superfície de corpos esbeltos foram descobertas por Prandtl, na primeira metade do século XX. O ponto de partida de Prandtl foram as equações da continuidade e de Navier-Stokes em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (8.3)$$

A hipótese de que a curvatura da superfície é pequena se faz admitindo-se que a componente  $v_x$  da velocidade permanece da mesma ordem de grandeza ao longo do tempo e de toda a extensão  $L$  do corpo. Para isso é necessário que  $\partial v_x / \partial x$  seja da mesma ordem de grandeza que  $v_x$  e que permaneça dentro desses limites ao longo de todo o corpo. Conseqüentemente, é necessário que  $\partial^2 v_x / \partial x^2$  tenha o mesmo comportamento, de modo que  $\partial v_x / \partial x$  se mantenha de ordem  $\mathcal{O}(1)$  ao longo de todo o corpo. Portanto:

$$L = \mathcal{O}(1) \quad v_x = \mathcal{O}(1) \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = \mathcal{O}(1) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = \mathcal{O}(1) \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \mathcal{O}(1)$$

Como o escoamento se faz sob alto número de Reynolds a espessura da camada limite  $\delta$  é tal que  $\delta \ll L$ . Da equação da continuidade concluímos que:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \mathcal{O}(1) \quad \rightarrow \quad v_y = \mathcal{O}(\delta)$$

Como  $v_y = \mathcal{O}(\delta)$  ao longo de todo o corpo é necessário que:

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \mathcal{O}(\delta) \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \mathcal{O}(\delta) \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = \mathcal{O}(\delta)$$

As demais derivadas em relação a  $y$  são estimadas fazendo-se a diferença do valor da variável dentro da camada limite e no topo da mesma e dividindo-se o resultado pela espessura  $\delta$  da camada limite. A componente  $v_x$  varia de zero, junto à superfície do corpo, ao valor da velocidade no topo da camada limite, que é de  $\mathcal{O}(1)$ , em distância igual à espessura da mesma, o que implica em que:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \mathcal{O}(\delta^{-1})$$

A derivada  $\partial v_x / \partial y$  é de  $\mathcal{O}(1)$  no topo superior da camada limite e  $\mathcal{O}(\delta^{-1})$  no interior. Estimamos portanto a ordem de grandeza de  $\partial^2 v_x / \partial y^2$  como segue:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \mathcal{O} \left( \frac{\mathcal{O}(1) - \mathcal{O}(\delta^{-1})}{\mathcal{O}(\delta)} \right) = \mathcal{O}(\delta^{-2})$$

A derivada  $\partial v_y / \partial y$  é de  $\mathcal{O}(1)$  dentro e no topo superior da camada limite. Em consequência,

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = \mathcal{O}(\delta^{-1})$$

ou menor. Ao estudarmos o problema de Rayleigh (Seção 7.7) vimos que  $\delta = \mathcal{O}(\nu^{1/2})$ , donde concluímos que  $\nu = \mathcal{O}(\delta^2)$ .

De posse desses resultados estimamos a ordem de grandeza dos termos da Eq. (8.2): Os temos do membro esquerdo são todos de  $\mathcal{O}(1)$ . Quanto aos termos viscosos, temos:

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \mathcal{O}(\delta^2)\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(\delta^2) \quad \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \mathcal{O}(\delta^2)\mathcal{O}(\delta^{-2}) = \mathcal{O}(1)$$

Concluímos portanto que o termo  $\nu \partial^2 v_x / \partial x^2$  pode ser desprezado e que o termo da pressão é no máximo de  $\mathcal{O}(1)$ . A equação da componente  $v_x$  torna-se portanto:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (8.4)$$

Com relação à da Eq. (8.3) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \mathcal{O}(\delta) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \mathcal{O}(1)\mathcal{O}(\delta) = \mathcal{O}(\delta) & v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \mathcal{O}(\delta)\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(\delta) \\ \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} &= \mathcal{O}(\delta^2)\mathcal{O}(\delta) = \mathcal{O}(\delta^3) & \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} &= \mathcal{O}(\delta^2)\mathcal{O}(\delta^{-1}) = \mathcal{O}(\delta) \end{aligned}$$

Os termos da Eq. (8.3) são portanto de  $\mathcal{O}(\delta)$ , com exceção de  $\nu \partial^2 v_y / \partial x^2$ , que pode ser desprezado. Concluímos também, que  $\partial p / \partial y = \mathcal{O}(\delta)$ . Adicionalmente, como a camada limite tem espessura de  $\mathcal{O}(\delta)$  as variações de pressão na direção  $y$  são de  $\mathcal{O}(\delta^2)$ , isso é a pressão dentro da camada limite é igual à do escoamento externo, que é regido pela equação de Euler.

Fora da camada limite:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

onde  $U$  e  $V$  são as componentes de velocidade do campo externo.  $V\mathcal{O}(\delta)$  e  $\partial U / \partial x = \mathcal{O}(1)$ , o que torna o último termo do membro esquerdo desprezível em relação aos demais. A equação de Euler aplicável ao campo externo torna-se:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Essa equação está desacoplada da Eq. (8.4), isto é, admite-se que o campo externo é conhecido e independente do comportamento da camada limite. Consequentemente a pressão dentro da mesma é conhecida e uma das equações (8.1-8.3) deve ser descartada. Prandtl

descartou a equação da componente  $v_y$ , obtendo o sistema abaixo que leva seu nome (escoamentos permanentes):

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (8.6)$$

As equações de Prandtl são válidas para condições em que  $\delta$  seja muito menor do que a curvatura da superfície do corpo sobre o qual a camada limite se forma.

Introduzindo a definição de função corrente:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Substituimos esta definição na Eq. (8.5) e obtemos:

$$\psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \psi_{yyy} \quad (8.7)$$

onde as variáveis que aparecem nos índices subscritos indicam derivação em relação às mesmas.

### 8.3 A Equação de Blasius

O problema de Rayleigh, tratado na Sec 7.7, abordou o campo de velocidades que se desenvolve próximo a uma placa infinita que é posta em movimento com velocidade  $U$  no tempo  $t = 0$ . O resultado foi usado para fazermos uma estimativa da espessura da camada limite que se forma sobre uma placa plana semi-infinita, com origem no ponto  $x = 0$ , sobre a qual incide um escoamento uniforme, com velocidade ( $v_x = U, v_y = 0$ ). O fato de tratarmos de fluido com baixa viscosidade faz com que a espessura da camada limite seja pequena e que a variação da espessura da mesma ao longo da direção da placa seja pequena, exceto nas proximidades do bordo de ataque da placa semi-infinita. A derivada da velocidade em relação a  $y$  dentro da camada limite é muito maior do que a derivada em relação a  $x$ . Por isso podemos fazer a primeira estimativa da espessura da camada limite sobre a placa semi-infinita, utilizando o resultado obtido para uma placa infinita. Blasius apresentou um modelo melhor para a camada limite que se forma sobre a placa semi-infinita ao identificar que, embora a espessura da mesma aumente com  $x^{1/2}$ , o perfil de velocidades só varia ao longo dessa direção com um fator de escala, que reflete o aumento da espessura. Em consequência, consegue-se definir uma variável  $\eta$ , que engloba as variáveis  $x$  e  $y$ . A equação 8.7 reduz-se a uma equação ordinária, não linear, conhecida como equação de Blasius, que deduzimos a seguir.

Utilizando o resultado da espessura da camada limite do problema de Rayleigh, para a placa semi-infinita, vimos que:

$$\delta = \sqrt{\frac{\pi \nu x}{U}}.$$

Com o intuito de simplificar as constantes da equação de Blasius, adotamos:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu x}{U}}$$

e definimos a variável de similaridade  $\eta$ , como:

$$\eta = \frac{y}{\delta} = y \sqrt{\frac{U}{2\nu x}}.$$

Temos então que:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{2x} \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{U}{2\nu x}}.$$

Definimos a função corrente adimensional,  $f$ . Como a função corrente  $\psi$  tem dimensões de  $m^2/s$ , definimos:

$$f = \frac{\psi}{\delta U} = \frac{\psi}{\sqrt{2\nu x U}}$$

onde obtemos:

$$\psi = \sqrt{2\nu x U} f.$$

Admitimos que  $f = f(\eta)$ . Temos, para as componentes da velocidade e para suas derivadas dentro da camada limite:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sqrt{2\nu x U} f' \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{2\nu x U} f' \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} & v_x &= U f' \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} &= U f'' \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y U}{2x} \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} f'' & \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{U}{2x} \eta f'' \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} &= U f'' \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial y} &= U \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} f'' \\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= U \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} f''' \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= \frac{U^2}{2\nu x} f''' \\ v_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\nu U}{x}} f + \sqrt{2\nu x U} f' \frac{y}{2x} \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} = \\ &\quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\nu U}{x}} \left( y \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} f' - f \right) & v_y &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\nu U}{x}} (\eta f' - f). \end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima na Eq. 8.7 e observando que  $dU/dx = 0$  sobre a placa plana, obtemos:

$$-U f' \frac{U}{2x} \eta f'' + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\nu U}{x}} (\eta f' - f) U \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} f'' = \nu \frac{U^2}{2\nu x} f'''.$$

Simplificando a última equação, obtemos:

$$-\frac{U^2}{2x} \eta f' f'' + \frac{U^2}{2x} \eta f' f'' - \frac{U^2}{2x} f f'' = \frac{U^2}{2x} f'''$$

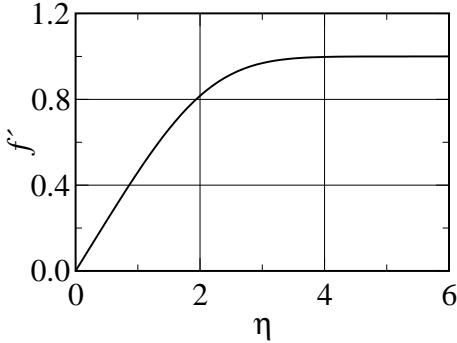


Figura 8.1: Resultado da integração numérica da Eq. de Blasius (Eq. 8.8). A variável  $f'$  é proporcional à componente  $v_x$  da velocidade. O resultado foi obtido utilizando-se o método de tiro e um integrador do tipo Runge-Kutta de quarta ordem [55].

e finalmente:

$$f''' + f f'' = 0 \quad (8.8)$$

que é a equação de Blasius. O resultado da integração numérica da Eq. (8.8) se encontra na Fig. (8.1).

As condições de contorno para a função corrente adimensional são especificadas da seguinte forma: como a função corrente representa a vazão entre a placa e um ponto acima da mesma, deve se anular em  $\eta = 0$ . A velocidade  $v_x$  é proporcional à  $f'$  e se anula sobre a superfície da placa. Fora da camada limite, a velocidade tende ao valor  $U$ . Como  $v_x = U f'$ ,  $f'$  tende a 1 fora da camada limite. Em resumo:

$$\begin{aligned} \eta = 0 &\longrightarrow \begin{cases} f = 0 \\ f' = 0 \end{cases} \\ \eta = \infty &\longrightarrow f' = 1 \end{aligned}$$

A tensão viscosa sobre a superfície da placa é dada por:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu U \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} f''(0) = \sqrt{\frac{\nu}{2Ux}} \rho U^2 f''(0) = \frac{1}{\sqrt{2Re}} \rho U^2 f''(0)$$

e o coeficiente de atrito é dado por:

$$C_f = \frac{\tau_{xy}}{\rho U^2 / 2} = \left( \frac{2}{Re} \right)^{1/2} f''(0)$$

## 8.4 A Equação de Falkner-Skan

Escrevemos a Eq. (8.7) em forma adimensional, utilizando varáveis de *similaridade*, que agrupam numa mesma variável  $x$  e  $y$ . O resultado tem a vantagem de transformar a Eq. (8.7) em uma equação ordinária.

Seguindo o procedimento da Sec. 8.3 definimos as variáveis  $\eta$  e  $\xi$ , que são o resultado da adimensionalização de  $y$  e  $x$ , respectivamente:

$$\eta = \frac{y Re^{1/2}}{L g(x)} \quad \xi = \frac{x}{L} \quad (8.9)$$

onde  $L$  é a dimensão característica do corpo e  $g(x)$ , um fator de escala. Definimos também a função corrente adimensional como:

$$f = \frac{\psi(x, y) Re^{1/2}}{L U(x) g(x)}$$

As componentes da velocidade são dadas por:

$$\begin{aligned} v_x &= U \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ -Re^{1/2} v_y &= Re^{1/2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = L f \frac{\partial}{\partial x} (Ug) + Ug \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} - L \frac{g'}{g} \eta f' \right) \end{aligned}$$

Substituindo as definições das variáveis adimensionais  $\xi$ ,  $\eta$  e  $f$  na Eq. (8.7) obtemos:

$$f''' + \alpha f f'' + \beta (1 - f'^2) = \frac{u}{U_\infty} g^2 \left( f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (8.10)$$

onde:

$$\alpha = \frac{Lg}{U_\infty} \frac{d}{dx} (Ug) \quad \beta = \frac{L}{U_\infty} g^2 U' \quad f' = \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

Se  $f$  e suas derivadas não dependerem de  $\xi$  o lado direito da Eq. (8.10) se anula e a função corrente adimensional passa a depender apenas da variável de similaridade  $\eta$ , que engloba  $x$  e  $y$ . Para que isso aconteça o campo potencial de velocidades deve obedecer a algumas condições. Vejamos quais são:

$$f''' + \alpha f f'' + \beta (1 - f'^2) = 0$$

Obtém-se a condição procurada:  $U(x) = Cx^n$ . A equação da camada limite admite portanto soluções de similaridade, desde que o campo potencial externo obedeça à condição acima e com a variável  $\eta$  definida conforme (8.9). Pode-se dar uma definição explícita a  $\eta$ , interpretando-se essa variável como uma adimensionalização de  $y$ . Ao estudarmos o problema de Rayleigh (Sec. 7.7) vimos que a espessura da camada limite que se forma sobre uma placa plana com origem em  $x = 0$ , sobre a qual incide um escoamento com ângulo de ataque nulo e velocidade  $U$  é proporcional a  $\delta = \sqrt{\pi \nu x / U}$ . É natural portanto, utilizarmos essa espessura para adimensionalizar  $y$  e um fator proporcional a  $U\delta$  para definirmos a função corrente adimensional:

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{2\nu x / U}} \quad f = \frac{\psi}{\sqrt{2\nu U x}} \quad (8.11)$$

Substituindo-se as definições (8.11) e a hipótese de que  $U \propto x^n$  na Eq. (8.7) obtém-se a equação de Falkner-Skan:

$$f''' + (1 + n) f f'' = 2n (f'^2 - 1) \quad (8.12)$$

No caso de  $n = 0$  têm-se  $U = C^{te}$ , o que representa o escoamento sobre uma placa plana sob ângulo de ataque nulo com relação ao escoamento incidente. A equação de Falkner-Skan reduz-se à Eq. de Blasius.

O escoamento potencial externo à camada limite pode ser descrito por um potencial complexo de velocidades (ver Sec. 6.6 e Eq. 6.12):

$$\begin{aligned} F &= \phi + i\psi & \text{onde:} & \quad F \propto z^{n+1} \\ z &= x + iy \end{aligned}$$

sendo a velocidade complexa dada por:

$$w = v_x + iv_y = \frac{d\bar{F}}{dz}$$

Campos potenciais da forma  $U \propto x^n$  correspondem a escoamentos sobre diedros e cunhas, conforme ilustrado na Fig. 8.2 (ver Sec. 6.5). A equação de Falkner-Skan pode ser resolvida

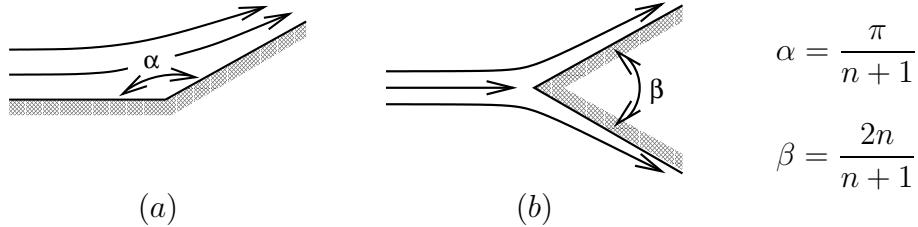


Figura 8.2: Escoamento sobre diedros (a) e cunhas (b).

numericamente para valores especificados de  $n$ . Os casos mais importantes são:

1	$U = C^{te}$	$n = 0$	$\alpha = \pi$	$\beta = 0$	Escoamento de Blasius (placa plana)
2	$\delta = C^{te}$	$n = 1$	$\alpha = \pi/2$	$\beta = 1$	Escoamento bidimensional sobre um ponto de estagnação
3	$\tau_p = C^{te}$	$n = 1/3$	$\alpha = \pi/2$	$\beta = 1/2$	
4	$C_f = C^{te}$	$n = -1$	$\alpha = +\infty$	$\beta = +\infty$	Escoamento para um sumidouro
5	$\tau_p = 0$	$n = -0,0904$	$\alpha = 3,4538$	$\beta = -0,1988$	Escoamento em vias de descolar

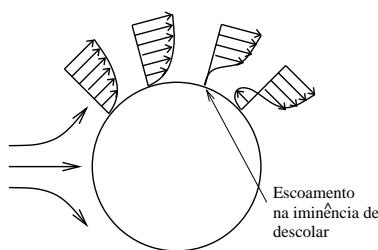


Figura 8.3: Escoamento na iminência de descolar.

de pressão adverso. É o caso, por exemplo, de aerofólios sob elevados ângulos de ataque. Uma forma de evitá-lo consiste em reduzir os gradientes de pressão adversos, o que se consegue com pequenos ângulos de ataque e com geometrias em que a redução da velocidade

O caso em que  $\tau_p = 0$  ocorre quando  $\partial v / \partial n = 0$  junto à superfície do corpo;  $n$  é a direção perpendicular à superfície. Nessa situação a velocidade permanece nula ao longo de uma certa distância do corpo. O escoamento está prestes a *descolar*, conforme mostrado na Fig. (8.3).

O descolamento da camada limite é, em geral, um efeito indesejado. O fenômeno ocorre quando o conteúdo de energia cinética da camada limite diminui muito e o escoamento não consegue mais vencer o gradiente

pelo aumento da seção transversal se faz de forma gradual, como Venturis e nos aerofólios. Outra forma consiste na injeção de energia através de *slots*, como os utilizados em asas de aviões (ver Fig. 8.4 d).

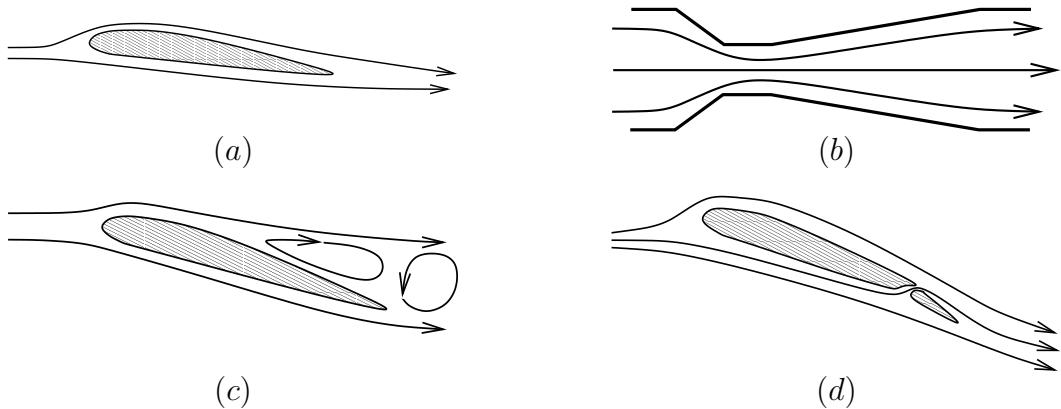


Figura 8.4: Controle do descolamento de camadas-limite: (a): Aerofólio sob baixo ângulo de ataque; (b): Tubo de Venturi; Nos dois primeiros casos o escoamento adere às paredes do corpo. (c): Aerofólio sob elevado ângulo de ataque e escoamento descolado; (d): Injeção de energia na camada limite de um aerofólio, através de um *slot*.

## 8.5 Métodos Integrais na Teoria da Camada Limite Laminar

### 8.5.1 As espessuras de deslocamento, de quantidade de movimento e de energia cinética

Definimos inicialmente as espessuras de deslocamento,  $\delta_1$ , de quantidade de movimento,  $\delta_2$  e de energia cinética,  $\delta_3$ :

1. Espessura de deslocamento  $\delta_1$ :

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy \quad (8.13)$$

2. Espessura de quantidade de movimento  $\delta_2$ :

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{v_x}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy \quad (8.14)$$

3. Espessura de energia cinética  $\delta_3$ :

$$\delta_3 = \int_0^\delta \frac{v_x}{U} \left[1 - \left(\frac{v_x}{U}\right)^2\right] dy \quad (8.15)$$

A espessura de deslocamento representa o aumento da altura do canal em que o escoamento se faz, necessário para compensar a deficiência de vazão no interior da camada limite e manter uma vazão por unidade de largura igual a  $U\delta$ . As espessuras de quantidade de movimento e de energia cinética representam o aumento de altura do canal necessário para manter o fluxo de quantidade de movimento  $(\rho U^2)\delta$  e de energia cinética  $(\rho U^3/2)\delta$ .

### 8.5.2 Integrais de von Kármán da camada limite

A primeira integral da camada limite é obtida integrando-se a equação da continuidade ao longo da espessura  $\delta$  da mesma. Obtém-se:

$$\int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + V = 0$$

onde  $V = v_y(x, \delta)$ . A equação acima pode ser reescrita sucessivamente como:

$$\begin{aligned} V &= - \int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{dU}{dx} dy - \int_0^\delta \frac{dU}{dx} dy \\ V &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (U - v_x) dy - \int_0^\delta \frac{dU}{dx} dy \end{aligned}$$

Usando a definição de espessura de deslocamento  $\delta_1$  (Eq. 8.13) obtemos a primeira relação integral de von Kármán, da camada limite laminar:

$$V = \frac{d}{dx} U \delta_1 - \delta \frac{dU}{dx} \quad (8.16)$$

No caso de  $dU/dx = 0$ :

$$\frac{V}{U} = \frac{d\delta_1}{dx}$$

A equação da quantidade de movimento (Eq. 8.5) também pode ser integrada:

$$\int_0^\delta \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - U \frac{\partial U}{\partial x} \right) dy = - \frac{\tau_p}{\rho}$$

O termo com a tensão de cisalhamento junto à parede substitui  $\nu \partial v_x / \partial y|_{y=0}$ . A componente  $v_y$  da velocidade pode ser substituída por:

$$v_y = - \int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy$$

o que leva a :

$$\int_0^\delta \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy - U \frac{\partial U}{\partial x} \right) dy = - \frac{\tau_p}{\rho}$$

Integrando por partes o segundo termo do membro esquerdo:

$$\int_0^\delta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \right) dy = U \int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy - \int_0^\delta v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy$$

Portanto:

$$\int_0^\delta \left( 2v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - U \frac{\partial v_x}{\partial y} - U \frac{\partial U}{\partial x} \right) dy = -\frac{\tau_p}{\rho}$$

ou:

$$\frac{\tau_p}{\rho} = \delta U \frac{\partial U}{\partial x} - \int_0^\delta \frac{\partial v_x^2}{\partial x} dy + U \int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \quad (8.17)$$

Usando a definição de espessura de quantidade de movimento,  $\delta_2$  (Eq. 8.14):

$$\frac{d}{dx} (U^2 \delta_2) = \frac{d}{dx} \int_0^\delta (v_x U - v_x^2) dy = U \int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial y} dy - \int_0^\delta \frac{\partial v_x^2}{\partial x} dy \quad (8.18)$$

Comparando as Eqs. (8.17 e 8.18) obtemos:

$$\frac{\tau_p}{\rho} = \frac{d}{dx} (U^2 \delta_2) + \delta_1 U \frac{\partial U}{\partial x}$$

Rearranjando este resultado obtém-se a segunda relação integral de von Kármán:

$$\frac{\tau_p}{\rho U^2} = \frac{d\delta_2}{dx} + \frac{2\delta_2 + \delta_1}{U} \frac{dU}{dx} \quad (8.19)$$

As duas relações integrais de von Kármán (Eqs. 8.16 e 8.19) são equações diferenciais ordinárias, obtidas na suposição de que se pode substituir a componente de velocidade  $v_x(x, y)$  pelas espessuras  $\delta_1$  e  $\delta_2$ .

### 8.5.3 O método de Pohlhausen

Um dos primeiros métodos para a determinação do campo de velocidades dentro da camada limite foi proposto por Pohlhausen, que consiste em encontrar uma solução para  $v_x(x, y)$  na forma de um polinômio que satisfaça à Eq. 8.19 e a algumas das condições de contorno abaixo prescritas:

$$v_x = v_y = 0 \quad \text{em} \quad y = 0 \quad \text{e:} \quad v_x \rightarrow U \quad \text{quando} \quad y \rightarrow \infty.$$

A equação da quantidade de movimento Prandtl, aplicada à superfície do corpo sobre o qual a camada limite se desenvolve, toma a forma:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{U}{\nu} \frac{dU}{dx} \quad \text{em} \quad y = 0.$$

Derivando a Eq. 8.5 em relação e substituindo o termo  $U dU/dx$  pelo gradiente de pressões fora da camada limite, obtém-se:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_y \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \frac{dU}{dx} \right) + \nu \frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}. \quad (8.20)$$

Todas as derivadas do membro esquerdo da equação acima se anulam na superfície do corpo. A derivada em relação a  $y$  do gradiente de pressão externo à camada limite se anula igualmente. conclui-se que:

$$\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} = 0 \quad \text{em} \quad y = 0. \quad (8.21)$$

Derivando a Eq. 8.20 em relação a  $y$ :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + v_x \frac{\partial^3 v_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^4 v_x}{\partial y^4}.$$

Essa equação simplifica-se e toma a forma abaixo, quando aplicada à superfície do corpo:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial x} = \nu \frac{\partial^4 v_x}{\partial y^4} \quad \text{em} \quad y = 0. \quad (8.22)$$

Em  $y \rightarrow \infty$  têm-se que  $v_x \rightarrow U$  e, consequentemente:

$$\frac{\partial^n v_x}{\partial y^n} \rightarrow 0. \quad (8.23)$$

onde  $\delta(x)$  é a espessura da camada limite. Procura-se uma solução para  $v_x(x, y)$  na forma::

$$\frac{v_x}{U} = f(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\delta}, \quad (8.24)$$

As condições de contorno para  $f(\eta)$  na superfície do sólido são:

$$f(0) = f'''(0) = 0 \quad \text{e:} \quad f''(0) = -\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU}{dx}. \quad (8.25)$$

Da Eq. 8.22 obtém-se a condição de contorno adicional:

$$f''''(0) = \frac{\delta^3}{\nu} f' \frac{d}{dx} \left( U \frac{f'}{\delta} \right) \Big|_{\eta=0}. \quad (8.26)$$

As condições de contorno para  $v_x(x, y)$  fora da camada limite, dadas pela Eq. 8.23 são atingidas assintoticamente. Admite-se no entanto que possam ser transferidas para  $y = \delta$  sem perda apreciável de precisão. As condições a serem preenchidas por  $f(\eta)$  no topo da camada limite são portanto:

$$f(1) = 1 \quad \text{e:} \quad f^{(n)}(1) = 0 \quad n \geq 1.$$

A tensão de cisalhamento que atua na superfície do corpo é dada por  $\tau_p = \mu \partial v_x / \partial y$ . Essa equação pode ser reescrita como:

$$\frac{\tau_p}{\rho U^2} = \frac{\nu}{\nu} U \delta f'(0). \quad (8.27)$$

Reescrevemos as expressões das espessuras de deslocamento e de quantidade de movimento utilizando a definição da velocidade adimensional dada pela Eq. 8.24:

$$\delta_1 = \delta \int_0^1 (1 - f) d\eta \quad \delta_2 = \delta \int_0^1 f (1 - f) d\eta. \quad (8.28)$$

Substituindo as Eqs. 8.27 e 8.28 na Eq. 8.19 obtém-se:

$$\frac{\nu}{U\delta}f'(0) = \frac{d}{dx}\delta \int_0^1 f(1-f)d\eta + \frac{2\delta}{U}\frac{dU}{dx} \int_0^1 f(1-f)d\eta + \frac{\delta}{U}\frac{dU}{dx} \int_0^1 (1-f)d\eta.$$

Rearranjando os termos:

$$\frac{f'(0)}{U} = \frac{\delta}{\nu}\frac{d\delta}{dx} \int_0^1 f(1-f)d\eta + \frac{1}{U}\frac{\delta^2}{\nu}\frac{dU}{dx} \left[ 2 \int_0^1 f(1-f)d\eta + \int_0^1 (1-f)d\eta \right].$$

Somando e subtraindo à equação acima o termo:

$$\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\nu}\frac{d^2U}{dx^2} \frac{\int_0^1 f(1-f)d\eta}{dU/dx},$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{f'(0)}{U} &= \frac{\delta}{\nu}\frac{d\delta}{dx} \int_0^1 f(1-f)d\eta + \frac{\delta^2}{\nu}\frac{d^2U}{dx^2} \frac{\int_0^1 f(1-f)d\eta}{dU/dx} - \\ &\quad \frac{\delta^2}{\nu}\frac{d^2U}{dx^2} \frac{\int_0^1 f(1-f)d\eta}{dU/dx} + \frac{1}{U}\frac{\delta^2}{\nu}\frac{dU}{dx} \left[ 2 \int_0^1 f(1-f)d\eta + \int_0^1 (1-f)d\eta \right]. \end{aligned}$$

Levando em conta a definição de  $\Lambda$  (Eq. 8.25 e rearranjando os termos da última equação, obtém-se:

$$\frac{d\Lambda}{dx} = \frac{1}{U}\frac{dU}{dx} \frac{f'(0)}{\int_0^1 f(1-f)d\eta} - \Lambda \left[ 2 + \frac{\int_0^1 (1-f)d\eta}{\int_0^1 f(1-f)d\eta} \right] + \Lambda \frac{d^2U/dx^2}{dU/dx},$$

ou:

$$\frac{d\Lambda}{dx} = \frac{1}{U}\frac{dU}{dx} g(\Lambda) + \Lambda \frac{d^2U/dx^2}{dU/dx},$$

onde:

$$g(\Lambda) = \frac{f'(0)}{\int_0^1 f(1-f)d\eta} - \Lambda \left[ 2 + \frac{\int_0^1 (1-f)d\eta}{\int_0^1 f(1-f)d\eta} \right].$$

O método de Pohlhausen consiste em procurar soluções que satisfaçam à Eq. 8.19 e a algumas das condições dadas pela Eqs. 8.23 a 8.26, resultando em um perfil  $v_x(x, y)$  aproximado do exato.

#### 8.5.4 O método de Thwaites

O método de Thwaites é um procedimento empírico para resolução da equação de quantidade de movimento integral. O método é baseado na observação que a maioria das camadas limites podem ser bem caracterizadas por uma família de perfis com apenas um parâmetro de forma  $\lambda$ . Define-se o parâmetro de forma  $\lambda$ , tal que

$$\lambda = \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} \quad (8.29)$$

A eq. de von Karmann pode ser re-escrita como:

$$\frac{U_e \delta_2}{\nu} \frac{d\delta_2}{dx} + (H + 2) \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_w \delta_2}{\mu U_e} = S \quad (8.30)$$

Assume-se que  $H = H(\lambda)$  e  $S = S(\lambda)$ , e a equação pode ser re-escrita como:

$$U_e \frac{d}{dx} \left( \frac{\lambda}{\frac{dU_e}{dx}} \right) = F(\lambda) \quad (8.31)$$

onde

$$F(\lambda) \equiv 2(S(\lambda) - \lambda(H(\lambda) + 2)) \quad (8.32)$$

Utilizando soluções analíticas e resultados experimentais, Thwaites mostrou que uma boa correlação de dados é obtida usando apenas um ajuste linear, tal que:

$$F(\lambda) = A - B\lambda \quad (8.33)$$

e recomenda  $A = 0,45$  e  $B = 6$  como sendo o melhor ajuste empírico. A Fig. (8.5) ilustra o bom ajuste de dados associados às soluções de perfis de Falkner-Skan obtidos com a utilização desses parâmetros. A equação acima pode ser integrada analiticamente, obtendo-se:

$$\delta_2^2 = \delta_{20}^2 \left( \frac{U_{e0}}{U_e} \right)^6 + \frac{0,45\nu}{U_e^6(x)} \int_0^x U_e^5(x) dx \quad (8.34)$$

onde  $\delta_{20}$  é a espessura de quantidade de movimento em  $x = 0$ , que normalmente se assume como nula. A integral acima pode ser avaliada, ao menos numericamente, quando  $U_e$  é conhecido. Uma vez que  $\delta_2$  é obtido, correlações empíricas são utilizadas para se obter o fator de forma  $H$  e tensão cizalhante na parede. Thwaites correlacionou valores da tensão cizalhante adimensional  $S = \tau_w \delta_2 / (\mu U)$  com  $\lambda$ , e os resultados podem ser ajustados por:

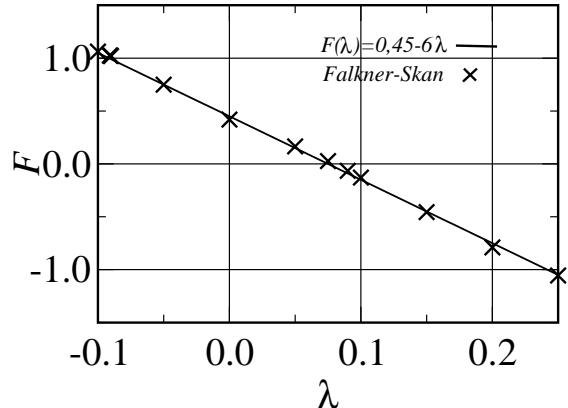


Figura 8.5: Comparação entre ajuste da Eq.8.33 e dados de soluções de perfis de Falkner-Skan.

$$S(\lambda) = \frac{\tau_w \delta_2}{\mu U} \approx (\lambda + 0,09)^{0,62} \quad (8.35)$$

Outras expressões também utilizadas são:

$$S = 0,22 + 1,420\lambda + \frac{0,018\lambda}{0,107 + \lambda} \quad -0,1 \geq \lambda < 0 \quad (8.36)$$

$$S = 0,22 + 1,57\lambda - 1,8\lambda^2 \quad 0 \geq \lambda \geq 0,1 \quad (8.37)$$

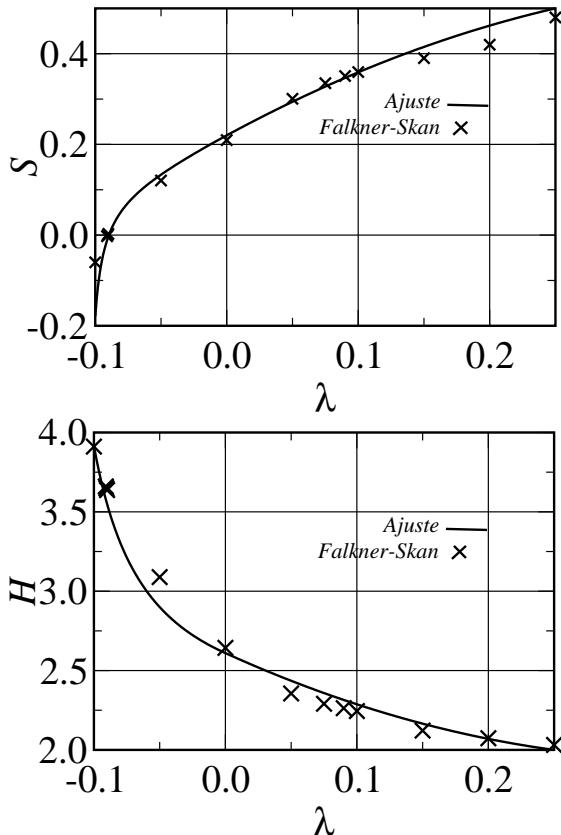


Figura 8.6: Comparação entre ajustes obtidos pelas Eq. 8.36-8.39 e dados de soluções de perfis de Falkner-Skan.

$$H = \frac{0,0731}{0,14 + \lambda} + 2,088 \quad (-0,1 \geq \lambda < 0) \quad (8.38)$$

$$H = 2,61 - 3,75\lambda + 5,24\lambda^2 \quad (0 \geq \lambda \geq 0,1) \quad (8.39)$$

A Fig. (8.6) ilustra uma comparação de dados associados aos perfis de Falkner-Skan, e às curvas de ajuste empíricas acima.

Podemos ilustrar o funcionamento do método de Thwaites, aplicando-o para o escoamento de Blasius. Neste caso temos:  $U_e = \text{constante}$ ,  $\lambda = 0$ , logo,  $F = 0,45$  e  $S = 0,225$

$$\delta_2^2 = \frac{0,45\nu}{U_e} x \quad (8.40)$$

$$\delta_2 = \frac{0,6708}{\sqrt{Re_x}} \quad (8.41)$$

Apesar do seu caráter empírico, o método de Thwaites é considerado o melhor dentro da variedade de métodos integrais para a camada limite.

## 8.6 Estabilidade de Camadas Limite – A Equação de Orr-Sommerfeld

Para que uma solução das equações que regem o comportamento de um fluido seja efetivamente observada é necessário que a solução seja estável com relação a perturbações à

quais o fluido está permanentemente sujeito [38]. A teoria da estabilidade linear de escoamentos laminares decompõe o campo hidrodinâmico em uma solução média, conhecida, cuja estabilidade é o objeto da análise, e à qual se adiciona uma pequena perturbação [56, 35, 45, 47, 48]. O campo médio é também denominado de estado base do problema. Consideramos o campo médio como estacionário e incompressível, tendo componentes  $\bar{v}_x$ ,  $\bar{v}_y$ ,  $\bar{v}_z$  e  $\bar{p}$ . As componentes da perturbação dependentes do tempo são  $\tilde{v}_x$ ,  $\tilde{v}_y$ ,  $\tilde{v}_z$  e  $\tilde{p}$ . O campo hidrodinâmico tem portanto a forma:

$$v_x = \bar{v}_x + \tilde{v}_x \quad v_y = \bar{v}_x + \tilde{v}_y \quad v_z = \bar{v}_x + \tilde{v}_z \quad p = \bar{p} + \tilde{p}. \quad (8.42)$$

Consideramos o caso da estabilidade de uma camada limite bidimensional que se forma sobre um corpo esbelto, alinhado ao escoamento. Nessas condições, supomos que  $\bar{v}_x = \bar{v}_x(y)$ ,  $\bar{v}_y = 0$   $\bar{p} = \bar{p}(x, y)$ . Quando a hipótese de que a componente  $U$  do campo médio depende apenas de  $y$  o escoamento denomina-se *paralelo*. É o caso de escoamentos em canais, suficientemente longe da entrada. As variações de  $\bar{v}_x$  na direção  $x$  somente se tornam significativas para grandes variações dessa variável, ao contrário do que ocorre com variações de  $U$  na direção  $y$ . Cabe mencionar que  $\bar{v}_x$  representa o campo médio incluindo a região da camada limite, onde a variação na direção  $y$  é muito grande. A hipótese de que o campo de velocidades varia pouco na direção  $x$  (escoamento paralelo) foi usada na Sec. 7.7, onde se fez uma transformação de coordenadas que permitiu modelar a espessura da camada limite sobre uma placa semi infinita, a partir do estudo do campo que se forma sobre uma placa infinita posta em movimento de forma impulsiva (problema de Rayleigh).

Substituímos a forma do campo perturbado, dada pelas Eqs. 8.42 e com as hipóteses acima, a respeito do campo médio, nas equações da continuidade e de Navier-Stokes. Nesse ponto, fazemos a hipótese de que a perturbação é pequena e desprezamos produtos da mesma. Obtemos o sistema linearizado de equações de evolução da perturbação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \tilde{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \nu \left( \frac{d^2 \bar{v}_x}{dy^2} + \nabla^2 \tilde{v}_x \right) \\ \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \nu \nabla^2 \tilde{v}_y. \end{aligned}$$

Como o campo médio satisfaz às equações de Navier-Stokes, têm-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \nu \left( \frac{d^2 \bar{v}_x}{dy^2} \right) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Consequentemente as equações de evolução de pequenas perturbações simplificam-se e to-

mam a forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \tilde{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \tilde{v}_x \\ \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \nu \nabla^2 \tilde{v}_y.\end{aligned}$$

A pressão pode ser eliminada por diferenciação cruzada das duas últimas equações (ver problema 3.17). Obtem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} \right) + \bar{v}_x \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial x^2} - \frac{d\bar{v}_x}{dy} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} - \bar{v}_x \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} \frac{d\bar{v}_x}{dy} - \tilde{v}_y \frac{d^2 \bar{v}_x}{dy^2} = \quad (8.43)$$

$$\nu \nabla^2 \left( \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} \right). \quad (8.44)$$

Sendo o campo hidrodinâmico bidimensional e incompressível, o comportamento de perturbações periódicas no tempo e no espaço, moduladas na direção  $x$ , pode ser descrito por uma função corrente, da forma:

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y) \exp[i(\alpha x - \beta t)] + cc = \varphi(y) \exp[i\alpha(x - ct)] + cc. \quad (8.45)$$

Na Eq. 8.45,  $cc$  representa o complexo conjugado e  $\alpha$  é o número de onda da perturbação, definido por  $\alpha = 2\pi/\lambda$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda. O parâmetro  $c = \beta/\alpha$  é tal que  $\Re(c)$  é a velocidade de fase da perturbação, isso é a velocidade com que uma fase especificada muda de posição e  $\Im(c)$  é a taxa de amplificação, ou de amortecimento da perturbação. As componentes de perturbação da velocidade são obtidas pelas relações:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \varphi'(y) \exp[i(\alpha x - \beta t)] + cc \\ \tilde{v}_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\alpha \varphi(y) \exp[i(\alpha x - \beta t)] + cc.\end{aligned}$$

Reescrevendo a Eq. 8.44 em termos da função corrente:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \bar{v}_x \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \bar{v}'_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \bar{v}_x \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \bar{v}'_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \bar{v}''_x \frac{\partial \psi}{\partial x} = \\ -\nu \nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right).\end{aligned}$$

Simplificando essa equação:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \bar{v}_x \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \bar{v}_x \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \bar{v}''_x \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\nu \nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right). \quad (8.46)$$

Procedemos à adimensionalização das variáveis. Identificando as variáveis adimensionais com um asterisco, definimos:

$$t = t^* \frac{l}{U_\infty} \quad v_j = U_\infty v_j^* \quad \psi = l U_\infty \psi^* \quad x = l x^*,$$

onde  $l$  é uma dimensão característica do problema, como a largura do canal, ou a corda de um aerofólio, ou então, a espessura  $\delta$ , da camada limite. Substituindo as definições acima na Eq. 8.46 e rescrevendo as variáveis adimensionais sem o asterisco encontramos:

$$\frac{U_\infty^2}{l^2} \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \bar{v}_x \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \bar{v}_x \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \bar{v}_x'' \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = -\frac{\nu U_\infty}{l^3} \nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right).$$

Simplificando:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \bar{v}_x \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \bar{v}_x \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \bar{v}_x'' \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{Re} \nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right),$$

onde  $Re = U_\infty l / \nu$ . Sendo a equação de evolução de pequenas perturbações linear, a evolução de cada componente de uma perturbação se faz independentemente das demais. O princípio de superposição se aplica. Pode-se analisar a evolução de cada componente separadamente, sem a parcela complexa conjugada. Se uma componente da perturbação tiver taxa de amplificação positiva, o campo médio será linearmente instável com relação a essa componente. Substituímos  $\psi = \varphi(y) \exp[i\alpha(x - ct)]$  (já escrito em forma adimensional) na equação acima, observando que os operadores diferenciais podem ser substituídos como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\alpha c \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow i\alpha \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow -\alpha^2 \quad \nabla^2 \rightarrow \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2,$$

obtemos uma equação de quarta ordem da forma:

$$(\bar{v}_x - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - \bar{v}_x'' \varphi = -\frac{i}{\alpha Re} (\varphi''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi). \quad (8.47)$$

Essa última é conhecida como equação de Orr-Sommerfeld. O estudo da estabilidade de camadas limite bidimensionais que se formam em sobre a superfície de corpos esbeltos se faz a partir dessa equação. O membro esquerdo da equação se origina dos termos convectivos das equações de Navier-Stokes, enquanto os do membro direito têm origem nos efeitos viscosos. As condições de contorno aplicáveis são  $\varphi = \varphi' = 0$  em  $y = 0$  e em  $y \rightarrow \infty$ . A equação pode ser reescrita na forma:

$$\left[ \frac{i}{\alpha Re} \left( \frac{d^4}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2}{dy^2} + \alpha^4 \right) + \bar{v}_x \left( \frac{d}{dy^2} - \alpha^2 \right) - \bar{v}_x'' \right] \varphi = c \left( \frac{d}{dy^2} - \alpha^2 \right) \varphi.$$

Essa equação é da forma  $A\varphi = cB\varphi$ , onde  $A$  e  $B$  são dois operadores diferenciais lineares. O problema da estabilidade de uma camada limite bi-dimensional que se forma sobre a superfície de um corpo esbelto recai em um problema generalizado da determinação das autofunções  $\varphi(y)$  e dos autovalores  $c$ , de um operador diferencial linear. O problema tem como parâmetros o número de onda,  $\alpha$  e  $Re$ , além do perfil estacionário do campo médio,  $\bar{v}_x(y)$ . A parte real da velocidade de fase,  $\Re(c)$ , pode ser especificada. Uma perturbação da qual se especifica o número de onda,  $\alpha$  e a velocidade de propagação,  $\Re(c)$ , superposta a um escoamento conhecido, que se faz sob número de Reynolds dado, será marginalmente estável se sua taxa de crescimento,  $\Im(c)$ , for igual a zero. O problema pode ser resolvido, por exemplo, pela discretização do domínio ao longo da direção  $y$  e pela representação por

diferenças finitas, dos operadores diferenciais. Recai-se em um problema generalizado da determinação das autofunções e autovalores de um operador algébrico linear.

Os resultados da análise são normalmente apresentados na forma de curvas de estabilidade neutra, ao longo das quais a taxa de crescimento é igual a zero, traçadas no plano  $Re \times \alpha$ . Em geral, essas curvas apresentam um número de Reynolds mínimo, abaixo do qual, nenhuma perturbação é amplificada. Esse mínimo denomina-se número de Reynolds crítico e ocorre em um valor crítico de  $\alpha$ , que identifica o comprimento de onda da primeira perturbação amplificada. Como o limite de estabilidade ocorre normalmente para valores elevados do número de Reynolds, pode-se perguntar sobre a estabilidade do caso limite em que despreza-se os termos viscosos da equação de Orr-Sommerfeld. A Eq. 8.47 torna-se:

$$(\bar{v}_x - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - \bar{v}_x''\varphi = 0 \quad (8.48)$$

O descarte dos termos viscosos reduz a equação de Orr-Sommerfeld a uma equação de segunda ordem. Consequentemente, duas condições de contorno devem ser eliminadas. As duas condições restantes são as que prescrevem que a componente  $v_y$  da velocidade se anula junto à parede e longe da mesma, isso é  $\varphi = 0$  em  $y = 0$  e em  $y \rightarrow \infty$ .

Alguns resultados importantes do estudo da estabilidade linear de camadas limite laminares são [56]:

1. Perfis estacionários do campo médio  $\bar{v}_x(y)$  que contenham um ponto de inflexão são sempre instáveis;
2. A velocidade de propagação,  $\Im(c)$ , é sempre menor do que o valor máximo de  $\bar{v}_x(y)$ .

## 8.7 Problemas

1. Usando a transformação de coordenadas  $\eta = y/\sqrt{\nu t}$  expressar a equação não estacionária da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

aplicável ao movimento não estacionário sobre uma placa plana infinita, em termos da variável  $\eta$ [8].

2. A transformação de von Mises, usada em problemas de camada limite laminar bidimensionais, consiste em usar as variáveis  $(x, \psi)$ , onde  $\psi$  é a função corrente. Mostrar que, com essa transformação, a equação de Prandtl:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

sujeita às condições de contorno  $v_x = v_y = 0$  quando  $y = 0$  e  $v_x \rightarrow U$  quando  $y \rightarrow \infty$ , toma a forma:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - U \frac{dU}{dx} = \nu v_x \frac{\partial}{\partial \psi} \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial \psi} \right),$$

sujeita às condições de contorno  $v_x = 0$  quando  $\psi = 0$  e  $v_x \rightarrow U$  quando  $\psi \rightarrow \infty$  [8].

3. Mostrar que a equação de Blasius (Eq. 8.8) toma a forma [35]:

$$\dot{x} = x(1 + x + y), \quad \dot{y} = y(2 + x - y)$$

pela transformação de variáveis  $x = ff'/f''$ ,  $y = f'^2/ff''$  e  $t = \log |f'|$ .

4. Deduzir a equação de Falkner-Skan (Eq. 8.12) utilizando as definições (8.11) e a condição  $U \propto x^n$ .
5. Calcular as relações espessura de deslocamento/espessura de velocidade da camada limite e espessura de quantidade de movimento/espessura de velocidade da camada limite, isso é,  $\delta^*/\delta$  e  $\theta/\delta$  para os seguintes perfis de velocidade:

$$a) \frac{v_x}{U} = \frac{y}{\delta} \quad b) \frac{v_x}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad c) \frac{v_x}{U} = \operatorname{sen} \frac{\pi y}{2\delta}$$

6. A integral de von Kármán para uma placa plana ( $U = cte.$ ) é:

$$\frac{\tau_p}{\rho} = U^2 \frac{d\delta_2}{dx} = U^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \frac{v_x}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy \quad (8.49)$$

e a tensão de cisalhamento na parede (em regime laminar):

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (8.50)$$

Aproxima-se o perfil de velocidades da camada limite por:

$$\frac{v_x}{U} = \operatorname{sen} \frac{\pi y}{2\delta} \quad (8.51)$$

Substituindo (8.51) em (8.50) e (8.49) pode-se obter uma equação diferencial da camada limite do tipo:

$$f(\delta) = C \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}, \quad (8.52)$$

onde  $C$  é uma constante. Integrar (8.52) de modo a obter  $\delta(x)$  e  $\tau_p(x)$ . Obter o valor da constante  $C$ .

7. O perfil de velocidades em uma camada limite laminar, bi-dimensional é descrito pela relação:

$$\frac{v_x}{U} = 1 - \exp\left(\frac{-y}{\delta}\right), \quad (0 \leq y < \infty),$$

onde  $U$  é a velocidade fora da camada limite e, em geral, função de  $x$ .  $\delta(x)$  é a espessura da camada limite. Pede-se:

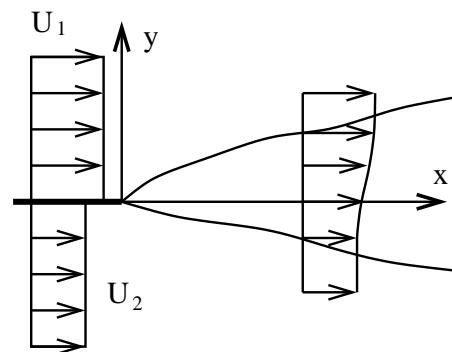
- (a) Obter as espessuras de deslocamento, de quantidade de movimento e a tensão de cisalhamento na parede,  $\tau_p$ , em função de  $U(x)$  e  $\delta(x)$ ;
- (b) Usar a relação integral de von Kármán para obter uma equação diferencial para  $\delta(x)$ ;

- (c) No caso da camada limite que se desenvolve sobre uma placa plana  $U$  é constante. Resolver a equação diferencial e obter as espessuras de deslocamento e de quantidade de movimento, respectivamente,  $\delta^*(x)$  e  $\theta(x)$  e o coeficiente de tensão de cisalhamento local,  $C_f(x) = \tau_p/\rho U^2$ .
8. Calcular o arraste que atua sobre uma placa plana de  $L = 4\text{ m}$  de comprimento e  $W = 0,3\text{ m}$  de largura, imersa em uma corrente de ar com velocidade de  $100\text{ m/s}$ . Usar a solução de Blasius e desprezar os efeitos de bordas.
  9. Calcular a espessura de velocidade  $\delta$ , a espessura de deslocamento e espessura de quantidade de movimento à distância de  $4\text{ m}$  do bordo de ataque da placa plana do problema 8. Comparar a espessura de velocidade  $\delta$  com o comprimento  $L$  e com a largura  $W$  e verificar que  $\delta/L$  e  $\delta/W$  são muito menores do que 1.
  10. Usando as condições do problema 8, é válido admitir que o escoamento é incompressível? Por quê?
  11. Uma das faces de uma placa plana encontra-se em contato com o escoamento de um gás aquecido. Quer-se manter a temperatura da placa à uma temperatura constante e igual a  $38^\circ\text{C}$  resfriando a placa com água, através da outra superfície. Para a determinação da vazão da água de resfriamento é necessário determinar a carga térmica térmica transferida do gás para a placa. As condições de operação do escoamento sobre a placa são:

Comprimento da placa	$2,75\text{ m}$
Largura da placa	$0,6\text{ m}$
Temperatura do gás a montante da placa	$149^\circ\text{C}$
Velocidade do gás a montante da placa	$61\text{ m/s}$
Número de Prandtl do gás	0,6
Viscosidade cinemática do gás	$1,864 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$
Condutividade térmica do gás	$114,64\text{ J/m h}^\circ\text{C}$
Calor específico $C_p$ a pressão constante do gás	$1,017 \times 10^{-3}\text{ J/kg}^\circ\text{C}$

Admitir que o escoamento seja incompressível e laminar. Pede-se:

- (a) Calcular a taxa de transferência de calor da placa;
- (b) Calcular o número de Nusselt da superfície da placa em contato com o gás.
12. Seja o escoamento de dois fluidos que se movem paralelamente, com velocidades diferentes. Os dois fluidos tem velocidade uniforme e encontram-se separados por uma partição até o ponto  $x = 0$ , onde a partição termina. A partir desse ponto os escoamentos se misturam e os efeitos viscosos alteram os perfis de velocidade para uma curva suave, conforme representado na figura ao lado. Pede-se:



- (a) Mostrar que o escoamento na região de mistura é descrito por equações de camada limite;
- (b) Verificar a existência de soluções de similaridade da forma:

$$\psi(x, y) = U(x)f(\eta),$$

onde  $\eta = y/l(x)$ . Obter  $l(x)$  e a equação diferencial e as condições de contorno às quais  $f(\eta)$  deve satisfazer;

- (c) Escrever um programa em *Octave*, ou em outra linguagem, para resolver a equação diferencial obtida. Explicar a forma de satisfazer às condições de contorno do problema.
13. Determinar o perfil da camada limite sobre um cilindro circular, usando o método de Thwaites. A velocidade fora da camada limite é dada por:
- 
- $$\frac{U(x)}{U_\infty} = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{x}{R} \right),$$
- onde  $U_\infty$  é a velocidade uniforme do escoamento não perturbado,  $R$  é o raio do cilindro e  $x$ , a distância do ponto de estagnação dianteiro, medida sobre a superfície do cilindro. Pede-se:
- (a) Obter as equações do método de Thwaites para a determinação do perfil da camada limite, usando as seguintes variáveis adimensionais:
- $$v^* = \frac{v}{U_\infty}, \quad x^* = \frac{x}{R}, \quad z^* = \left( \frac{\delta_2}{R} \right)^2 Re,$$
- onde  $Re$  é o número de Reynolds, para obter:
- $$\frac{\delta_1}{R} \sqrt{Re}, \quad \frac{\theta}{R} \sqrt{Re}, \quad C_f \sqrt{Re},$$
- onde  $C_f$  é o coeficiente de tensão de cisalhamento, definido por  $C_f = \tau_p / \rho U^2$  e  $\tau_p$  é a tensão de cisalhamento que age sobre a parede do cilindro. Localizar o ponto de descolamento da camada limite;
- (b) Escrever um programa em *Octave*, ou em outra linguagem, para determinar a espessura adimensional de deslocamento, de quantidade de movimento, do coeficiente de tensão de cisalhamento  $C_f$  e o ponto de descolamento da camada limite;
- (c) Usar a forma integral do método de Thwaites (com  $F(\lambda) = 0,45 - 6\lambda$ ) para determinar os mesmos parâmetros solicitados no item 13b acima e comparar os resultados.
14. A região de contração de um túnel de vento bi-dimensional tem a forma mostrada na figura ao lado. A camada limite desenvolve-se sobre a parede inferior a partir de

$x = 0$ , onde a espessura de quantidade de movimento é  $\theta = 0$ . A velocidade fora da camada limite é dada por:

$$\begin{aligned} U &= \frac{U_0}{2} && \text{para: } 0 < x < \frac{L}{2} \\ U &= \frac{U_0 x}{L} && \text{para: } \frac{L}{2} < x < L. \end{aligned}$$

Pede-se:

- (a) Calcular a espessura de quantidade de movimento  $\theta$  em  $x = L/2$  usando a forma integral do método de Thwaites;
- (b) Repetir o procedimento em  $x = L$ ;
- (c) Calcular o comprimento efetivo de uma placa plana, sobre a qual um escoamento que incida com velocidade  $U_\infty$  desenvolva uma camada limite com a mesma espessura de quantidade de movimento encontrada na questão 14a acima.

Expressar os resultados em termos dos parâmetros e constantes adimensionais do problema.

15. Seja o problema da esteira laminar bi-dimensional, que se forma a jusante de um corpo. A velocidade do escoamento incidente não perturbado, o coeficiente de arraste nessa condição e a dimensão característica do corpo são dados, respectivamente, por  $U_\infty$ ,  $C_D$  e  $L$ . O escoamento na esteira obedece com boa aproximação, às equações de camada limite. Adicionalmente, a análise do escoamento na esteira, longe do corpo, mostra que  $U_\infty - v_x(x, y) = v_1(x, y) \ll U_\infty$ . Pede-se:

- (a) Obter a equação diferencial e as condições de contorno às quais  $v_1(x, y)$  deve satisfazer;
- (b) Introduzir a varável de similaridade  $\eta = y/l(x)$  e a decomposição:

$$u_1(x, y) = u_c(x)f(\eta),$$

onde  $l(x)$  mede a espessura local da esteira e  $u_c$ , a deficiência de velocidade na linha de centro da esteira. Admitir uma dependência de  $u_c(x)$  e de  $l(x)$  com  $x$ , na forma de uma lei de potênci. Obter as expressões gerais para  $u_c(x)$  e para  $l(x)$ , a equação diferencial e as condições de contorno às quais  $f(\eta)$  deve satisfazer;

- (c) Resolver a equação diferencial e obter uma expressão para a deficiência de velocidade na esteira,  $u_1(x, y)$ , em função dos parâmetros  $C_D$ ,  $L$ ,  $U_\infty$  e  $\nu$ .

16. Considera-se o problema da estabilidade não viscosa do perfil de velocidades dado por:

$$\begin{aligned} U(y) &= 0 && (y < 0) \\ U(y) &= \frac{V_y}{b} && (0 < y < b) \\ U(y) &= V && (y > b). \end{aligned}$$

A massa específica do fluido é uniforme. Obter a velocidade de propagação  $\beta_r/\alpha$  e a taxa de amplificação  $\beta_i$  de pequenas perturbações. Plotar a velocidade adimensional de propagação e a taxa adimensional de amplificação, em função do número de onda da perturbação.

17. Usar os resultados do problema 13 para determinar o ponto de instabilidade sobre um cilindro circular sob número de Reynolds  $Re = U_\infty D/\nu = 10^6$ , onde  $U_\infty$  é a velocidade do escoamento não perturbado e  $D$ , o diâmetro do cilindro.
18. **Estabilidade de jatos circulares com relação a perturbações axissimétricas e helicoidais [49]:** Considera-se o campo médio constituído por um jato cilíndrico estacionário, de componentes  $v_r = v_\theta = 0$  e  $v_z = U(r)$ . A esse campo médio superpõe-se uma perturbação da forma:

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_r \\ \tilde{v}_\theta \\ \tilde{v}_z \\ \tilde{p}/\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(r) \\ iG(r) \\ H(r) \\ P(r) \end{pmatrix} \exp[in\theta + i\alpha(z - ct)] + cc, \quad (8.53)$$

onde  $\alpha$  é o número de onda da perturbação e  $\Im(c)$ , a taxa de crescimento da perturbação. Pede-se:

- (a) Escrever as componentes do campo hidrodinâmico na forma de um campo médio mais a perturbação, substituir a forma do campo nas equações de Navier-Stokes e da continuidade, linearizá-las e extrair das equações obtidas, as equações do campo médio;
- (b) Substituir a perturbação dada pela Eq. 8.53 nas equações linearizadas e mostrar que se obtém um sistema de equações ordinárias lineares da forma:

$$\alpha F + G' + \frac{1}{r}G + \frac{n}{r}H = 0 \quad (8.54)$$

$$\alpha(U - c)F + U''G = -\alpha P - i\nu \left[ F'' + \frac{1}{r}F' - \left( \alpha^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) F \right] \quad (8.55)$$

$$\alpha(U - c)G = P' - i\nu \left[ G'' + \frac{1}{r}G' - \left( \alpha^2 + \frac{n^2 + 1}{r^2} \right) G - \frac{2n}{r^2}H \right] \quad (8.56)$$

$$\alpha(U - c)H = \frac{n}{r}P - i\nu \left[ H'' + \frac{1}{R}H' - \left( \alpha^2 + \frac{n^2 + 1}{r^2} \right) H - \frac{2n}{r^2}G \right], \quad (8.57)$$

onde as aspas identificam derivação em relação a  $r$ . Justificar porque as condições de contorno externas são:

$$F, G, H, P \rightarrow 0 \quad \text{quando:} \quad r \rightarrow \infty$$

e as internas, levando em consideração que  $\tilde{v}_z$  e  $\tilde{p}$  devem ser independentes de  $\theta$ :

$$\begin{aligned} F(0) &= G(0) = 0 & (n \neq 0) \\ F(0) &= H(0) = 0 & (n \neq 1) \\ G(0) &= -H(0) & (n = 1). \end{aligned}$$

Consideremos a solução do sistema representado pelas Eqs. 8.54 a 8.57. Para isso, é conveniente tratar separadamente os casos em que  $n = 0$  (perturbações axissimétricas) e  $n \neq 0$  (perturbações helicoidais):

- (a) Para o caso de perturbações axissimétricas ( $n = 0$ ), têm-se que  $\partial/\partial\theta = v_\theta = 0$ . Eliminar  $F$  e  $P$  da Eqs. 8.54 a 8.57, de modo a obter uma equação de quarta ordem para  $G$ , da forma

$$\Delta_1^\alpha \Delta_1^\alpha G = i\alpha Re [(U - c)\Delta_1^\alpha G + WG], \quad (8.58)$$

onde:

$$W = \frac{1}{r}U' - U'' \quad \text{e:} \quad \Delta_m^\alpha = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - \alpha^2$$

e  $Re$  é o número de Reynolds. Mostrar que as condições de contorno aplicáveis a  $G$  são  $G(0) = G'(0) = G''(0) = G(\infty) = 0$ ;

- (b) Para o caso de perturbações helicoidais ( $n \neq 0$ ), é conveniente introduzir a mudança de variáveis  $S(r)$  e  $T(r)$ , tais que:

$$S = G - H \quad \text{e:} \quad T = G + H.$$

Eliminar  $F$  e  $P$  das Eqs. 8.54 a 8.57 e obter um sistema de equações para as variáveis  $S$  e  $T$ , da forma:

$$D_n \Delta_{1+n}^\alpha T - D_{-n} \Delta_{1-n}^\alpha S = i\alpha Re [(U - c)(D_n T - D_{-n} S) + U'(T - S)] \quad (8.59)$$

$$E_n \Delta_{1+n}^\alpha T + E_{-n} \Delta_{1-n}^\alpha S = i\alpha Re [(U - c)(E_n T + E_{-n} S) + U'(T + S)], \quad (8.60)$$

onde:

$$D_n = \frac{D}{dr} + \frac{1+n}{r} \quad \text{e:} \quad E_n = D_n + \frac{\alpha^2}{n} r.$$

As condições de contorno para  $S$  e  $T$  são:

$$S(\infty) = T(\infty) = S'(\infty) = T'S(\infty) = 0$$

$$S(0) = T(0) = 0 \quad (n \neq 1)$$

$$S'(0) = T(0) = 0 \quad (n = 1)$$

Pede-se resolver a Eq. 8.58 e as Eqs. 8.59 e 8.60 decompondo a solução em uma base de polinômios de Chebyshev, ou uma discretização de diferenças finitas do domínio na direção  $r$  e levantar a curva de estabilidade neutra do problema usando a solução de Hagen-Poiseuille do escoamento laminar dentro de um tubo, como solução do campo médio.



# Capítulo 9

## Introdução à Turbulência

### 9.1 Introdução

A turbulência encontrada nos fenômenos físicos observados em fluidos e em sistemas com grande número de graus de liberdade, cuja evolução obedece muitas vezes, a uma equação, ou um sistema de equações a derivadas parciais, ocorre quando os efeitos não lineares atingem certo grau de importância. Em células de convecção estendidas de Rayleigh-Bénard a turbulência surge quando o número de Rayleigh se situa em valor suficientemente acima do crítico [9, 62]. A turbulência ocorre também em sistemas astrofísicos e químicos, por exemplo.

No caso de escoamento de fluidos, a turbulência se origina da instabilidade de camadas de cisalhamento, que surge quando os efeitos não lineares se impõem, o que é caracterizado por números de Reynolds suficientemente altos.

No Brasil, a turbulência é objeto de estudo de vários grupos de pesquisa, quer na área da engenharia, quer da física. Na área da engenharia, a ABCM – Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas promove desde 1998, a Escola de Turbulência e Transição, com periodicidade bi-anual. Essa Escola se constitui em importante foro formativo e de discussão da produção brasileira na área. O material apresentado encontra-se reunido na coleção de livros Cadernos de Turbulência, editada pela ABCM, onde o leitor interessado em se aprofundar na matéria encontra referências mais completas. [58, 59, 60].

### 9.2 Descrição da Turbulência

Os redemoinhos formados no escoamento de fluidos são transportados pela corrente. O tamanho e a frequência dos vórtices dependem do dispositivo que os originou. O turbilhamento não cobre o campo todo. Algumas regiões permanecem calmas, enquanto noutras, a turbulência é grande. É o caso do que ocorre na saída de um bocal, ou sobre uma placa plana sobre a qual incide um escoamento uniforme. O campo, inicialmente laminar, apresenta as primeiras instabilidades além de certa distância, medida pelo número de Reynolds. As ondulações surgem de forma descontínua, passam a interagir entre si ao adquirirem amplitude suficientemente alta, até que o escoamento torna-se completamente turbulento.

### 9.2.1 Médias e Filtros

Frequentemente estamos interessados nas características médias de escoamentos turbulentos. Decomponemos cada grandeza física  $u$  na soma de um campo médio  $\bar{u}$  e uma componente de flutuação turbulenta  $u'$ , cuja média considerada é igual a zero. Os campos de velocidade e pressão são portanto decompostos em:

$$v_j = \bar{v}_j + v'_j \quad p = \bar{p} + p' \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'.$$

Existem diversas formas de se definir as grandezas médias e as flutuações, e as propriedades destas grandezas dependem da sua definição. Além da sua importância formal na derivação de equações para a modelarem de turbulência, a definição das médias é importante para a determinação das grandezas turbulentas a partir de dados experimentais ou computacionais.

#### Médias de Reynolds

As médias de Reynolds incluem as médias de conjunto, as médias temporais e as médias espaciais. No caso de um processo estacionário e homogêneo as três são idênticas. Simulações baseadas nas Médias de Reynolds das Equações de Navier-Stokes são denominadas de RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes).

##### 1. Média de Conjunto

$$\bar{f}(t, \mathbf{X}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(t, \mathbf{X}) \quad (9.1)$$

que é a média de medidas  $f_i(t, \mathbf{X})$ , onde  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ , obtidas em  $N$  experimentos.

##### 2. Média Temporal

$$\bar{f}(t, \mathbf{X}) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(t, \mathbf{X}) dt \quad (9.2)$$

Consideramos um intervalo de tempo maior do que o da ocorrência da flutuação turbulenta do campo hidrodinâmico, mas suficientemente pequeno para que a variação do valor médio das variáveis seja menor do que a das flutuações. Para escoamentos estacionários podemos tomar  $\Delta t \rightarrow \infty$ .

##### 3. Média Espacial

$$\bar{f}(t) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V f(t, \mathbf{X}) dV \quad (9.3)$$

Esta média pode ser utilizada para turbulência homogênea, em que as grandezas médias do escoamento são uniformes no espaço. Em muitos escoamentos podemos considerar que as grandezas turbulentas são homogêneas em uma ou mais dimensões, ou considerar que são localmente homogêneas.

## Propriedades das Médias de Reynolds

As médias de Reynolds possuem as seguintes propriedades:

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f}, \quad (9.4)$$

$$\bar{f}' = 0 \quad (9.5)$$

$$\bar{\bar{f}g'} = 0, \quad (9.6)$$

$$\bar{\bar{fg}} = \bar{f}\bar{g}, \quad (9.7)$$

$$\bar{\bar{f+g}} = \bar{f} + \bar{g} \quad (9.8)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \quad (9.9)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \quad (9.10)$$

$$\int f dx_i = \int \bar{f} dx_i \quad (9.11)$$

$$\int f dt = \int \bar{f} dt \quad (9.12)$$

## Média de Favre

A média de Favre

$$\tilde{f} = \frac{\bar{\rho f}}{\bar{\rho}} \quad (9.13)$$

pode ser chamada de média ponderada pela massa. A utilização desta média nas equações de Navier-Stokes compressíveis conduz a expressões mais simples do que as obtidas utilizando-se as médias de Reynolds. Simulações baseadas nas Médias de Favre das Equações de Navier-Stokes são denominadas de FANS (Favre-averaged Navier-Stokes). Normalmente, somente a velocidade e as variáveis termodinâmicas médias são obtidas pelas médias de Favre, enquanto a massa específica e a pressão médias são obtidas pelas médias de Reynolds. As flutuações associadas às médias de Favre de  $f$  são representadas por  $f''$ , ou seja  $f = \tilde{f} + f''$ .

## Propriedades das Médias de Favre

As médias e flutuações de Favre possuem as seguintes propriedades:

$$f'' = f - \bar{f} - \frac{\rho' f'}{\bar{\rho}}, \quad (9.14)$$

$$\bar{f}'' = -\frac{\rho' f'}{\bar{\rho}} \quad (9.15)$$

$$\bar{f}'' \neq 0, \quad (9.16)$$

$$\frac{\rho f''}{\bar{\rho}} = 0, \quad (9.17)$$

$$\frac{\rho f}{\bar{\rho}} = \bar{\rho} \tilde{f}. \quad (9.18)$$

### 9.2.2 Filtros espaciais

Os filtros espaciais tem por fim produzirem médias espaciais locais. Um exemplo típico é o que calcula a média do valor de uma função em um paralelepípedo do espaço, na forma:

$$\bar{f}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{\Delta^3} \int_{x+\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \int_{y+\Delta y/2}^{y+\Delta y/2} \int_{z+\Delta z/2}^{z+\Delta z/2} f(\xi, t) d\xi d\eta d\zeta, \quad (9.19)$$

onde:

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}.$$

Quando se analisa a turbulência determinando-se o campo hidrodinâmico em uma malha de pontos espaciais Pode-se interpretar o filtro como sendo a componente mais regular (de baixa frequência) que pode ser resolvida na malha. Diz-se que essa componente regularizada tem a escala da malha, ou a escala que admite resolução. As esclas de maior frequência não podem ser resolvidas com a malha espacial usada e denominam-se como sub-escalas. Decompõe-se então a variável representativa da turbulência na forma:

$$f = \bar{f} + f',$$

onde  $f'$  engloba as subescalas. Pode-se generalizar a operação de filtragem definindo-se:

$$\bar{f}(\mathbf{X}, t) = \iiint G(x - \xi) f(\mathbf{X}, t) d\xi d\eta d\zeta,$$

onde a integração se faz sobre todo o espaço e  $G$  é a função filtro. Essa função toma a forma, no caso do filtro dado pela Eq. 9.19, por:

$$G(x_i - \xi_i) = \begin{cases} 1/\Delta^3 & |x_i - \xi_i| < \Delta x_i/2, \\ 0 & |x_i - \xi_i| > \Delta x_i/2, \end{cases}$$

Outros filtros são igualmente usados, como o de Gauss [] e o filtro de corte de Fourier [].

No que se refere a técnicas de simulação numérica da turbulência várias estratégias são possíveis. Relacionamos abaixo algumas:

1. A técnica dos grandes vórtices (LES) basea-se na integração numérica das equações governantes filtradas com o emprego de malhas espaciais suficientemente refinadas para que as subescalas possam ser consideradas como uniformes. O custo computacional da técnica é elevado.

2. O emprego de malhas ainda mais finas dispensa o uso de modelos de turbulência. Trata-se nesse caso, da técnica denominada de Simulação Numérica Direta (DNS). Seu custo computacional é ainda maior do que o da técnica LES, por requerer malhas proibitivamente finas, especialmente sob condições de números de Reynolds elevados.
3. O emprego da técnica dos grandes vórtices (LES) em regiões próximas de paredes exige malhas excessivamente finas. Uma alternativa para o problema consiste em usar as equações médias de Reynolds nas regiões próximas a paredes e a de LES fora dessas regiões.

Cabe observar que a aplicação sucessiva de um filtro sobre uma variável que apresente comportamento turbulento resulta em geral, em resultados distintos, isso é,  $\bar{\bar{f}} \neq \bar{f}$ . Observamos também que a aplicação de um filtro sobre as subescalas resulta em variáveis filtradas de valor diferente de zero ( $\bar{f}' \neq 0$ ). Da mesma forma, tem-se que  $\bar{\bar{f}}g' \neq 0$ .

### 9.2.3 Características da Turbulência

A turbulência caracteriza-se pela intensidade, conteúdo espectral e intermitênciа.

**Intensidade de turbulência:** pode ser definida para cada componente da velocidade com o valor quadrático médio das flutuações relativo à valor da velocidade média característica do escoamento  $\bar{V}$ . Para cada componente, podemos definir

$$I_x = \frac{\sqrt{v'_x^2}}{\bar{V}}, \quad (9.20)$$

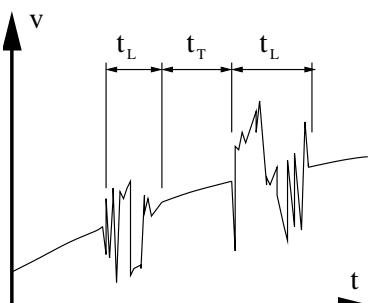


Figura 9.1: Intermitênciа de flutuação da velocidade em uma estrutura turbulenta.  $t_L$  e  $t_T$  são os tempos de persistência do movimento laminar e turbulento, respectivamente.

**Intensidade turbulenta total:** é definida como a média das três componentes  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$ :

$$I = \frac{\sqrt{1/3 v'_i v'_i}}{\bar{V}}, \quad (9.21)$$

**Intermitênciа:** é definida como a fração do tempo em que o escoamento permanece turbulento (ver Fig. 9.1).

**Conteúdo espectral:** caracteriza-se pelos números de onda  $\kappa = 2\pi/\lambda$  presentes na estrutura turbulenta.  $\lambda$  é o comprimento de onda, ou escala do modo.

A energia cinética turbulenta do escoamento é definida como:

$$k = \frac{1}{2} v'_i v'_i \quad (9.22)$$

A distribuição de energia cinética da turbulência pelos modos presentes na mesma é definida por:

$$k = \int_0^\infty \varepsilon(\kappa, t) d\kappa,$$

onde  $\varepsilon(\kappa, t)$  é a energia cinética por unidade de número de onda. Desta análise pode-se deduzir algumas leis de evolução da turbulência:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\kappa, t) = -2\nu\kappa^2\varepsilon(\kappa, t) + \Gamma(\kappa, t),$$

onde o primeiro termo do membro direito da equação acima descreve a dissipação viscosa e o segundo, a transferência de energia para outros números de onda. As distribuições típicas da energia cinética por unidade de comprimento de onda  $\varepsilon(\kappa, t)$  e da variável  $\kappa^2\varepsilon(\kappa, t)$  são mostradas esquematicamente na Fig. 9.2. A figura mostra ainda a transferência de energia entre as escalas. A transferência entre escalas (tamanho médio dos vórtices) é mostrada também na Fig. 3.13 (Pág. 60). Observa-se a tendência à isotropia e a transferência de energia dos grandes vórtices para os pequenos até que os efeitos dissipativos transfiram a energia cinética para a forma de energia interna (ver Secs. 3.14 e 4.5).

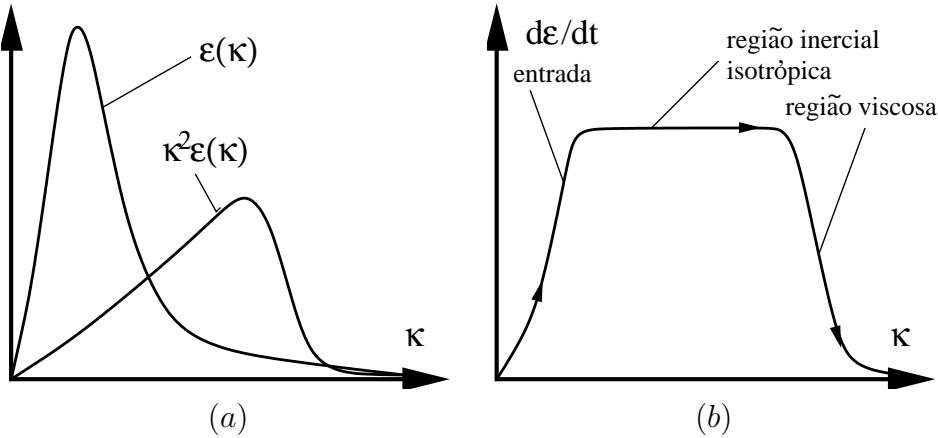


Figura 9.2: Distribuição típica da energia cinética por unidade de comprimento de onda  $\varepsilon(\kappa, t)$  e da variável  $\kappa^2\varepsilon(\kappa, t)$  (a); Transferência de energia entre as escalas de uma estrutura turbulenta (b).

A persistência no tempo de uma estrutura turbulenta é medida pela correlação temporal, definida por:

$$R_t = \frac{\overline{v'_x(t, \mathbf{X}) v'_x(t + \tau, \mathbf{X})}}{\overline{v'_x(t, \mathbf{X}) v'_x(t, \mathbf{X})}} \quad (\text{Correlação temporal}) \quad (9.23)$$

Como as estruturas turbulentas são transportadas pela corrente, a correlação temporal depende da velocidade do escoamento. Procura-se então caracterizar a persistência espacial da estrutura através da correlações longitudinal e transversal, definidas por:

$$R_x = \frac{\overline{v'_x(t, x, y) v'_x(t, x + \xi, y)}}{\overline{v'_x(t, x, y) v'_x(t, x, y)}} \quad (\text{Correlação longitudinal}) \quad (9.24)$$

$$R_y = \frac{\overline{v'_x(t, x, y) v'_x(t, x, y + \xi)}}{\overline{v'_x(t, x, y) v'_x(t, x, y)}} \quad (\text{Correlação transversal}). \quad (9.25)$$

As correlações temporal e espacial apresentam a forma mostrada de forma esquemática na Fig. 9.3.

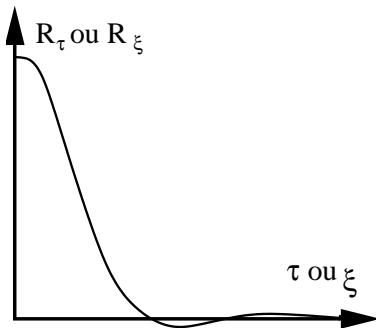
As observações acima formam a base das teorias estatísticas da turbulência formuladas por autores como Taylor, Heisemberg, Kolmogorov, Batchelor, Townsend e Obukov, dentre outros. O resultado mais importante dessas teorias é:

$$\varepsilon(\kappa) \propto \phi^{2/3} \kappa^{-5/3} \quad (\text{Lei dos } -5/3) \quad (9.26)$$

onde:

$$\phi = 2\nu \int_0^\infty \kappa^2 \varepsilon(\kappa) d\kappa.$$

## 9.3 As Equações de Reynolds



As equações de Reynolds são obtidas pela substituição dos campos de velocidade, pressão e de uma grandeza escalar, nas equações da continuidade, da quantidade de movimento e de transporte/produção da grandeza escalar. Nesta seção será tratado o caso de escoamentos incompressíveis. Para escoamentos com variação de densidade é utilizada a média de Favre, seção 9.4.

### 9.3.1 Equação média da continuidade

Figura 9.3: Decaimento típico de uma correlação temporal (ou espacial), à medida em que é calculada com relação ao valor da varável em um ponto mais distante no tempo ou no espaço.

Decompondo a velocidade nas componentes média, conforme definido acima e de flutuação, obtemos para a equação da continuidade, em sua forma integral:

$$\oint_S \rho (\bar{v}_j + v'_j) n_j dA = 0.$$

Na forma diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [\rho (\bar{v}_j + v'_j)] = 0.$$

No caso de fluidos incompressíveis temos

$$\frac{\partial \rho v'_j}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial \bar{v}'_j}{\partial x_j} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial v'_j}{\partial x_j} = 0 \end{cases} \quad (9.27)$$

A decomposição do campo de velocidades em médio e turbulento conduz portanto a duas equações da continuidade, no caso de fluidos incompressíveis: uma para a velocidade média e outra para a de flutuação. O divergente de cada uma das componentes é igual a zero.

### 9.3.2 Equação média de Reynolds da quantidade de movimento

Usando o mesmo procedimento para a equação da quantidade de movimento para escoamentos incompressíveis:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho (\bar{v}_i + v'_i) dV = - \oint_S \rho (\bar{v}_i + v'_i) (\bar{v}_j + v'_j) n_j dA - \oint (\bar{p} + p') \delta_{ij} n_j dA + \oint (\bar{\tau}_{ij} + \tau'_{ij}) n_j dA + \int_V \rho g_i dV \int_V \rho g_i dV$$

Obtém-se a seguinte equação, na forma diferencial:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\bar{v}_i + v'_i) = -\rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_i + v'_i) (\bar{v}_j + v'_j) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + g_i.$$

Desenvolvendo o termo convectivo:

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_i + v'_i) (\bar{v}_j + v'_j) = \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{v}_i \bar{v}_j + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{v}_i v'_j + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} v'_i \bar{v}_j + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} v'_i v'_j.$$

Desenvolvendo o segundo e o terceiro termo do membro direito da igualdade acima:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{v}_i v'_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v'_i \bar{v}_j \right) = \rho \left( v'_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \bar{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right).$$

O valor médio desses dois termos é zero. Resta então para o valor médio dos dois outros termos:

$$\overline{\rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_i + v'_i) (\bar{v}_j + v'_j)} = \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{v}_i \bar{v}_j + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v_i v_j} = \rho \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} + \rho \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v'_i v'_j} = \rho \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v'_i v'_j}.$$

A equação da quantidade de movimento toma portanto, a seguinte forma:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \rho v_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v'_i v'_j} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + g_i.$$

Utilizando essa definição, obtemos para a equação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - \rho \overline{v_i v_j} \right) + g_i. \quad (9.28)$$

Definindo o operador linear derivada substancial média por:

$$\frac{\bar{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (9.29)$$

reescreve-se a Eq. 9.28 como:

$$\frac{\bar{D} \bar{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - \rho \overline{v_i v_j} \right) + g_i. \quad (9.30)$$

O termo:

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} = \bar{\tau}_{ij}^R \quad (9.31)$$

denomina-se tensor de Reynolds. Trata-se de um tensor simétrico, que introduz seis novas incógnitas na equação média da quantidade de movimento. Ao contrário do que ocorre com a equação da continuidade, a decomposição do campo em médio e de flutuação não resulta em duas equações de conservação da quantidade de movimento. Por esse motivo, o tensor de Reynolds é determinado de forma empírica ou semi-empírica. A tensão de cisalhamento exercida por um escoamento turbulento sobre a parede pode ser muito maior do que a prevista pela teoria de escoamentos laminares, em virtude da mistura das linhas de corrente. Deve-se notar que, no caso de escoamentos bi-dimensionais, o termo  $-\rho \overline{v_i v_j}$  é, em geral positivo, pois  $v'_x$  e  $v'_y$  têm sinais contrários.

### 9.3.3 Equação média de transporte de um escalar

O transporte de uma grandeza escalar  $\theta$  obedece à Eq. 9.32. Fazendo a decomposição de Reynolds dessa equação, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\theta} + \theta') + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\bar{v}_j + v'_j) (\bar{\theta} + \theta')] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\theta} + \theta') \right] + S_\theta. \quad (9.32)$$

Tomando a média temporal da equação acima, utilizando a definição de derivada substancial média e levando em consideração que tratamos de fluidos incompressíveis, chegamos a:

$$\frac{\bar{D}\bar{\theta}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} - \overline{\theta' v'_i} \right) + S_\theta. \quad (9.33)$$

O tensor  $\overline{\theta' v'_i}$  denomina-se fluxo turbulento do escalar. No caso do transporte turbulento de um escalar, têm-se cinco equações (continuidade média, três componentes da equação média de Navier-Stokes e equação média de transporte do escalar), mas além das três componentes médias (velocidade, pressão e escalar), há ainda seis componentes do tensor de Reynolds e a componente turbulenta do escalar. É necessário determinar as componentes turbulentas da velocidade e do escalar. Para isso, são adotados modelos de turbulência.

## 9.4 As Equações Médias de Favre

As equações médias de Favre são obtidas de modo análogo ao das equações de Reynolds, utilizando a média de Favre para as grandezas transportadas nas equações de Navier-Stokes para escoamentos compressíveis. A vantagem do seu uso para o caso de escoamentos compressíveis é facilmente demonstrada no caso da equação da continuidade. De fato, aplicando estritamente as médias de Reynolds na equação da continuidade para um escoamento compressível surge um termo que contém  $\rho' v'_j$ , a média do produto de flutuações, e que em geral precisaria ser modelado. No entanto, se no lugar de  $v_j = \bar{v}_j + v'_j$  utilizarmos  $v_j = \tilde{v}_j + v''_j$ , surge o termo  $\overline{\rho v''_j}$  que é identicamente nulo, de acordo com as propriedades das médias de Favre, Eq. 9.14- 9.18, resultando na equação Eq.9.34 abaixo. De forma análoga, utiliza-se a mesma decomposição da velocidade na equação da quantidade de movimento e  $E = \tilde{E} + E''$  na equação da energia, obtendo-se as equações Eq 9.35- 9.36:

### Equação média de Favre da continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j) = 0. \quad (9.34)$$

### Equação média de Favre da quantidade de movimento

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{p} = \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{\tau}_{ij}. \quad (9.35)$$

### Equação média de Favre da energia

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{E} \tilde{v}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\tau}_{ij} \tilde{v}_j) - \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{q}_i + \frac{\partial}{\partial x_i} K_i. \quad (9.36)$$

onde

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T} \quad (9.37)$$

$$\tilde{E} = \tilde{e} + \frac{1}{2} \tilde{v}_i \tilde{v}_i + k \quad (9.38)$$

$$\tilde{H} = \tilde{h} + \frac{1}{2} \tilde{v}_i \tilde{v}_i + k \quad (9.39)$$

$$k = \frac{\overline{\rho v''_i v''_i}}{2\bar{\rho}} \quad (9.40)$$

$$\hat{\tau}_{ij} = \bar{\tau} - \overline{\rho v''_i v''_j} \quad (9.41)$$

$$\hat{q}_i = -\frac{\nu}{P_r} \frac{\partial h}{\partial x_i} - \overline{\rho v''_i h''} \quad (9.42)$$

$$K_i = -\overline{\rho v''_i (v''_j v''_j)} \quad (9.43)$$

$$(9.44)$$

## 9.5 Equações de Navier-Stokes Filtradas – Fluidos Incompressíveis

A aplicação de um filtro às equações de Navier-Stokes válidas para escoamentos incompressíveis resulta em:

$$\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_i} = 0 \quad (9.45)$$

$$\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v_i v_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{\tau}_{ij}}{\partial x_j}, \quad (9.46)$$

onde:

$$\hat{\tau}_{ij} = -\rho (\overline{v_i v_j} - \overline{v_i} \overline{v_j}).$$

## 9.6 Modelos para o Tensor de Reynolds

O tensor de Reynolds é modelado através de teorias estatísticas, para o caso de turbulência isotrópica. No caso de turbulência em jatos, camadas limite e em outras regiões de cisalhamento, através de teorias semi-empíricas. Dentre essas, destacamos as propostas por:

1. Boussinesq (proporcionalidade do tensor de Reynolds ao gradiente do campo médio de velocidades);
2. Prandtl (teoria do comprimento de mistura);
3. Taylor (transporte da vorticidade);
4. Von Kármán (semelhança).

### 9.6.1 O modelo de viscosidade turbulenta de Boussinesq

Os primeiros trabalhos de modelagem do tensor de Reynolds foram feitos por Boussinesq, ainda no século XIX e propõe que o mesmo seja proporcional ao gradiente do campo médio de velocidades.

A energia cinética turbulenta é igual à metade do traço do tensor de Reynolds. Sendo esse tensor simétrico, seus autovalores são reais e a matriz que o representa pode ser diagonalizada. Os elementos que ocupam a diagonal principal da matriz são os autovalores  $\lambda_j$  do operador. A parcela isotrópica do tensor de Reynolds é definida como sendo:

$$\frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}.$$

A parcela deviatória do tensor de Reynolds é definida como a diferença entre o tensor de Reynolds e a parcela isotrópica do mesmo:

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} + \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}.$$

De maneira análoga ao caso de um fluido newtoniano, cujo tensor de tensões é proporcional a  $\mathbf{grad} \mathbf{v} + \mathbf{grad}^T \mathbf{v}$  (Eq. 3.34, Boussinesq admitiu que a parcela deviatória do tensor de Reynolds seja proporcional a  $\mathbf{grad} \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{grad}^T \bar{\mathbf{v}}$ :

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} + \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} = \rho \mu_T \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right),$$

onde  $\mu_T$  é o coeficiente de viscosidade turbulenta. Incorporando essa hipótese à Eq. 9.30 obtemos:

$$\frac{\bar{D} \bar{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{p} + \frac{2}{3}\rho k \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu_{ef} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right] + g_i, \quad (9.47)$$

onde:

$$\mu_{ef}(t, \mathbf{X}) = \mu + \mu_T(t, \mathbf{X})$$

é o coeficiente de viscosidade efetivo do fluido. Cabe observar que, enquanto o coeficiente de viscosidade molecular  $\mu$  é uma propriedade do fluido e pode ser constante, como no caso de escoamentos incompressíveis isotérmicos, o coeficiente de viscosidade turbulenta  $\mu_T$  varia no tempo e no espaço em função do próprio escoamento e não é uma propriedade do fluido.

Pode-se definir um coeficiente de viscosidade cinemática efetiva,  $\nu_{ef}$ , dividindo-se o coeficiente de viscosidade  $\mu_{ef}$  pela massa específica  $\rho$  do fluido. E a expressão  $\bar{p} + 2/3 \rho k$  é uma forma modificada da pressão, que pode ser considerada simplesmente como a pressão  $\bar{p}$ . A Eq. 9.47 torna-se:

$$\frac{\bar{D}\bar{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_{ef} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right] + g_i. \quad (9.48)$$

Seguindo a idéia adotada para a modelagem do tensor deviatório de Reynolds, expressamos o fluxo turbulento da variável escalar em função do gradiente da média do escalar:

$$\overline{\theta' v'_i} = \alpha_T \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}.$$

Substituindo a expressão do fluxo turbulento do escalar na Eq. 9.33 obtemos:

$$\frac{\bar{D}\bar{\theta}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha_T \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right) + S_\theta, \quad (9.49)$$

onde:

$$\alpha_{ef}(t, \mathbf{X}) = \alpha + \alpha_T(t, \mathbf{X}).$$

### **Equações Médias de Favre com o modelo de viscosidade turbulenta de Boussinesq**

As expressões 9.37-9.43 são normalmente simplificadas ignorando termos envolvendo  $\bar{v}_i''$  e os termo de  $k$  em  $\tilde{E}$  e  $\tilde{H}$ , e modeladas usando uma aproximação de viscosidade turbulenta de Boussinesq, resultando em

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T} \quad (9.50)$$

$$\tilde{E} = \tilde{e} + \frac{1}{2} \tilde{v}_i \tilde{v}_i \quad (9.51)$$

$$\tilde{H} = \tilde{h} + \frac{1}{2} \tilde{v}_i \tilde{v}_i \quad (9.52)$$

$$\hat{\tau}_{ij} = (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}(\mu + \mu_T) \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (9.53)$$

$$\hat{q}_i = - \left( \frac{\mu}{P_r} + \frac{\mu_T}{P_{rT}} \right) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_i} \quad (9.54)$$

$$K_i = 0 \quad (9.55)$$

### 9.6.2 O modelo do comprimento de mistura de Prandtl

Com base na hipótese de que os vórtices movem-se como partículas de um gás, Prandtl desenvolveu uma expressão para a tensão de cisalhamento turbulenta. Admitindo que a intensidade da flutuação de uma das componentes da velocidade seja proporcional à componente relevante do gradiente de velocidades têm-se:

$$|v'_x| = l \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}, \quad (9.56)$$

onde  $l$  é a distância percorrida por uma partícula até atingir a velocidade da corrente que a transporta. Prandtl a denominou de comprimento de mistura e propôs que seja proporcional à distância  $y$  da parede, isso é,  $l = \kappa_1 y$ . A equação da continuidade (Eq. 9.27) exige que as duas componentes de flutuação de um campo de velocidades bidimensional sejam da mesma ordem de grandeza, o que obriga a que  $v'_y$  tenha forma semelhante à da q. 9.56. Consequentemente, a tensão de Reynolds, dada por eq :  $v'_x$  (Eq. 9.31), se expressa como:

$$\bar{\tau}_{xy}^R = -\rho \overline{v'_x v'_y} = -\rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}. \quad (9.57)$$

Da equação acima resulta que o coeficiente de viscosidade turbulenta é dado por:

$$\nu_T = l^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right|.$$

Pode-se generalizar essa expressão para o caso de campos de velocidade tridimensionais, fazendo-se:

$$\nu_T = 2l^2 \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad (9.58)$$

onde:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right).$$

### 9.6.3 A hipótese de similaridade de Von Kármán

Outra expressão para o tensor de Reynolds foi proposta por Von Kármán, com base em argumentos dimensionais. Von Kármán supôs que o conhecimento do campo médio de velocidades é suficiente para determinar o tamanho dos redemoinhos e a tensão de cisalhamento, sugerindo que o comprimento de mistura de Prandtl seja expresso por:

$$l = \kappa_2 \left| \frac{\partial \bar{v}_x / \partial \bar{v}_y}{\partial^2 \bar{v}_x / \partial \bar{v}_y^2} \right|,$$

onde  $\kappa_2$  é uma constante universal cujo valor foi obtido experimentalmente e situa-se entre 0,36 e 0,4. Substituindo-se a expressão acima do comprimento de mistura na Eq. 9.57 obtém-se a forma proposta por Von Kármán para o tensor de Reynolds:

$$\bar{\tau}_{xy}^R = -\rho \overline{v'_x v'_y} = -\rho \kappa_2 \left| \frac{(\partial \bar{v}_x / \partial \bar{v}_y)^3}{(\partial^2 \bar{v}_x / \partial \bar{v}_y^2)^2} \right| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{v}_y}. \quad (9.59)$$

### 9.6.4 Leis de parede e de meio do tubo

Os trabalhos experimentais de Reichardt e Laufer, feitos com anemômetros de fio quente mostraram que a produção e dissipação de vórtices ocorre próximo à parede. Definindo a velocidade de referência:

$$U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{\text{parede}}}{\rho}}$$

têm-se o gráfico do perfil de velocidade, produção e dissipação de vorticidade próximos à parede, na forma mostrada na Fig. 9.4. Com base nessas observações foram formuladas as leis e de parede (perda de carga por unidade de comprimento em um tubo e raio  $R$ .

**Lei de parede:** No substrato laminar da camada limite, a tensão de cisalhamento é da forma:

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \rho U_\tau^2 \quad (9.60)$$

**Lei do meio do tubo:** Adotando a definição de velocidade de referência, a perda de carga por unidade de comprimento é dada por:

$$\frac{dp}{dx} = -2\rho \frac{U_\tau^2}{R} \quad (9.61)$$

### 9.6.5 Modelos de uma e duas equações

Existe uma progressão natural nos modelos de turbulência: algébricos, uma equação, duas equações, modelos de tensões de Reynolds. Cada nível sucessivo fornece uma descrição mais completa da turbulência e portanto elimina uma deficiência qualitativa do modelo precedente.

Os modelos de uma e duas equações utilizam uma e duas equações de transporte, respectivamente, para determinação das grandezas características locais do escoamento e determinação da viscosidade turbulenta. As equações de transporte são da forma:

$$\frac{\bar{D}\phi}{Dt} = \nabla \cdot \left[ \left( \nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\phi} \right) \nabla \phi \right] + S_\phi \quad (9.62)$$

onde  $\phi$  é a grandeza transportada. Os parâmetros  $\sigma_\phi$ , e  $S_\phi$  são em geral semi-empíricos e variam de acordo com o modelo.

#### O modelo de uma equação de Prandtl

Prandtl descreve um modelo de turbulência de uma equação, onde a grandeza transportada é a energia turbulenta  $k$ . A equação de transporte de  $k$  é dada por

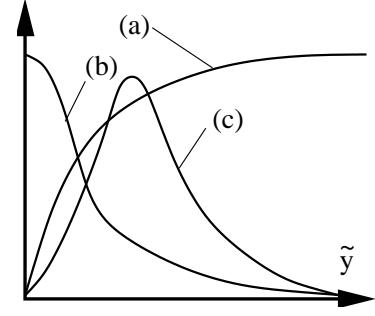


Figura 9.4: Velocidade adimensional  $\bar{v}_x/U_\tau$  (a), produção (b) e dissipação (c) de vorticidade próximos à parede de um corpo esbelto alinhado ao escoamento, em função da distância adimensional  $\tilde{y} = U_\tau y/\nu$ .

$$\frac{\bar{D}k}{Dt} = \nabla \cdot \left[ \left( \nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + P - \varepsilon \quad (9.63)$$

onde a produção é dada por

$$P = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

e a dissipação  $\varepsilon$  é modelada por

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l},$$

onde  $l$  é o comprimento característico da turbulência, que deve ser especificado. A viscosidade cinemática do modelo e as tensões de Reynolds são dadas por

$$\nu_T = k^{\frac{1}{2}} l = C_D \frac{k^2}{\varepsilon}; \quad \bar{\tau}_{ij} = 2\nu_T \bar{S}_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

Valores usuais para os parâmetros do modelo são  $\sigma_k = 1$  e  $C_D = 0,08$ . Uma comparação deste modelo com resultados experimentais mostra que este modelo possui uma pequena vantagem de precisão em relação a modelos algébricos de comprimento de mistura. A principal desvantagem do modelo consiste no fato do modelo ser incompleto: o comprimento característico  $l$  deve ser especificado.

### O modelo Spalart-Allmaras

Spalart e Allmaras (1994) desenvolveram um modelo de uma equação para aplicações aerodinâmicas, no qual a grandeza transportada  $\nu_{sa}$  está associada ao próprio coeficiente de viscosidade turbulenta  $\nu_T$  pelas relações:  $\nu_T = \nu_{sa} f_{v1}$ ,  $f_{v1} = \chi^3 / (\chi^3 + C_{v1}^3)$ ,  $\chi = \nu_{sa} / \nu$ . Propostas anteriores para esse modelo são descritas por Nee e Kovasznay (1969), e Baldwin e Barth (1990). A equação de transporte é dada por

$$\frac{\bar{D}\nu_{sa}}{Dt} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot [(\nu + \nu_{sa}) \nabla \nu_{sa}] + S_\nu \quad (9.64)$$

O termo fonte  $S_\nu$  depende dos coeficientes de viscosidade  $\nu$ ,  $\nu_{sa}$ , da vorticidade média  $S$ , do gradiente  $\nabla \nu_{sa}$  e da distância à parede mais próxima  $d$ .

$$S_\nu = c_{b1} \tilde{S} \nu_{sa} + c_{b2} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \nu_{sa}}{\partial x_j} \frac{\partial \nu_{sa}}{\partial x_j} - c_{w1} f_w \left( \frac{\nu_{sa}}{d} \right)^2 \quad (9.65)$$

$$\tilde{S} \equiv S + \frac{\nu_{sa}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}$$

onde

$$\begin{aligned} S &\equiv \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, & \Omega_{ij} &\equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ f_w &= g \left[ \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6}, & g &= r + C_{w2}(r^6 - r), \quad r \equiv \frac{\nu_{sa}}{\tilde{S}\kappa^2 d^2} \end{aligned}$$

e  $d$  é a distância à superfície mais próxima. Os valores dos parâmetros de calibração são:  $\sigma = 2/3$ ,  $C_{b1} = 0.1355$ ,  $C_{b2} = 0.622$ ,  $\kappa = 0.41$ ,  $C_{w1} = C_{b1}/\kappa^2 + (1 + C_{b2})/\sigma$ ,  $C_{w2} = 0.3$ ,  $C_{w3} = 2$ ,  $C_{v1} = 7.1$ .

O modelo ignora o termo associado a  $k$  nas tensões de Reynolds, portanto

$$\bar{\tau}_{ij} = 2\nu_T \bar{S}_{ij}.$$

O modelo tem mostrado resultados satisfatórios para aplicações aerodinâmicas para as quais foi desenvolvido, possivelmente graças ao grande número de parâmetros empíricos que podem ser ajustados, mas possui limitações como modelo geral. Entre outras limitações, não é capaz de reproduzir o decaimento de  $\nu_T$  para turbulência isotrópica e, em turbulência homogênea,  $\nu_T$  não é influenciado por um cizalhamento médio irrotacional.

### O modelo de duas equações $k - \varepsilon$ padrão

O modelo  $k - \varepsilon$  emprega duas equações de transporte para modelar a viscosidade turbulenta: uma equação de transporte para a energia cinética turbulenta,  $k$ , idêntica àquela utilizada no modelo de uma equação de Prandtl, Eq. 9.63, e uma equação para modelar o transporte da taxa de dissipaçāo da turbulência,  $\varepsilon$ :

$$\frac{\bar{D}\varepsilon}{Dt} = \nabla \cdot \left[ \left( \nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{P\varepsilon}{k} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (9.66)$$

O modelo  $k - \varepsilon$  calcula o coeficiente de viscosidade turbulenta  $\nu_T$  e as tensões de Reynolds como

$$\nu_T = C_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \quad \bar{\tau}_{ij} = 2\nu_T S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (9.67)$$

Valores usuais para os parâmetros do modelo são:  $C_\mu = 0.09$ ,  $C_{\varepsilon 1} = 1,44$ ,  $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ ,  $\sigma_k = 1,0$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1,3$ .

O modelo  $k - \varepsilon$  é o mais simples modelo de turbulência completo e possui uma ampla faixa de aplicabilidade. Ele é incorporado na maioria dos códigos comerciais de Dinâmica dos Fluidos Computacional, e tem sido aplicado a uma ampla gama de problemas incluindo transferência de calor, combustão e escoamentos multifásicos. Apesar de ser razoavelmente acurado em escoamentos simples, pode se tornar muito impreciso para escoamentos complexos, ao ponto de calcular padrões de escoamento médios qualitativamente incorretos. As imprecisões são oriundas da hipótese de viscosidade turbulenta e da equação para  $\varepsilon$ .

## 9.7 Problemas

- Utilizando a definição de média de conjunto, Eq 9.1, demonstre as propriedades das médias de Reynolds, Eq 9.4 - 9.12.

2. Utilizando a Eq 9.13, mostre as propriedades das médias de Favre, Eq 9.14- 9.18.
3. Verifique a lei dos  $-5/3$  utilizando análise dimensional e as definições de  $\epsilon(\kappa)$  e  $\phi$ .
4. Moste que, aplicando estritamente as médias de Reynolds à equação da continuidade para um escoamento compressível obtem-se uma equação que contém o termo  $\overline{\rho'v'_j}$ . Por outro lado, utilizando as médias de Favre para as componentes da velocidade, a equação da continuidade média se reduz a Eq. 9.34, que não possui termos a serem modelados.
5. Obtenha a equação média de Favre da quantidade de movimento para um escoamento compressível. Utilizando notação indicial e partindo da componente  $j$  da equação de Navier-Stokes compressível, calcule a média de Reynolds da expressão resultante. Expanda  $v_i = \tilde{v}_i + v''_i$  e aplique as propriedades das médias de Reynolds e de Favre.
6. Considere o modelo de Spalart-Allmaras aplicado a turbulência homogênea com número de Reynolds elevado. Considere que, nestas condições,  $\nu$  e a distância da parede  $d$  não são grandezas relevantes. Portanto mostre usando considerações de análise dimensional que a Eq. 9.64 se reduz a

$$\frac{\bar{D}\nu_{sa}}{Dt} = S_\nu(\nu_{sa}, \tilde{S}) = c_{b1}\nu_{sa}\tilde{S}$$

7. Considere o modelo de Spalart-Allmaras aplicado à região próxima da parede. Considere que, nestas condições,  $\nu_{sa}$  e a distância da parede mais próxima  $d$  são as grandezas relevantes em  $S_\nu$ . Mostre usando considerações de análise dimensional que o termo fonte da Eq. 9.64 se reduz a

$$S_\nu(\nu_{sa}, d) = c_{b2} \left( \frac{\nu_{sa}}{d} \right)^2$$

8. Obtenha a equação exata do transporte da energia cinética turbulenta  $k$  para um escoamento incompressível. Utilizando notação indicial e partindo da componente  $i$  da equação de Navier-Stokes incompressível, multiplique (escalarmente) por  $v'_i$  e calcule a média de Reynolds da expressão resultante. Expanda  $v_i = \bar{v}_i + v'_i$  e aplique as propriedades das médias de Reynolds.
9. Obtenha a equação exata do transporte da energia cinética turbulenta  $k$  para um escoamento compressível. Utilizando notação indicial e partindo da componente  $i$  da equação de Navier-Stokes compressível, multiplique (escalarmente) por  $v''_i$  e calcule a média de Reynolds da expressão resultante. Expanda  $v_i = \tilde{v}_i + v''_i$  e aplique as propriedades das médias de Reynolds e Favre e a continuidade para simplificar a expressão resultante.



# Capítulo 10

## Transferência de Calor

### 10.1 Introdução

Este capítulo trata dos princípios de transferência de calor, utilizando as equações constitutivas e as provenientes da aplicação dos princípios de conservação, apresentadas nos capítulos anteriores. Em alguns casos há uma analogia entre os mecanismos de difusão de calor e os de difusão de espécies químicas, também abordadas [33, 36, 37].

### 10.2 Mecanismos de Transferência de Calor

Há dois processos de transferência de calor entre dois corpos, ou entre dois elementos de massa de um meio: se o meio for contínuo, o calor se *difunde* por contato entre as partículas do meio, isso é, este processo se faz através da massa. Na maioria dos casos de interesse da engenharia a difusão de calor obedece a uma equação constitutiva conhecida como lei de Fourier,  $\mathbf{q} = -\kappa \mathbf{grad} T$ . Aplicando-se o princípio de conservação da energia, a lei de Fourier e a definição de calor específico, chega-se a uma das duas equações abaixo, dependendo de ser o meio um fluido incompressível em movimento ou um sólido, conforme visto no capítulo anterior:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho C_p} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p} \quad (10.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p} \quad (10.2)$$

onde  $\alpha = \kappa / (\rho C_p)$  é a difusividade térmica do material e  $\kappa$ , a condutividade térmica do mesmo.

O segundo processo de transferência de calor existe independentemente da existência de matéria como meio transmissor: trata-se da radiação, através do qual um corpo emite calor na forma de ondas eletromagnéticas. A transferência de calor por radiação se faz, na maior parte dos casos de interesse da engenharia, a partir de *superfícies*, embora existam casos de emissão de calor pelo interior de um volume, como ocorre com o caso de uma

chama. Para que um volume emita calor é necessário que o mesmo seja transparente ao calor irradiado.

No caso de radiação por superfícies o fluxo de calor, isso é, o calor emitido por unidade de tempo e de área é dado por:

$$\dot{q} = e \sigma T^4 \quad (10.3)$$

onde  $e$  é a emissividade da superfície,  $\sigma$ , a constante de *Stefan-Boltzman* e  $T$ , a temperatura absoluta da superfície. A quantidade total de calor emitida por uma superfície é obtida integrando-se o fluxo de todos os elementos da mesma:

$$\dot{Q} = \int_S e \sigma T^4 dA$$

A emissividade é um número que varia entre 0 e 1 e depende não apenas do material, mas também do acabamento da superfície. Superfícies polidas têm baixa emissividade e superfícies foscas têm alta emissividade. A constante de Stefan-Boltzman é igual a  $5,66 \times 10^{-8} W/(m^2 K^4)$ .

A rejeição de calor é também um problema com o qual a engenharia frequentemente se defronta. Em muitos casos o calor é gerado em processos industriais, como em unidades químicas, siderúrgicas, usinas termoelétricas, dispositivos eletrônicos, etc. Em outros casos é necessário rejeitar calor por motivo de conforto. Em todos esses casos o meio ambiente se constitui no destino final para onde o calor é rejeitado. O mecanismo de evaporação é uma das alternativas à disposição da engenharia, por vezes a mais favorável. Nos sistemas que utilizam este processo o calor é inicialmente transferido para um sistema de recirculação de água. A água aquecida circula por trocadores de calor onde uma pequena parcela se evapora. A parcela que se evapora retira o calor latente do fluxo em recirculação, reduzindo sua temperatura. A água resfriada volta então às unidades de processo.

Duas são as vantagens dos sistemas de resfriamento evaporativos, sobre os que são construídos utilizando apenas o mecanismo de convecção:

1. A água de recirculação pode ser resfriada a temperaturas mais baixas do que as obtidas através de convecção;
2. Os trocadores de calor onde o resfriamento evaporativo ocorre tem menor custo do que trocadores convectivos pois, sendo a condutividade térmica do ar muito muito baixa os coeficientes de transferência de calor por convecção para o ar também o são. Por isso os trocadores convectivos são normalmente aletados pelo lado externo de modo a aumentar a superfície de troca térmica, o que requer mais quantidade de material e os torna mais caros.

Por outro lado cabe ressaltar que sistemas evaporativos tem a desvantagem de necessitarem de reposição da água evaporada e esta é cada vez mais um bem escasso, a ser preservado.

## 10.3 Condução de Calor Unidimensional em Sólidos

Nesta secção trataremos dos seguintes problemas de condução de calor em sólidos:

1. Condução de calor unidimensional em regime permanente com fontes distribuídas;
2. Condução de calor unidimensional em tubo de paredes finas em regime permanente;
3. Condução unidimensional em regime permanente em um sólido, com transferência de calor por convecção para um fluido;
4. Condução de calor unidimensional em regime não-permanente.
5. Transferência de calor em *aletas*.

### 10.3.1 Condução de calor unidimensional em regime permanente com fontes distribuídas

Consideramos o caso de condução de calor na direção  $x$  em um sólido conforme a Fig. (10.1). As paredes  $x = 0$  e  $x = d$  são mantidas às temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente. O sólido contém uma distribuição uniforme de fontes internas de calor que geram  $\dot{Q}$  unidades de calor por unidade de tempo e de volume.

A equação:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p}$$

simplifica-se e toma a forma:

$$\alpha \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p} = 0$$

Levando em conta que  $\alpha = \kappa / (\rho C_p)$  temos então:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\dot{Q}}{\kappa} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{Q}}{\kappa} x + C_1 \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{\dot{Q}}{\kappa} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  são determinadas a partir das condições de contorno:  $T = T_1$  em  $x = 0 \Rightarrow C_2 = T_1$ . Por outro lado,  $T = T_2$  em  $x = d$ , o que implica em:

$$T_2 = -\frac{\dot{Q}}{\kappa} \frac{d^2}{2} + C_1 d + T_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{T_2 - T_1}{d} + \frac{\dot{Q} d}{\kappa} \frac{d}{2}$$

e obtém-se portanto o perfil de temperaturas na forma:

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{d} x + \frac{\dot{Q}}{2\kappa} x(d - x)$$

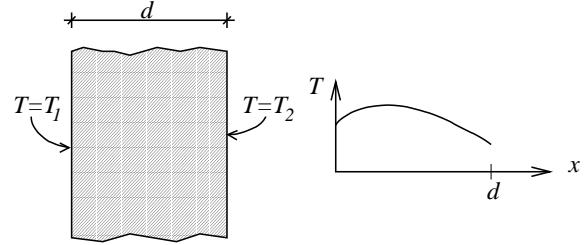


Figura 10.1: Campo estacionário de temperaturas em um sólido uni-dimensional com fontes internas de calor.

### 10.3.2 Condução de calor em um tubo de paredes finas

Consideramos agora o caso de condução de calor em um tubo cilíndrico circular de paredes finas em regime permanente, sem fontes internas, conforme Fig. (10.2). Os raios interno e externo do tubo são, respectivamente,  $r_i$  e  $r_e$ . A superfície externa é mantida à temperatura  $T_e$  e o tubo é submetido a um fluxo estacionário de  $q_e$  unidades de calor por unidade de tempo e de área na direção radial. Este fluxo refere-se à parede *externa* do tubo. Cabe notar que para uma dada taxa de transferência de calor por unidade de tempo o fluxo varia ao longo da coordenada  $r$  pois a superfície cilíndrica perpendicular ao fluxo aumenta com  $r$ .

A equação:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p}$$

simplifica-se e toma a forma:

$$\nabla^2 T = 0$$

Desenvolvendo os termos do laplaciano:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

O fluxo de calor é dado por  $\mathbf{q}_e = -\kappa \mathbf{grad} T$ , que, em coordenadas cilíndricas, toma a forma:

$$\mathbf{q}_e = -\kappa \left( \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{e}_z \right)$$

Em virtude da simetria do problema todas as derivadas na direção  $\theta$  se anulam. Por outro lado consideramos que não há variações de temperatura na direção  $z$ . Ressaltamos que em muitos problemas de engenharia despreza-se o fluxo de calor nesta direção mesmo que haja variações axiais de temperatura, pois como as paredes do tubo são finas, a área de condução é pequena nesta direção, quando comparada com a área disponível para a transferência de calor na direção radial. As duas equações acima se simplificam portanto e temos então:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = 0 \quad (10.4)$$

$$q_e = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r} \quad (10.5)$$

A solução da eq. (10.4) é da forma:

$$T = Ar^2 + B + C \ln r$$

Derivando duas vezes esta expressão obtemos  $\partial T / \partial r = 2Ar + C/r$  e  $\partial^2 T / \partial r^2 = 2A - C/r^2$ . Substituindo a expressão das duas derivadas na eq. (10.4) obtemos  $4A = 0 \rightarrow A = 0$ . O

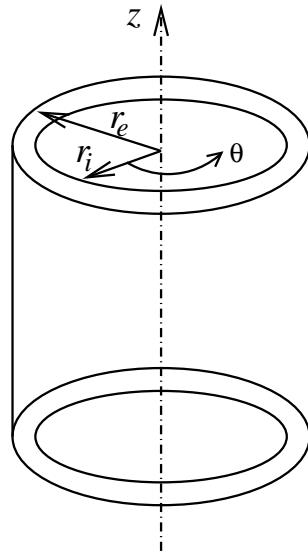


Figura 10.2: Condução de calor em um cilindro de paredes finas.

perfil de temperaturas é portanto da forma  $T = B + c \ln r$ , sendo as constantes obtidas a partir dos valores conhecidos do fluxo de calor  $q_e$  e da temperatura externa  $T_e$ . O fluxo de calor é dado por:

$$q_e = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r} = -\kappa \frac{C}{r} \quad \rightarrow \quad C = -\frac{qr_e}{k}$$

Por outro lado a parede externa é mantida à temperatura  $T_e$ :

$$T_e = B - \frac{qr_e}{k} \ln r_e \quad \rightarrow \quad B = T_e + \frac{qr_e}{k} \ln r_e$$

e obtém-se o perfil de temperaturas na forma:

$$T = T_e + \frac{qr_e}{k} \ln \frac{r_e}{r}$$

### 10.3.3 Condução unidimensional com transferência de calor por convecção para um fluido

Estudamos agora um problema de transferência de calor envolvendo os processos de condução e convecção. Consideramos o caso de um corpo do qual um das paredes é mantida à temperatura  $T_q$  e a outra se encontra em contato com um fluido cuja temperatura é  $T_f$ , longe do corpo, conforme Fig. (10.3). O coeficiente de troca de calor por convecção entre o corpo e o fluido é  $h$ . Pede-se determinar a temperatura da parede em contato com o fluido e exprimir o fluxo de calor em função de  $T_q$  e  $T_f$ . O corpo tem espessura  $d$ .

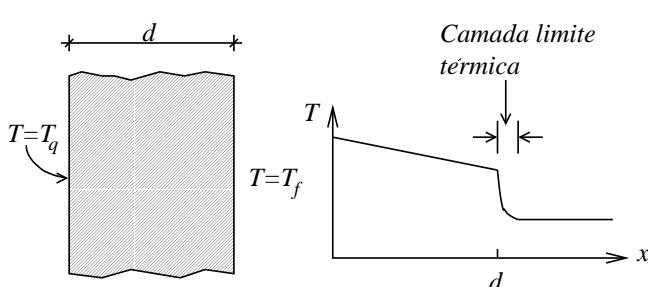


Figura 10.3: Campo estacionário de temperaturas em um sólido uni-dimensional com convecção em uma das paredes.

mos levar em conta a transferência de calor por convecção para o fluido. Como  $dT/dx = C_1$ , o fluxo de calor é dado por  $q = -\kappa dT/dx = \kappa C_1 = \kappa(T_q - T_s)/d$ . Por sua vez, este fluxo de calor também é dado por  $h(T_s - T_f)$ . Portanto:

$$\kappa \frac{(T_q - T_s)}{d} = h(T_s - T_f)$$

ou:

$$(T_q - T_s) = \frac{hd}{\kappa}(T_s - T_f) = Bi(T_s - T_f)$$

A equação de condução de calor no sólido é:

$$\nabla^2 T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

Integrando-se esta equação duas vezes obtém-se  $dT/dx = C_1$  e  $T = C_1 x + C_2$ . Estes resultados mostram que o perfil de temperaturas é linear. A constante  $C_1$  é da forma  $C_1 = (T_q - T_s)/d$ , onde  $T_s$  é a temperatura da superfície do sólido em contato com o fluido. Para determinarmos o valor da constante  $C_2$  deve-

onde  $Bi = hd/\kappa$  é um grupo adimensional denominado *número de Biot*. Desta última equação obtém-se que:

$$(T_q - T_s) = \frac{hd}{\kappa}(T_s - T_f) = Bi(T_s - T_f) \quad \implies \quad T_s = \frac{T_q + Bi T_f}{Bi + 1}$$

Este último resultado mostra que quando o número de Biot é muito grande  $T_s \approx Bi T_f / Bi = T_f$ , ou seja, a temperatura da superfície em contato com o fluido é praticamente igual à temperatura do fluido longe do sólido. Praticamente não há queda de temperatura no fluido.

O problema envolvendo condução de calor através de um sólido e a transferência por convecção para um fluido permite estabelecer umanalogia entre o fluxo de calor e a corrente em um circuito elétrico. Para identificarmos a analogia notamos inicialmente que a quantidade de calor que flui por unidade de tempo é dada por:

$$\dot{Q} = hA(T_s - T_f)$$

A temperatura  $T_s$  pode ser eliminada lembrando-se que  $T_s = (T_q + Bi T_f) / (Bi + 1)$ :

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= hA \left( \frac{T_q + Bi T_f}{Bi + 1} - T_f \right) = hA \left( \frac{T_q + Bi T_f - Bi T_f - T_f}{Bi + 1} \right) = hA \left( \frac{T_q - T_f}{Bi + 1} \right) \\ &= \frac{hA}{Bi + 1} (T_q - T_f) = \frac{hA}{\frac{hd}{\kappa} + 1} (T_q - T_f) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\dot{Q} = \frac{h\kappa}{hd + \kappa} A(T_q - T_f) = UA(T_q - T_f) \quad (10.6)$$

o que mostra que a taxa de transferência de calor pode ser expressa como função das temperaturas limite  $T_q$  e  $T_f$ , na forma:

$$\dot{Q} = UA(T_q - T_f)$$

onde  $U = h\kappa/(hd + \kappa)$ . Como vimos, a grandeza  $U$  denomina-se *coeficiente global* de troca de calor e o produto  $UA$  é a *condutância térmica* do sistema formado pelo sólido e o fluido. Este nome justifica-se pois a equação acima tem a mesma forma da equação da corrente em um circuito elétrico,  $i = U_e(V_q - V_f)$ , onde  $i$  é a corrente elétrica,  $V_q$  e  $V_f$  são os potenciais nos terminais do circuito e  $U_e$  é a condutância elétrica equivalente. Esta condutância é o inverso da resistência equivalente  $R_e$ , que, por sua vez, é dada pela soma das resistências em série do circuito:

$$\frac{1}{U_e} = R_e = \sum_i R_i = \sum_i \frac{1}{U_i}$$

O calor transferido por unidade de tempo é dado por:

$$\dot{Q} = \kappa A \frac{T_q - T_s}{d} = \frac{\kappa}{d} A(T_q - T_s) = hA(T_s - T_f)$$

Os coeficientes  $(\kappa/d)A$  e  $hA$  são as condutâncias térmicas do sólido e do fluido. Utilizando a analogia elétrica calculamos a condutância equivalente como:

$$\frac{1}{UA} = \frac{d}{\kappa A} + \frac{1}{hA} = \frac{hd + \kappa}{h\kappa A}$$

Portanto:

$$UA = \frac{h\kappa}{hd + \kappa} A \quad \Rightarrow \quad U = \frac{h\kappa}{hd + \kappa}$$

A expressão de  $U$  é exatamente a mesma da eq. (10.6), o que confirma a validade da analogia entre taxa de transferência de calor e corrente elétrica.

Observamos por fim que se o termo  $hd$  for pequeno quando comparado a  $\kappa$  a condutância  $U$  é igual a  $h$ , isto é, a resistência térmica do sólido é desprezível quando comparada à da *camada limite térmica* que se desenvolve no fluido junto ao sólido. Esta situação ocorre algumas vezes em trocadores de calor, onde dois fluidos são postos em contato térmico através de uma parede fina. As resistências térmicas se encontram essencialmente na camada limite de cada fluido, próxima à parede que os separa.

## 10.4 O Método de Separação de Variáveis

Nesta seção apresentaremos o método de Separação de Variáveis, que é empregado na solução de equações a derivadas parciais lineares, como é em geral o caso da equação de condução de calor em sólidos. Ilustraremos o método determinando o campo estacionário de temperaturas bidimensional em uma placa retangular e o campo de temperaturas dependente do tempo em um sólido unidimensional. A seguir generalizaremos o método para sólidos de geometria arbitrária.

### 10.4.1 Condução de calor bi-dimensional permanente

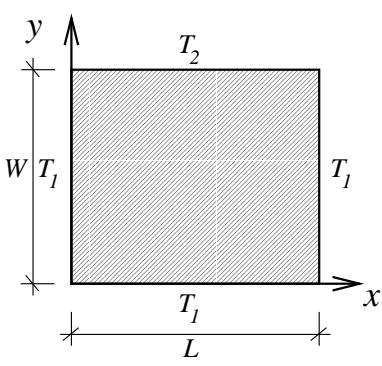


Figura 10.4: Condução bi-dimensional permanente em uma placa plana.

Consideremos o problema da determinação do campo de temperaturas bi-dimensional permanente em uma placa plana retangular sem fontes internas, cujos bordos laterais e inferior são mantidos à temperatura  $T_1$  e cujo bordo superior é mantido à temperatura  $T_2$ , conforme mostrado na Fig. (10.4). As dimensões da placa nas direções  $x$  e  $y$  são, respectivamente,  $L$  e  $W$ . A equação de condução de calor em sólidos aplicada ao problema se simplifica e toma a forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Introduzimos a variável temperatura adimensional  $\theta$ , definida por:

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}.$$

Pode-se verificar facilmente que:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{T_2 - T_1} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

sendo portanto necessário que:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

As condições de contorno para a temperatura adimensional são  $\theta = 0$  em  $x = 0, x = L$ ,  $y = 0$  e  $\theta = 1$  em  $y = W$ . O método de separação de variáveis consiste em procurar-se uma solução para o campo de temperaturas na forma de um produto de funções, cada uma dependendo de apenas uma das variáveis independentes do problema. Assim, procuramos uma solução na forma:

$$\theta = X(x)Y(y).$$

Substituindo esta possível solução na equação que rege o campo de temperaturas na placa encontramos:

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

Esta última equação pode ser reescrita como:

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

Sendo o membro esquerdo da equação acima função apenas da variável  $x$  e o membro direito, da variável  $y$ , quaisquer que sejam os valores de  $x$  e de  $y$  a igualdade acima só se verifica se ambos os membros forem constantes. Denominamos esta constante como *auto-valor* da equação. Seja  $\lambda^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , o valor desta constante. Justificaremos adiante a escolha de um valor positivo para  $\lambda$ . Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2 \tag{10.7}$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda^2 \tag{10.8}$$

A eq. (10.8) admite como soluções  $Y_1 = (C_1/2)e^{\lambda y}$  e  $Y_2 = (C_2/2)e^{-\lambda y}$ . Sendo a equação linear a soma de ambas as soluções é também solução. Portanto:

$$Y = \frac{C_1}{2}e^{\lambda y} + \frac{C_2}{2}e^{-\lambda y}$$

Em virtude da condição de contorno  $\theta = 0$  em  $y = 0$  é necessário que  $C_1 = -C_2 = C$ . A solução para função  $Y$  toma então a forma:

$$Y = \frac{C}{2}e^{\lambda y} - \frac{C}{2}e^{-\lambda y} = C \frac{e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}}{2} = C \operatorname{senh} \lambda y$$

A eq. (10.7) admite como soluções  $X_1 = Ae^{i\lambda x}$  e  $X_2 = A^*e^{-i\lambda x}$ , onde  $A^*$  representa o complexo conjugado de  $A$ . Analogamente ao caso da equação de  $Y$ , a soma de  $X_1$  e  $X_2$  é também solução da eq. (10.7). Adicionalmente a solução resultante é *real*, como mostramos a seguir. De fato,

$$\begin{aligned} X &= Ae^{i\lambda x} + cc = Ae^{i\lambda x} + A^*\exp(-i\lambda x) \\ &= (\Re(A) + i\Im(A))(\cos \lambda x + i \operatorname{sen} \lambda x) + (\Re(A) - i\Im(A))(\cos \lambda x - i \operatorname{sen} \lambda x) \\ &= 2\Re(A) \cos \lambda x - 2\Im(A) \operatorname{sen} \lambda x \end{aligned}$$

Aplicando a condição de contorno  $\theta = 0$  em  $x = 0$  concluímos que  $\Re(A) = 0$ . A solução do campo de temperaturas é portanto da forma:

$$\theta = -2C\Im(A) \operatorname{senh} \lambda y \operatorname{sen} \lambda x$$

ou:

$$\theta = B \operatorname{senh} \lambda y \operatorname{sen} \lambda x$$

Por outro lado, para que tenhamos  $\theta = 0$  em  $x = L$  é necessário que  $\lambda = \pi/L$ , ou de forma mais geral, que  $\lambda_n = n\pi/L$  com  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Há portanto um número infinito de valores admissíveis para  $\lambda$  e a solução geral para o campo de temperaturas é dada pela soma de todas estas soluções. Cabe ressaltar que a solução na forma de uma soma de senos na direção  $x$  decorre de termos imposto que  $\lambda^2 > 0$ . A solução da eq. (10.7) com  $\lambda^2 < 0$  não satisfaz às condições de contorno na direção  $x$ . Temos então:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh} \lambda_n y \operatorname{sen} \lambda_n x$$

Restam os coeficientes  $B_n$  a determinar. Utilizando a condição de contorno  $\theta = 1$  em  $y = W$  temos que:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh} \lambda_n W \operatorname{sen} \lambda_n x \quad (10.9)$$

A série é da forma:

$$1 = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \mathbf{e}_n \quad (10.10)$$

onde  $\xi_n = B_n \operatorname{senh} \lambda_n W$  e  $\mathbf{e}_n = \operatorname{sen} \lambda_n x$ . Esta última série é análoga à utilizada para descrever um vetor  $\mathbf{X}$  em uma base ortonormal  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots\}$ :

$$\mathbf{X} = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \mathbf{e}_n$$

No caso de um vetor cada coeficiente  $\xi_m$  representa a coordenada do mesmo na direção de  $\mathbf{e}_m$  e pode ser obtida multiplicando-se o vetor escalarmente por  $\mathbf{e}_m$ . Representando o produto escalar de  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{e}_n$  por  $\langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_n \rangle$ , temos:

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_m \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \right\rangle = \xi_m$$

pois  $\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = 0$  se  $n \neq m$  e  $\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = 1$  se  $n = m$ .

Da mesma forma que no caso de vetores, os coeficientes  $B_n$  da série que representa o campo de temperaturas em  $y = W$ , eq. (10.10), podem ser obtidos através de um produto escalar, devidamente redefinido. Definimos este produto escalar como sendo:

$$\langle \sin \lambda_n x, \sin \lambda_m x \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \lambda_n x \sin \lambda_m x dx$$

e mostramos a seguir que  $\langle \sin \lambda_n x, \sin \lambda_m x \rangle = 0$  se  $n \neq m$  e que  $\langle \sin \lambda_n x, \sin \lambda_m x \rangle = 1$  se  $n = m$ . Lembrando que:

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b\end{aligned}$$

temos que:

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)).$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\frac{2}{L} \int_0^L \sin \lambda_n x \sin \lambda_m x dx &= \\ \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \cos(\lambda_n - \lambda_m)x dx - \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \cos(\lambda_n + \lambda_m)x dx. &\end{aligned}\quad (10.11)$$

Desenvolvendo a primeira integral do membro direito da igualdade (10.11) para o caso de  $n \neq m$  temos:

$$\begin{aligned}\frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \cos(\lambda_n - \lambda_m)x dx &= \frac{1}{(\lambda_n - \lambda_m)L} \int_0^L \cos(\lambda_n - \lambda_m)x d(\lambda_n - \lambda_m)x \\ \frac{\sin(\lambda_n - \lambda_m)x}{(\lambda_n - \lambda_m)L} \Big|_0^L &= \frac{\sin(n-m)\pi x/L}{(\lambda_n - \lambda_m)L} \Big|_0^L = 0\end{aligned}$$

Da mesma forma a segunda integral da igualdade (10.11) é igual a zero tanto para o caso de  $n = m$  quanto para o de  $n \neq m$ . Se  $n = m$ , então  $\lambda_n - \lambda_m = 0$  e a primeira integral do membro direito da igualdade (10.11) torna-se:

$$\frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \cos(\lambda_m - \lambda_m)x dx = \frac{1}{L} \int_0^L \cos 0 dx = \frac{1}{L} \int_0^L dx = 1$$

o que mostra que de fato:

$$\langle \sin \lambda_n x, \sin \lambda_m x \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \lambda_n x \sin \lambda_m x dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

Multiplicamos então a eq. (10.9) escalarmente por  $\sin \lambda_m x$ . Para o membro esquerdo temos:

$$\begin{aligned}\frac{2}{L} \int_0^L 1 \sin \lambda_m x dx &= \frac{2}{\lambda_m L} \int_0^L 1 \sin \lambda_m x d\lambda_m x = \frac{-2}{\lambda_m L} \cos \lambda_m x \Big|_0^L \\ \frac{2L}{m\pi L} \left( -\cos \frac{m\pi}{L} L + \cos 0 \right) &= \begin{cases} 4/m\pi & \text{se } m \text{ for ímpar} \\ 0 & \text{se } m \text{ for par} \end{cases}\end{aligned}$$

Para o membro esquerdo da eq. (10.9) temos:

$$< \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh} \lambda_n W \operatorname{sen} \lambda_n x, \operatorname{sen} \lambda_m x > = B_m \operatorname{senh} \lambda_m W$$

Portanto:

$$B_m \operatorname{senh} \lambda_m W = \frac{4}{m\pi} \quad m = 2, 4, 6, \dots$$

e:

$$B_m = \frac{4}{m\pi \operatorname{senh} \frac{2m\pi W}{L}} \quad m = 2, 4, 6, \dots$$

ou ainda:

$$B_m = \frac{2}{m\pi \operatorname{senh} \frac{2m\pi W}{L}} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

O campo adimensional de temperaturas na placa é dado portanto pela relação:

$$\theta(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m\pi \operatorname{senh} \frac{2m\pi W}{L}} \operatorname{senh} \frac{2m\pi y}{L} \operatorname{sen} \frac{2m\pi x}{L}$$

#### 10.4.2 Condução de calor unidimensional dependente do tempo

Trataremos nesta seção do problema de condução de calor unidimensional dependente do tempo em um sólido sem fontes internas. Consideramos um corpo de comprimento  $L$ , cujas paredes localizadas em  $x = 0$  e em  $x = L$  são mantidas à temperatura  $T = 0$ . A distribuição de temperaturas no tempo  $t = 0$  é  $T_0(x)$ , conforme mostrado na Fig. (10.5).

A equação de condução de calor toma a forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

ou:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Procuramos uma solução para a distribuição de temperaturas na forma  $T(t, x) = F(t)G(x)$ . Trata-se mais uma vez, de uma solução por *separação de variáveis*. Substituindo a forma de  $T(t, x)$  na equação de condução de calor obtemos:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} F(t)G(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(t)G(x) \implies \frac{1}{\alpha} F'(t)G(x) = F(t)G''(x)$$

onde  $F'(t) = dF/dt$  e  $G''(x) = d^2G/dx^2$ . A última equação pode ainda se escrita como:

$$\frac{1}{\alpha F(t)} F'(t) = \frac{1}{G(x)} G''(x)$$

O membro esquerdo da equação acima é função apenas do tempo, enquanto que o membro direito é função da posição  $x$  apenas. Esta situação só é possível se ambas as funções forem iguais a uma constante comum, denominada *autovalor* da equação. Seja  $-\lambda^2$  este autovalor. Temos então:

$$\frac{1}{\alpha F(t)} F'(t) = -\lambda^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dF}{dt} = -\alpha \lambda^2 F \quad (10.12)$$

$$\frac{1}{G(x)} G''(x) = -\lambda^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2G}{dx^2} = -\lambda^2 G \quad (10.13)$$

A solução da eq. (10.12) é da forma:

$$F = \exp(-\lambda^2 t)$$

enquanto que a eq. (10.13) tem duas soluções:

$$G_{1,2} = A \exp(\pm i \lambda x)$$

A solução geral desta última equação é dada pela soma das duas soluções acima. Como o campo de temperaturas deve ser uma função real é necessário que as constantes  $A$  e  $B$  sejam números complexos conjugados, conforme já demonstrado. Por razão que apresentaremos abaixo, exigiremos que  $\cos \lambda x$  e  $\sin \lambda x$  completem um número inteiro de períodos em  $x = L$ . Há portanto uma infinidade de números  $\lambda_n$  satisfazendo a esta condição. Consequentemente:

$$\lambda_n L = 2n\pi \quad \rightarrow \quad \lambda_n = \frac{2\pi}{L} n$$

A solução geral do campo de temperaturas é dada pela soma da solução associada a cada  $\lambda_n$ . Temos então:

$$T(t, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \exp(-\alpha \lambda_n^2 t + i \lambda_n x) + cc$$

onde “cc” indica o complexo conjugado.

Os coeficientes  $A_n$  são obtidos a partir da distribuição de temperaturas em  $t = 0$ , que é a condição inicial do problema. Naquele instante:

$$T(0, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \exp(i \lambda_n x) + cc$$

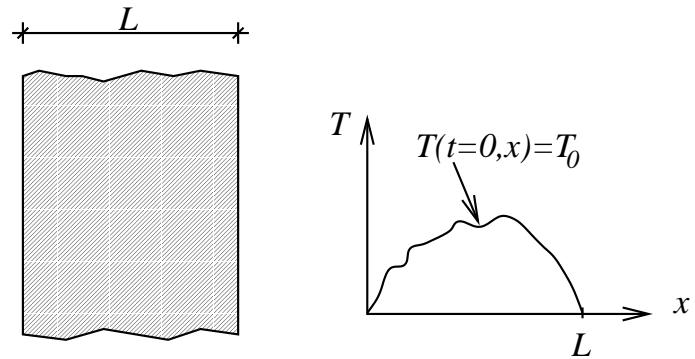


Figura 10.5: Distribuição inicial de temperaturas em um sólido uni-dimensional.

Utilizaremos agora a condição de periodicidade imposta a  $\exp(i\lambda_n x)$ . Calculamos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{L} \int_0^L T(0, x) \exp(-i\lambda_m x) dx &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{L} \int_0^L (A_n \exp(i\lambda_n x) + cc) \exp(-i\lambda_m x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{L} \int_0^L A_n \exp(i(\lambda_n - \lambda_m)x) dx + \\ &\quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{L} \int_0^L A_n^* \exp(-i(\lambda_n + \lambda_m)x) dx\end{aligned}$$

Todas as integrais do membro direito da equação acima se anulam, pois tratam-se de integrais de senos e de cossenos, sobre número inteiro de períodos. A única exceção ocorre quando  $n = m$ . Neste caso:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{L} \int_0^L (A_m \exp(i\lambda_n x) + cc) \exp(-i\lambda_m x) dx &= \frac{1}{L} \int_0^L A_m \exp(i(\lambda_m - \lambda_m)x) dx = \\ \frac{1}{L} \int_0^L A_m dx &= \frac{1}{L} A_m L = A_m\end{aligned}$$

Portanto:

$$A_n = \frac{1}{L} \int_0^L T(0, x) \exp(-i\lambda_n x) dx$$

#### 10.4.3 O Método *Point-Matching*

Nesta seção apresentamos o método *Point-Matching*, que possibilita a resolução de problemas de condução de calor em regime permanente ou não, em sólidos de geometria arbitrária. O método aplica-se a problemas descritos por equações a derivadas parciais, sujeitas a condições iniciais e/ou de contorno.

Deve-se conhecer uma solução particular do problema e outra na forma de uma série homogênea. Nos problemas que só envolvem condições de contorno o método permite a determinação de um número finito de coeficientes da série. Nos problemas de valor inicial, além destes, obtém-se um número finito de autovalores.

Ilustramos a aplicação do método nos dois problemas seguintes.

#### Condução de calor bi-dimensional em regime permanente com fontes distribuídas

Consideremos um sólido bi-dimensional de geometria arbitrária conforme mostrado na Fig. (10.6). O sólido tem uma distribuição interna de fontes de calor da forma  $f(r, \phi)$ . A temperatura no exterior do sólido é mantida constante em um valor que fixamos como sendo zero. Procuraremos determinar o campo estacionário de temperaturas neste sólido, utilizando coordenadas

polares. Incorporando a difusividade térmica  $\alpha$  do sólido à função  $f$  escrevemos a equação de condução de calor na forma:

$$\nabla^2 T + f(r, \phi) = 0$$

ou, em coordenadas polares:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + f(r, \phi) = 0 \quad (10.14)$$

Seja  $\mathbf{n}$  o vetor de comprimento unitário, normal à superfície do sólido e seja  $\gamma$  o ângulo entre  $n$  e a direção do vetor  $r$ .

As condições de contorno do problema envolvem transferência de calor por convecção e um fluxo de calor por radiação, que supomos independente da temperatura do sólido. O fluxo líquido de calor por condução na fronteira do sólido deve ser igual à soma do fluxo de calor transferido por convecção para fora do mesmo (ver sec. 7.8) menos o fluxo de calor transferido para o sólido por radiação,  $F$ . Adotamos a convenção de que o fluxo de calor para fora do sólido é positivo. Sejam  $M$  e  $N$ , os coeficientes de transferência de calor por condução e por convecção, respectivamente. Podemos então equacionar as condições de contorno na forma:

$$-M \frac{\partial T}{\partial n} = NT - F$$

ou

$$M \frac{\partial T}{\partial n} + NT = F$$

onde  $n$  é a coordenada ao longo da direção normal à superfície do sólido. A projeção do gradiente de temperatura nesta direção é dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \left( \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \right) \cdot \mathbf{n} = \cos \gamma \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi}$$

A condição de contorno pode portanto ser reescrita como:

$$M \left( \cos \gamma \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + NT = F \quad (10.15)$$

A eq. (10.14) admite uma solução particular  $T_p$ , da qual não nos ocuparemos, e uma solução geral da equação homogênea associada,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = 0 \quad (10.16)$$

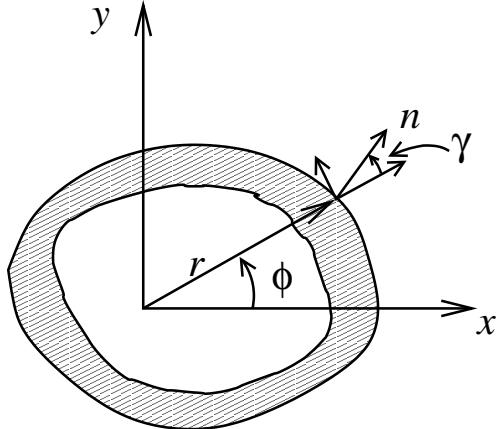


Figura 10.6: Campo estacionário de temperaturas em um sólido bi-dimensional de geometria arbitrária.

Procuramos uma solução para a eq. (10.16) por separação de variáveis, na forma:

$$T = R(r)\Phi(\phi)$$

Substituindo esta forma na eq. (10.16) encontramos:

$$r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} R\Phi + r \frac{\partial}{\partial r} R\Phi + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} R\Phi = 0$$

ou:

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}$$

O membro esquerdo da equação acima é função de  $r$  apenas, ao passo que o membro direito é função de  $\phi$  apenas. Ambos devem portanto ser constantes. Seja  $n^2$  esta constante. Obtemos então as duas equações seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} &= -n^2 \\ \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} - n^2 &= 0 \end{aligned}$$

A solução da primeira equação é da forma:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi$$

É necessário que  $n$  seja um número inteiro para que a temperatura seja a mesma ao se acrescentar  $2\pi$  à variável  $\phi$ . No que se refere à segunda equação, pode-se verificar facilmente que a mesma admite como soluções uma constante  $A_0$ ,  $A_1 \ln r$  se  $n = 0$  e  $r^n + r^{-n}$  se  $n > 0$ . A solução geral da eq. (10.14) é portanto:

$$T = T_p + A_0 + A_1 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\phi + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n r^n + E_n r^{-n}) \sin n\phi \quad (10.17)$$

onde  $T_p$  é uma solução particular da Eq. (10.14). Substituindo a solução acima na eq. (10.15) da condição de contorno encontramos:

$$\begin{aligned} F = M &\left[ \cos \gamma \frac{\partial T_p}{\partial r} + \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial T_p}{\partial \phi} + \frac{A_1 \cos \gamma}{r} + \right. \\ &\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} (B_n \cos n\phi + D_n \sin n\phi) \cos \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} (-B_n \sin n\phi + D_n \cos n\phi) \sin \gamma - \\ &\sum_{n=1}^{\infty} nr^{-n-1} (C_n \cos n\phi + E_n \sin n\phi) \cos \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} nr^{-n-1} (-C_n \sin n\phi + E_n \cos n\phi) \sin \gamma \left. \right] \\ &+ N \left[ T_p + A_0 + A_1 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\phi + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n r^n + E_n r^{-n}) \sin n\phi \right] \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
F = M & \left\{ \cos \gamma \frac{\partial T_p}{\partial r} + \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial T_p}{\partial \phi} + \frac{A_1 \cos \gamma}{r} + \right. \\
& \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} (B_n \cos(n\phi + \gamma) + D_n \sin(n\phi + \gamma)) - \\
& \left. \sum_{n=1}^{\infty} n r^{-n-1} [C_n \cos(n\phi - \gamma) + E_n \sin(n\phi - \gamma)] \right\} \\
& + N \left[ T_p + A_0 + A_1 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\phi + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n r^n + E_n r^{-n}) \sin n\phi \right]
\end{aligned}$$

Truncando a série em  $n = n_0$  e aplicando-se o resultado em pontos discretos do contorno  $(r_i, \phi_i)$  monta-se um sistema de equações algébricas lineares em que as incógnitas são os coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  e  $D_n$ . Se o número de incógnitas for igual ao de equações o sistema pode ser resolvido diretamente. Se for maior, os coeficientes podem ser determinados pelo método de mínimos quadrados.

O *erro*, definido como a diferença entre a temperatura real e a estimada, é uma função harmônica e como tal, assume o valor máximo na fronteira do sólido. Diminuindo-se os erros na fronteira, diminui-se os do interior.

### Condução de calor bi-dimensional em regime transiente sem fontes internas

Consideremos o problema da determinação do campo de temperaturas dependente do tempo em um sólido bi-dimensional de geometria arbitrária, sem fontes internas. Para simplificar o tratamento do problema consideramos que o sólido seja simétrico com relação ao eixo  $x$ , conforme mostrado na Fig. (10.7).

A equação de condução de calor, escrita em coordenadas cilíndricas toma a forma:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}$$

Condições iniciais e de contorno do problema:

$$T = F(r, \phi) \quad \text{em } t = 0$$

$$M \frac{\partial T}{\partial n} + NT = 0 \quad \text{na fronteira}$$

onde  $n$  é a coordenada ao longo da direção perpendicular à superfície do corpo. A temperatura ambiente longe do mesmo é fixada em  $t_\infty = 0$ . A condição de contorno pode ser

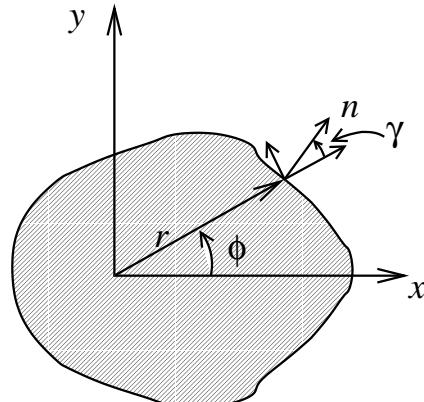


Figura 10.7: Campo estacionário de temperaturas em um sólido bi-dimensional simétrico em relação ao eixo  $x$ .

reescrita na forma:

$$M \left( \cos \gamma \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + NT = 0 \quad (10.18)$$

onde  $\gamma$  é o ângulo entre o vetor de comprimento unitário perpendicular à superfície do sólido,  $\mathbf{n}$ , e a direção  $r$ .

Procuramos uma solução por separação de variáveis, na forma:

$$T = \Theta(t)R(r)\Phi(\phi)$$

Substituindo esta forma na equação de condução de calor encontramos:

$$\frac{R\Phi}{\alpha} \frac{d\Theta}{dt} = \Theta\Phi \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{\Theta\Phi}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{\Theta R}{r^2} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2}$$

ou então, dividindo por  $\Theta R\Phi$ :

$$\frac{1}{\alpha\Theta} \frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{R} \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2}$$

O membro esquerdo da equação acima é função do tempo apenas enquanto que o membro direito é função de  $r$  e de  $\phi$ . Para que a igualdade se verifique é necessário que ambos os membros sejam constantes. Adicionalmente, esta constante deve ser real e negativa para que a temperatura do corpo decaia para o valor da temperatura ambiente quando  $t \rightarrow \infty$ . Seja  $-\lambda^2$  o valor da constante. Obtemos duas equações:

$$\frac{1}{\alpha\Theta} \frac{d\Theta}{dt} = -\lambda^2 \quad (10.19)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\lambda^2 \quad (10.20)$$

A solução da eq. (10.19) é da forma:

$$\Theta = Ae^{-\alpha\lambda^2 t}$$

Quanto à eq. (10.20), temos:

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -r^2\lambda^2$$

ou:

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + r^2\lambda^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2}$$

O membro esquerdo da equação acima depende apenas de  $r$ , enquanto que o direito depende somente de  $\phi$ . Como nos casos anteriores é necessário que ambos os membros sejam constantes. Seja  $n^2$  esta constante, com  $n \in \mathcal{R}$ . Obtemos duas equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + r^2\lambda^2 = n^2$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -n^2$$

ou ainda:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (r^2 \lambda^2 - n^2) R = 0 \quad (10.21)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -n^2 \Phi \quad (10.22)$$

A solução geral das Eqs. (10.21) e (10.22) é da forma:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} J_n(\lambda r) + C_{2n} Y_n(\lambda r) \\ \Phi &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{3n} \cos n\phi + C_{4n} \sin n\phi \end{aligned}$$

onde  $J_n$  e  $Y_n$  são, respectivamente, as funções de Bessel de primeira e de segunda espécie de ordem  $n$ . A constante de separação  $n$  deve ser um número inteiro para que o campo de temperaturas se repita cada vez que se acresce  $2\pi$  ao valor de  $\phi$ . Por outro lado a constante  $C_{4n}$  deve se anular em virtude da simetria do campo de temperaturas com relação ao eixo  $x$ . A constante  $C_{2n}$  também se anula por não serem as funções  $Y_n$  definidas na origem.

A solução do campo de temperaturas é portanto da forma:

$$T = A e^{-\alpha \lambda^2 t} \sum_{n=0}^{\infty} D_n J_n(\lambda r) \cos n\phi$$

O problema admite uma infinidade de autovalores  $\lambda_m$  e por isto o campo de temperaturas toma a forma:

$$T = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\alpha \lambda_m^2 t} \omega_m(r, \phi)$$

onde:

$$\omega_m(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{m,n} J_n(\lambda_m r) \cos n\phi$$

Notação adotada:

$$\begin{aligned} G_{m,n}(r, \phi) &= J_n(\lambda_m r) \cos n\phi \\ \omega_m(r, \phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_{m,n} G_{m,n} \end{aligned}$$

Utilizando-se a condição de contorno, eq. (10.18), tem-se que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\alpha \lambda_m^2 t} \left\{ M \left[ \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r} \omega_m(r, \phi) + \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \omega_m(r, \phi) \right] + N \omega_m(r, \phi) \right\} = 0$$

Como  $e^{-\alpha\lambda_m^2 t}$  varia no tempo a condição de contorno acima só se verifica se:

$$M \left[ \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r} \omega_m(r, \phi) + \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \omega_m(r, \phi) \right] + N \omega_m(r, \phi) = 0$$

isso é, se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_{m,n} \left[ M \left( \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r} G_{m,n} + \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} G_{m,n} \right) + N G_{m,n} \right] = 0$$

Truncando a série em  $n = N$  e aplicando a condição acima a  $N + 1$  pontos do contorno monta-se um sistema algébrico linear da forma:

$$B \begin{pmatrix} D_{m,0} \\ \vdots \\ D_{m,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{onde:} \quad B = \begin{pmatrix} A_{10} & \cdots & A_{1N} \\ & \ddots & \\ A_{N0} & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix}$$

e os elementos da matriz  $B$  são da forma:

$$A_{ij} = M \left( m_r \frac{\partial G_{m,i}}{\partial r} + m_\phi \frac{\partial G_{m,i}}{\partial \phi} \right) + N G_{m,i} \Big|_{r_j, \phi_j}$$

Para que os coeficientes  $D_{m,n}$  sejam diferentes de zero é necessário que  $\det B = 0$ . Esta condição conduz a uma equação que, resolvida, fornece os autovalores  $\lambda_m$  do problema.

Os coeficientes  $D_{m,n}$  admitem uma infinidade de soluções para cada valor de  $m$ , em virtude de ser o operador  $B$  singular. Fixando  $B_{m,0} = 1$  os demais podem ser determinados. Desta forma as funções  $\omega_m(r, \phi)$  ficam determinadas e o campo de temperaturas toma a forma:

$$T(t, r, \phi) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\alpha\lambda_m^2 t} \omega_m(r, \phi)$$

Os coeficientes  $A_m$  são determinados através das condições iniciais do problema. Truncando-se a série em  $m = N$  e utilizando-se a condição inicial em  $N$  pontos do interior do corpo em  $t = 0$

$$F(r, \phi) = \sum_{m=1}^N A_m \omega_m(r, \phi)$$

ou:

$$\begin{pmatrix} \omega_1(r_1, \phi_1) & \omega_2(r_1, \phi_1) & \dots & \omega_N(r_1, \phi_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_1(r_N, \phi_N) & \omega_2(r_N, \phi_N) & \dots & \omega_N(r_N, \phi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(r_1, \phi_1) \\ \vdots \\ F(r_N, \phi_N) \end{pmatrix}$$

## 10.5 O Método de Diferenças Finitas

Os métodos de resolução de equações a derivadas parciais podem de forma geral, ser agrupados em duas categorias, conforme a estratégia que utilizam: Ou procura-se uma solução

aproximada para a equação que descreve o fenômeno, ou substitui-se a equação original por um sistema de equações aproximadas e procura-se uma solução exata para este novo sistema. Pertencem à primeira categoria os métodos *espectrais* e o método de *elementos finitos*. Pertence à segunda categoria o método de diferenças finitas. Nesta seção apresentaremos uma breve descrição deste método, abordando as seguintes questões:

1. Representação discreta de derivadas temporais e espaciais;
2. Métodos *explícitos* e *implícitos* – estabilidade;
3. Problemas uni-dimensionais;
4. Problemas bi-dimensionais – o método das direções alternadas (ADI).

A idéia do método de diferenças finitas consiste em se definir uma *malha* sobre o corpo, contendo um número finito de pontos, e em se calcular a temperatura nos pontos desta malha em tempos sucessivos, espaçados entre si por intervalos igualmente finitos. Assim, obtém-se como resultado não o conhecimento da distribuição contínua de temperaturas, mas o conhecimento desta distribuição em pontos *discretos* do espaço e do tempo.

A malha espacial pode ser *uniforme* ou variável. Da mesma forma, o *passo de integração* que é a distância entre dois tempos sucessivos em que a temperatura de cada ponto é calculada também pode ser variável. Trataremos aqui do caso de malhas uniformes e de passos de integração  $\Delta t$  constantes.

Identificamos a os pontos da malha através de um índice inferior associado à temperatura do corpo e o e o número do passo de integração através de um índices superior, associados à mesma temperatura. Assim, no caso de um problema bi-dimensional, representamos a temperatura no ponto de coordenadas  $i, j$  da malha espacial e no tempo  $n$  por  $T_{ij}^n$ . Se a malha espacial tiver uma direção apenas a representação será  $T_i^n$

O passo seguinte, consiste em substituir os operadores diferenciais da equação original por representações *discretas* aproximadas dos mesmos. Esta representação e a avaliação do erro que se incorre ao se adotar esta representação são o objeto das sec. (10.5.1 e 10.5.2).

### 10.5.1 Representação discreta de derivadas temporais

Para representarmos a derivada temporal da temperatura de forma discreta utilizamos o seguinte desenvolvimento em série de Taylor:

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \Delta t \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_i^n + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (10.23)$$

$$T_j^n = T_j^{n+1} - \Delta t \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_j^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_i^{n+1} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (10.24)$$

Desprezando termos de segunda ordem e superiores temos:

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \Delta t \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (10.25)$$

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \Delta t \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_j^{n+1} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (10.26)$$

A eq. (10.25) é um esquema correto até *primeira ordem* no tempo para cálculo de  $T_j^{n+1}$ , pois despreza-se os termos de segunda ordem e maiores. Além disso, este esquema é *explícito* pois a derivada  $\partial T / \partial t$  é calculada no tempo  $n$ , em que o campo de temperaturas é conhecido. Esta derivada é dada pelo membro direito da equação de condução de calor em sólidos (eq. 10.2). Analogamente, a eq. (10.26) é um esquema correto até primeira ordem no tempo, sendo no entanto *implícito* pois a derivada  $\partial T / \partial t$  deve ser calculada no “novo” tempo,  $n+1$ . Esta derivada é portanto uma incógnita.

Cabe notar que remanejando os termos da eq. (10.25) obté-se uma representação com erro de *primeira ordem*, isto é, da ordem de  $\Delta t$  para derivada temporal. De fato:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_j^n = \frac{T_i^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta t}\right)$$

e portanto:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_j^n = \frac{T_j^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$$

Subtraindo-se a eq. (10.24) da eq. (10.23) obtém-se um esquema correto até *segunda ordem* no tempo para o cálculo de  $T^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} T_j^{n+1} - T_j^n &= T_j^n - T_j^{n+1} + \Delta t \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_j^n + \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_j^{n+1} \right] + \\ &\quad \frac{\Delta t^2}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_j^n - \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_j^{n+1} \right] + \mathcal{O}(\Delta t^3) \end{aligned}$$

O termo em  $\Delta t^2$  é de fato de terceira ordem no tempo, pois:

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_j^{n+1} = \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_j^n + \Delta t \left( \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} \right)_j^n$$

e portanto:

$$\frac{\Delta t^2}{2} \left( \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_j^n - \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_j^{n+1} \right) = -\frac{\Delta t^3}{2} \left( \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} \right)_j^n$$

Temos então:

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \Delta t \frac{\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_j^n + \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_j^{n+1}}{2} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (10.27)$$

Desprezando-se os termos de terceira ordem e superiores obtém-se portanto uma fórmula de segunda ordem no tempo, implícita pois a mesma requer o cálculo da derivada temporal no tempo  $n + 1$ .

### 10.5.2 Representação discreta de derivadas espaciais

Consideramos agora o campo de temperaturas uni-dimensional de um sólido em um determinado tempo  $n$ . Sobre este sólido definimos uma malha espacial uniforme ao longo da direção  $x$ , sendo  $\Delta x$  a distância entre dois pontos sucessivos da mesma.

Procuramos exprimir a temperatura nos pontos  $j + 1$  e  $j - 1$  da malha em função da temperatura no ponto  $j$ . Utilizando um desenvolvimento em série de Taylor podemos escrever:

$$T_{j+1}^n = T_j^n + \Delta x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_j^n + \frac{\Delta x^2}{2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_j^n + \frac{\Delta x^2}{6} \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (10.28)$$

$$T_{j-1}^n = T_j^n - \Delta x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_j^n + \frac{\Delta x^2}{2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_j^n - \frac{\Delta x^2}{6} \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (10.29)$$

Da eq. (10.28) temos:

$$T_{j+1}^n = T_j^n + \Delta x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Desta última igualdade tem-se que:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_j^n = \frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{\Delta x} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta x}\right)$$

e portanto:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_j^n = \frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

A fórmula acima representa a primeira derivada espacial. O erro cometido na utilização da mesma é de primeira ordem em  $\Delta x$ .

Pode-se obter uma fórmula para a representação da primeira derivada espacial com erro de segunda ordem em  $\Delta x$ , subtraindo-se a eq. (10.29) da eq. (10.28):

$$T_{j+1}^n - T_{j-1}^n = 2\Delta x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

onde:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_j^n = \frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta x^3}{\Delta x}\right)$$

portanto:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_j^n = \frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Obtemos agora uma representação com erro de *segunda ordem* em  $\Delta x$  para a segunda derivada espacial. Para isto, somamos as Eqs. (10.28) e (10.29):

$$T_{j-1}^n + T_{j+1}^n = 2T_j^n + \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

onde:

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_j^n = \frac{T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n}{\Delta x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta x^4}{\Delta x^2}\right)$$

portanto:

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_j^n = \frac{T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

### 10.5.3 Métodos explícitos e implícitos – estabilidade

Na seleção de um método numérico para a integração de equações diferenciais deve-se levar em conta a *estabilidade* numérica do mesmo. Esta estabilidade se manifesta pela capacidade do mesmo em atenuar ou não erros que são continuamente introduzidos de truncamento no cálculo. Vimos que, na representação da derivada temporal pode-se optar por esquemas *explícitos*, em que a mesma é calculada com base no campo de temperaturas já conhecido. Alternativamente, pode-se optar por esquemas *implícitos*, em que há incógnitas na representação da derivada temporal, pois ao menos alguns termos ainda não foram calculados. Esquemas explícitos são em geral *condicionalmente* estáveis. Para assegurar a estabilidade do esquema deve-se limitar o tamanho do passo de integração, o que resulta em muitos casos, em custos computacionais inaceitáveis.

Para contornar a restrição ao tamanho do passo de integração utilizam-se os métodos implícitos. Em geral estes métodos exigem um esforço computacional maior por passo de integração mas permitem passos muito maiores, que redundam em menor custo total de cálculo. Nesta seção mostraremos a restrição a ser imposta para assegurar a estabilidade de um esquema explícito e o caráter *incondicionalmente* estável de um esquema implícito.

Consideremos o caso de um sólido unidimensional de comprimento  $L$  sem fontes internas de calor. O perfil de temperaturas do mesmo é dado por  $T(t, x)$ . A este perfil acrescentamos uma perturbação  $V$ , que pode ser descrita pela soma de modos trigonométricos. O valor da perturbação no tempo  $n$  e no ponto  $j$  da malha é dado por:

$$V_j^n = \sum \xi_\kappa^n e^{i\kappa j \Delta x}$$

onde  $\kappa = 2m\pi/L$  e  $\xi_\kappa^n$  é a amplitude do modo  $\kappa$ , no tempo  $n$ . O modo  $\kappa$  isoladamente, é dado por:

$$v_j^n = \xi_\kappa^n e^{i\kappa j \Delta x}$$

Sendo a eq. (10.2) linear, admite como solução uma soma de soluções. Assim podemos estudar a evolução da perturbação isoladamente e ainda, de um de seus modos apenas. Procuramos identificar o modo mais instável.

Vejamos inicialmente a evolução de um modo, utilizando a seguinte representação explícita da equação de condução de calor unidimensional, em um sólido sem fontes internas:

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n)$$

Procuramos determinar como evolui a amplitude do modo  $\kappa$ . Temos:

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (v_{j-1}^n - 2v_j^n + v_{j+1}^n)$$

ou:

$$v_j^{n+1} = \left(1 - 2\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\right) v_j^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (v_{j-1}^n + v_{j+1}^n)$$

Substituindo-se  $v$  por sua expressão encontramos:

$$\xi_\kappa^{n+1} e^{i\kappa j \Delta x} = \left(1 - 2\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\right) \xi_\kappa^n e^{i\kappa j \Delta x} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (\xi_\kappa^n e^{i\kappa(j-1)\Delta x} + \xi_\kappa^n e^{i\kappa(j+1)\Delta x})$$

Dividindo-se igualdade acima por  $e^{i\kappa j \Delta x}$  encontramos:

$$\xi_\kappa^{n+1} = \left(1 - 2\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\right) \xi_\kappa^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (\xi_\kappa^n e^{-i\kappa \Delta x} + \xi_\kappa^n e^{i\kappa \Delta x})$$

Pode-se verificar facilmente que  $e^{-i\kappa \Delta x} + e^{i\kappa \Delta x} = 2 \cos \kappa \Delta x$ . Levando em conta este resultado e reagrupando os termos encontramos:

$$\xi_\kappa^{n+1} = \left[1 - 2\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}(1 - \cos \kappa \Delta x)\right] \xi_\kappa^n$$

Para que o esquema numérico seja estável é necessário que o módulo da perturbação decresça, isto é, que:

$$-1 \leq \left[1 - 2\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}(1 - \cos \kappa \Delta x)\right] \leq 1$$

No caso de  $\cos \kappa \Delta x = 1$  a desigualdade acima é satisfeita. No caso de  $\cos \kappa \Delta x = -1$  temos:

$$-1 \leq 1 - 4\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$$

ou:

$$-2 \leq -4\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq 0$$

A condição  $-4(\alpha \Delta t)/\Delta x^2 \leq 0$  é satisfeita. Para que  $2 \leq -4(\alpha \Delta t)/\Delta x^2$  é necessário que:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\alpha}$$

o que mostra que o esquema explícito é *condicionalmente* estável. Para que isto ocorra deve-se adotar passos de integração suficientemente pequenos, o que se constitui muitas vezes em severa restrição ao uso deste esquema.

Consideremos agora o seguinte esquema implícito:

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (v_{j-1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j+1}^{n+1})$$

ou:

$$\left(1 + 2\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) v_j^{n+1} - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} (v_{j-1}^{n+1} + v_{j+1}^{n+1}) = v_j^n$$

Seguindo procedimento semelhante ao adotado no caso do esquema explícito encontramos:

$$\left[1 + 2\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}(1 - \cos \kappa\Delta x)\right] \xi_\kappa^{n+1} = \xi_\kappa^n$$

É fácil verificar que o coeficiente de  $\xi_\kappa^{n+1}$  é sempre maior ou igual que 1 e que, consequentemente,  $\xi_\kappa^{n+1} \leq \xi_\kappa^n$ . Portanto a amplitude da perturbação decresce no tempo e o esquema é *incondicionalmente* estável.

#### 10.5.4 Implementação de um esquema implícito – caso unidimensional

Nesta seção discutiremos alguns aspectos referentes à resolução de um problema de condução de calor uni-dimensional em um sólido, utilizando um esquema implícito. Trata-se de determinar o campo de temperaturas que evolui obedecendo à equação:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

sujeito à condição  $T_0(t = 0, x)$  e à condição de contorno  $T = T_e$  nas duas extremidades do sólido. Definimos uma malha espacial contendo  $N$  pontos espaçados entre si por uma distância  $\Delta x$  e utilizaremos o seguinte esquema implícito:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) \quad (10.30)$$

O esquema acima não pode ser aplicado ao primeiro nem ao último ponto da malha, pois, o cálculo da derivada segunda espacial em um ponto  $i$  requer a utilização da temperatura nos pontos  $i-1$  e  $i+1$ . Assim, utiliza-se as condições de contorno nestes dois pontos e aplica-se o esquema aos  $N-2$  pontos internos da malha. A eq. (10.30) pode ser re-escrita na forma:

$$\left(1 + 2\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} (T_{i-1}^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) = T_i^n$$

ou:

$$AT_{i-1}^{n+1} + BT_i^{n+1} + AT_{i+1}^{n+1} = T_i^n$$

Vemos que, para calcular a temperatura no ponto  $i$ , necessitamos da temperatura nos pontos  $i-1$  e  $i+1$ , que também são incógnitas do problema. Ao contrário do esquema explícito do qual estudamos a estabilidade agora não se pode calcular a temperatura em um nó da

malha de cada vez. A temperatura de cada ponto está *acoplada* à dos pontos vizinhos. Ao escrevermos todas as equações necessárias à solução do problema obtemos um sistema de  $N - 2$  equações algébricas lineares acopladas que devem ser resolvidas simultaneamente. O sistema toma a forma:

$$\begin{pmatrix} B & A & & & \\ A & B & A & & \\ \dots & & \dots & \dots & \\ & A & B & A & \\ & & A & B & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ \dots \\ T_{n-2}^{n+1} \\ T_{n-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_2^n - AT_1 \\ T_3^n \\ \dots \\ T_{n-2}^n \\ T_{n-1}^n - AT_n \end{pmatrix} \quad (10.31)$$

O operador que multiplica o vetor de incógnitas da eq. (10.31) é uma matriz em bandas onde estão indicados apenas os elementos diferentes de zero. Estes elementos situam-se ao longo da diagonal principal e da primeira diagonal acima e abaixo da principal. Trata-se de uma matriz tri-diagonal. Ao se codificar o algoritmo para o cálculo numérico é usual armazenar esta matriz em apenas três vetores, um para cada diagonal, com o objetivo de se minimizar o espaço de memória necessário. Cabe notar que mesmo com esta precaução o algoritmo faz uso de um espaço de memória de no mínimo *cinco* vezes o número de pontos da malha espacial. Este espaço é ocupado pelo vetor de incógnitas, pelo vetor do membro direito da Eq. (10.31) e pelos vetores necessários ao armazenamento das três diagonais do operador. Adicionalmente, as rotinas utilizadas na solução do sistema algébrico requerem em geral mais um vetor com o número de pontos da malha para o procedimento de inversão do operador. Ainda assim a demanda de memória resultante situa-se normalmente em nível aceitável quando se resolve problemas uni-dimensionais. Entretanto o mesmo não ocorre quando se transpõe este esquema sem modificações para problemas bi-dimensionais. Neste caso torna-se necessário introduzir refinamentos no algoritmo implícito, que trataremos na Sec. (10.5.5).

O problema de determinação da evolução do campo de temperaturas reduz-se portanto ao da solução de um sistema algébrico linear, cujo operador é uma matriz tri-diagonal. O sistema é resolvido tantas vezes quantos forem os passos de integração. Ao se executar o primeiro passo de utiliza-se a condição inicial para cálculo do campo de temperaturas no tempo  $t = \Delta t$ . O novo campo é utilizado como condição inicial para o passo seguinte e prossegue-se assim sucessivamente.

### 10.5.5 Problemas bi-dimensionais

#### O método das direções alternadas (ADI)

Consideramos nesta seção o caso do campo de temperaturas bi-dimensional em um sólido de forma retangular, com temperatura  $T_e$  constante nos bordos. A malha de pontos tem agora duas dimensões, com  $M$  pontos na direção  $x$ ,  $N$  na direção  $y$  e um total de  $M \times N$  pontos. A transposição do esquema implícito utilizado na sec. (10.5.4) sem modificações resultaria na discretização de em um algoritmo da forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[ \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^{n+1} + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)^{n+1} \right] \quad (10.32)$$

O espaço de memória necessário à implementação do esquema torna-se muito grande. Uma solução para contornar o problema consiste em executar cada passo de integração em duas etapas, com parte do membro direito da eq. (10.32) calculada de forma implícita e parte de forma *explícita*. Na etapa seguinte inclui-se na parte implícita os termos que haviam sido deixados explícitos na etapa anterior. Exemplo deste tipo de método é o das *Direções Alternadas* (ADI-“Alternating Directions Implicit”). A implementação deste esquema ao problema bi-dimensional de condução de calor resulta em:

$$\begin{aligned}\frac{T_i^{n+1/2} - T_i^n}{\Delta t/2} &= \alpha \left[ \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^{n+1/2} + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)^n \right] \\ \frac{T_i^{n+1} - T_i^{n+1/2}}{\Delta t/2} &= \alpha \left[ \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^{n+1/2} + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)^{n+1} \right]\end{aligned}$$

No primeiro meio-passo a derivada em relação a  $x$  é calculada de forma implícita. Como estas derivadas acoplam os pontos de uma linha mas não os de linhas distintas pode-se resolver o sistema referente a cada linha independentemente dos demais. No segundo meio-passo as derivadas em relação a  $y$  são calculadas de forma implícita, acoplando os pontos de uma mesma coluna. Resolve-se uma de cada vez. O algoritmo mantém os requisitos de memória dentro de limites aceitáveis.

## 10.6 Trocadores de Calor

Trocadores de calor são dispositivos utilizados para o resfriamento ou aquecimento de um equipamento ou de um fluido, denominado fluido de *processo*. O resfriamento ou aquecimento se faz por intermédio de outro fluido, denominado fluido de *serviço*. Como exemplos de trocadores de calor podemos citar as caldeiras de aquecimento de água e os geradores de vapor, onde o fluido de processo é a água, que é vaporizada por gases quentes provenientes da combustão de um óleo. Trocadores de calor são elementos essenciais dos motores de combustão interna, dos equipamentos de refrigeração, de ar condicionado, sendo largamente utilizados nas indústrias química, alimentar e siderúrgica. São importantes também nos “chips” dos computadores.

Trataremos aqui de trocadores de calor em que um fluido é resfriado por outro. Podemos classificá-los em duas categorias:

1. Trocadores *abertos*, em que um fluido tem contato direto com o outro. Exemplo deste tipo de trocador de calor são as *torres de resfriamento* em que a água de um sistema de recirculação que resfria diversos equipamentos é resfriada em contato direto com o ar. Torres de Resfriamento são largamente utilizadas em sistemas de ar condicionado de médio e de grande porte e em unidades industriais. A água é resfriada por convecção e, sobretudo pela *evaporação* de uma parcela da vazão de circulação. Este tipo de trocador de calor permite o resfriamento da água a temperaturas *inferiores* à do ar. Neste caso, o limite termodinâmico de resfriamento é a *temperatura de bulbo úmido* do ar ambiente.

2. Trocadores *fechados*, em que um fluido não tem contato direto com o outro, isto é, a transferência de calor se faz através de uma parede.

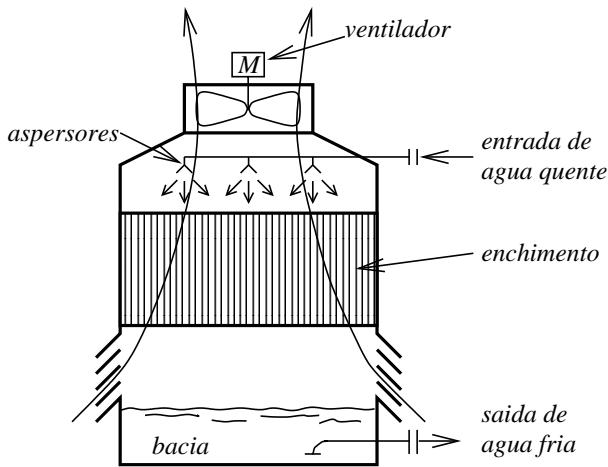


Figura 10.8: Esquema de uma torre de resfriamento do tipo *contra-corrente* com tiragem *induzida*.

A água resfriada é coletada na *bacia*, de onde é recirculada.

Trocadores fechados envolvem a troca térmica entre dois líquidos, dois gases, ou entre um líquido e um gás. Dois tipos comuns de trocadores de calor fechados são os de *casco e tubos* e os trocadores de *placas*.

Trocadores de calor de casco e tubos consistem de um feixe de tubos por onde circula em geral o fluido de processo. Este feixe é montado em um vaso de pressão por onde circula o fluido de serviço. Estes trocadores são utilizados para a transferência de calor entre líquidos ou entre um líquido e um gás. Podem trabalhar em condições de pressão bastante elevada porém com diferenças de temperatura não muito baixas entre os dois fluidos, pois este tipo de arranjo não resulta em superfícies de troca térmica muito grandes. O esquema da Fig. (10.9) ilustra a configuração de um trocador de calor do tipo casco e tubos.

Trocadores de placas consistem de um conjunto de placas em geral de aço inoxidável, formando canais alternados dos fluidos de processo e de serviço, conforme mostrado na Fig. (10.10). Todas as vedações são feitas através de *gaxetas* de borracha ou outro material sintético. Este tipo de trocador de calor permite que se obtenha grandes áreas de troca

O esquema da Fig. (10.8) mostra os principais elementos de uma Torre de Resfriamento do tipo *contra-corrente* com tiragem de ar *induzida* por um ventilador: A água quente é洒tada pela parte superior da Torre sobre o *enchimento*. O enchimento consiste de uma colméia ou de várias camadas de barras horizontais de madeira. No primeiro caso o enchimento provê um grande superfície de contato que é recoberta com uma fina lámina de água. A água escorre sob ação da gravidade e é resfriada pelo ar que circula em sentido contrário. No segundo caso a superfície de contato é obtida pelo fracionamento do fluxo de água em gotas que se produzem ao se chocarem com as barras de madeira, na queda através deste tipo de enchimento.

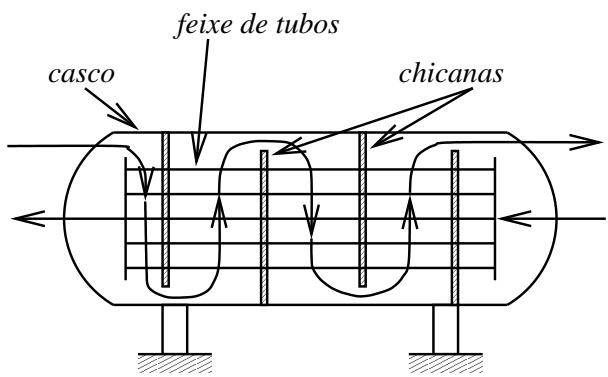


Figura 10.9: Esquema de um trocador de calor do tipo *casco e tubos*.

térmica em pequenos volumes. Consequentemente, é a escolha indicada para situações onde a diferença de temperatura entre os dois fluidos é baixa e que requeiram equipamentos compactos. No entanto este tipo de trocador de calor não é adequado para uso com gases nem sob condições de temperatura ou pressão elevada. O esquema da Fig. (10.10) mostra o arranjo de um trocador de calor a placas.

Os trocadores de calor podem também ser classificados de acordo com o arranjo relativo do fluxo dos dois fluidos. Se os dois fluidos seguirem trajetórias razoavelmente paralelas e de mesmo sentido, o trocador denomina-se como sendo de fluxo *paralelo*. Se as trajetórias forem razoavelmente paralelas mas de sentido contrário, o trocador denomina-se como sendo de fluxo *contra-corrente* (“counter-flow”). Se as trajetórias forem perpendiculares, o trocador denomina-se como sendo de escoamento cruzado (“cross-flow”). Mostramos abaixo o diagrama de evolução das temperaturas ao longo de um trocador paralelo e de outro do tipo contra-corrente.

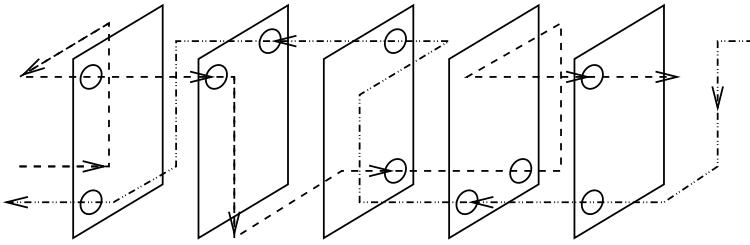


Figura 10.10: Esquema de um trocador de calor a *placas*.

forma:

$$\dot{Q} = UA \Delta T$$

onde  $U$  é o coeficiente global do trocador e  $A_e$ , a área de troca associada a esta condutância e  $\Delta T$ , a diferença média que procuramos calcular. Consideremos o caso de um trocador contra-corrente, em que um dos fluidos circula dentro de um tubo de seção circular. Sejam  $T_1$  e  $T_2$  as temperaturas de entrada e saída do fluido quente e  $T_3$  e  $T_4$ , as temperaturas de entrada e saída do fluido frio. As vazões em massa dos fluidos que circulam interna e externamente são  $\dot{m}_i$  e  $\dot{m}_e$ , respectivamente.

A condutância global é dada por:

$$\frac{1}{UA_e} = \frac{1}{h_e A_e} + R_e + \frac{1}{h_i A_i} \quad (10.33)$$

onde os índices  $e$  e  $i$  referem-se a propriedades do lado externo e interno do tubo respectivamente. Para calcularmos a carga térmica devemos multiplicar o coeficiente global  $U$  por uma área. No caso de um tubo, a área externa é diferente da área interna e podemos escolher qualquer uma das duas ou mesmo outra. Escolheremos a área *externa*,  $A_e$ .

Na equação acima  $R_e$  é a resistência térmica à condução do tubo. Calculemos esta resistência: Vimos que a distribuição radial de temperaturas nas paredes de um cilindro é dada por:

$$T = T_e + \frac{q_e r_e}{k} \ln \frac{r_e}{r}$$

Um dos parâmetros mais importantes de um trocador de calor é a diferença média de temperaturas entre os dois fluidos. Procuramos calculá-la de modo a permitir que a taxa de transferência de calor  $\dot{Q}$ , ou *carga térmica* do trocador possa ser expressa na

onde  $q_e$  é o fluxo de calor na parede externa do tubo. A temperatura na parede interna é obtida substituindo-se  $r$  por  $r_i$ :

$$T_i = T_e + \frac{q_e r_e}{k} \ln \frac{r_e}{r_i}$$

Desta igualdade obtemos:

$$q_e = \frac{k}{r_e \ln r_e / r_i} (T_i - T_e)$$

Quanto à carga térmica temos:

$$\dot{Q} = q_e A_e = \frac{k A_e}{r_e \ln r_e / r_i} (T_i - T_e)$$

A resistência térmica da parede do tubo é portanto:

$$R_e = \frac{r_e \ln r_e / r_i}{k A_e}$$

Por sua vez a condutância térmica do trocador,  $U A_e$ , é obtida substituindo-se a forma da resistência térmica da parede do tubo na eq. (10.33):

$$\frac{1}{U A_e} = \frac{1}{h_e A_e} + \frac{r_e \ln r_e / r_i}{k A_e} + \frac{1}{h_i A_i}$$

e o coeficiente global associado à área externa dos tubos,  $A_e$ , é dado por:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_e} + \frac{r_e \ln r_e / r_i}{k} + \frac{1}{h_i} \frac{A_e}{A_i} \quad (10.34)$$

Calculamos portanto o coeficiente global  $U$  de transferência de calor do trocador, o qual multiplicado pela área externa dos tubos e por uma diferença média de temperaturas entre os dois fluidos fornece a carga térmica  $\dot{Q}$  do trocador. Procuramos agora calcular esta diferença de temperaturas e expressá-la em função das temperaturas de entrada e saída dos dois fluidos.

Consideremos um elemento de comprimento  $dx$  do trocador de calor, conforme esquema ao lado e um volume de controle envolvendo apenas o fluido que circula dentro dos tubos. O fluxo líquido de entalpia para fora deste volume de controle é igual à taxa de transferência de calor para dentro do mesmo:

$$\dot{m}_i C_i dT_i = U 2\pi r_e dx (T_e - T_i)$$

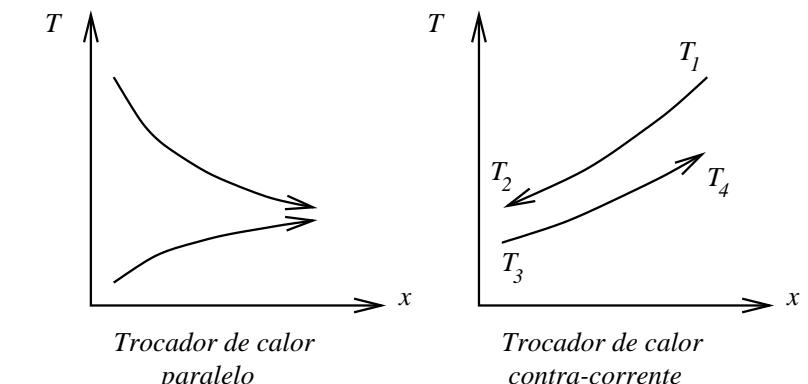


Figura 10.11: Diagrama de temperaturas de um trocadores de calor paralelos e contra-corrente.

onde  $C_i$  é o calor específico do fluido e  $T_e$  e  $T_i$  são as temperaturas locais dos fluidos externo e interno, respectivamente. Da equação acima obtemos:

$$\frac{dT_i}{T_e - T_i} = \frac{U 2\pi r_e}{\dot{m}_i C_i} dx \quad (10.35)$$

Consideremos agora um volume de controle que contenha o fluido que circula pelo lado externo dos tubos, no elemento de comprimento  $dx$  do trocador de calor. O fluxo líquido de entalpia para fora deste volume de controle é igual à taxa de transferência de calor para dentro do mesmo. Esta, por sua vez é igual ao negativo da taxa de calor transferido para o fluido que escoa dentro dos tubos:

$$\dot{m}_e C_e dT_e = -U 2\pi r_e dx (T_e - T_i)$$

onde  $C_e$  é o calor específico do fluido externo. Da equação acima obtemos:

$$\frac{dT_e}{T_e - T_i} = -\frac{U 2\pi r_e}{\dot{m}_e C_e} dx \quad (10.36)$$

Subtraindo a eq. (10.35) da eq. (10.36) obtemos:

$$\frac{d(T_e - T_i)}{T_e - T_i} = -U 2\pi r_e \left( \frac{1}{\dot{m}_e C_e} + \frac{1}{\dot{m}_i C_i} \right) dx \quad (10.37)$$

os termos  $1/\dot{m}_e C_e$  e  $1/\dot{m}_i C_i$  podem ser expressos em função da carga térmica  $\dot{Q}$  e das temperaturas de entrada e saída de cada fluido:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \dot{m}_e C_e (T_1 - T_2) & \Rightarrow & \frac{1}{\dot{m}_e C_e} = \frac{T_1 - T_2}{\dot{Q}} \\ \dot{Q} &= \dot{m}_i C_i (T_3 - T_4) & \Rightarrow & \frac{1}{\dot{m}_i C_i} = \frac{T_3 - T_4}{\dot{Q}} \end{aligned}$$

Substituindo-se as expressões acima na eq. (10.37) obtemos:

$$\frac{d(T_e - T_i)}{T_e - T_i} = -\frac{U 2\pi r_e}{\dot{Q}} (T_1 - T_2 + T_3 - T_4) dx$$

ou:

$$\frac{d(T_e - T_i)}{T_e - T_i} = \frac{U 2\pi r_e}{\dot{Q}} (\Delta T_{II} - \Delta T_I) dx$$

onde  $\Delta T_I = T_2 - T_3$  e  $\Delta T_{II} = T_1 - T_4$ . Integrando ao longo do trocador obtemos:

$$\ln \frac{\Delta T_{II}}{\Delta T_I} = \frac{U 2\pi r_e L}{\dot{Q}} (\Delta T_{II} - \Delta T_I) = \frac{U A_e}{\dot{Q}} (\Delta T_{II} - \Delta T_I)$$

ou:

$$\dot{Q} = U A_e \frac{\Delta T_{II} - \Delta T_I}{\ln(\Delta T_{II}/\Delta T_I)} \quad (10.38)$$

o termo:

$$\frac{\Delta T_{II} - \Delta T_I}{\ln(\Delta T_{II}/\Delta T_I)}$$

é a diferença média de temperaturas procurada. Este termo denomina-se *diferença média logarítmica de temperaturas*, ou simplesmente *LMTD* (“Logarithmic Mean Temperature Difference”). A equação acima se escreve então:

$$\dot{Q} = UA_e LMTD \quad (10.39)$$

O *LMTD* é um parâmetro facilmente calculável pois as temperaturas de entrada e saída dos dois fluidos são especificadas em geral. Como a carga térmica também o é, a equação acima permite calcular a condutância térmica requerida de um trocador de calor, que é o dado de partida para o projeto do mesmo.

A carga térmica de um trocador de calor também pode ser calculada através da vazão e das temperaturas de entrada e saída do fluido de processo:  $\dot{Q} = \dot{m}C\Delta T_p$ . Temos então :

$$\dot{m}C\Delta T_p = UA_e LMTD$$

ou:

$$\frac{\Delta T_p}{LMTD} = \frac{UA_e}{\dot{m}C} \quad (10.40)$$

Este parâmetro põe em evidência que quanto menor for a diferença média de temperaturas *LMTD* entre os dois fluidos, maior deve ser o produto *UA*. O parâmetro denomina-se *comprimento térmico* do trocador de calor.

O aumento do comprimento térmico se faz em geral aumentando-se a área de troca térmica, pois nem sempre se pode aumentar o coeficiente global *U*. Porém este aumento de área deve ser feito pelo aumento do comprimento dos tubos dentro do trocador e não do diâmetro dos mesmos, pois o aumento do diâmetro reduz a velocidade do fluido e, consequentemente, os coeficientes de troca térmica, os quais são função do número de Reynolds, conforme Eqs. (7.52-7.54). Por este motivo a condutância térmica *UA* é de fato proporcional ao comprimento dos tubos, o que justifica o nome *comprimento térmico*.

Ressaltamos por fim que a redução das vazões em um trocador de calor não resulta em uma redução proporcional na “capacidade de resfriamento”, entendida como redução do *LMTD*, ou, por exemplo, como obtenção de temperaturas mais baixas do fluido resfriado. De fato, operando com vazões menores, o número de Reynolds dos escoamentos também diminui, o que causa uma redução dos coeficientes de convecção e portanto, do coeficiente global *U*.

## 10.7 Radiação

Nesta seção apresentaremos apenas algumas observações a respeito da radiação de calor por superfícies. A primeira refere-se ao fato de que a radiação se faz em todos os comprimentos de onda. No entanto a distribuição da intensidade do calor irradiado não é uniforme. Quanto

maior a temperatura da superfície menor é o comprimento de onda em torno do qual se concentra a maior parte da emissão. A equação de Planck relaciona a taxa de emissão por comprimento de onda com a temperatura da superfície e com o comprimento de onda  $\lambda$  da radiação:

$$q_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{ch}{\kappa_B\lambda T}\right) - 1} \quad (10.41)$$

onde  $h$  é a constante de Planck,  $c$ , a velocidade da luz e  $\kappa_b$ , a constante de Boltzmann. Esta equação refere-se a corpos com emissividade igual a 1, isto é, a *corpos negros*.

A radiação de uma superfície é máxima na direção normal à mesma. Em direções inclinadas, a radiação varia com o cosseno do ângulo entre a direção considerada e a normal à superfície. Da mesma forma, o calor irradiado que atinge sobre uma superfície depende do ângulo de incidência. Estes dois ângulos devem ser levados em consideração no cálculo do calor trocado por radiação entre duas superfícies.

## 10.8 Problemas

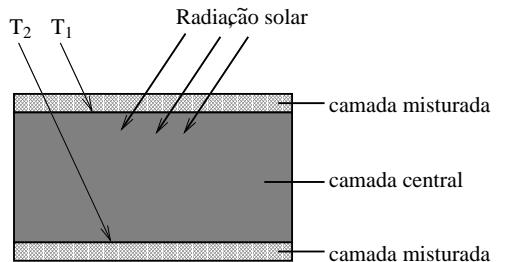
1. Em um dado instante de tempo, a distribuição de temperatura em uma parede com  $0,3\text{ m}$  de espessura é  $T(x) = a + bx + cx^2$  onde  $T$  é dado em graus Celsius,  $x$  em metros,  $a = 200^\circ\text{C}$ ,  $b = -200^\circ\text{C}/\text{m}$  e  $C = 30^\circ\text{C}/\text{m}^2$ . A condutividade térmica do material da parede é  $\kappa = 1\text{ W/mK}$ . Pede-se:
  - (a) A taxa de transferência de calor para dentro e para fora da parede e a taxa de acumulação de energia no interior da mesma, por unidade de área;
  - (b) Se a superfície fria da parede estiver em contato com um fluido a  $100^\circ\text{C}$  qual é o coeficiente de transferência de calor por convecção entre ambos?

2. Um tanque solar de gradiente salino se constitui de um corpo raso de água formado por três camadas distintas, que é usado para coletar energia solar. As camadas externas encontram-se bem misturadas e servem para manter as superfícies superior e inferior da camada intermediária a temperaturas uniformes,  $T_1$  e  $T_2$ , onde  $T_1 > T_2$ .

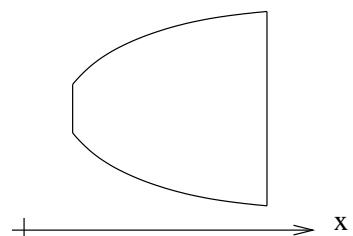
Embora exista movimento nas camadas misturadas pode-se considerar que a camada central se encontra em repouso. Esta camada absorve radiação solar de modo equivalente a uma distribuição interna de fontes de calor da forma  $\dot{Q} = Ae^{-ax}$ . A distribuição de temperatura na mesma é dada por:

$$T(x) = \frac{A}{ka^2}e^{-ax} + Bx + C$$

onde  $A$ ,  $a$ ,  $B$  e  $C$  são constantes conhecidas e  $\kappa$  é a condutividade térmica do fluido. Pede-se:



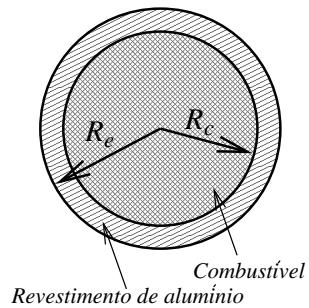
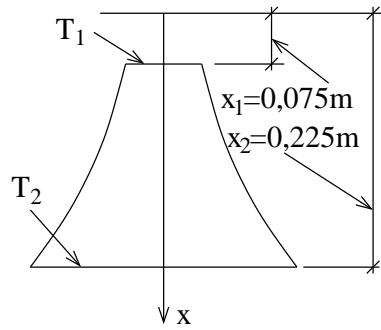
- (a) Uma expressão para a taxa de transferência de calor por unidade de área, da camada inferior para a central e desta para a superior;
- (b) Uma expressão para a taxa de geração de calor na camada central, por unidade de área superficial;
- (c) Determinar se o campo de temperaturas da camada central é estacionário ou não.
3. Uma peça de aço é inicialmente à temperatura  $T_0 = 700^\circ\text{C}$  é submetida a processo de têmpera. A peça é mergulhada em água à temperatura  $T_\infty = 30^\circ\text{C}$ . Determinar o tempo em que a peça deve ficar imersa na água para que sua temperatura atinja  $150^\circ\text{C}$ . Considerar a temperatura da peça uniforme, isto é, a mesma em todos os pontos. Dados:
- (a) Massa da peça:  $5 \text{ kg}$ ;
  - (b) Calor específico do aço:  $434 \text{ J/Kg}^\circ\text{C}$ ;
  - (c) Coeficiente de transferência de calor convecção entre a peça e a água:  $10 \text{ W/m}^2\text{C}$ ;
  - (d) Área externa da peça:  $0,15 \text{ m}^2$ .
4. Uma linha de transmissão de energia elétrica é feita por cabos condutores de alumínio de diâmetro  $d = 12 \text{ mm}$ , sem isolamento. Pede-se:
- (a) Simplificar a equação de condução de calor para o caso do condutor de alumínio e mostrar que a solução da mesma é da forma  $T = Ar^2 + B$ ; Determinar os coeficientes  $A$  e  $B$ ;
  - (b) Qual o limite de corrente para que a temperatura do condutor não ultrapasse  $40^\circ\text{C}$  acima da temperatura ambiente?
- Dados:
- (a) Resistividade elétrica do alumínio:  $\rho_{el} = 2,85 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ ;
  - (b) Condutividade térmica do alumínio:  $\kappa_{Al} = 205 \text{ W/mC}$ ;
  - (c) Número de Biot:  $Bi = 5,0 \times 10^{-4}$
5. A figura abaixo mostra um tronco de cone cônico fabricado em alumínio ( $\kappa = 177 \text{ W/mK}$ ) com seção reta circular de diâmetro  $d = ax^{1/2}$ , onde  $a = 0,5 \text{ m}^{1/2}$ . A menor extremidade está localizada em  $x_1 = 25 \text{ mm}$  e a maior, em  $x_2 = 125 \text{ mm}$ . As extremidades encontram-se  $T_1 = 600 \text{ K}$  e  $T_2 = 400 \text{ K}$ , respectivamente. Pede-se:
- (a) Uma expressão para o perfil de temperaturas unidimensional no tronco de cone,  $T(x)$ ;
  - (b) Uma expressão para a taxa de transferência de calor,  $Q$ .



6. Um cone sólido truncado tem a seção reta circular com diâmetro relacionado à coordenada axial de acordo com a relação  $D = ax^{3/2}$  com  $a = 1,0 \text{ m}^{-1/2}$ . A superfície lateral do sólido é isolada termicamente, a superior é mantida a  $T_1 = 100^\circ\text{C}$  e a inferior, a  $T_2 = 20^\circ\text{C}$ . Pede-se:

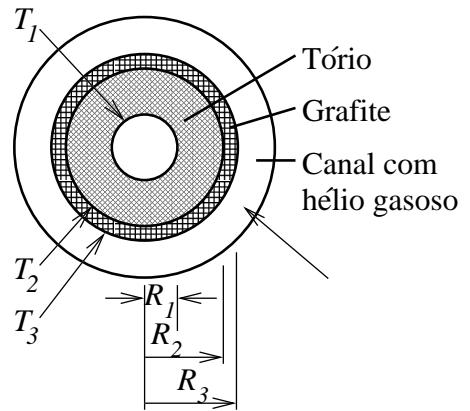
- (a) Uma expressão para a distribuição de temperaturas no sólido,  $T = T(x)$ ;
  - (b) A taxa de transferência de calor através do sólido.
7. O elemento combustível típico de reator nuclear consiste de uma vareta cilíndrica longa de combustível sólido revestida externamente por uma proteção de alumínio, conforme a figura ao lado. A taxa de geração de calor por unidade de volume dentro do combustível varia ao longo do raio e é dada por:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_0 \left[ 1 + \left( \frac{r}{R_c} \right)^2 \right]$$



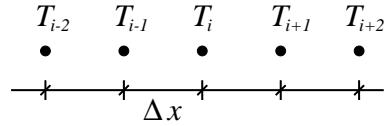
onde  $\dot{Q}_0$  é a taxa de geração de calor no eixo do elemento e  $R_c$ , o raio externo do combustível. O calor gerado dentro do elemento combustível é transferido por convecção para a água que circula em torno do mesmo e se encontra à temperatura  $T_\infty$ . O coeficiente de transferência de calor por convecção do revestimento para a água é  $h$ . Obter uma expressão para os perfis de temperaturas dentro do combustível e no revestimento, bem como para a temperatura mínima no elemento.

8. Um reator nuclear de alta temperatura com resfriamento a gás é formado um anel cilíndrico de tório ( $\kappa = 57 \text{ W/mK}$ ) onde a taxa de geração interna de calor é de  $10^8 \text{ W/m}^3$ . O anel de tório é envolvido por outro de grafite ( $\kappa = 3 \text{ W/mK}$ ), o qual resfriado por hélio gasoso que escoa através de um canal externo, a  $T_\infty = 600 \text{ K}$ , conforme figura ao lado. O coeficiente de transferência de calor entre o grafite e o hélio é de  $h = 2000 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Determinar as temperaturas  $T_1$  e  $T_2$  nas superfícies interna e externa do tório.
9. Um aquecedor elétrico delgado é enrolado ao redor da superfície externa de um tubo cilíndrico longo cuja superfície interna é mantida à temperatura de  $5^\circ\text{C}$ . Os raios interno e externo da parede são iguais, respectivamente, a  $25$  e  $27 \text{ mm}$  respectivamente e a condutividade térmica é de  $10 \text{ W/mK}$ . A resistência térmica de contato por unidade de comprimento entre o aquecedor e a superfície é de  $0,01 \text{ mK/W}$ . A superfície externa

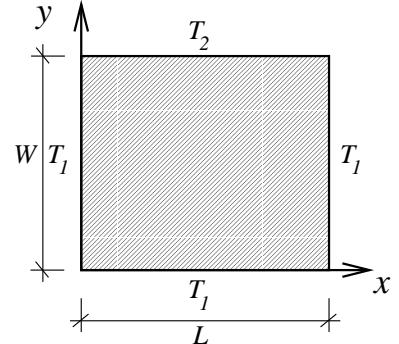


do tubo está em contato com um fluido à temperatura  $T_\infty = -10^\circ C$  e o coeficiente de transferência de calor por convecção entre ambos é  $h_{ext} = 100 W/mK$ . Qual é a potência do aquecedor por unidade de comprimento, requerida para mantê-lo a  $T_0 = 25^\circ C$ ?

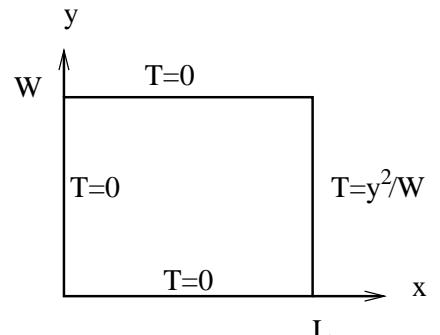
10. Seja uma malha espacial uniforme de pontos, utilizada para integração numérica da equação de condução de calor, conforme representado na figura ao lado. Obter uma expressão para o cálculo de  $(\partial^3 T / \partial x^3)_i$ , com erro da ordem de  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ .
11. Esquematizar um esquema implícito para a determinação numérica do campo de temperaturas,  $T = T(t, r)$ , em uma esfera com geração uniforme de calor  $\dot{Q}$ . A esfera troca calor com um fluido que se encontra à temperatura  $T_\infty$ , sendo  $h$ , o coeficiente de transferência de calor por convecção. Incluir no esquema, os detalhes da malha numérica e a forma de implementação das condições de contorno.
12. Uma esfera de raio  $R$ , de material radioativo, gera calor a uma taxa  $\dot{Q}_0 (1 + (r/R)^3)$ , onde  $\dot{Q}_0$  é uma constante. A esfera troca calor por convecção com o meio que se encontra à temperatura  $T_\infty$ . O coeficiente de troca de calor por convecção é  $h$ . Pede-se:
  - (a) Uma expressão para a taxa total de geração de calor na esfera;
  - (b) Uma expressão para o perfil de temperaturas na esfera;
  - (c) Uma expressão para a temperatura na superfície e no centro da esfera.



13. Obter uma expressão para o campo bidimensional estacionário de temperaturas em uma placa plana, da qual os lados laterais e inferior são mantidos à temperatura  $T_1 = 0^\circ C$  e o lado superior é mantido à temperatura  $T_2$ .



14. Um sólido retangular tem as faces superior, inferior e esquerda mantidas à temperatura  $T = 0$  e a face direita, à temperatura  $T = y^2/W$ . Deduzir uma expressão para o campo estacionário de temperaturas,  $T(x, y)$ , na forma de uma série, partindo da equação da temperatura em sólidos. Determinar o coeficiente do primeiro termo não nulo da série.

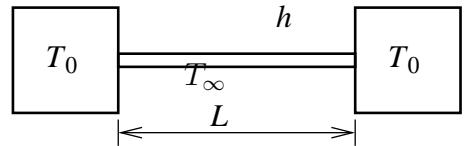


15. Um bastão cilíndrico fino, de comprimento  $L$  e diâmetro  $d$  é conectado a duas massas que se encontram à temperatura  $T_0$ . O bastão troca calor por convecção com o meio, que se encontra à temperatura  $T_\infty$ . O coeficiente de transferência de calor por convecção é  $h$ . Pede-se:

(a) Deduzir a equação diferencial que rege as transferências de calor envolvidas;

(b) A expressão do perfil de temperaturas,  $T(x)$ , ao longo do bastão ;

(c) Uma expressão para o valor mínimo de  $T(x)$ .



16. Um trocador de calor se constitui de uma placa de aço separando dois fluidos, conforme esquema ao lado. O fluido quente é mantido à temperatura de  $50^\circ C$  enquanto o frio é mantido a  $33^\circ C$ . A carga térmica transferida é de  $Q = 50 \text{ kW}$ . Calcular a altura  $l$  da placa sabendo que:

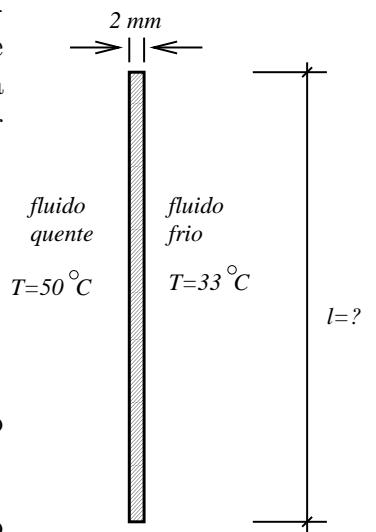
(a) largura da placa:  $b = 0,5 \text{ m}$ ;

(b) espessura da placa:  $e = 2 \text{ mm}$ ;

(c) condutividade térmica do aço:  $\kappa = 47 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ ;

(d) coeficiente de transferência de calor por convecção do lado do fluido quente:  $h_q = 15 \text{ kW/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$ ;

(e) coeficiente de transferência de calor por convecção do lado do fluido frio:  $h_f = 20 \text{ kW/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$ ;



17. Um trocador de calor do tipo casco e tubos deve ser projetado para transferir calor de um fluido de processo (água) para um fluido de serviço (água), nas seguintes condições:

(a) Temperaturas de entrada e saída do fluido de processo (lado dos tubos):  $55^\circ C$  e  $38^\circ C$ , respectivamente;

(b) Temperaturas de entrada e saída do fluido de serviço (lado do casco):  $32^\circ C$  e  $45^\circ C$ , respectivamente;

(c) Carga térmica:  $\dot{Q} = 12 \text{ MW}$ ;

(d) Número de tubos em paralelo:  $n = 100$ ;

(e) Diâmetro interno de cada tubo:  $d_i = 2,5 \times 10^{-2} \text{ m}$ ;

(f) Diâmetro externo de cada tubo:  $d_e = 2,9 \times 10^{-2} \text{ m}$ ;

(g) Velocidade do fluido de serviço (lado do casco):  $v_s = 3 \text{ m/s}$ .

Pede-se:

(a) Mostrar que a condutância térmica  $U$  do trocador, referida à área externa dos tubos, é dada por:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_i d_i} + \frac{r_e}{\kappa} \ln \frac{r_e}{r_i} + \frac{1}{h_e}$$

onde  $r_e$  e  $r_i$  são, respectivamente, os diâmetros externo e interno dos tubos;

- (b) Determinar o comprimento de cada tubo;
- (c) Determinar a perda de carga nos tubos.

Dados:

- (a) massa específica da água:  $\rho = 991 \text{ kg/m}^3$ ;
- (b) Calor específico da água:  $C_p = 4,18 \text{ KJ/kg}^\circ\text{C}$ ;
- (c) Viscosidade cinemática da água:  $\nu = 0,5 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ;
- (d) Condutividade térmica da água:  $\kappa_{H_2O} = 0,653 \text{ W/mK}$ ;
- (e) Número de Prandtl da água: 7;
- (f) Condutividade térmica do aço:  $\kappa_{aço} = 46,7 \text{ W/mK}$ ;

## Parte II

# Apêndices



# Apêndice A

## Elementos de Análise Dimensional

### A.1 Séries Completas de Produtos Adimensionais

A complexidade dos fenômenos que ocorrem em fluidos, devida à não linearidade de suas leis de evolução, faz com que se recorra com frequência à métodos de investigação experimentais. Nesse campo, a análise dimensional tem papel preponderante e baseia-se no princípio de que as leis regem os fenômenos não dependem do sistema de unidades escolhido [39].

Como exemplo, procuramos uma expressão para a força de arraste devido a efeitos viscosos e de compressibilidade, que age sobre um corpo que se desloca imerso em meio fluido. Seis grandezas intervêm no problema, expressas em função de três outras fundamentais, que têm dimensão de massa ( $M$ ), de comprimento ( $L$ ) e de tempo ( $T$ ). Essas grandezas estão indicadas na Tab. A.1.

Admitindo que a forma mais geral da lei que descreve o arraste que age sobre o corpo seja da forma:

$$D^{-u} = D^{-u}(l, U, \rho, \mu, a) = \sum C_{pqrs} l^p U^q \rho^r \mu^s a^t \quad (-\infty < p, q, r, s, t < \infty). \quad (\text{A.1})$$

Pode-se reescrever a equação acima em forma adimensional dividindo-se os dois membros por  $D^{-u}$ . Obtém-se:

$$\sum C_{pqrs} l^p U^q \rho^r \mu^s a^t D^u = 1 \quad (-\infty < p, q, r, s, t < \infty). \quad (\text{A.2})$$

A homogeneidade dimensional da Eq. A.2 impõe restrições aos expoentes  $p, q, r, s, t$  e  $u$ . Os

Tabela A.1: Grandezas que intervêm na lei que rege a força de arraste agindo sobre um corpo que se desloca imerso em um fluido viscoso e compressível. As grandezas fundamentais têm dimensão de massa ( $M$ ), de comprimento ( $L$ ) e de tempo ( $T$ ).

Grandeza	Símbolo	Unidades
Força de arraste	$D$	$LMT^{-2}$
Comprimento	$l$	$L$
Velocidade	$U$	$LT^{-1}$
Massa específica	$\rho$	$ML^{-3}$
Coef. de viscosidade	$\mu$	$L^{-1}MT^{-1}$
Velocidade do som	$a$	$LT^{-1}$

expoentes de cada termo da série devem ser satisfazer à equação:

$$[L^0 M^0 T^0] = L^p [LT^{-1}]^q [ML^{-3}]^r [L^{-1} MT^{-1}]^s [LT^{-1}]^t [LMT^{-2}]^u,$$

o que requer:

$$\left. \begin{array}{l} L : p + q - 3r - s + t + u = 0 \\ M : r + s + u = 0 \\ T : -q - s - t - 2u = 0. \end{array} \right\} \quad (\text{A.3})$$

Pode-se montar uma tabela da qual cada coluna contém os coeficientes das variáveis da Eq. A.3:

Tabela A.2: Matriz dimensional do problema de determinação da força de arraste que atua sobre um corpo que se desloca em fluido viscoso e compressível.

	$l$	$U$	$\rho$	$\mu$	$a$	$D$
$L$	1	1	-3	-1	1	1
$M$	0	0	1	1	0	1
$T$	0	-1	0	-1	-1	-2

Os números que aparecem na Tab. A.2 são os elementos da matriz de coeficientes da Eq. A.3, reescrita em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou: } A\mathbf{X} = \mathbf{Z}, \quad (\text{A.4})$$

onde  $\mathbf{Z}$  é o vetor zero. A Tab. A.2 e a matriz  $A$ , de coeficientes da Eq. A.4 são duas formas de representação da *matriz dimensional* do problema.

Sabe-se da álgebra linear, que<sup>1</sup>[30, 44]:

$$\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Nu}(A) = m,$$

onde  $m$  é o número de colunas da matriz dimensional  $A$  e  $\dim \text{Im}(A)$  é a dimensão da imagem do operador, isso é, a dimensão do espaço ao qual pertencem todos os vetores  $\mathbf{B}$  do membro direito, tais que  $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$ , com  $\mathbf{X}$  qualquer;  $\dim \text{Nu}(A)$  é a dimensão do espaço nulo, ou núcleo de  $A$ . Espaço nulo de um operador algébrico linear é o conjunto de vetores  $\mathbf{X}$  tais que  $A\mathbf{X} = \mathbf{Z}$ .

Pode-se dar uma interpretação vetorial a uma equação algébrica linear da forma  $A\mathbf{x} = \mathbf{B}$ : Como a primeira coluna de  $A$  é multiplicada pela primeira variável do vetor de incógnitas

---

<sup>1</sup>Ver apêndice sobre princípios da álgebra linear no Vol. 2 desse trabalho.

$\mathbf{X}$ , a segunda coluna, pela segunda variável de  $\mathbf{X}$  e assim sucessivamente, a equação equivale a expressar o vetor  $\mathbf{B}$  do membro direito como uma combinação linear das colunas de  $A$ . O sistema só admite solução se  $\mathbf{B}$  estiver contido no subespaço varrido pelas colunas de  $A$  [42].

A Eq. A.4 sempre admite solução, pois o vetor  $\mathbf{Z}$  pertence ao subespaço varrido pelas colunas. Pode-se identificar três colunas linearmente independentes nessa equação, donde conclui-se que a dimensão da imagem de  $A$  é igual a três e a do espaço nulo, três. A escolha das colunas linearmente independentes de  $A$  é arbitrária. No caso da Eq. A.4, a combinação linear das colunas que resulta no vetor nulo é:

$$p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Para a determinação do espaço nulo procede-se da seguinte forma:

1. Escolhe-se inicialmente uma base qualquer da imagem da matriz dimensional. No caso da Eq. A.4, pode-se formar a base com as três primeiras colunas da matriz;
2. Assim fazendo, cada uma das colunas restantes pode ser obtida por combinação dos vetores da base escolhida. A quarta coluna da matriz dimensional pode ser obtida fazendo-se  $s = 1$ ,  $t = u = 0$  e resolvendo-se a Eq. A.4. A quinta coluna pode ser obtida de forma análoga, fazendo  $s = u = 0$  e  $t = 1$ . Seguindo o mesmo procedimento, a sexta coluna pode ser obtida fazendo-se  $s = t = 0$  e  $u = 1$ . As coordenadas dos três vetores  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_2$  e  $\mathbf{X}_3$  assim obtidos satisfazem a Eq. A.4. Os três vetores são linearmente independentes. As coordenadas de qualquer combinação linear dos três, isso é de qualquer vetor de um espaço de dimensão três, assim como a da soma de todos os vetores desse espaço também a satisfaz. O núcleo da matriz dimensional  $A$  é um espaço de dimensão  $m - \dim \text{Im}(A)$ .

Para se obter um vetor qualquer na direção da quarta coluna da matriz de coeficientes da Eq. A.4, faz-se  $t = u = 0$  e obtém-se da Eq. A.3:

$$p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Da equação acima obtém-se as coordenadas do vetor genérico da quarta coluna da matriz de coeficientes da Eq. A.4, na base das primeiras colunas da matriz:

$$p = q = r = -s,$$

onde conclui-se que o vetor:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ -s \\ -s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

satisfaz à Eq. A.2. Procedemos à identificação das coordenadas do vetor genérico da quinta coluna, na base das três primeiras colunas, fazendo  $s = u = 0$ :

$$p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Obtém-se:

$$p = r = 0 \quad \text{e:} \quad q = -t.$$

Portanto, o vetor de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

satisfaz à Eq. A.2. Procedemos à identificação das coordenadas do vetor genérico da sexta coluna, na base das três primeiras colunas, fazendo  $s = t = 0$ :

$$p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Obtém-se:

$$p = q = -2u \quad \text{e:} \quad r = -u.$$

Portanto, o vetor de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ -2u \\ -u \\ 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

também satisfaz à Eq. A.2. Os vetores A.7, A.8 e A.9 são linearmente independentes e satisfazem à Eq. A.2. Qualquer combinação linear dos mesmos, isso é qualquer vetor genérico do espaço nulo do operador representado pela matriz de coeficientes da Eq. A.4 também a satisfaz. Esse vetor genérico é dado pela soma dos três acima mencionados:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ -s \\ -s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2u \\ -2u \\ -u \\ 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s - 2u \\ -s - t - 2u \\ -s - u \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Substituindo-se os valores de  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $t$  e  $u$  na Eq. A.2 obtém-se:

$$\sum C_{st} l^{-s-2u} U^{-s-t-2u} \rho^{-s-u} \mu^s a^t D^u = 1. \quad (-\infty < s, t < \infty).$$

Agrupando os fatores com mesmo expoente reescrevemos essa última:

$$\sum C_{st} \left( \frac{\rho U l}{\mu} \right)^{-s} \left( \frac{U}{a} \right)^{-t} \left( \frac{D}{\rho U^2 l^2} \right)^u = 1. \quad (-\infty < s, t < \infty). \quad (\text{A.11})$$

Como o membro direito da equação acima é adimensional, torna-se necessário que cada um dos fatores do membro esquerdo também o sejam. Os fatores adimensionais do membro esquerdo são:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= C_D = \frac{D}{\rho U^2 l^2} && \text{(Coeficiente de arraste)} \\ \pi_2 &= Re = \frac{\rho U l}{\mu} && \text{(Número de Reynolds)} \\ \pi_3 &= M = \frac{U}{a} && \text{(Número de Mach)} \end{aligned}$$

A lei física que descreve o arraste pode ser escrita como:

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0. \quad (\text{A.12})$$

O número de produtos adimensionais existentes na equação acima é, no presente caso, igual à dimensão do espaço nulo da matriz de coeficientes da Eq. A.4. Como cada vetor de uma base do espaço nulo não pode ser obtido por combinação linear dos demais, os produtos adimensionais são independentes. O número máximo de produtos adimensionais independentes é igual à dimensão do espaço nulo da matriz acima mencionada.

Cabe notar que o número de produtos adimensionais independentes pode ser menor do que a dimensão do espaço nulo da matriz de coeficientes de uma equação como A.4. Essa situação pode ocorrer quando se relaciona na lista de variáveis relevantes do problema, uma que pode ser obtida a partir das demais. Se essa condição não ocorrer, o número de produtos adimensionais independentes é igual à dimensão do espaço nulo da matriz dimensional.

**Definição:** Qualquer conjunto contendo o número máximo de produtos adimensionais independentes, formados com as variáveis relevantes das quais uma grandeza física adimensional depende, denomina-se *série completa de produtos ou de números adimensionais*.

Face ao fato de que a série completa de produtos adimensionais compõe-se em geral, de um número pequeno de elementos, a Eq. A.11 reduz-se a uma soma de potências desse pequeno número de produtos adimensionais independentes. A equação pode ser reescrita, tomando  $u = -1$ , como:

$$\frac{D}{\rho U^2 l^2} = \sum C_{st} \left( \frac{\rho U l}{\mu} \right)^{-s} \left( \frac{U}{a} \right)^{-t}. \quad (-\infty < s, t < \infty). \quad (\text{A.13})$$

A forma mais geral da força de arraste a que um corpo imerso em um escoamento está submetido é:

$$\frac{D}{\rho U^2 l^2} = \sum C_{\alpha\beta} Re^\alpha M^\beta + \sum C_\gamma Re^\gamma + \sum C_\delta M^\delta. \quad (-\infty < \alpha, \beta, \gamma, \delta < \infty).$$

Os números de Reynolds e de Mach representam, respectivamente, os efeitos viscosos e de compressibilidade, isso é, de pressão. Se apenas os dois efeitos afetarem o arraste a que o corpo está sujeito, independente do valor do outro, a expressão da força de arraste não contem o produto de  $Re$  por  $M$ . Os expoentes  $\alpha$  e  $\beta$  são iguais a zero. Se, ao contrário, os dois efeitos existirem e a presença de um afetar o outro, a expressão conterá o produto dos grupos adimensionais,  $\pi_2$  e  $\pi_3$ . No caso de números de Mach baixos ( $M \ll 1$ ) o expoente  $t$  da Eq. A.13 é igual a zero. Sob altos valores do número de Mach ( $M \gg 1$ ), quando o arraste é dominado pela compressão do fluido à frente do corpo, pode-se desprezar a parcela viscosa e o expoente  $s$  da Eq. A.13 é igual a zero.

Citamos o caso de problemas de convecção forçada, com a camada limite completamente desenvolvida, onde o número Nusselt obedece a uma relação da forma:

$$Nu = C Re^s Pr^t.$$

Em problemas de convecção dentro de tubos, o expoente  $s$  toma valores próximos a 0,8. Nos escoamentos externos, o valor de  $s$  é próximo a 0,6. O expoente  $t$  depende do valor do número de Prandtl (ver Sec. 7.8).

## A.2 Outras Séries Completas de Produtos Adimensionais

O vetor genérico do espaço nulo da matriz dimensional  $A$  (Eq. A.4) é o mesmo em qualquer base. Representando-o em outra base, obtém-se uma equação para a força de arraste adimensionalizada em função de outra série completa de produtos adimensionais. As coordenadas do vetor genérico do espaço nulo da matriz  $A$  são dadas, na base das três primeiras colunas da matriz, pelo vetor do membro direito da Eq. A.10.

De forma geral, a escolha de outra base leva à definição de outros números adimensionais  $\pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_{m-\kappa}$ , onde  $m$  é o número de colunas da matriz e  $\kappa$ , o número de colunas linearmente independentes da mesma. Tomemos como base, as terceira, a quarta e a quinta colunas da matriz  $A$  de coeficientes da Eq. A.4 e procuremos as coordenadas do espaço nulo de  $A$  nessa base. Nesse caso,  $p'$ ,  $q'$  e  $u'$  são os expoentes a serem especificados livremente. O vetor do espaço nulo da matriz dimensional deve ser expresso como combinação linear das três últimas colunas. As equações que expressam a primeira, a segunda e a sexta colunas da matriz de coeficientes da Eq. A.4 em função da terceira, quarta e quinta são:

$$p' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r' \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$q' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = r' \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$u' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = r' \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Donde obtém-se:

$$r' = p' \quad s' = -p' \quad t' = p' \quad (\text{da Eq. A.14})$$

$$r' = 0 \quad s' = 0 \quad t' = -q' \quad (\text{da Eq. A.15})$$

$$r' = u' \quad s' = -2u' \quad t' = 0 \quad (\text{da Eq. A.16})$$

O vetor genérico do espaço nulo, expresso na base formada pela terceira, quarta e quinta colunas da matriz de coeficientes da Eq. A.4 colunas é portanto:

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \\ s' \\ t' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' \\ 0 \\ p' \\ -p' \\ p' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q' \\ 0 \\ 0 \\ -q' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u' \\ -2u' \\ 0 \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ p' + u' \\ -p' - 2u' \\ p' - q' \\ u' \end{pmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

Substituindo-se os valores de  $p, q, r, s, t$  e  $u$  na Eq. A.2 obtém-se:

$$\sum C_{p'q'u'} l^{p'} U^{q'} \rho^{p'+u'} \mu^{-p'-2u'} a^{p'-q'} D^{u'} = 1.$$

Agrupando os fatores com mesmo expoente:

$$\sum C_{p'q'} \left( \frac{\rho a l}{\mu} \right)^{p'} \left( \frac{U}{a} \right)^{q'} \left( \frac{\rho D}{\mu^2} \right)^{u'} = 1. \quad (\text{A.18})$$

Tomando  $u' = -1$  reescrevemos a última equação como:

$$\frac{\rho D}{\mu^2} = \sum C_{p'q'} \left( \frac{\rho a l}{\mu} \right)^{p'} \left( \frac{U}{a} \right)^{q'} \quad (\text{A.19})$$

Os produtos adimensionais  $\pi'_1, \pi'_2$  e  $\pi'_3$ , que formam outra série completa são:

$$\pi'_1 = \frac{\rho D}{\mu^2} \quad \pi'_2 = \frac{U}{a} \quad \pi'_3 = \frac{\rho a l}{\mu}$$

A lei física que descreve o arraste que age sobre um corpo que se move imerso em um fluido pode, portanto, ser expressa como:

$$\varphi(\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3) = 0. \quad (\text{A.20})$$

A escolha de outra base leva a outra série completa, conforme mostrado acima. No entanto como o vetor genérico do espaço nulo da matriz de coeficientes da Eq. A.4, é o mesmo em qualquer base, pode-se recuperar os números previamente obtidos através de uma combinação apropriada dos novos elementos de base [39].

Seja  $\mathbf{X}$  o vetor genérico do espaço nulo, representado nas duas bases. Esse vetor é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_5) \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_5) \begin{pmatrix} -s \\ -s - t - 2u \\ -s - u \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} \\ &= -s(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4) - t(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_5) + u(-2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_6) \\ &= -s\mathbf{f}_1 - t\mathbf{f}_2 + u\mathbf{f}_3 = x_i \mathbf{f}_i \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

e:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= (\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_5) \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \\ s' \\ t' \\ u' \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_5) \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ p' + u' \\ -p' - 2u' \\ p' - q' \\ u' \end{pmatrix} \\
&= p'(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5) + q'(\mathbf{e}_2 - u\mathbf{e}_5) + u'(\mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_6) \\
&= p'\mathbf{f}'_1 + q'\mathbf{f}'_2 + u'\mathbf{f}'_3 = x'_j \mathbf{f}'_j,
\end{aligned} \tag{A.22}$$

onde  $\mathbf{e}_j$  é o vetor unitário cuja  $j$ -ésima coordenada, em um sistema de eixos ortogonais é igual a 1 e as demais são iguais a zero. Os vetores  $(\mathbf{f}_1; \mathbf{f}_2; \mathbf{f}_3)$  e  $(\mathbf{f}'_1; \mathbf{f}'_2; \mathbf{f}'_3)$  constituem duas bases distintas do espaço nulo da matriz dimensional. Esses vetores são dados por:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4 & \mathbf{f}'_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5 \\
\mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_5 & \mathbf{f}'_2 &= \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_5 \\
\mathbf{f}_3 &= 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_6 & \mathbf{f}'_3 &= \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_6.
\end{array}$$

Os vetores de base  $\mathbf{f}'_j$  se expressam por uma combinação linear dos vetores da base  $\mathbf{f}_i$ . Nessas condições:

$$\mathbf{X} = x_i \mathbf{f}_i = x'_j \mathbf{f}'_j = x'_j a_{ji} \mathbf{f}_i$$

Donde conclui-se que:

$$x_i = x'_j a_{ji},$$

isso é, a coordenada  $x_i$  do vetor genérico do espaço nulo da matriz de coeficientes da Eq. A.4 é recuperada a partir da coordenada  $x'_j$  desse vetor na nova base.  $a_{ij}$  é o elemento geral da matriz cuja linha  $j$  contém as coordenadas do vetor  $\mathbf{f}'_i$  na base  $\mathbf{f}'_j$ <sup>2</sup> [30, 44]. Os vetores  $\mathbf{f}'_i$  se expressam da forma abaixo, como combinação linear dos vetores  $\mathbf{f}_j$ :

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{f}'_1 &= \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 & \text{ou:} & \begin{pmatrix} \mathbf{f}'_1 \\ \mathbf{f}'_2 \\ \mathbf{f}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{pmatrix}
\end{array}$$

As coordenadas  $-s$ ,  $-t$  e  $u$ , do vetor genérico do espaço nulo da matriz de coeficientes da Eq. A.4 se expressam em função das coordenadas  $p'$ ,  $q'$  e  $q'$  do mesmo vetor, na base  $(\mathbf{f}'_1; \mathbf{f}'_2; \mathbf{f}'_3)$ , como:

$$(-s; -t; u) = (p'; q'; u') \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde se obtém:

$$\begin{array}{lll}
-s &= p' + 2u' & p' &= -s - 2u \\
-t &= -p' + q' & q' &= -s - t - 2u \\
u &= u' & u' &= u
\end{array}
\quad \text{e, inversamente:}$$

---

<sup>2</sup>Ver apêndice sobre princípios da álgebra linear no Vol. 2 desse trabalho.

Substituindo os valores de  $p'$ ,  $q'$  e  $u'$  na Eq. A.18, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho al}{\mu}\right)^{p'} \left(\frac{U}{a}\right)^{q'} \left(\frac{\rho D}{\mu^2}\right)^{u'} &= \left(\frac{\rho al}{\mu}\right)^{-s-2u} \left(\frac{U}{a}\right)^{-s-t-2u} \left(\frac{\rho D}{\mu^2}\right)^u = \\ \left(\frac{\rho al}{\mu}\right)^{-s} \left(\frac{\rho al}{\mu}\right)^{-2u} \left(\frac{\rho D}{\mu^2}\right)^u \left(\frac{U}{a}\right)^{-t} &= \left(\frac{\rho Ul}{\mu}\right)^{-s} \left(\frac{U}{a}\right)^{-t} \left(\frac{D}{\rho Ul^2}\right)^u. \end{aligned}$$

O resultado acima ilustra a recuperação de uma série completa de produtos adimensionais, a partir de outra série, por intermédio de uma mudança de base. As séries não são portanto linearmente independentes. O número máximo de produtos independentes é menor ou igual à dimensão do espaço nulo da matriz dimensional. Se as variáveis que intervém no problema forem independentes, no sentido de que nenhuma delas possa ser obtida a partir das demais, o número de produtos adimensionais é igual à dimensão do espaço nulo da matriz dimensional, conforme já mencionado acima.

Como há uma infinidade de bases do espaço nulo da matriz dimensional, pode-se formar um número infinito de séries completas de produtos adimensionais, embora o número de produtos independentes seja no máximo, igual à dimensão do espaço nulo da matriz dimensional. Não obstante, algumas séries são mais úteis na prática do que outras. Algumas regras práticas servem como guia para a escolha da série completa de produtos adimensionais [39]:

1. A primeira coluna da matriz dimensional deve conter os expoentes da variável que se quer medir. Esse produto é denominado variável função;
2. As variáveis mais facilmente mensuráveis em um experimento devem aparecer em um único grupo adimensional;
3. Deve-se procurar agrupar as variáveis em produtos adimensionais dos quais a variável função dependa fortemente e em outros, cuja influência no comportamento da variável função seja menor. O fato de não se conduzir experimentos com o valor dessas últimas próximo ao do que se tem no sistema em tamanho natural permite que se faça com mais facilidade a extrapolação dos resultados de ensaios com modelos;
4. Deve-se considerar as colunas da esquerda da matriz dimensional, como base para a formação da imagem da matriz dimensional. Se as primeiras colunas não forem linearmente independentes, deve-se redistribuir as colunas de modo a que as primeiras formem a base procurada.

Um caso especial ocorre quando o espaço nulo da matriz dimensional tem dimensão um, isso é, quando as séries completas de produtos adimensionais contém apenas um termo. Nesse caso:

$$\varphi(\pi) = \sum C_p \pi^p = 0 \quad (-\infty < p < \infty). \quad (\text{A.23})$$

Como pelo menos um coeficiente  $C_p$ , com  $p \neq 0$  é diferente de zero, a equação acima só admite como solução  $\pi = C^{te}$ .

Outro exemplo de aplicação dos princípios da análise dimensional é dado na Sec. 7.11.

## A.3 O Teorema $\Pi$ de Buckingham

Resumindo o acima exposto, enunciamos:

**Teorema (Buckingham):** Um fenômeno físico em que intervêm  $n$  grandezas independentes, expressas em termos de  $\kappa$  grandezas fundamentais obedece a uma relação funcional entre  $n - \kappa$  variáveis reduzidas, ou adimensionais, independentes,  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-\kappa}$ , da forma:

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-\kappa}) = 0, \quad (\text{A.24})$$

ou, alternativamente, sob forma explícita, como:

$$\pi_1 = \varphi(\pi_2, \dots, \pi_{n-\kappa}).$$

## A.4 Similaridade

Como as leis que regem o comportamento dos fenômenos físicos são da forma dada pela Eq. A.24 o comportamento de dois sistemas diferentes, mas regidos pela mesma lei será idêntico se o valor dos produtos adimensionais dos dois sistemas for o mesmo. Esse fato abre espaço para que se conduzam experimentos com modelos em escala reduzida, visando averiguar o comportamento do sistema em tamanho natural, a partir das observações feitas no modelo em escala. Na mecânica dos fluidos, é procedimento clássico ensaiar modelos em escala reduzida, mas com número de Reynolds igual ao do sistema em tamanho natural, aumentando-se a velocidade da corrente de fluido na qual o modelo é imerso. Ou reduzindo a viscosidade do fluido, quando esse é um gás, reduzindo-se a temperatura em que o experimento é conduzido. Mas em geral, não se consegue similaridade total nesse caso, pois o aumento da velocidade conduz a que o número de Mach do experimento seja sensivelmente diferente do de operação do sistema em tamanho natural. Se o sistema operar em uma faixa de números de Mach em que seu valor pouco afeta o desempenho do sistema, o modelo ensaiado guarda a similaridade com o sistema, que se busca. Da mesma forma, sistemas que operam sob números de Reynolds muito altos não tem o desempenho afetado pelo valor desse parâmetro. Mas, em geral, não se consegue similaridade completa entre modelo e sistema em escala natural. Fazem-se então ensaios com parâmetros  $\pi_j$  em vários valores diferentes dos do sistema e extrapola-se os resultados para se estimar o desempenho sob valor de  $\pi_j$  igual ao do sistema em tamanho natural.

## A.5 Principais Grupos Adimensionais

$$Re = \frac{Ud}{\nu}$$

**Número de Reynolds:** Pode ser interpretado de várias formas: *a)* Como a relação entre forças de inércia e forças viscosas que agem sobre uma partícula de fluido em movimento; *b)* Quadrado da relação entre a dimensão característica de um corpo e a espessura da camada limite hidrodinâmica que se desenvolve em torno do mesmo; *c)* Quadrado da relação entre a velocidade do escoamento e a velocidade de espalhamento da vorticidade; *d)* Relação entre quantidades de movimento transferidas por convecção e por difusão; *e)* Importância relativa dos efeitos não lineares na dinâmica do problema em estudo.  $U$  é uma velocidade de referência imposta,  $d$ , um comprimento característico do problema e  $\nu$ , o coeficiente de viscosidade cinemática do fluido.

$$Pe = \frac{Ud}{\alpha}$$

**Número de Péclet:** É utilizado em problemas de mecânica dos fluidos envolvendo transferência de calor e semelhante ao número de Reynolds. A relação entre a dimensão característica do problema em estudo e a espessura da camada limite térmica é função crescente do número de Péclet. Pode também ser interpretado como a relação entre calor transferido por convecção e calor transferido por condução.  $\alpha$  é a difusividade térmica do fluido.

$$Pe_m = \frac{Ud}{D}$$

**Número de Péclet de massa:** Utilizado em problemas envolvendo transferência de espécies químicas que se difundem e são transportadas por fluidos em movimento. É semelhante ao número de Péclet utilizado em problemas de transferência de calor. A relação entre a dimensão característica do problema em estudo e a espessura da camada limite de concentração da espécie química é função crescente do número de Péclet de massa. Pode também ser interpretado como a relação entre concentração transferida por convecção e por difusão.  $D$  é o coeficiente de difusão da espécie química no meio que a transporta.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

**Número de Prandtl:** Relação entre a espessura das camadas limite hidrodinâmica e térmica. Em geral  $Pr = \mathcal{O}(1)$  em gases,  $Pr > 1$  em líquidos,  $Pr \gg 1$  em sólidos e  $Pr \ll 1$  em metais líquidos como o mercúrio.

$$Sc = \frac{\nu}{D}$$

**Número de Schmidt:** Mede a relação entre a espessura das camadas limite hidrodinâmica e de difusão de massa.

$$Le = \frac{\alpha}{D}$$

**Número de Lewis:** Mede a relação entre a espessura das camadas limite de concentração de uma espécie química e a térmica. O número de Lewis pode ser calculado pela relação  $Le = Sc/Pr$ .

$$M = \frac{U}{a}$$

**Número de Mach:** Utilizado em aerodinâmica de alta velocidade; é a relação entre a velocidade do escoamento e a velocidade do som.

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gd}}$$

**Número de Froude:** Utilizado em problemas de onde os efeitos gravitacionais têm influência, como no caso de problemas com superfície livre; Mede a relação entre velocidade do escoamento e a velocidade de propagação de uma pequena perturbação na superfície livre, ou entre efeitos de inércia e gravitacionais.

$$Br = \frac{\mu U}{q_0 H}$$

**Número de Brinkman:** Mede a importância do aquecimento devido aos efeitos viscosos, com relação ao aquecimento devido apenas à convecção.  $U$  é a velocidade do escoamento,  $q_0$ , o fluxo de calor de convecção e  $H$ , a dimensão característica do problema.

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T d^3}{\nu^2}$$

**Número de Grashof:** Utilizado em problemas de convecção livre.  $\beta$  é o coeficiente de dilatação térmica do fluido  $\beta = (\partial \rho / \partial T)_p$ .  $\Delta T$  é a diferença de temperaturas vertical imposta ao fluido, com a temperatura inferior sendo mais alta do que a superior.

$$Ra = \frac{\beta g \Delta T d^3}{\nu \alpha}$$

**Número de Rayleigh:** Semelhante ao número de Grashof. Define a estabilidade de massas submetidas a um gradiente de temperaturas. Pode ser interpretado como taxa de fornecimento de energia potencial ao fluido cuja massa específica é maior nas camadas superiores, e a taxa de dissipação de energia por efeitos viscosos.

$$Ma = \frac{\Delta T d \sigma / dT d^3}{\nu \alpha}$$

**Número de Marangoni:** Utilizado em problemas de convecção livre com efeitos de tensão superficial.  $\sigma$  é a tensão superficial do fluido.

$$Ar = g \frac{l^3}{\nu^2} \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$$

**Número de Arquimedes:** Relação entre efeitos de flutuação e viscosos.  $\rho_0$  é a massa específica do meio e  $\rho$ , a de uma massa sujeita a efeitos de empuxo. Se essa massa tiver a mesma constituição do meio, as diferenças de massa específica forem pequenas e devidas a efeitos térmicos  $(\rho - \rho_0) / \rho_0 = \beta \Delta T$ , onde  $\beta$  é o coeficiente de expansão térmica a pressão constante. O número de Arquimedes torna-se o número de Grashof.

$$Ta = \frac{4\Omega^2 R^4}{\nu^2}$$

**Número de Taylor:** Caracteriza a relação entre a inércia de uma massa de fluido em rotação e as forças viscosas. No caso do problema de Taylor-Couette, que aborda a instabilidade de uma massa de fluido confinada no anel compreendido entre dois cilindros quando o cilindro interno gira, o número de Taylor é definido por  $Ta = \Omega^2 R_1 (R_2 - R_1) / \nu^2$ , onde  $R_1$  e  $R_2$  são o raio dos cilindros externo e interno, respectivamente.

$$Bi = \frac{hd}{\kappa}$$

**Número de Biot:** Utilizado em problemas de condução de calor em sólidos com convecção na superfície do sólido. Mede a relação entre a resistência térmica de condução de calor dentro do corpo e a resistência térmica de convecção.  $\kappa$  é a condutividade térmica do sólido.

$$St = \frac{fd}{U}$$

$$Nu = \frac{hd}{\kappa}$$

**Número de Nusselt:** Utilizado em problemas de transferência de calor por convecção: representa a relação entre as taxas de transferência de calor por convecção e a que se obteria por condução com um gradiente de temperatura dado por  $\Delta T/d$ .  $\kappa$  é a condutividade térmica do fluido.

$$Ja = \frac{C_p(T - T_{sat})}{h_{lv}}$$

**Número de Jackob:** Relação entre calor sensível e calor latente em um processo de mudança de fase líquido-vapor.  $T_{sat}$  é a temperatura de mudança de fase.  $h_{lv}$  é o calor latente, oua entalpia de mudança de fase.

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$$

$$Fo_m = \frac{Dt}{L^2}$$

$$Sh = \frac{h_m d}{D}$$

$$Ri = \frac{-g d\rho/dz}{\rho(dU/dz)^2}$$

$$St = \frac{h}{\rho U C_p}$$

**Número de Fourier:** Relação entre as taxas de transferência de calor por condução e a de armazenamento de energia térmica em um sólido.  $\alpha$  e  $L$  são a difusividade térmica e a dimensão característica do sólido e  $t$ , o tempo. Pode ser interpretado como um tempo adimensional.

**Número de Fourier de transferência de massa:** Relação entre as taxas de transferência por difusão e de acúmulo de uma espécie química em um sólido.  $D$  e  $L$  são a o coeficiente de difusão e a dimensão característica do sólido e  $t$ , o tempo. Pode ser interpretado como um tempo adimensional.

**Número de Sherwood:** Utilizado em problemas de transferência de massa. É semelhante ao número de Nusselt.  $h_m$  é o coeficiente de transferência de massa por convecção e  $D$ , o coeficiente de difusão da espécie química.

**Número de Richardson:** Utilizado em problemas de estabilidade em meteorologia e oceanografia. Números de Richardson negativos indicam a existência de massas de fluido mais densas nas camadas superiores, que tendem a instabilizar o meio.

**Número de Stanton:** Utilizado em problemas de transferência de calor em fluidos em movimento. Representa a relação entre calor transferido para o fluido e capacidade térmica do mesmo.  $h$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção. O número de Stanton pode ser expresso como:  $St = Nu/Re Pr$ .

$$K = \frac{d}{\lambda}$$

$$Eo = \frac{\rho_0 g D^2}{\sigma_0}$$

$$N = \frac{\rho_0^2 D^3 g}{\mu_0^2}$$

$$Mo = \frac{(\rho_f - \rho_b) \mu_0^4 g}{\rho_f^2 \sigma_0^4}$$

$$Ro = \frac{U}{2\Omega \sin \phi L}$$

$$E = \frac{U^2}{C_p(\Delta T)}$$

**Número de Knudsen:** Utilizado em escoamentos de gases rarefeitos.  $d$  é a dimensão característica do problema e  $\lambda$ , o livre caminho médio das moléculas do gás.

**Número de Eötvös:** Utilizado em problemas multifásicos. É a razão entre as forças de empuxo e de tensão superficial. Este número adimensional está presente em escoamentos multifásicos onde a velocidade de referência não é um parâmetro conhecido. Como exemplo pode-se citar o caso clássico de uma bolha de ar em ascensão, que está imersa em um fluido parado. Uma vez que a velocidade da bolha é desconhecida deve ser adimensionalizada por  $U = \sqrt{gD}$ , onde  $D$  é o diâmetro da bolha e  $g$ , a magnitude da aceleração da gravidade. Na fórmula acima  $\rho_0$  é a massa específica de referência que, para o exemplo citado, corresponde à do líquido.  $\sigma_0$  representa a tensão superficial de referência.

**Número de Galileo (N):** Utilizado em problemas multifásicos. Este número representa a relação entre as forças de empuxo e as viscosas. Utilizando o mesmo valor de referência para o comprimento  $L = D$  e para a velocidade  $U = \sqrt{gD}$ , como no caso do número de Eötvös, este número adimensional aparece no termo viscoso da equação de Navier-Stokes como o quadrado do número de Reynolds. Os parâmetros  $\rho_0$  e  $\mu_0$  representam a massa específica e a viscosidade de referência do sistema, respectivamente, e  $g$  a magnitude da aceleração da gravidade.

**Número de Morton:** Utilizado em problemas multifásicos. É dado pela relação  $Eo^3/Ar^2$ . Este número adimensional não aparece nas equações de Navier-Stokes na sua forma adimensional, porém é parâmetro importante de medida do tamanho e da forma de uma bolha ou gota. Neste número,  $\rho_f$  e  $\rho_b$  representam as massas específicas do fluido e da bolha, respectivamente, enquanto  $\mu_0$  é a viscosidade de referência do sistema,  $\sigma_0$  é a tensão superficial de referência e  $g$ , a magnitude da aceleração da gravidade.

**Número de Rossby:** Quantifica a relação entre efeitos inerciais resultantes do termo  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}$  e a força de Coriolis atuando sobre meio contínuo cuja velocidade é medida em relação a referencial que gira com velocidade  $\Omega$ .  $U$  e  $L$  são a velocidade e a dimensão características do problema e  $\phi$  é a latitude, medida a partir do equador. O número de Rossby é utilizado no estudo de fenômenos geofísicos nos oceanos e na atmosfera. Números de Rossby baixos indicam que o sistema é muito influenciado por forças de Coriolis, enquanto, em problemas caracterizados por números de Rossby elevados, as forças de inércia predominam.

**Número de Eckert:** Este número relaciona aquecimento devido à compressão, com aquecimento por transferência de calor. Pode também ser utilizado em problemas envolvendo o escoamento de fluidos incompressíveis.

$$Bo = \frac{\rho g d^2}{\sigma}$$

**Número de Bond:** Utilizado em problemas de convecção livre com interface entre dois fluidos.  $\sigma$  é a tensão superficial do fluido.

$$Ca = \frac{U^2}{E/\rho}$$

**Número de Cauchy:** É semelhante ao número de Mach.  $E$  é o módulo de elasticidade do meio.

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho U^2}$$

**Número de Euler:** É um coeficiente de pressão.

$$We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma}$$

**Número de Weber:** É um parâmetro importante nos problemas que envolvem tensão superficial ( $\sigma$  é a tensão superficial).

$$f = \frac{\Delta H/(U^2/2g)}{L/d}$$

**Coeficiente de perda de carga em tubos:** Utilizado no cálculo de tubulações.  $\Delta H$  é a perda de carga e  $L$ , o comprimento da tubulação.

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$$

**Coeficiente de sustentação:** Utilizado em aerodinâmica;  $L$  é a força de sustentação de um aeroporto e  $A$ , sua superfície em planta.

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$$

**Coeficiente de arraste:** Utilizado em aerodinâmica;  $D$  é a força de resistência ao avanço de um corpo que se move com velocidade  $U$  em um fluido e  $A$ , sua área frontal.

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

**Coeficiente de pressão:** Utilizado em aerodinâmica;  $p_\infty$  é a pressão longe do corpo.

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho U^2 c S}$$

**Coeficiente de momento, ou de arfagem:** Utilizado para caracterizar o momento  $M$  que atua sobre um corpo devido aos campos de velocidades e de pressão em que está imerso. Os parâmetros  $c$  e  $S$  são, respectivamente, a dimensão característica e a área em planta do corpo.

$$\sigma = \frac{p - p_v}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

**Coeficiente de cavitação:** Utilizado na engenharia de máquinas hidráulicas;  $p_v$  é a pressão parcial de vapor do fluido.

## A.6 Problemas

1. A velocidade média de um fluido que escoa em um tubo de diâmetro  $d$  é função do gradiente de pressão,  $\partial p / \partial x$  e do coeficiente de viscosidade dinâmica  $\mu$  do fluido. Encontre uma expressão para a velocidade média em um tubo liso, usando só princípios da análise dimensional.
2. Obtenha uma expressão para o torque  $T$  necessário para girar um disco de diâmetro  $d$  a uma velocidade angular  $\Omega$ , imerso em um fluido de massa específica  $\rho$ , que se encontra a uma distância  $t$  de uma parede. Encontre também uma expressão para a

a exigência de potência para girar o disco.

3. A velocidade de propagação de ondas de superfície de pequena amplitude numa região de profundidade uniforme é dada por:

$$c^2 = \left( \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} + \frac{g\lambda}{2\pi} \right) \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}$$

onde  $h$  é a profundidade do líquido em repouso,  $\lambda$ , o comprimento de onda da perturbação que se propaga e  $\sigma$ , a tensão superficial. Usando  $L$  e  $V_0$  como um comprimento e uma velocidade característicos, obtenha os grupos adimensionais que caracterizam a equação e determine as condições para existência de semelhança.

4. Pretende-se estudar experimentalmente o arraste de um submarino ( $d = 3,0\text{ m}$ ,  $U = 5,0\text{ m/s}$ ) que opera a grande profundidade. Dispõe-se de um túnel de água, com velocidade até  $20\text{ m/s}$ , que pode receber modelos até  $0,6\text{ m}$  de diâmetro e um túnel aerodinâmico atmosférico, com velocidade até  $150\text{ m/s}$  e que pode receber modelos até  $0,40\text{ m}$  de diâmetro.

- (a) Haverá possibilidade de se conseguir semelhança nos ensaios?
- (b) Qual seria sua escolha de túnel? Justificar as razões da escolha.

Dados:  $\nu = 1,0 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  (água) e  $\nu = 1,5 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$  (ar).

5. Mostrar que o período de oscilação de todo modo natural de oscilação de um líquido sem viscosidade em um tubo em  $U$  com a superfície superior aberta para a atmosfera é diretamente proporcional ao diâmetro do tubo.
6. Mostrar que a frequência de todos os modos de vibração de uma gota de líquido sob ação da tensão superficial é proporcional à raiz quadrada da tensão superficial, inversamente proporcional à raiz quadrada da massa específica e inversamente proporcional à potência  $3/2$  do diâmetro.
7. A frequência de vibração de uma corda sob ação do vento é de  $512\text{ Hz}$ , sob certa velocidade do vento. Qual será a frequência se o diâmetro da corda for duplicado e a velocidade do vento, reduzida à metade? (O diâmetro é a única característica da corda que intervém na frequência de vibração)
8. A altura  $h$  de uma maré, devida a um vento permanente que sopra sobre a superfície de um lago depende da profundidade  $D$ , do comprimento  $L$  do lago, do peso específico da água e da força tangencial  $\tau$  por unidade de área que o vento exerce sobre a superfície do lago. Qual é a forma mais geral da equação que descreve a altura  $h$  da maré?
9. A velocidade do som em um gás depende da pressão e da massa específica  $\rho$  do gás. Mostrar, através de análise dimensional, que a velocidade do som é proporcional à raiz quadrada da relação entre a pressão e massa específica do gás.
10. A velocidade de um gás saindo de um reservatório depende da pressão ambiente  $p_1$ , da pressão  $p_0$  e da massa específica  $\rho_0$  do gás no reservatório. Para valores especificados de  $p_0$  e  $p_1$ , a velocidade de saída de um reservatório é de  $100\text{ m/s}$ . Qual será a velocidade de saída do reservatório nas mesmas condições de pressão se o gás for o hidrogênio? (A relação entre as massas específicas do ar e do hidrogênio é 14,4).

11. Mostrar que a velocidade de deslocamento de uma estrutura de ondas de pequena altura em águas profundas é proporcional à raiz quadrada do comprimento de onda da estrutura. Desprezar efeitos viscosos e de tensão superficial.
12. O rendimento de uma transmissão por engrenagens depende dos diâmetros  $D$  e  $d$  das engrenagens, da viscosidade dinâmica  $\mu$  do lubrificante, da velocidade angular  $N$  da árvore de transmissão e do carregamento  $F$  por unidade de largura dos dentes das engrenagens. Fazer a análise dimensional do problema.
13. A queda de pressão  $\Delta p$  em um registro, em uma curva, em um orifício, ou em qualquer acidente de uma tubulação depende da forma do acidente, do diâmetro  $D$  da tubulação da velocidade  $V$  do escoamento, da massa específica  $\rho$  e da viscosidade dinâmica  $\mu$  do líquido. Obter a expressão mais geral para  $\Delta p$ . Obter uma forma particular, admitindo que a viscosidade tenha um efeito desprezível.
14. Em casos excepcionais, a matriz dimensional de um problema tem posto inferior ao número de linhas. A matriz é dita como sendo singular. Um exemplo de matriz dimensional singular é dado ao lado. Apenas duas colunas são linearmente independentes, o que implica em que todos os determinantes de terceira ordem da matriz são iguais a zero. Verificar essa propriedade, mostrar que as séries completas de produtos adimensionais contém dois produtos e que uma possível série é dada pelos produtos:

	$P$	$Q$	$S$	$T$
$M$	2	1	3	4
$L$	-1	6	-3	0
$T$	1	20	-3	8

$$\pi_1 = P R^{-1/3} S^{-1/4} \quad \pi_2 = Q R^2 S^{-7/4}$$

ou:

$$\pi_1 = P^{12} R^{-4} S^{-3} \quad \pi_2 = Q^4 R^8 S^{-7}$$

15. Determinar uma série completa de produtos adimensionais de um problema em que os expoentes das variáveis que intervêm na lei que rege o comportamento do sistema obedecem aos sistemas de equações algébrica lineares abaixo:

$$M : \quad r + 2s - t + 3u - 3v = 0$$

$$L : \quad 2p + 6q - 3r + t + v = 0$$

$$T : \quad q - r - 5s - 2t + 2u + v = 0$$

$$Q : \quad p + 2q - u - 4v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

16. Determinar o posto das matrizes dimensionais abaixo e o número de produtos de uma série completa. Calcular os produtos. Eliminar os expoentes fracionários.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
<i>M</i>	1	1	0	-2	0	1	-1	2
<i>L</i>	2	2	0	1	4	-2	-3	5
<i>T</i>	-3	2	0	-1	-4	3	1	4

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>M</i>	-7	-2	-3	14
<i>L</i>	-2	-4	3	1
<i>T</i>	-1	2	-3	4

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>M</i>	1	1	-1	0	0	-2
<i>L</i>	3	2	1	-1	-4	0
<i>T</i>	-1	-2	2	0	3	1

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>M</i>	1	-1	2	0
<i>L</i>	-3	0	1	-2
<i>T</i>	-1	-2	5	-2
$\theta$	4	-1	1	2

17. **Influência da temperatura sobre o coeficiente de viscosidade de um gás[39]:** em muitas aplicações da teoria cinética dos gases não é necessário levar em conta a estrutura das moléculas que formam o gás. Quando as moléculas se aproximam suficientemente, surge o efeito de repulsão, caracterizado por uma força de curta distância, proporcional ao inverso da distância entre o centro das moléculas, elevada a um expoente  $n$ , normalmente maior do que 5 ( $F = Kx^{-n}$ ).  $K$  é um coeficiente característico das moléculas.

Lord Rayleigh admitiu que o coeficiente de viscosidade dos gases não dependa da massa específica e estudou a dependência daquela com a temperatura. Os resultados de Lord Rayleigh mostraram-se válidos para pressões variando de centésimos a uma atmosfera. Acima desse valor, os efeitos de atração inter molecular tornam-se mais importantes e invalidam as hipóteses. Se o coeficiente de viscosidade de um gás não depender da massa específica de um gás, não depende dos características que definem a massa específica, que são o número de moléculas por unidade de volume e o livre caminho médio das mesmas. A viscosidade pode ser determinada em função da massa  $m$  de uma molécula, da velocidade média  $V$  de uma molécula e do coeficiente de repulsão  $K$ . O comportamento do gás obedece a uma lei da forma:

$$\varphi(\mu, K, m, V) = 0.$$

Mostrar que a série completa de produtos adimensionais se compõe de um único termo da forma:

$$\pi = \mu K^{2/(n-1)} m^{-(n+1)/(n-1)} V^{-(n+3)/(n-1)}.$$

Mostrar que a viscosidade depende da temperatura segundo a lei:

$$\mu = \beta m^{1/2} K^{2/(n-1)} \theta^s,$$

onde  $\theta$  é a temperatura do gás,  $\beta$  é uma constante e

$$s = \frac{1}{2} + \frac{2}{n+1}.$$

Levar em consideração que a energia cinética de uma molécula,  $mV^2/2$  é proporcional à temperatura  $\theta$ . Mostrar que viscosidade aumenta com a temperatura e que a curva que mostra a dependência  $\mu = \mu(\theta)$  é uma reta quando as duas variáveis são plotadas em escala logarítmica.

18. O momento de arfagem máximo que se exerce sobre um hidroavião no momento de pouso na água é função das seguintes variáveis:

- (a) Ângulo  $\alpha$ , da trajetória de voo com a horizontal;
- (b) Ângulo  $\beta$ , do avião com relação à direção horizontal;
- (c) Velocidade de amerissagem  $V$ ;
- (d) Massa  $m$  do hidroavião;
- (e) Raio de giração  $R$  do hidroavião em relação ao eixo de arfagem;
- (f) Dimensão característica da fuselagem do hidroavião;
- (g) massa específica da água;
- (h) Aceleração da gravidade.

Fazer a análise dimensional do problema com o objetivo de representar graficamente os resultados dos ensaios de amerissagem.

**Obs:** Arfagem é o movimento de giro em torno do eixo transversal, em que o hidroavião se inclina para a frente, ou para trás.

19. Supondo que a vazão volumétrica  $Q(m^3/s)$  sobre a soleira de um vertedor retangular seja independente da viscosidade da água e proporcional à largura do vertedor, mostrar que  $Q$  é proporcional à espessura da lâmina d'água sobre a soleira elevada a  $3/2$ .
20. Mostrar que a vazão volumétrica  $Q(m^3/s)$  sobre a soleira de um vertedor triangular é proporcional à potência  $5/2$  da espessura da lâmina d'água, acima do vértice inferior do vertedor. Supor que a vazão é independente da viscosidade da água.
21. Um termistor é um condutor elétrico cuja resistência  $R$  decresce rapidamente com a temperatura, segundo a lei:

$$R = R_0 \exp(\beta/\theta),$$

onde  $R_0$  e  $\beta$  são constantes e  $\theta$ , a temperatura do termistor. A queda de tensão no termistor segue a lei de Ohm, na forma  $V = RI$ . Não obstante, a resistência depende da diferença de temperaturas  $\Delta\theta$  que se estabelece no equilíbrio, entre o termistor e o meio ambiente. O calor transmitido para o ambiente (*Watts*) é dado por  $Q = h \Delta\theta$ , com o coeficiente de transmissão de calor por convecção praticamente constante quando a temperatura do termistor não é muito elevada. Nessas condições a queda de potencial  $V$ , através do termistor é determinada pela corrente  $I$ , pelas constantes  $R_0$  e  $\beta$ , pela temperatura ambiente  $\theta_0$  e pelo coeficiente de transmissão de calor por convecção  $h$ , isso é:

$$V = f(I, \theta_0, R_0, \beta, h).$$

Mostrar que a lei que descreve a queda de tensão no termistor pode ser escrita sob a forma[39, 7]:

$$\frac{V}{\theta_0} = f\left(\frac{I}{\theta_0} \sqrt{\frac{\beta R_0}{h}}, \frac{\theta_0}{\beta}\right).$$



# Apêndice B

## Elementos de Cálculo Vetorial

### B.1 Introdução

Este apêndice aborda importantes conceitos do cálculo vetorial, essenciais para formulação das leis que regem a mecânica dos meios contínuos. São revistos o conceito dos operadores gradiente, divergente e rotacional, os teoremas de Gauss e de Stokes e apresentada a notação de tensorial cartesiana, também chamada de notação de índices ou de Einstein. Essa notação apresenta nítidas vantagens sobre a vetorial, usada tradicionalmente nos textos introdutórios de mecânica dos meios contínuos, o que justifica, no nosso entender, o esforço inicial de assimilação, necessário. A notação de índices permite que as equações se expressem de forma compacta, o que facilita sua compreensão.

A demonstração de várias identidades vetoriais se simplifica igualmente, quando se usa a notação cartesiana. Algumas dessas identidades são demonstradas nesse apêndice e outras são deixadas como exercícios. Em alguns problemas da mecânica dos fluidos, como por exemplo no da relação entre efeitos viscosos e de variação da energia interna de uma partícula de fluido, o uso da notação de índices permite que se obtenha facilmente a relação entre os dois efeitos. O mesmo trabalho se torna extremamente penoso quando se utiliza a notação vetorial.

### B.2 Principais Operadores Vetoriais e Teoremas

#### B.2.1 Operador gradiente

O *gradiente* de uma função escalar  $f$  é definido, em coordenadas cartesianas, como o vetor cujas componentes são as derivadas parciais de  $f$ :

$$\mathbf{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

ou

$$\mathbf{grad} f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{e}_i,$$

onde  $\partial f / \partial x_i$  é a componente do gradiente na direção  $x_i$ .

O gradiente de um escalar é um vetor, orientado no sentido em que a variação da função  $f$  é máxima. Cabe notar que a variação da função na direção perpendicular ao gradiente é nula. De fato, o valor da função em um ponto  $\mathbf{X}^1 = x_1^1 \mathbf{e}_1 + x_2^1 \mathbf{e}_2 + x_3^1 \mathbf{e}_3$ , localizado na vizinhança de um ponto  $\mathbf{X}^0 = x_1^0 \mathbf{e}_1 + x_2^0 \mathbf{e}_2 + x_3^0 \mathbf{e}_3$ , é dado aproximadamente por:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}^1) &= f(\mathbf{X}^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2^1 - x_2^0) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_3^1 - x_3^0) \\ &= f(\mathbf{X}^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\Delta x_3 \\ &= f(\mathbf{X}^0) + \mathbf{grad} f \cdot \Delta \mathbf{X} \\ &= f(\mathbf{X}^0) + |\mathbf{grad} f| |\Delta \mathbf{X}| \cos \theta \end{aligned}$$

o que mostra que a variação da função é máxima na direção do gradiente, quando  $\cos \theta = 1$ .

Em coordenadas cilíndricas, o operador gradiente toma a forma:

$$\mathbf{grad} = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{B.1})$$

Em coordenadas esféricas:

$$\mathbf{grad} = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (\text{B.2})$$

Podemos também definir o gradiente de um vetor, como por exemplo, da velocidade de uma partícula de fluido. Sendo  $\mathbf{v}$  o vetor velocidade, de coordenadas  $(v_x, v_y$  e  $v_z)$ , o gradiente da velocidade terá nove elementos, que podemos agrupar em uma matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

A forma geral de um elemento do gradiente de velocidades é dada por  $\partial v_i / \partial x_j$  onde  $v_i$  é componente da velocidade na direção  $i$  e  $x_j$  é coordenada na direção  $j$ . A ação do operador gradiente sobre uma função  $f$  resulta em uma grandeza de *ordem* mais elevada, como esquematizado abaixo:

$f$	$\mathbf{grad} f$
escalar (tensor de ordem zero)	vetor (tensor de ordem um)
vetor (tensor de ordem um)	matriz (tensor de ordem dois)

Essa propriedade se reflete no número de índices da variável. Por exemplo:

escalar:	$T$
vetor:	$v_i, \partial T / \partial x_i$
tensor de segunda ordem:	$\partial v_i / \partial x_j$

## B.2.2 Operador divergente

### Divergente de um vetor

O divergente de um vetor é dado, em um sistema de coordenadas cartesianas, por:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k})$$

O operador divergente reduz a ordem de um tensor sobre o qual atua. Assim, o divergente de um vetor é um escalar e o divergente de um tensor de segunda ordem é um tensor de primeira ordem, ou um vetor.

Damos a seguir uma interpretação ao divergente de um campo vetorial. Consideremos um elemento de fluido submetido a um fluxo de calor, conforme mostrado na Fig. (B.1):

$$\mathbf{q}(x, y, z) = q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k}.$$

Por convenção, cada face do elemento do meio recebe o nome do eixo ao qual é perpendicular. Assim, as faces localizadas nos pontos de coordenadas  $x$  e  $x + \Delta x$  e perpendiculares ao eixo  $x$  denominam-se faces  $x$ . As demais faces são designadas segundo mesmo critério. Os vetores normais às faces são orientados para fora do elemento, recebendo então os seguintes valores:

Faces  $x + \Delta x, y + \Delta y$  e  $z + \Delta z : +1$

Faces  $x, y$  e  $z : -1$

Fazemos um balanço da quantidade de calor que é transferida para fora do elemento, menos a que é transferida para dentro. Designando as normais às faces  $x$ , localizadas em  $x$  e  $x + \Delta x$  por  $n_x$  e  $n_{x+\Delta x}$ , respectivamente e levando em consideração que  $n_{x+\Delta x} = +1$  e  $n_x = -1$  temos que a quantidade líquida de calor transferida para fora do elemento por unidade de tempo, devido à componente do fluxo na direção  $x$ , é dada por:

$$\begin{aligned} \sum (q_x n_x \Delta A) &= q_{x+\Delta x} n_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z + q_x n_x \Delta y \Delta z \\ &= \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z - q_x \Delta y \Delta z = \frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

Nas direções  $y$  e  $z$  temos, respectivamente:

$$\begin{aligned} \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z - q_y \Delta x \Delta z &= \frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \\ \left( q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y - q_z \Delta x \Delta y &= \frac{\partial q_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

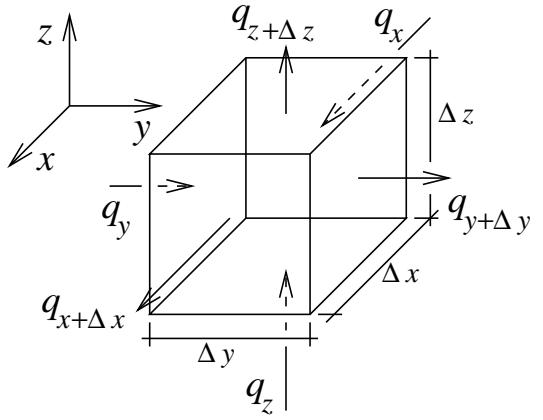


Figura B.1: Fluxo de calor através das paredes de um elemento de fluido.

Somando-se as três contribuições obtém-se a quantidade de calor acumulada no elemento considerado, por unidade de tempo:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial q_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Dividindo-se a expressão acima por  $\Delta x \Delta y \Delta z$  obtemos:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \mathbf{q}$$

Unidades de  $\operatorname{div} \mathbf{q}$ :

$$[\operatorname{div} \mathbf{q}] = \frac{\frac{\text{calor/tempo}}{\text{área}}}{\text{comprimento}} = \frac{\text{calor/tempo}}{\text{volume}},$$

o que mostra que o divergente do fluxo de calor representa a variação da energia interna por unidade de tempo e de volume, no elemento infinitesimal de volume considerado. Cabe notar que, ao fazermos o balanço, calculamos a quantidade de calor que *sai* do elemento, menos a que *entra*. A taxa de acumulação de calor é portanto, dada pelo *negativo* do divergente do fluxo de calor.

O divergente de um vetor  $\mathbf{q}$  toma a forma, em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rq_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z}. \quad (\text{B.3})$$

Em coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi}. \quad (\text{B.4})$$

### Divergente de um tensor de segunda ordem

Vimos na Sec. (B.2.1), que da mesma forma como determinamos o gradiente de um escalar, podemos determinar o gradiente de um vetor, obtendo um tensor de segunda ordem, cujas componentes são representadas por uma matriz. Gradientes de vetor ocorrem com frequência na mecânica dos meios contínuos, como no caso da equação de evolução da quantidade de movimento de fluidos. De forma semelhante, divergentes de tensores de segunda ordem ocorrem também nas equações da mecânica dos meios contínuos. Em particular, o divergente das tensões que atuam sobre a superfície de uma partícula de um contínuo é igual à resultante das forças de superfície por unidade de volume que atuam sobre a mesma. Discutimos abaixo esse caso.

Consideramos uma partícula de um meio contínuo, conforme representado na Fig. (B.2) e calculamos a resultante das forças de superfície que atuam sobre a mesma, na direção  $x$ . Essas forças resultam de tensões nessa direção, que são as de cisalhamento que atuam nas faces  $y$ ,  $y + \Delta y$ ,  $z$  e  $z + \Delta z$  e as normais, que atuam nas faces  $x$  e  $x + \Delta x$ . As tensões  $\sigma_{ij}$  são identificadas por dois índices, o primeiro referindo-se à direção da tensão e o segundo, à

face em que a mesma atua. Compõem portanto um tensor de segunda ordem, que, por sua vez, é representado, em cada referencial, por uma matriz, sendo todas equivalentes:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Cada componente do tensor de tensões é tratada, salvo em alguns casos particulares como o de forças pontuais, como variável contínua e diferenciável. Os vetores normais às faces do elemento são orientados para fora. Deve-se observar que as componentes  $\sigma_{ij}$  são funções admitidas como suficientemente regulares para admitir derivadas, conforme discutido na Sec. 3.3.1

A resultante de forças que atuam na direção  $x$ , devido às tensões normais atuando nas faces  $x$  e  $x + \Delta x$  é dada por:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \sigma_{xj} n_j \Delta A &= (\sigma_{xx+\Delta x} n_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z + \sigma_{xx} n_x \Delta y \Delta z = \\ (\sigma_{xx+\Delta x}) \Delta y \Delta z - \sigma_{xx} \Delta y \Delta z &= \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z - \sigma_{xx} \Delta y \Delta z = \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta V \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Nas faces  $y$ ,  $y + \Delta y$  e  $z$  e  $z + \Delta z$ :

$$\begin{aligned} (\sigma_{xy+\Delta y}) \Delta x \Delta z - \sigma_{xy} \Delta x \Delta z &= \left( \sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z - \sigma_{xy} \Delta x \Delta z = \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \Delta V \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{xz+\Delta z}) \Delta x \Delta y - \sigma_{xz} \Delta x \Delta y &= \left( \sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y - \sigma_{xz} \Delta x \Delta y = \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z &= \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \Delta V \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

A resultante de forças na direção  $x$ , devido às tensões nessa direção, atuando nas seis faces da partícula do meio contínuo é dada pela soma do último termo das expressões (B.6, B.7 e B.8). Obtém-se:

$$dF_x = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \Delta V$$

Acima mostra que a resultante das forças na direção  $x$ , que atuam sobre o elemento do contínuo, é dada pelo divergente das tensões nessa direção, multiplicado pelo volume do elemento.

Reescrevemos a equação acima na notação de índices, em que substituímos  $dF_x$  por  $dF_1$ ,  $\partial \sigma_{xx}$ ,  $\partial \sigma_{xy}$  e  $\partial \sigma_{xz}$  por  $\partial \sigma_{11}$ ,  $\partial \sigma_{12}$  e  $\partial \sigma_{13}$ , respectivamente e  $\partial x$ ,  $\partial y$  e  $\partial z$  por  $\partial x_1$ ,  $\partial x_2$  e  $\partial x_3$ , respectivamente. Obtemos:

$$dF_1 = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} \Delta V$$

Procedendo de forma análoga obtemos as equações para a resultante das forças nas direções  $y$  e  $z$ , que atuam sobre o elemento do contínuo. Agrupando os três elementos na forma de um vetor, obtemos:

$$\begin{pmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} \end{pmatrix} \Delta V$$

O elemento geral desse vetor é da forma:

$$dF_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \Delta V$$

O resultado acima mostra que as tensões que atuam na superfície de um elemento do meio contínuo formam uma matriz ou um tensor de segunda ordem, representado por uma matriz. É fácil ver que o divergente dessa matriz, é um vetor, cujos elementos são os divergentes dos vetores formados pelos elementos de cada linha da matriz. A resultante das forças que atuam sobre o elemento é dada pelo divergente do tensor, multiplicado pelo volume do elemento.

### B.2.3 Teorema de Gauss

O teorema de Gauss generaliza o resultado acima, para o caso de um volume finito. Consideremos um volume  $V$ , fixo no espaço e simplesmente conexo, conforme mostrado na Fig. (B.3). O volume é limitado externamente por uma superfície  $S$ . Seja  $\mathbf{n}$  o vetor de comprimento unitário perpendicular à superfície e orientado para fora e  $\mathbf{q}$ , um campo vetorial definido no espaço onde se encontra o volume considerado. O teorema de Gauss estabelece que:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{q} dV = \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA \quad (\text{B.9})$$

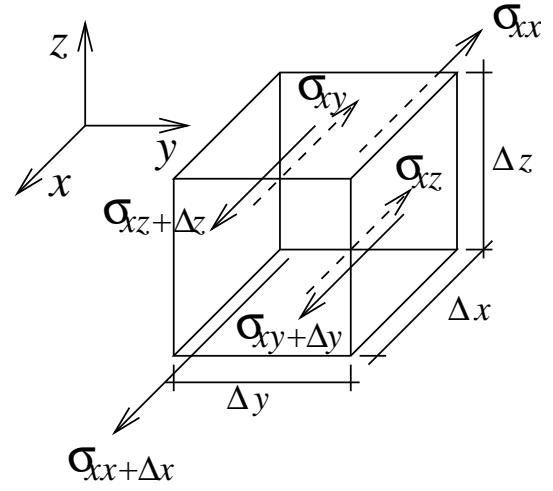


Figura B.2: Tensões atuando sobre uma partícula de um meio contínuo, na direção  $x$ . Observamos que as tensões são parcelas do resultado da ação do tensor de tensões sobre o vetor normal e não apenas as componentes do tensor, cujo sinal não se inverte entre faces opostas. Por ser a forma comumente adotada na literatura indicamos apenas componentes  $\sigma_{ij}$  do tensor de tensões e não produtos das componentes pelas componentes da normal, como feito na Fig. 3.2.

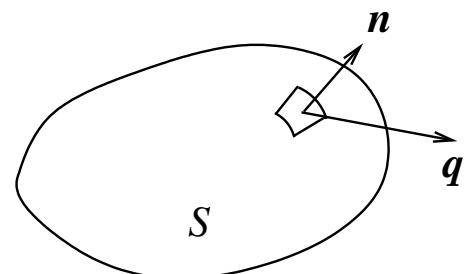


Figura B.3: Volume de controle ao qual se aplica o teorema de Gauss.  $\mathbf{n}$  é o vetor de comprimento unitário perpendicular à superfície no ponto considerado.

Tendo em vista o teorema de Gauss podemos definir o divergente de um vetor  $\mathbf{q}$ , de forma independente do tipo do sistema de coordenadas utilizado:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA$$

### B.2.4 Operador rotacional

O rotacional de um vetor é dado, no caso de um sistema de coordenadas cartesianas, por:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = \left[ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \mathbf{k} \quad (\text{B.10})$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r + \left[ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z \quad (\text{B.11})$$

Em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = & \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \operatorname{sen} \theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (rv_\phi) \right] \mathbf{e}_\theta + \\ & \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

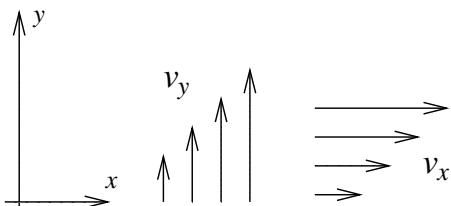


Figura B.4: Variação da componente de velocidade  $v_y$  na direção  $x$  e da componente de velocidade  $v_x$  na direção  $y$ . No caso,  $\partial v_y / \partial x > 0$  e  $\partial v_x / \partial y > 0$ . A componente na direção  $z$  do rotacional desse campo de velocidades bidimensional é dado por  $(\partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y)\mathbf{k}$ .

Figura B.4: Variação da componente de velocidade  $v_y$  na direção  $x$  e da componente de velocidade  $v_x$  na direção  $y$ . No caso,  $\partial v_y / \partial x > 0$  e  $\partial v_x / \partial y > 0$ . A componente na direção  $z$  do rotacional desse campo de velocidades bidimensional é dado por  $(\partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y)\mathbf{k}$ .

Consideremos a componente na direção  $\mathbf{k}$  do rotacional,  $\partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y$ . O esquema da Fig. (B.4) mostra que a tendência à rotação de uma partícula de fluido, devido à variação de  $v_y$  na direção  $x$  é contraposta pela variação de  $v_x$  na direção  $y$ . Esse exemplo mostra que o rotacional mede de alguma forma, a velocidade de rotação local do fluido. Essa questão é discutida na Sec. (B.3.1).

### B.2.5 Teorema de Stokes

O teorema de Stokes estabelece que o fluxo do rotacional de um vetor  $\mathbf{v}$  através de uma superfície  $S$  é igual à integral de linha da projeção da velocidade sobre a tangente à curva  $\Gamma$  que limita a superfície considerada. Essa propriedade se expressa por:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

## B.2.6 Outros Teoremas

Enunciamos abaixo outros importantes teoremas do cálculo vetorial [17]:

**Teorema** (Integração por partes): Sejam  $\Omega \in \mathcal{R}^m$  e  $\Gamma = \partial\Omega$ , o contorno de  $\Omega$  e  $\phi, \psi : U \in \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$ , dois campos escalares. Então:

$$\int_{\Omega} \phi \mathbf{grad} \psi \cdot \mathbf{n} d\Omega = \int_{\Gamma} \phi \psi d\Gamma - \int_{\Omega} \psi \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{n} d\Omega.$$

**Teorema** (Primeiro teorema de Green): Sejam  $\Omega \in \mathcal{R}^m$  e  $\Gamma = \partial\Omega$ , o contorno de  $\Omega$  e  $\phi, \psi : U \in \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$ , dois campos escalares. Então:

$$\int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi + \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \psi) d\Omega = \int_{\Gamma} \phi \mathbf{grad} \psi \cdot \mathbf{n} d\Gamma.$$

**Teorema** (Segundo teorema de Green): Sejam  $\Omega \in \mathcal{R}^m$  e  $\Gamma = \partial\Omega$ , o contorno de  $\Omega$  e  $\phi, \psi : U \in \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$ , dois campos escalares. Então:

$$\int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi + \phi \nabla^2 \psi) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} + \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\Gamma,$$

onde  $n$  é a coordenada ao longo da direção normal a  $\Omega$ .

**Teorema** (Teorema de Green para campos vetoriais): Sejam  $\Omega \in \mathcal{R}^m$  e  $\Gamma = \partial\Omega$ , o contorno de  $\Omega$  e  $\mathbf{u}, \mathbf{v} : U \in \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^m$ , dois campos vetoriais. Então:

$$\int_{\Omega} [(\nabla^2 \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{grad} \mathbf{u} : \mathbf{grad}^T \mathbf{v})] d\Omega = \int_{\Gamma} [(\mathbf{grad} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} d\Gamma.$$

## B.3 Notação de Índices (Notação Tensorial Cartesiana)

Foi visto que as componentes de uma grandeza vetorial podem ser representadas através de um símbolo contendo um único índice. Por exemplo, a  $i$ -ésima componente de um vetor  $\mathbf{v}$  pode ser representada por  $v_i$ . No caso de uma matriz, ou de um tensor cartesiano de segunda ordem, são necessários *dois* índices para representar o elemento geral do mesmo. Assim, o elemento geral de uma matriz  $A$  se representa por  $a_{ij}$  e o elemento geral do gradiente de um vetor, por  $\partial v_i / \partial x_j$ . A estes índices se dá o nome de índices *livres*.

Constata-se que, na mecânica dos meios contínuos, que frequentemente os termos das equações contêm somatórios feitos sobre os valores de índices que aparecem duas vezes no termo. Se considerarmos, por exemplo, o caso do divergente de um vetor  $q$ , temos:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial q_j}{\partial x_j}$$

Outro exemplo é dado pela componente da aceleração de uma partícula de fluido na direção  $i$ :

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} &= \frac{d}{dt} v_i(t, x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{dv_i}{dt} &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Observando que  $dx/dt = v_x$ ,  $dy/dt = v_y$  e que  $dz/dt = v_z$  pode-se re-escrever a última expressão na forma:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_i}{\partial z} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Nos dois exemplos acima vê-se que, no caso de algum termo conter um somatório, o índice sobre o qual se faz a soma aparece duas vezes. A informação de que se deve fazer uma soma já está contida portanto na existência do índice repetido e pode-se portanto dispensar o sinal do somatório. Adota-se então na mecânica de meios contínuos, a notação de *índices*, ou dos *tensores cartesianos*, ou de *Einstein*, que consiste em suprimir o sinal do somatório. A existência de índices repetidos indica por si, que se deve efetuar o somatório sobre todos os valores daquele índice. Assim, o divergente de um vetor e a componente da aceleração de uma partícula na direção  $i$  se escrevem, nesta notação:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{q} &= \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \\ \frac{dv_i}{dt} &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\end{aligned}$$

O índice repetido denomina-se *mudo*. Assim, na última expressão acima,  $j$  é um índice mudo e  $i$  é um índice livre. A denominação de *mudo* vem da variável muda das integrais, onde:

$$\int_0^Z x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^Z = \int_0^Z y \, dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^Z = \frac{z^2}{2}.$$

Nesse caso  $x$  e  $y$  são a variáveis mudas podendo ser substituídas por qualquer letra que o resultado será sempre  $z^2/2$ .

A ordem do tensor é dada pelo número de índices livres. De fato, observa-se que não há índices livres na expressão do divergente de um vetor, que é efetivamente um escalar e que há um índice livre na expressão da aceleração de uma partícula, que é um vetor.

O teorema de Gauss, dado pela Eq. (B.9), pode ser re-escrito na notação tensorial cartesiana:

$$\int_V \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \, dV = \oint_S q_j n_j \, dA \tag{B.13}$$

A Eq. (B.13) pode ser generalizada para o caso do divergente de tensores de segunda ordem. Tomando como exemplo o tensor de tensões que atuam sobre uma partícula do meio contínuo, temos:

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \, dV = \oint_S \sigma_{ij} n_j \, dA \tag{B.14}$$

Dois operadores são comumente utilizados quando se emprega a notação de índices: os operadores  $\delta_{ij}$  e  $\epsilon_{ijk}$ . O operador  $\delta_{ij}$  é definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

O operador  $\delta_{ij}$  representa de fato o elemento geral da matriz identidade,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que multiplicando um vetor **a** dá como resultado o próprio vetor:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

A última expressão pode ser re-escrita na seguinte forma, utilizando-se a notação de índices:

$$\sum_{j=1}^3 \delta_{ij} a_j = a_i,$$

ou simplesmente:

$$\delta_{ij} a_j = a_i.$$

Como o resultado da multiplicação de  $a_j$  por  $\delta_{ij}$  é  $a_i$ , o operador  $\delta_{ij}$  é também denominado *operador de troca de índices*. De fato, as componentes  $b_i$  de um vetor qualquer podem ser representadas por  $\delta_{ij} b_j$ . Pode-se verificar sem dificuldades que, em particular,

$$\frac{\partial p \delta_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (\text{B.15})$$

Esse resultado, reescrito em notação vetorial, toma a forma:

$$\operatorname{div}(p\mathbf{1}) = \mathbf{grad} p \quad (\text{B.16})$$

onde **1** é a matriz identidade. As identidades (B.15) e (B.16) são usadas no capítulo 3, para simplificar a equação de conservação da quantidade de movimento (Eq. ). A variável  $p$  representa a pressão local, que atua sobre o elemento de fluido.

O operador  $\epsilon_{ijk}$  é definido da seguinte forma:  $\epsilon_{ijk} = 1$  se o valor dos índices  $i, j$  e  $k$  forem, respectivamente, 1, 2, 3, ou 3, 1, 2, ou 2, 3, 1 (ordem *cíclica*);  $\epsilon_{ijk} = -1$  se o valor dos índices forem 3, 2, 1, ou 1, 3, 2, ou 2, 1, 3 (ordem *anti-cíclica*);  $\epsilon_{ijk} = 0$  se dois ou mais índices tiverem o mesmo valor. Esse operador é usado para representar o produto vetorial e o rotacional de um vetor, como mostrado a seguir.

Vejamos inicialmente a representação do produto vetorial, utilizando o operador  $\epsilon_{ijk}$ . Consideremos a expressão  $\epsilon_{ijk} a_j b_k$ , onde  $a_j$  e  $b_k$  são as componentes nas direções  $j$  e  $k$  dos vetores **a** e **b**, respectivamente.  $\epsilon_{ijk} a_j b_k$  representa as componentes de um *vetor*, pois tem apenas um índice livre,  $i$ . Os índices  $j$  e  $k$  são repetidos e indicam que se deve somar sobre todos os valores dos mesmos, isto é:

$$\epsilon_{ijk} a_j b_k = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k.$$

Para  $i = 1$  temos:

$$\begin{aligned}\epsilon_{123} &= 1 & \epsilon_{132} &= -1 \\ \epsilon_{111} &= \epsilon_{112} = \epsilon_{113} = \epsilon_{121} = \epsilon_{122} = \epsilon_{131} = \epsilon_{133} & &= 0 \\ \epsilon_{1jk} a_j b_k &= a_2 b_3 - a_3 b_2.\end{aligned}$$

Para  $i = 2$  temos:

$$\begin{aligned}\epsilon_{231} &= 1 & \epsilon_{213} &= -1 \\ \epsilon_{211} &= \epsilon_{212} = \epsilon_{221} = \epsilon_{222} = \epsilon_{223} = \epsilon_{232} = \epsilon_{233} & &= 0 \\ \epsilon_{2jk} a_j b_k &= a_3 b_1 - a_1 b_3.\end{aligned}$$

Para  $i = 3$  temos:

$$\begin{aligned}\epsilon_{312} &= 1 & \epsilon_{321} &= -1 \\ \epsilon_{311} &= \epsilon_{313} = \epsilon_{322} = \epsilon_{323} = \epsilon_{331} = \epsilon_{332} = \epsilon_{333} & &= 0 \\ \epsilon_{3jk} a_j b_k &= a_1 b_2 - a_2 b_1.\end{aligned}$$

As expressões  $a_2 b_3 - a_3 b_2$ ,  $a_3 b_1 - a_1 b_3$  e  $a_1 b_2 - a_2 b_1$  são, respectivamente, as componentes do produto vetorial  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , nas direções  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ .

Vejamos agora a representação do rotacional de um campo vetorial, utilizando o operador  $\epsilon_{ijk}$ . Consideremos a expressão:

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

e mostremos a seguir que a mesma representa de fato o termo geral das componentes do rotacional de um campo vetorial  $\mathbf{v}$ :

Para  $i = 1$ ,  $\epsilon_{123} = 1$ ,  $\epsilon_{132} = -1$  e todos os demais valores de  $\epsilon_{1jk}$  são nulos, conforme o exemplo anterior. Temos então:

$$\epsilon_{1jk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}.$$

Para  $i = 2$ ,  $\epsilon_{231} = 1$ ,  $\epsilon_{213} = -1$  e todos os demais valores de  $\epsilon_{2jk}$  são nulos. Temos então:

$$\epsilon_{2jk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}.$$

Analogamente, para  $i = 3$ ,  $\epsilon_{312} = 1$ ,  $\epsilon_{321} = -1$  sendo os demais valores de  $\epsilon_{3jk}$  nulos.

$$\epsilon_{3jk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Os termos acima são as componentes de  $\text{rot } \mathbf{v}$ .

### B.3.1 Outras propriedades vetoriais

Demonstramos a seguir, duas outras propriedades vetoriais:

1. Se  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , onde  $\boldsymbol{\omega}$  é constante, então  $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{v}$ .
2.  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} \equiv \mathbf{grad} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}$ .

Para mostrarmos a validade das duas propriedades acima necessitamos da seguinte identidade que é apresentada sem demonstração:

$$\epsilon_{kij}\epsilon_{kpq} \equiv \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}.$$

A primeira propriedade relaciona o rotacional do campo com a velocidade angular quando esta é constante, isto é, independente da posição no espaço.

Temos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{v} &\longrightarrow \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \\ \mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \longrightarrow v_k = \epsilon_{kpq} \omega_p r_q \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{v} &\longrightarrow \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon_{kpq} \omega_p r_q = \epsilon_{ijk} \epsilon_{kpq} \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_p r_q) = (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_p r_q) = \\ &\frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ip}\omega_p \delta_{jq} r_q - \delta_{jp}\omega_p \delta_{iq} r_q) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_i r_j - \omega_j r_i) = \omega_i \frac{\partial r_j}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Mas, sendo  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ , temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_j}{\partial x_j} &= \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dy} + \frac{dz}{dz} = 3 \\ \frac{\partial r_i}{\partial x_j} &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \omega_i \frac{\partial r_j}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial r_i}{\partial x_j} = 3\omega_i - \omega_j \delta_{ij} = 3\omega_i - \omega_i = 2\omega_i$$

e:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{v}$$

A demonstração da propriedade  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = \mathbf{grad} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}$  se faz de forma semelhante, utilizando-se a identidade  $\epsilon_{kij}\epsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$ .

Reescrevemos inicialmente, cada um dos termos da igualdade, usando a notação de índices:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} &\longrightarrow v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ \mathbf{grad} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} &\longrightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j v_j) = \frac{1}{2} \left( v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\ -\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} &\longrightarrow -\epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{kpq} \frac{\partial v_q}{\partial x_p}\end{aligned}$$

O desenvolvimento dos termos do membro direito da igualdade demonstra a propriedade:

$$\begin{aligned}v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{kpq} \frac{\partial v_q}{\partial x_p} &= v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \epsilon_{kij} \epsilon_{kpq} v_j \frac{\partial v_q}{\partial x_p} = v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) v_j \frac{\partial v_q}{\partial x_p} \\ v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \left( v_j \delta_{ip} \delta_{jq} \frac{\partial v_q}{\partial x_p} - v_j \delta_{iq} \delta_{jp} \frac{\partial v_q}{\partial x_p} \right) &= v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \left( v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\end{aligned}$$

## B.4 O Teorema de Helmholtz (Teorema Fundamental do Cálculo Vetorial)

Uma das mais importantes proposições do cálculo vetorial é o teorema de Helmholtz que estabelece [51, 26]:

**Teorema:** Seja  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  um campo vetorial contínuo, com primeiras derivadas contínuas, definido em um domínio  $V'$ , cuja superfície externa é  $S'$ .  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  tem uma decomposição única na forma da soma do negativo do gradiente de um escalar  $\phi(\mathbf{r})$  com o rotacional de um campo vetorial  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (\text{B.17})$$

onde o potencial escalar  $\phi(\mathbf{r})$  e o campo  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  são dados por:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} dA'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n} dA'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (\text{B.19})$$

com os campos vetoriais  $\mathbf{grad} \phi$  e  $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$  ortogonais entre si. O domínio  $V'$  deve ser escolhido de forma que  $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$  seja paralelo à superfície  $S'$  em cada ponto.

Se o domínio de integração se estender por todo  $\mathcal{R}^3$  as integrais de superfície acima se anulam.

### B.4.1 Existência e construção da decomposição

Tendo-se em conta que:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) dV &= \int_V \operatorname{div} \mathbf{grad} \left( \frac{1}{R} \right) dV = \\ - \int_V \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \right) dV &= - \int_V \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left[ R^2 \left( \frac{1}{R^2} \right) \right] dV = \\ - \oint_S \left( \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \right) \cdot \mathbf{n} dA &= \begin{cases} -\frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \cdot \mathbf{e}_R 4\pi R^2 = -4\pi & \text{se } V \text{ contiver a origem} \\ 0 & \text{se } V \text{ não contiver a origem,} \end{cases} \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , com  $|\mathbf{R}| = R$ . Sendo  $\delta(\mathbf{R}) = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$  pode-se escrever:

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{R}).$$

Decorre dessa propriedade que qualquer função vetorial suficientemente regular  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$  pode ser representada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \int_{V'} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \delta((\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = -\frac{1}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) dV' = \\ &- \frac{1}{4\pi} \nabla^2 \int_{V'} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{R} \right) dV', \end{aligned}$$

onde a integração se estende por qualquer região que contenha o ponto  $\mathbf{r}$ . Observamos que, na última expressão, o operador  $\nabla$  não atua sobre as variáveis de  $\mathbf{r}'$ . Usando a identidade  $\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla \cdot - \nabla^2$  (ver exercício 2, Pág. 355) reescrevemos a última equação como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_{V'} \nabla \times \left[ \mathbf{F}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{R} \right) \right] dV' - \frac{1}{4\pi} \nabla \int_{V'} \nabla \cdot \left[ \mathbf{F}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{R} \right) \right] dV', \quad (\text{B.20})$$

onde os operadores rotacional e divergente não atuam sobre as variáveis de  $\mathbf{r}'$ .

Notamos que, sendo  $\mathbf{R} = r - r'$  as derivadas em relação às variáveis de  $\mathbf{r}'$  são iguais ao negativo das derivadas em relação às variáveis de  $\mathbf{r}$ . Denotando por  $\nabla'$  o operador que atua sobre as variáveis de  $\mathbf{r}'$ , têm-se para o integrando do membro direito da equação acima, contendo o operador divergente:

$$\nabla \cdot \left[ \mathbf{F}(\mathbf{r}') \frac{1}{R} \right] = \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{R} = \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} - \nabla' \cdot \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R}$$

O termo da Eq. B.20, contendo a integral do divergente escreve-se então:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{V'} \nabla \cdot \left[ \mathbf{F}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{R} \right) \right] dV' = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} dV' - \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} dV'.$$

Aplicando-se o teorema de Gauss ao primeiro termo do membro direito da equação acima obtém-se o potencial escalar da decomposição de Helmholtz, conforme Eq. B.18:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} dA'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Lembrando que o operador  $\nabla$  só atua sobre os termos de  $\mathbf{r}$  temos para o integrando do termo da Eq. B.20 contendo o rotacional:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[ \mathbf{F}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{R} \right) \right] &\rightarrow \left[ \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{R} \right) \right] F_k \rightarrow \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') = \\ -\mathbf{F}(\mathbf{r}') \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) &= \mathbf{F}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} - \nabla' \times \left[ \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} \right]. \end{aligned}$$

A integral contendo o rotacional na Eq. B.20 toma então a forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times \left[ \mathbf{F}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{R} \right) \right] dV' &= \\ \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} dV' - \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \times \left[ \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} \right] dV'. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

A última integral da Eq. B.21 transforma-se como segue:

$$-\int_{V'} \nabla' \times \left[ \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} \right] dV' = \oint_{S'} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}}{R} dA'. \quad (\text{B.22})$$

Essa transformação é consequência da seguinte:

**Proposição:** Sejam  $\mathbf{X}(\mathbf{r})$  um campo vetorial contínuo definido no  $\mathcal{R}^3$ ,  $V$  um volume definido nesse espaço e  $S$ , a superfície que o delimita. Então:

$$\int_V \mathbf{rot} \mathbf{X} dV = -\oint_S \mathbf{X} \times \mathbf{n} dA, \quad (\text{B.23})$$

Demonstremos esse resultado: Seja  $\mathbf{c}$  um vetor constante; temos então que:

$$\operatorname{div}(\mathbf{X} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{X} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{c}.$$

Como  $\mathbf{c}$  é constante essa igualdade reduz-se a:

$$\operatorname{div}(\mathbf{X} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{X}.$$

Integrando a equação acima no volume  $V$ , usando o teorema de Gauss e notando que  $\mathbf{c}$  é um vetor constante escrevemos:

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{X} \times \mathbf{c}) dV = \int_V \mathbf{c} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{X} dV = \mathbf{c} \cdot \int_V \mathbf{rot} \mathbf{X} dV = \oint_S (\mathbf{X} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} dA.$$

Observando que  $(\mathbf{X} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{X}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{X} \times \mathbf{n})$  temos então:

$$= \mathbf{c} \cdot \int_V \mathbf{rot} \mathbf{X} dV = -\mathbf{c} \cdot \oint_S (\mathbf{X} \times \mathbf{n}) dA.$$

Excluindo a multiplicação escalar das integrais da equação acima pelo vetor  $\mathbf{c}$  a proposição fica demonstrada. Em vista desse resultado escrevemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times \left[ \mathbf{F}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{R} \right) \right] dV' &= \\ \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} dV' - \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \times \left[ \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} \right] dV' &= \\ \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA' &= \mathbf{A}(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

que é o potencial vetorial da decomposição de Helmholtz, conforme Eq. B.19.

### B.4.2 Ortogonalidade dos campos $\mathbf{grad} \phi$ e $\mathbf{rot} \mathbf{A}$

Como etapa preliminar à demonstração da unicidade da decomposição mostramos ortogonalidade entre  $\mathbf{rot} \mathbf{A}$  e  $\mathbf{grad} \phi$ , expressa por:

$$\int_V \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad} \phi \, dV = 0.$$

Notando que:

$$\operatorname{div}(\phi \mathbf{rot} \mathbf{A}) = \phi \operatorname{div} \mathbf{rot} \mathbf{A} + \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad} \phi,$$

notando que  $\operatorname{div} \mathbf{rot} \mathbf{A} = 0$  e usando o teorema de Gauss obtemos, sucessivamente:

$$\int_V \operatorname{div}(\phi \mathbf{rot} \mathbf{A}) \, dV = \int_V \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad} \phi \, dV = \oint_S \phi \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dA = 0,$$

pois, por hipótese,  $\mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$ .  $\mathbf{rot} \mathbf{A}$  e  $\mathbf{grad} \phi$  são portanto dois campos ortogonais entre si.

### B.4.3 Unicidade da decomposição

Para demonstrarmos a unicidade da decomposição de Helmholtz supomos que  $\mathbf{u} = \mathbf{grad} \phi_1 + \mathbf{rot} \mathbf{A}_1 = \mathbf{grad} \phi_2 + \mathbf{rot} \mathbf{A}_2$  sejam duas decomposições distintas. Então:

$$\mathbf{grad}(\phi_1 - \phi_2) + \mathbf{rot} \mathbf{A}_1 - \mathbf{rot} \mathbf{A}_2 = 0.$$

Fazendo o produto escalar da equação acima por  $\mathbf{rot} \mathbf{A}_1 - \mathbf{rot} \mathbf{A}_2$  obtemos:

$$\int_V \{ ||\mathbf{rot} \mathbf{A}_1 - \mathbf{rot} \mathbf{A}_2||^2 + (\mathbf{rot} \mathbf{A}_1 - \mathbf{rot} \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{grad}(\phi_1 - \phi_2) \} \, dV = 0.$$

Como  $\mathbf{rot} \mathbf{A}_1 - \mathbf{rot} \mathbf{A}_2$  e  $\mathbf{grad}(\phi_1 - \phi_2)$  são ortogonais o produto escalar dos dois campos se anula e temos então que:

$$\int_V ||\mathbf{rot} \mathbf{A}_1 - \mathbf{rot} \mathbf{A}_2||^2 \, dV = 0,$$

o que implica em  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$  e, consequentemente, em  $\phi_1 = \phi_2$ , o que demonstra a unicidade da decomposição de Helmholtz.

## B.5 Aplicação ao Método de Elementos Finitos – O Método da Projeção

O teorema de Helmholtz é base do Método da Projeção<sup>1</sup>[16], usado na resolução dos sistemas algébricos lineares que resultam das discretizações espacial e temporal das equações da hidrodinâmica. Simplificadamente, podem-se dividir os métodos de resolução de sistema linear em duas classes:

---

<sup>1</sup>Esta seção é baseada na dissertação de mestrado do Dr. Gustavo Rabello dos Anjos (2007)[16], defendida no Programa Pós-graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais – Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação em Engenharia – COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro – 2007, a quem os autores agradecem a cessão do texto.

1. Métodos acoplados;
2. Métodos desacoplados;

Os métodos acoplados resolvem o sistema completo de forma direta a cada passo de tempo. No entanto, resolver as equações de Navier-Stokes com viscosidade variável e transporte de espécie química torna tal procedimento oneroso devido ao forte acoplamento entre velocidade e pressão e suas fortes não-linearidades particulares vindas dos termos convectivos. Como exemplo, pode-se citar o escoamento simples de um fluido em 3 dimensões. Para este caso, são necessárias três equações de movimento e uma equação de conservação de massa, todas acopladas, chegando ao total de quatro equações. Usando elementos finitos e uma malha de quatrocentos nós (malha pouco refinada) calcula-se, a cada passo de tempo, mil e seiscentas equações. Para problemas que envolvem outras variantes, como variação na viscosidade e transporte de espécie química, o custo computacional se torna ainda mais elevado. É neste contexto que se enquadra o presente trabalho, e para diminuir tais custos, o uso de métodos desacoplados se torna necessário.

Os métodos desacoplados separam as dependências internas das equações possibilitando uma resolução sequencial do problema sem que haja a necessidade de se resolver todo o sistema a cada ciclo computacional. Diversos são os métodos capazes de realizar tal operação, dentre eles, o método da projeção vem sendo largamente utilizado. Tal método foi introduzido por Chorin (1968)[11], seguido por muitos outros autores, tais como Patankar (1980)[53] com o método SIMPLE e Harlow & Welch (1965)[29] com o método MAC. O método da projeção pode ser aplicado de diversas maneiras, dando origem a métodos contínuos, semi-discretos e discretos.

### B.5.1 Método da Projeção

O método da projeção parte do prescrito pelo teorema de Helmholtz (Sec B.4) que mostra que qualquer campo vetorial pode ser decomposto na soma do gradiente de um campo escalar como rotacional de um potencial vetorial  $\mathbf{A}$ .

Para entender a teoria do método da projeção é necessário interpretar as equações de Navier-Stokes como projeções. Para simplificar, considera-se as equações na forma conservativa em todo o domínio  $\Omega$  e considere ainda viscosidade  $\mu$  e a massa específica  $\rho$  constantes:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (B.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (B.25)$$

Assim, escreve-se (B.24) como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \mathbf{S}(\mathbf{v}) \quad \text{onde} \quad \mathbf{S}(\mathbf{v}) = \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} - \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) \quad (B.26)$$

$\mathbf{S}(\mathbf{u})$  não tem, em geral, divergência e rotacional nulos. Observe ainda que:

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (B.27)$$

$$\nabla \times \nabla p = 0 \quad (B.28)$$

A Eq. (B.26), segundo Chorin (1968)[11], pode ser interpretada utilizando-se a Eq. (B.17), o vetor  $\mathbf{S}(\mathbf{v})$  é conhecido e pode ser projetado em ambos os subespaços de divergência nula ( $\partial\mathbf{v}/\partial t$ ) e rotacional nulo ( $\nabla p$ ), ou seja:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{P}[\mathbf{S}(\mathbf{v})] \quad \nabla p = \mathbf{Q}[\mathbf{S}(\mathbf{v})], \quad (\text{B.29})$$

onde  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  são operadores de projeção, que satisfazem as seguintes propriedades:

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \quad \mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q} \quad \mathbf{P}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{P} = 0. \quad (\text{B.30})$$

Dado um vetor qualquer  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{P}$  projeta este vetor no espaço nulo do operador divergente e  $\mathbf{Q}$  o projeta no espaço nulo do operador rotacional, isto é:

$$\nabla \cdot \mathbf{P}[\mathbf{u}] = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega \quad (\text{B.31})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{Q}[\mathbf{u}] = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega. \quad (\text{B.32})$$

Comparando as Eqs. (B.27 e B.29), obtém-se, para os operadores de projeção:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \nabla(\nabla^2)^{-1}(\nabla) \quad (\text{B.33})$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P} \quad (\text{B.34})$$

Para as equações de Navier-Stokes, esses operadores possibilitam o desacoplamento entre aceleração e pressão. Segundo Gresho [24], enquanto pressão e aceleração podem ser calculados sequencialmente, pressão e velocidade não podem ser desacoplados, pois estão fortemente acoplados em escoamentos incompressíveis. Ao desacoplar velocidade e pressão, uma correção da pressão desacoplada é recomendável para trabalhar com o campo de velocidade de forma adequada.

### B.5.2 Método da Projeção Contínuo

O método da projeção contínuo procura fazer o desacoplamento entre as variáveis ainda na forma contínua do problema, ou seja, antes de serem discretizadas no espaço e no tempo. O primeiro passo do método de projeção consiste em resolver a aproximação:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{v}}) - \nabla \tilde{p}, \quad (\text{B.35})$$

onde  $\tilde{p}$  é uma aproximação da pressão, vinda das condições iniciais ou do passo anterior no algoritmo. Em geral  $\tilde{p} \neq p$ , por isso a velocidade intermediária  $\tilde{\mathbf{v}}$  resultante não é solenoidal, desta forma  $\tilde{\mathbf{v}}$  pode ser projetada no subespaço de divergência nula utilizando o operador  $P$ . Assim uma projeção solenoidal pode ser aproximada pela projeção:

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{P}[\tilde{\mathbf{v}}], \quad (\text{B.36})$$

que pode ser tomada como aproximação da solução real. Entretanto há dificuldades em aplicar o operador  $P$  diretamente pois  $\nabla^2$  só pode ser invertido através de uma função de Green [34]. Para evitar a operação de inversão do operador  $\nabla^2$ , outra aproximação é tomada:

levando-se em conta a Eq.  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d + \nabla \varrho$ , o passo de projeção pode ser feito utilizando-se seguinte decomposição:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}_d + \nabla \varrho \quad \text{com} \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_d = 0, \quad (\text{B.37})$$

$\varrho$  é o multiplicador de *Lagrange* associado com a projeção da solução intermediária  $\tilde{\mathbf{v}}$  no subespaço de dois vetores de divergência nula ( $\mathbf{v}_d$ ) e rotacional nulo ( $\nabla \varrho$ ). Como  $\nabla \times \nabla \varrho = 0$ , então  $\nabla \times \tilde{\mathbf{v}} = \nabla \times \mathbf{v}_d$ . Analisando a Eq. (B.37), pode-se resolver  $\mathbf{v}_d$  e  $\varrho$  através de dois passos:

1. Aplicando-se o operador divergente em (Eq. B.37), pode-se encontrar  $\varrho$  através da equação de *Poisson* resultante:

$$\nabla^2 \varrho = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad (\text{B.38})$$

2. Conhecendo  $\varrho$ , calcula-se  $\mathbf{v}_d$  diretamente de B.37 na forma:

$$\mathbf{v}_d = \tilde{\mathbf{v}} - \nabla \varrho \quad (\text{B.39})$$

### B.5.3 Método de Passo Fracionário

Este método parte das equações de Navier-Stokes já discretizadas no tempo. A idéia do método é aproximar as equações da continuidade calculando uma velocidade tentativa  $\tilde{\mathbf{v}}$ , utilizando a equação de conservação de quantidade de movimento sem o termo de pressão, em seguida projeta-se a velocidade tentativa no espaço de funções discretas de divergência nula.

$$\frac{\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_d^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} + \nabla \cdot [\nu(\nabla \mathbf{v}^{n+1} + \nabla(\mathbf{v}^{n+1})^T)] \quad (\text{B.40})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0 \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1}. \quad (\text{B.42})$$

A pressão em (Eq. B.42) é encontrada aplicando-se o operador divergente e utilizando (Eq. B.41). Este procedimento resulta na equação de *Poisson* para a pressão dada por:

$$\nabla \cdot \nabla p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}. \quad (\text{B.43})$$

Para a solução das Eqs. (B.40 e B.43), a imposição de condições de contorno se torna necessária, tanto para a velocidade  $\tilde{\mathbf{v}}$  quanto para pressão  $p$ .

### B.5.4 Método da Projeção Discreto

O método da projeção discreto baseado em decomposição *LU* é obtido através de fatoração em blocos do sistema linear resultante. Isto implica que a separação (ou *split*) entre

velocidade e pressão é feita depois da discretização no espaço e no tempo das equações de governo:

$$M\left(\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t}\right) + \frac{1}{Re} K \mathbf{v}^{n+1} - G p^{n+1} = 0 \quad (\text{B.44})$$

$$D \mathbf{v}^{n+1} = 0 \quad (\text{B.45})$$

$$M\left(\frac{c_i^{n+1} - c_d^n}{\Delta t}\right) + \frac{1}{ReSc} K c^{n+1} = 0. \quad (\text{B.46})$$

A Eq. (B.46) pode ser resolvida separadamente, no entanto, as Eqs. (B.44 e B.45) formam um sistema de equações que pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} B & -\Delta t G \\ D & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bc_1 \\ bc_2 \end{bmatrix} a, \quad (\text{B.47})$$

onde agora o sistema é escrito apenas para as incógnitas do problema, ou seja,  $\mathbf{v}^{n+1} = [u_1^{n+1}, \dots, u_{Nu}^{n+1}, v_1^{n+1}, \dots, v_{Nv}^{n+1}, w_1^{n+1}, \dots, w_{Nw}^{n+1}]^T$ ,  $p^{n+1} = [p_1^{n+1}, \dots, p_{Np}^{n+1}]^T$ , sendo  $Nu$ ,  $Nv$ ,  $Nw$  e  $Np$  o número de incógnitas (nós livres) para velocidade na direção  $x$ , velocidade na direção  $y$ , velocidade na direção  $z$  e pressão respectivamente. A notação para as matrizes e vetores foi mantida a mesma por simplicidade. A matriz  $\mathbf{B}$  é dada por:

$$B = M + \frac{\Delta t}{Re} K \quad (\text{B.48})$$

e o lado direito representa as grandezas conhecidas no tempo  $n$ ,

$$r^n = -\Delta t v_d^n + M v^n, \quad (\text{B.49})$$

mais as condições de contorno que nada mais são do que as contribuições dos valores conhecidos de velocidade e pressão no lado direito do sistema.

O método da projeção baseado em fatoração LU visa decompor a matriz do sistema (Eq. B.47) através de uma fatoração por blocos. Em [40] são apresentadas várias formas de se fatorar esta matriz, cada forma dando origem a uma família de métodos diferentes. Utilizando uma fatoração canônica *LU* por blocos, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ D & \Delta t \mathbf{D} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\Delta t \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{G} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{bc}_1 \\ \mathbf{bc}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.50})$$

O sistema apresentado em (Eq. B.50), se resolvido, dá origem ao método de *Uzawa* [10]. Porém sua solução é cara computacionalmente devido à inversão da matriz  $\mathbf{B}$  a cada iteração. Para contornar esse problema foi utilizado um processo de aproximação conhecido por *lumping* [10]. Duas aproximações foram testadas, a primeira aproximou a matriz  $M$  por uma matriz de massa diagonal  $\mathbf{M}_L^{-1}$  enquanto que a segunda aproximou a matriz  $\mathbf{B}$  na matriz  $\mathbf{B}_L^{-1}$ , também diagonal. Na primeira aproximação, algumas oscilações foram encontradas nos campos de velocidade para número de *Reynolds* baixo. Já na segunda os resultados não apresentaram oscilações. É importante mencionar que, segundo [10], diferentes aproximações para as matrizes  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_2$  podem ser feitas, porém, para satisfazer exatamente a equação de conservação da massa, é necessário que  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$  e assim todo o erro cometido

no desacoplamento aparece somente na equação de quantidade de movimento. Resolve-se o sistema desacoplado (Eq. B.50) da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{D} & \Delta t \mathbf{D} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{bc}_1 \\ \mathbf{bc}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.51})$$

$$\mathbf{B} \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{r}^n + \mathbf{bc}_1 \quad (\text{B.52})$$

$$\Delta t \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{G} p^{n+1} = -\mathbf{D} \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{bc}_2 \quad (\text{B.53})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\Delta t \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{G} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.54})$$

$$(\text{B.55})$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \tilde{\mathbf{v}} + \Delta t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{G} p^{n+1} \quad (\text{B.56})$$

Este procedimento é semelhante ao procedimento apresentado no Método de Passo Fracionário, porém não há necessidade de imposição das condições de contorno para a velocidade tentativa e pressão.

## B.6 Problemas

- Demonstrar as seguintes identidades vetoriais, onde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  são vetores:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} &= \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \mathbf{B}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] - \mathbf{A}[\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] \\ &= \mathbf{C}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})] - \mathbf{D}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \end{aligned}$$

- Demonstrar as seguintes identidades vetoriais, onde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores,  $\phi$ ,  $f$ ,  $g$  e  $\rho$

são funções escalares e  $S$ , um tensor de segunda ordem:

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\text{grad } \phi) &= 0 \\
\text{div}(\text{rot } \mathbf{v}) &= 0 \\
\text{div}(f \text{grad } g - g \text{grad } f) &= f \nabla^2 g - g \nabla^2 f \\
\text{rot}(\text{rot } \mathbf{v}) &= \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v} \\
\text{div}(\rho \mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho + \rho \text{div } \mathbf{v} \\
\text{div}[(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v}] &= \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v}^T + \mathbf{v} \cdot (\nabla \text{div } \mathbf{v}) \\
\nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v}^T &= \text{div}[(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} - (\text{div } \mathbf{v}) \mathbf{v}] + (\text{div } \mathbf{v})^2 \\
\text{div}(\phi S \mathbf{v}) &= (\text{grad } \phi) S \mathbf{v} + \phi (\text{div } S^T) \mathbf{v} + \phi S : \text{grad}^T \mathbf{v} \\
\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B} \\
\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \text{div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \text{grad } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{grad } \mathbf{B} \\
\text{rot}(f \mathbf{A}) &= f \text{rot } \mathbf{A} + \text{grad } f \times \mathbf{A} \\
\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B}
\end{aligned}$$

3. Partindo da definição de rotacional de um vetor  $\mathbf{q}$ :

$$\text{rot } \mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{q} \times \mathbf{n} dS,$$

onde  $S$  é a superfície que delimita o volume  $V$  e  $\mathbf{n}$ , o vetor unitário perpendicular ao elemento de área local de  $S$ , mostrar que:

$$\text{rot } \mathbf{q} \times \mathbf{n} dA = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_C \mathbf{q} \cdot d\mathbf{l},$$

onde  $A$  é uma superfície plana cuja normal é  $\mathbf{n}_A$  e  $d\mathbf{l}$ , um elemento da curva de contorno que delimita  $A$ .

4. Mostrar que:

$$\oint_S \phi \text{grad } \phi \times \mathbf{n} dA = 0.$$

Sugestão: escrever o termo  $\phi \text{grad } \phi$ , sob a forma  $\text{grad } \phi^2/2$  e utilizar o resultado da proposição à Pág. 349 (Eq. B.23).

5. Mostrar que  $\epsilon_{ikl}\epsilon_{jkl} = 2\delta_{ij}$ .
6. Um tensor  $\mathcal{T}$ , de elementos  $T_{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_q \dots i_n}$ , é anti-simétrico se  $T_{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_q \dots i_n} = -T_{i_1 i_2 \dots i_q \dots i_p \dots i_n}$ . Mostrar que um tensor qualquer pode ser decomposto na soma de um simétrico com um anti-simétrico.
7. Mostrar que o produto  $T_{ij}S_{ij} = 0$  se  $T_{ij}$  for o elemento geral de um tensor simétrico e  $S_{ij}$ , o de um tensor anti-simétrico.
8. O operador  $\partial^2/\partial x_i \partial x_j$  é simétrico ou anti-simétrico?

9. Seja o vetor  $\mathbf{w} = \mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{n})$ , onde  $\mathbf{v}$  é um vetor arbitrário e  $\mathbf{n}$ , um vetor unitário. Em que direção  $\mathbf{w}$  aponta e qual é sua magnitude?
10. Seja os vetores  $\mathbf{u} = (3; 2; -7)$ ,  $\mathbf{v} = (4; 1; 2)$  e  $\mathbf{w} = (6; 4; -5)$ . Os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são perpendiculares entre si? Qual é a magnitude de  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ ? Qual o ângulo entre esses dois vetores? Qual é a projeção de  $\mathbf{u}$  na direção de  $\mathbf{w}$ ?
11. Seja um ponto  $P$ , de coordenadas  $(x_1 = 5; x_2 = 4; x_3 = 0)$ . Quais são as coordenadas de  $P$  em um referencial girado em torno do eixo  $x_3$  de  $20^\circ$  no sentido anti-horário (eixo  $x_1$  girado na direção de  $x_2$ )?



# Apêndice C

## Elementos de Análise Complexa

### C.1 Números complexos

Definimos um número complexo como uma matriz de dimensões  $2 \times 2$ , da forma:

$$z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

onde  $a$  e  $b$  são dois números reais. A soma e a multiplicação de dois números complexos se faz conforme as regras habituais de soma e de multiplicação de matrizes. Se  $X$  e  $Y$  forem dois números complexos, então  $Z = X + Y$  é o número complexo cujos elementos são dados por  $z_{ij} = x_{ij} + y_{ij}$  e  $Z = XY$ , o complexo cujos elementos são  $z_{ij} = x_{ik} y_{kj}$ .

Um número complexo pode ser decomposto na forma:

$$z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Os dois termos da última expressão das igualdades acima denominam-se como parte real e imaginária, respectivamente, do complexo  $z$ :

$$z = \Re(z) + \Im(z) \quad (\text{C.3})$$

Podemos ainda associar a parte real de  $z$  ao número real  $a$ , pois se  $z_1$  e  $z_2$  forem dois números complexos com parte imaginária nula, temos:

$$z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \iff a_1 + a_2$$

e:

$$z_1 z_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & a_1 a_2 \end{pmatrix} \iff a_1 a_2$$

A matriz que compõe a parte imaginária de um número complexo, conforme última expressão da Eq. C.2 tem a propriedade de:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \iff -1$$

Denominamos a matriz do lado esquerdo da igualdade acima de imaginário puro e a associamos ao número  $i$ , que tem a propriedade de  $i^2 = -1$ . Associamos então:

$$z = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \iff a + ib$$

Um número complexo pode ser escrito em forma polar, definindo-se  $R = (a^2 + b^2)^{1/2}$ ,  $\cos \varphi = a/R$  e  $\sin \varphi = b/R$ :

$$z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Temos então:

$$z = R \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 \\ 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} 0 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

e associamos:

$$z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi) = R \exp(i\varphi)$$

onde  $\varphi = \arg(z) = \arctan b/a$ . A multiplicação de dois números complexos se faz portanto na forma:

$$z_1 z_2 = R_1 \exp(i\varphi_1) R_2 \exp(i\varphi_2) = R_1 R_2 \exp[i(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

## C.2 Funções de Variáveis Complexas – Derivadas

Funções complexas, de variáveis complexas, associam a um número complexo  $z = x + iy$ , outro,  $w = \xi + i\eta$ , através da relação:

$$w = f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$$

onde  $u(x; y)$  e  $v(x; y)$  são duas funções reais da variável complexa  $z = x + iy$ . Funções complexas associam pontos  $z$  de coordenadas  $(x; y)$  de um plano complexo a pontos  $(\xi; \eta)$ , de outro plano. Por associar pontos de um plano aos de outro, não se pode construir gráficos com curvas ou superfícies do valor da variável dependente  $w$  como no caso de funções reais de uma ou de duas variáveis. Mas pode-se determinar a imagem de regiões do plano  $z$  no plano  $w$ , ou de curvas do plano  $z$  no plano  $w$ .

O limite de uma função complexa  $f(z)$  é  $u_0 + iv_0$  se e somente se:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x; y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x; y) = v_0$$

A derivada de uma função complexa é definida como:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{C.4}$$

Se a função  $f$  for diferenciável, é necessariamente contínua. Adicionalmente, exige-se que o valor de  $f'(z_0)$  seja o mesmo, qualquer que seja a maneira como  $\Delta z \rightarrow 0$ , isso é, se, por exemplo, a parte imaginária de  $\Delta z$  for igual a zero e apenas a parte real variar, ou vice-versa.

Funções complexas cuja derivada  $f'(z_0)$  existe no ponto e em qualquer ponto de uma vizinhança de  $z_0$  denominam-se de *funções analíticas*.

### C.2.1 As condições de Cauchy-Riemann

A derivada de uma função complexa, existindo, é dada por:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = a + ib$$

Este limite deve ser sempre o mesmo, independentemente da forma como  $\Delta x$  e  $\Delta y$  tendem a zero. Em particular se  $\Delta y = 0$  e  $\Delta z = \Delta x$ , têm-se que:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x; y) - u(x; y)}{\Delta x} &= a \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} i \frac{v(x + \Delta x; y) - v(x; y)}{\Delta x} &= ib \end{aligned}$$

Donde conclui-se que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b$$

De maneira análoga, se  $\Delta x = 0$  e  $\Delta z = i\Delta y$ , têm-se que:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x; y + \Delta y) - u(x; y)}{i\Delta y} &= ib \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} i \frac{v(x; y + \Delta y) - v(x; y)}{i\Delta y} &= a \end{aligned}$$

Donde conclui-se que:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -b \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a$$

Do raciocínio acima vê-se que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{C.5}$$

Em coordenadas polares:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \tag{C.6}$$

As Eqs. C.5 e C.6 denominam-se *condições de Cauchy-Riemann*.

Adicionalmente, temos que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

e:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

isso é,  $\nabla^2 u = 0$  e  $\nabla^2 v = 0$ . Ambas as funções  $u$  e  $v$  satisfazem à equação de Laplace. Portanto:

$$\nabla^2 f = 0$$

### C.2.2 Transformações conformes

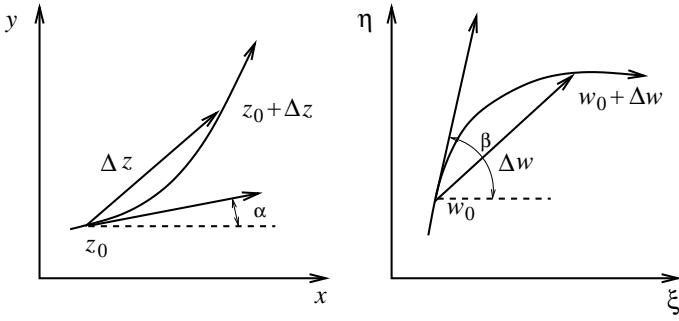


Figura C.1: Transformações conformes

a transformação  $w = f(z)$ . Sendo a curva  $C$  orientada em um dos sentidos, a curva  $S$  também o será. Consideraremos um ponto  $z_0 + \Delta z$  à frente do ponto  $z$ , sobre a curva  $C$  (ver Fig. C.1). Temos que:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg(\Delta z) = \alpha$$

O ângulo  $\alpha$  é a inclinação da curva  $C$  no ponto  $z_0$ . De forma análoga:

$$\lim_{\Delta w \rightarrow 0} \arg(\Delta w) = \beta \quad \text{e:} \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \arg[f'(z_0)] = \gamma$$

o ângulo  $\beta$  é a inclinação da curva  $S$  no ponto  $w_0$ . Como  $\Delta w \approx \Delta z$  ( $\Delta w / \Delta z$ ), temos que:

$$\arg(\Delta w) = \arg(\Delta z) + \arg\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)$$

Quando  $\Delta z \rightarrow 0$ , temos:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg(\Delta w) = \beta = \alpha + \arg[f'(z_0)] \quad \longrightarrow \quad \beta = \alpha + \gamma$$

Portanto, a transformação  $f(z)$  muda o ângulo  $\alpha$  de inclinação da tangente a uma curva  $C$ , no ponto  $z_0$  do plano para  $\beta = \alpha + \gamma$ , no plano  $(\xi; \eta)$ . O ângulo  $\gamma$  só depende da função  $f(z)$  e não, da curva escolhida em particular. O ângulo é bem definido desde que  $f'(z_0) \neq 0$ . Os pontos em que essa derivada é igual a zero denominam-se *pontos críticos* de  $f(z)$ . Portanto, excetuando-se os pontos críticos da transformação, a tangente a cada curva que passa pelo ponto  $z_0$  é giradas do mesmo ângulo  $\gamma$ , sob a mesma. Em particular, duas curvas perpendiculares entre si no ponto  $z_0$  têm como imagem duas curvas perpendiculares entre si no ponto  $w_0$ . A transformação preserva o ângulo entre as curvas em cada ponto, embora a forma das mesmas se altere. Transformações que preservam o ângulo entre as curvas denominam-se *transformações conformes*. Conclui-se que, sendo  $w = f(z)$  uma função analítica nos pontos  $z$  de um domínio e  $f'(z) \neq 0$ , a transformação  $f$  é conforme.

Em geral, um curva  $C \in \mathcal{C}$  é uma função complexa dependente de um parâmetro  $t$ , da forma:

$$z(t) = x(t) + i y(t), \quad \text{com: } a \leq t \leq b.$$

Examinemos a mudança de direção de uma curva no ponto  $z_0 = (x_0; y_0)$  do plano complexo  $(x; y)$ , sob efeito da transformação  $w = f(z)$ , quando a função  $f$  é analítica no ponto  $z_0$  e  $f'(z_0) \neq 0$ . A imagem de um arco suave no plano  $(x; y)$  é um arco suave no plano  $w = \xi + \eta i$ , pois  $f$  é analítica. Seja  $C$  uma curva suave que passa pelo ponto  $z_0$  do plano  $(x; y)$  e  $S$ , sua imagem no plano  $w$ , sob

O vetor tangente à curva é dado pela função complexa  $\dot{z} = \dot{x}(t) + i \dot{y}(t)$ , onde o ponto sobre as variáveis indica derivação em relação ao parâmetro  $t$ .

**Exemplo:** A curva:

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad \text{com: } 0 \leq t \leq 2\pi$$

parametriza a circunferência de raio  $|r| = 1$  no plano complexo. O vetor complexo tangente à curva,  $\dot{z} = i e^{it} = i z$  é obtido girando-se  $z$  de  $90^\circ$ . Sejam duas curvas  $C_1$  e  $C_2$  no plano complexo. Se  $\theta_1$  e  $\theta_2$  forem, respectivamente, a inclinação da tangente às curvas, o ângulo  $\theta$  entre as duas tangentes é dado por:

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 = \arg(\dot{z}_2) - \arg(\dot{z}_1) = \arg\left(\frac{\dot{z}_1}{\dot{z}_2}\right).$$

Transformações conformes apresentam as seguintes importantes propriedades:

1. Seja uma curva  $C$ , dada por  $z = z(t)$  e outra curva  $C'$ , imagem de  $C$  sob ação de uma transformação  $w = f(z(t)) = \xi + i\eta$ . A tangente à curva  $C$  é dada por  $\dot{z}(t)$ . A tangente à curva  $C'$  é obtida pela aplicação da regra da cadeia:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dt}, \quad \text{ou: } \dot{w} = f'(z) \dot{z}(t).$$

A transformação age sobre o vetor  $\dot{z}$ , tangente a  $C$ , multiplicando-o pelo número complexo  $f'(z)$ . Sendo  $f'z \neq 0$   $\dot{w} \neq 0$  e a imagem  $C'$  é suave;

2. Têm-se também que:

$$|\dot{w}| = |f'(z) \dot{z}(t)| = |f'(z)| |\dot{z}(t)|. \quad (\text{C.7})$$

O módulo da velocidade é multiplicado pelo fator  $\rho = |f'(z)|$  ao se passar ao plano  $w$  sob ação da transformação  $w = f(z)$ . O fator de amplificação depende do ponto e da transformação mas não, da curva particular. A velocidade – qualquer que seja, de uma partícula passando por um ponto  $z$ , é sempre amplificada pelo mesmo fator  $\rho$ .

De maneira análoga, o ângulo que a imagem  $C'$  da curva  $C$  faz com a horizontal é dado por:

$$\arg \dot{w} = \arg [f'(z) \dot{z}] = \arg f'(z) + \arg \dot{z}.$$

A tangente a cada curva passando por um dado ponto é girada do mesmo ângulo  $\gamma = \arg f'(z)$ . O ângulo entre as curvas é preservado, respeitando a conformidade da transformação, exceto onde  $f'(z) = 0$ .

3. **Teorema:** (Teorema de Riemann) Seja  $\mathcal{D}$  um domínio aberto simplesmente conexo, contido no plano complexo  $w$  e não contendo todo o plano complexo. Existe uma transformação conforme biunívoca,  $f = f(w)$ , com  $f'(w) \neq 0$  para todo  $w \in \mathcal{D}$  que associa os pontos de  $\mathcal{D}$  aos pontos do domínio  $D = \{|z| < 1\}$ .



## Apêndice D

# Elementos de Termodinâmica Clássica

Esse apêndice revisa alguns conceitos da termodinâmica clássica, tais como as definições de entalpia e dos calores específicos de um gás a volume e a pressão constantes. Revisa também uma das equações mais importantes da termodinâmica que é re-escrita em forma mais conveniente para que possa ser aplicada à mecânica dos fluidos.

O estado de um gás perfeito é descrito pela equação:

$$pV = n\mathcal{R}T$$

onde  $p$  é a pressão absoluta,  $V$ , o volume ocupado,  $\mathcal{R}$ , a constante universal dos gases e  $T$ , a temperatura absoluta e  $n$ , o número de moles do gás. A equação pode ser re-escrita como:

$$pV = \frac{m}{M}\mathcal{R}T \quad \rightarrow \quad p\frac{V}{m} = \frac{\mathcal{R}}{M}T \quad \rightarrow \quad pv = RT$$

onde  $R$  é a constante do gás considerado e  $v$ , seu volume específico.

É comum escrevermos a equação dos gases perfeitos utilizando a densidade  $\rho = 1/v$  como variável. Neste caso a equação toma a forma:

$$\frac{p}{\rho} = RT.$$

Duas outras variáveis utilizadas na termodinâmica são a energia interna  $E$  e a entalpia  $H$ . Essas variáveis são do tipo *extensivas*, isso é, proporcionais à massa do sistema considerado e podem ser tornadas *intensivas* ou *específicas*, isso é, independentes da massa, dividindo-se o valor das mesmas pela massa do sistema. Denotam-se a energia e a entalpia específicas, respectivamente, por  $e$  e  $h$ . No caso de substâncias simples, isso é, que dependem de apenas duas variáveis independentes (como por exemplo a temperatura e a pressão), costuma-se representar a energia interna das mesmas por  $e$ .

A energia interna de um gás perfeito só depende da temperatura, isso é,  $u = u(T)$ . neste caso a entalpia é dada por:

$$h = e + pv = e + RT$$

o que mostra que, igualmente, a entalpia só depende da temperatura.

Os calores específicos a volume constante e a pressão constante são definidos por:

$$C_v = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_v \quad \text{e} \quad C_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

O calor específico a volume constante de um gás perfeito só depende da temperatura. Mostramos a seguir, que neste caso, o calor específico a pressão constante também só depende da temperatura:

$$C_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{\partial}{\partial T} (e + pv) \right)_p = \left( \frac{\partial}{\partial T} (e + RT) \right)_p = \frac{de}{dT} + R = C_v + R$$

o que mostra também que  $C_p - C_v = R$ .

No caso de substâncias simples, a seguinte relação é válida, para a entropia específica da mesma:

$$T ds = de + p dv \longrightarrow ds = \frac{de}{T} + \frac{p}{T} dv$$

Levando em consideração que, no caso de um gás perfeito,  $de = C_v dT$  e que  $p/T = R/v$ , re-escrevemos a última equação na forma:

$$ds = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}.$$

Essa equação pode ser integrada entre dois estados 1 e 2, dando como resultado:

$$s_2 - s_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1}.$$

No caso de processos isoentrópicos  $s_2 = s_1$ . Lembrando que  $C_p - C_v = R$  e que  $C_p/C_v = \gamma$ , temos:

$$\begin{aligned} C_v \ln \frac{T_2}{T_1} &= -R \ln \frac{v_2}{v_1} \\ \ln \frac{T_2}{T_1} &= -\frac{R}{C_v} \ln \frac{v_2}{v_1} = -\frac{C_p - C_v}{C_v} \ln \frac{v_2}{v_1} = -(\gamma - 1) \ln \frac{v_1}{v_2}. \end{aligned}$$

Donde:

$$T v^{\gamma-1} = C^{te}.$$

Considerando que  $T = pv/R$ , re-escrevemos a última equação:

$$\frac{pv}{R} v^{\gamma-1} = \frac{pv^\gamma}{R} = C^{te} \longrightarrow pv^\gamma = C^{te} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = C^{te}.$$

A relação  $T ds = de + p dv$  pode ser re-escrita, levando-se em conta que  $d(pv) = p dv + v dp$ , o que implica em que  $p dv = d(pv) - v dp$ :

$$T ds = de + p dv = de + d(pv) - v dp = d(u + pv) - v dp$$

e portanto:

$$\begin{aligned} T ds &= dh - v dp && \text{ou} \\ T ds &= dh - \frac{dp}{\rho} \end{aligned} \quad (D.1)$$

As quantidades  $ds$ ,  $dh$  e  $dp$  podem ser expressas como:

$$ds = \mathbf{grad} s \cdot d\mathbf{x} \quad dh = \mathbf{grad} h \cdot d\mathbf{x} \quad dp = \mathbf{grad} p \cdot d\mathbf{x}$$

onde  $d\mathbf{x} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$ . Levando em consideração as expressões acima re-escrevemos a Eq.(D.1) na forma:

$$T \mathbf{grad} s \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{grad} h \cdot d\mathbf{x} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p \cdot d\mathbf{x}$$

Donde conclui-se que:

$$T \mathbf{grad} s = \mathbf{grad} h - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p$$



# **Lista de Tabelas**

2.1	Formas da equação da continuidade . . . . .	14
2.2	Mudança de coordenadas das componentes da velocidade . . . . .	15
3.1	Formas da equação da quantidade de movimento . . . . .	34
3.2	O tensor de tensões de fluidos newtonianos . . . . .	38
3.3	Viscosidade de alguns fluidos a 20°C . . . . .	43
3.4	Formas da equação de Navier-Stokes – fluidos incompressíveis . . . . .	44
3.5	Coeficientes de perda de carga de acessórios de tubulação - I . . . . .	55
3.6	Coeficientes de perda de carga de acessórios de tubulação - II . . . . .	56
7.1	Análise dimensional em canais convergentes ou divergentes . . . . .	200
A.1	Grandezas que intervém na lei que rege o arraste de um corpo . . . . .	315
A.2	Matriz dimensional do problema de arraste de um corpo . . . . .	316



# Listas de Figuras

1.1	Força agindo sobre uma mola . . . . .	5
1.2	Campo de velocidades na proximidade de uma placa plana . . . . .	5
1.3	Fluxo de calor em um elemento de fluido . . . . .	6
2.1	Volume de controle ao qual se aplica o princípio de conservação da massa . .	11
2.2	Volume de fluido cruzando um elemento da superfície de controle . . . . .	12
2.3	Sistema de coordenadas cilíndricas . . . . .	14
2.4	Tubo de corrente . . . . .	16
2.5	Vazão através de uma curva ligando duas linhas de corrente . . . . .	16
2.6	Cálculo da vazão através de uma curva ligando duas linhas de corrente . .	18
3.1	Volume de controle – conservação da quantidade de movimento . . . . .	25
3.2	Forças e tensões agindo sobre um elemento de fluido . . . . .	28
3.3	O tetraedro de Cauchy . . . . .	28
3.4	Deformação de um elemento de fluido . . . . .	36
3.5	O círculo de Mohr . . . . .	40
3.6	deformação de um sólido sujeito a carregamento externo . . . . .	41
3.7	A equação de Bernoulli . . . . .	47
3.8	Elevação da superfície livre de um vórtice . . . . .	50
3.9	Aplicação da Eq. de Bernoulli a um campo rotacional . . . . .	50
3.10	Esquema de composição da carga hidráulica de uma tubulação . . . . .	52
3.11	O diagrama de Moody . . . . .	54
3.12	Circulação em torno de uma massa de fluido que se desloca . . . . .	59
3.13	Produção e dissipação de vorticidade . . . . .	60
3.14	Força atuando em um sistema massa-mola . . . . .	63
3.15	Esquema de forças atuando em um pêndulo . . . . .	64
3.16	Caos em sistemas discretos – mapa logístico . . . . .	66
3.17	O Deslocamento de Bernoulli . . . . .	68

4.1	Volume de controle ao qual se aplica o princípio de conservação da energia . . . . .	81
5.1	Esquema de um bocal convergente-divergente . . . . .	103
5.2	Distribuição do Número de Mach, pressões e temperaturas em um bocal . . . . .	109
5.3	Escoamento através de uma onda de choque . . . . .	113
5.4	Aumento de massa específica em uma onda de choque . . . . .	114
5.5	Escoamento em um canal variável, com superfície livre . . . . .	117
6.1	Características de um escoamento potencial compressível 2D . . . . .	130
6.2	Escoamento incidente sobre um aerofólio . . . . .	130
6.3	Circulação sobre um aerofólio . . . . .	131
6.4	Circulação sobre um aerofólio e o teorema de Stokes . . . . .	131
6.5	Vórtice de partida . . . . .	132
6.6	Fonte, sumidouro e vórtice potencial . . . . .	135
6.7	Escoamento bi-dimensional potencial com $F = z^n$ . . . . .	138
6.8	Escoamento potencial incidente sobre uma fonte . . . . .	139
6.9	Par fonte-sumidouro não justaposto . . . . .	141
6.10	Escoamento incidente sobre um cilindro com circulação especificada . . . . .	142
6.11	O teorema de Kutta-Joukowski . . . . .	145
6.12	A transformação de Kutta-Joukowski . . . . .	148
6.13	Campo hidrodinâmico em torno de uma elipse . . . . .	150
6.14	A hipótese de Kutta . . . . .	152
6.15	Linhas de corrente e equipotenciais em torno de perfis de Kutta-Joukowski .	153
6.16	Distribuição da pressão dinâmica sobre dois perfis de Kutta-Joukowski . . .	155
7.1	Escoamento de Stokes em torno de uma esfera . . . . .	162
7.2	Campo de pressões em torno de uma esfera . . . . .	166
7.3	Escoamento laminar lâmina de fluido sobre uma placa plana inclinada . . . .	168
7.4	Convecção de Bénard . . . . .	172
7.5	Escoamento de Couette entre duas placas planas horizontais . . . . .	173
7.6	Perfis de $dT/dy$ e de temperatura no escoamento de Couette . . . . .	174
7.7	Escoamento laminar forçado entre duas placas horizontais . . . . .	175
7.8	Escoamento entre duas placas paralelas sob fluxo de calor constante . . . .	177
7.9	Balanço de energia em uma seção de canal sob fluxo de calor constante . . .	179
7.10	Campo de velocidades sobre uma placa plana semi-infinita . . . . .	185

7.11	Calculo da constante da expressão da vorticidade no problema de Rayleigh . . . . .	186
7.12	Campo de velocidades na proximidade do eixo de um disco rotatório . . . . .	193
7.13	Perfis de velocidade próximo ao eixo de um disco rotatório . . . . .	195
7.14	Campo de velocidades entre dois discos rotatórios . . . . .	196
7.15	Perfis de velocidade desenvolvidos entre dois discos corrotatórios . . . . .	197
7.16	Perfis de velocidade entre um disco rotatório e outro parado, ou contra rotatório	199
7.17	Escoamento em canais convergentes - polinômio característico . . . . .	206
7.18	Zoologia dos perfis de velocidade em canais convergentes . . . . .	207
7.19	Zoologia dos perfis de velocidade em canais divergentes – I . . . . .	209
7.20	Zoologia dos perfis de velocidade em canais divergentes – II . . . . .	210
8.1	Integração numérica da Eq. de Blasius . . . . .	236
8.2	Escoamento sobre diedros e cunhas . . . . .	238
8.3	Escoamento na iminência de descolar . . . . .	238
8.4	Controle do descolamento de camadas-limite . . . . .	239
8.5	Comparação entre ajustes e dados de soluções de perfis de Falkner-Skan. . . .	244
8.6	Comparação entre ajustes e dados de soluções de perfis de Falkner-Skan. . .	245
9.1	Intermitênciam de flutuação de uma estrutura turbulenta . . . . .	261
9.2	Distribuição $\kappa - \varepsilon$ e transferência de energia em uma estrutura turbulenta .	262
9.3	Decaimento de correlações em estruturas turbulentas . . . . .	263
9.4	Velocidade, produção e dissipação de energia próximo à parede . . . . .	270
10.1	Campo de temperaturas em um sólido com fontes internas de calor . . . . .	277
10.2	Condução de calor em um cilindro de paredes finas . . . . .	278
10.3	Campo de temperaturas em um sólido com convecção em uma das paredes .	279
10.4	Condução bi-dimensional permanente em uma placa plana . . . . .	281
10.5	Distribuição inicial de temperaturas em um sólido uni-dimensional . . . . .	286
10.6	Campo de temperaturas em um sólido bi-dimensional de geometria arbitrária	288
10.7	Campo de temperaturas em um sólido bi-dimensional simétrico . . . . .	290
10.8	Esquema de uma torre de resfriamento do tipo <i>contra-corrente</i> . . . . .	302
10.9	Esquema de um trocador de calor do tipo <i>casco e tubos</i> . . . . .	302
10.10	Esquema de um trocador de calor a <i>placas</i> . . . . .	303
10.11	Diagrama de temperaturas de trocadores de calor . . . . .	304
B.1	Fluxo de calor através das paredes de um elemento de fluido . . . . .	337

B.2	Resultante das forças de superfície atuando sobre uma partícula . . . . .	340
B.3	Volume de controle ao qual se aplica o teorema de Gauss . . . . .	340
B.4	Variação da componente $v_y$ na direção $x$ e de $v_x$ na direção $y$ . . . . .	341
C.1	Transformações conformes . . . . .	362

# Referências Bibliográficas

- [1] J. D. Anderson Jr. *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill, New York, 1991.
- [2] G. K Batchelor. Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flows. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 4:29–41, 1951.
- [3] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Mechanics*. Cambridge, 1994.
- [4] P. Bergé, Y. Pomeau, and C. Vidal. *Order Within Chaos*. Wiley, Paris, 1984.
- [5] R. B. Bird, W. E. Stweart, and E. N. Lightfoot. *Transport Phenomena*. Wiley, New York, 1960.
- [6] Otto Blumenthal and E. Trefftz. Pressure distribution on Joukowski wings. Technical Report 336, National Advisory Comittee for Aeronautics, 1925.
- [7] J. H. Bollman and J. G. Kreer. The application of thermistors to control networks. *Proc. of the Inst. of Radio Engineers*, 38:20–26, 1950.
- [8] T. Cebeci and J. Cousteix. *Modeling and Computation of Boundary-Layer Flows*. Springer, Berlin, 2005. ISBN 3-540-24459-X.
- [9] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover, New York, 1961.
- [10] W. Chang, F. Giraldo, and B. Perot. Analysis of an exact fractional step method. *Journal of Computational Physics*, 2002.
- [11] A. J. Chorin. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*, 22:745–762, 1968.
- [12] Crane Co. Flow of fluids through valves, fittings & pipe – metric version. Technical report TP-410, Crane Co., Lacey, WA, USA, 2006. ISBN-13 978-1400527137.
- [13] Alberto Luiz Coimbra. *Mecânica dos Meios Contínuos*. Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1967.
- [14] P. Coullet and J.. Tresser. Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation. *J. Phys. (Paris) Coll.*, 39:C5–C25, 1978.
- [15] Davi Vaz de Andrade Ferreira. Estudo do campo hidrodinâmico entre dois discos rotatórios. Master's thesis, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação em Engenharia COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013.

- [16] Gustavo Rabello dos Anjos. Solução do campo hidrodinâmico em células eletroquímicas pelo método de elementos finitos. Master's thesis, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação em Engenharia COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.
- [17] Gustavo Rabello dos Anjos. *A 3D ALE Finite Element Method For Two-Phase Flows with Phase Change*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Switzerland, 2012.
- [18] Mohamed Gad el Hak. Stokes' hypothesis for a Newtonian, isotropic fluid. *J. Fluids Eng.*, 117-1:3–5, 1995.
- [19] M. J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, 19:25, 1978.
- [20] R. W. Fox, A. T. McDonald, and P. J. Pritchard. *Inrtodução à Mecânica dos Fluidos*. LTC, Rio de Janeiro, 2006. ISBN-10: 8521614683.
- [21] G. Gauthier, P. Gondret, and F. Moisy. Instabilities in the flow between co and counter-rotating disks. *J. Fluid. Mech.*, 473:1–21, 2002.
- [22] G. H. Geiger and D. R. Poirier. *Transport Phenomena in Metallurgy*. Addison-Wesley, New York, 1973.
- [23] L. Glass and M. C. Mackey. *From Clocks to Chaos*. Princeton, New Jersey, 1988.
- [24] P. Gresho. On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix. part 1: Theory. *International Journal of Numerical Method in Fluids*, 11:587–620, 1990.
- [25] D. Gross and T. Seelig. *Fracture Mechanics*. Springer, Berlin, 2006.
- [26] Y. F. Gui and W. B. Dou. A rigorous and completed statement on Helmholtz theorem. *Progress in Electromagnetic Research, PIER*, 69:287–304, 2007.
- [27] H. Haken. *Synergetics – An Introduction*. Springer–Verlag, Berlin, 1983.
- [28] H. Haken. *Advanced Synergetics*. Springer–Verlag, Berlin, 1993.
- [29] F H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *The Physic of Fluids*, 8(1):2182–2189, 1965.
- [30] M. W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, San Diego, California, 1974.
- [31] M. Holdniok, Kubíček M., and V. Hlaváček. Computation of the flow between two rotating coaxial disks. *J. Fluid Mech.*, 81:698–699, 1977.
- [32] M. Holdniok, Kubíček M., and V. Hlaváček. Computation of the flow between two between two rotating coaxial disks: multiplicity of steady-state solutions. *J. Fluid Mech.*, 108:227–240, 1981.

- [33] F. P. Incropera and D. P. De Witt. *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1998.
- [34] J. A. Jankowski. *A Non-Hydrostatic Model for Free Surface Flows*. PhD thesis, Universität Hannover, Hannover, 2005.
- [35] D. W. Jordan and P. Smith. *Nonlinear Ordinary Differential Equations – An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford, Oxford, UK, 2007. ISBN 978-0-19-920825-8.
- [36] W. M. Kays. *Convective Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill, New York, 1975.
- [37] F. Kreith and Mark S. Bohn. *Principles of Heat Transfer*. Wadsworth, Belmont, CA, USA, 1996. ISBN-13 978-0534954208.
- [38] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon, New York, 1959.
- [39] H. L. Langhaar. *Analyse Dimensionnelle et Théorie des Maquettes*. Dunod, Paris, 1956.
- [40] M. J. Lee, Y. B. Oh, and Y. B. Kim. Canonical fractional step methods and consistent boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 168:73–100, 2001.
- [41] V. G. Levich. *Physicochemical Hydrodynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.
- [42] A. Lichnerowicz. *Algèbre et Analyse Linéaires*. Masson et Cie., 1947.
- [43] W. H. Liepmann and A. Roshko. *Elements of Gas Dynamics*. Wiley, New York, 1957.
- [44] S. Lipschutz. *Álgebra Linear*. McGraw-Hill, São Paulo, 1972.
- [45] N. Mangiavacchi, J. Pontes, O. E. Barcia, O. E. Mattos, and B. Tribollet. Rotating disk flow stability in electrochemical cells: Effect of the transport of a chemical species. *Phys. Fluids*, 19:114109, 2007. DOI: 10.1063/1.2805844.
- [46] F. Moisy, O. Doaré, T. Passuto, O. Daube, and M. Rabaud. Experimental and numerical study of the shear layer instability between two counter-rotting disks. *J. Fluid Mech.*, 507:175–202, 2004.
- [47] G. Nicolis. *Introduction to Nonlinear Science*. Cambridge, Cambridge, 1995.
- [48] G. Nicolis and I. Prigogine. *Self Organization in Nonequilibrium Systems*. Wiley, New York, 1977.
- [49] N. Mangiavacchi. *Dynamics of a Turbulent Jet Interacting with a Free Surface*. PhD thesis, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, 1994.
- [50] P. J. Olver. Complex analysis. [http://www.math.unm.edu\\_olver\\_pd\\_cm.pdf](http://www.math.unm.edu_olver_pd_cm.pdf), 09 2012.
- [51] K. E. Oughstun. EE 141 lecture notes topic 3 – Helmholtz' Theorem. <http://www.ms.uvm.edu/~keoughst/LectureNotes141/>, 2009. School of Engineering & Mathematical Sciences, University of Vermont.

- [52] R. L. Panton. *Incompressible Flow*. Wiley, New York, 2005.
- [53] S. V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, USA, 1980.
- [54] C. E. Pearson. Numerical solutions for the time-dependent viscous flow between two rotating coaxial disks. *J. Fluid Mech.*, 21:623–633, 1965.
- [55] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in C*. Cambridge, New York, 1990.
- [56] H. Schlichting and K. Gersten. *Boundary Layer Theory*. Springer, Berlin, 1999.
- [57] H. G. Schuster. *Deterministic Chaos*. VCH, Weinheim, 1995.
- [58] A. P. Silva Freire. Turbulência e seu desenvolvimento histórico. In C. J. Deschamps and Barbosa Jr. J. R., editors, *III Escola de Primavera em Transição & Turbulência*, pages 53–82. Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.
- [59] A. P. Silva Freire, A. Ilha, and R Breidenthal. *Turbulência*, volume 5(1). ABCM, Rio de Janeiro, 2006. ISBN 978-85-85769-24-6.
- [60] A. P. Silva Freire, A. Ilha, and R Breidenthal. *Turbulência*, volume 5(2). ABCM, Rio de Janeiro, 2006. ISBN 978-85-85769-25-4.
- [61] K. Stewartson. On the flow between two rotating coaxial disks. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 49:333–341, 1953.
- [62] M. G. Velarde and C. Normand. Convection. *Sci. Am.*, 243:92–108, 1980.
- [63] F. M. White. *Mecânica dos Fluidos*. McGraw-Hill, Lisboa, 2002. ISBN: 868680424X.
- [64] P. Zandbergen and D. Dijkstra. Von Kármán swirling flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 19:465–491, 1987.