MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF) -UMA INTRODUÇÃO-

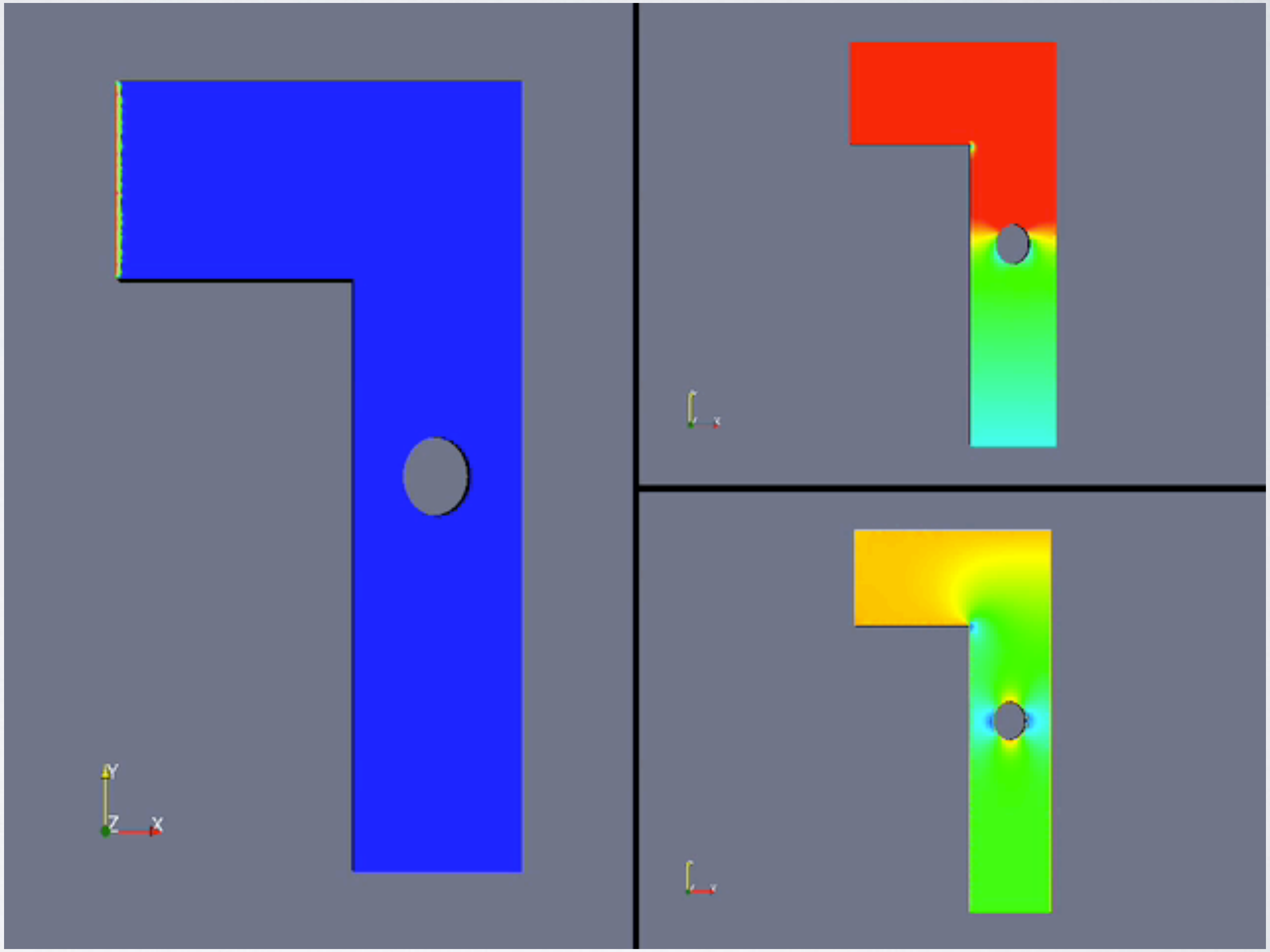
Curso de Transferência de Calor 1 - FEN03-5190

Prof. Gustavo R. Anjos gustavo.anjos@uerj.br

17 e 23 de junho de 2015

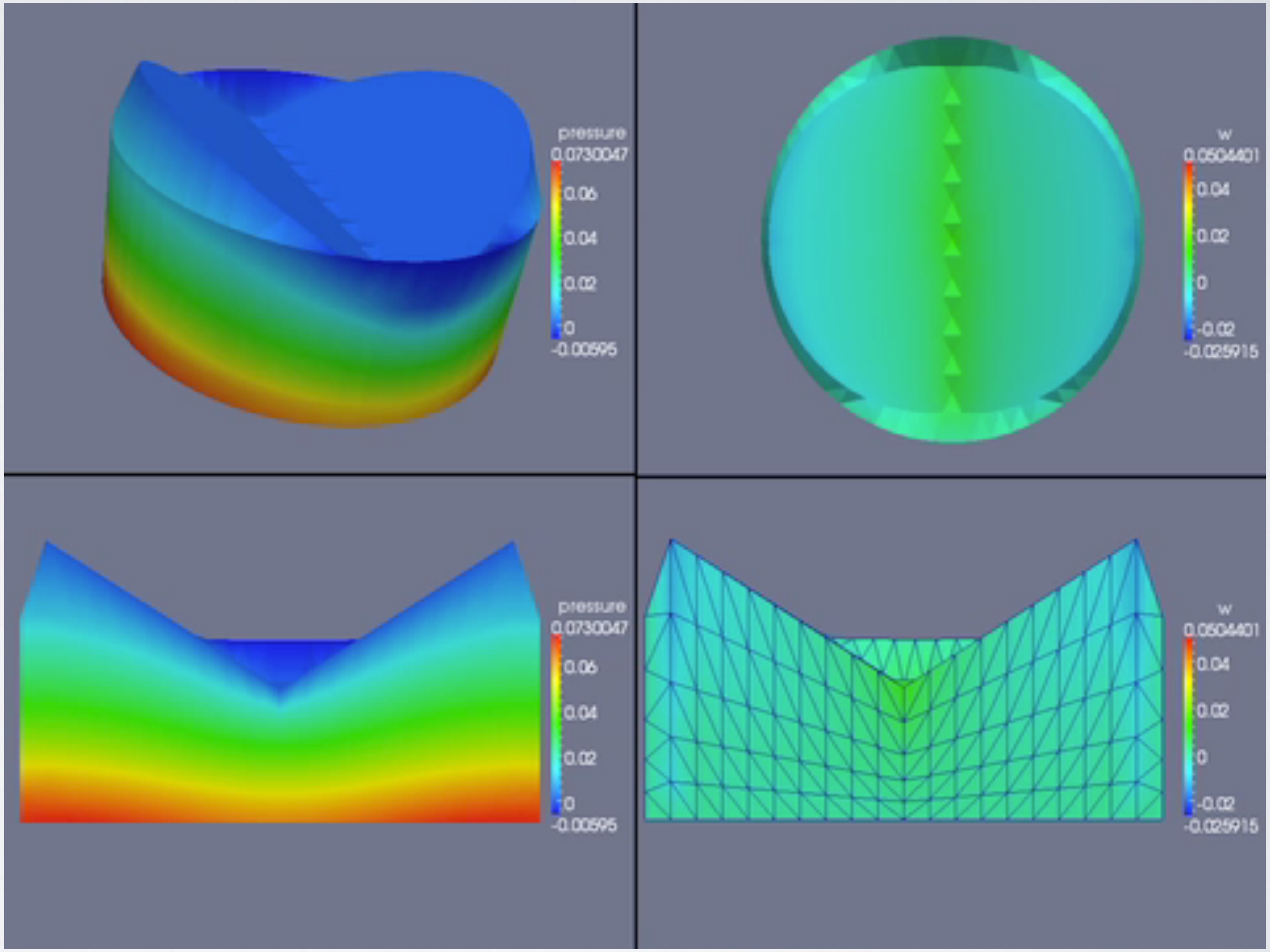
EXEMPLOS - VÍDEOS

Escoamento de fluido aquecido em canal tipo 'L' invertido com furo



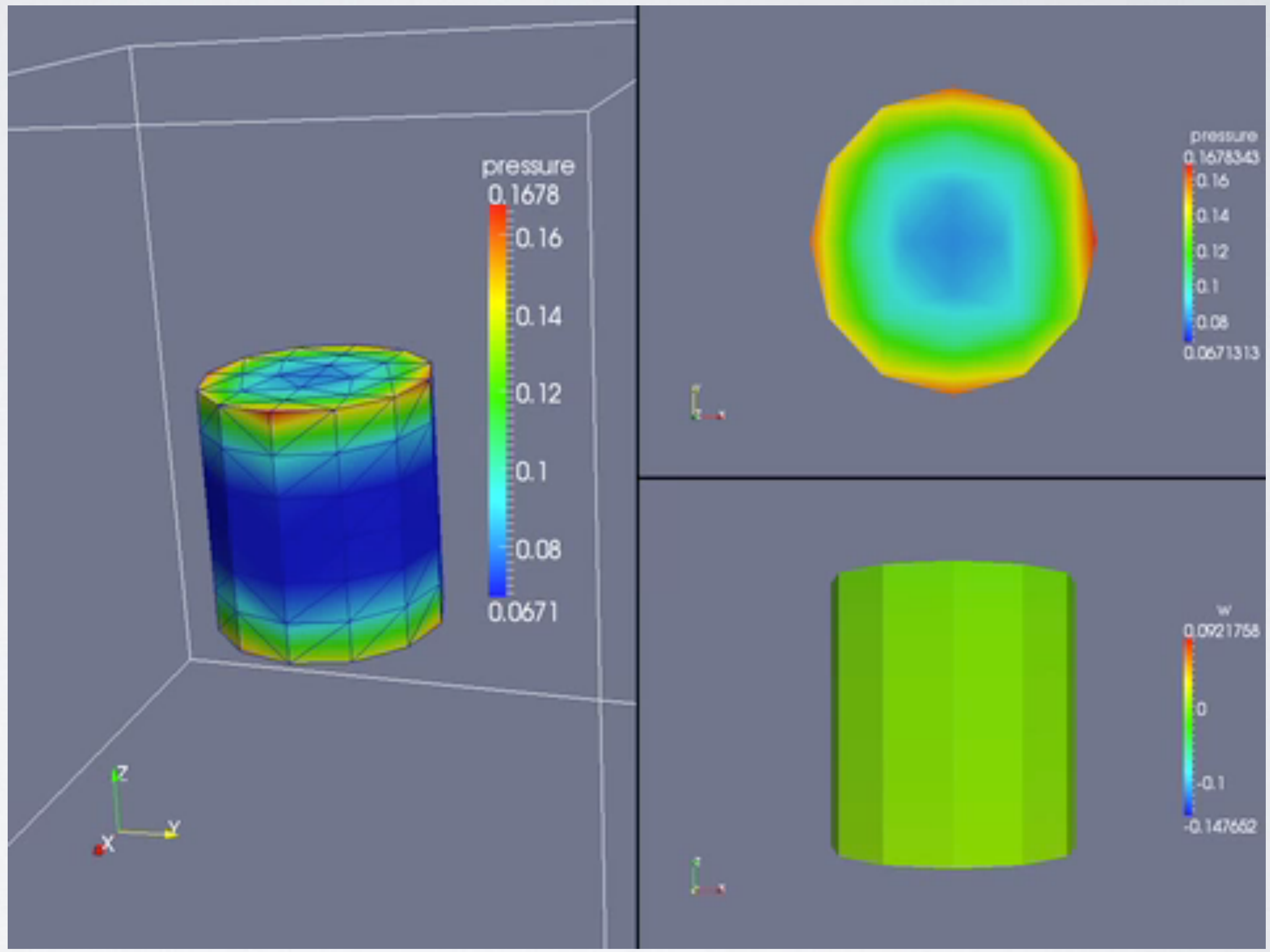
EXEMPLOS - VÍDEOS

Simulação de perturbação de onda em um copo com água



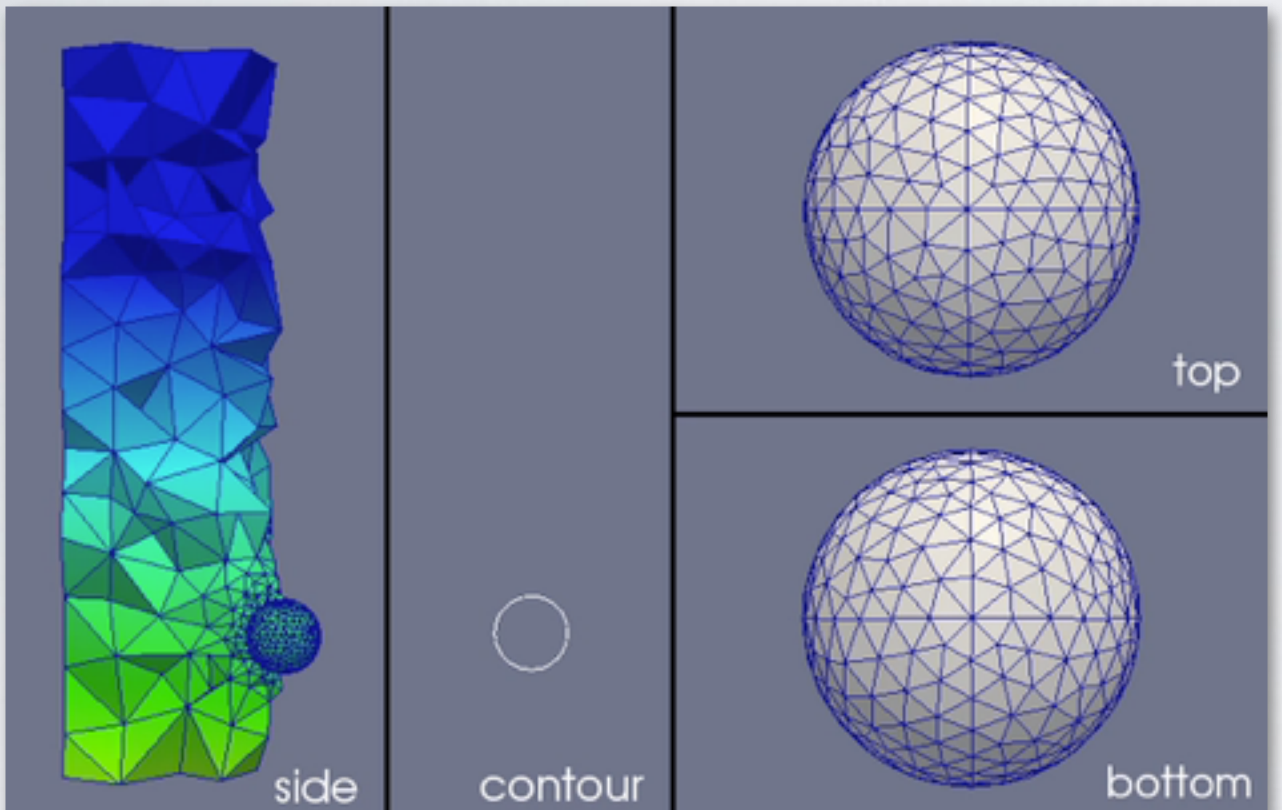
EXEMPLOS - VÍDEOS

Oscilação de uma gota, inicialmente cilíndrica, sem presença de gravidade

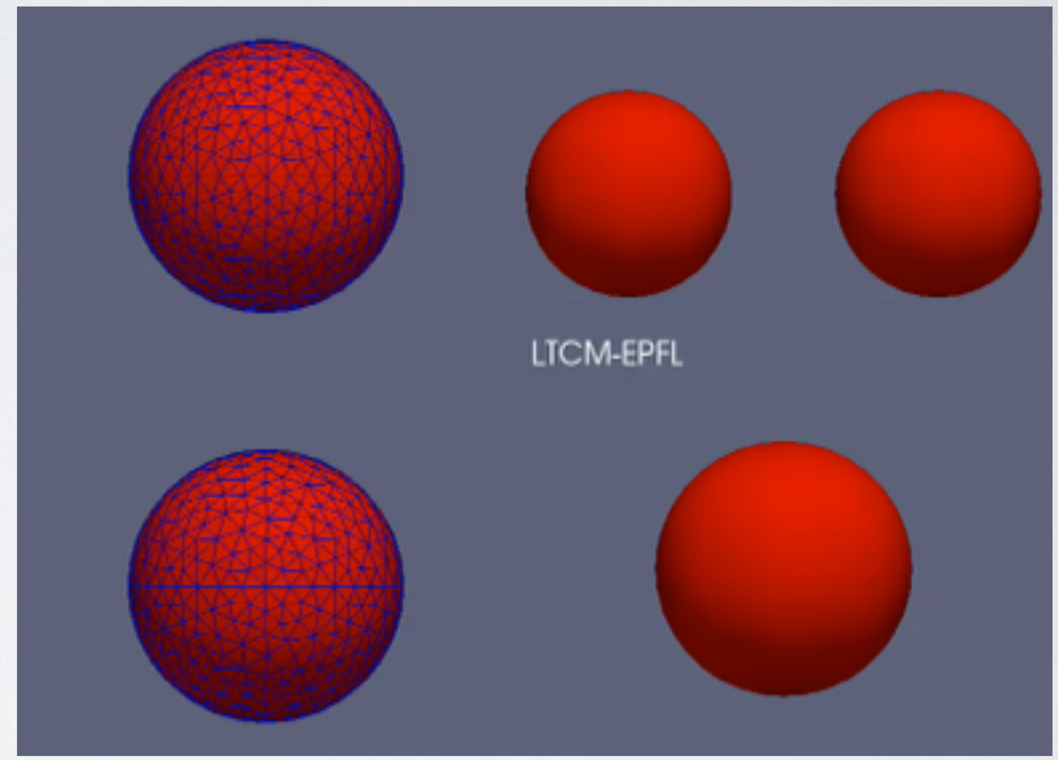


EXEMPLOS - VÍDEOS

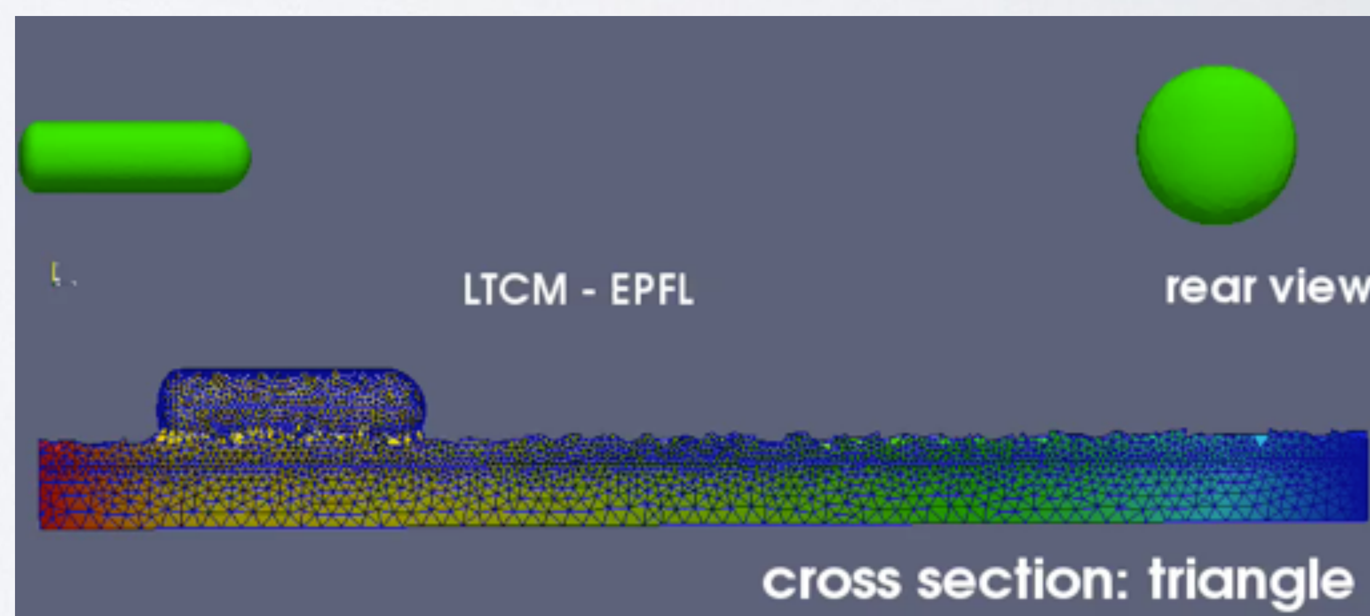
bolha em ascensão



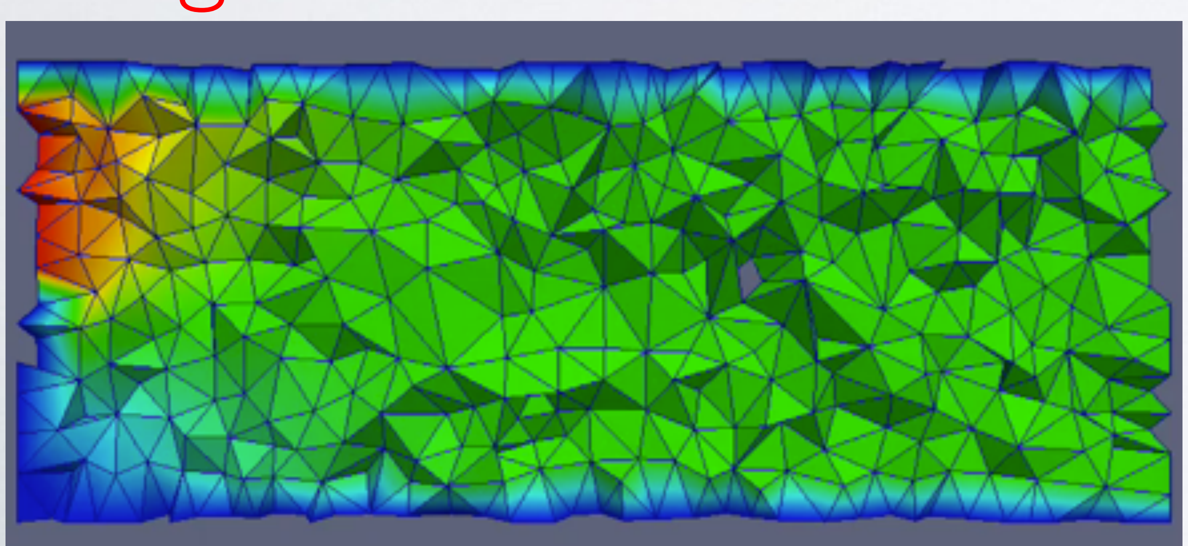
coalescência



microcanal triangular



degrau



PROGRAMA DE COMPUTADOR

- Pré-processamento:
  - definir a geometria do problema;
  - definir tipo de elemento;
  - definir as propriedades geométricas do elemento;
  - definir as conectividades do elemento;
  - definir as condições de contorno e termos fontes;

- Solução (processamento):
  - calcular os valores desconhecidos de velocidade, pressão e temperatura (leis de conservação);

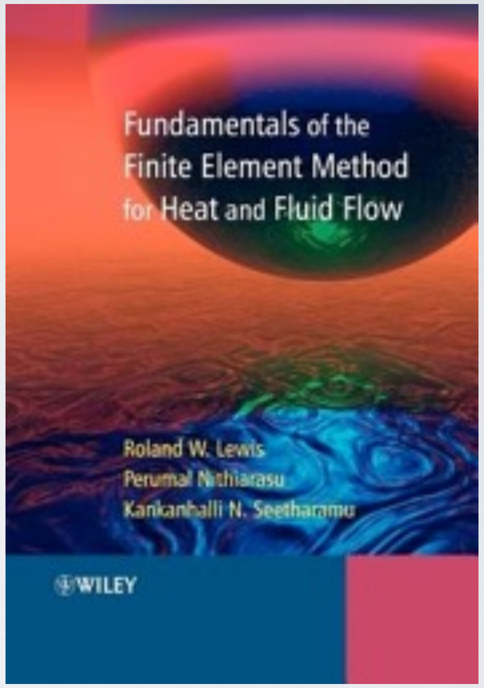
- Pós-processamento:
  - utilizar aplicativos sofisticados de visualização;

  Ex.: Paraview, Maya, Tecplot

LITERATURA

Básico

Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow
Autores: Roland W. Lewis, Perumal Nithiarasu, Kankanhally e N. Seetharamu



Avançado

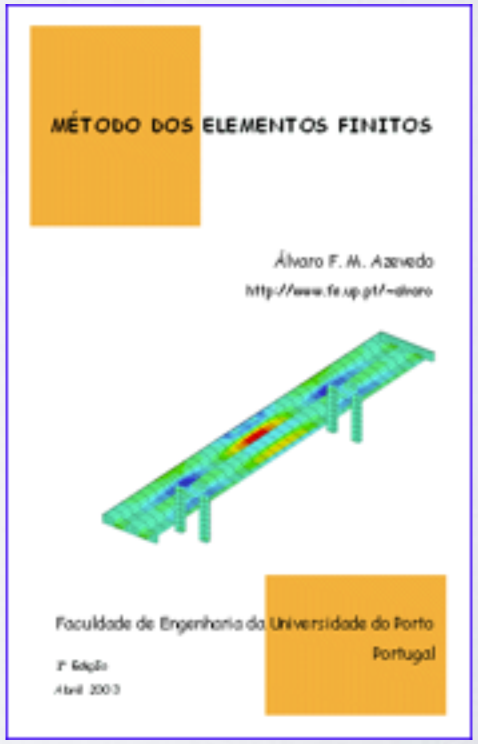
The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis
Autores: Thomas J.R. Hughues

LITERATURA

Básico - português

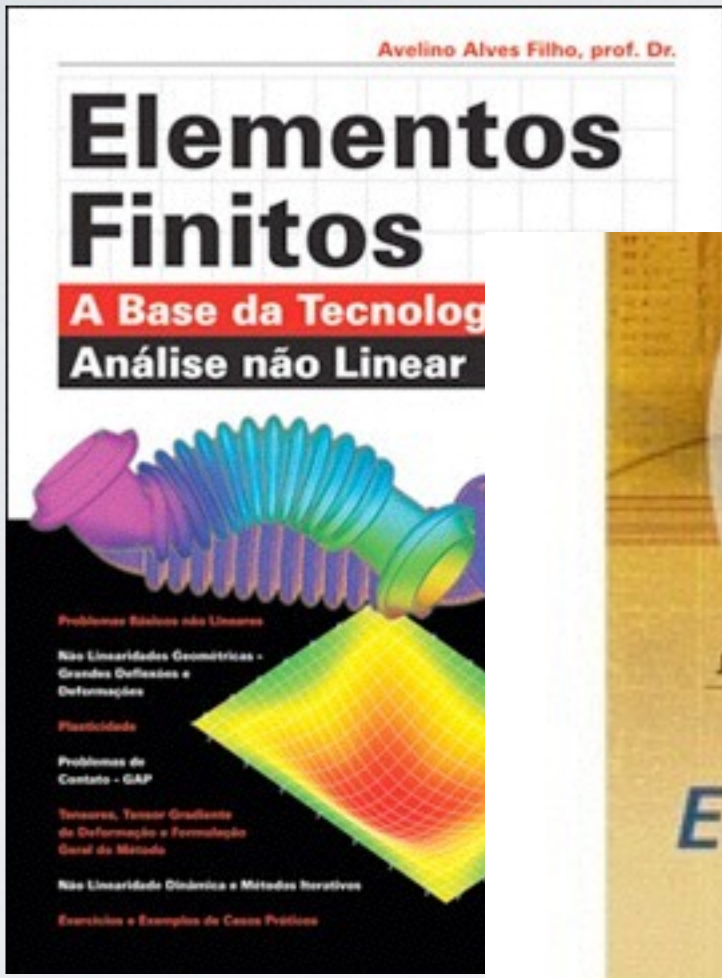
Introdução ao Método dos Elementos Finitos
- notas de aula COPPE/UFRJ -
Autor: Prof. Fernando L. B. Ribeiro

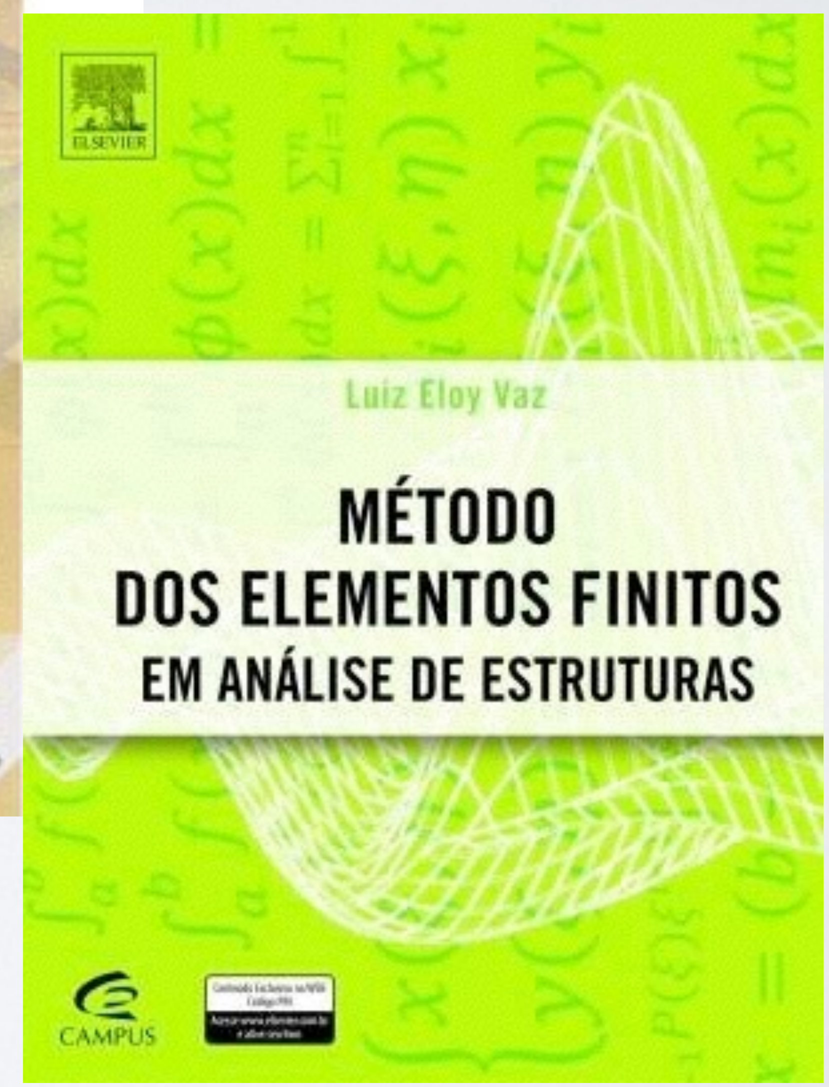
Método dos Elementos Finitos
Universidade do Porto - Portugal
Autor: Álvaro F. M. Azevedo



LITERATURA

língua portuguesa





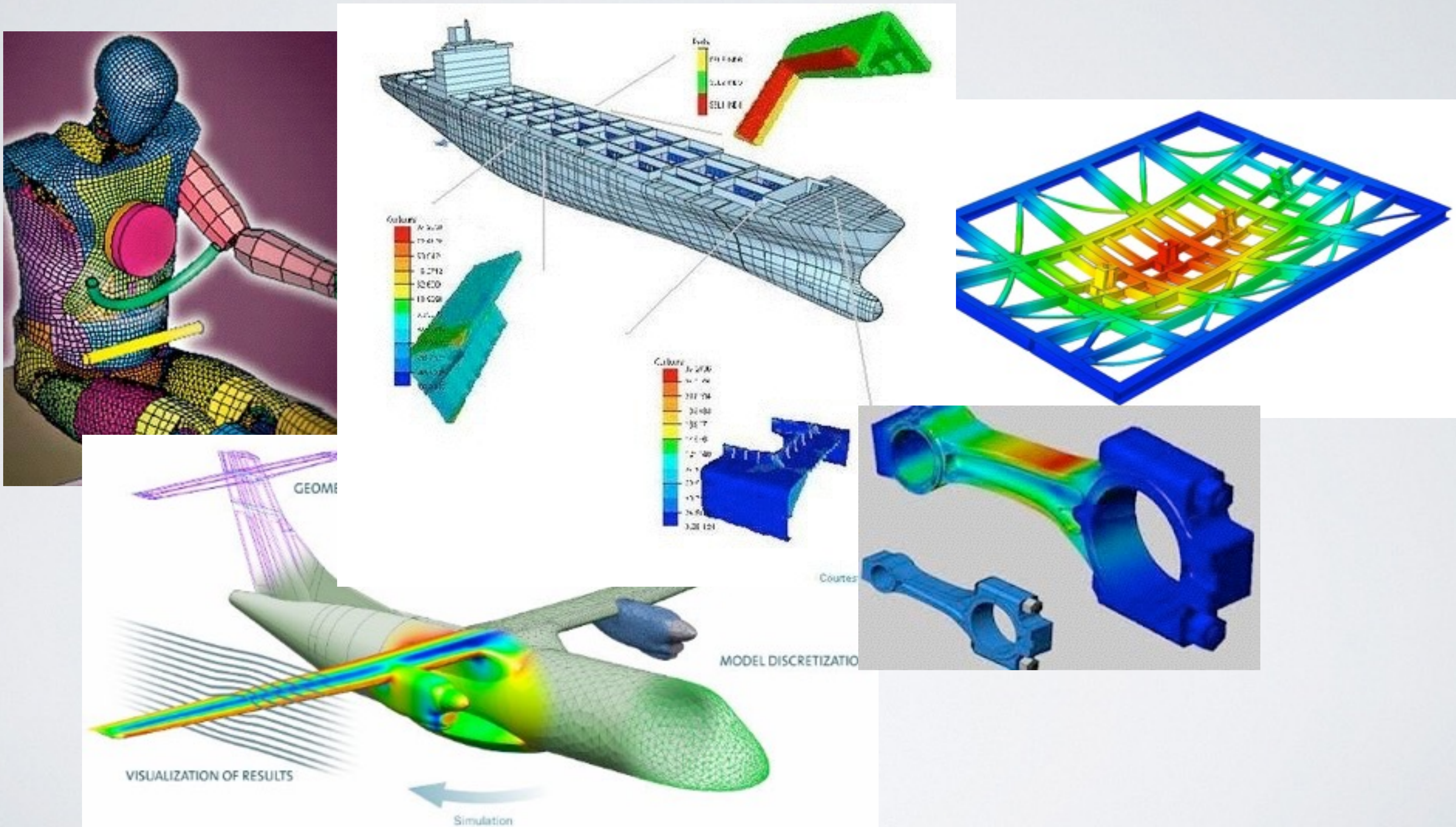
APLICAÇÕES BÁSICAS

- Engenharias Mecânica
  Aeroespacial
  Civil
  Automotiva

- Análise de tensões e estruturas Estática/Dinâmica
  Linear/não-Linear

- Escoamento de fluidos
- Transferência de calor
- Campos eletromagnéticos
- Mecânica de sólidos
- Acústica etc.

APLICAÇÕES BÁSICAS



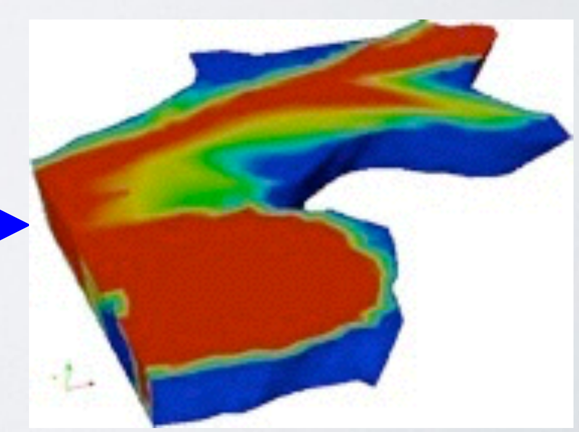
IDÉIA DO MÉTODO

- objeto complexo
(geometria complexa, discontinuidade material, geometrica arbitrária)

- análise simplificada
(geometria simples, continuidade material)

mundo real → modelo simplificado → modelo matemático → modelo discreto

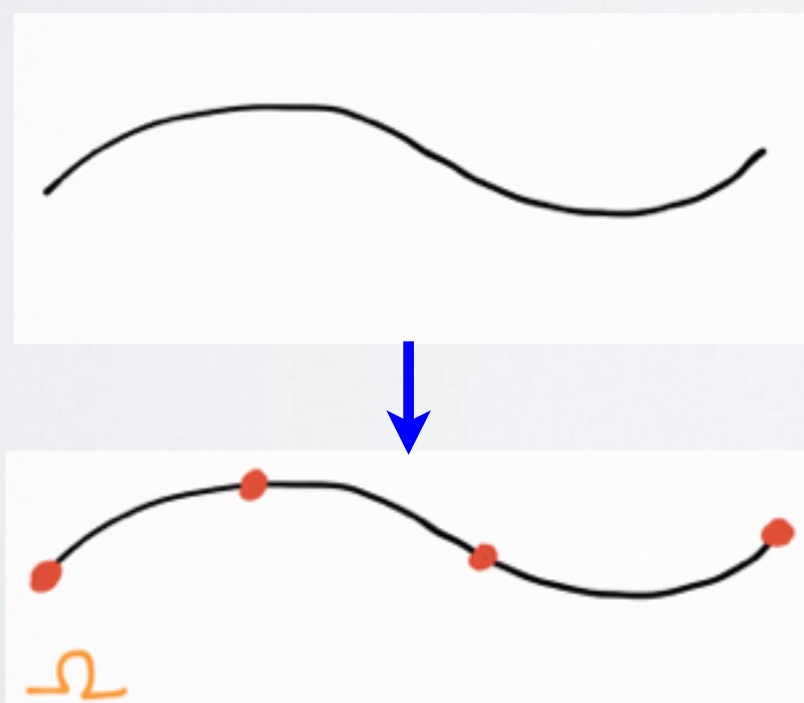
a=b+c



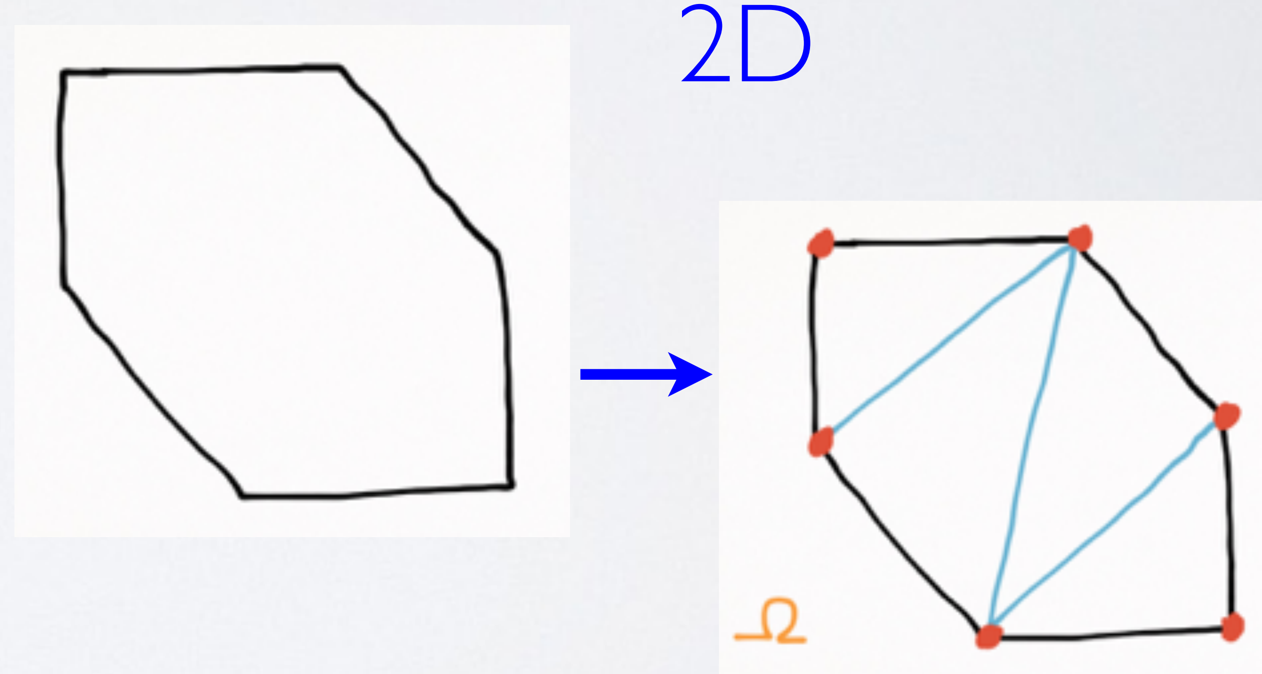
DISCRETIZAÇÃO

O modelo (ou objeto) é subdividido em vários objetos menores ou unidades (elementos finitos), que são interconectados em pontos comuns de dois ou mais elementos, através de nós ou pontos nodais e/ou linhas e/ou superfícies.

1D



2D

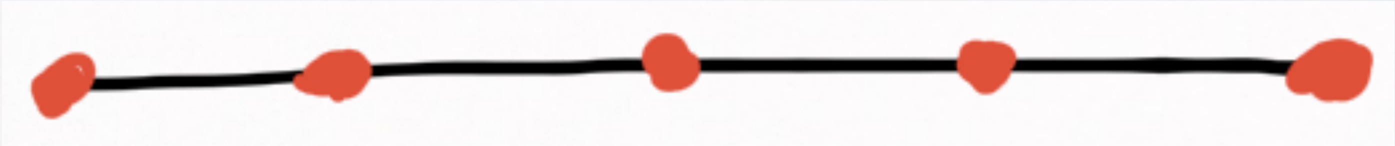


TIPOS DE ELEMENTOS

1D

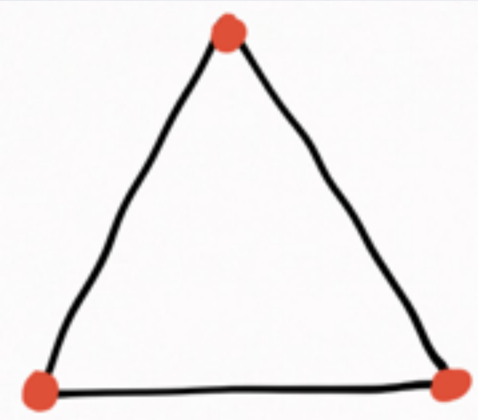
segmento de reta

malha



TIPOS DE ELEMENTOS

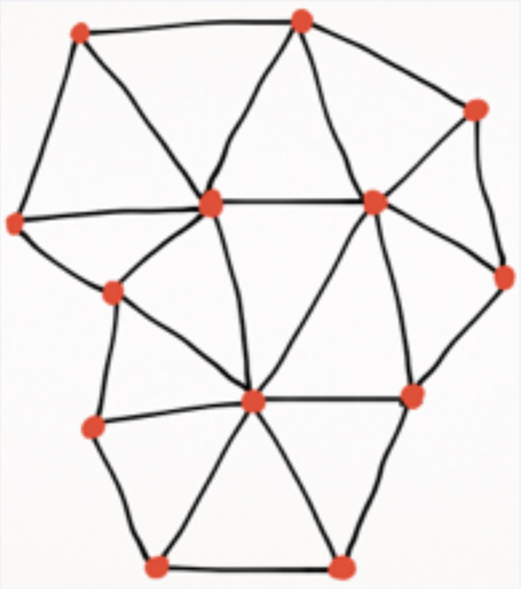
2D

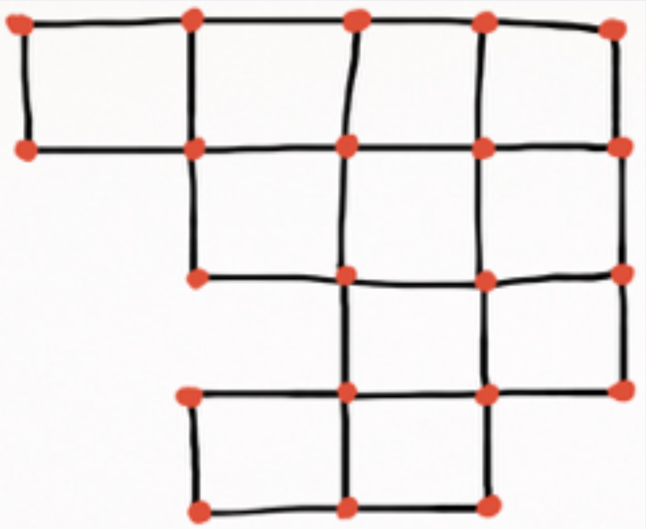


triângulo

quadrado/retângulo

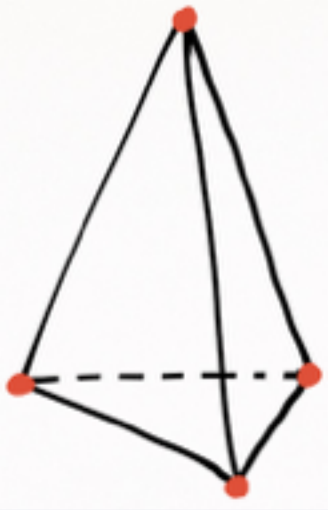
malha



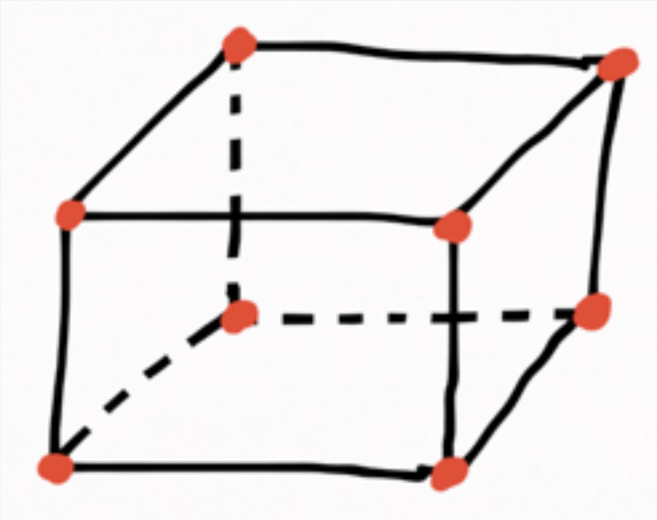


TIPOS DE ELEMENTOS

3D

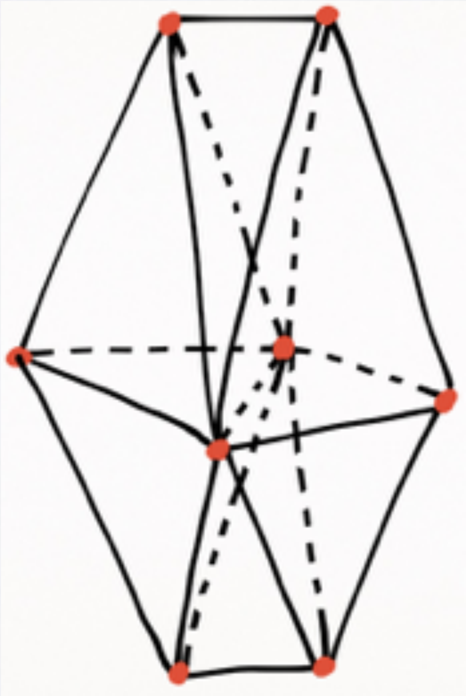


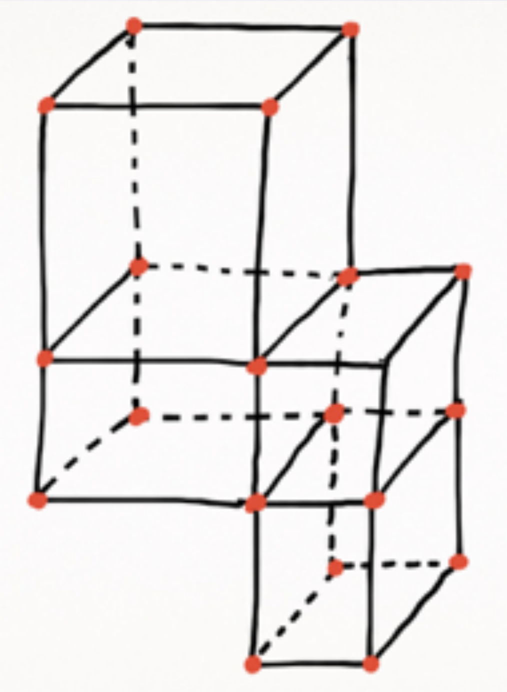
tetraedro



paralelepípido

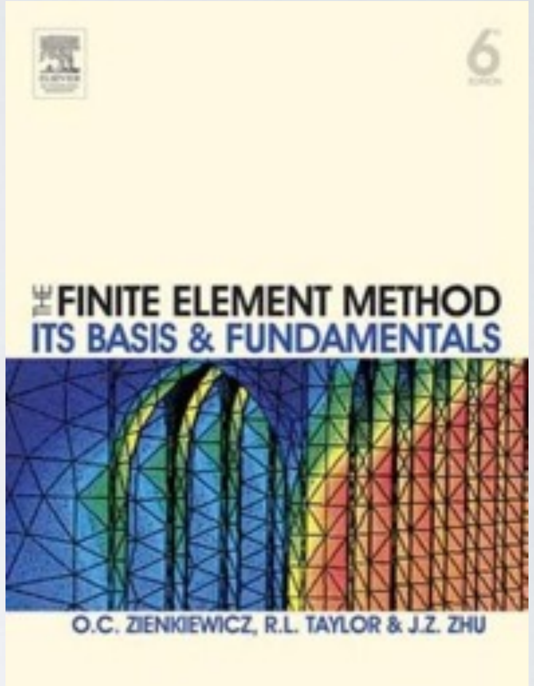
malha



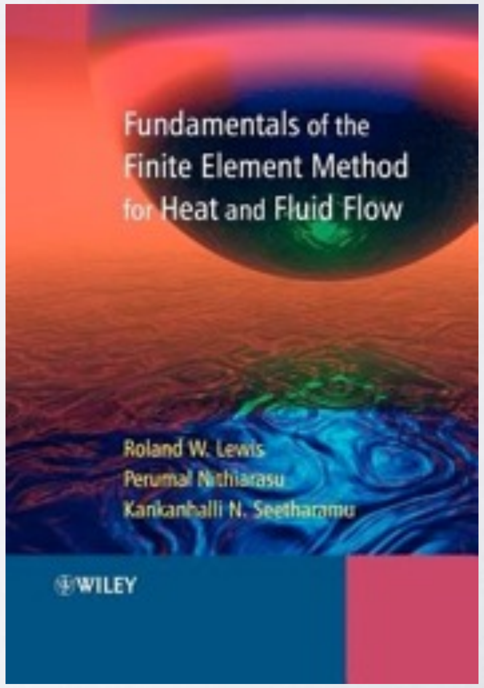


LITERATURA - ELEMENTOS

The Finite Element Method - Its Basis & Fundamentals
Autores: O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor e J.Z. Zhu

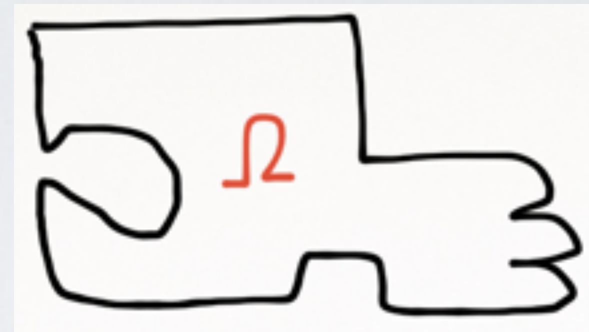


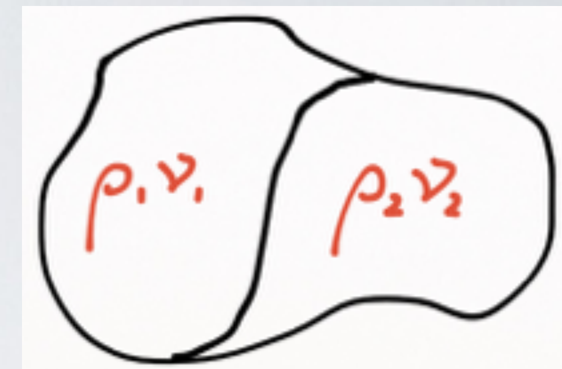
Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow
Autores: Roland W. Lewis, Perumal Nithiarasu, Kankanhally e N. Seetharamu

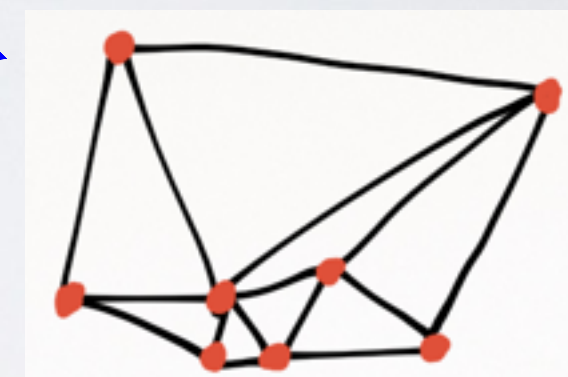


VANTAGENS/DESVANTAGENS

- contorno irregulares;
- materiais/fluidos diferentes;
- tamanho de elementos diferentes;
- fácil modificação de problemas;
- malhas não estruturadas.



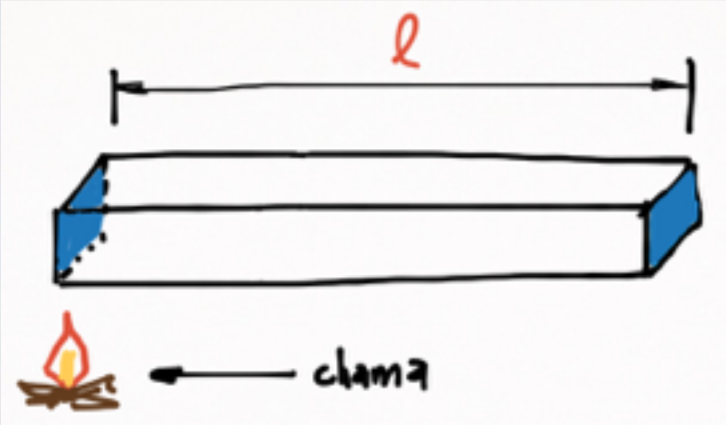




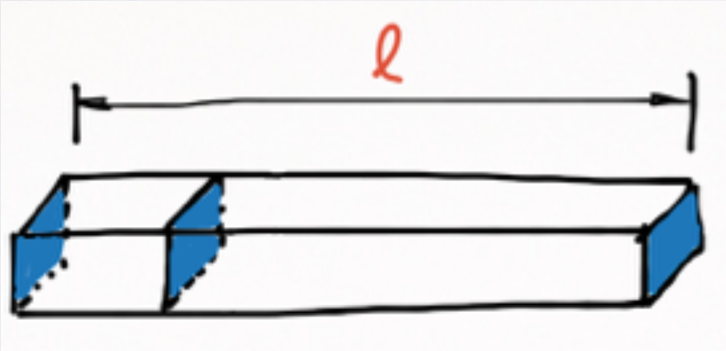
- formulação matemática sofisticada;
- necessidade de computadores;
- grande quantidade de memória RAM;
- programação complexa, porém flexível.

PROBLEMA SIMPLES - MEF

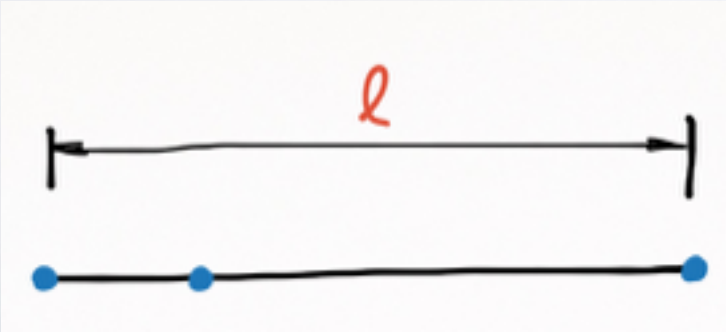
barra aquecida



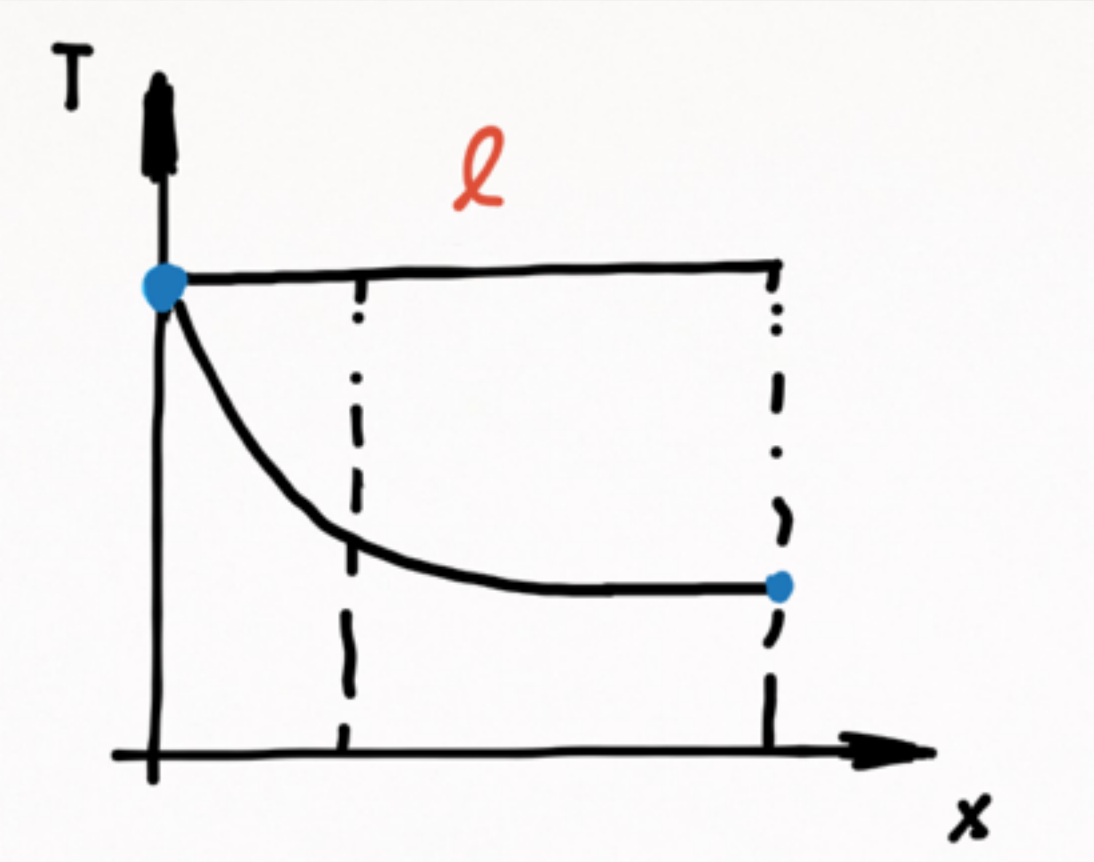
1a. simplificação - 2D



2a. simplificação - 1D

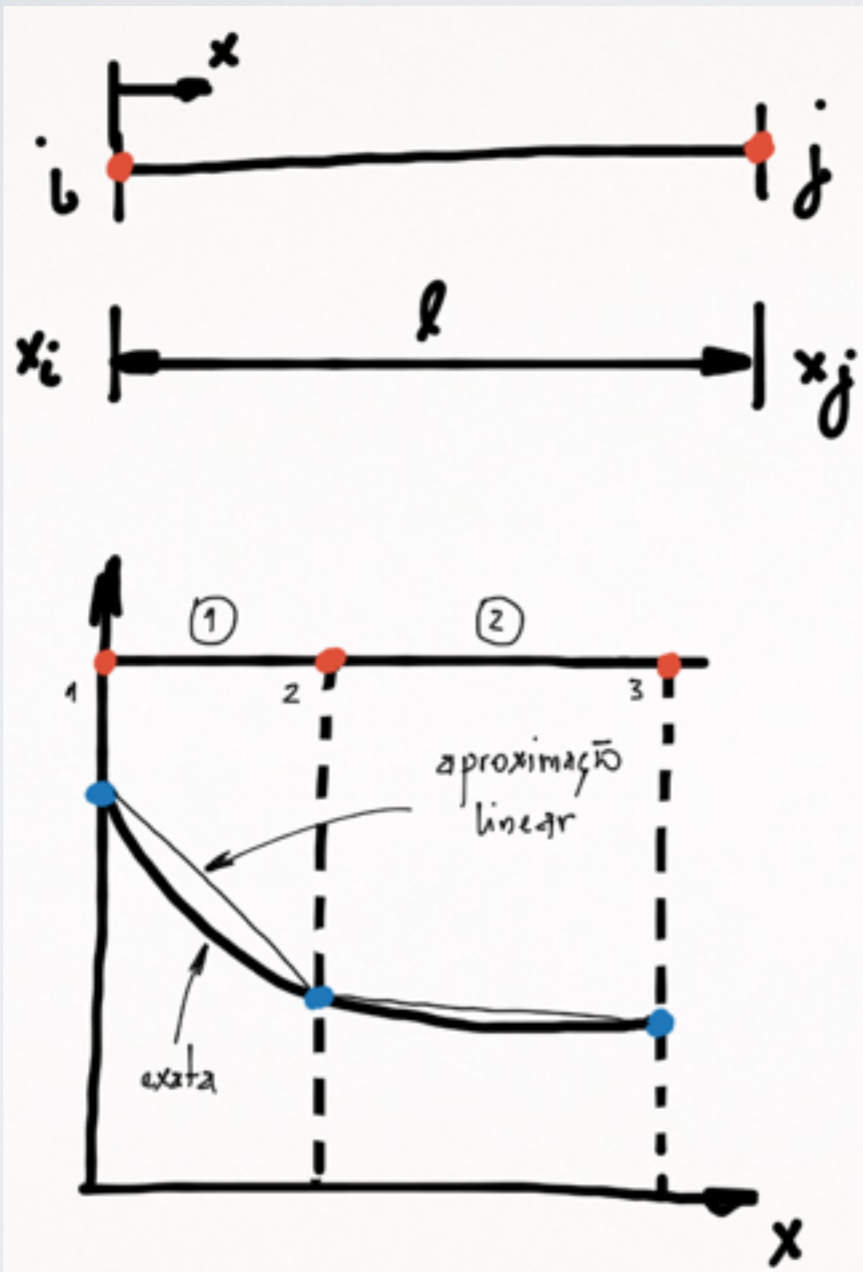


distribuição de temperatura



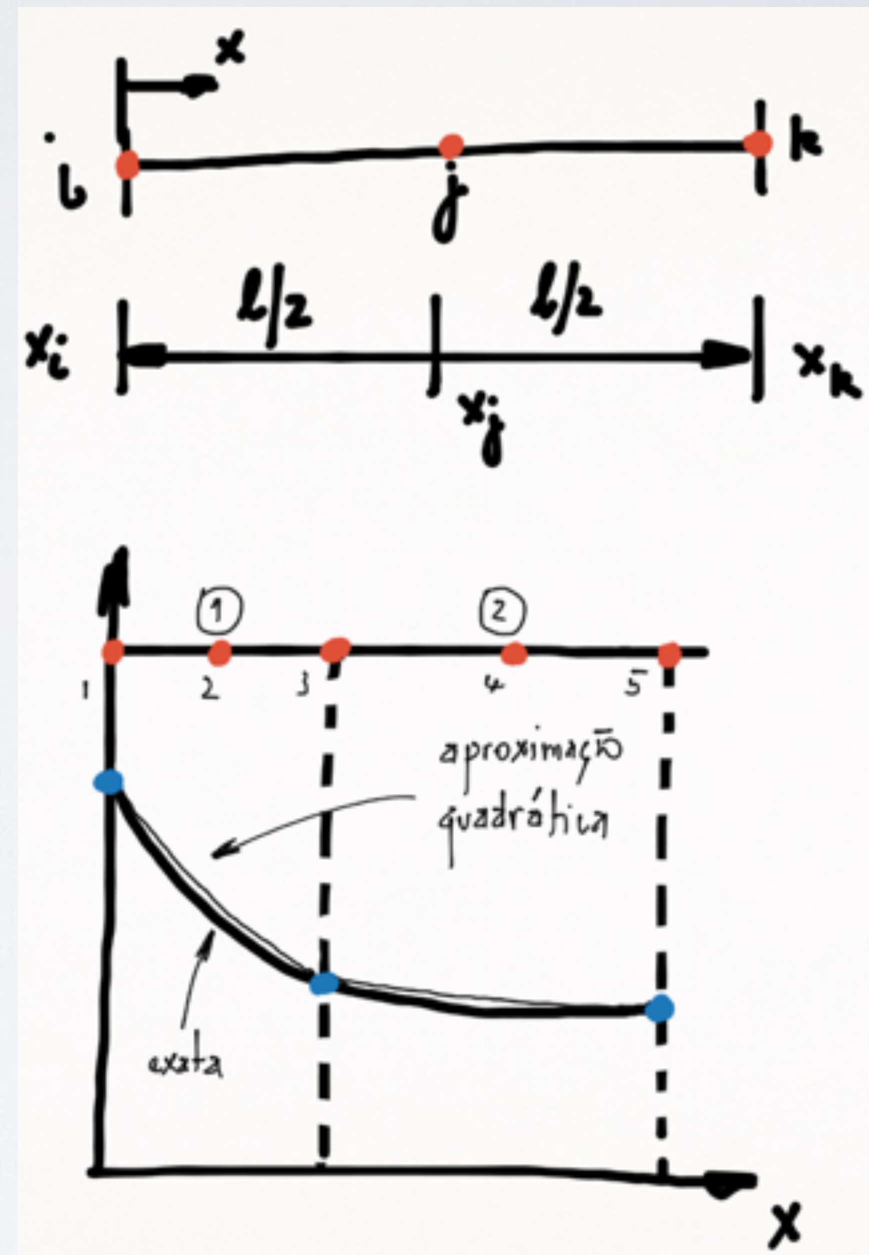
PERFIL DE TEMPERATURA

Problema 1D - linear:



$$T(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

Problema 1D - quadrático:



$$T(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$

FUNÇÕES DO MEF

Propriedades do elemento finito

- as funções de forma assumem o valor unitário no nó designado e zero nos demais nós;
- a soma de todas as funções de forma em um elemento é igual a um em todo o elemento, incluindo o contorno.

Tabela

item	nó, i	nó, j	x arbitrário
Ni	1	0	entre 0 e 1
Nj	0	1	entre 0 e 1
Ni+Nj	1	1	1

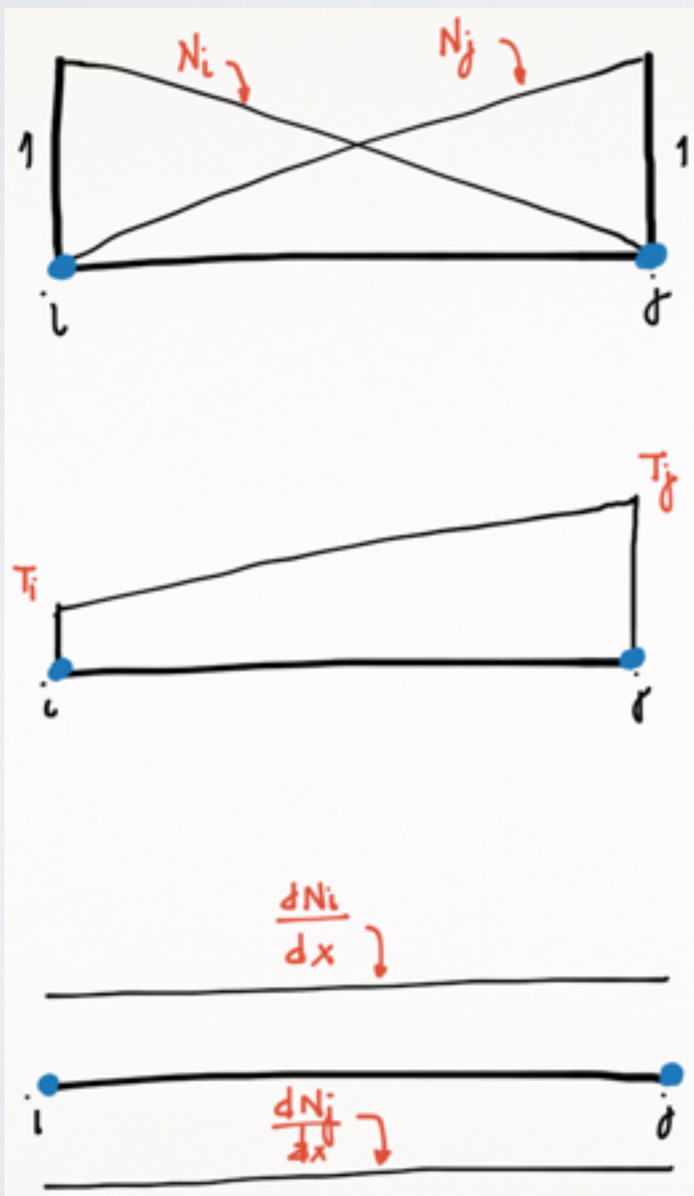
FUNÇÕES DO MEF

Problema 1D - linear:

$$T(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

Problema 1D - quadrático:

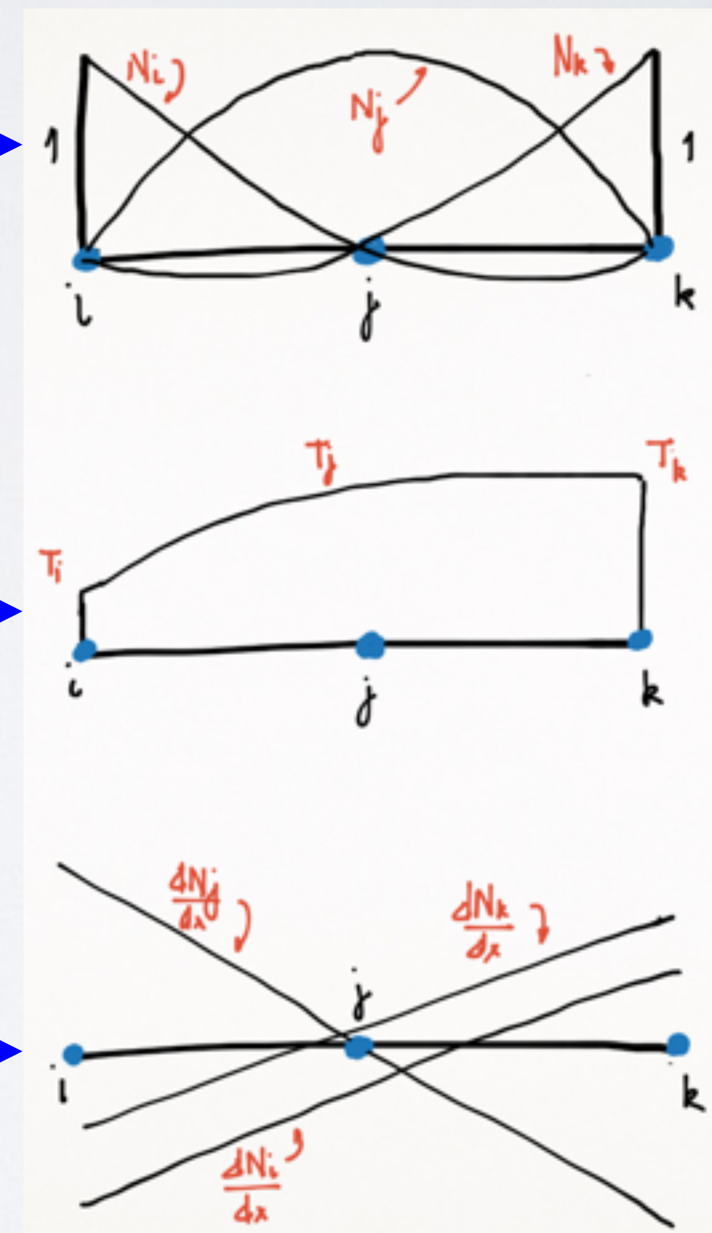
$$T(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$



função de forma

variação de temperatura

derivada da função de forma



PROBLEMA 1D - EXEMPLO

Calcular a temperatura de uma barra de 10cm em uma distância de 7cm de uma extremidade, onde a temperatura é de 80 graus Celsius e a outra extremidade onde a temperatura é de 220 graus Celsius. Considere uma distribuição de temperatura linear.

Resposta: 178 graus Celsius

RECEITA PARA O MEF

papel:

- a partir da forma forte do problema, passar para a forma fraca;
- utilizar o método de Galerkin para transformar o problema contínuo em discreto;

computador:

- definir a geometria e malha
- gerar matrizes de coordenadas e conectividade;
- montar o sistema linear do tipo $Ax=b$;
- resolver o sistema linear para x;
- visualizar o resultado.

RESUMO DO MEF

EDP → forma fraca → EDO → sistema algébrico linear → solução aproximada

EDP:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + 1 = 0$$

forma fraca:

$$\int_\Omega w\left(\frac{d^2u}{dx^2} + u + 1\right)dx = 0$$

w ↳ função peso

EDO:

$$\int_{\Omega_1} (-3x+2)^2\,dx = K_1$$

sistema algébrico linear:

$$Au = b$$

solução aproximada:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 1D

Encontrar u no domínio $\Omega = [0,1]$ tal que:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + 1 = 0 \qquad \left| \begin{array}{l} u(0) = 0 \\ \dfrac{du}{dx}(1) = 1 \end{array} \right.$$

condição de contorno

domínio: $h_1 = h_2 = h_3 = 1/3$

Resposta: u_2=1.0551; u_3=1,872; u_4=2,391

PROBLEMA 1D

Encontrar u no domínio $\Omega = [0, 1]$ tal que:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + 1 = 0 \qquad \left| \begin{array}{l} u(0) = 0 \\ \dfrac{du}{dx}(1) = -u \end{array} \right.$$

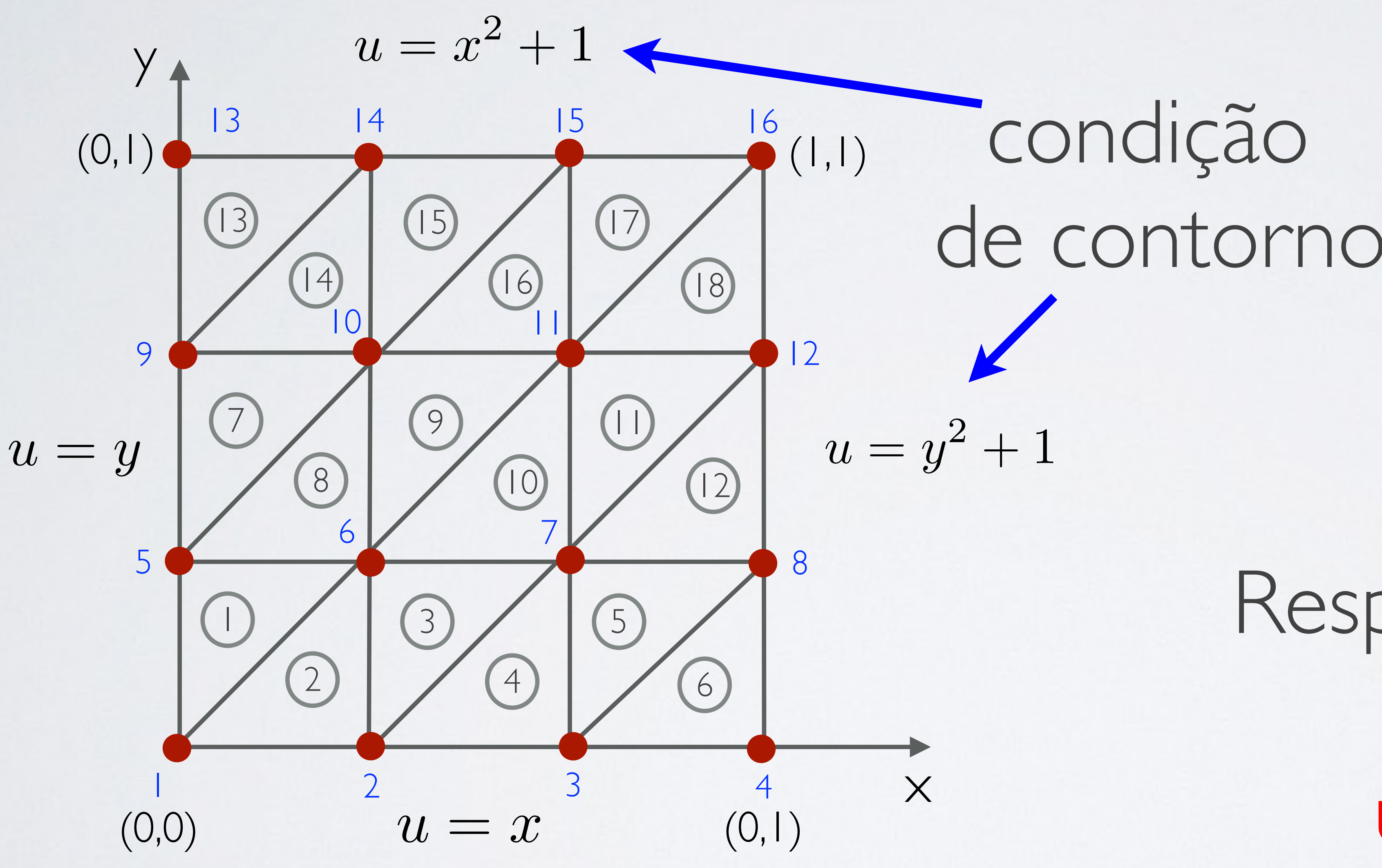
condição de contorno

domínio: $h_1 = h_2 = h_3 = 1/3$

Resposta: u_2=0,2511; u_3=0,3655; u_4=0,3299

PROBLEMA 2D

Encontrar u no domínio $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ tal que:



Equação:

$$\nabla^2 u = 0$$

Resposta: u_6=0,611;
u_7=0,889;
u_{10}=0,8889;
u_{11}=1,1667

CONCLUSÃO

- o Método de Elementos Finitos foi apresentado como ferramenta de solução numérica para problemas permanentes e transientes de equações a derivadas ordinárias e parciais, unidimensional e bidimensional;
- 3 exercícios foram propostos dos quais os 2 primeiros foram resolvidos em sala de aula.

PROJETO

- Resolver o problema permanente 2D apresentado no slide anterior;
- Resolver o problema transiente 2D, adicionando a derivada temporal de u no problema do slide anterior, considerando condição inicial u=0 nos pontos internos.

INTEGRAÇÃO POR PARTES

De acordo com a regra do produto:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Note que a função $(f \cdot g)$

é uma antiderivada de $f' \cdot g + f \cdot g'$

Com isso: $\int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + C$

reescrevendo: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

substituindo: $\begin{matrix} u = f(x) \\ v = g(x) \end{matrix}$

fórmula:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$