

Escoamentos Multifásicos

(FEN03711)

Prof. Gustavo Rabello Anjos

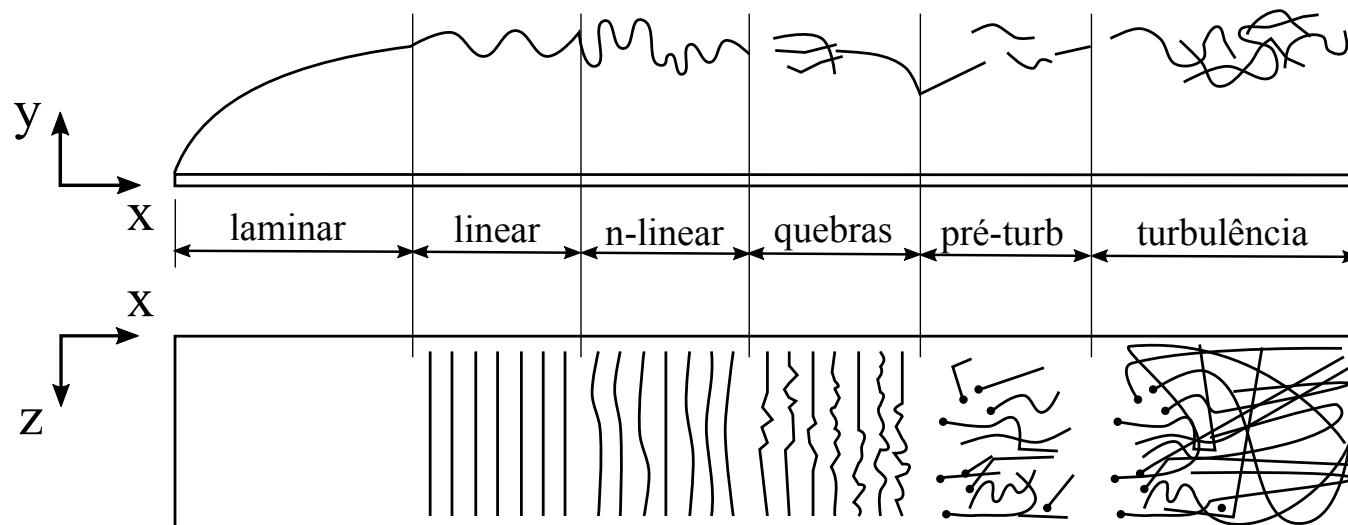
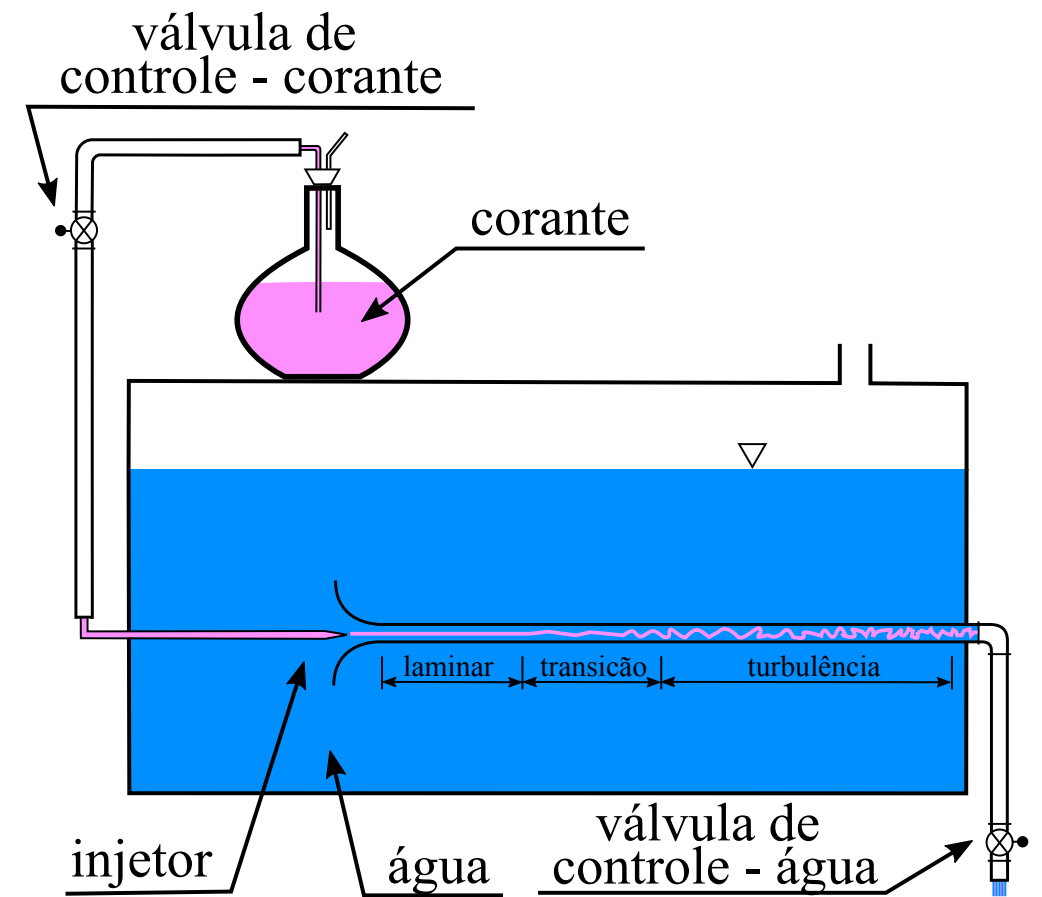
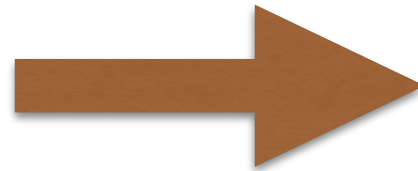
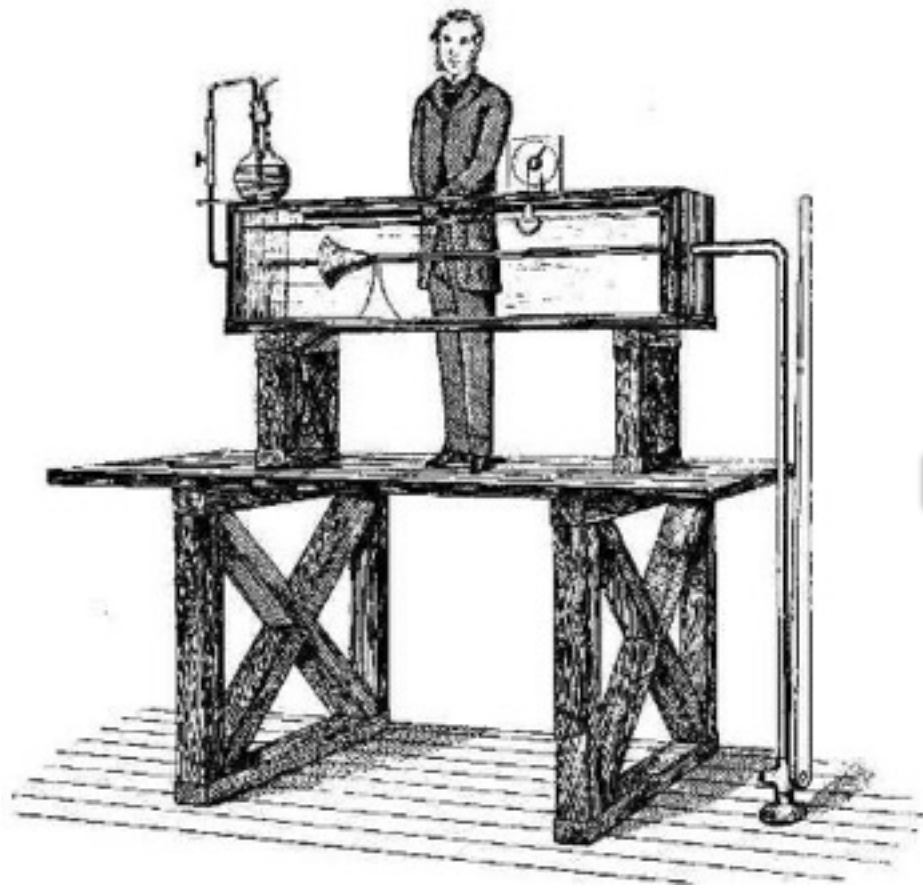
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
gustavo.anjos@uerj.br

1o. período, 2015

Tópicos da aula

- Revisão de escoamento laminar em canal;
- Introdução à Turbulência em dinâmica de fluidos;
- Conceitos de turbulência;
- A modelagem matemática da turbulência;
 - modelo de zero-equação;
 - modelo de uma equação;
 - modelos de duas equações;

Laminar X turbulento



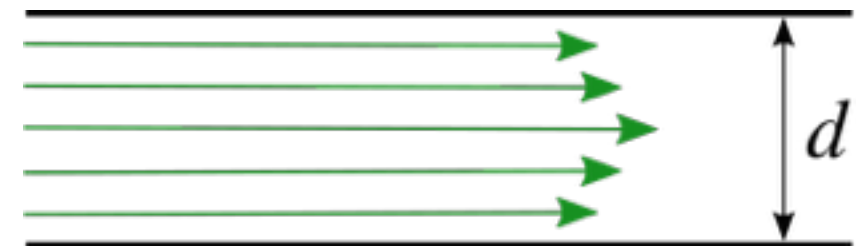
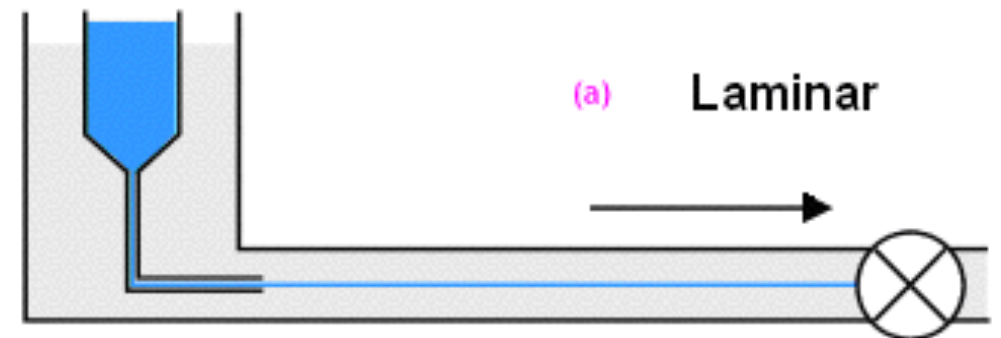
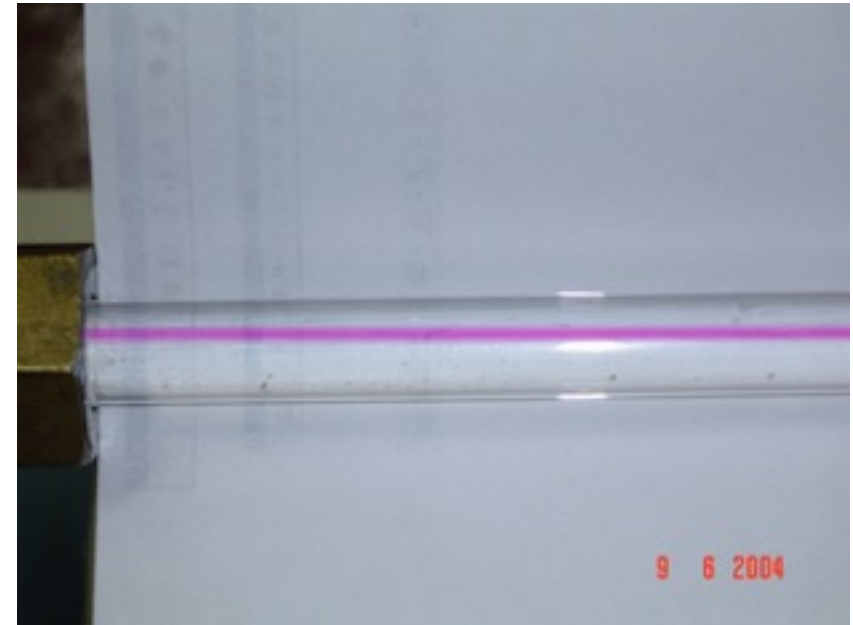
Reynolds $\rightarrow 0$ efeitos viscosos predominantes

Reynolds $\rightarrow \infty$ efeitos inerciais predominantes

escoamento laminar

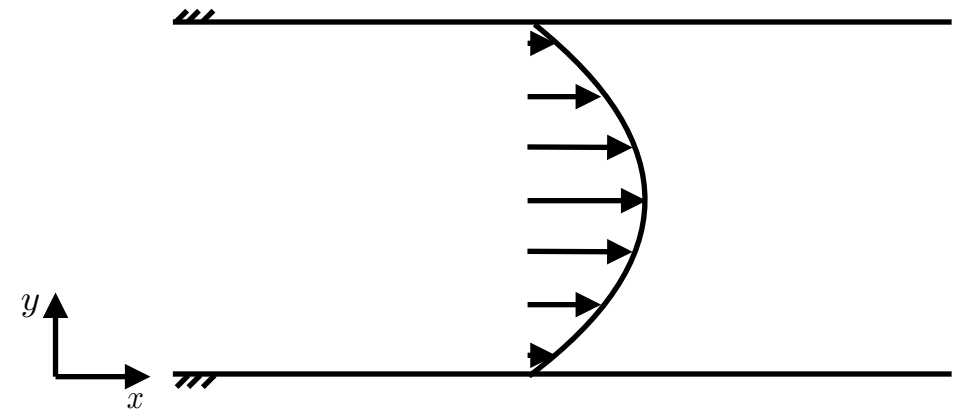
Revisão de escoamento laminar

- baixo grau de mistura, escoamento comportado;
- determinístico, previsível;
- poucas escalas representativas do escoamento;
- número de Reynolds baixo.



Equações do movimento

canal 1D, escoamento
incompressível, **permanente**,
fluido newtoniano,
viscosidade constante, sem
gravidade, coordenadas
cartesianas.



$$\begin{aligned}
 \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + v \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}} + w \cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \right] + \cancel{g_x} \\
 \cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} + u \cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} + v \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} + w \cancel{\frac{\partial v}{\partial z}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}} \right] + \cancel{g_y} \\
 \cancel{\frac{\partial w}{\partial t}} + u \cancel{\frac{\partial w}{\partial x}} + v \cancel{\frac{\partial w}{\partial y}} + w \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}} \right] + \cancel{g_z} \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} &= 0
 \end{aligned}$$

Equações do movimento

- conservação de quantidade de movimento em x:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2$$

- conservação de quantidade de movimento em y:

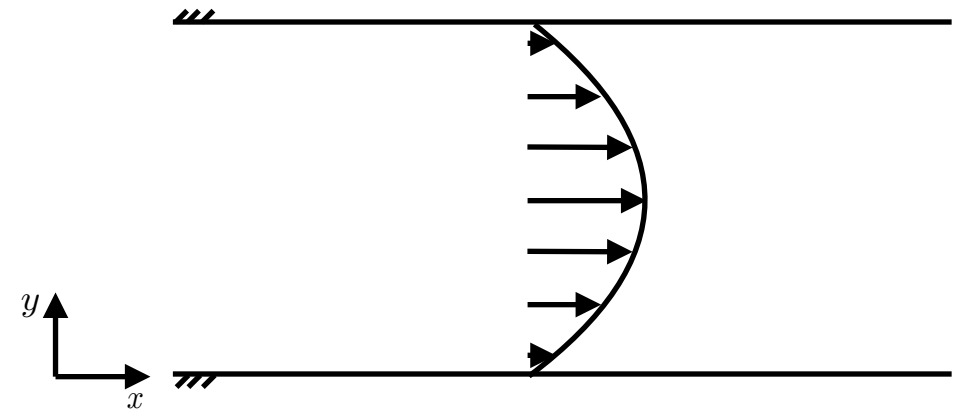
$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \longrightarrow p_y = \text{const}$$

- conservação de massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \longrightarrow \text{completamente desenvolvido} \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Equações do movimento

canal 1D, escoamento
incompressível, **transiente**,
fluido newtoniano,
viscosidade constante, sem
gravidade, coordenadas
cartesianas.

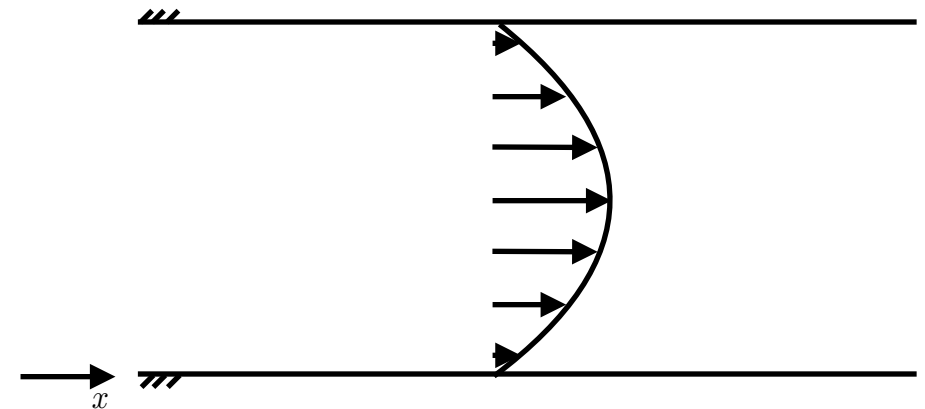


na direção x : $\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$

na direção y : $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$

Equações do movimento

canal 1D, escoamento
incompressível, permanente,
fluido newtoniano, viscosidade
variável, sem gravidade,
coordenadas cartesianas.



na direção x :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \nu \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

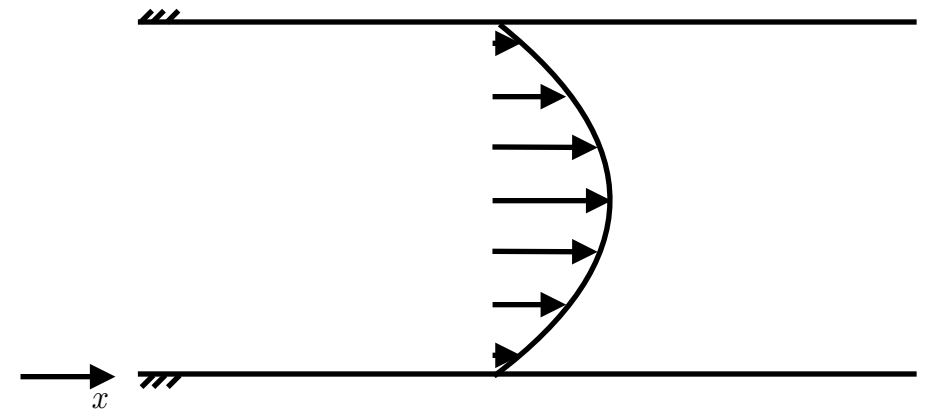
função de y

na direção y :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Equações do movimento

canal 1D, escoamento
incompressível, **transiente**,
fluido newtoniano, **viscosidade**
variável, sem gravidade
coordenadas cartesianas.



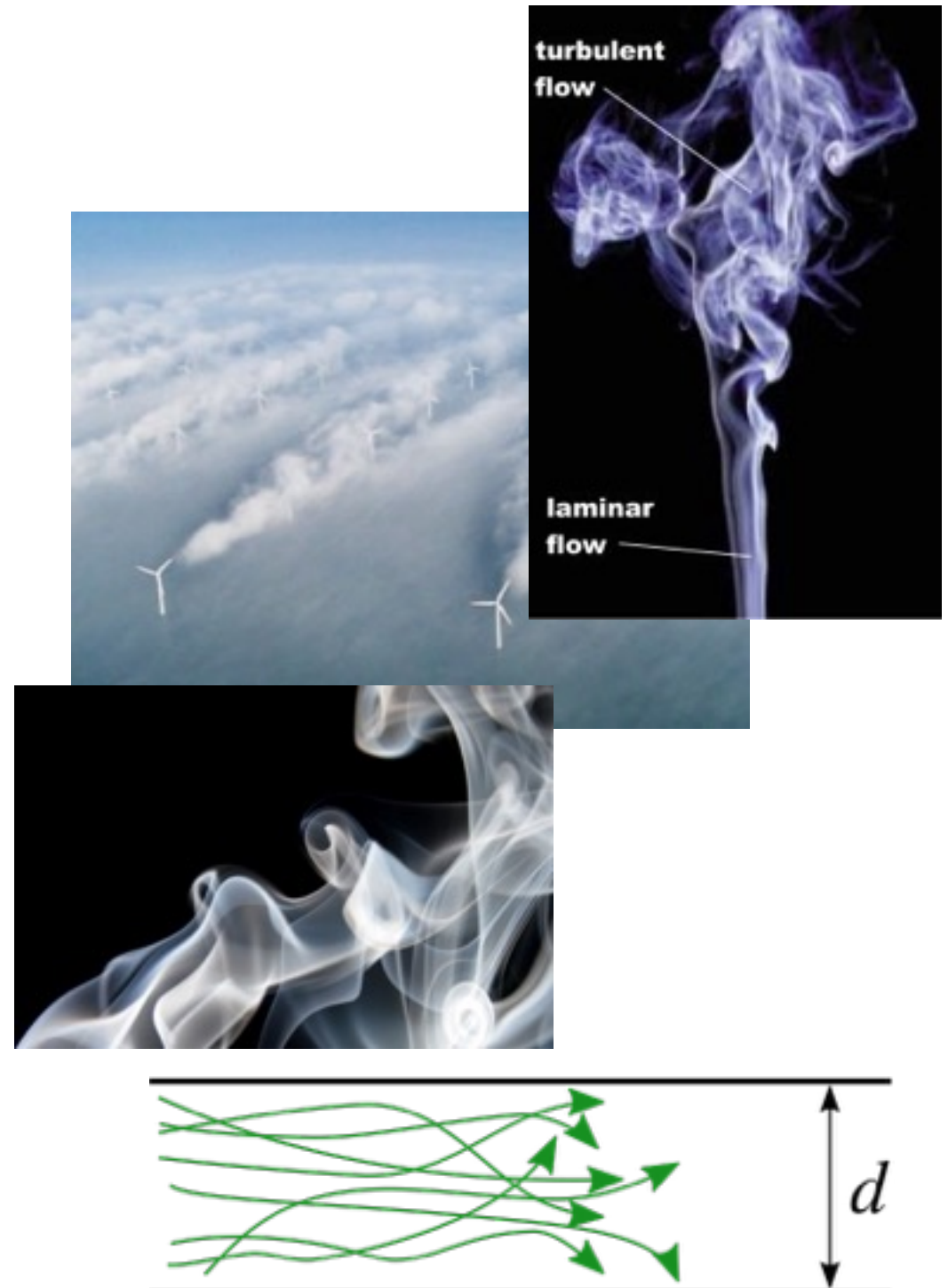
na direção x : $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \nu \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ função de y

na direção y : $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$

Turbulência
(turbulence)

Introdução

- alto grau de mistura;
- imprevisibilidade, no sentido de que uma pequena incerteza nas condições iniciais são suficientes para tornar impossível uma predição determinística de sua evolução;
- grande número de escalas representativas do escoamento. Nota-se que as menores escalas têm grande influência nas grandes escalas;
- número de Reynolds alto.

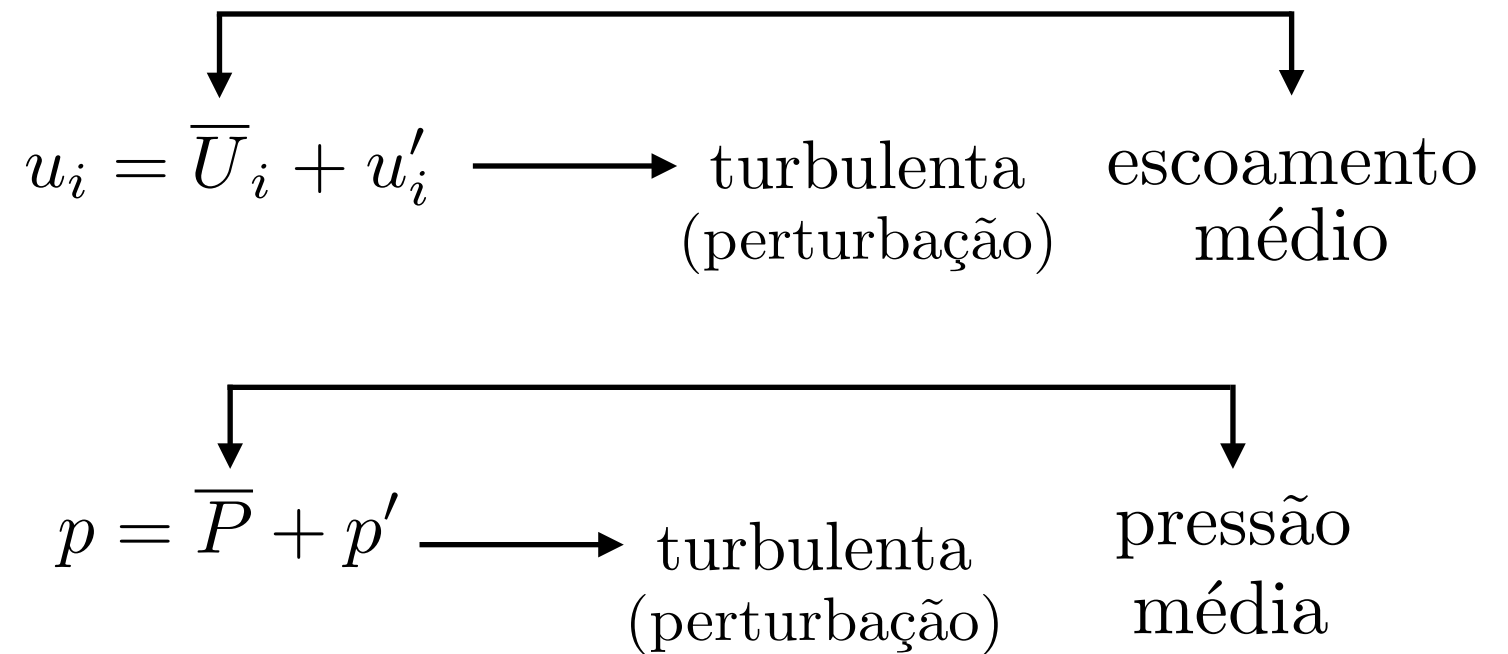


Conceitos de turbulência

- **métodos determinísticos:** utilização das equações que regem o escoamento de fluidos;
- **métodos estatísticos:** funções que descrevem as várias flutuações do campo são estatisticamente invariantes quando sujeitas a movimentação da partícula de fluido;
- **turbulência isotrópica:** a isotropia é a uniformidade de propriedade em todas as direções. Na realidade, a turbulência não é isotrópica, porém assim é considerada para facilitar o processo de modelagem estatística;

Modelagem matemática

- separação do escoamento (pressão e velocidade) em 2 parcelas: escoamento médio e escoamento turbulento:



- Posterior passagem da média:

$$\overline{\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i}}$$

Equação da Continuidade

- separação do escoamento:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial(\bar{U}_i + u'_i)}{\partial x_i} = 0$$

- passagem da média:

$$\overline{\frac{\partial(\bar{U}_i + u'_i)}{\partial x_i}} = \overline{\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i}} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_i}} \longrightarrow \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0$$

\searrow
 $= 0$

propriedades:

- i) $\bar{u} = \overline{\bar{u} + u'} = \bar{\bar{u}} + \bar{u'}$
 $\bar{u} = \bar{u} + \bar{u'} \rightarrow \bar{u'} = 0$
- ii) $\overline{\alpha u} = \alpha \bar{u}$
- iii) $\overline{\alpha u'} = 0$
- iv) $\overline{u' u'} \neq 0$
- v) $\overline{\bar{u} u'} = \bar{u} \bar{u'} = 0$

Equação de Navier-Stokes

- separação do escoamento:

$$\frac{\partial(\bar{U}_i + u'_i)}{\partial t} + (\bar{U}_j + u'_j) \frac{\partial(\bar{U}_i + u'_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{P} + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\bar{U}_i + u'_i)}{\partial x_j \partial x_j}$$

- passagem da média:

$$\overline{\frac{\partial(\bar{U}_i + u'_i)}{\partial t}} + \overline{(\bar{U}_j + u'_j) \frac{\partial(\bar{U}_i + u'_i)}{\partial x_j}} = \overline{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{P} + p')}{\partial x_i}} + \overline{\nu \frac{\partial^2(\bar{U}_i + u'_i)}{\partial x_j \partial x_j}}$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Equação de Navier-Stokes

- outra forma de escrever a equação

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

↑ tensor de Reynolds τ_{rey}

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -\overline{u_i u_j} - \frac{1}{\rho} \bar{P} \delta_{ij} + \nu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right\}$$

↑ hipótese de Boussinesq

$$-\overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)$$

Hipótese de Boussinesq

- na equação com divergente:

$$-\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \overbrace{-\frac{2}{3}k\delta_{ij}}^{\text{tensões normais de Reynolds}} + \overbrace{\nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)}^{\text{tensões cisalhantes de Reynolds}} \right\}$$

↑
↑

energia cinética turbulenta
viscosidade turbulenta (propriedade do escoamento)

- note que:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{2}{3}k\delta_{ij} \right) = \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_i}$$

Hipótese de Boussinesq

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{\rho} \bar{P}^* \delta_{ij} + \nu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right\}$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -\frac{1}{\rho} \bar{P}^* \delta_{ij} + (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right\}$$

- onde:

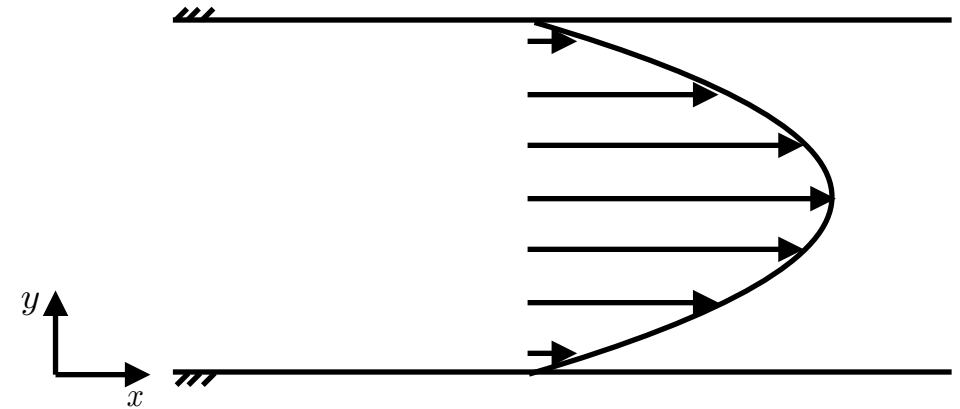
$$\bar{P}^* = \bar{P} + \frac{2}{3}k \quad k = \frac{1}{2} \overline{(u'_i u'_i)} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

- reescrevendo a equação:

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x_i} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Escoamento turbulento no canal

canal 1D, escoamento
incompressível, **transiente**,
fluido newtoniano,
viscosidade variável,
coordenadas cartesianas.



na direção \overrightarrow{x} :

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} (\nu + \nu_t) \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}^*}{\partial x}$$

na direção \overrightarrow{y} :

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}^*}{\partial y}$$

Como modelar τ_{rey} ?

$$\tau_{\text{rey}} = -\overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3}k\delta_{ij} + \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)$$

1. modelos de transporte do tensor de Reynolds, onde o tensor τ_{rey} é modelado diretamente.
2. modelos de viscosidade turbulenta, onde a modelagem do tensor de Reynolds τ_{rey} é feita indiretamente através da modelagem da viscosidade turbulenta ν_t .

Classificação dos modelos

1. modelo de **zero** equação (algébrico): largamente utilizados em engenharia para escoamentos cisalhantes simples.
2. modelo de **uma** equação (equação diferencial): foram bastante utilizados no início do desenvolvimento de modelos turbulentos.
3. modelo de **duas** equações (k-epsilon, k-omega): são os mais populares por fornecer boa precisão na modelagem de escoamentos turbulentos.
4. modelos algébricos para o tensor de Reynolds: utilizados para escoamentos que apresentam curvatura e rotação.
5. modelos para o tensor de Reynolds: desenvolvidos para modelagem de escoamentos com grande variedade de efeitos (tri-dimensionalidade, curvatura, rotação etc.).

modelos de viscosidade turbulenta: depende de

ν_t

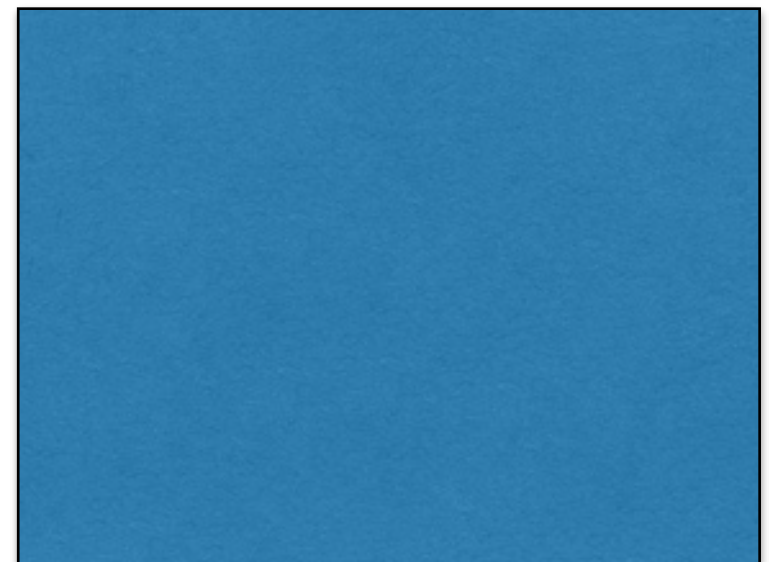
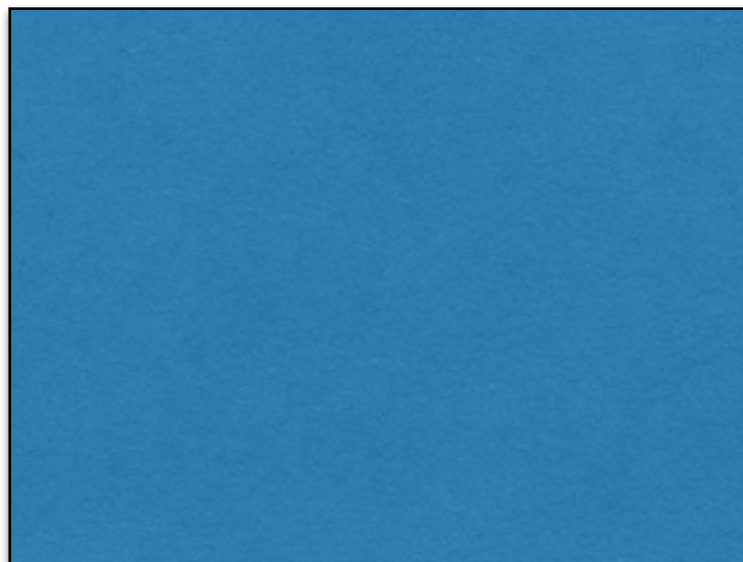
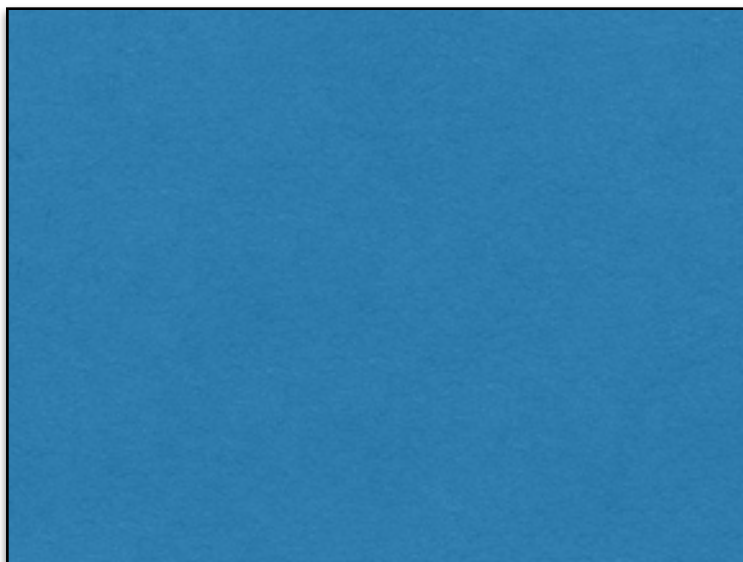
modelos do tensor de Reynolds: **não** depende de

ν_t

Modelos de viscosidade turbulenta

$$\nu_t = u_c l_c \rightarrow \begin{array}{l} \text{comprimento característico} \\ \text{velocidade} \\ \text{característica} \end{array} \quad u_c = l_c \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\nu_t = l_c^2 \frac{\partial u}{\partial y}$$



Classificação dos modelos

- modelo de **zero** equação
(algébrico)

Modela turbulência através de uma equação algébrica, relacionando velocidade e comprimento característicos

Classificação dos modelos

- modelo de **uma** equação
(algébrico - diferencial)

$$\nu_t = c_\mu \sqrt{k} L$$

Modela turbulência através
de uma equação de
transporte para a
velocidade característica

Modelo a uma equação

- sequência de cálculo

iniciar todas as variáveis;

processo iterativo até convergência:

resolver as equações para velocidades médias e pressão;

resolver equação para energia cinética turbulenta k ;

calcular L ;

calcular a viscosidade turbulenta ν_t ;

verificar convergência de todas as variáveis;

incrementar passo de tempo.

Classificação dos modelos

- modelo de **duas** equações
(diferencial - diferencial)

Modela turbulência através de duas equações de transporte, uma para a velocidade característica e outra para o comprimento característico.