

Departamento/Programa de Engenharia Metalúrgica e  
de Materiais  
Escola Politécnica/COPPE  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

## Fenômenos de Transferência

José Pontes  
Escola Politécnica/COPPE - UFRJ  
Norberto Mangiavacchi  
Depto. de Engenharia Mecânica - UERJ

Abril – 2003

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos . . . . .	1
1.2	Princípios de Conservação e Equações Constitutivas . . . . .	2
1.3	Operador Derivada Substancial . . . . .	5
1.4	Desenvolvimento da Mecânica dos Fluidos . . . . .	6
1.5	Problemas . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Conservação da Massa</b>	<b>11</b>
2.1	Equação da Continuidade . . . . .	11
2.2	Problemas . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Conservação da Quantidade de Movimento</b>	<b>21</b>
3.1	Introdução . . . . .	21
3.2	Equação da Quantidade de Movimento . . . . .	22
3.3	Equação de Euler . . . . .	29
3.4	Fluidos Newtonianos . . . . .	30
3.5	Equação de Navier-Stokes . . . . .	32
3.6	Os Números de Reynolds e de Froude . . . . .	34
3.7	Equação de Bernoulli . . . . .	35
3.8	Hidrostática . . . . .	36
3.9	Problemas . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Conservação da Energia</b>	<b>43</b>
4.1	Introdução . . . . .	43
4.2	Equação da Energia Cinética ( $v^2/2$ ) . . . . .	44
4.3	Equação da Energia Total ( $e + v^2/2$ ) . . . . .	45
4.4	Equação da Energia Interna ( $e$ ) . . . . .	48

4.5	Função Dissipação ( $\Phi$ ) . . . . .	49
4.6	Equação da Entalpia de Estagnação ( $h_0 = h + v^2/2$ ) . . . . .	50
4.7	Equação da Entalpia ( $h$ ) . . . . .	52
4.8	Equação da Entropia ( $s$ ) . . . . .	53
4.9	Nota Sobre a Forma Integral das Equações da Entalpia . . . . .	54
4.10	Equação da Temperatura . . . . .	55
4.11	Equação de Condução de Calor em Sólidos . . . . .	55
4.12	Os Números de Péclet e de Prandtl . . . . .	56
4.13	A Aproximação Boussinesq . . . . .	57
4.14	Origem da Vorticidade . . . . .	58
4.15	Resumo das Equações de Energia – Forma Vetorial . . . . .	62
4.16	Resumo das Equações de Energia – Forma Tensorial . . . . .	63
4.17	Problemas . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Escoamentos Viscosos</b>	<b>65</b>
5.1	Introdução . . . . .	65
5.2	Escoamento em Torno de uma Esfera sob $Re < 1$ . . . . .	66
5.3	Escoamento Sobre uma Placa Plana Inclinada . . . . .	68
5.4	Escoamento de Couette . . . . .	74
5.5	Escoamento Entre Duas Placas Paralelas Imóveis . . . . .	76
5.6	Escoamento Entre Duas Placas Paralelas sob Fluxo de Calor Constante . . . . .	78
5.7	Problema de Rayleigh . . . . .	84
5.8	Escoamento Próximo ao Eixo de um Disco Rotatório . . . . .	89
5.9	Problemas . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Introdução à Teoria da Camada Limite</b>	<b>95</b>
6.1	Introdução . . . . .	95
6.2	As Equações de Prandtl . . . . .	96
6.3	A Equação de Falkner-Skan . . . . .	98
6.4	Métodos Integrais na Teoria da Camada Limite Laminar . . . . .	101
6.5	Problemas . . . . .	103
<b>7</b>	<b>Escoamentos Compressíveis</b>	<b>105</b>
7.1	Introdução . . . . .	105
7.2	Escoamento Quase-unidimensional . . . . .	105

7.3	Velocidade do Som . . . . .	113
7.4	Analogia com a Hidráulica de Canal Aberto . . . . .	115
7.5	Propriedades dos Escoamentos Potenciais . . . . .	118
<b>8</b>	<b>Transferência de Calor</b>	<b>121</b>
8.1	Introdução . . . . .	121
8.2	Mecanismos de Transferência de Calor . . . . .	121
8.3	Condução de Calor Unidimensional em Sólidos . . . . .	124
8.3.1	Condução de calor unidimensional em regime permanente com fontes distribuídas . . . . .	124
8.3.2	Condução de calor em um tubo de paredes finas . . . . .	125
8.3.3	Condução unidimensional com transferência de calor por convecção para um fluido . . . . .	126
8.4	O Método de separação de variáveis . . . . .	129
8.4.1	Condução de calor bi-dimensional permanente . . . . .	129
8.4.2	Condução de calor unidimensional dependente do tempo . . . . .	133
8.4.3	O Método <i>Point-Matching</i> . . . . .	135
8.5	O Método de Diferenças Finitas . . . . .	142
8.5.1	Representação discreta de derivadas temporais . . . . .	142
8.5.2	Representação discreta de derivadas espaciais . . . . .	144
8.5.3	Métodos explícitos e implícitos – estabilidade . . . . .	145
8.5.4	Implementação de um esquema implícito – caso unidimensional . . . . .	147
8.5.5	Problemas bi-dimensionais . . . . .	149
8.6	Transferência de Calor por Convecção e Evaporação . . . . .	149
8.6.1	Correlações empíricas para a determinação do número de Nusselt . . . . .	150
8.6.2	Transferência de calor por evaporação . . . . .	152
8.7	Trocadores de Calor . . . . .	153
8.8	Radiação . . . . .	159
8.9	Problemas . . . . .	160
<b>9</b>	<b>Transferência de Massa</b>	<b>165</b>
9.1	Introdução . . . . .	165
9.2	Equações Reação-Difusão . . . . .	165
9.3	Estruturas de Turing . . . . .	167
<b>A</b>	<b>Principais Grupos Adimensionais</b>	<b>177</b>

<b>B</b>	<b>Revisão de Conceitos do Cálculo Vetorial</b>	<b>181</b>
B.1	Introdução . . . . .	181
B.2	Operador gradiente . . . . .	182
B.3	Operador divergente . . . . .	183
B.4	Teorema de Gauss . . . . .	184
B.5	Operador rotacional . . . . .	185
B.6	Teorema de Stokes . . . . .	185
B.7	Notação de índices . . . . .	185
B.8	Outras propriedades vetoriais . . . . .	189
B.9	Problemas . . . . .	190
<b>C</b>	<b>Revisão de Conceitos da Termodinâmica Clássica</b>	<b>193</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Objetivos

O conteúdo do curso *Fenômenos de Transferência* compreende o estudo de três tópicos distintos:

- Mecânica dos Fluidos;
- Transferência de Calor;
- Transporte de Massa.

Como muitos dos mecanismos de transporte de calor e de massa se processam na presença de fluidos, como é o caso do resfriamento por convecção e dos processos de evaporação, começaremos o curso abordando a mecânica dos fluidos.

O objetivo da mecânica dos fluidos é determinar o *estado* de um fluido, esteja ele em movimento ou em repouso. Para fazê-lo devemos conhecer as variáveis que determinam este estado, as quais dependem em geral da *posição no espaço* e do *tempo*. Conseqüentemente, para conhecermos o estado de um fluido devemos determinar o valor das variáveis que o identificam, ao longo do tempo e em cada ponto do espaço ocupado pelo fluido.

As variáveis que identificam o estado de um fluido são:

- A *velocidade* em cada ponto,  $\mathbf{v}$ , que é um grandeza vetorial. Usaremos normalmente uma das notações abaixo, em um sistema de coordenadas cartesiano e ortogonal:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k} && \text{ou} \\ \mathbf{v} &= v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} && \text{ou} \\ \mathbf{v} &= u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Na notação acima  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  são os vetores unitários (de comprimento igual a 1) nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. O mesmo vale para os vetores  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ . As variáveis  $u$ ,  $v$  e  $w$ , assim como  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  são as componentes da velocidade em cada uma das direções acima.

O vetor velocidade também pode ser expresso na seguinte forma:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i.$$

Temos já três incógnitas, a saber as três componentes da velocidade e necessitamos de três equações que nos permitam determiná-las.

- Outra variável de um fluido é a *pressão* em cada ponto, que pode ser tratada como uma grandeza *escalar*. Representaremos a pressão pela letra  $p$ .
- Se o fluido for compressível sua *densidade*  $\rho$  será também um variável a determinar. A densidade é definida por:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \infty} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

- Finalmente, se a *temperatura*  $T$  do fluido variar, será também uma das variáveis do problema.

Em resumo, a Mecânica dos Fluidos procura determinar as funções:

$$\begin{aligned} u &= u(t, x, y, z) \\ v &= v(t, x, y, z) \\ w &= w(t, x, y, z) \\ p &= p(t, x, y, z) \\ \rho &= \rho(t, x, y, z) \\ T &= T(t, x, y, z) \end{aligned}$$

Em problemas envolvendo reação e transporte de espécies químicas procuramos determinar também a concentração de cada espécie no tempo e no espaço.

## 1.2 Princípios de Conservação e Equações Constitutivas

Para resolvermos um problema de mecânica dos fluidos no qual a temperatura varia necessitamos de seis equações de evolução. Estas equações são obtidas pela aplicação dos seguintes princípios:

- Conservação da *Quantidade de Movimento* em cada uma das três direções. Obtem-se três equações. Um caso de particular importância ocorre quando se aplica o princípio de conservação da quantidade de movimento a um tipo particular de fluido denominado *fluido newtoniano*. As equações resultantes denominam-se *Equações de Navier-Stokes*;
- Conservação da *Massa*. A aplicação deste princípio conduz à *Equação da Continuidade*;

- Conservação da *Energia*;
- Equação de estado.

Ao aplicarmos os três princípios de conservação acima nos deparamos com o problema de expressarmos as forças agindo sobre uma partícula de fluido em função do campo de velocidades, assim como de expressar o fluxo de calor em função do campo de temperaturas. Trata-se de um problema semelhante ao de especificarmos a força agindo sobre uma mola comprimida, em função do nível de compressão da mesma. No caso de uma mola a força é expressa através da *lei de Hook* (ver fig. 1.1). A lei de Hook é um exemplo de *relação constitutiva*, que consiste de uma *hipótese* adicional e não, de um resultado obtido da aplicação de um dos princípios de conservação acima mencionados.

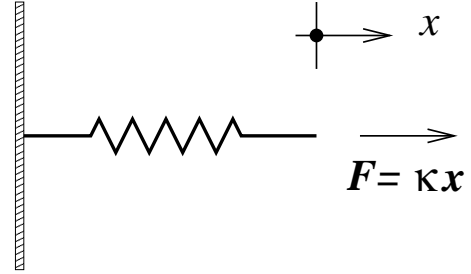


Figura 1.1: Força agindo sobre uma mola.

No caso da mecânica dos fluidos não há, como ocorre no caso de uma mola, uma força restituidora, que tende a trazê-la de volta à posição de equilíbrio. No entanto, o escoamento de uma camada de fluido sobre a outra produz uma *tensão de cisalhamento* entre as camadas, conforme mostrado na fig. (1.2).

Exemplo: escoamento de um fluido sobre uma placa plana infinita.

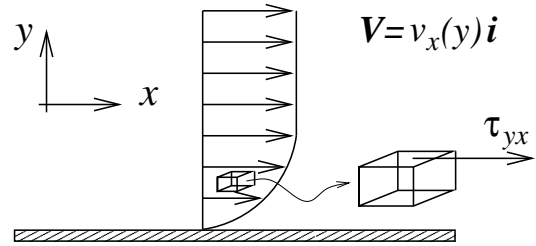


Figura 1.2: Campo de velocidades de um fluido nas proximidades de uma placa plana e tensões agindo sobre um elemento do mesmo.

$\tau_{xy} \longrightarrow$  Tensão de cisalhamento na direção  $x$ , atuando na face  $y$ , isto é, na face perpendicular à direção  $y$ .

Unidades da tensão de cisalhamento  $\tau$ :

$$[\tau_{yx}] = \frac{[\text{Força}]}{[\text{Área}]}$$

Da mesma forma como ocorre no caso da lei de Hook, há uma relação constitutiva para  $\tau_{yx}$ :

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (1.1)$$

onde  $\mu$  é a *viscosidade dinâmica* do fluido e  $\partial v_x / \partial y$ , um dos componentes do gradiente de velocidade.



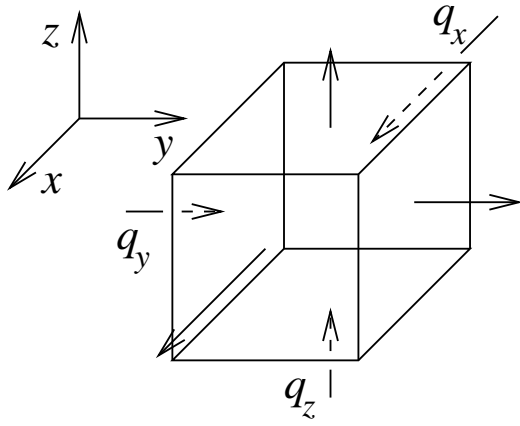


Figura 1.3: Fluxo de calor em um elemento de fluido

em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonal por:

$$\mathbf{q} = q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k}, \quad (1.2)$$

onde  $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$  são os fluxos da calor em cada uma das três direcções.

Unidades do fluxo de calor  $\mathbf{q}$ :

$$[\mathbf{q}] = \frac{[\text{Calor/tempo}]}{[\text{Área}]}$$

A relação constitutiva que relaciona o fluxo de calor com o campo de temperaturas é da forma:

$$q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i},$$

onde  $\kappa$  é a *Condutividade Térmica* do material,  $q_i$  e  $\partial T/\partial x_i$  são, respectivamente, o fluxo de calor e a componente do *gradiente de temperaturas* na direcção  $x_i$ . As três componentes do fluxo de calor são :

$$\begin{aligned} q_x &= -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \\ q_y &= -\kappa \frac{\partial T}{\partial y}, \\ q_z &= -\kappa \frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned}$$

Estamos considerando o caso em que a condutividade térmica é a mesma nas três direcções, isto é, o caso de um material *isotrópico*. Substituindo-se as expressões acima na Eq. (1.2) obtemos:

$$\mathbf{q} = q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k} = -\kappa \left( \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

<sup>1</sup>Exemplos: fluido viscoelástico, plástico Bingham etc.

Fluidos cuja tensão de cisalhamento é descrita pela eq. (1.1) denominam-se *newtonianos*. São os mais comumente encontrados nos problemas de engenharia, embora existam outros tipos de fluidos cuja tensão de cisalhamento se exprime de outras formas em função do campo de velocidades <sup>1</sup>. A relação constitutiva acima será generalizada no capítulo 3.

No caso do fluxo de calor que atravessa uma partícula de fluido conforme Fig. (1.3) têm-se também uma relação constitutiva. O fluxo de calor é definido como a quantidade de calor que flui por unidade de tempo e de área, em uma dada direcção. É portanto uma grandeza *vetorial*, que pode ser representada,

ou:

$$\mathbf{q} = -\kappa \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T}{\partial x_i} \mathbf{e}_i,$$

ou ainda:

$$\mathbf{q} = -\kappa \mathbf{grad} T. \quad (1.3)$$

A Eq. (1.3) denomina-se *lei de Fourier*.

Resumindo o que foi dito até este ponto, as equações que descrevem a evolução do estado de um fluido são obtidas pela aplicação dos princípios de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia, suplementadas por relações constitutivas que permitem expressar de um lado, as forças de superfície que agem sobre um elemento de fluido em função do campo de velocidades e de outro, o fluxo de calor em função do campo de temperaturas.

### 1.3 Operador Derivada Substancial

Outra noção utilizada no desenvolvimento da mecânica dos fluidos é a do operador *Derivada Substancial*. Este operador, quando aplicado a uma propriedade de uma partícula de fluido em movimento, com velocidade  $\mathbf{v}$ , fornece como resultado a derivada total em relação ao tempo da propriedade daquela partícula em movimento. Consideremos a componente  $v_x$  da velocidade da partícula de fluido. Temos que  $v_x = v_x(t, x(t), y(t), z(t))$ . A derivada total de  $v_x$  em relação ao tempo é dada por:

$$\frac{D v_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Observando que  $dx/dt$ ,  $dy/dt$  e  $dz/dt$  são, respectivamente, as componentes de velocidade  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$ , re-escrevemos a derivada  $D v_x / Dt$  na forma:

$$\frac{D v_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} v_x$$

ou ainda:

$$\frac{D}{Dt} v_x = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \right) v_x$$

Utilizando a notação de índices, ou tensorial cartesiana (ver apêndice B):

$$\frac{D v_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_x}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_x}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_x}{\partial x_3} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_x$$

A informação de que a soma deve se fazer sobre todos os valores que o índice  $j$  toma já existe no fato de o mesmo aparecer duas vezes no termo e, com isto, o sinal de somatório é redundante e pode ser dispensado. Obtemos:

$$\frac{D v_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_x = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) v_x$$

Definimos portanto o operador *Derivada Substancial* como:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}$$

Em notação tensorial cartesiana:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

## 1.4 Desenvolvimento da Mecânica dos Fluidos

O desenvolvimento da mecânica dos fluidos pode ser dividido em três fases:

- Até o fim do século XVII: os trabalhos até esta fase foram essencialmente de natureza experimental;
- A partir do século XVIII, foram desenvolvidos trabalhos analíticos por nomes como Euler, D'Alembert e Laplace, que não descreviam no entanto muitos dos fenômenos observados experimentalmente. Este período coincide com o do apogeu do desenvolvimento da mecânica;
- No início deste século ocorreria notável avanço no desenvolvimento da mecânica dos fluidos com a descoberta e a formulação das seguintes teorias:
  - Camada Limite (Prandtl);
  - Sustentação Aerodinâmica (Lanchester-Prandtl);
  - Limite de Estabilidade dos Escoamentos (Reynolds).

A resolução das equações da mecânica dos fluidos exige freqüentemente enorme esforço analítico. Em muitos casos não se consegue uma solução analítica sendo necessário recorrer ao cálculo numérico. Ainda assim faz-se necessário simplificar as equações. Em alguns casos restringe-se o número de variáveis espaciais do problema, elimina-se a dependência do tempo e obtem-se equações que se aplicam a uma importante classe de problemas de interesse tecnológico, como o do aproveitamento de recursos hídricos para a geração de energia elétrica, o dimensionamento de tubulações e a especificação dos parâmetros de bombas e de compressores.

Neste curso procuraremos apresentar as equações gerais que regem os fenômenos de transferência, simplificá-las de modo a obter equações de caráter ainda bastante geral e

identificar alguns resultados qualitativos. Não deixaremos no entanto de abordar alguns problemas de interesse tecnológico e da engenharia metalúrgica em particular.

A dificuldade em tratar os fenômenos que ocorrem nos fluidos decorre de que a evolução do estado do mesmo é regida por leis que se exprimem através de equações a derivadas parciais *não-lineares*. As equações a derivadas parciais refletem a dependência do estado do fluido em relação à posição: o estado em um ponto não determina o que ocorre em outro o que equivale a dizer que há muitos *graus de liberdade*.

A *não-linearidade* das equações de evolução é responsável pela formidável riqueza dos fenômenos observados nos fluidos, dos quais os fenômenos meteorológicos são exemplo eloqüente.

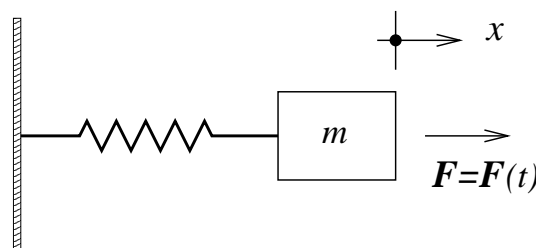
Na segunda metade do século XX descobriu-se, a partir dos trabalhos de Poincaré (1900), que mesmo sistemas com pequeno número de graus de liberdade e cuja evolução é descrita por equações não-lineares determinísticas, podem evoluir de forma imprevisível. Trata-se do fenômeno hoje conhecido como *caos determinístico*.

Equações não-lineares são, por definição, as que contêm termos com *produtos de incógnitas* ou de funções das incógnitas. Examinemos alguns exemplos:

### 1. Sistema massa-mola

Consideremos o sistema massa-mola ilustrado na Fig. (1.4), onde  $m$  e  $\kappa$  são constantes. A equação do movimento deste sistema é dada por  $m\ddot{x} + \kappa x = F(t)$ . Seja qual for a forma da força  $F(t)$  aplicada ao sistema, como por exemplo:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 \\ \sin^2 \omega t \\ \sin \omega t + \sin 2\omega t \end{cases}$$



esta equação será *linear*, pois não contém produtos das incógnitas, que são  $x$  e suas derivadas.

Figura 1.4: Força atuando em um sistema massa-mola

### 2. Equação de difusão da temperatura em sólidos

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho C_p} \nabla^2 T,$$

onde  $C_p$  é o calor específico do material. Esta equação é linear se  $\kappa/\rho C_p$  for constante e não-linear se  $\kappa/\rho C_p$  depender da temperatura.

**3. Pêndulo** A componente da equação do movimento na direção  $\theta$  se escreve na forma:

$$mr\ddot{\theta} + mg \sin \theta = A \sin \omega t$$

Esta equação é *não-linear*, pois

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

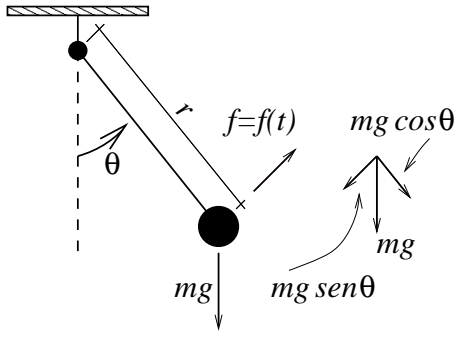


Figura 1.5: Esquema de forças atuando em um pêndulo

ja dinâmica é descrita por:

$$m\ddot{x} + \kappa x = A \sin \omega t \quad t = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

Procuramos uma solução da forma:

$$x = X_0 \sin \omega t,$$

que é uma solução particular da equação acima. Substituindo a solução na equação do movimento encontramos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X_0 \omega \cos \omega t \\ \ddot{x} &= -X_0 \omega^2 \sin \omega t \\ -mX_0 \omega^2 \sin \omega t + \kappa X_0 \sin \omega t &= A \sin \omega t \\ -mX_0 \omega^2 + \kappa X_0 &= A \end{aligned}$$

donde se obtém finalmente:

$$X_0 = \frac{A}{m\omega^2 - \kappa}$$

o que mostra que, ao forçarmos o sistema com  $f(t) = A \sin \omega t$  o mesmo responde na forma:

$$x = \frac{A}{m\omega^2 - \kappa} \sin \omega t,$$

isto é, na mesma frequência. Situação diferente ocorre no caso de um sistema não-linear. Consideremos a equação (Eq. de Duffing):

$$\ddot{x} + x - x^3 = A \sin \omega t$$

Porém, para forçagens de pequena intensidade,  $\theta$  é pequeno e as potências de ordem 3 e superiores podem ser desprezadas. A equação torna-se:

$$\sin \theta = \theta,$$

que é *linear*. Este exemplo mostra que o comportamento não-linear depende não apenas da dinâmica do sistema, mas também do nível de forçagem aplicado ao mesmo.

Sabe-se que sistemas lineares apresentam resposta proporcional ao sinal de *entrada*, ou forçagem. Consideremos o sistema cu-

A equação de Duffing pode ser re-escrita na forma:

$$\ddot{x} + x = A \sin \omega t + x^3$$

Podemos interpretar a equação de Duffing como sendo a de um sistema linear forçado por  $A \sin \omega t$  e, simultaneamente, por  $x^3$ . Se este último contiver novas frequências, o que de fato ocorre, a resposta do sistema conterà estas novas frequências. O processo se repetirá e em pouco tempo a resposta do sistema conterà um largo espectro de harmônicos.

Mostramos a seguir que o termo  $x^3$  contém de fato novos harmônicos:

$$x = A \sin \omega t = A \left( -i \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} \right)$$

$$x^3 = -i A^3 \left( \frac{e^{3i\omega t} - 3e^{i\omega t} + 3e^{-i\omega t} - e^{-3i\omega t}}{8} \right)$$

O exemplo acima mostra capacidade de geração de harmônicos, dos sistemas não-lineares. Adicionalmente, estes sistema exibem duas outras propriedades:

- A capacidade de geração de *sub-harmônicos* (Grossman & Thomae, 1977, Feigenbaum, 1978, Couillet & Tresser, 1978);
- Sensibilidade às condições iniciais: dois sistemas cujas condições iniciais são próximas apresentam comportamento muito distinto ao fim de um intervalo de tempo finito, que torna a evolução dos mesmos imprevisível, mesmo sendo regidos por leis de evolução determinísticas. Esta situação ocorre comumente na mecânica dos fluidos.

## 1.5 Problemas

1. Mostrar que:

- $\frac{D}{Dt}(f + g) = \frac{Df}{Dt} + \frac{Dg}{Dt}$
- $\frac{D}{Dt}(\alpha f) = \alpha \frac{Df}{Dt}$
- $\frac{D}{Dt}(f^\alpha) = \alpha f^{\alpha-1} \frac{Df}{Dt}$

onde  $f = f(t, x, y, z)$ ,  $g = g(t, x, y, z)$  e  $\alpha$  é um número.

2. Mostrar que:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \frac{v^2}{2}$$

onde  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x, y, z)$  e  $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$

3. A temperatura dentro de um túnel varia na forma:

$$T = T_0 - \alpha e^{-x/L} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{\tau}$$

onde  $T_0$ ,  $\alpha$ ,  $L$  e  $\tau$  são constantes e  $x$  é medido a partir da entrada do túnel. Uma partícula move-se com velocidade  $v_x = U_0 \cos(2\pi t/\tau)$  dentro do túnel. Determinar a taxa de variação de temperatura da partícula.

# Capítulo 2

## Conservação da Massa

### 2.1 Equação da Continuidade

Consideremos um volume  $V$ , fixo no espaço, simplesmente conexo, através do qual um fluido com densidade  $\rho$  escoa, sendo  $\mathbf{v}$  o campo de velocidades do escoamento. Sejam  $S$  a superfície externa que delimita o volume e  $\mathbf{n}$  o vetor unitário (de comprimento igual a 1), perpendicular à superfície em cada ponto da mesma e orientado para fora, conforme mostrado na fig. (2.1). O princípio de conservação da massa estabelece que:

$$\left( \begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação de massa dentro} \\ \text{do volume, isto é, a quantidade de mas-} \\ \text{sa acumulada dentro do volume por} \\ \text{unidade de tempo} \end{array} \right) = - \left( \begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de massa para fora} \\ \text{do volume} \end{array} \right) \quad (2.1)$$

Procuramos exprimir de forma matemática a igualdade acima. A taxa de acumulação de massa dentro do volume  $V$  pode ser expressa como a integral sobre todo o volume da variação da quantidade de massa em cada ponto do mesmo:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm$$

Por outro lado, a pequena quantidade de massa  $dm$  pode ser expressa como  $dm = \rho dV$ . Substituindo esta última expressão na integral acima e observando que os volumes  $dV$  não variam com o tempo temos:

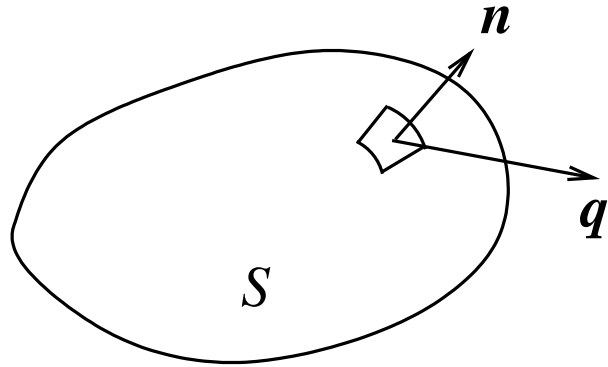


Figura 2.1: Volume de controle ao qual se aplica o princípio de conservação da massa.  $\mathbf{n}$  é o vetor de comprimento unitário perpendicular à superfície no ponto considerado.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \rho \frac{\partial dV}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.2)$$



Para darmos forma matemática ao fluxo líquido de massa para fora do volume  $V$  consideramos inicialmente uma pequena parte da superfície  $S$  conforme mostrado na fig (2.2). Seja  $\Delta V$  um elemento de volume do fluido que cruza a superfície em um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Sejam  $\mathbf{n}$  o vetor unitário perpendicular à superfície e  $\mathbf{v}$ , a velocidade do elemento de fluido considerado. Esta velocidade pode ser decomposta em duas componentes, uma delas paralela a  $\mathbf{n}$ , que denominamos  $v_n$  e outra perpendicular a  $\mathbf{n}$ , que denominamos  $v_p$ .

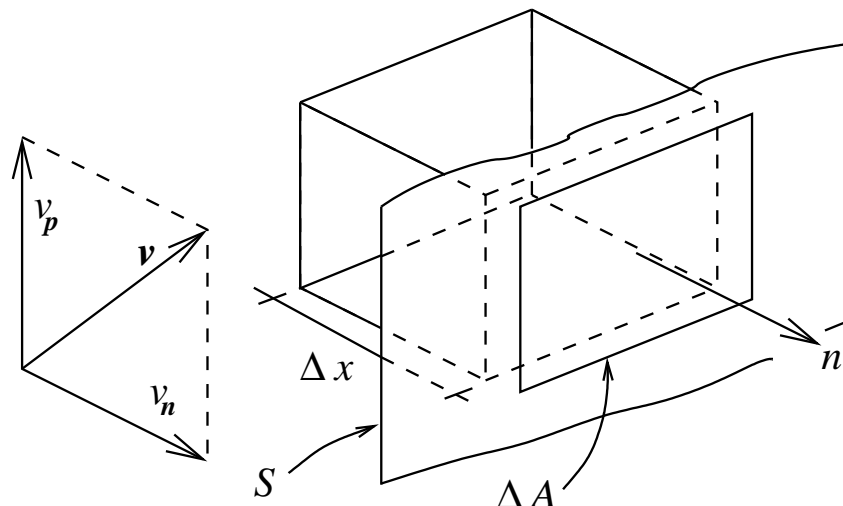


Figura 2.2: Volume de fluido cruzando um elemento da superfície de controle  $S$ .  $v_n$  e  $v_p$  são, respectivamente, as componentes de velocidade perpendicular e paralela à superfície  $S$ .

A contribuição do elemento de fluido para o fluxo de massa que cruza a superfície é dada por:

$$\rho \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

O elemento de volume  $\Delta V$  pode ser escrito como o produto de seu comprimento  $\Delta x$  por sua área transversal  $\Delta A$ , que consideramos paralela à superfície  $S$ . Assim,  $\Delta V = \Delta x \Delta A$  e podemos re-escrever o fluxo de massa que cruza a superfície como:

$$\rho \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta A$$

O termo  $\Delta x / \Delta t$  é precisamente a componente da velocidade do elemento de fluido paralelo a  $\mathbf{n}$ . Apenas esta componente contribui para o fluxo de massa que cruza a superfície. Esta componente pode ser escrita como  $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ . Desta forma a contribuição do elemento  $dV$  para o fluxo de massa toma a forma:

$$\rho \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta A.$$

Se a componente  $v_n$  tiver o mesmo sentido da normal  $\mathbf{n}$ , isto é se o elemento de volume  $dV$  estiver cruzando a superfície para *fora* da mesma, o produto  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  será positivo e se a

componente  $v_n$  tiver sentido *oposto* a  $\mathbf{n}$  o produto escalar será negativo. Ao integrarmos a expressão acima ao longo de toda a superfície  $S$  fazemos automaticamente o balanço do fluxo de massa que *sai* menos o que *entra* no volume  $V$ . Assim, o fluxo líquido para fora do volume é:

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (2.3)$$

Substituindo as expressões (2.2) e (2.3) no balanço de massa (2.1) obtemos a forma integral da equação de conservação da massa:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (2.4)$$

Esta equação relaciona a taxa de acumulação de massa em um volume finito com o balanço dos fluxos de massa que cruzam a superfície. Trata-se de uma equação *integral*. Procuramos agora uma expressão local, isto é, uma equação *diferencial* que traduza o princípio de conservação da massa. Lembrando que, de acordo com o teorema de Gauss:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{q} dV = \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA$$

ou

$$\int_V \operatorname{div} \rho \mathbf{v} dV = \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$$

re-escrevemos a Eq. (2.4) na forma:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div} \rho \mathbf{v} dV.$$

ou:

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) dV = 0$$

Como esta equação deve ser válida para quaisquer volumes, incluindo volumes infinitesimais devemos ter:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \quad (2.5)$$

que é a *equação da continuidade*.

Em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (2.6)$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (2.7)$$

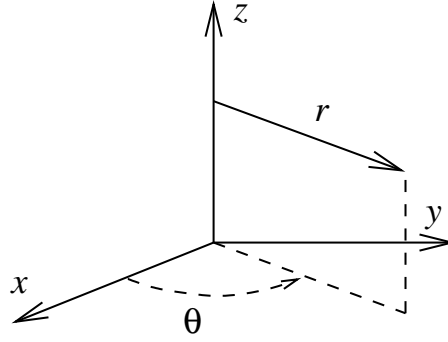


Figura 2.3: Sistema de coordenadas cilíndricas.

Em coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) = 0 \quad (2.8)$$

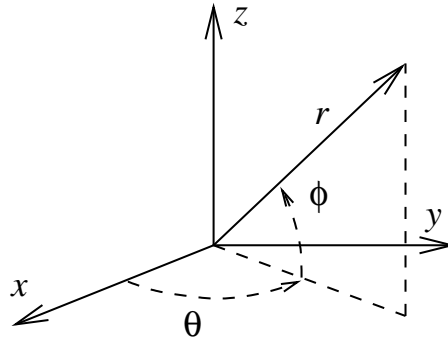


Figura 2.4: Sistema de coordenadas esféricas.

Podemos re-escrever a equação da continuidade como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) &= \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned}$$

ou:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Esta equação pode também ser escrita como:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \right) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

ou:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Na notação dos tensores cartesianos, a equação da continuidade toma a forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0.$$

Em resumo, a equação da continuidade pode ser escrita em qualquer das formas abaixo:

Forma vetorial	Forma tensorial
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0$
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$
$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$	$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$
$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$	$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$

A não-linearidade inerente aos fenômenos que ocorrem em fluidos já se manifesta na equação da continuidade, onde o termo  $\operatorname{div} \rho \mathbf{v}$  é não-linear pois contém o produto de duas incógnitas: a densidade e a própria velocidade. Em alguns casos no entanto, a equação da continuidade torna-se linear:

1.  $\partial \rho / \partial t = 0$  e  $\mathbf{grad} \rho = 0$ , que é o caso de fluidos incompressíveis. Neste caso a equação da continuidade reduz-se a:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

2. Escoamento estratificado, isto é, em camadas de fluidos imiscíveis. Neste caso  $\partial \rho / \partial t = 0$  e  $\mathbf{grad} \rho \perp \mathbf{v}$ . A equação da continuidade toma a forma:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

3. Acústica: Trata-se do caso em que a densidade do fluido está sujeita a variações pequenas em torno de um valor médio,  $\rho_0$ . Escrevemos  $\rho = \rho_0 + \rho'$ , onde  $\rho_0$  não depende nem do tempo nem da posição no espaço. A equação da continuidade toma a forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} (\rho_0 + \rho') + (\rho_0 + \rho') \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Esta equação se simplifica se considerarmos que  $\rho_0$  não depende nem do tempo nem da posição, que  $(\rho_0 + \rho') \approx \rho_0$  e que  $\mathbf{v} \ll \partial\rho'/\partial t$ . A equação da continuidade se reduz a:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

que é uma equação linear.

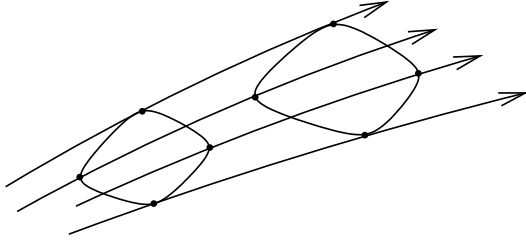


Figura 2.5: Tubo de corrente.

*Linhas de Corrente* são linhas tangentes em todos os pontos, ao vetor velocidade. As linhas de corrente coincidem com as trajetórias quando o escoamento se dá em regime permanente. Um *tubo de Corrente* é formado pelas linhas de corrente que se apoiam em uma curva fechada, conforme mostrado na fig. (2.5).

A equação da continuidade aplicada a tubos de corrente em regime permanente resulta em:

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad \longrightarrow \quad \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

$$\oint_{C_1} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA + \oint_{C_2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0.$$

Se a velocidade for constante ao longo de cada entrada ou saída do tubo de corrente:

$$-(\rho v A)_1 + (\rho v A)_2 = 0.$$

Havendo mais de uma entrada e uma saída do tubo de corrente:

$$-\sum (\rho v A)_e + \sum (\rho v A)_s = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum (\rho v A)_s = \sum (\rho v A)_e$$

Unidades:

$$[\rho v A] = \frac{kg}{m^3} \frac{m}{s} m^2 = \frac{kg}{s}$$

Se a densidade for constante:

$$-\sum (v A)_e + \sum (v A)_s = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum (v A)_s = \sum (v A)_e$$

Unidades:

$$[v A] = \frac{m}{s} m^2 = \frac{m^3}{s}$$

O princípio de conservação da massa permite definir uma função corrente que caracteriza o campo de velocidades. Ganha-se com o fato de se ter apenas uma variável escalar neste caso.

Consideremos um escoamento permanente e bi-dimensional ( $\partial/\partial z = 0$ ) entre duas linhas de corrente, conforme mostrado na fig. (2.6):

O fluxo de massa por unidade de altura  $z$ , ao longo do arco  $AB$  é dado por:

$$\int_A^B \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl.$$

As contribuições de  $v_x$  e de  $v_y$  para a vazão são dadas, respectivamente, por  $\int_{y_A}^{y_B} \rho v_x dy$  e  $\int_{x_A}^{x_B} -\rho v_y dx$ . A vazão total é:

$$\int_A^B \rho(v_x dy - v_y dx)$$

Cada linha de corrente pode ser caracterizada pela vazão entre a mesma e a origem. Este fluxo é a base da descrição de campos bi-dimensionais pelo método das linhas de corrente. Definimos a *Função Corrente* como sendo:

$$\Psi = \int_O^P \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl = \int_O^P \rho(v_x dy - v_y dx)$$

Outra definição da função corrente, aplicável a escoamentos com densidade constante é:

$$\psi = \int_O^P (v_x dy - v_y dx)$$

Unidades:

$$[\Psi] = \frac{kg}{m^3} \frac{m}{s} m = \frac{kg}{m s}$$

$$[\psi] = \frac{m}{s} m = \frac{m^2}{s}$$

A vazão entre duas linhas de corrente será:

$$\Delta\psi = \psi_B - \psi_A$$

No limite de  $A \longrightarrow B$ :

$$d\psi = v_x dy - v_y dx$$

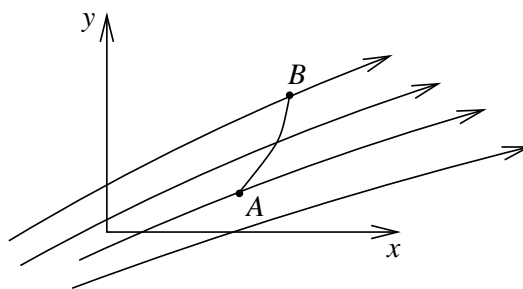


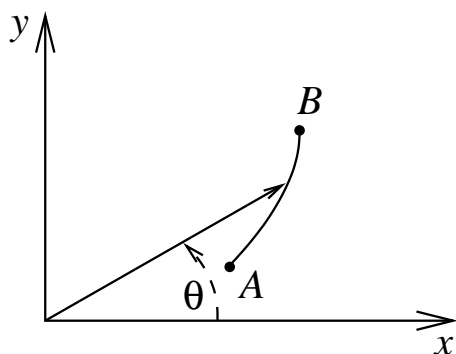
Figura 2.6: Vazão através de uma curva ligando duas linhas de corrente.

Como as variações de  $\psi$  só dependem dos pontos inicial e final,  $d\psi$  pode ser considerada como uma diferencial total:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy$$

Comparando as duas últimas equações vemos que:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$



Consideremos o caso de coordenadas polares, conforme fig. (2.7): a contribuição de  $v_r$  para a vazão total através do arco  $AB$  é dada por  $v_r r d\theta$ , ao passo que a contribuição de  $v_\theta$  é  $-v_\theta dr$ .

Vazão total:

$$\begin{aligned} d\psi &= v_r r d\theta - v_\theta dr \\ d\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial r} dr + \frac{\partial\psi}{\partial\theta} d\theta \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} v_r r = \frac{\partial\psi}{\partial\theta} &\longrightarrow v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ -v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r} &\longrightarrow v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \end{aligned}$$

Figura 2.7: Cálculo da vazão através de uma curva ligando duas linhas de corrente, utilizando coordenadas cilíndricas.

Exemplo: A componente de velocidade  $v_x$  de um escoamento bi-dimensional incompressível é  $v_x = Ax^3 + By^2$ . Determinar a expressão de  $v_y$ . O escoamento é irrotacional? Determinar a forma da função corrente.

$$\begin{aligned} \text{Continuidade:} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = -3Ax^2 &\longrightarrow v_y = \int -3Ax^2 dy = -3Ax^2 y \\ \text{rot } \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Ax^3 + By^2 & -3Ax^2 y & 0 \end{pmatrix} = \\ \left( \frac{\partial}{\partial x}(-3Ax^2 y) - \frac{\partial}{\partial y}(Ax^3 + By^2) \right) \mathbf{k} &= -(6Axy + 2By)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Função corrente:

$$\begin{aligned}\psi &= \int_0^P (v_x dy - v_y dx) = \\ \int_0^y (Ax^3 + By^2) dy + \int_0^x 3Ax^2y dx &= 2Ax^3y + \frac{B}{3}y^3\end{aligned}$$

Exemplo: Um escoamento incompressível tem as seguintes componentes de velocidade:

$$v_r = \frac{A}{r} \quad v_\theta = \frac{A}{r} \quad v_z = 0$$

Mostrar que o escoamento satisfaz à equação da continuidade e deduzir a equação das linhas de corrente.

$$\begin{aligned}\text{Continuidade:} & \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0 \\ \text{Incompressível:} & \quad \text{div } \mathbf{v} = 0\end{aligned}$$

Equação da continuidade em coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\rho \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \rho \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = v_r + r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{A}{r} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{A}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{A}{r} \right) = \left( \frac{A}{r} \right) - r \left( \frac{A}{r^2} \right) &= 0\end{aligned}$$

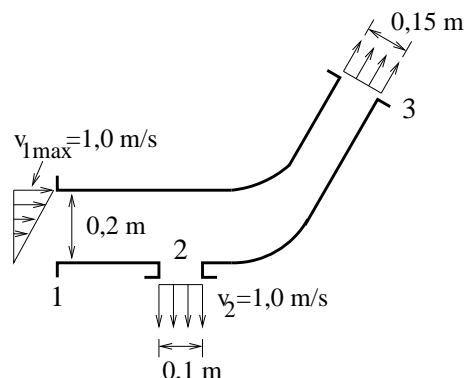
Função corrente:

$$\begin{aligned}v_r = \frac{A}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &\longrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = A \\ v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} &\longrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{A}{r} \\ \psi = \int_0^P \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \psi}{\partial r} dr = \int_0^P A d\theta - A \frac{dr}{r} &\longrightarrow \psi = A(\theta - \ln r)\end{aligned}$$



## 2.2 Problemas

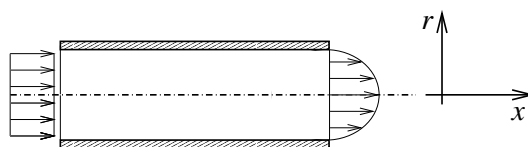
1. Uma curva redutora de um conduto com seção transversal retangular opera conforme o esquema ao lado. O perfil de velocidades varia ao longo da entrada (seção 1) de forma linear e é uniforme nas seções 2 e 3. Determinar a magnitude e sentido da velocidade na seção 3.



2. Água escoar em regime permanente através de um tubo de seção transversal circular e raio  $R = 3\text{ m}$ . Calcule a velocidade uniforme  $U$  na entrada do tubo, sabendo que a distribuição de velocidades na saída é dada por:

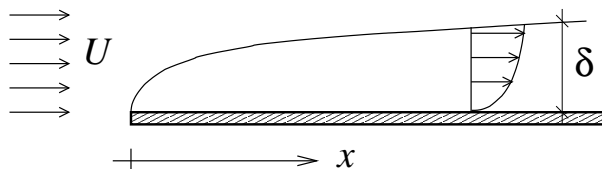
$$v_x = V_{max} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$V_{max} = 3\text{ m/s}$$



3. Uma aproximação para a componente  $v_x$  da velocidade em uma camada-limite bi-dimensional, permanente e incompressível que se forma sobre uma placa plana é dada pela forma:

$$\frac{v_x}{U} = 2\frac{y}{\delta} - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2$$



com  $v_x = 0$  na superfície da placa ( $y = 0$ ) e  $v_x = U$  em  $y = \delta$ , onde  $\delta = cx^{1/2}$  e  $c$  é uma constante. Obter uma expressão para  $v_y$ .

4. O campo de velocidades de um fluido é representado por  $\mathbf{v} = (Ax + B)\mathbf{i} + Cy\mathbf{j} + Dt\mathbf{k}$ , onde  $A = 2\text{ s}^{-1}$ ,  $B = 4\text{ m s}^{-1}$  e  $D = 5\text{ s}^{-2}$  e as coordenadas são medidas em metros. Pede-se:

- Determinar o valor de  $C$  para que o escoamento seja incompressível;
- Calcular a aceleração de uma partícula que se pelo ponto  $(x, y) = (3, 2)$ .

5. Verificar se os campos de velocidade abaixo são compressíveis ou não:

a)  $\mathbf{v} = (y \ln x + 3xy^2 - xz^2)\mathbf{i} - (y^2/(2x) + y^3)\mathbf{j} + z^3/3\mathbf{k}$

b)  $\mathbf{v} = x \sin y \mathbf{i} + y \cos x \mathbf{j}$

# Capítulo 3

## Conservação da Quantidade de Movimento

### 3.1 Introdução

Neste capítulo procuraremos apresentar as equações de conservação da quantidade de movimento, seguindo procedimento semelhante ao adotado na obtenção das equações de conservação da massa: Consideraremos um volume de controle fixo no campo de velocidades de um fluido e estabeleceremos uma equação integral aplicável a este volume. A seguir obteremos a equação de conservação da quantidade de movimento na forma diferencial, utilizando o teorema de Gauss. Para expressarmos as tensões que atuam na superfície de uma partícula de fluido necessitaremos de uma *relação constitutiva*. Exemplo de relação constitutiva é a lei de Hook, que relaciona o estado de tensões em um sólido com o campo de deformações a que o mesmo está submetido. No caso de um fluido, o único tipo de tensão que o mesmo suporta em estado de repouso é o de compressão, causado por efeito da pressão termodinâmica perpendicular à superfície. No entanto, por efeito da viscosidade, os fluidos em movimento suportam tensões paralelas à superfície, bem como de *tração*. Um estado de tensões surge em consequência do *movimento relativo* entre as camadas de fluido. Este estado depende da *taxa de deformação* de uma partícula de fluido. Estudaremos algumas propriedades do tensor de tensões e o caso de fluidos *newtonianos*, que abrange a maior parte dos fluidos de interesse na engenharia. No caso de fluidos newtonianos obtém-se a equação de *Navier-Stokes*. Caso particular das equações obtidas ocorre quando a viscosidade do fluido pode ser desprezada. Para este caso obteremos as equações de Euler e de Bernoulli. Finalmente, abordaremos o caso de fluidos em repouso, isto é, a hidrostática.

Consideremos inicialmente a variação da quantidade de movimento de um corpo rígido apoiado sobre uma superfície horizontal. A taxa de variação da quantidade de movimento é dada por:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \sum \mathbf{F}$$

Na direção vertical:

$$F_y = -mg + F_v = 0$$

A massa do corpo pode ser expressa como  $m = \rho V$  onde  $V$  é o volume do corpo. Distingui-mos dois tipos de forças na expressão acima: o peso, que é uma força de *volume*, aplicada à distância, sem contato direto do corpo que a aplica e a reação da superfície horizontal, que é uma força de *superfície*, aplicada por contato.

Na direção horizontal, temos:

$$\begin{aligned} F_x &= F - \mu mg \quad (F > \mu mg) \\ \frac{d}{dt}(mv_x) &= F - \mu mg \end{aligned}$$

O exemplo acima ilustra o caso de um corpo sólido, em que a taxa de variação da quantidade de movimento é igual à resultante das forças aplicadas.

## 3.2 Equação da Quantidade de Movimento

Consideremos agora um volume fixo no campo de velocidades de um fluido. A taxa de variação da quantidade de movimento deste volume deve incluir, além da resultante das forças aplicadas, o balanço do fluxo de quantidade de movimento através das paredes do volume. Esquematicamente (ver fig. 3.1):

$$\left( \begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação de quantidade de} \\ \text{movimento dentro do volume de con-} \\ \text{trole, isto é, variação da quantidade de} \\ \text{movimento dentro do volume por uni-} \\ \text{dadade tempo} \end{array} \right) = - \left( \begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de quantidade de} \\ \text{movimento para fora do volume} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Resultante das forças aplicadas à} \\ \text{superfície de controle} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Resultante das forças de volume} \end{array} \right) \quad (3.1)$$

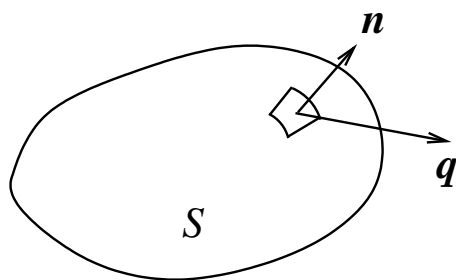


Figura 3.1: Volume de controle ao qual se aplica o princípio de conservação da quantidade de movimento.  $\mathbf{n}$  é o vetor de comprimento unitário perpendicular à superfície no ponto considerado.

Procuramos expressar cada uma das parcelas acima em forma matemática. A taxa de acumulação de quantidade de movimento dentro do volume de controle é dada por:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) dV$$

Vimos no capítulo 4, que o fluxo de massa através de um elemento de área  $dA$  da superfície de controle é dado por  $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$ . Este termo expressa a quantidade de massa que cruza o elemento de área por unidade de tempo. Se o multiplicarmos pela quantidade de movimento por unidade de massa, isto é, pelo vetor velocidade, teremos uma expressão para o fluxo de quantidade de movimento que cruza o elemento de área:  $\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$ .

Integrando este termo ao longo de toda a superfície de controle teremos o fluxo líquido de quantidade de movimento para fora da superfície de controle:

$$\oint_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA.$$

Como dissemos acima, o único tipo de tensão que um fluido em repouso suporta é o de compressão, causado por efeito da pressão termodinâmica perpendicular à superfície. Trata-se de uma força paralela à normal à superfície,  $\mathbf{n}$ , e de sentido contrário ao do vetor normal. Lembrando que os vetores orientados para fora da superfície são positivos, vemos que a pressão resulta em uma força *negativa*. Esta força pode ser representada na forma:

$$\begin{pmatrix} df_x \\ df_y \\ df_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} dA = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} dA$$

Num fluido em movimento com viscosidade a tensão  $\sigma$  não é paralela à normal mas admitimos que possa ser descrita por uma função linear da normal:

$$\begin{pmatrix} df_x \\ df_y \\ df_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} dA \quad (3.2)$$

Na direção  $x$ :

$$df_x = (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z) dA$$

Na direção  $x_i$ :

$$df_i = \sum_{j=1}^{j=3} \sigma_{ij} n_j dA = \sigma_{ij} n_j dA$$

A força resultante agindo em um elemento de área  $dA$  é dada por  $\sigma \mathbf{n} dA$  e a resultante de forças de superfície é obtida integrando-se ao longo de toda a superfície de controle:

$$\oint_S \sigma \mathbf{n} dA.$$

Por fim, a resultante ds forças de volume é dada por:

$$\int_V \rho \mathbf{g} dV$$

Reagrupando os quatro termos obtemos a forma integral da equação de conservação da quantidade de movimento:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \oint_S \sigma \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{g} dV. \quad (3.3)$$

O passo seguinte consiste em transformar as integrais de superfície em integrais de volume por intermédio do teorema de Gauss de forma a que possamos obter a equação de conservação da quantidade de movimento na forma diferencial. Surge a dificuldade de que os termos  $(\rho \mathbf{v} \mathbf{v})$  e  $\sigma$  são *tensores* de segunda ordem e não vetores. Observamos no entanto que a quantidade de movimento, assim como a resultante de forças agindo em um elemento da superfície, são grandezas vetoriais. Se estudarmos a componente segundo cada uma das direções tornamos a ter o produto escalar de um vetor com o vetor unitário, normal à superfície em cada ponto. Nestas condições, podemos aplicar o teorema de Gauss.

Consideremos inicialmente o fluxo líquido de quantidade de movimento na direção  $x$  para fora da superfície de controle:

$$\oint_S \rho v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

O termo  $\rho v_x \mathbf{v}$  é um vetor, que multiplica escalarmente o vetor  $\mathbf{n}$ . Pelo teorema de Gauss temos que:

$$\begin{aligned} \oint_S \rho v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA &= \int_V \operatorname{div} (\rho v_x \mathbf{v}) dV = \\ \int_V \left( \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_x v_z) \right) dV &= \\ \int_V \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_x v_j) dV &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_x v_j) dV \end{aligned}$$

Repetindo o procedimento com o fluxo líquido de quantidade de movimento nas direções  $y$  e  $z$  para fora da superfície de controle temos:

$$\begin{aligned} \oint_S \rho v_y (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA &= \int_V \operatorname{div} (\rho v_y \mathbf{v}) dV = \\ \int_V \left( \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_y v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_y v_z) \right) dV &= \\ \int_V \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_y v_j) dV &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_y v_j) dV \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \oint_S \rho v_z (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA &= \int_V \operatorname{div} (\rho v_z \mathbf{v}) dV = \\ \int_V \left( \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_z v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_z v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z v_z) \right) dV &= \\ \int_V \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_z v_j) dV &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_z v_j) dV. \end{aligned}$$

De forma geral, para a componente de quantidade de movimento na direção  $x_i$ , temos:

$$\oint_S \rho v_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_V \operatorname{div} (\rho v_i \mathbf{v}) dV =$$

$$\int_V \left( \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_i v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_i v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_i v_z) \right) dV =$$

$$\int_V \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) dV$$

Podemos identificar a forma do termo  $(\rho \mathbf{v} \mathbf{v})$  se agruparmos as parcelas do fluxo de quantidade de movimento nas três direções:

$$\oint_S \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \left( \oint_S \rho(v_x v_x n_x + v_x v_y n_y + v_x v_z n_z) dA \right) \mathbf{i} +$$

$$\left( \oint_S \rho(v_y v_x n_x + v_y v_y n_y + v_y v_z n_z) dA \right) \mathbf{j} + \left( \oint_S \rho(v_z v_x n_x + v_z v_y n_y + v_z v_z n_z) dA \right) \mathbf{k} =$$

$$\oint_S \rho \begin{pmatrix} v_x v_x \mathbf{i} & v_x v_y \mathbf{i} & v_x v_z \mathbf{i} \\ v_y v_x \mathbf{j} & v_y v_y \mathbf{j} & v_y v_z \mathbf{j} \\ v_z v_x \mathbf{k} & v_z v_y \mathbf{k} & v_z v_z \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} dA.$$

Portanto:

$$\rho \mathbf{v} \mathbf{v} = \rho \begin{pmatrix} v_x v_x & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & v_y v_y & v_y v_z \\ v_z v_x & v_z v_y & v_z v_z \end{pmatrix}$$

No que diz respeito à resultante de forças agindo na superfície de controle adotamos procedimento semelhante ao seguido no caso do fluxo de quantidade de movimento. Utilizando a eq. (3.2) temos que a resultante de forças de superfície agindo em  $S$  é dada por:

$$F_x = \oint_S p_x dA = \oint_S (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z) dA$$

O termo  $\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z$  pode ser considerado como o produto escalar de um vetor com a normal à superfície:

$$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z = (\sigma_{xx} \mathbf{i} + \sigma_{xy} \mathbf{j} + \sigma_{xz} \mathbf{k}) \cdot (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}).$$

Vemos portanto que a resultante de forças agindo na direção  $x$  pode ser expressa como o produto escalar de um vetor com o vetor unitário normal à superfície no ponto. Utilizando o teorema de Gauss obtemos:

$$F_x = \oint_S p_x dA = \oint_S (\sigma_{xx} \mathbf{i} + \sigma_{xy} \mathbf{j} + \sigma_{xz} \mathbf{k}) \cdot (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}) dA =$$

$$\int_V \text{div} (\sigma_{xx} \mathbf{i} + \sigma_{xy} \mathbf{j} + \sigma_{xz} \mathbf{k}) dV = \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dV =$$

$$\int_V \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{xj}}{\partial x_j} dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{xj}}{\partial x_j} dV$$

Nas direções  $y$  e  $z$ , temos respectivamente:

$$\begin{aligned} F_y &= \oint_S p_y dA = \oint_S (\sigma_{yx} \mathbf{i} + \sigma_{yy} \mathbf{j} + \sigma_{yz} \mathbf{k}) \cdot (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}) dA = \\ &= \int_V \operatorname{div} (\sigma_{yx} \mathbf{i} + \sigma_{yy} \mathbf{j} + \sigma_{yz} \mathbf{k}) dV = \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) dV = \\ &= \int_V \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{yj}}{\partial x_j} dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{yj}}{\partial x_j} dV \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F_z &= \oint_S p_z dA = \oint_S (\sigma_{zx} \mathbf{i} + \sigma_{zy} \mathbf{j} + \sigma_{zz} \mathbf{k}) \cdot (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}) dA = \\ &= \int_V \operatorname{div} (\sigma_{zx} \mathbf{i} + \sigma_{zy} \mathbf{j} + \sigma_{zz} \mathbf{k}) dV = \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dV = \\ &= \int_V \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{zj}}{\partial x_j} dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{zj}}{\partial x_j} dV \end{aligned}$$

De modo geral, na direção  $x_i$ :

$$\begin{aligned} F_i &= \oint_S p_i dA = \oint_S (\sigma_{ix} \mathbf{i} + \sigma_{iy} \mathbf{j} + \sigma_{iz} \mathbf{k}) \cdot (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}) dA = \\ &= \int_V \operatorname{div} (\sigma_{ix} \mathbf{i} + \sigma_{iy} \mathbf{j} + \sigma_{iz} \mathbf{k}) dV = \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial z} \right) dV = \\ &= \int_V \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV. \end{aligned}$$

Re-escrevendo a eq. (3.3) com todos os termos na forma de integrais de volume, temos para a taxa de variação da quantidade de movimento na direção  $x_i$  dentro do volume de controle:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dV = - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho g_i dV.$$

Esta equação deve ser válida para volumes de controle de qualquer dimensão, inclusive para volumes infinitesimais. Considerando um volume infinitesimal e dividindo a equação resultante por  $dV$  encontramos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i$$

ou:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i.$$

Na forma vetorial:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \operatorname{div} \sigma + \rho \mathbf{g}.$$

É conveniente re-escrevermos o tensor de tensões  $\sigma$  como soma de um tensor devido á pressão  $p$  mais outro,  $\tau$  devido á viscosidade:

$$\sigma = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = -p \mathbf{1} + \tau$$

A equação da quantidade de movimento toma a forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\operatorname{div}(p \mathbf{1}) + \operatorname{div} \tau + \rho \mathbf{g}. \quad (3.4)$$

Em notação tensorial:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = -\frac{\partial}{\partial x_j}(p \delta_{ij}) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i. \quad (3.5)$$

onde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Procuramos a seguir desenvolver e simplificar alguns termos da equação da quantidade de movimento, começando pelos termos do membro esquerdo da eq. (3.4). A partir do desenvolvimento do termo  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v})$  podemos escrever:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) &= \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho v_x v_x \mathbf{i} \\ \rho v_y v_x \mathbf{j} \\ \rho v_z v_x \mathbf{k} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho v_x v_y \mathbf{i} \\ \rho v_y v_y \mathbf{j} \\ \rho v_z v_y \mathbf{k} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \rho v_x v_z \mathbf{i} \\ \rho v_y v_z \mathbf{j} \\ \rho v_z v_z \mathbf{k} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} v_x \mathbf{i} \\ v_y \mathbf{j} \\ v_z \mathbf{k} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \begin{pmatrix} v_x \mathbf{i} \\ v_y \mathbf{j} \\ v_z \mathbf{k} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \begin{pmatrix} v_x \mathbf{i} \\ v_y \mathbf{j} \\ v_z \mathbf{k} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) + \\ &+ \rho v_x \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(v_x \mathbf{i}) \\ \frac{\partial}{\partial x}(v_y \mathbf{j}) \\ \frac{\partial}{\partial x}(v_z \mathbf{k}) \end{pmatrix} + \rho v_y \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(v_x \mathbf{i}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(v_y \mathbf{j}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(v_z \mathbf{k}) \end{pmatrix} + \rho v_z \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z}(v_x \mathbf{i}) \\ \frac{\partial}{\partial z}(v_y \mathbf{j}) \\ \frac{\partial}{\partial z}(v_z \mathbf{k}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \mathbf{v} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}.$$



O desenvolvimento acima mostra que podemos escrever, em notação tensorial:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = v_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Usando este último resultado reescrevemos o membro esquerdo da eq. (3.4) com segue:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} =$$

ou então:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = v_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) \right) + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Levando em conta que, pela equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0$$

reescrevemos o membro esquerdo da eq. da quantidade de movimento como segue:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (3.6)$$

Desenvolvemos a seguir o termo  $\frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij})$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(p\delta_{i1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(p\delta_{i2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(p\delta_{i3})$$

Como  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$  apenas o termo em que  $j$  toma o valor particular atribuído a  $i$  é diferente de zero, o que faz com que a soma acima se reduza a:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij}) = \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (3.7)$$

Mas  $\partial p / \partial x_i$  é uma das componentes de **grad**  $p$ , o que nos permite escrever, em notação vetorial:

$$-\text{div}(p \mathbf{1}) = -\mathbf{grad} \, p.$$

Levando os resultados obtidos com as eqs. (3.6) e (3.7) à eq. (3.5) obtemos:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i.$$

Dividindo a igualdade acima por  $\rho$  obtemos a expressão mais geral da equação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i. \quad (3.8)$$

Em notação vetorial:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} (\mathbf{grad} p - \text{div } \tau) + \mathbf{g}. \quad (3.9)$$

Em resumo:

Forma vetorial	Forma tensorial
$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} (\mathbf{grad} p - \text{div } \tau) + \mathbf{g}$	$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) + g_i$
$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} (\mathbf{grad} p - \text{div } \tau) + \mathbf{g}$	$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) + g_i$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) + g_r \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right) + g_\theta \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + g_z \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3.3 Equação de Euler

No caso de fluido sem viscosidade, a eq. (3.9) reduz-se a:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{g} \quad (3.13)$$

ou:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \quad (3.14)$$

que é a Equação de Euler (1775).

A equação de Euler pode ser reescrita sem a pressão, utilizando-se uma equação da termodinâmica e uma identidade vetorial. Sabe-se da termodinâmica (ver Apêndice C) que:

$$T \mathbf{grad} s = \mathbf{grad} h - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p$$

Considerando escoamentos isoentrópicos apenas, esta relação se reduz a:

$$\mathbf{grad} h = \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p \quad (3.15)$$

Para o caso de fluidos incompressíveis a condição de entropia constante equivale a dizer que a temperatura do fluido é constante. Do cálculo vetorial utilizamos a identidade:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} \quad (3.16)$$

onde  $v^2/2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/2$  Combinando as Eqs. (3.13, 3.15 e 3.16) obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = - \mathbf{grad} h + \mathbf{g}$$

Tomamos agora o rotacional da equação acima. Os termos que contém o operador gradiente desaparecem pois  $\mathbf{rot}(\mathbf{grad} f) = 0$  (ver Apêndice B). O termo  $\mathbf{g}$  também desaparece ao calcularmos o rotacional pois as derivadas de uma constante são iguais a zero. Temos então:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}) \quad (3.17)$$

### 3.4 Fluidos Newtonianos

Vimos no capítulo 1, que a tensão de cisalhamento agindo entre camadas de fluido que deslizam uma sobre as outras podem ser escritas na forma  $\tau_{xy} = \mu \partial v_x / \partial y$ . onde  $\mu$  é a *viscosidade dinâmica* do fluido. O termo  $\partial v_x / \partial y$  representa a taxa de deformação angular de um elemento de fluido transportado pelo fluido. Assim, podemos afirmar que a tensão de cisalhamento  $\tau_{xy}$  é proporcional à taxa de deformação angular de um elemento de fluido. Esta observação permite generalizar a expressão acima para o caso em que o fluido tem as duas componentes de velocidade,  $v_x$  e  $v_y$ . Neste caso, devemos levar em conta também a componente  $\partial v_y / \partial x$ , no cálculo da taxa de deformação angular de um elemento de fluido. Considerando a soma das duas contribuições, obtemos:

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right). \quad (3.18)$$

De forma geral:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.19)$$

Esta é a forma da tensão de cisalhamento de um fluido incompressível. Trata-se de uma *relação constitutiva*. Fluidos para os quais a tensão de cisalhamento pode ser descrita na forma acima denominam-se *newtonianos*. Líquidos cuja estrutura molecular é relativamente simples obedecem em geral a esta relação. As tensões de cisalhamento agindo em líquidos com estrutura molecular mais elaborada, em particular os que têm cadeia molecular muito longa, em certas emulsões e em misturas, assim como em líquidos com comportamento elástico, não são descritas pela relação acima. Tais fluidos são encontrados com certa frequência em problemas de engenharia química e de solidificação de materiais fundidos. No entanto trataremos aqui somente de fluidos newtonianos.

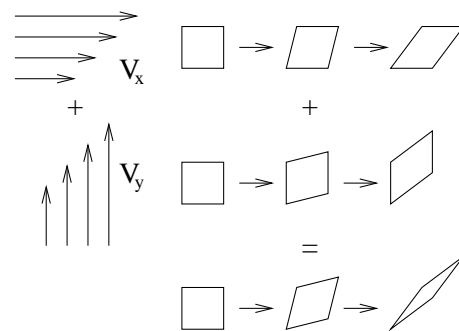


Figura 3.2: Deformação de um elemento de fluido em presença de um gradiente de velocidade.

Cabe ressaltar que ao escrevermos a expressão para a tensão de cisalhamento agindo na face  $x$ , na direção  $y$  obteremos:

$$\tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

que é idêntica à eq. (3.18). Conseqüentemente o tensor  $\tau$  é *simétrico*. De fato,  $\tau$  é sempre simétrico, seja o fluido newtoniano ou não. Esta propriedade decorre da impossibilidade de se aplicar um torque a um elemento de fluido, em virtude de ser o *momento de inércia* do mesmo, nulo.

A equação (3.19) pode ser generalizada para o caso de fluidos compressíveis. Consideremos uma esfera de um fluido compressível dilatando-se e se comprimindo sem alteração de forma. Neste caso não há deslizamento entre camadas adjacentes e portanto não há tensões de cisalhamento paralelas à superfície de cada camada. O único tipo possível de tensão é o perpendicular à superfície do elemento de fluido.

Entretanto espera-se que o movimento pulsante se atenuar, terminando por cessar inteiramente e que a atenuação seja tanto mais rápida quanto mais rapidamente a esfera pulsar. Este movimento implica em variação da densidade da partícula, que pode ser expressa por  $1/\rho D\rho/Dt = -\text{div } \mathbf{v}$ , de acordo com a equação da continuidade. A tensão normal resultante é proporcional a  $\text{div } \mathbf{v}$ . Como foi visto no caso da pressão termodinâmica, para que a tensão seja perpendicular à superfície os elementos da diagonal principal do tensor de tensões devem iguais e os de fora da diagonal devem se anular. Assim, este tipo de tensão normal deve ser da forma:

$$\lambda \begin{pmatrix} \text{div } \mathbf{v} & 0 & 0 \\ 0 & \text{div } \mathbf{v} & 0 \\ 0 & 0 & \text{div } \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad \text{ou:} \quad \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_m}{\partial x_m}.$$

Levando esta última expressão à eq.(3.19) obtemos a equação constitutiva do tensor de tensões de um fluido newtoniano compressível em sua forma mais geral:

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.20)$$

O coeficiente  $\lambda$  denomina-se *segunda viscosidade*.

Em coordenadas cilíndricas:

$$\tau_{rr} = \mu \left( 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \quad (3.21)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \mu \left( 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \quad (3.22)$$

$$\tau_{zz} = \mu \left( 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \quad (3.23)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (3.24)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \quad (3.25)$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \quad (3.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.27)$$

### 3.5 Equação de Navier-Stokes

A equação de Navier-Stokes é obtida substituindo-se o tensor de tensões  $\tau$  da equação do movimento, eq. (3.9), pela equação constitutiva acima. Consideraremos apenas o caso de fluido incompressível. Neste caso o divergente do tensor de tensões  $\tau$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \tau &= \operatorname{div} \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \end{pmatrix} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \end{pmatrix} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\frac{\mu}{\rho} \left( \begin{array}{c} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \end{array} \right) =$$

$$\frac{\mu}{\rho} \left( \begin{array}{c} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{array} \right) = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}$$

O mesmo resultado pode ser obtido utilizando-se a notação tensorial:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_i$$

pois, pela equação da continuidade  $\partial v_j / \partial x_j = 0$ .

O coeficiente  $\mu/\rho$  é denominado como *viscosidade cinemática* do fluido,  $\nu$ . Substituindo esta definição e o resultado acima na eq. (3.8) obtemos a equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i + g_i. \quad (3.28)$$

A equação de Navier-Stokes pode ser escrita de uma das seguintes formas, em coordenadas cartesianas:

Forma vetorial	Forma tensorial
$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}$	$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i$
$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}$	$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} +$$

$$\nu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) + g_r \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} +$$

$$\nu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) + g_\theta \quad (3.30)$$

$$(3.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + g_z \end{aligned} \quad (3.32)$$

A equação de Navier-Stokes pode ser escrita sem a pressão, admitindo-se escoamento isoentrópico e seguindo-se o mesmo procedimento que usamos na dedução da Eq. 3.17. Obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}) + \nu \nabla^2 \mathbf{rot} \mathbf{v} \quad (3.33)$$

## 3.6 Os Números de Reynolds e de Froude

Frequentemente trabalha-se com as variáveis da mecânica dos fluidos na forma adimensional. Surgem então alguns grupos adimensionais como os números de Reynolds e de Froude, conforme mostrado abaixo.

Consideremos o escoamento de um gás sobre um corpo de comprimento  $d$  e sejam  $p_0$  e  $U_0$  a pressão e a velocidade do escoamento longe do aerofólio. A equação de Navier-Stokes toma a forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}.$$

Sejam:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= U_0 \mathbf{v}^* & x_i &= x_i^* d \\ t &= t^* d / U_0 & p &= p^* \rho U_0^2 \end{aligned}$$

onde o asterisco indica variáveis adimensionais. Substituindo as expressões acima na equação de Navier-Stokes encontramos:

$$\frac{U_0^2}{d} \left( \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}^* \right) = -\frac{U_0^2}{d} \mathbf{grad} p^* + \frac{U_0}{d^2} \nu \nabla^2 \mathbf{v}^* + \mathbf{g}.$$

Multiplicando esta equação por  $d/U_0^2$  obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}^* = -\mathbf{grad} p^* + \frac{1}{U_0 d / \nu} \nabla^2 \mathbf{v}^* + \frac{gd}{U_0^{1/2}} \frac{\mathbf{g}}{g}.$$

O grupo adimensional  $Re = U_0 d / \nu$  denomina-se *número de Reynolds* do escoamento. Depende das propriedades físicas do fluido e de características geométricas do corpo sobre o qual o fluido escoa. O grupo adimensional  $Fr = (U_0^2 / gd)^{1/2}$  chama-se *número de Froude*. Usando a definição dos números de Reynolds e de Froude e desprezando os asteriscos reescrevemos a equação de Navier-Stokes na forma adimensional:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = -\mathbf{grad} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{Fr^{1/2}} \frac{\mathbf{g}}{g}. \quad (3.34)$$

A adimensionalização destas equações e a introdução do conceito de número de Reynolds permitem identificar a importância relativa de alguns termos. O termo  $(1/Re)\nabla^2\mathbf{v}$  representa os efeitos viscosos do escoamento. Vê-se que tais efeitos são menos importantes quando o número de Reynolds do escoamento é elevado.

### 3.7 Equação de Bernoulli

Sabe-se do cálculo vetorial, que:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = \mathbf{grad} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}.$$

Substituindo o termo  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}$  da equação de Euler pela expressão acima obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{g}$$

Consideramos o caso de um escoamento incompressível e estacionário ( $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ ) e escrevemos  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} / 2 = v^2 / 2$ . Obtemos:

$$\mathbf{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{g} = \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}.$$

O termo  $\mathbf{g}$  pode ser incorporado ao que contém o gradiente multiplicando-a por  $z$ , pois  $\mathbf{grad} gz = -\mathbf{g}$ , onde  $g = |\mathbf{g}|$ . Obtemos:

$$\mathbf{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) = \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}.$$

A equação acima dá uma primeira indicação da importância dos escoamentos *irrotacionais*: Se o campo de velocidades tiver esta característica  $\mathbf{grad} (p/\rho + v^2/2 + gz) = 0$ , isto é,  $p/\rho + v^2/2 + gz = C^{te}$  em todo o campo. Se  $\mathbf{rot} \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  então  $\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}$  é perpendicular ao vetor velocidade. Consequentemente,  $\mathbf{grad} (p/\rho + v^2/2 + gz)$  é perpendicular à velocidade e  $p/\rho + v^2/2 + gz = C^{te}$  ao longo de uma linha de corrente. A forma:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = C^{te} \tag{3.35}$$

é conhecida como Equação de Bernoulli. Nesta forma, a constante da equação é medida em unidades de  $[v^2/2]$ . Outras formas possíveis são:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = C^{te} \quad \left[ \frac{N}{m^2} \right] \quad (\text{Aerodinâmica}) \tag{3.36}$$

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = H \quad [m] \quad (\text{Hidráulica}) \tag{3.37}$$

A equação de Bernoulli é usada em tubos de corrente, nos escoamentos unidimensionais permanentes.



A constante da forma utilizada na hidráulica denomina-se *linha de carga* ou *altura de carga*. Na prática há um *declive hidráulico*, que vem a ser um decréscimo do nível da linha de carga ao longo de uma tubulação, em virtude dos efeitos viscosos que foram desprezados na dedução da equação de Bernoulli. Esquematicamente:

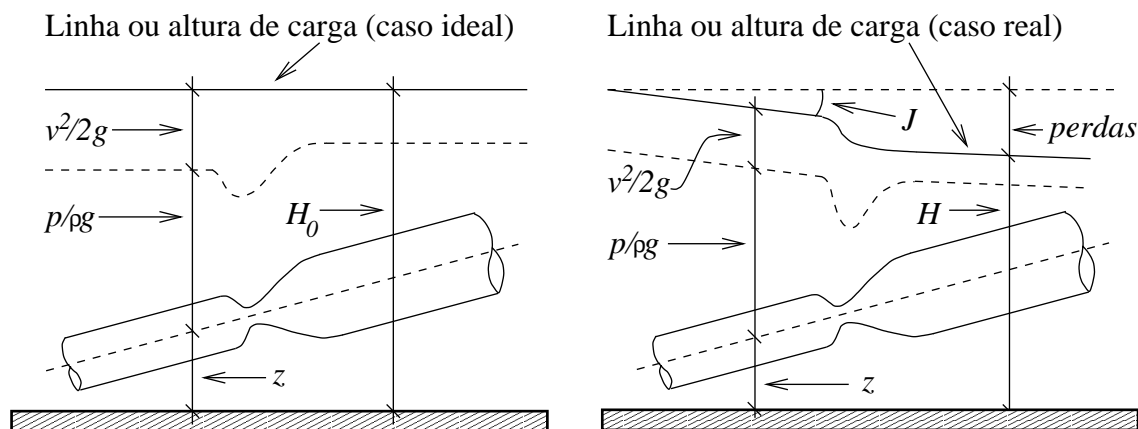


Figura 3.3: Esquema de composição da carga hidráulica de uma tubulação para o caso ideal, sem perdas e para o caso real. A carga se divide em três parcelas que correspondem, respectivamente, à altura média da tubulação ( $z$ ), ao termo de pressão ( $p/\rho g$ ) e ao termo de velocidade, ( $v^2/2g$ ). O parâmetro  $J$  é a *declividade hidráulica* da linha.

Nos problemas de engenharia trabalha-se com uma equação de Bernoulli corrigida de modo a levar em conta estas perdas:

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z + \sum \text{perdas} = H_0. \quad (3.38)$$

O estudo das perdas de carga em tubulações foi feito de forma empírica e o resultado é dado por um gráfico de *perdas de carga* adimensionalizadas em relação a  $v^2/2g$  por unidade de comprimento da tubulação. Este comprimento é expresso em número de diâmetros. A perda de carga é dada em função do número de Reynolds do escoamento:

$$f = \frac{\Delta H/(v^2/2g)}{L/D} = f(Re). \quad (3.39)$$

Este coeficiente foi determinado por Reynolds, Hagen, Poiseuille, Bazin, Nikuradse e Moody. O coeficiente é dado na forma de um gráfico conhecido como diagrama de Moody. O gráfico permite a determinação das perdas de carga distribuídas. Curvas, mudanças de direção, registros, etc., contribuem para perdas localizadas, que são dadas normalmente em unidades de comprimento adimensional equivalente da tubulação ( $L/D$ ).

## 3.8 Hidrostática

No caso de fluidos em repouso no campo gravitacional a equação de Euler toma a forma:

$$\text{grad } p = \rho \mathbf{g} \quad (3.40)$$

Se um fluido como a atmosfera estiver em equilíbrio no campo gravitacional o gradiente de pressão é paralelo à aceleração da gravidade, isto é, a pressão só depende de  $z$ . Consequentemente a densidade é dada por:

$$\rho = -\frac{1}{g} \frac{dp}{dz}$$

e depende da temperatura somente. A pressão e a densidade determinam a temperatura, que por sua vez, também depende apenas de  $z$ . Portanto, pressão, densidade e temperatura dependem apenas da altitude, se a atmosfera estiver em equilíbrio. Esta propriedade mostra que se a temperatura na mesma cota for diferente em diferentes latitudes o estado de repouso não é mais possível.

### 3.9 Problemas

1. O número de Reynolds crítico para a transição laminar-turbulento em tubos é  $Ud/\nu = 2000$ . Qual o valor crítico da velocidade  $U$  em tubos de diâmetro  $d = 6 \text{ cm}$  e  $d = 60 \text{ cm}$  para:

	T (K)	$\mu$ (N/sm <sup>2</sup> )	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Água	300	$855 \times 10^{-6}$	1017
Ar	300	$18,46 \times 10^{-6}$	0,861
Óleo lubrificante	350	$3,56 \times 10^{-2}$	853,9
Etilenoglicol	350	$0,342 \times 10^{-2}$	1079

2. As equações da continuidade e de Navier-Stokes para o escoamento bi-dimensional de um fluido incompressível são:

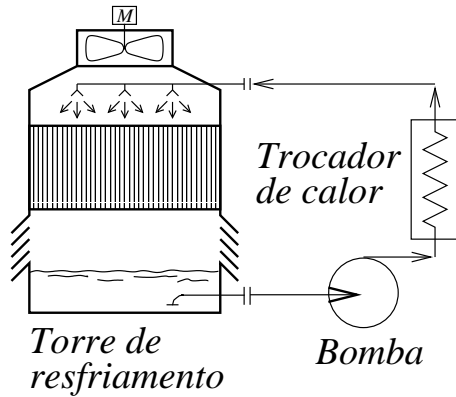
$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$ . Mostrar que este sistema pode ser reduzido à forma:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega \qquad \omega = \mathbf{rot} \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Sugestão: Derivar a equação de  $v_y$  em relação a  $x$ , a de  $v_x$  em relação a  $y$ , subtrair uma da outra, utilizar a equação da continuidade e a definição de  $\mathbf{rot} \mathbf{v}$ .

3. Calcular a altura manométrica total e a potência da bomba de um sistema de água de resfriamento conforme fluxograma abaixo.



- Vazão do sistema:  $240 \text{ m}^3/\text{h}$ ;
- Diâmetro da tubulação:  $\phi = 150 \text{ mm}$ ;
- Comprimento da tubulação:  $200 \text{ m}$ ;
- Densidade da água:  $991 \text{ kg/m}^3$ ;
- $\nu = 1,0019 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ;
- Perda de carga na torre:  $\Delta H = 6 \text{ m}$ ;
- Perda de carga no trocador (em  $m$ ):  $\Delta H = 15(v^2/2g)$ , onde  $v$  é a velocidade do escoamento através dos tubos do trocador (diâmetro dos tubos:  $\phi_T = 125 \text{ mm}$ );
- $H = \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z + \sum \text{perdas}$

4. Uma tubulação é utilizada para elevar água ( $\rho = 1013 \text{ kg/m}^3$ ) entre dois pontos. A diferença de nível (altura) entre os dois pontos é de  $5,0 \text{ m}$ . A curva característica da bomba e a curva da perda de carga da tubulação por efeito viscoso são dadas pela tabela abaixo. Pede-se determinar:

- A vazão de operação do sistema de bombeamento;
- A potência de bombeamento requerida, no ponto de operação do sistema.

$Q_{vol} \text{ (m}^3/\text{s)}$	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
$\Delta H_B \text{ (m)}$	13,0	12,5	11,9	11,4	10,8	10,3	9,50	8,65	7,80	6,90	5,70
$\Delta H_T \text{ (m)}$	5,93	6,45	7,08	7,83	8,70	9,69	10,8	12,0	13,3	14,8	16,3

onde:

- $Q_{vol}$ : Vazão volumétrica da bomba ou da tubulação;
- $\Delta H_B$ : Altura manométrica da bomba;
- $\Delta H_T$ : Perda de carga da tubulação por efeito viscoso.

5. Um vórtice de eixo vertical dentro d'água tem as seguintes características:

- Região  $0 < r \leq 1 \text{ m}$ : rotação em bloco com velocidade angular  $\Omega = 2 \text{ rad/s}$ ;
- Região  $1 \text{ m} < r < \infty$ : vórtice potencial com velocidade tangencial  $v_\theta = 2/r$ ;

Pede-se:

- Qual é a vorticidade na região interna? e na região externa?
- Qual é a circulação sobre uma circunferência de raio  $r_0 = 1 \text{ m}$  com centro na origem?

- Mostrar que o vórtice é uma solução estacionária das equações de Navier-Stokes;
- Pode-se aplicar a equação de Bernoulli na região interna? e na região externa?
- Calcular o perfil da superfície livre da água admitindo como referência o nível da água em  $r \rightarrow \infty$ .

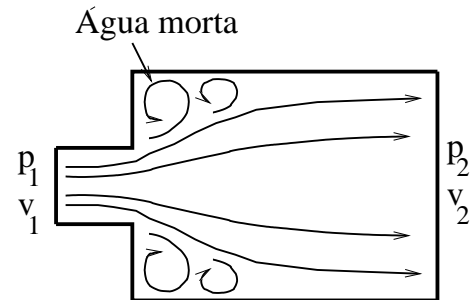
6. A experiência mostra que num alargamento brusco da seção de um tubo ocorre o descolamento dos filetes e a formação de uma região de *água morta*, que praticamente não exerce tensões tangenciais sobre as paredes. Mostrar que:

- No caso de um fluido incompressível, um alargamento brusco de seção resulta em:

$$p_1 - p_2 = \rho v_2(v_2 - v_1)$$

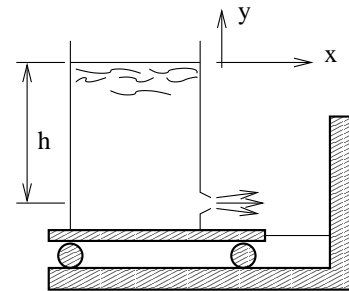
- A “perda de carga” em comparação com a equação de Bernoulli é:

$$\Delta p = \frac{\rho(v_1 - v_2)^2}{2}$$

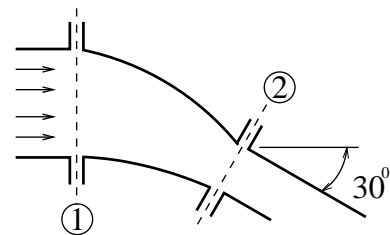


7. Um tanque de diâmetro  $D$  é cheio com água e preso a um carro conforme a figura abaixo. A água escoá através de um bocal de diâmetro  $d$ , situado na parte inferior do tanque e o carro é impedido de se movimentar através de um cabo, fixo à parede vertical. Pede-se:

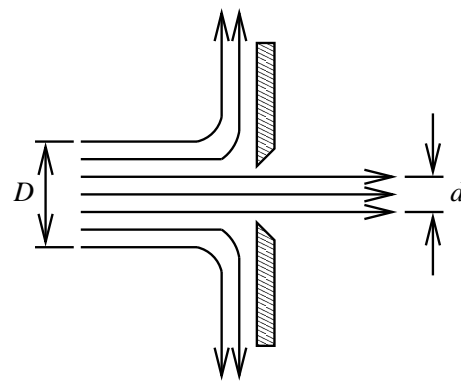
- Deduzir uma expressão para a velocidade da água na saída do bocal;
- Uma expressão para a força atuando no cabo, em função da altura  $h$ .



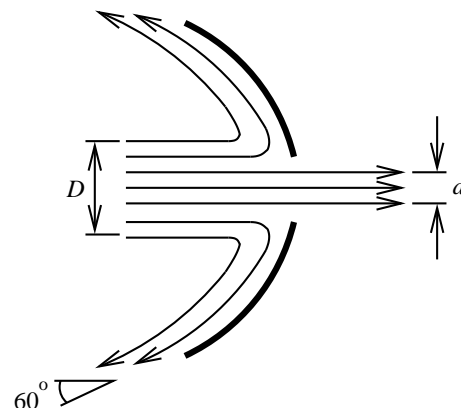
8. A figura ao lado mostra uma curva redutora de  $30^\circ$  no plano horizontal, através da qual escoá água ( $\rho = 1010 \text{ kg/m}^3$ ). Determinar as forças horizontais aplicadas pelos tubos adjacentes sobre a curva para sustentá-la, sabendo que a vazão volumétrica é  $Q = 0,11 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $p_1 = 200 \text{ kPa}$ ,  $A_1 = 0,0182 \text{ m}^2$ ,  $p_2 = 120 \text{ kPa}$  e  $A_2 = 0,0081 \text{ m}^2$ .



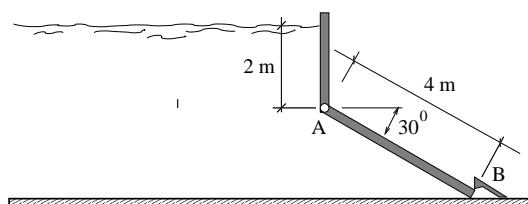
9. Um jato de fluido com densidade  $\rho$  e diâmetro  $D$  incide com velocidade  $V$  sobre um anteparo conforme figura ao lado. Parte do jato atravessa o anteparo através de um orifício de diâmetro  $d$ , saindo com velocidade  $V$  e o restante é desviado perpendicularmente ao jato incidente. Determinar a magnitude e sentido da força que deve ser aplicada ao anteparo para mantê-lo em equilíbrio.



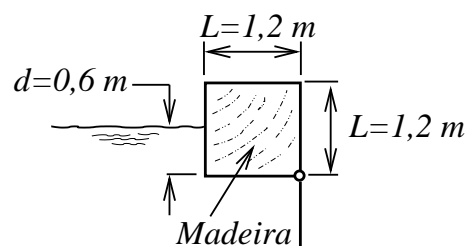
10. Um jato de fluido com densidade  $\rho$  e diâmetro  $D$  incide com velocidade  $V$  sobre um anteparo. Parte do jato atravessa o anteparo através de um orifício de diâmetro  $d$  e o restante é desviado conforme figura ao lado. Determinar a magnitude e sentido da força que deve ser aplicada ao anteparo para mantê-lo em equilíbrio, sabendo que a velocidade dos jatos que deixam o anteparo é igual a  $V$ .



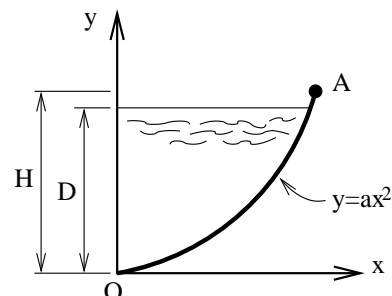
11. Uma comporta plana de espessura uniforme e largura de  $5\text{ m}$  suporta a pressão de uma camada de água ( $\rho = 1016\text{ kg/m}^3$ ), conforme figura ao lado. Determinar os esforços nos pontos A e B devidos à pressão hidrostática.



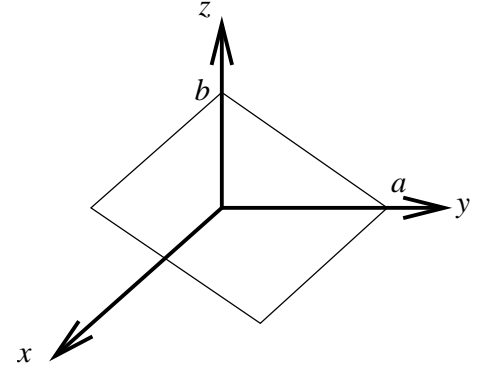
12. Um bloco de madeira longo, de seção quadrada, é articulado em uma de suas arestas e se encontra em equilíbrio quando imerso em água à profundidade mostrada. Avalie a densidade relativa da madeira,  $\rho_{\text{mad.}}/\rho_{\text{água}}$ , desprezando o atrito no pivô.



13. Determinar os esforços por unidade de largura, atuando nos pontos O e A para que a comporta conforme o esquema ao lado permaneça em equilíbrio.



14. O campo de velocidades de um fluido incompressível com densidade  $\rho$  é dado por  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$ , onde  $v_x = Axy^2$ , sendo  $A$  uma constante. Determinar a componente  $v_y$  do campo e os fluxos de massa, quantidade de movimento e energia cinética transportados por este escoamento através do retângulo que tem dois lados paralelos ao eixo  $x$ , localizados em  $y = a$  e  $z = b$ , respectivamente, conforme mostrado na figura.



15. Dado o campo de velocidades bi-dimensoral definido por:

$$\begin{aligned} v_r &= U_0 \left( 1 - \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right) \cos \theta \\ v_\theta &= -U_0 \left( 1 + \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned}$$

Pede-se:

- Mostrar que este campo representa uma solução do escoamento irrotacional *não-viscoso* sobre um cilindro de raio  $a$ , sendo que o módulo da velocidade tende a  $U_0$  longe do cilindro;
  - Mostrar que a circulação em torno do cilindro é igual a  $\Gamma$ ;
  - Determinar a distribuição de pressões sobre o cilindro e mostrar que a força de sustentação agindo por unidade de comprimento do cilindro é dada por  $L = -\rho U_0 \Gamma$ , onde  $\rho$  é a densidade do fluido.
16. Escrever as equações de Euler e de Navier-Stokes sem a pressão, (Eqs. 3.17 e 3.33) utilizando a notação tensorial cartesiana.



# Capítulo 4

## Conservação da Energia

### 4.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos as diversas equações que resultam da aplicação do princípio de conservação da energia ao escoamento de um fluido. Se de um lado este tratamento é facilitado pelo fato de ser a energia uma grandeza *escalar*, ao contrário do que ocorre no caso da equação de conservação da quantidade de movimento que é *vetorial*, o número de equações que obteremos é maior.

Procuraremos obter as equações de evolução da energia cinética de uma partícula de fluido, da soma de sua energia cinética com a energia interna e de sua energia interna somente. Obteremos duas equações de evolução da entalpia de uma partícula, das quais uma é largamente utilizada em problemas de escoamentos compressíveis unidimensionais. Abordaremos também o problema do balanço de energia de equipamentos de processo.

A equação de evolução da entropia surge da comparação da equação da entalpia com uma equação da termodinâmica e mostra que a dissipação viscosa torna irreversível o processo de evolução de massas de fluido. No entanto, em escoamentos onde o número de Reynolds é alto a dissipação viscosa é pequena na maior parte do campo. Neste caso a dissipação devida a efeitos viscosos só é importante em regiões onde o gradiente de velocidade é elevado, como por exemplo em camadas limite e em interfaces entre jatos e meios que se encontram em repouso. A produção de entropia devida a efeitos viscosos se concentra portanto apenas nestas regiões.

Mas a irreversibilidade não ocorre somente na presença de efeitos viscosos. Ela surge também em processos de *mistura* como por exemplo, o de massas contendo espécies químicas diferentes, ou o de massas a temperaturas diferentes. Estes processos ocorrem comumente na dinâmica da atmosfera e dos oceanos.

Conseqüência importante dos processos irreversíveis é a produção de *vorticidade* associada aos mesmos. Apresentaremos alguns resultados que relacionam variações de entropia com a produção de vorticidade e com a *circulação*.

Obteremos por fim, a equação da evolução da temperatura de uma partícula para o caso de fluido incompressível. Esta equação reduz-se à de condução de calor em sólidos, no caso em que o campo de velocidades é identicamente nulo.



## 4.2 Equação da Energia Cinética ( $v^2/2$ )

A equação da energia cinética é obtida multiplicando-se a equação de conservação da quantidade de movimento escalarmente pela velocidade.

A equação de conservação da quantidade de movimento se escreve:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}(\mathbf{grad} p - \text{div } \tau) + \mathbf{g}.$$

Multiplicando-a escalarmente pela velocidade obtemos:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \text{div } \tau + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}.$$

Mostraremos que esta equação descreve de fato a evolução da energia cinética de uma partícula de fluido. Para isto, desenvolvemos o termo  $\mathbf{v} \cdot D\mathbf{v}/Dt$ .

$$\mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} \right) = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}) \quad (4.1)$$

Lembrando que  $\partial f^2/\partial x = 2f \partial f/\partial x$  e que portanto  $\partial(f^2/2)/\partial x = f \partial f/\partial x$  e que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \equiv v^2$ , reescrevemos o primeiro termo acima:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v_x^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v_y^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v_z^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Desenvolvendo o segundo termo do membro direito da expressão (4.1) obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}) &= v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} v_x) + v_y (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} v_y) + v_z (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} v_z) = \\ &= v_x \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + v_y \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \\ &+ v_z \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ &= v_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_x^2}{2} \right) + v_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_x^2}{2} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_x^2}{2} \right) + \\ &+ v_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_y^2}{2} \right) + v_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_y^2}{2} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_y^2}{2} \right) + \\ &+ v_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_z^2}{2} \right) + v_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_z^2}{2} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_z^2}{2} \right) = \\ &= v_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} \right) + v_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} \right) = \\ &= v_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} \right) + v_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v^2}{2} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right)$$

que é a derivada substancial da energia cinética por unidade de massa de uma partícula de fluido em movimento, ou seja a taxa de variação por unidade de tempo da energia cinética da partícula. Conseqüentemente, ao multiplicarmos a equação de conservação da quantidade de movimento escalarmente pela velocidade obtemos a primeira das equações procuradas:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \text{div} \tau + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}. \quad (4.2)$$

O desenvolvimento acima pode ser feito de forma mais simples utilizando-se a notação tensorial. Neste caso partimos da equação de conservação da quantidade de movimento nesta última forma:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) + g_i$$

Multiplicando-a escalarmente pela velocidade devemos obter um equação *escalar*, isto é sem índices livres. Como o índice livre da equação é  $i$  devemos multiplicá-la por  $v_i$ . Obtemos:

$$v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v_i v_i}{2} \right) + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_i v_i}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \left( v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) + v_i g_i.$$

Como  $v_i v_i = v_x v_x + v_y v_y + v_z v_z = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$  temos:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \left( v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) + v_i g_i. \quad (4.3)$$

### 4.3 Equação da Energia Total ( $e + v^2/2$ )

A equação da energia total é obtida através de procedimento semelhante ao adotado quando deduzimos as equações da continuidade e de conservação da quantidade de movimento: considera-se um volume de controle fixo no espaço e iguala-se a taxa de variação da energia dentro do mesmo com o balanço dos diversos fatores que contribuem para que a energia total contida dentro do volume varie. Obtem-se a forma integral da equação de energia. Com o auxílio do teorema de Gauss passa-se à forma diferencial.

Consideremos um volume fixo no campo de velocidades de um fluido, conforme fig. (4.1). A taxa de variação da energia total ( $e + v^2/2$ ) dentro deste volume deve incluir o balanço do fluxo de energia através das paredes do volume, o trabalho das forças de superfície e de volume, o balanço do fluxo de calor através da superfície de controle e o

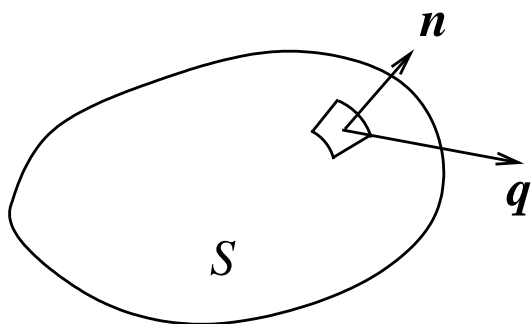
calor eventualmente gerado dentro do volume por reações químicas, efeito Joule ou de outra forma.

Esquemáticamente:

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação de } (e + v^2/2) \text{ dentro do volume de controle,} \\ \text{isto é, variação de } (e + v^2/2) \text{ dentro do volume por unidade de tempo} \end{array} \right) \\
 & = \\
 & - \left( \begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de } (e + v^2/2) \text{ para fora} \\ \text{do volume} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Trabalho das forças aplicadas à su-} \\ \text{perfície de controle por unidade de} \\ \text{tempo} \end{array} \right) \\
 & + \\
 & \left( \begin{array}{l} \text{Trabalho das forças de volume por} \\ \text{unidade de tempo} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de calor para fora do} \\ \text{volume} \end{array} \right) \\
 & + \\
 & \left( \begin{array}{l} \text{Taxa de geração de calor dentro do volume} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Procuramos expressar cada uma das parcelas acima em forma matemática. A taxa de acumulação de  $(e + v^2/2)$  dentro do volume de controle é dada por:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV$$



Para calcularmos o fluxo líquido de  $(e + v^2/2)$  para fora do volume lembramos que o fluxo de massa através de um elemento de área  $dA$  da superfície de controle é dado por  $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$ . Se o multiplicarmos pela energia total por unidade de massa, isto é, por  $(e + v^2/2)$ , teremos uma expressão para o fluxo de energia total que cruza o elemento de área:  $\rho (e + v^2/2) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$ . Integrando este termo ao longo de toda a superfície de controle teremos o fluxo líquido de energia para fora da superfície de controle:

$$\oint_S \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA.$$

Figura 4.1: Volume de controle ao qual se aplica o princípio de conservação da energia.  $\mathbf{n}$  é o vetor de comprimento unitário perpendicular à superfície no ponto considerado.

O trabalho por unidade de tempo das forças de superfície é dado pelo produto escalar da força com a velocidade local. O elemento de força de superfície é, por sua vez, dado por  $(-p\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{n} dA$  conforme visto no capítulo anterior. O trabalho elementar por unidade de tempo das forças de superfície é então dado por  $\mathbf{v} \cdot (-p\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{n} dA$ .

O trabalho elementar por unidade de tempo das forças de volume é dado pelo produto escalar das forças de volume, que no caso presente é a força gravitacional, com o vetor velocidade:  $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} dV$ .

Integrando o primeiro termo ao longo de toda a superfície de controle e o segundo em todo o volume obtemos:

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot (-p\mathbf{1} + \tau) \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} dV$$

O fluxo de calor para fora do volume de controle através de um elemento de área  $dA$  da superfície é dado por  $-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA$ .

O calor gerado em um elemento de volume por unidade de tempo é dado por  $\dot{Q} dV$ .

Integrando o primeiro termo ao longo de toda a superfície de controle e o segundo em todo o volume obtemos:

$$-\oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \dot{Q} dV$$

Reagrupando todos os termos obtemos a equação da energia total na forma integral:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV &= -\oint_S \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \oint_S \mathbf{v} \cdot (-p\mathbf{1} + \tau) \cdot \mathbf{n} dA + \\ &\quad \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} dV - \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \dot{Q} dV. \end{aligned}$$

Os termos que multiplicam o fator  $\mathbf{n} dA$  nas integrais de superfície são grandezas vetoriais. O teorema de Gauss aplica-se portanto e estas integrais podem ser transformadas em integrais de volume. A forma integral da equação da energia total pode então ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV &= -\int_V \text{div} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} dV + \int_V \text{div} (\mathbf{v} \cdot (-p\mathbf{1} + \tau)) dV + \\ &\quad \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} dV - \int_V \text{div} \mathbf{q} dV + \int_V \dot{Q} dV. \end{aligned}$$

A equação acima deve se aplicar para volumes de qualquer dimensão, particularmente, para volumes infinitesimais  $dV$ . Considerando este último caso e dividindo a equação resultante por  $dV$  obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = -\text{div} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} + \text{div} (\mathbf{v} \cdot (-p\mathbf{1} + \tau)) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \text{div} \mathbf{q} + \dot{Q}$$

ou ainda:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \text{div} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} = \text{div} (\mathbf{v} \cdot (-p\mathbf{1} + \tau)) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \text{div} \mathbf{q} + \dot{Q}. \quad (4.4)$$

Os dois termos do membro esquerdo da equação acima se simplificam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \text{div} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \\ \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{v} \right) &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \\ &= \rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \end{aligned}$$

pois  $\partial\rho/\partial t + \text{div } \rho\mathbf{v} = 0$  (equação da continuidade).

Os dois termos da eq.(4.4) podem ser facilmente simplificados se usarmos notação tensorial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \text{div } \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} &\longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) v_i = \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \rho v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) &+ \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} \right) = \rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \end{aligned}$$

pois  $\partial\rho/\partial t + \text{div } \rho\mathbf{v} = 0$ .

Os termos  $\text{div } (\mathbf{v} \cdot (-p\mathbf{1} + \tau))$  e  $-\text{div } \mathbf{q}$  da eq. (4.4) também podem ser reescritos:

$$\text{div } (\mathbf{v} \cdot (-p\mathbf{1} + \tau)) = -\text{div } \mathbf{v} \cdot (p\mathbf{1}) + \text{div } \mathbf{v} \cdot \tau = -\text{div } \mathbf{v}p + \text{div } \mathbf{v} \cdot \tau$$

pois sendo  $\mathbf{1}$  a matriz identidade, o produto do vetor  $\mathbf{v}p$  pela mesma resulta no vetor  $\mathbf{v}p$  transposto.

O termo  $-\text{div } \mathbf{q}$  pode ser reescrito levando-se em consideração a lei de Fourier, segundo a qual  $\mathbf{q} = -\kappa \mathbf{grad } T$ . Obtemos  $-\text{div } \mathbf{q} = \kappa \text{div } (\mathbf{grad } T) = \kappa \nabla^2 T$ .

Reagrupando os termos, obtemos a equação da energia total:

$$\frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \text{div } \mathbf{v}p + \frac{1}{\rho} \text{div } \mathbf{v} \cdot \tau + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.5)$$

Na forma tensorial:

$$\frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p v_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \tau_{ij} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.6)$$

## 4.4 Equação da Energia Interna (e)

Subtraindo-se a equação da energia cinética, eq. (4.3) da eq. (4.6) obtemos a equação de evolução da *energia interna*,  $De/Dt$ . Antes porem reescrevemos a eq. (4.6) desenvolvendo os dois primeiros termos do membro direito da mesma:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) &= -\frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) &= -\frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + v_i g_i. \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira obtemos:

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{1}{\rho} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.7)$$

Na forma vetorial:

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{1}{\rho} p \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.8)$$

Podemos interpretar os termos das equações da energia total e da energia interna: o termo  $v_i \partial p / \partial x_i$  representa a contribuição do trabalho devido à resultante das forças de pressão, na variação da energia cinética da partícula de fluido. O termo  $v_i \partial \tau_{ij} / \partial x_j$  representa a contribuição dos efeitos viscosos sobre a energia cinética.

O termo  $p \partial v_i / \partial x_i$  representa a variação da energia interna devida ao trabalho de compressão da partícula de fluido sob efeito da pressão. Esta conclusão decorre do fato de que  $1/\rho D\rho/Dt = -\operatorname{div} \mathbf{v}$ , de acordo com a equação da continuidade. Em outras palavras,  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  é a “velocidade” de variação da densidade da partícula.

O termo  $\tau_{ij} \partial v_i / \partial x_j$  (ou  $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad} \mathbf{v}$ ) representa a contribuição dos efeitos viscosos na variação da energia interna da partícula.

## 4.5 Função Dissipação ( $\Phi$ )

Mostraremos que, no caso de fluidos newtonianos, o termo  $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad} \mathbf{v}$  é sempre positivo, o que implica em que, neste tipo de fluido, os efeitos viscosos contribuem sempre para o aumento da energia interna da partícula. Trataremos apenas do caso de fluidos incompressíveis.

Rescrevendo o termo  $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad} \mathbf{v}$  na forma tensorial e substituindo  $\boldsymbol{\tau}$  pela relação constitutiva dos fluidos newtonianos temos:

$$\tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

O tensor de componentes  $\tau_{ij}$  é simétrico, isto é, o elemento localizado na linha  $i$ , coluna  $j$  é igual ao elemento localizado na linha  $j$ , coluna  $i$ . Isto pode ser verificado substituindo-se  $i$  por  $j$  na equação constitutiva do tensor de tensões:

$$\tau_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \tau_{ij}$$

O gradiente de velocidades é um tensor de segunda ordem, que pode ser decomposto na soma de um tensor simétrico com outro anti-simétrico. Um tensor de segunda ordem, cujo elemento geral é  $a_{ij}$  é anti-simétrico se  $a_{ij} = -a_{ji}$ . Mostremos a propriedade acima enunciada: decomponemos cada elemento do tensor de velocidades na soma de duas parcelas iguais e ao resultado, somamos e subtraímos  $1/2 \partial v_j / \partial x_i$ . Obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

O primeiro termo do membro direito da igualdade acima é um tensor simétrico, sendo na realidade idêntico ao fator que é multiplicado pela viscosidade na equação constitutiva dos fluidos newtonianos. O segundo termo é um tensor anti-simétrico. Verificamos esta propriedade escrevendo:

$$a_{ji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = -a_{ij}$$

O termo  $\tau_{ij} \partial v_i / \partial x_j = \Phi$  denomina-se *Função Dissipação* pode portanto ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} \Phi = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) = \\ &= \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \\ &= \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 - \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

O termo:

$$\frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2$$

é dado por uma soma de quadrados, sendo por isso sempre maior ou igual a zero. De fato, a Função Dissipação se reduz a este termo somente, pois o último termo do membro direito da eq. (4.9) é igual a zero, como mostramos abaixo:

$$\frac{\mu}{2} \left( \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 - \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \right) = \frac{\mu}{2} \left( \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 - \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \right) = 0$$

Como as derivadas aparecem na igualdade acima sobre a forma de quadrados, os índices  $i$  e  $j$  são, de fato, repetidos, sendo portanto mudos e podem ser trocados com foi feito acima. Portanto:

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (4.10)$$

Este resultado mostra que a dissipação viscosa em fluidos newtonianos contribui sempre para o aumento da energia interna e, em última análise, da temperatura do fluido.

## 4.6 Equação da Entalpia de Estagnação ( $h_0 = h + v^2/2$ )

A equação da entalpia de estagnação é obtida a partir da equação da energia total, que se obtem ao transformarmos esta última da forma integral para a forma diferencial, com o auxílio do teorema de Gauss:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = -\text{div} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} - \text{div} \mathbf{v} p + \text{div} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \text{div} \mathbf{q} + \dot{Q}$$

Os dois primeiros termos do membro direito da equação acima podem ser agrupados, resultando:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = -\operatorname{div} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \dot{Q}$$

ou:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \operatorname{div} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \dot{Q}$$

Somamos a seguir o termo  $\partial p / \partial t$  aos dois membros da última equação :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \operatorname{div} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} = \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \dot{Q}$$

O termo  $\partial p / \partial t$  do membro esquerdo da equação acima pode ser incorporado a  $\partial(e+v^2/2)/\partial t$ , resultando em:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \operatorname{div} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} = \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \dot{Q}$$

Como  $h_0 = e + p/\rho + v^2/2$  por definição e lembrando que  $-\operatorname{div} \mathbf{q} = \kappa \operatorname{div}(\mathbf{grad} T) = \kappa \nabla^2 T$  temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h_0 + \operatorname{div} \rho h_0 \mathbf{v} = \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \kappa \nabla^2 T + \dot{Q}$$

Na forma tensorial:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h_0 + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho h_0 v_i = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \tau_{ij} + \rho v_i g_i + \kappa \nabla^2 T + \dot{Q}$$

Desenvolvendo os termos do membro esquerdo desta última equação obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho h_0 + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho h_0 v_i &= \rho \frac{\partial h_0}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial h_0}{\partial x_i} + h_0 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} \right) = \\ \rho \frac{\partial h_0}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial h_0}{\partial x_i} &= \frac{Dh_0}{Dt} \end{aligned}$$

pois  $\partial \rho / \partial t + \partial \rho v_i / \partial x_i = 0$  (equação da continuidade). A equação da entalpia de estagnação toma portanto a forma:

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \tau_{ij} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.11)$$

Na forma vetorial:

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.12)$$



No caso de um escoamento permanente sem efeitos viscosos, sem fontes internas de calor e desprezando efeitos gravitacionais a equação da entalpia de estagnação se torna:

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T$$

o que mostra que a adição de calor através da superfície da partícula de fluido faz aumentar a entalpia de estagnação da mesma.

## 4.7 Equação da Entalpia ( $h$ )

A equação da entalpia é obtida de maneira semelhante à seguida na dedução da equação da energia interna. Naquele caso subtraímos a equação da energia cinética da equação da energia total. No caso presente subtrairemos a equação da energia cinética da equação da entalpia de estagnação.

Reescrevemos estas duas equações desenvolvendo o termo  $\partial v_i \tau_{ij} / \partial x_j = v_i \partial \tau_{ij} / \partial x_j + \tau_{ij} \partial v_i / \partial x_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{Dh_0}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) = \\ &\quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v^2}{2} \right) + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + v_i g_i. \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira obtemos:

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + v_i \frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

Notando que:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt}$$

obtemos:

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.13)$$

ou:

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{\rho} \tau : \mathbf{grad} \, v + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.14)$$

## 4.8 Equação da Entropia ( $s$ )

A equação de evolução da entropia de uma partícula de fluido é obtida a partir da equação da energia interna (eq. 4.7). Passando o termo  $1/\rho Dp/Dt$  desta última para o lado esquerdo obtemos:

$$\frac{De}{Dt} + p \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.15)$$

Sabe-se da termodinâmica que  $T ds = de + p d(1/\rho)$ . Esta equação pode ser escrita como:

$$T \frac{Ds}{Dt} dt = \frac{De}{Dt} dt + p \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) dt = \frac{De}{Dt} dt + p \frac{D}{Dt} \rho^{-1} dt$$

ou:

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \rho^{-1} = \frac{De}{Dt} - p \frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \quad (4.16)$$

Da equação da continuidade temos:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (4.17)$$

Combinando as eqs. (4.16 e 4.17) reescrevemos:

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \rho^{-1} = \frac{De}{Dt} + p \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (4.18)$$

Das eqs. (4.15) e (4.18) obtemos a equação da entropia:

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.19)$$

ou:

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho} \quad (4.20)$$

o que mostra que a entropia de uma partícula em movimento varia em função do fluxo líquido de calor a que está submetida e aumenta por efeitos do calor “gerado” internamente e da viscosidade. Cabe notar que no caso de fluidos newtonianos, o efeito viscoso contribui sempre no sentido de aumentar a entropia da partícula, pois  $\tau : \mathbf{grad} \mathbf{v} = \Phi > 0$

## 4.9 Nota Sobre a Forma Integral das Equações da Entalpia

A forma integral da equação da energia total se simplifica no caso em que algumas hipóteses possam ser feitas. Consideraremos o campo de velocidades estacionário, em que os termos viscosos e gravitacionais, possam ser desprezados e na condição em que não há “geração” de calor dentro do volume de controle. Não havendo efeitos viscosos o trabalho das forças de superfície se reduz ao das forças de pressão.

$$-\oint_S \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA - \oint_S p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA - \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

O integrando do segundo termo do membro esquerdo da equação,  $p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$  representa o trabalho por unidade de tempo da força de pressão ( $p \mathbf{n} dA$ ) multiplicado escalarmente pela velocidade do escoamento naquele ponto, isto é, o trabalho realizado por unidade de tempo para que um elemento de volume  $dx dA$  entre (ou saia) do volume de controle.

Passando o ultimo termo para o membro direito obtemos:

$$-\oint_S \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA - \oint_S p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA$$

o que mostra que o balanço do fluxo de calor através da superfície de controle é igual ao negativo do balanço do fluxo de energia e do trabalho das forças de pressão. Os dois termos do membro esquerdo podem ser agrupados, resultando:

$$-\oint_S \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = -\oint_S \rho \left( h + \frac{v^2}{2} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA$$

isto é, o calor líquido que entra no volume de controle altera a *entalpia* do escoamento. Os livros de termodinâmica apresentam a 1ª lei na forma acima, quando aplicada a escoamentos. Acrescenta-se à equação obtida o termo referente ao trabalho por unidade de tempo que não resulta da ação das forças de pressão, como é o caso do trabalho produzido por uma turbina. Neste caso, quando o fluxo de calor através das paredes do volume de controle pode ser desprezado o trabalho por unidade de tempo é igual ao balanço dos fluxos de entalpia. Incluindo o termo referente a este trabalho por unidade de tempo na equação da entalpia obtemos:

$$-\oint_S \rho \left( h + \frac{v^2}{2} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA + \dot{W}$$

Freqüentemente o termo referente à energia cinética pode ser desprezado.

Cabe observar que a literatura de termodinâmica representa normalmente o calor que *entra* no volume de controle como positivo. Na mecânica dos fluidos, as grandezas que *saem* são consideradas como positivas, em virtude de serem expressas pelo produto escalar de um vetor fluxo com o vetor normal orientado para *fora* do volume de controle.

## 4.10 Equação da Temperatura

Obteremos a equação da temperatura para o caso de um fluido incompressível. A equação da energia interna toma a forma:

$$\frac{De}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

Na forma vetorial:

$$\frac{De}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

No caso de fluido incompressível a energia interna pode ser escrita como  $e = C_p T$ . Substituindo-se esta expressão na primeira equação acima e dividindo o resultado por  $C_p$  obtemos:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho C_p} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho C_p} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p}$$

O termo  $\alpha = \kappa/\rho C_p$  contém apenas propriedades físicas do fluido sendo portanto uma propriedade física, denominada *difusividade térmica* do material. Reescrevendo a equação da temperatura temos:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho C_p} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p} \quad (4.21)$$

ou:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho C_p} \tau : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p} \quad (4.22)$$

Se o aquecimento devido à dissipação puder ser desprezado a equação da temperatura toma a forma:

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p} \quad (4.23)$$

## 4.11 Equação de Condução de Calor em Sólidos

Esta equação é obtida da equação da temperatura, no caso em que o campo de velocidades é identicamente nulo ( $\mathbf{v} \equiv 0$ ). Neste caso as derivadas da velocidade também se anulam. A equação da temperatura toma a forma:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho C_p} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p}$$

isto é:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p} \quad (4.24)$$

## 4.12 Os Números de Péclet e de Prandtl

A adimensionalização da equação da temperatura, eq. (4.23), conduz ao surgimento de dois novos grupos adimensionais, os números de *Péclet* e de *Prandtl*. Consideremos a eq. (4.23), sem o termo referente à geração interna de calor:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \alpha \nabla^2 T = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i}$$

ou:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i}$$

e sejam  $U_0$  a velocidade média do escoamento,  $T_0$  sua temperatura média e  $d$  uma dimensão característica da geometria do problema, como por exemplo o diâmetro da tubulação onde ocorre o escoamento. Definimos as variáveis adimensionais abaixo, representadas com o índice superior \*, conforme abaixo:

$$\begin{aligned} v_i &= U_0 v_i^* & x_i &= x_i^* d \\ t &= t^* d / U_0 & T &= T^* T_0 \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis dimensionais da equação da temperatura pelas definições acima encontramos:

$$\frac{T_0 U_0}{d} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{T_0 U_0}{d} v_j^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} = \frac{\alpha T_0}{d^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*}$$

Dividindo esta equação por  $T_0 U_0 / d$  obtemos:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v_j^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} = \frac{\alpha}{U_0 d} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*}$$

O grupo adimensional:

$$Pe = \frac{U_0 d}{\alpha} \tag{4.25}$$

denomina-se *número de Péclet*. Utilizando esta definição reescrevemos a equação da temperatura na forma adimensional:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v_j^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} = \frac{1}{Pe} \nabla^2 T^*$$

Esta equação mostra que o número de Péclet mede a importância relativa do mecanismo de difusão da temperatura em um processo envolvendo transporte de energia através de fluxos de massa e de difusão térmica.

O número de Péclet pode ser reescrito como:

$$Pe = \frac{U_0 d}{\nu} \frac{\nu}{\alpha} = Re Pr$$

O grupo adimensional  $\nu/\alpha$  denomina-se *número de Prandtl*. Como este relaciona duas propriedades físicas do fluido, quais sejam sua viscosidade cinemática e sua difusividade térmica, o número de Prandtl é também uma propriedade física do meio.

## 4.13 A Aproximação Boussinesq

Problemas de convecção livre se caracterizam pela ausência de uma velocidade imposta ao fluido. O movimento decorre da imposição de um gradiente vertical de temperaturas voltado para baixo, de modo que as camadas inferiores do fluido se encontrem mais quentes e menos densas do que as superiores, estas últimas mais frias. O estado de repouso torna-se instável acima de um certo valor do gradiente de temperatura imposto e é substituído por células de convecção que se formam, com o fluido frio afundando e o quente subindo. Nesta situação a densidade do fluido não se pode mais considerar a densidade do fluido como constante, mas as variações são muito menores do que as observadas na compressão de um gás, por exemplo.

Veamos como introduzir este efeito de compressibilidade, típico dos líquidos, nas equações da continuidade e de Navier-Stokes. A equação da continuidade para fluidos incompressíveis se escreve como  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , que traduz o fato de que a soma das vazões volumétricas que entram e saem de um elemento de volume é igual a zero. As variações de densidade devidas a alterações de temperatura em líquidos não são suficientes para alterar a vazão volumétrica e com isso trabalha-se com a equação da continuidade na forma  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ . Com relação à equação de Navier-Stokes, tornamos a escrevê-la como:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathbf{grad } p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}$$

Considera-se que as variações de densidade não são suficientes para alterar significativamente a massa de uma partícula e, conseqüentemente, o termo de força inercial,  $\rho D\mathbf{v}/Dt$ . Resta o termo gravitacional. Neste, levamos em conta o efeito de compressibilidade, escrevendo a densidade na forma  $\rho = \rho_0(1 + \beta \Delta T)$ , onde  $\rho_0$  é a densidade de referência e  $\Delta T$  é a diferença de temperaturas em relação ao estado de referência. Este termo é responsável pelo surgimento de força de empuxo de magnitude importante, mesmo em condições de repouso. Adicionalmente, este termo acopla a equação de Navier-Stokes à equação da temperatura. A aproximação Boussinesq consiste das equações da continuidade e de Navier-Stokes conforme descrito acima, mais a equação da temperatura:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \tag{4.26}$$

$$\rho_0 \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathbf{grad } p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho_0(1 + \beta \Delta T) \mathbf{g} \tag{4.27}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho C_p} \tau : \mathbf{grad } \mathbf{v} + \alpha \nabla^2 T \tag{4.28}$$

Estas equações admitem uma solução de repouso ( $\mathbf{v} \equiv 0$ ) na forma:

$$p = p_0 - \rho g z \quad (4.29)$$

$$T = T_0 + z \Delta T_0 \quad (4.30)$$

que descreve a situação em que se tem fluido mais denso nas camadas superiores da lâmina de fluido. Esta solução torna-se instável para valores de  $\Delta T_0$ , a diferença de temperaturas imposta entre dois pontos do fluido a elevações  $z$  diferentes, maiores do que certo valor crítico. De forma mais geral, o estado de repouso torna-se instável quando o número de Rayleigh, que representa uma adimensionalização do gradiente vertical de temperaturas imposto, ultrapassa um valor crítico.

## 4.14 Origem da Vorticidade

Nesta seção identificaremos os mecanismos que dão origem à *vorticidade*, isto é, ao movimento de rotação de massas de um fluido. Iniciamos dando uma interpretação ao movimento relativo das camadas de um escoamento. Caracterizamos este movimento relativo pela existência de um *gradiente* não nulo do campo de velocidades.

O gradiente do campo de velocidades é um tensor de segunda ordem. Os componentes deste tensor, quando representado em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, formam uma matriz cujos elementos são da forma  $\partial v_i / \partial x_j$ . Este tensor pode ser decomposto em duas parcelas, umas das quais é simétrica e a outra, anti-simétrica:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

A primeira parcela é o tensor tensor velocidade de deformação do fluido. O *traço* deste tensor, dado pela soma dos elementos da diagonal principal do mesmo é o divergente do campo de velocidades:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \text{div } \mathbf{v}$$

e caracteriza a taxa de *dilatação* do fluido. Os componentes fora da diagonal principal são os termos que caracterizam a deformação angular, sem dilatação:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

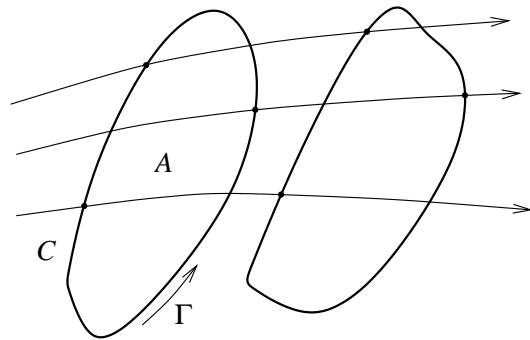


Figura 4.2: Circulação em torno de uma massa de fluido que se desloca.

A segunda parcela é o tensor cujos elementos são da forma:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Este tensor contém os termos do *rotacional* ou *vorticidade* do campo de velocidades. A vorticidade pode ser interpretada como a velocidade angular no ponto (ver apêndice B).

Consideremos uma superfície  $A$  do espaço, delimitada por uma curva  $C$  conforme Fig. (4.2) e seja  $d\mathbf{l}$  um elemento de arco desta curva. O *fluxo*  $\Gamma$  do vetor vorticidade através da superfície  $A$  é definido como:

$$\Gamma = \int_A \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

Este fluxo é igual à *circulação* do vetor velocidade ao longo da curva que delimita a região considerada, de acordo com o teorema de Stokes. A existência de uma circulação indica que a velocidade média ao longo da curva é diferente de zero e o teorema de Stokes assegura que neste caso o valor médio do rotacional na região interna à curva também é diferente de zero. Procuramos determinar os fatores que influem na evolução da circulação ao longo de uma curva que se desloca de forma solidária a uma massa de fluido, isto é, procuramos determinar  $D\Gamma/Dt$ . Podemos escrever:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \frac{D}{Dt} \oint_C v_i dx_i = \oint_C \frac{D}{Dt} v_i dx_i = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i + \oint_C v_i \frac{D}{Dt} dx_i$$

ou então :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i + \oint_C v_i dv_i = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i + \oint_C \frac{1}{2} dv^2$$

onde  $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ . A última integral é igual a zero e temos então:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i$$

Levando em conta que, pela equação do movimento:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

temos:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i + \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dx_i$$

ou ainda:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_C \frac{dp}{\rho} + \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dx_i$$



A primeira integral é igual a zero nos processo isoentrópicos e leva em conta portanto efeitos de aquecimento e irreversibilidades que ocorrem no movimento da massa de fluido. A segunda integral caracteriza variações da circulação em virtude da ação de forças viscosas. Este resultado, completamente geral, dá origem a dois teoremas sobre a formação de vórtices na atmosfera. O primeiro é o *Teorema de Bjerknes*, que mostra que, na ausência de efeitos viscosos:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_C \frac{dp}{\rho}$$

O segundo é o *Teorema de Kelvin*, que afirma que, na ausência de variações de entropia e de efeitos viscosos:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

Este último resultado ressalta a importância dos escoamentos irrotacionais, pois mostra que quando os efeitos viscosos e de variação de entropia são pequenos e o campo é irrotacional em um dado instante, o escoamento será sempre irrotacional.

Por outro lado, se uma determinada massa de fluido apresenta circulação diferente de zero em um dado instante, esta circulação se conserva à medida em que a massa se desloca.

O *Teorema de Crocco* mostra a relação entre variações de entropia e produção de vorticidade sob outro aspecto. O teorema despreza efeitos viscosos.

Consideremos a equação de Euler (eq. 3.13), desprezando efeitos gravitacionais:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p$$

Por outro lado sabe-se da termodinâmica que

$$T \mathbf{grad} s = \mathbf{grad} h - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p$$

ou:

$$T \mathbf{grad} s - \mathbf{grad} h = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p$$

Substituindo o termo  $1/\rho \mathbf{grad} p$  da equação de Euler pela expressão acima obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = T \mathbf{grad} s - \mathbf{grad} h$$

Passando o termo  $\mathbf{grad} h$  para o lado esquerdo da equação e agrupando-o com o termo  $\mathbf{grad} (v^2/2)$  obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = T \mathbf{grad} s$$

ou:

$$T \mathbf{grad} s = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} h_0 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} \quad (4.31)$$

que é a forma geral do Teorema de Crocco. No caso de campos de velocidade permanentes com entalpia de estagnação constante  $T \mathbf{grad} s = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}$ , o que mostra que o gradiente de entropia tem a direção de  $-\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}$ .

O teorema de Crocco generaliza a equação de Bernoulli, pois no caso de escoamentos permanentes, isentrópicos e a temperatura constante  $\mathbf{grad} s = 0$  e  $\mathbf{grad} h_0 = \mathbf{grad} (p/\rho + v^2/2)$ . O teorema de Crocco reduz-se a:

$$\mathbf{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}$$

que é uma das formas da equação de Bernoulli.

## 4.15 Resumo das Equações de Energia – Forma Vetorial

### 1. Energia Cinética

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \tau + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}.$$

### 2. Energia Total

$$\frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} p + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \tau + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

### 3. Energia Interna

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{1}{\rho} p \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \tau : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

### 4. Função Dissipação

$$\Phi = \tau : \mathbf{grad} \mathbf{v}$$

### 5. Entalpia de Estagnação

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \tau + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

### 6. Entalpia

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{\rho} \tau : \mathbf{grad} v + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

### 7. Entropia

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau : \mathbf{grad} v + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

### 8. Temperatura (Fluidos Incompressíveis)

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho C_p} \tau : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p}$$

### 9. Condução de Calor em Sólidos

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p}$$

### 10. Teorema de Crocco

$$T \mathbf{grad} s = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} h_0 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}$$

## 4.16 Resumo das Equações de Energia – Forma Tensorial

### 1. Energia Cinética

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \left( v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) + v_i g_i.$$

### 2. Energia Total

$$\frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p v_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \tau_{ij} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

### 3. Energia Interna

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{1}{\rho} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

### 4. Função Dissipação (Fluidos Newtonianos Incompressíveis)

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2$$

### 5. Entalpia de Estagnação

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \tau_{ij} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

### 6. Entalpia

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

### 7. Entropia

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

### 8. Temperatura (Fluidos Incompressíveis)

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho C_p} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p}$$

### 9. Condução de Calor em Sólidos

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p}$$

### 10. Teorema de Crocco

$$T \frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial h_0}{\partial x_i} - \varepsilon_{ijk} v_j \varepsilon_{kmn} \frac{\partial v_n}{\partial x_m}$$

## 4.17 Problemas

1. Mostrar que a função dissipação de um fluido newtoniano incompressível é dada por:

$$\tau : \mathbf{grad} \mathbf{v} = \mu \left( 2 \left( \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \right)$$

2. Mostrar que:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i g_i.$$

3. A componente  $v_x$  do escoamento bidimensional incompressível de um fluido newtoniano com viscosidade  $\mu$  é dada por  $v_x = Ax^2y^2$ , onde  $A$  é uma constante. Pede-se determinar a forma mais simples da componente  $v_y$  deste escoamento e a função dissipação.

# Capítulo 5

## Escoamentos Viscosos

### 5.1 Introdução

A riqueza dos fenômenos observados em meios fluidos decorre do caráter não-linear das leis de evolução dos mesmos. Estas leis são descritas em sua maior parte, pelas equações apresentadas nos capítulos anteriores. O universo dos fenômenos engloba situações que incluem por exemplo a acústica, problemas de engenharia relacionados ao escoamento de fluidos em tubulações, a construção de máquinas de fluxo como turbinas e compressores, a hidráulica de canal aberto, a aerodinâmica de aviões, o estudo da movimentação da crosta terrestre, a oceanografia, a meteorologia e a dinâmica da atmosfera e ainda, fenômenos biológicos. Nestes últimos deve-se levar em conta reações e transporte de espécies químicas. Estes aspectos serão discutidos mais à frente, no capítulo 9. Face à variedade dos fenômenos mencionados não causa surpresa o fato de que não se conheçam soluções gerais das equações da mecânica dos fluidos. Na maior parte dos casos é necessário que se façam hipóteses simplificadoras levando em conta as particularidades de cada problema. É o que faremos neste capítulo.

Uma possível classificação dos escoamentos, visando a simplificação das equações de evolução, pode ser feita quando se considera apenas escoamentos forçados, isto é, escoamentos em que, de alguma forma, há uma velocidade imposta. Neste caso, quando os efeitos viscosos predominam e se estendem por todo o campo tem-se os escoamentos sob baixo número de Reynolds. No outro extremo encontram-se os escoamentos sob número de Reynolds elevado, onde os efeitos viscosos se concentram em regiões confinadas do campo. Fora destas regiões estes efeitos são desprezíveis e os fenômenos que aí ocorrem podem ser estudados através da equação de Euler. Dentro desta classe é de particular importância o caso dos escoamentos *irrotacionais*, em que se pode associar um *potencial* ao campo de velocidades.

Neste capítulo abordaremos alguns problemas clássicos de escoamentos sob baixo número de Reynolds, ou em que número de Reynolds não é definido, para os quais existe solução exata das equações de Navier-Stokes. Os efeitos viscosos desempenham papel importante nesta situação, no sentido de estabilizar o escoamento, impedindo a formação de estruturas mais complexas das quais a *turbulência* é o exemplo mais importante. Aplicaremos o formalismo desenvolvido nos capítulos precedentes na resolução dos campos de

velocidades e, em alguns casos, no de temperaturas. Os resultados obtidos darão indicações sobre a extensão da região em que os efeitos viscosos são importantes, isto é, sobre a espessura da camada limite hidrodinâmica e sobre os fatores que a determinam.

Trataremos dos seguintes problemas:

1. Escoamento de Stokes em torno de uma esfera.
2. Escoamento permanente de uma película de um fluido incompressível e viscoso sobre uma placa plana inclinada. Estabeleceremos as equações do movimento do problema obtidas através de uma simplificação das equações de Navier-Stokes, determinaremos a forma do perfil de velocidades e da função dissipação;
3. Escoamento de Couette: Escoamento permanente de um fluido viscoso, incompressível ou não, entre duas placas paralelas, uma das quais se desloca com velocidade  $U_\infty$ . Estabeleceremos as equações do movimento, o perfil de velocidades, a equação do balanço de energia e o perfil de temperaturas gerado em virtude dos efeitos viscosos.
4. Escoamento permanente de um fluido viscoso e incompressível entre duas placas paralelas imóveis. O escoamento se faz sob efeito de um gradiente de pressões imposto,  $\partial p/\partial x$ , paralelo às placas. Estabeleceremos as equações do movimento e o perfil de velocidades.
5. Escoamento em um canal formado por duas placas paralelas, sob a ação de um gradiente de pressão especificado e submetido a um fluxo de calor constante. Considera-se os perfis de velocidades e temperaturas completamente desenvolvidos, no sentido de que o primeiro é independente da posição ao longo do canal e de que  $dT/dy$  não é função de  $x$ .
6. Problema de Rayleigh: Trata-se de determinar o campo de velocidades dependente do tempo, gerado por uma placa plana posta em movimento com velocidade constante  $U$  em  $t = 0$ . Estabeleceremos as equações do movimento a partir de simplificação das equações de Navier-Stokes. Este problema não admite uma solução analítica para o perfil de velocidades, mas apenas para a derivada da velocidade na direção perpendicular à placa,  $\partial u/\partial y$ . Mostraremos que esta derivada é igual ao rotacional do campo de velocidades, ou a *vorticidade* do campo. Veremos que esta vorticidade está concentrada nas proximidades da placa e estudaremos como a mesma se difunde.
7. Escoamento tri-dimensional de um fluido newtoniano incompressível na proximidade do eixo de um disco rotatório.

## 5.2 Escoamento em Torno de uma Esfera sob $Re < 1$

No estudo do escoamento sob baixos números de Reynolds duas aproximações podem ser feitas. A primeira é a *aproximação de Stokes*, válida para  $Re = \mathcal{O}(1)$ . Este é o caso de alguns fenômenos meteorológicos, como neblina, a suspensão de poeira no ar, o do escoamento de corpos em fluidos muito viscosos e o de problemas de lubrificação. Stokes desprezou completamente a aceleração à qual as partículas de fluido estão submetidas. As equações

resultantes desta simplificação formam um sistema *linear* que contém apenas o gradiente da pressão e termo viscoso. A segunda segunda aproximação, estudada por Oseen, não despreza a aceleração das partículas, isto é, as forças de inércia que agem sobre a mesma, mas lineariza o termo  $\mathbf{v} \mathbf{grad} \mathbf{v}$ . Esta aproximação é vá lida para escoamntos com  $Re < 5$ .

As equações de Stokes para o escoamento de um fluido incompressível se escrevem:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p = \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (5.2)$$

ou de forma completa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Escoamentos regidos por estas equações tem a importante propriedade de ser a pressão uma função potencial. De fato ao aplicarmos o operador divergente sobre a eq. (5.2) obtemos:

$$\text{div } \mathbf{grad} p = \nabla^2 p = \nabla^2 \text{div } \mathbf{v} = 0$$

No caso do escoamento em torno de uma esfera de raio  $R$  obtém-se uma solução para os campos de velocidade e pressão na forma:

$$u = U_{\infty} \left( \frac{3}{4} \frac{Rx^2}{r^3} \left( \frac{R^2}{r^2} - 1 \right) - \frac{1}{4} \frac{R}{r} \left( 3 + \frac{R^2}{r^2} \right) + 1 \right) \quad (5.3)$$

$$v = U_{\infty} \frac{3}{4} \frac{Rxy}{r^3} \left( \frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \quad (5.4)$$

$$w = U_{\infty} \frac{3}{4} \frac{Rxz}{r^3} \left( \frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \quad (5.5)$$

$$p - p_{\infty} = -\frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty} Rx}{r^3} \quad (5.6)$$

onde  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ . A pressão junto às paredes da esfera pode ser obtida diretamente fazendo-se  $r = R$  (ver fig. 5.1):

$$p - p_{\infty} = -\frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty} x}{R^2}$$

O máximo e o mínimo da pressão atuando sobre a esfera são dados por:

$$p_{max} - p_{\infty} = \pm \frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R}$$



As tensões de cisalhamento que agem sobre a esfera podem ser obtidas a partir do campo de velocidades. O valor máximo localiza-se no ponto  $x = 0, y = R$ , sendo igual a:

$$\tau_{max} = \pm \frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R}$$

Integrando-se a distribuição de pressões e de tensões de cisalhamento em torno da esfera obtém-se para a força de arraste  $D$ :

$$D = 6\mu\pi R U_{\infty}$$

o que mostra que o arraste aumenta *linearmente* com a velocidade, ao contrário do que ocorre sob números de Reynolds elevados, onde o arraste é proporcional ao *quadrado* da velocidade.

No caso da esfera dois terços da força de arraste deve-se à pressão e o restante, a forças de cisalhamento. Definimos o *coeficiente de arraste*  $C_D$ , como sendo  $C_D = D / \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 A$ , onde  $A$  é a área da seção transversal da esfera, dada por  $A = \pi R^2$ . Pode-se verificar facilmente que o coeficiente de arraste da esfera é dado por:

$$C_D = \frac{24}{Re}$$

onde  $Re = U_{\infty} d / \nu$  e  $d$  é o diâmetro da esfera.

As equações de Stokes não levam em conta acelerações convectivas nem o transporte da vorticidade, excluindo por isso a existência de *esteiras*, que se observam em escoamentos sob números de Reynolds mais elevados.

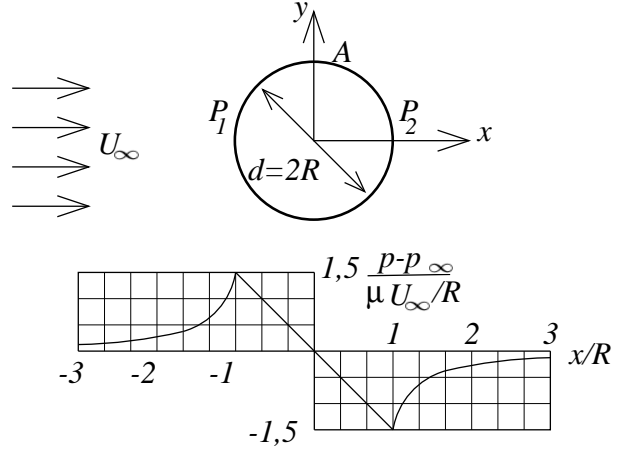


Figura 5.1: Campo de pressões em torno de uma esfera sob  $Re = \mathcal{O}(1)$  (diagrama fora de escala).

### 5.3 Escoamento Sobre uma Placa Plana Inclinada

Consideramos o escoamento de um líquido viscoso com peso específico  $\rho g$  e viscosidade  $\mu$  que escoa em regime laminar, permanente, sobre uma placa plana com declividade  $\theta$ , conforme fig. (5.2). O escoamento é submetido a um fluxo de calor  $q_0$ , transmitido da placa inferior e a temperatura superior fluido é mantida à temperatura  $T = T_1$ . Despreza-se o efeito de atrito entre o fluido e o ar, bem como entre o fluido e as paredes laterais. Pede-se:

1. Estabelecer as equações e condições de contorno dos campos de velocidade, pressão e temperatura;

2. Determinar os perfis de velocidade, pressão e a velocidade média do escoamento;
3. Determinar a função dissipação e o perfil de temperaturas considerando e desprezando o aquecimento viscoso;
4. Reescrever o perfil de temperaturas em forma adimensional e calcular o número de Brinkman.
5. Calcular o coeficiente de transferência por convecção  $h$  e o número de Nusselt,  $Nu$ , desprezando a dissipação viscosa.

Trata-se de um problema incompressível e bidimensional, pois não há variação das propriedades do escoamento na direção  $z$ . Sejam  $v_x$  e  $v_y$  as componentes do campo de velocidades nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. As equações da continuidade, de Navier-Stokes e da temperatura, descartando o termo de geração interna de calor tomam a forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x + g \sin \theta \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v_y - g \cos \theta \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{\rho C_p} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \alpha \nabla^2 T\end{aligned}$$

As condições de contorno do campo de velocidades podem ser estabelecidas da seguinte forma: As duas componentes de velocidade,  $v_x$  e  $v_y$  se anulam junto à placa. A componente  $v_x$  é igual a zero em virtude da hipótese feita sempre em mecânica dos fluidos, de que a velocidade do escoamento junto a qualquer superfície sólida é igual à da superfície.

Como o escoamento é permanente e suas características não devem se alterar ao longo da direção  $x$  as derivadas em relação a esta variável devem se anular. Consequentemente a equação da continuidade se reduz a  $\partial v_y / \partial y = 0$ . Como  $v_y = 0$  junto à superfície inferior e não varia com  $y$  concluímos que  $v_y$  é identicamente nula em todo o campo. Por outro lado a inexistência de atrito entre o fluido e a superfície livre implica que a tensão de cisalhamento é nula naquele ponto:

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{em } y = y_0$$

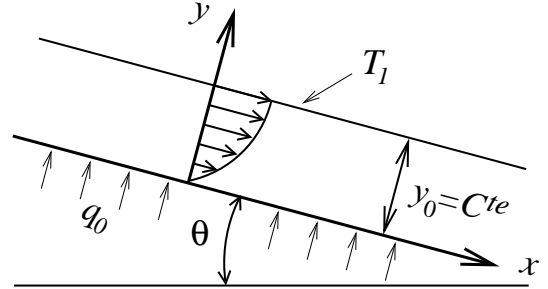


Figura 5.2: Escoamento laminar de uma lâmina de fluido sobre uma placa plana infinita inclinada.

Como  $v_y \equiv 0$  esta condição de contorno se expressa por:

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = y_0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = y_0$$

As equações de Navier-Stokes se reduzem a:

$$\nu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = -g \sin \theta \quad (5.7)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = -g \cos \theta \quad (5.8)$$

As eqs. (5.7) e (5.8) são desacopladas no sentido de que a primeira só contém uma incógnita, a componente de velocidade  $v_x$  e a segunda também só contém uma incógnita, a pressão  $p$ . Cada equação pode ser integrada independentemente da outra. Começando com a primeira obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_x}{dy^2} &= -\frac{g \sin \theta}{\nu} = -\frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \\ \frac{dv_x}{dy} &= -\frac{\rho g \sin \theta}{\mu} y + C_1 \\ y = y_0 &\implies \frac{dv_x}{dy} = 0 \implies C_1 = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} y_0 \\ \frac{dv_x}{dy} &= \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} (y_0 - y) \\ v_x &= \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \left( y_0 y - \frac{y^2}{2} \right) + C_2 \\ v_x = 0 &\quad \text{em } y = 0 \implies C_2 = 0 \\ v_x &= \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \left( y y_0 - \frac{y^2}{2} \right) \end{aligned}$$

A velocidade média é dada por:

$$V_m = \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} v_x dy = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \int_0^{y_0} \left( y y_0 - \frac{y^2}{2} \right) dy = \frac{\rho g y_0^2 \sin \theta}{3\mu} \quad (5.9)$$

A eq. (5.8) pode ser integrada diretamente e fornece a distribuição vertical de pressões ao longo da lâmina de fluido:

$$dp = -\rho g \cos \theta dy \implies p = -\rho g \cos \theta y + C$$

Determinamos o valor da constante de integração  $C$  impondo que a pressão seja igual a zero na superfície livre:

$$0 = -\rho g \cos \theta y_0 + C \implies C = \rho g \cos \theta y_0$$

Portanto:

$$p = \rho g \cos \theta (y_0 - y)$$

Cabe notar que a distribuição de pressões é a mesma que se obtém no caso de fluido em repouso. Esta situação ocorre quando a componente vertical de velocidades e suas derivadas podem ser desprezadas.

Passamos à determinação do campo de temperaturas. Fazemos a hipótese de que, assim como o campo de velocidades, o de temperaturas também não depende de  $x$ . Como a componente  $v_y$  da velocidade é igual a zero, a equação da temperatura se reduz a:

$$\frac{1}{\rho C_p} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho C_p} \frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 T}{dy^2} = -\frac{1}{\kappa} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

A função dissipação é dada por:

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \tau_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x_x} + \tau_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial x_y} + \tau_{yx} \frac{\partial v_y}{\partial x_x} + \tau_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial x_y}$$

Como  $v_y \equiv 0$  e  $v_x = v$  é função de  $y$  somente a função dissipação se reduz a:

$$\Phi = \tau_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial x_y} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 = \frac{(\rho g \sin \theta)^2}{\mu} (y_0 - y)^2$$

Portanto:

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = -\frac{(\rho g \sin \theta)^2}{\mu \kappa} (y_0^2 - 2y_0 y + y^2)$$

Integrando uma vez temos:

$$\frac{dT}{dy} = C_1 - \frac{(\rho g \sin \theta)^2}{\mu \kappa} \left( y_0^2 y - y_0 y^2 + \frac{y^3}{3} \right)$$

A primeira condição de contorno para o campo de temperaturas permite definir o valor da derivada do mesmo em  $y = 0$ , na direção normal à placa, através do fluxo de calor imposto ao escoamento. Por uma questão de conveniência, denomina-se de convecção o mecanismo de transferência de calor de um corpo para um fluido em movimento. Convecção não é na realidade um novo mecanismo de transferência de calor, pois sendo a velocidade do escoamento junto à placa igual a zero a transferência de calor da mesma para a primeira camada de fluido se faz por *condução*. Da mesma forma a transferência de calor entre duas camadas adjacentes de fluido se faz igualmente por condução uma vez que a diferença de velocidades entre ambas é igual a zero. Podemos portanto aplicar a lei de Fourier para o fluxo de calor transferido da placa à primeira camada de fluido:

$$q_0 = -\kappa \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = -\kappa C_1 \quad \longrightarrow \quad C_1 = -\frac{q_0}{\kappa}$$

Integrando outra vez:

$$T = C_2 - \frac{q_0}{\kappa}y - \frac{(\rho g \sin \theta)^2}{\mu\kappa} \left( y_0^2 \frac{y^2}{2} - y_0 \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{12} \right)$$

A segunda condição de contorno é dada pelo valor especificado para a temperatura na superfície livre do escoamento,  $T = T_1$ . Obtemos:

$$C_2 = T_1 + \frac{q_0}{\kappa}y_0 + \frac{(\rho g \sin \theta)^2}{\mu\kappa} \frac{y_0^4}{4}$$

A expressão do campo de temperaturas é portanto:

$$T = T_1 + \frac{q_0}{\kappa}(y_0 - y) + \frac{(\rho g y_0^2 \sin \theta)^2}{\mu\kappa} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{y_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{y}{y_0} \right)^3 - \frac{1}{12} \left( \frac{y}{y_0} \right)^4 \right)$$

ou, utilizando a definição de velocidade média,  $V_m$ :

$$T = T_1 + \frac{q_0}{\kappa}(y_0 - y) + 9 \frac{\mu V_m^2}{\kappa} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{y_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{y}{y_0} \right)^3 - \frac{1}{12} \left( \frac{y}{y_0} \right)^4 \right) \quad (5.10)$$

Esta última expressão mostra que a dissipação viscosa cresce com o quadrado da velocidade média do escoamento. O perfil de temperaturas desprezando a dissipação viscosa é dado por:

$$T = T_1 + \frac{q_0}{\kappa}(y_0 - y)$$

A temperatura junto à superfície da placa é dada por:

$$T = T_1 + \Delta T_{conv}$$

onde  $\Delta T_{conv} = q_0 y_0 / \kappa$  é a elevação de temperatura da entre as superfície inferior e superior da lâmina de fluido, sem levar em conta a dissipação viscosa, isto é, considerando apenas o aquecimento devido ao fluxo de calor de convecção imposto,  $q_0$ . Reescrevemos agora o perfil de temperaturas dado pela eq. (5.10) em forma adimensional. Para isto passamos o termo  $T_1$  para o membro esquerdo e dividimos o resultado por  $\Delta T_{conv} = q_0 y_0 / \kappa$ . Obtemos:

$$\frac{T - T_1}{\Delta T_{conv}} = 1 - \frac{y}{y_0} + 9 \frac{\mu V_m^2}{q_0 y_0} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{y_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{y}{y_0} \right)^3 - \frac{1}{12} \left( \frac{y}{y_0} \right)^4 \right)$$

O fator:

$$\frac{\mu V_m^2}{q_0 y_0} = Br$$

denomina-se *número de Brinkman*. Trata-se de um adimensional que mede a importância do aquecimento devido aos efeitos viscosos, com relação ao aquecimento devido apenas à

convecção. Introduzindo a definição do número de Brinkman obtemos para o perfil adimensional de temperaturas:

$$\frac{T - T_1}{\Delta T_{conv}} = 1 - \frac{y}{y_0} + 9Br \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{y_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{y}{y_0} \right)^3 - \frac{1}{12} \left( \frac{y}{y_0} \right)^4 \right)$$

Concluindo a discussão do problema calcularemos agora o coeficiente de transferência de calor por convecção  $h$  e do *número de Nusselt*  $Nu = hy_0/\kappa$ . Conforme já tivemos a oportunidade de comentar, convecção *não* é um novo mecanismo de transferência de calor, mas uma conveniência, freqüentemente usada em engenharia. Procuramos justificar esta afirmativa. O coeficiente  $h$  é definido através da relação:

$$q_0 = h(T_{sup} - T_{fluido}) \quad (5.11)$$

onde  $T_{sup}$  é a temperatura da superfície com a qual o fluido troca calor e  $T_{fluido}$  é a temperatura característica do fluido. Em muitos problemas de engenharia esta última é a temperatura fora da *camada limite* (ver capítulo 6), ou simplesmente, a temperatura do fluido. Esta definição permite contornar o problema do cálculo da componente do gradiente de temperaturas junto à superfície, na direção normal à mesma, que, como vimos na discussão acima, requer que se determine a priori os campos hidrodinâmico e de temperaturas. O conhecimento completo destes campos resulta em uma descrição excessivamente completa dos mesmos, em muitos casos difícil e desnecessária. Por isso, utiliza-se o conceito de convecção, com o fluxo de calor sendo calculado pela expressão acima.

Como no problema em discussão a temperatura do fluido varia ao longo de toda a espessura da lâmina, adaptamos a definição do coeficiente  $h$ , reescrevendo a eq.(5.11) na forma:

$$q_0 = h(T_{sup} - T_m) \quad (5.12)$$

onde  $T_m$  é a temperatura média do escoamento, definida pela relação:

$$\dot{m}C_p T_m = \int_0^{y_0} \rho C_p v_x T dy$$

Donde obtemos:

$$T_m = \frac{\int_0^{y_0} \rho C_p v_x T dy}{\int_0^{y_0} \rho C_p v_x dy} = \frac{\int_0^{y_0} T v_x dy}{\int_0^{y_0} v_x dy} = \frac{\int_0^{y_0} \left( T_1 + \frac{q_0 y_0}{\kappa} - \frac{q_0 y}{\kappa} \right) \left( yy_0 - \frac{y^2}{2} \right) dy}{\int_0^{y_0} \left( yy_0 - \frac{y^2}{2} \right) dy}$$

ou:

$$T_m = T_1 + \frac{q_0 y_0}{\kappa} - \frac{q_0}{\kappa} \frac{\int_0^{y_0} \left( y^2 y_0 - \frac{y^3}{2} \right) dy}{\int_0^{y_0} \left( yy_0 - \frac{y^2}{2} \right) dy} = T_{sup} - \frac{q_0 y_0}{\kappa} \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{8}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = T_{sup} - \frac{5}{8} \frac{q_0 y_0}{\kappa}$$

Portanto:

$$q_0 = \frac{8}{5} \frac{\kappa}{y_0} (T_{sup} - T_m) \quad \longrightarrow \quad h = \frac{8}{5} \frac{\kappa}{y_0} \quad \text{e} \quad Nu = \frac{hy_0}{\kappa} = \frac{8}{5}$$

## 5.4 Escoamento de Couette

Consideramos o escoamento permanente de um fluido newtoniano viscoso, incompressível, entre duas placas horizontais paralelas sendo que a superior se desloca com velocidade  $U_\infty$  conforme fig. (5.3). A placa inferior é isolada termicamente, de modo que não haja transferência de calor entre o fluido e a mesma. A placa superior é mantida na temperatura  $T_\infty$ .

Estabeleceremos as equações do movimento, da temperatura e determinaremos os perfis de velocidades e de temperatura para o caso incompressível.

O escoamento é bidimensional, em regime permanente. Neste caso as equações da continuidade, de Navier-Stokes e da temperatura tomam a forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) - g \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{\rho C_p} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}\end{aligned}$$

Como no caso do escoamento em uma placa inclinada, todas as derivadas em relação a  $x$  devem se anular. Conseqüentemente a equação da continuidade se reduz a  $\partial v_y / \partial y = 0$ . Como  $v_y = 0$  junto à superfície inferior e não varia com  $y$  concluímos que esta componente da velocidade é identicamente nula em todo o campo. Cabe notar que no caso de fluido incompressível a densidade não depende da temperatura. Em conseqüência as equações da continuidade e de Navier-Stokes podem ser resolvidas independentemente da equação da temperatura. Uma vez conhecido os campos de velocidade e de pressão, determina-se o campo de temperaturas.

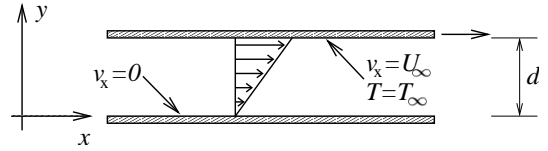


Figura 5.3: Escoamento de Couette entre duas placas planas horizontais.

Obtemos a seguir o perfil de velocidades para o caso de um fluido incompressível. As equações de Navier-Stokes e da temperatura simplificadas se escrevem como:

$$\nu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = 0 \quad (5.13)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = -g \quad (5.14)$$

$$\tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\kappa \nabla^2 T \quad (5.15)$$

Integrando duas vezes a primeira equação obtemos:

$$\frac{\partial v_y x}{\partial y} = C_1 \quad v_x = C_1 y + C_2$$

Para determinarmos as constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$  utilizamos as condições de contorno nas placas inferior e superior. A velocidade do escoamento junto à placa deve ser igual à velocidade da mesma. Na placa inferior ( $y = 0$ ) temos que  $u = 0$ . Portanto é necessário que  $C_2$  se anule. Na placa superior ( $y = d$ )  $v_x = U_\infty$ , o que implica em que  $U_\infty = C_1 d$  e  $C_1 = U_\infty/d$ . Obtemos:

$$v_x = \frac{U_\infty}{d} y$$

Integrando a eq. (5.14) obtemos o perfil de pressões como  $p = \rho g(d - y)$ .

Desenvolvendo o termo  $\tau_{ij} \partial v_i / \partial x_j$  da eq. (5.14) como feito na Sec. (5.3) obtemos:

$$\tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \mu \left( \frac{U_\infty}{d} \right)^2 = -\kappa \frac{d^2 T}{dy^2}$$

Portanto:

$$-\kappa \frac{d^2 T}{dy^2} = \mu \left( \frac{U_\infty}{d} \right)^2$$

Integrando uma vez obtemos:

$$\kappa \frac{dT}{dy} = -\mu \left( \frac{U_\infty}{d} \right)^2 y + C$$

Procuramos determinar o valor da constante  $C$ . Na parede inferior temos que  $q_w = -\kappa dT/dy$ , onde  $q_w$  é o fluxo de calor entre do fluido e a parede. Sendo este fluxo nulo por hipótese, a constante é igual a zero.

O número de Prandtl é dado por:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\rho C_p}{\kappa} = \frac{\mu}{\kappa} C_p$$

Portanto  $\mu/\kappa = Pr/C_p$ . Temos então :

$$\frac{dT}{dy} = -\frac{Pr}{C_p} \left( \frac{U_\infty}{d} \right)^2 y \quad (5.16)$$

O perfil de temperaturas é obtido integrando-se a eq. (5.16):

$$T = -\frac{Pr}{C_p} \left( \frac{U_\infty}{d} \right)^2 \frac{y^2}{2} + C$$



A constante  $C$  é determinada levando-se em conta a condição de contorno  $T = T_\infty$  em  $y = d$ :

$$T_\infty = -\frac{Pr U_\infty^2}{C_p} \frac{1}{2} + C \quad C = T_\infty + \frac{Pr U_\infty^2}{C_p} \frac{1}{2}$$

Portanto:

$$T = T_\infty + \frac{Pr U_\infty^2}{C_p} \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{y}{d} \right)^2 \right)$$

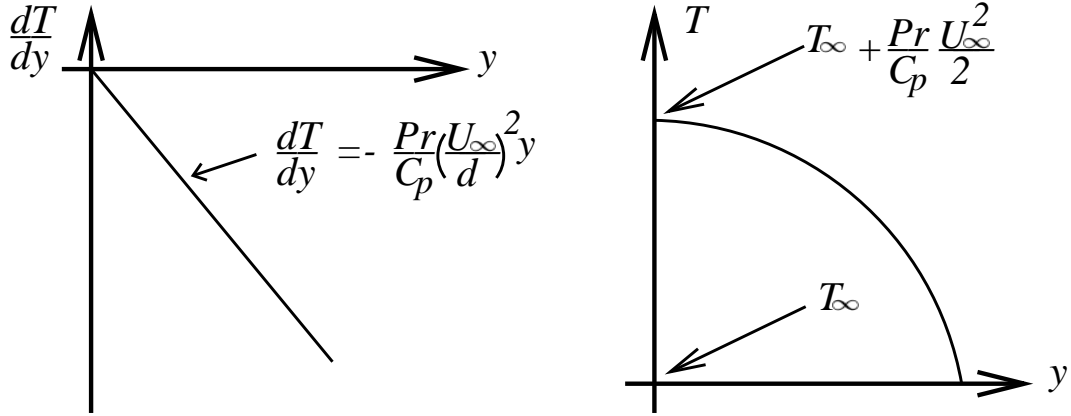


Figura 5.4: Perfis de temperatura e de  $dT/dy$  no escoamento de Couette.

A expressão acima mostra que a temperatura do fluido aumenta da placa inferior para cima. A elevação de temperatura se deve à dissipação viscosa.

Os perfis de temperatura e da derivada da mesma se encontram ilustrados na fig. (5.4).

## 5.5 Escoamento Entre Duas Placas Paralelas Imóveis

Consideramos o escoamento de um fluido viscoso e incompressível entre duas placas horizontais paralelas conforme fig. (5.5), com fluxo de calor nulo através das mesmas e perda de carga específica,  $\partial p/\partial x$ , dada. Este problema difere dos dois anteriores quanto à forma com que a energia é fornecida ao escoamento de forma a compensar a dissipação viscosa. No caso do escoamento de uma lâmina de fluido sobre uma placa inclinada, a energia fornecida ao escoamento provém da perda de energia potencial do fluido. No caso do escoamento de Couette, a energia é fornecida ao fluido pelo movimento da placa superior. No presente caso o movimento é mantido em virtude de um gradiente de pressão  $\partial p/\partial x$ , imposto. Outra diferença entre os dois problemas anteriores e o presente reside no fato de que naqueles, todas as derivadas em relação a  $x$  se anulam. No caso presente o perfil de velocidades não se altera ao longo de  $x$  mas a pressão varia naquela direção.

Procuramos estabelecer as equações do movimento e determinar o perfil de velocidades bem como a vazão volumétrica  $Q$ , para uma perda de carga específica imposta.

Como no caso escoamento de Couette o problema é bidimensional, em regime permanente. As equações da continuidade e de Navier-Stokes tomam a forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) - g\end{aligned}$$

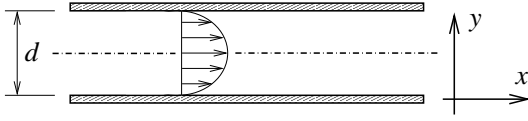


Figura 5.5: Escoamento laminar forçado entre duas placas horizontais.

Sendo as derivadas da velocidade em relação a  $x$  nulas a equação da continuidade se reduz a  $\partial v_y / \partial y = 0$ , o que implica em que  $v_y$  é constante ao longo de  $y$ . Como  $v_y = 0$  junto às placas concluímos que esta componente de velocidade é identicamente nula em todo o campo. As equações de Navier-Stokes se reduzem a:

$$\nu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \quad (5.18)$$

A segunda equação pode ser integrada diretamente e fornece:

$$p = -\rho g y + f(x) \quad (5.19)$$

Cabe notar que (5.18) é uma equação a *derivadas parciais* e que neste caso a constante de integração pode ser substituída por qualquer função de  $x$ . Derivando a pressão (Eq. 5.19) em relação a  $x$  obtemos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f'(x)$$

isto é,  $\partial p / \partial x$  não é função de  $y$ . Face a este resultado concluímos que o termo do membro direito da Eq. (5.17) é função de  $x$  somente, enquanto que o do membro esquerdo é função de  $y$  apenas, isto é, esta equação é da forma  $F(y) = G(x)$ . A única solução possível é termos  $F(y) = G(x) = \text{constante}$ . Consequentemente, a perda de carga específica imposta,  $\partial p / \partial x$ , deve ser constante. A Eq. (5.17) pode ser reescrita como:

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Integrando duas vezes obtemos:

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + C_1 \qquad v_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + C_1 x + C_2$$

As constantes de integração são determinadas impondo-se que a velocidade se anule junto às duas placas. Consequentemente:

$$C_2 = 0 \qquad 0 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{d^2}{2} + C_1 d \qquad \implies \qquad C_1 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{d}{2}$$

e obtemos o perfil de velocidades na forma:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y (y - d)$$

Deve-se observar que  $y$  é sempre menor do que  $d$  e que portanto  $\partial p / \partial x$  deve ser *negativo*, isto é, a pressão deve decrescer ao longo de  $x$ , para que a velocidade  $v_x$  seja positiva.

A vazão volumétrica  $Q$  é dada por:

$$Q = L \int_0^d v_x dy$$

onde  $L$  é a largura considerada da placa. A vazão por unidade de largura é portanto:

$$\frac{Q}{L} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^d (y^2 - yd) dy = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} d \right) \Big|_0^d \qquad \implies \qquad \frac{Q}{L} = -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} d^3$$

A vazão é positiva quando  $\partial p / \partial x$  é negativo.

## 5.6 Escoamento Entre Duas Placas Paralelas sob Fluxo de Calor Constante

Complementando o tratamento dado ao problema de convecção apresentaremos uma solução exata para o problema de transferência em um canal formado por duas placas horizontais paralelas, conforme mostrado na fig. (5.6). Consideramos que o fluxo de calor aplicado seja constante e independente da posição. Por outro lado, desprezaremos o aquecimento do fluido devido a efeitos viscosos e consideraremos que os campos de velocidade e de temperaturas estejam *completamente desenvolvidos*.

Esclarecemos inicialmente as noções de campos de velocidade e de temperatura *completamente desenvolvidos*: dizemos que o campo de velocidades está completamente desenvolvido se a velocidade não se alterar ao longo da direção do escoamento, isto é, se  $D\mathbf{v}/Dx = 0$ . A pressão normalmente diminui ao longo de  $x$  como requisito para que o escoamento se mantenha. No caso em estudo a temperatura do fluido aumenta necessariamente ao longo da direção do escoamento em virtude da aplicação de um fluxo de calor constante às placas.

Ao entrar no canal, a temperatura das camadas de fluido mais próximas das paredes sobem mais do que a das camadas próximas ao eixo do escoamento, que se encontram mais longe da fonte de calor. À medida em que o fluido avança no canal a evolução do perfil de temperatura da região próxima ao eixo se aproxima progressivamente da evolução de camadas situadas próximo às paredes. Dizemos que o campo de temperaturas está *completamente desenvolvido* quando  $\partial T/\partial x$  tem o mesmo valor qualquer que seja a posição ao longo da direção perpendicular ao escoamento, isto é, quando  $\partial T/\partial x \neq f(y)$ . Esta é a condição em que determinaremos os campos de velocidade e de temperatura do fluido.

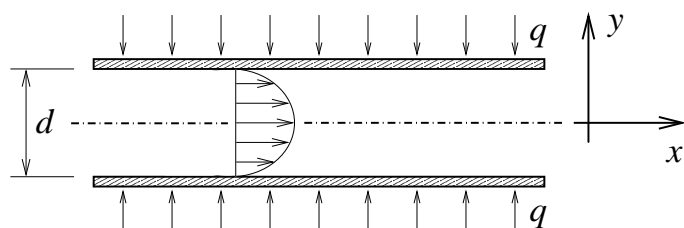


Figura 5.6: Escoamento entre duas placas paralelas sob fluxo de calor constante.

As equações da continuidade, de Navier-Stokes e da temperatura aplicáveis ao problema tomam a forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \\ v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)\end{aligned}$$

Como  $\partial v_x/\partial x = 0$  temos, pela equação da continuidade que  $\partial v_y/\partial y = 0$ , isto é  $v_y$  é constante ao longo da direção  $y$ . Como  $v_y = 0$  junto as placas concluímos que esta componente da velocidade é identicamente nula. Em consequência, as equações do problema se reduzem a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= \frac{dp/dx}{\mu} \\ v_x \frac{\partial T}{\partial x} &= \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)\end{aligned}$$

onde  $dp/dx$  é o gradiente de pressão ou perda de carga por unidade de comprimento imposta ao escoamento. Esta perda de carga específica é constante, conforme já discutido. A equação da componente de velocidade  $u$  é desacoplada da equação da temperatura e pode ser facilmente integrada.

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dy} &= \frac{dp/dx}{\mu} y \\ v_x &= -\frac{dp/dx}{2\mu} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right)\end{aligned}\tag{5.20}$$

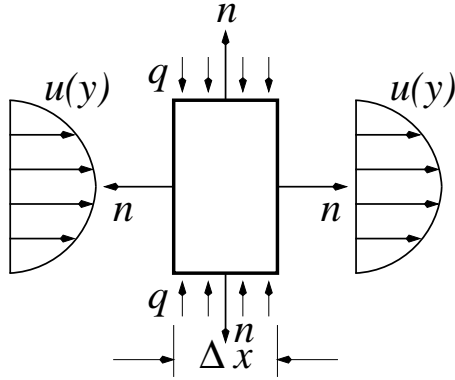
A vazão em massa por unidade de largura do canal (direção  $z$ ) é dada por:

$$\dot{m} = \int_{-d/2}^{d/2} \rho \frac{-dp/dx}{2\mu} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) dy = -\rho \frac{dp/dx}{2\mu} \left( \frac{d^2}{4}y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-d/2}^{d/2} =$$

$$-\rho \frac{dp/dx}{2\mu} \left( \left( \frac{d^3}{8} - \frac{d^3}{24} \right) - \left( -\frac{d^3}{8} - \frac{-d^3}{24} \right) \right)$$

Tem-se portanto para a vazão em massa:

$$\dot{m} = -\rho \frac{dp/dx}{12\mu} d^3 \quad (5.21)$$



Devemos determinar agora o campo de temperaturas. Iniciamos fazendo o balanço de energia em um volume de controle conforme fig. (5.7), de comprimento  $dx$ . Sendo o problema bi-dimensional fazemos o balanço por unidade de comprimento ao longo da direção  $x$ . Aplicando a forma integral da equação da energia total a este volume infinitesimal obtemos:

$$\oint \rho \left( e + \frac{v_x^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dy = - \oint \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dy$$

Figura 5.7: Balanço de energia em uma seção do canal de comprimento  $\Delta x$ .

Como o perfil de velocidades não se altera ao longo de  $x$  temos que:

$$\oint \rho \frac{v_x^2}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dy = 0$$

Portanto:

$$\oint \rho \left( e + \frac{v_x^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dy = \oint \rho e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dy =$$

$$- \int_{-d/2}^{d/2} \rho v_x C_p T dy \Big|_x + \int_{-d/2}^{d/2} \rho v_x C_p T dy \Big|_{x+\Delta x} + \frac{d}{dx} \int_{-d/2}^{d/2} \rho v_x C_p T dy \Delta x =$$

$$\frac{d}{dx} \int_{-d/2}^{d/2} \rho v_x C_p T dy \Delta x = \rho C_p \frac{d}{dx} \int_{-d/2}^{d/2} v_x T dy \Delta x$$

No que diz respeito ao balanço dos diversos fluxos de calor no elemento de volume notamos que  $dT/dx$  não varia ao longo da direção  $x$  por ser constante o fluxo de calor aplicado às paredes do canal. Conseqüentemente:

$$- \oint \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dy = 2q\Delta x$$

O balanço de energia torna-se então:

$$\rho C_p \frac{d}{dx} \int_{-d/2}^{d/2} v_x T dy = 2q$$

Utilizamos o balanço de energia na forma acima para definirmos a *temperatura média* do escoamento  $T_m$ , em um dado ponto  $x$  ao longo do canal, através da relação:

$$\dot{m} C_p \frac{dT_m}{dx} = 2q$$

onde  $\dot{m}$  é a vazão em massa, dada pela eq. (5.21). Como estamos considerando o caso do campo de temperaturas completamente desenvolvido, em que  $dT/dx \neq f(y)$  a derivada  $dT_m/dx$  da última equação pode ser substituída por  $dT/dx$ . Obtemos:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{2q}{\dot{m} C_p}$$

o que mostra que  $dT/dx$  é constante ao longo do canal. Substituindo  $\dot{m}$  pelo valor dado pela eq. (5.21) temos:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{24\mu q}{\rho C_p d^3 (-dp/dx)} \quad (5.23)$$

Esta equação pode ser integrada fornecendo a distribuição de temperaturas das paredes, a partir de um ponto de referência, onde a temperatura é  $T_0$ :

$$T = T_0 + \frac{24\mu q}{\rho C_p d^3 (-dp/dx)} x \quad (5.24)$$

Passamos agora à determinação do campo de temperaturas do fluido. Como os perfis de temperatura variam linearmente ao longo de  $x$  a equação da temperatura reduz-se a:

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

substituindo as expressões de  $u =$  e de  $dT/dx$ , conforme eqs. (5.20 e 5.23) obtemos:

$$\frac{\kappa}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{dp/dx}{\mu} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) \frac{24\mu q}{\rho C_p d^3 dp/dx}$$

ou:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{12q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right)$$

Esta equação pode integrada, fornecendo a expressão da componente  $\partial T/\partial y$ , do gradiente de temperatura do fluido:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{12q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^2}{4} y - \frac{y^3}{3} \right) + f_1(x)$$

como  $-\kappa \partial T / \partial y = q \neq f(x)$  a função  $f(x)$  deve se anular. Resulta então que:

$$\frac{dT}{dy} = \frac{12q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^2}{4} y - \frac{y^3}{3} \right)$$

Integrando novamente obtemos:

$$T = \frac{12q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^2}{8} y^2 - \frac{y^4}{12} \right) + f_2(x) + C$$

A dependência do perfil de temperaturas com a posição ao longo de  $x$  é dada pela eq. (5.24). Substituindo  $f_2(x)$  obtemos:

$$T = T_0 + \frac{24\mu q}{\rho C_p d^3 (-dp/dx)} x + \frac{3q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^2}{2} y^2 - \frac{y^4}{3} \right) + C$$

A constante  $C$  é determinada a partir da condição de que o perfil de temperaturas nas paredes do canal deve ser dado pela eq. (5.24), isto é:

$$\frac{3q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^2}{2} y^2 - \frac{y^4}{3} \right) + C = 0$$

em  $y = \pm d/2$ . Obtém-se:

$$C = -\frac{3q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^4}{8} - \frac{d^4}{64} \right) = -\frac{21}{64} \frac{qd}{\kappa}$$

O perfil de temperaturas é portanto:

$$T = T_0 - \frac{21}{64} \frac{qd}{\kappa} + \frac{24\mu q}{\rho C_p d^3 (-dp/dx)} x + \frac{3q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^2}{2} y^2 - \frac{y^4}{3} \right) \quad (5.25)$$

Passamos à determinação da temperatura média do fluido em uma dada seção. Este valor é dado por:

$$T_m = \frac{1}{\dot{m} C_p} \int_{-d/2}^{d/2} \rho C_p v_x T dy$$

Utilizando as expressões da vazão em massa  $\dot{m}$ , conforme eq. (5.21) e do perfil de velocidades  $u$ , conforme eq. (5.20) encontramos:

$$T_m = \frac{12\mu}{(-dp/dx)d^3} \int_{-d/2}^{d/2} u T dy = \frac{6}{d^3} \int_{-d/2}^{d/2} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) T dy$$

Substituindo a expressão do perfil de temperaturas, dada pela eq. (5.25) obtemos:

$$T_m = \frac{6}{d^3} \int_{-d/2}^{d/2} (T_p(x) + f(y)) \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) T dy$$

onde  $T_p(x)$  é a temperatura das paredes, dada pela eq. (5.24) e:

$$f(y) = -\frac{21}{64} \frac{qd}{\kappa} + \frac{3q}{\kappa d^3} \left( \frac{d^2}{2} y^2 - \frac{y^4}{3} \right)$$

Notando que:

$$\frac{6}{d^3} \int_{-d/2}^{d/2} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) dy = 1$$

temos:

$$T_m = T_p - \frac{21}{64} \frac{qd}{\kappa} + \frac{6}{d^3} \frac{3q}{\kappa d^3} \int_{-d/2}^{d/2} \left( \frac{d^2}{2} y^2 - \frac{y^4}{3} \right) \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) dy$$

ou:

$$T_m = T_p - \frac{21}{64} \frac{qd}{\kappa} + \frac{18q}{d^6} \int_{-d/2}^{d/2} \left( \frac{d^4}{8} y^2 - \frac{7d^2}{12} y^4 + \frac{y^6}{3} \right) dy$$

Calculando a integral encontramos:

$$\begin{aligned} T_m &= T_p - \frac{21}{64} \frac{qd}{\kappa} + \frac{18q}{d^6} \left( \frac{d^4}{24} y^3 - \frac{7d^2}{60} y^5 + \frac{y^7}{21} \right) \Big|_{-d/2}^{d/2} = \\ T_p &- \frac{21}{64} \frac{qd}{\kappa} + \frac{18q}{d^6} \frac{94}{96} \frac{d^7}{280} = T_p - \frac{qd}{\kappa} \left( \frac{21}{64} - \frac{18}{280} \frac{94}{96} \right) = T_p - 0,265 \frac{qd}{\kappa} \end{aligned}$$

Obtém-se então:

$$T_p - T_m = 0,265 \frac{qd}{\kappa}$$

e:

$$q = \frac{\kappa}{0,265d} (T_p - T_m)$$

Definimos o *coeficiente de transferência de calor por convecção* através da relação:

$$q = h(T_p - T_m)$$

Portanto:

$$h = \frac{\kappa}{0,265d}$$

Pode-se calcular o *Número de Nusselt*, dado por  $Nu = hd/\kappa$ , e obtém-se:

$$Nu = 3,77$$



## 5.7 Problema de Rayleigh

O problema de Rayleigh consiste do estudo do campo de velocidades induzido por uma placa horizontal infinita, inicialmente em repouso, que é posta em movimento com velocidade  $U$  no instante  $t = 0$ . Estudaremos o campo de velocidades e os mecanismos de transmissão e dissipação de energia no fluido. Este problema também é conhecido como 1° *problema de Stokes*.

As condições de contorno do problema são:

$$\begin{array}{lll} y = 0 & \Rightarrow & v_x = 0 \\ t < 0 & \Rightarrow & v_y = 0 \end{array} \quad \begin{array}{lll} y = 0 & \Rightarrow & v_x = U \\ t \geq 0 & \Rightarrow & v_y = 0 \end{array} \quad y \longrightarrow \infty \Rightarrow \begin{array}{l} v_x = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \end{array}$$

Ao contrário dos problemas que abordamos anteriormente, temos desta vez um problema dependente do tempo. As equações da continuidade e de Navier-Stokes são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) - g \end{aligned}$$

Neste caso todas as derivadas em relação a  $x$  são nulas. A equação da continuidade se reduz a  $\partial v / \partial y = 0$ , o que implica em que  $v_y$  é constante ao longo de  $y$ . Como  $v_y = 0$  junto à placa concluímos que esta componente de velocidade é identicamente nula em todo o campo. As equações de Navier-Stokes se reduzem a:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (5.26)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = g \quad (5.27)$$

A segunda equação pode ser integrada diretamente e fornece o perfil da distribuição de pressões:

$$p = -\rho g y + C$$

Não se conhece nenhuma solução analítica que satisfaça à eq. (5.26) e às condições de contorno do problema. Entretanto, esta equação pode ser reescrita, derivando-a em relação a  $y$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (5.28)$$

Tomamos a derivada da equação da componente  $v_x$  porque se conhece uma solução analítica para a equação acima na forma:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{-A}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) \quad (5.29)$$

o que pode ser verificado substituindo-se a forma (5.29) na eq. (5.26). Adicionalmente esta solução satisfaz às condições iniciais e de contorno aplicáveis, que são:

$$\begin{aligned} y = 0 \quad t = 0 &\implies \frac{\partial v_x}{\partial y} = \infty & y \longrightarrow \infty &\implies \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

A derivada  $\partial v_x/\partial y$  é de fato a única componente do rotacional do campo diferente de zero, pois:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \mathbf{k}$$

O termo  $\partial v_x/\partial y$  representa portanto o rotacional, ou a *vorticidade* do campo de velocidades.

Cabem aqui algumas observações: Antes da placa ser posta em movimento a vorticidade do campo é nula pois todas as derivadas da velocidade o são. A vorticidade surge no momento em que a placa se move. O movimento é *instantaneamente* percebido em todo o campo pois  $\partial v_x/\partial y$  é diferente de zero para qualquer valor de  $y$  e  $t > 0$ , conforme a eq. (5.29). Esta mesma equação mostra que a vorticidade é elevada junto à placa nos instantes iniciais pois o denominador de  $A/\sqrt{t}$  é pequeno. Entretanto, a vorticidade decresce muito rapidamente à medida em que aumenta a distância da placa nos instantes iniciais, pois  $y^2/4\nu t$  toma valores elevados e portanto  $\exp(-y^2/4\nu t)$  é muito pequeno. À medida que o tempo passa a vorticidade diminui junto à placa e se espalha pelo campo todo.

Se calcularmos:

$$\int_0^\infty \frac{\partial v_x}{\partial y} dy$$

apenas a região próxima à placa contribuirá para o resultado, pois  $\partial v_x/\partial y$  tende a zero longe da mesma. Esta integral fornece portanto uma medida da espessura da camada na qual a vorticidade é diferente de zero. Para que a mesma tenha efetivamente a dimensão física de uma espessura ou comprimento é suficiente dividirmos por um valor de referência do rotacional, que escolhemos arbitrariamente. Dividiremos por  $-A/\sqrt{t}$ , que é o valor do rotacional em  $y = 0$ .

Definimos portanto a *espessura de vorticidade*  $\delta$  como sendo:

$$\delta = \frac{1}{(\partial v_x/\partial y)_{y=0}} \int_0^\infty \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \quad (5.30)$$

O valor desta integral pode ser calculado, substituindo-se o integrando pelo valor dado pela eq. (5.29):

$$\delta = \frac{1}{-A/\sqrt{t}} \int_0^\infty \frac{-A}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) dy = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) dy$$

Fazendo-se a transformação de variáveis  $x^2 = y^2/(4\nu t)$ , isto é  $x = y/(2\sqrt{\nu t})$  temos que  $dx = dy/(2\sqrt{\nu t})$ , ou  $dy = (2\sqrt{\nu t}) dx$ . Portanto:

$$\delta = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) dy = \int_0^\infty \exp(-x^2)(2\sqrt{\nu t}) dx = (2\sqrt{\nu t}) \int_0^\infty \exp(-x^2) dx$$

A última integral é igual a  $\sqrt{\pi}/2$  e portanto:

$$\delta = \sqrt{\pi\nu t} \quad (5.31)$$

isto é, a espessura de vorticidade aumenta com a raiz quadrada do tempo. Esta grandeza mede de fato a espessura da *camada limite* que se desenvolve acima da placa.

A velocidade com que a espessura de vorticidade aumenta é dada por:

$$c = \frac{d\delta}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\pi\nu t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi\nu}{t}} \quad (5.32)$$

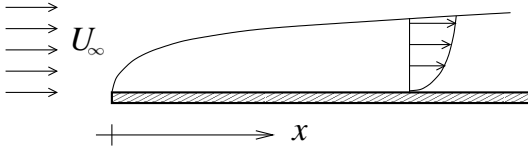


Figura 5.8: Campo de velocidades sobre uma placa plana semi-infinita imersa em um escoamento cuja velocidade longe da placa é igual a  $U_\infty$ .

O resultado acima possibilita que apresentemos duas interpretações para o número de Reynolds.

Consideremos a eq. (5.31) e fazemos a transformação  $t = x/U$ , onde  $U$  é a velocidade da placa. Esta transformação corresponde a estudarmos de forma aproximada o escoamento de um fluido que se aproxima com velocidade uniforme  $U_\infty$  de uma placa plana semi-infinita com origem em  $x = 0$ . O problema se encontra esquematizado na fig. (5.8)

A vorticidade neste caso é gerada essencialmente na direção perpendicular à placa. Uma partícula de fluido localizada em um plano vertical situado a uma distância  $x$  da origem da placa em movimento recebe o sinal de aumento da vorticidade desde o tempo  $t = x/U$ . A espessura de vorticidade ou da camada limite toma a forma:

$$\delta = \sqrt{\pi\nu t} = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

Consequentemente:

$$\frac{x}{\delta} = x \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Ux}{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Re}$$

onde  $Re$  é o número de Reynolds. Esta igualdade pode ser reescrita como:

$$Re = \pi \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \quad (5.33)$$

isto é, o número de Reynolds é proporcional ao quadrado da relação entre a dimensão característica de um corpo que se desloca imerso em um fluido viscoso e a espessura da camada limite existente em torno do corpo.

A segunda interpretação do número de Reynolds é feita considerando-se a expressão da velocidade de crescimento da espessura de vorticidade ou da camada limite. Fazendo-se a substituição  $t = x/U$  na eq. (5.32) obtemos:

$$c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi \nu}{t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}}$$

Consequentemente:

$$\frac{U}{c} = U \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{x}{\nu U}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Ux}{\nu}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Re}$$

ou ainda:

$$Re = \frac{\pi}{4} \left( \frac{U}{c} \right)^2$$

isto é, o número de Reynolds é proporcional ao quadrado da relação entre a velocidade do escoamento e a velocidade de difusão da vorticidade.

Procedemos agora à determinação da constante  $A$ , da expressão da vorticidade (eq. 5.29). Para isto utilizaremos o teorema de Stokes, segundo o qual:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$$

Tomamos a superfície  $S$  como um retângulo com um dos lados apoiado sobre a placa em movimento e o lado oposto em  $y = \infty$ , conforme o esquema abaixo. Seja  $L$  o comprimento de cada um destes lados. Os outros dois lados do retângulo são perpendiculares à velocidade. Calculemos inicialmente  $\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ . A integral sobre os dois lados verticais do retângulo é nula por serem os mesmos perpendiculares à velocidade. A integral sobre o lado horizontal localizado em  $y = \infty$  também é nula pois  $u = 0$  em  $y \rightarrow \infty$ . A única contribuição para a circulação provem do lado localizado sobre a placa, onde a velocidade é  $u = U$ . Portanto:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = UL$$

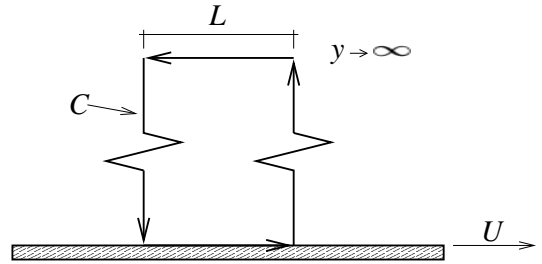


Figura 5.9: Cálculo da constante  $A$ , da expressão da vorticidade conforme eq. (5.29).

Calculamos o termo  $\int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$ . Como  $\partial u / \partial y$  é independente de  $x$ , temos:

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = L \int_0^\infty \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = L \frac{A}{\sqrt{t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) dy$$

Fazendo novamente a mudança de variáveis  $x^2 = y^2/(4\nu t)$ , isto é  $x = y/(2\sqrt{\nu t})$  temos que  $dx = dy/(2\sqrt{\nu t})$ , ou  $dy = (2\sqrt{\nu t}) dx$ . Portanto:

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = L \frac{A}{\sqrt{t}} 2\sqrt{\nu t} \int_0^\infty \exp(-x^2) dx$$

Como a última integral é igual a  $\sqrt{\pi}/2$ , temos:

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = LA\sqrt{\pi\nu} \quad (5.34)$$

Portanto:

$$\oint_\Gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = UL = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = LA\sqrt{\pi\nu} \quad \longrightarrow \quad A = \frac{U}{\sqrt{\pi\nu}}$$

A vorticidade toma portanto a forma:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-U}{\sqrt{\pi\nu t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right)$$

É interessante observar que  $\int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$  é independente do tempo, conforme a eq. (5.34). Este resultado mostra que embora a vorticidade gerada no momento em que a placa é posta em movimento se difunda por todo o campo, a *circulação* se conserva. Trata-se de fenômeno que tem analogia com a difusão da concentração de uma espécie química, onde a *massa* contida em todo o campo se conserva e com a difusão da temperatura, onde a *energia* se conserva.

Concluindo, estudaremos os mecanismos de difusão e dissipação da energia cinética transmitida ao fluido pela placa em movimento.

A energia cinética contida em uma coluna de fluido de base unitária é dada por:

$$E_c(t) = \int_0^\infty \frac{\rho u^2}{2} dy$$

Por outro lado, a taxa de variação da energia cinética da coluna é dada por:

$$\frac{d}{dt} E_c(t) = \rho \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \frac{u^2}{2} dy = \rho \int_0^\infty u \frac{\partial u}{\partial t} dy$$

Substituindo  $\partial u/\partial t$  pela expressão dada pela eq. (5.26) obtemos:

$$\frac{d}{dt}E_c(t) = \rho\nu \int_0^\infty u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \rho\nu \int_0^\infty u \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} dy = \mu \int_0^\infty u \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Integrando por partes obtemos:

$$\frac{d}{dt}E_c(t) = \mu u \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0^\infty - \mu \int_0^\infty \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy = \tau_{xy} U - \mu \int_0^\infty \Phi dy$$

onde  $\tau_{xy}$  é a tensão de cisalhamento junto à placa. O termo  $\tau_{xy}U$  representa portanto a taxa de fornecimento de energia ao fluido pela placa em movimento. O último termo da igualdade acima contém a integral da função dissipação e representa portanto a perda de energia cinética da coluna de fluido em virtude dos efeitos viscosos.

## 5.8 Escoamento Próximo ao Eixo de um Disco Rotatório

Trataremos agora de outra solução clássica das equações de Navier-Stokes, descoberta por Von-Kármán (1921), que diz respeito ao campo de estacionário de velocidades e pressão de um fluido incompressível com viscosidade  $\mu$ , que se desenvolve próximo ao eixo de um disco rotatório de grande diâmetro que gira com velocidade angular  $\Omega$ . Trata-se de um escoamento em que a rotação do disco impõe, em virtude da condição de não-escorregamento da camada de fluido em contato com a superfície, que a velocidade junto à mesma seja igual à velocidade do disco, isto é:

$$\mathbf{v}|_{z=0} = v_\theta \mathbf{e}_\theta = r\Omega \mathbf{e}_\theta$$

Este movimento tem como efeito colateral a indução pela força centrífuga, de componente radial  $v_r$ , que impele o fluido para longe do eixo. A vazão devida à força centrífuga, que afasta o fluido para longe do eixo de rotação, deve ser reposta por outra na direção axial, que se aproxima da superfície do disco. Pelo fato de possuir uma solução exata, este problema é usado no estudo da influência de um escoamento transversal, no caso  $v_r$ , sobre a estabilidade de um campo imposto,  $v_\theta$ .

Esta situação ocorre particularmente em asas enflexadas de aviões, em que o campo de velocidades se decompõe em uma componente perpendicular à asa e em outra paralela, que tem o efeito de desestabilizar a primeira e de antecipar o ponto de transição em

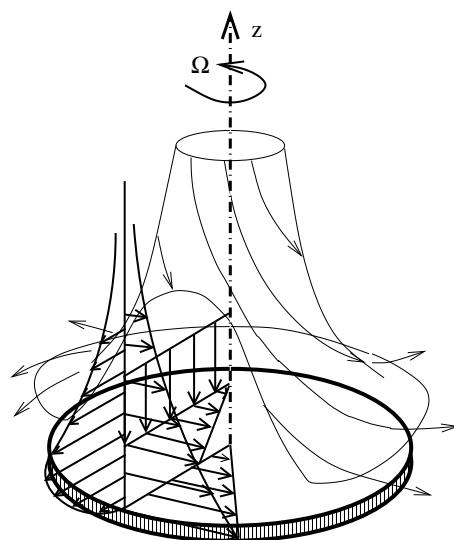


Figura 5.10: As componentes  $v_r$ ,  $v_\theta$  e  $v_z$  do campo de velocidades na proximidade do eixo de um disco rotatório.

que a camada limite se torna turbulenta para perto do bordo de ataque da asa, aumentando o arraste da mesma. Este tipo de escoamento ocorre também em células eletroquímicas que utilizam eletrodos de disco rotatório.

O primeiro passo na solução do problema consiste em identificarmos a possível forma do campo de velocidades deve tomar. Iniciamos fazendo a hipótese de que as componentes da velocidade e da pressão não dependem de  $\theta$ , isto é, todas as derivadas na direção tangencial se anulam. Supomos além disso, que  $\partial p / \partial r = 0$ . As equações da continuidade e de Navier-Stokes, escritas em coordenadas cilíndricas (Eqs. 2.6 e 3.29 – 3.32) simplificam-se e tomam a forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (5.35)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \quad (5.36)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) \right) + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) \quad (5.37)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (5.38)$$

As condições de contorno para a velocidade são:

$$\left. \begin{array}{llll} z = 0 : & v_r = 0 & v_\theta = r\Omega & v_z = 0 \\ z = \infty : & v_r = 0 & v_\theta = 0 & v_z = \text{Cte} \end{array} \right\} \quad (5.39)$$

A componente  $v_\theta$  deve portanto decrescer de valor igual ao da velocidade de rotação do disco junto à superfície do mesmo, até zero, longe do disco. Este comportamento pode ser descrito por:

$$v_\theta = r\Omega G(z)$$

onde  $G(z)$  é uma função adimensional tal que  $G(z) = 1$  em  $z = 0$  e  $G(z) = 0$  em  $z = \infty$ . A forma deste perfil pode ser generalizada de modo a torná-lo função de uma variável  $z$  adimensionalizada que leve em conta os efeitos da velocidade angular do disco e da viscosidade do fluido. Definindo:

$$\xi = z \left( \frac{\Omega}{\nu} \right)^{1/2} \quad (5.40)$$

reescrevemos:

$$v_\theta = r\Omega G(\xi)$$

No que diz respeito à componente  $v_r$  procuramos uma solução semelhante à buscada para  $v_\theta$ , escrevendo:

$$v_r = r\Omega F(\xi)$$

onde  $F(\xi)$  é uma função adimensional que se anula na superfície do disco, longe do mesmo e passa por um máximo próximo à superfície (ver Fig. 5.10). Quanto à componente  $v_z$  e à pressão, procuramos uma solução independente de  $r$  e  $\theta$ :

$$v_z = (\nu\Omega)^{1/2} H(\xi) \quad p = \rho\nu\Omega P(\xi)$$

Em resumo:

$$v_r = r\Omega F(\xi) \quad (5.41)$$

$$v_\theta = r\Omega G(\xi) \quad (5.42)$$

$$v_z = (\nu\Omega)^{1/2} H(\xi) \quad (5.43)$$

$$p = \rho\nu\Omega P(\xi) \quad (5.44)$$

As condições de contorno para  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $P$  são:

$$\left. \begin{array}{llll} \xi = 0 : & F = 0 & G = 1 & H = 0 & P = 0 \\ \xi = \infty : & F = 0 & G = 0 & H = C^{\text{te}} & \end{array} \right\} \quad (5.45)$$

Substituindo as Eqs. (5.41–5.44) em (5.35–5.38) obtém-se:

$$2F' + H = 0 \quad (5.46)$$

$$F^2 - G^2 + HF' = F'' \quad (5.47)$$

$$2FG + HG' = G'' \quad (5.48)$$

$$P' + HH' = H'' \quad (5.49)$$

Trata-se de um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias não-lineares, sendo que as três primeiras estão desacopladas da última e podem ser resolvidas independentemente daquela. A Fig. (5.11) mostra o resultado da integração numérica das equações (5.46–5.48).

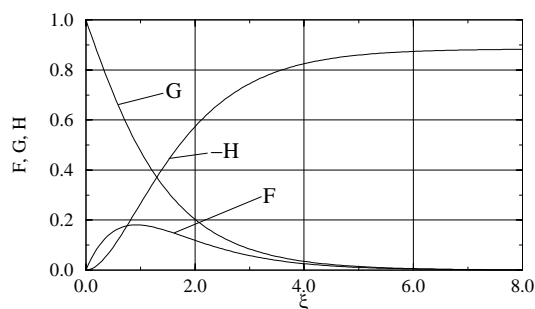


Figura 5.11: Funções adimensionais  $F$ ,  $G$  e  $H$ , que descrevem a dependência dos perfis de velocidade próximo ao eixo de um disco rotatório.

## 5.9 Problemas

1. Determinar a velocidade de queda livre no ar e o número de Reynolds de uma gotícula de água de diâmetro  $d = 0,1 \text{ mm}$ . Dados: viscosidade do ar:  $\mu = 1,85 \times 10^{-5} \text{ N s/m}^2$ ; densidade da água:  $\rho = 1017 \text{ kg/m}^3$ .
2. Mostrar que no caso do escoamento bi-dimensional de Stokes, regido pelas eqs. (5.1 e 5.2), a função corrente definida por  $u = \partial\psi/\partial y$ ,  $v = -\partial\psi/\partial x$  satisfaz à equação:

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad \text{onde} \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

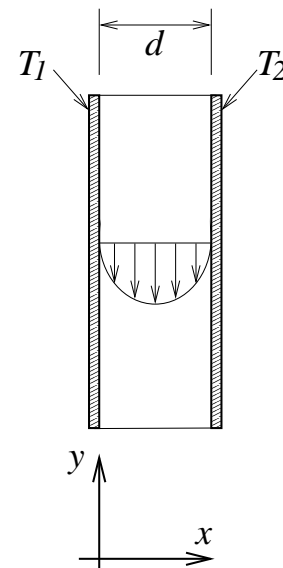


3. (Segundo problema de Stokes) Uma placa plana infinita imersa em um fluido incompressível com viscosidade  $\nu$  oscila em seu próprio plano com velocidade  $u = U \cos \omega t$ . Pede-se:

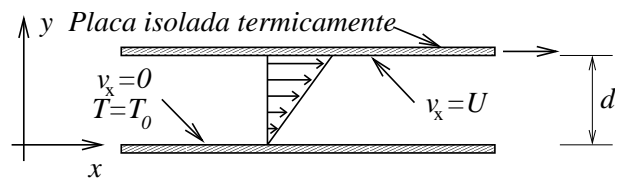
- Estabelecer as equações do movimento e as condições de contorno do problema;
- Mostrar que  $u = U e^{-\kappa y} \cos(\kappa y - \omega t)$ , com  $\kappa = (\omega/2\nu)^{1/2}$  satisfaz às equações do movimento e às condições de contorno;
- Qual a distância  $\Delta y$  entre dois pontos onde a velocidade  $u$  tem a mesma fase?

4. Um líquido viscoso de peso específico  $\rho g$  e viscosidade  $\mu$  escoa sob a ação da gravidade entre duas placas verticais, uma delas mantida à temperatura  $T_1$  e a outra, à temperatura  $T_2$ . Pede-se:

- Obter as equações dos campos de velocidades, pressões e temperaturas;
- O campo de velocidades;
- O campo de temperaturas levando-se em conta a dissipação viscosa;
- O fluxo de calor através das duas paredes, levando em conta a dissipação viscosa;
- O campo de temperaturas desprezando-se a dissipação viscosa;



5. Um líquido viscoso com peso específico  $\rho g$  e viscosidade  $\mu$  escoa em regime laminar permanente entre duas placas planas horizontais. A placa inferior é imóvel e mantida à temperatura  $T_0$ . A placa superior move-se com velocidade  $U$  e é isolada termicamente.



Considerando que os perfis de temperatura *não variam* na direção  $x$  e levando em conta o aquecimento do fluido devido à dissipação viscosa, pede-se:

- As equações dos campos de velocidades e temperatura e as condições de contorno para os mesmos;
- Os perfis de velocidade e pressão, a velocidade média do escoamento e o perfil de temperatura considerando e desprezando a dissipação viscosa;
- O fluxo de calor através da placa inferior;
- O perfil de temperaturas em forma adimensional, considerando a dissipação viscosa;

- O coeficiente de transferência de calor por convecção  $h$  e o número de Nusselt, desprezando a dissipação viscosa.
6. Considera-se o escoamento laminar permanente de um fluido viscoso em um tubo de seção circular e eixo paralelo ao eixo  $z$ . Pede-se:

- Mostrar que as equações de Navier-Stokes (eqs. 3.29 – 3.32) se reduzem a:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad v_r = v_\theta = 0$$

e portanto:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) = C^{te} < 0$$

- Mostrar que a equação de  $v_z$  é satisfeita por

$$v_z = Ar^2 + B \ln r + C$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes escolhidas para satisfazer às condições de contorno,  $v_z = 0$  na parede e  $v_z$  finito em  $r = 0$ ;

- Mostrar que o perfil de velocidade  $v_z(r)$  e a vazão  $Q$  para uma perda de carga específica dada,  $dp/dz$ , em um tubo cilíndrico de raio  $a$ , são::

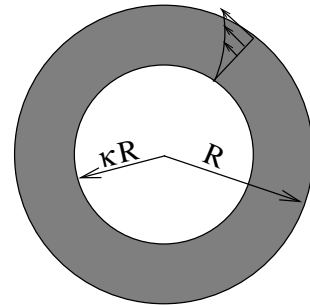
$$v_z(r) = \frac{-dp/dz}{4\mu} (a^2 - r^2) \quad Q = \frac{-dp/dz}{8\mu} \pi a^4$$

- Mostrar que no caso do escoamento de um fluido no espaço entre dois tubos coaxiais, o externo de raio  $a$  e o interno de raio  $b$ , o perfil de velocidade  $v_z(r)$  e a vazão  $Q$  para uma perda de carga específica dada,  $dp/dz$  são da forma:

$$v_z(r) = \frac{-dp/dz}{4\mu} \left( a^2 - r^2 + \frac{b^2 - a^2}{\ln b/a} \ln \frac{r}{a} \right)$$

$$Q = \frac{\pi}{8} \frac{(-dp/dz)}{\mu} \left( b^4 - a^4 - \frac{(b^2 - a^2)^2}{\ln b/a} \right)$$

7. Um líquido viscoso com densidade  $\rho$  e viscosidade  $\mu$  encontra-se confinado entre dois cilindros concêntricos de comprimento infinito e raios interno e externo iguais a  $\kappa R$  e  $R$ , respectivamente. O cilindro interno é imóvel e o externo gira com velocidade angular  $\Omega$ . Mostrar que o perfil de velocidades, a tensão de cisalhamento tangencial e o torque por unidade de comprimento necessário para fazer o cilindro externo girar são dados, respectivamente, por:



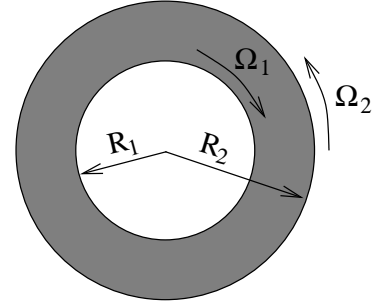
$$v_\theta = \frac{\Omega R}{1 - \kappa^2} \left( \frac{r}{R} - \kappa^2 \frac{R}{r} \right) \quad \tau_{\theta r} = 2\mu\Omega R^2 \frac{\kappa^2}{r^2 (1 - \kappa^2)} \quad M = 4\pi\mu\Omega R^2 \frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2}$$

8. Dois cilindros co-axiais de comprimento infinito e raios  $R_1$  e  $R_2$   $R_2 > R_1$  giram com velocidades angulares iguais a  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ . Mostrar que o campo de velocidades de um fluido com viscosidade  $\mu$  que ocupa o anel entre os dois cilindros são dados, a tensão de cisalhamento tangencial e o torque por unidade de comprimento necessário para girar os cilindros são dados, respectivamente, por:

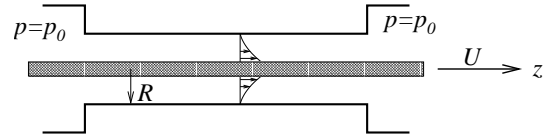
$$v_\theta = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}$$

$$\tau_{\theta r} = 2\mu \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

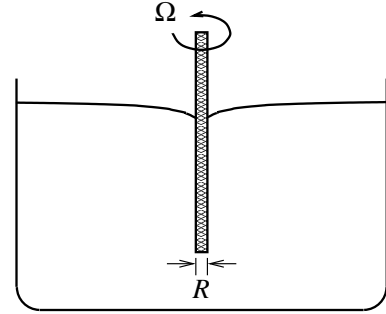
$$M = 4\pi\mu \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$



9. Um bastão cilíndrico de raio  $\kappa R$  desloca-se com velocidade  $U$  dentro de um tubo de raio  $R$ , na direção axial. Determinar o perfil de velocidades e a vazão do fluido que preenche o espaço entre o bastão e o tubo.

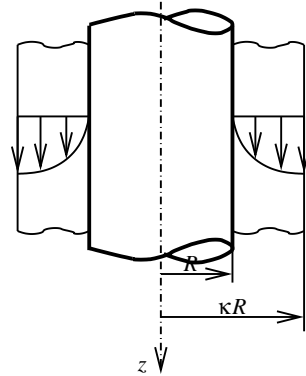


10. Um bastão cilíndrico de raio  $R$  com eixo vertical gira com velocidade angular  $\Omega$ , parcialmente imerso em um fluido com superfície livre, que se encontra em um recipiente cuja largura e profundidade são muito maiores do que  $R$ . Determinar os campos de velocidades e pressão e a equação da curva da superfície livre.



11. Mostrar que o campo de velocidades que se forma em uma película de um líquido com densidade  $\rho$  e viscosidade  $\mu$ , que escoar pelo lado externo de um tubo de raio  $R$  é dado por:

$$v_z = \frac{\rho g R^2}{4\mu} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 + 2\kappa^2 \ln \frac{r}{R} \right)$$



12. Deduzir as Eqs. (5.35 – 5.38) e (5.46 – 5.49).

13. Mostrar que o torque necessário para manter um disco de raio  $R$  cujas duas faces estão em contato com um fluido de densidade  $\rho$  e viscosidade  $\nu$ , girando com velocidade angular  $\Omega$ , é dado por:

$$M = 2 \int_0^R 2\pi r^2 \tau_{\theta z} dr = \pi \rho R^4 \left( \nu \Omega^3 \right)^{1/2} G'(0)$$

# Capítulo 6

## Introdução à Teoria da Camada Limite

### 6.1 Introdução

Temos discutido ao longo deste trabalho, sobre a dificuldade de estabelecermos uma classificação simples dos fenômenos observados nos fluidos. Esta dificuldade, que decorre da variedade de tais fenômenos, tem origem no caráter não-linear das leis que regem a evolução dos mesmos. Uma possível classificação torna-se possível se nos ativermos ao caso dos *escoamentos*, isto é aos casos em que, de alguma forma, há uma velocidade imposta ao fluido. Nestas condições podemos considerar três casos:

- Os escoamentos sob baixos números de Reynolds, ou nos quais não é definido, como é o caso do Problema de Rayleigh e do Segundo Problema de Stokes. Estes escoamentos foram abordados no capítulo 5;
- No outro extremo encontram-se os escoamentos sob altos números de Reynolds, em que os efeitos viscosos têm pouca importância, isto é, em que  $Re \rightarrow \infty$  e onde os efeitos de compressibilidade não podem ser desprezados. Enquadra-se neste caso parte considerável da aerodinâmica de alta velocidade;
- Entre estes dois extremos encontramos os escoamentos sob número elevado número de Reynolds, nos quais os efeitos viscosos se concentram junto à superfície dos corpos, na esteira que se forma atrás dos mesmos e em regiões de forte cisalhamento entre camadas adjacentes do fluido. No restante do campo, o escoamento é regido pela equação de Euler.

Ao estudarmos o problema de Rayleigh (Seção 5.7) vimos que junto à superfície de uma placa plana imersa no escoamento de um fluido pouco viscoso forma-se uma fina camada denominada *camada limite* onde a velocidade varia de zero à velocidade do fluxo longe da placa. Este resultado foi obtido a partir de uma transformação de variáveis, em que passamos do escoamento sobre uma placa infinita para o que se forma sobre uma placa com origem em  $x = 0$ . A componente vertical da velocidade no problema da placa infinita se anula. Neste capítulo trataremos de generalizar estes resultados para o caso de camadas limite que se formam sob elevados números de Reynolds, junto a corpos de pequena curvatura.

## 6.2 As Equações de Prandtl

As equações que descrevem o campo de velocidades e pressão que se forma junto à superfície de corpos esbeltos foram descobertas por Prandtl, na primeira metade do século XX. O ponto de partida de Prandtl foram as equações da continuidade e de Navier-Stokes em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (6.3)$$

A hipótese de que a curvatura da superfície é pequena se faz admitindo-se que a componente  $v_x$  da velocidade permanece da mesma ordem de grandeza ao longo do tempo e de toda a extensão  $L$  do corpo. Para isto é necessário que  $\partial v_x / \partial x$  seja da mesma ordem de grandeza que  $v_x$  e que permaneça dentro destes limites ao longo de todo o corpo. Conseqüentemente,  $\partial^2 v_x / \partial x^2$  deve ter o mesmo comportamento. Portanto:

$$L = \mathcal{O}(1) \quad v_x = \mathcal{O}(1) \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = \mathcal{O}(1) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = \mathcal{O}(1) \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \mathcal{O}(1)$$

Como o escoamento se faz sob alto número de Reynolds a espessura da camada limite  $\delta$  é tal que  $\delta \ll L$ . Da equação da continuidade concluímos que:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \mathcal{O}(1) \quad \longrightarrow \quad v_y = \mathcal{O}(\delta)$$

Como  $v_y = \mathcal{O}(\delta)$  ao longo de todo o corpo é necessário que:

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \mathcal{O}(\delta) \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \mathcal{O}(\delta) \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = \mathcal{O}(\delta)$$

As demais derivadas em relação a  $y$  são estimadas fazendo-se a diferença do valor da variável dentro da camada limite e no topo da mesma e dividindo-se o resultado pela espessura  $\delta$  da camada limite. A componente  $v_x$  varia de zero, junto à superfície do corpo, ao valor da velocidade no topo da camada limite, que é de  $\mathcal{O}(1)$ , em distância igual à espessura da mesma, o que implica em que:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \mathcal{O}(\delta^{-1})$$

A derivada  $\partial v_x / \partial y$  é de  $\mathcal{O}(1)$  no topo superior da camada limite e  $\mathcal{O}(\delta^{-1})$  no interior. Estimamos portanto a ordem de grandeza de  $\partial^2 v_x / \partial y^2$  como segue:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \mathcal{O} \left( \frac{\mathcal{O}(\delta^{-1}) - \mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(\delta)} \right) = \mathcal{O}(\delta^{-2})$$

A derivada  $\partial v_y / \partial y$  é de  $\mathcal{O}(1)$  dentro e no topo superior da camada limite. Em consequência,

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = \mathcal{O}(\delta^{-1})$$

ou menor. Ao estudarmos o problema de Rayleigh (Seção 5.7) vimos que  $\delta = \mathcal{O}(\nu^{1/2})$ , donde concluímos que  $\nu = \mathcal{O}(\delta^2)$ .

De posse destes resultados estimamos a ordem de grandeza dos termos da Eq. (6.2): Os termos do membro esquerdo são todos de  $\mathcal{O}(1)$ . Quanto aos termos viscosos, temos:

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \mathcal{O}(\delta^2) \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(\delta^2) \qquad \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \mathcal{O}(\delta^2) \mathcal{O}(\delta^{-2}) = \mathcal{O}(1)$$

Concluimos portanto que o termo  $\nu \partial^2 v_x / \partial x^2$  pode ser desprezado e que o termo da pressão é no máximo de  $\mathcal{O}(1)$ . A equação da componente  $v_x$  torna-se portanto:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (6.4)$$

Com relação à da Eq. (6.3) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \mathcal{O}(\delta) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \mathcal{O}(1) \mathcal{O}(\delta) = \mathcal{O}(\delta) & v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \mathcal{O}(\delta) \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(\delta) \\ \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} &= \mathcal{O}(\delta^2) \mathcal{O}(\delta) = \mathcal{O}(\delta^3) & \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} &= \mathcal{O}(\delta^2) \mathcal{O}(\delta^{-1}) = \mathcal{O}(\delta) \end{aligned}$$

Os termos da Eq. (6.3) são portanto de  $\mathcal{O}(\delta)$ , com exceção de  $\nu \partial^2 v_y / \partial x^2$ , que pode ser desprezado. Concluimos também, que  $\partial p / \partial y = \mathcal{O}(\delta)$ . Adicionalmente, como a camada limite tem espessura de  $\mathcal{O}(\delta)$  as variações de pressão na direção  $y$  são de  $\mathcal{O}(\delta^2)$ , isto é a pressão dentro da camada limite é igual à do escoamento externo, que é regido pela equação de Euler.

Fora da camada limite:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

onde  $U$  e  $V$  são as componentes de velocidade do campo externo.  $V \mathcal{O}(\delta)$  e  $\partial U / \partial x = \mathcal{O}(1)$ , o que torna o último termo do membro esquerdo desprezível em relação aos demais. A equação de Euler aplicável ao campo externo torna-se:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Esta equação está descoplada da Eq. (6.4), isto é, admite-se que o campo externo é conhecido e independente do comportamento da camada limite. Consequentemente a pressão dentro

da mesma é conhecida e uma das equações (6.1-6.3) deve ser descartada. Prandtl descartou a equação da componente  $v_y$ , obtendo o sistema abaixo que leva seu nome (escoamentos permanentes):

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (6.6)$$

As equações de Prandtl são válidas para condições em que  $\delta$  seja muito menor do que a curvatura da superfície do corpo sobre o qual a camada limite se forma.

Introduzindo a definição de função corrente:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Substituímos esta definição na Eq. (6.5) e obtemos:

$$\psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \psi_{yyy} \quad (6.7)$$

onde as variáveis que aparecem nos índices subscritos indicam derivação em relação às mesmas.

## 6.3 A Equação de Falkner-Skan

Procuramos escrever a Eq. (6.7) em forma adimensional, utilizando variáveis de *similaridade*, que agrupam numa mesma variável  $x$  e  $y$ . O resultado tem a evidente vantagem de transformar a Eq. (6.7) em uma equação ordinária.

Definimos inicialmente as variáveis  $\eta$  e  $\xi$ , que são o resultado da adimensionalização de  $y$  e  $x$ , respectivamente:

$$\eta = \frac{y Re^{1/2}}{L g(x)} \quad \xi = \frac{x}{L} \quad (6.8)$$

onde  $L$  é a dimensão característica do corpo e  $g(x)$ , um fator de escala. Definimos também a função corrente adimensional como:

$$f = \frac{\psi(x, y) Re^{1/2}}{L U(x) g(x)}$$

As componentes da velocidade são dadas por:

$$v_x = U \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$-Re^{1/2} v_y = Re^{1/2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = L f \frac{\partial}{\partial x} (U g) + U g \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - L \frac{g'}{g} \eta f' \right)$$

Substituindo as definições das variáveis adimensionais  $\xi$ ,  $\eta$  e  $f$  na Eq. (6.7) obtemos:

$$f''' + \alpha f f'' + \beta(1 - f'^2) = \frac{u}{U_\infty} g^2 \left( f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (6.9)$$

onde:

$$\alpha = \frac{Lg}{U_\infty} \frac{d}{dx}(Ug) \quad \beta = \frac{L}{U_\infty} g^2 U' \quad f' = \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

Se  $f$  e suas derivadas não dependerem de  $\xi$  o lado direito da Eq. (6.9) se anula e a função corrente adimensional passa a depender apenas da variável de similaridade  $\eta$ , que engloba  $x$  e  $y$ . Para que isto aconteça o campo potencial de velocidades deve obedecer a algumas condições. Vejamos quais são:

$$f''' + \alpha f f'' + \beta(1 - f'^2) = 0$$

Com as condições de contorno:

$$\eta = 0 \longrightarrow \begin{cases} f = 0 \\ f' = 0 \end{cases} \quad \eta = \infty \longrightarrow f' = 1$$

Obtém-se a condição procurada:  $U(x) = Cx^n$ . A equação da camada limite admite portanto soluções de similaridade, desde que o campo potencial externo obedeça à condição acima e com a variável  $\eta$  definida conforme (6.8). Uma definição explícita para  $a\eta$  pode ser dada, interpretando-se esta variável como uma adimensionalização de  $y$ . Ao estudarmos o problema de Rayleigh (Sec. 5.7) que a espessura da camada limite que se forma sobre uma placa plana com origem em  $x = 0$ , sobre a qual incide um escoamento com ângulo de ataque nulo e velocidade  $U$  é proporcional a  $\delta = \sqrt{\pi\nu x/U}$ . É natural portanto utilizarmos esta espessura para adimensionalizar  $y$  e um fator proporcional a  $U\delta$  para definirmos a função corrente adimensional:

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{2\nu x/U}} \quad f = \frac{\psi}{\sqrt{2\nu Ux}} \quad (6.10)$$

Substituindo-se as definições (6.10) e a hipótese de que  $U \propto x^n$  na Eq. (6.7) obtém-se a equação de Falkner-Skan:

$$f''' + (1 + n)f f'' = 2n(f'^2 - 1) \quad (6.11)$$

No caso de  $n = 0$  têm-se  $U = C^{te}$ , o que representa o escoamento sobre uma placa plana sob ângulo de ataque nulo com relação ao escoamento incidente. A equação de Falkner-Skan reduz-se a:

$$f''' + f f'' = 0 \quad (6.12)$$

que é conhecida como equação de Blasius.



O escoamento potencial externo à camada limite pode ser descrito por um potencial complexo de velocidades:

$$\begin{aligned} F &= \phi + i\psi & \text{onde:} & & F &\propto z^{n+1} \\ z &= x + iy \end{aligned}$$

sendo a velocidade complexa dada por:

$$w = v_x + iv_y = \frac{dF}{dz}$$

Campos potenciais da forma  $U \propto x^n$  correspondem a escoamentos sobre diedros e cunhas, conforme ilustrado na Fig. (6.1). A equação de Falkner-Skan pode ser resolvida numérica-

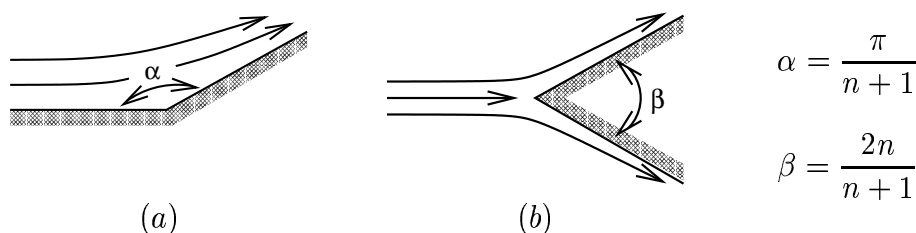


Figura 6.1: Escoamento sobre diedros (a) e cunhas (b).

mente para valores especificados de  $n$ . Os casos mais importantes são:

1	$U = C^{te}$	$n = 0$	$\alpha = \pi$	$\beta = 0$	Escoamento de Blasius (placa plana)
2	$\delta = C^{te}$	$n = 1$	$\alpha = \pi/2$	$\beta = 1$	Escoamento bidimensional sobre um ponto de estagnação
3	$\tau_p = C^{te}$	$n = 1/3$	$\alpha = \pi/2$	$\beta = 1/2$	
4	$C_f = C^{te}$	$n = -1$	$\alpha = +\infty$	$\beta = +\infty$	Escoamento para um sumidouro
5	$\tau_p = 0$	$n = -0,0904$	$\alpha = 3,4538$	$\beta = -0,1988$	Escoamento em vias de descolar

$C_f$  é o coeficiente de atrito definido por:

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

O caso em que  $\tau_p = 0$  ocorre quando  $\partial v / \partial n = 0$  junto à superfície do corpo;  $n$  é a direção perpendicular à superfície. Nesta situação a velocidade permanece nula ao longo de uma certa distância do corpo. O escoamento está prestes a *descolar*, conforme mostrado na Fig. (6.2).

O descolamento da camada limite é em geral, um efeito indesejado. O fenômeno ocorre quando o conteúdo de energia cinética da camada limite diminui muito e o escoamento não consegue mais vencer o gradiente de pressão adverso. É o caso, por exemplo, de aerofólios sob elevados ângulos de ataque. Uma primeira forma de evitá-lo consiste em reduzir os gradientes de pressão adversos, o que se consegue com pequenos ângulos de ataque e com geometrias em que a redução da velocidade pelo aumento da seção transversal se faz de forma gradual, como Venturis e nos aerofólios. Outra forma consiste na injeção de energia através de *slots*, como os utilizados em asas de aviões (ver Fig. 6.3 d).

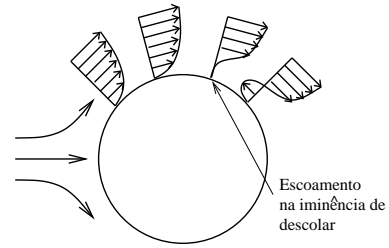


Figura 6.2: Escoamento na iminência de descolar.

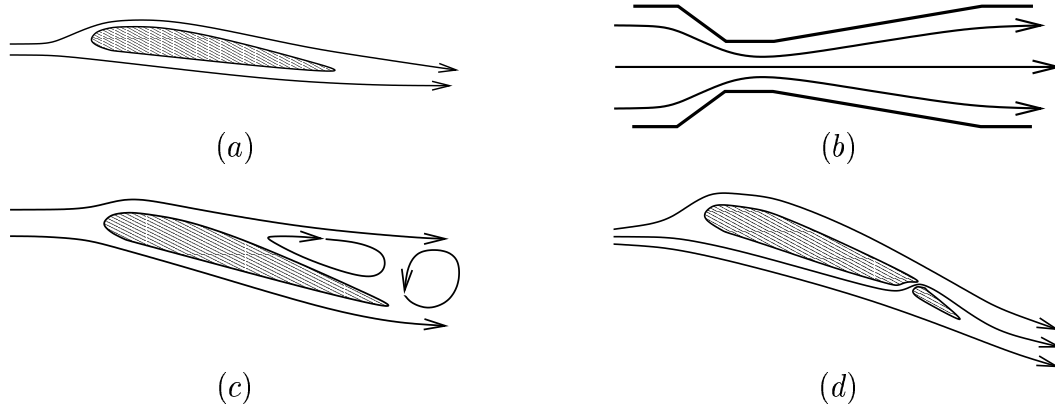


Figura 6.3: Controle do descolamento de camadas-limite: (a): Aerofólio sob baixo ângulo de ataque; (b): Tubo de Venturi; Nos dois primeiros casos o escoamento adere às paredes do corpo. (c): Aerofólio sob elevado ângulo de ataque e escoamento descolado; (d): Injeção de energia na camada limite de um aerofólio, através de um *slot*.

## 6.4 Métodos Integrais na Teoria da Camada Limite Laminar

A primeira integral da camada limite é obtida integrando-se a equação da continuidade ao longo da espessura  $\delta$  da mesma. Obtém-se:

$$\int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + V = 0$$

onde  $V = v_y(x, \delta)$ . A equação acima pode ser reescrita sucessivamente como:

$$V = - \int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{dU}{dx} dy - \int_0^\delta \frac{dU}{dx} dy$$

$$V = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (U - v_x) dy - \int_0^\delta \frac{dU}{dx} dy$$

Definindo a espessura de deslocamento  $\delta^*$  como:

$$\delta_1 = \int_0^\delta \frac{U - v_x}{U} dy$$

obtemos a primeira relação integral da camada limite laminar:

$$V = \frac{d}{dx} (U\delta_1) - \delta \frac{dU}{dx}$$

A espessura de deslocamento representa o aumento da altura do canal em que o escoamento se faz, necessário para compensar a deficiência de vazão no interior da camada limite, de modo a manter uma vazão por unidade de largura igual a  $U\delta$ . No caso de  $dU/dx = 0$ :

$$\frac{V}{U} = \frac{d\delta_1}{dx}$$

A equação da quantidade de movimento (Eq. 6.5) também pode ser integrada:

$$\int_0^\delta \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - U \frac{\partial U}{\partial x} \right) dy = -\frac{\tau_p}{\rho}$$

O termo com a tensão de cisalhamento junto à parede substitui  $\nu \partial v_x / \partial y|_{y=0}$ . A componente  $v_y$  da velocidade pode ser substituída por:

$$v_y = - \int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy$$

o que leva a :

$$\int_0^\delta \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy - U \frac{\partial U}{\partial x} \right) dy = -\frac{\tau_p}{\rho}$$

Integrando por partes o segundo termo do membro esquerdo:

$$\int_0^\delta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \right) dy = U \int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy - \int_0^\delta v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy$$

Portanto:

$$\int_0^\delta \left( 2v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - U \frac{\partial v_x}{\partial y} - U \frac{\partial U}{\partial x} \right) dy = -\frac{\tau_p}{\rho}$$

ou:

$$\frac{\tau_p}{\rho} = \delta U \frac{\partial U}{\partial x} - \int_0^\delta \frac{\partial v_x^2}{\partial x} dy + U \int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \quad (6.13)$$

Definindo a espessura de quantidade de movimento,  $\delta_2$ :

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{v_x}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy$$

temos:

$$\frac{d}{dx} (U^2 \delta_2) = \frac{d}{dx} \int_0^\delta (v_x U - v_x^2) dy = U \int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial y} dy - \int_0^\delta \frac{\partial v_x^2}{\partial x} dy \quad (6.14)$$

A espessura de quantidade de movimento representa o aumento da altura do canal em que o escoamento se faz, necessário para compensar a deficiência de vazão no interior da camada limite, de modo a manter um fluxo de quantidade de movimento por unidade de largura igual a  $U^2 \delta$ .

Comparando as Eqs. (6.13 e 6.14) obtemos:

$$\frac{\tau_p}{\rho} = \frac{d}{dx} (U^2 \delta_2) + \delta U \frac{\partial U}{\partial x}$$

Rearranjando este resultado obtém-se a relação integral de Von-Kármán:

$$\frac{\tau_p}{\rho} = U^2 \frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 U \frac{dU}{dx} \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\right) \quad (6.15)$$

## 6.5 Problemas

1. Deduzir a equação de Falkner-Skan (Eq. 6.11) utilizando as definições (6.10) e a condição  $U \propto x^n$ .
2. Calcular as relações “espessura de deslocamento”/ “espessura da camada limite” e “espessura de quantidade de movimento”/ “espessura da camada limite”, isto é,  $\delta_1/\delta$  e  $\delta_2/\delta$  para os seguintes perfis de velocidade:

$$a) \frac{v_x}{U} = \frac{y}{\delta} \quad b) \frac{v_x}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad c) \frac{v_x}{U} = \sin \frac{\pi y}{2\delta}$$

3. A integral de Von Kármán para uma placa plana ( $U = cte.$ ) é:

$$\frac{\tau_p}{\rho} = U^2 \frac{d\delta_2}{dx} = U^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \frac{v_x}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy \quad (6.16)$$

e a tensão de cisalhamento na parede (em regime laminar)

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (6.17)$$

Aproxima-se o perfil de velocidades da camada limite por:

$$\frac{v_x}{U} = \text{sen} \frac{\pi y}{2\delta} \quad (6.18)$$

Substituindo-se (6.18) em (6.17) e (6.16) pode-se obter uma equação diferencial da camada limite do tipo:

$$f(\delta) = c \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \quad (6.19)$$

Integrar (6.19) de modo a obter  $\delta(x)$  e  $\tau_p(x)$ .

# Capítulo 7

## Escoamentos Compressíveis

### 7.1 Introdução

Neste capítulo trataremos do escoamento *quase-unidimensional*, isentrópico de um fluido compressível, sem viscosidade. Estudaremos a analogia entre este tipo de escoamento e o de líquidos que escoam em canais de pequena profundidade e largura variável. Calcularemos a velocidade de propagação de pequenas perturbações, isto é a *velocidade do som* e obteremos a forma geral do potencial de um escoamento irrotacional, compressível de um fluido sem viscosidade.

### 7.2 Escoamento Quase-unidimensional

Consideremos o escoamento quase-unidimensional permanente de um gás perfeito através de um bocal convergente-divergente, conforme fig. (7.1). Por *quase-unidimensional* entendemos o escoamento em que a componente de velocidade  $u$  é muito maior do que as componentes  $v$  e  $w$  e estas últimas podem ser desprezadas. Neste caso redefinimos a velocidade  $u$  como a relação entre a vazão volumétrica  $Q$  e a área  $A$  da seção transversal do bocal ( $u \equiv Q/A$ ). A equação de Euler,  $D\mathbf{v}/Dt = -1/\rho \mathbf{grad} p + \mathbf{g}$  reduz-se a:

$$u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

ou:

$$u du = -\frac{dp}{\rho}$$

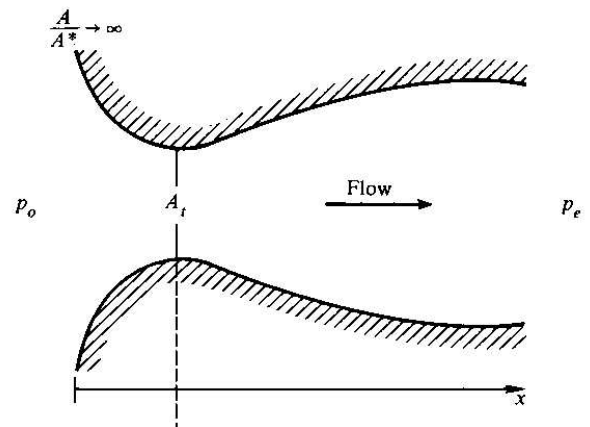


Figura 7.1: Esquema de um bocal convergente-divergente.

Esta relção mostra que, na ausência de efeitos viscosos e gravitacionais a pressão sempre diminui quando a velocidade aumenta.

Além de desprezarmos os efeitos viscosos consideramos que não haja transferência de calor entre as partículas do fluido nem geração interna de calor. Conseqüentemente a equação da entropia,

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau : \mathbf{grad} v + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

simplifica-se e toma a forma:

$$T \frac{Ds}{Dt} = 0$$

isto é, o escoamento é *isoentrópico*. Em cada ponto do campo temos que:

$$\begin{aligned} p &= p(\rho, s) \\ dp &= \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho \end{aligned}$$

pois  $ds = 0$ . A equação de conservação da quantidade de movimento pode então ser escrita como:

$$u du = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho.$$

O termo  $(\partial p / \partial \rho)_s$  tem dimensões de uma velocidade. De fato:

$$\left[ \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \right] = \left[ \frac{F}{L^2 \times \rho} \right] = \left[ \frac{M \times L}{t^2} \right] \left[ \frac{1}{L^2} \right] \left[ \frac{L^3}{M} \right] = \left[ \frac{L^2}{t^2} \right]$$

Denominaremos esta velocidade como  $a$ , isto é,  $(\partial p / \partial \rho)_s = a^2$ . Veremos adiante que  $a$  é a velocidade do som. Substituindo  $(\partial p / \partial \rho)_s$  por  $a^2$  na equação de conservação da quantidade de movimento obtemos:

$$u du = -a^2 \frac{d\rho}{\rho}. \quad (7.1)$$

Esta relação mostra que a densidade sempre cai quando a velocidade aumenta, pois  $a^2$  é positivo. Além disso vemos que quanto maior fôr a velocidade, maior será a queda da densidade. Acima de um determinado ponto a queda da densidade é tão acentuada que torna-se necessário que a seção transversal do bocal *aumente* para que a velocidade aumente. A variação da densidade com a velocidade é responsável pelo comportamento dos escoamentos compressíveis, que é qualitativamente diferente dos incompressíveis.

Procuramos expressar  $a$  em função das demais variáveis do problema. Para um processo isoentrópico temos que  $p/\rho^\gamma = C^{te}$ , onde  $\gamma$  é a relação entre os calores específicos a pressão e a volume constante do gás, respectivamente  $C_p$  e  $C_v$ . Portanto:

$$\begin{aligned} p &= C^{te} \rho^\gamma \\ \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s &= C^{te} \gamma \rho^{\gamma-1} = \frac{p}{\rho^\gamma} \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho} \end{aligned}$$

Como  $p/\rho = RT$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = a^2 = \gamma RT$$

O termo  $dp/\rho$  da eq. (7.1) pode ser substituído utilizando-se a equação da continuidade,  $\rho Au = C^{te}$ , de modo a obtermos uma relação entre a velocidade do escoamento e a área da seção transversal do bocal. A equação da continuidade também pode ser escrita como:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{du}{u} = 0$$

pois integrando-se esta última obtém-se:

$$\log \rho + \log A + \log u = C^{te}$$

ou  $\rho Au = C^{te}$ . Substituindo-se:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dA}{A} + \frac{du}{u}$$

na eq. (7.1) obtemos:

$$u du = a^2 \left( \frac{dA}{A} + \frac{du}{u} \right)$$

ou então:

$$\frac{u}{a^2} du - \frac{du}{u} = \frac{dA}{A}$$

Introduzimos o parâmetro  $M = u/a$ , denominado *número de Mach*. Trata-se da relação entre a velocidade do escoamento e a velocidade do som no ponto considerado. Introduzindo-se esta definição e pondo em evidência o termo  $du/u$  do membro esquerdo da equação acima obtemos finalmente:

$$(M^2 - 1) \frac{du}{u} = \frac{dA}{A} \quad (7.2)$$



Podemos tirar várias conclusões da eq. (7.2): em primeiro lugar esta equação indica que, para números de Mach menores do que 1, o coeficiente do termo  $du/u$  é *negativo*. Em consequência, a velocidade aumenta quando a área transversal do bocal diminui. Para números de Mach menores do que 1 o comportamento do escoamento é portanto qualitativamente o mesmo dos escoamentos incompressíveis. Entretanto, quando o número de Mach é maior do que 1 o coeficiente de  $du/u$  é positivo, indicando que a área da seção transversal deve *aumentar* para que a velocidade aumente.  $M = 1$  é portanto o ponto onde a densidade passa a cair mais depressa do que a velocidade aumenta, alterando qualitativamente o comportamento do escoamento. Velocidades maiores só são obtidas a partir deste ponto se a área transversal do bocal também aumentar. Por fim, a eq. (7.2) indica que o escoamento isentrópico só atinge a velocidade sônica ( $M = 1$ ) em pontos onde a área da seção transversal não varia ( $dA/A = 0$ ), como por exemplo em uma *garganta*. Neste ponto tanto o escoamento pode se acelerar ( $du > 0$ ), quanto desacelerar ( $du < 0$ ).

Portanto, para que um escoamento isentrópico alcance velocidade supersônica é necessário que o mesmo se faça através de um bocal convergente-divergente e que atinja  $M = 1$  na garganta. Para que o escoamento passe ao regime supersônico na parte divergente do bocal há condições de pressão a serem satisfeitas, que estudaremos a seguir.

Cabe por fim notar que a passagem do regime subsônico ao supersônico pode ser feita sem bocal convergente-divergente, como é o caso de explosões, em que a condição de escoamento isentrópico não é satisfeita.

Procuraremos agora relacionar a temperatura, pressão e densidade com o número de Mach do escoamento. Para isto utilizaremos a equação da entalpia de estagnação,  $h_0$ , sendo  $h_0 = h + v^2/2$ :

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \tau_{ij} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

Na ausência de efeitos viscosos, gravitacionais, sem transferência de calor e em condições de regime permanente esta equação toma a forma:

$$\frac{Dh_0}{Dt} = 0$$

isto é  $h_0 = C^{te}$ . Temos então que:

$$h_0 = h + \frac{v^2}{2} = C^{te}$$

Como a entalpia de um gás perfeito com calores específicos constante é dada por  $h = C_p T$  podemos escrever:

$$C_p T_0 = C_p T + \frac{u^2}{2} = C^{te} \quad (7.3)$$

onde  $T_0$  é a *temperatura de estagnação*, isto é, a temperatura absoluta do fluido em condições de velocidade nula. Utilizaremos o índice “0” para indicar as propriedades do fluido em condições de estagnação.

Procuramos eliminar os calores específicos da equação acima. Lembrando que  $C_p - C_v = R$  temos:

$$\frac{C_p}{C_v} - 1 = \frac{R}{C_v} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{C_v} = \gamma - 1$$

Por outro lado:

$$a^2 = \gamma RT = \frac{C_p}{C_v} RT \quad \Rightarrow \quad C_p T = \frac{a^2}{R/C_v} = \frac{a^2}{\gamma - 1}$$

Podemos então reescrever a eq. (7.3) na forma:

$$\frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} \quad (7.4)$$

onde  $a_0$  e  $a$  são os valores da velocidade do som nas temperaturas de estagnação e local, respectivamente,  $T_0$  e  $T$ . Multiplicando a equação acima por  $(\gamma - 1)/a^2$  obtemos:

$$\frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u^2}{a^2}$$

Mas  $a_0^2/a^2 = \gamma RT_0/\gamma RT = T_0/T$  e  $u^2/a^2 = M^2$ . Obtemos uma equação que relaciona a temperatura de estagnação do escoamento com a temperatura e o correspondente número de Mach:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (7.5)$$

Usando as relações:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad \text{e} \quad \frac{p_0}{p} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

obtemos:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (7.6)$$

e

$$\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (7.7)$$

Diz-se que no ponto em que o número de Mach é igual a 1 o escoamento encontra-se em *condições críticas* e representa-se as propriedades do mesmo nestas condições com um índice superior “\*”:  $\rho^*$ ,  $p^*$ ,  $T^*$ , etc. A velocidade do som na temperatura  $T^*$  é representada por  $a^*$ . No caso do escoamento de ar  $\gamma = 1,4$ , calculamos a relação entre a temperatura crítica

e a temperatura de estagnação, densidade crítica e a densidade de estagnação e entre a pressão crítica e a pressão de estagnação, utilizando as eqs. (7.5), (7.6), e (7.7)

$$\begin{aligned}\frac{T^*}{T_0} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{-1} = 0,833 \\ \frac{\rho^*}{\rho_0} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{-1/(\gamma-1)} = 0,634 \\ \frac{p^*}{p_0} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} = 0,528\end{aligned}$$

Procuraremos agora exprimir a relação entre a área de uma seção qualquer onde o número de Mach é  $M$  e a área crítica do bocal em função de  $M$ , isto é, procuraremos uma relação da forma  $A/A^* = f(M)$ . Para isto utilizaremos a equação da continuidade em regime permanente,  $\rho Au = C^{te}$ . Em particular:

$$\rho Au = \rho^* A^* u^*$$

Esta equação pode ser reescrita como:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho} \frac{a^*}{u} = \frac{\rho^*}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{M^*}$$

A grandeza  $M^*$  é o número de Mach calculado dividindo-se a velocidade do escoamento pelo valor da velocidade do som, não no ponto em consideração, mas pela velocidade do som onde  $u = a$ .

As relações  $\rho^*/\rho_0$  e  $\rho_0/\rho$  podem ser obtidas da eq. (7.6):

$$\begin{aligned}\frac{\rho^*}{\rho_0} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{-1/(\gamma-1)} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{-1/(\gamma-1)} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{1/(\gamma-1)} \\ \frac{\rho_0}{\rho} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}\end{aligned}$$

Portanto:

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho} = \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)\right]^{1/(\gamma-1)}$$

e

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)\right]^{2/(\gamma-1)} \frac{1}{M^{*2}} \quad (7.8)$$

Procuramos agora expressar  $1/M^{*2} = f(M)$ . Utilizando a eq. (7.4) podemos escrever:

$$\frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a^{*2}}{\gamma - 1} + \frac{a^{*2}}{2}$$

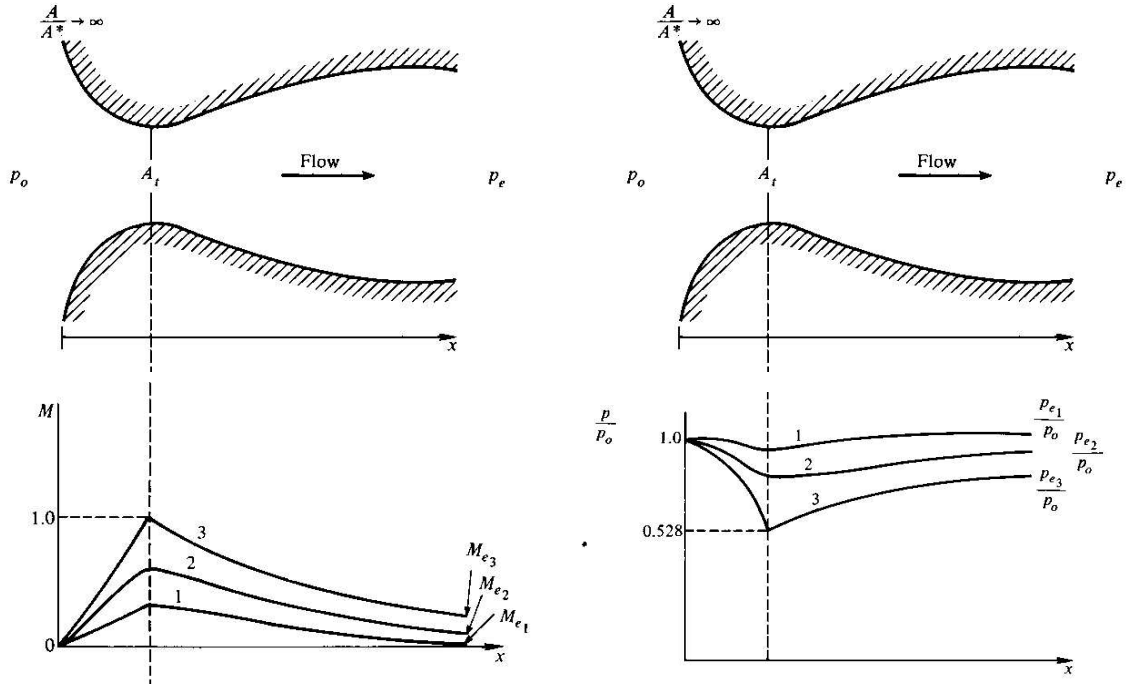


Figura 7.2: Número de Mach e distribuição de pressões em um bocal convergente-divergente (regime subsônico).

ou:

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a^{*2}$$

Dividindo esta última equação por  $u^2$  obtemos:

$$\frac{1}{M^2} \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \frac{1}{M^2}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^2} &= \left( \frac{1}{M^2} \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \right) \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} = \frac{2}{M^2(\gamma + 1)} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = \\ &= \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{(\gamma + 1)M^2} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2}{\frac{\gamma + 1}{2}M^2} = \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2 \right) \frac{1}{M^2} \end{aligned}$$

Levando este resultado à eq. (7.8) encontramos:

$$\left( \frac{A}{A^*} \right)^2 = \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2 \right) \right]^{2/(\gamma - 1)} \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2 \right) \frac{1}{M^2}$$

Portanto:

$$\left( \frac{A}{A^*} \right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2 \right) \right]^{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)}$$

Esta equação relaciona a área da seção em que o número de Mach do escoamento é  $M$  com a área da garganta na condição de que o número de Mach na mesma seja igual a 1. As figs. (7.2) e (7.3) mostram os perfis do número de Mach, da relação  $p/p_0$  e de  $T/T_0$  ao longo de um bocal quando o escoamento na região divergente se encontra, respectivamente, em regime subsônico e supersônico.

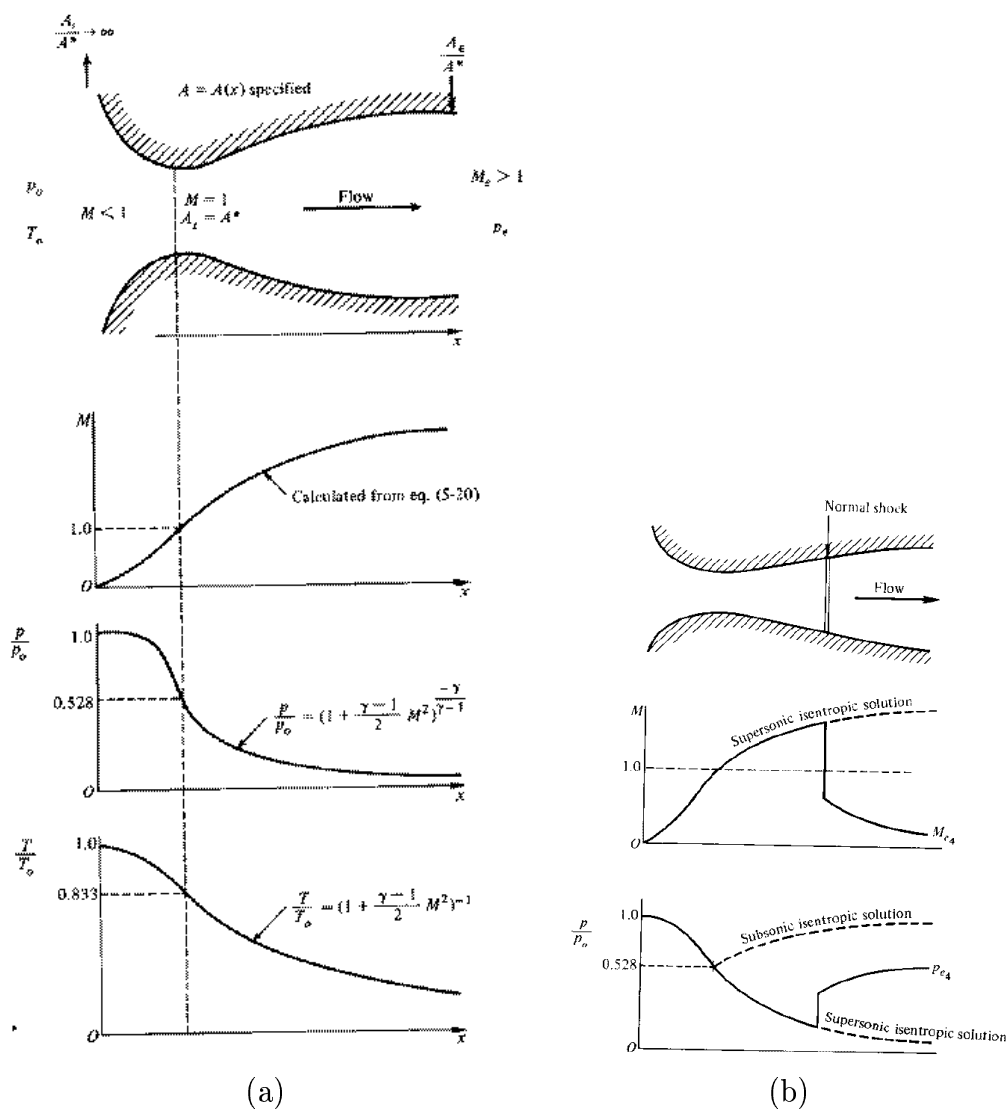


Figura 7.3: (a): Número de Mach e distribuição de pressões em um bocal convergente-divergente (regime supersônico). (b): Número de Mach e distribuição de pressões com onda de choque na região divergente.

Cabe observar que, para que o escoamento seja isentrópico e supersônico na região divergente é necessário que a pressão na saída do mesmo tenha um valor bem determinado, que é sensivelmente menor do que a pressão de saída no regime subsônico, com  $M = 1$  na garganta. Caso a pressão na saída, que pode ser imposta, tenha valor intermediário entre os dois acima mencionados, não há solução totalmente isentrópica para o escoamento. Uma *onda de choque* estacionará se estabelece na parte divergente, conforme mostrado na fig. (7.3). O escoamento volta ao regime subsônico após a onda de choque, a velocidade

diminui a partir deste ponto e a pressão aumenta até o valor imposto na saída do bocal. O choque é um processo irreversível, com produção de entropia.

## 7.3 Velocidade do Som

Dissemos na seção anterior que a velocidade do som em um gás perfeito é dada por:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = (\gamma RT)^{1/2}$$

Justificaremos agora a afirmativa acima. As hipóteses para o desenvolvimento que se segue são:

- A perturbação que se propaga é fraca;
- A propagação da mesma se faz em uma única direção;
- o processo é adiabático e reversível, isto é, isoentrópico. Conseqüentemente os efeitos viscosos são desprezíveis;
- O meio onde a perturbação se propaga é um gás perfeito;
- Despreza-se efeitos gravitacionais.

Com base nas hipóteses acima as equações da continuidade e de Euler simplificadas se escrevem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x}\end{aligned}$$

Como o processo é adiabático e reversível podemos escrever:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{\partial \rho}{\partial x} = \gamma RT \frac{\partial \rho}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

As equações da continuidade e de Euler tornam-se então:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \tag{7.9}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{7.10}$$

Passamos à *linearização* das duas equações. Consideramos que a propagação da perturbação da qual procuramos calcular a velocidade se faz em um meio onde a densidade é  $\rho_0$  em todos os pontos. Sobre este valor da densidade superpomos uma pequena perturbação

,  $\rho'$ , dependente do tempo e da posição. Supomos também que na ausência da perturbação o campo de velocidades seja identicamente nulo. Assim sendo temos que:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \rho' \\ u &= u_0 + u'\end{aligned}$$

Levando as expressões acima à eq. (7.9) temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 + \rho')u' = \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho' u') = 0$$

O termo  $\partial(\rho' u')/\partial x$  contém o produto de duas variáveis pequenas em todos os pontos, sendo portanto desprezível diante dos demais. A equação da continuidade resula então:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0$$

Introduzindo as expressões da velocidade e da densidade perturbadas na eq. (7.10) temos:

$$(\rho_0 + \rho') \frac{\partial u'}{\partial t} + (\rho_0 + \rho') u' \frac{\partial u'}{\partial x} = -a^2 \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 + \rho')$$

O fator  $\rho_0 + \rho'$  que multiplica os dois termos do lado esquerdo desta equação pode ser substituído por  $\rho$ , pois  $\rho_0 + \rho' \approx \rho_0$ . Lembrando também que  $\rho_0$  é constante, temos:

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + \rho_0 u' \frac{\partial u'}{\partial x} = -a^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x}$$

Espera-se que as derivadas da equação acima sejam todas da mesma ordem de grandeza. Neste caso o segundo termo do membro esquerdo é muito menor do que os demais pois está multiplicado pela perturbação de velocidade  $u'$ , que é pequena por hipótese. Desprezando este termo chegamos então à equação linearizada da quantidade de movimento:

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x}$$

Temos então o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (7.11)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + a^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0 \quad (7.12)$$

Trata-se de um sistema de duas equações a duas incógnitas. Podemos eliminar uma das incógnitas de modo a obtermos uma única equação. Para eliminarmos a perturbação de velocidade  $u'$  observamos que se derivarmos a primeira equação em relação a  $t$  e a segunda em relação a  $x$  ambas as equações conterão o termo  $\partial^2 \rho' / (\partial t \partial x)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial t \partial x} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial t \partial x} + a^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} &= 0\end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira temos:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = 0$$

ou:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} \quad (7.13)$$

que é a equação de propagação de ondas fracas.

A equação de evolução de  $u'$  é obtida de forma semelhante: Partindo-se das eqs. (7.11) e (7.12) procura-se fazer com que o termo que contém  $\rho'$  seja o mesmo em ambas as equações. Subtraindo-se então uma da outra obtém-se a equação procurada:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \quad (7.14)$$

As eqs. (7.13) e (7.14) são satisfeitas por *qualquer* função suficientemente regular de  $x - at$ , ou de  $x + at$ . Justifiquemos esta afirmação: Seja, por exemplo,  $u' = f_1(x - at)$ . Definimos  $\xi = x - at$ . Neste caso  $\partial \xi / \partial x = 1$  e  $\partial \xi / \partial t = -a$ . Utilizando este resultado e definindo  $df_1/d\xi = f'_1$  temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} &= f'_1 \frac{\partial \xi}{\partial t} = -a f'_1 & \text{e} & \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = \frac{d}{d\xi} (-a f'_1) f'_1 \frac{\partial \xi}{\partial t} = a^2 f''_1 \\ a^2 \frac{\partial f_1}{\partial x} &= a^2 f'_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} = a^2 f'_1 & \text{e} & \quad a^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = \frac{df'_1}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = a^2 f''_1 \end{aligned}$$

o que mostra que  $f(x - at)$  é de fato solução da eq. (7.14). O tipo de argumento de  $f_1$  é característico dos fenômenos de propagação:  $f_1$  permanece constante para  $x = at$ , isto é, para valores crescentes de  $x$ , pois o tempo sempre aumenta. Em outras palavras,  $u'$  se propaga sem atenuação e com velocidade  $a$ , que é portanto a velocidade de propagação das pequenas perturbações ou do som.

## 7.4 Analogia com a Hidráulica de Canal Aberto

Nesta seção mostraremos uma analogia que existe entre o escoamento compressível quase-unidimensional e o escoamento de fluidos incompressíveis com superfície livre, em canais de pequena profundidade e largura variável.

Consideremos o escoamento permanente quase-unidimensional de um líquido sem viscosidade através de um canal de largura variável, conforme fig. (7.4). A hipótese de que o escoamento se faz com superfície livre é utilizada ao admitirmos que a pressão na superfície é constante e independente da espessura  $h$  da lâmina de fluido. Definimos como sendo igual a zero a pressão na superfície livre. Como estamos considerando o escoamento quase-unidimensional desprezamos as componentes  $v$  e  $w$ , respectivamente nas direções  $y$  e  $z$ . De fato, definimos a velocidade do escoamento  $u = Q/A$ , onde  $Q$  é a vazão volumétrica e  $A$ , a área da seção transversal do canal.



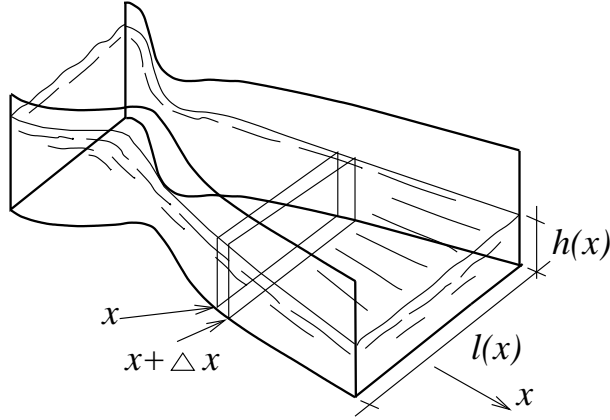


Figura 7.4: Escoamento em uma calha com superfície livre.

$uhl = C^{te}$ . Da mesma forma que no caso de escoamentos compressíveis, esta última equação pode ser escrita na forma diferencial, como:

$$\frac{du}{u} + \frac{dl}{l} + \frac{dh}{h} = 0$$

ou:

$$\frac{dh}{h} = -\frac{du}{u} - \frac{dl}{l} \quad (7.15)$$

O princípio de conservação da quantidade de movimento, aplicado ao volume de controle elementar se escreve:

$$\left( \begin{array}{c} \text{Taxa de acumulação} \\ \text{de quantidade de mo-} \\ \text{vimento dentro do vo-} \\ \text{lume de controle} \end{array} \right) = - \left( \begin{array}{c} \text{Fluxo líquido de quan-} \\ \text{tidade de movimento} \\ \text{para fora do volume} \\ \text{de controle} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Resultante das forças} \\ \text{aplicadas} \end{array} \right)$$

Como o escoamento se faz em regime permanente a taxa de acumulação de quantidade de movimento dentro do volume de controle é igual a zero. O fluxo de quantidade de movimento para dentro do volume de controle é dado por:

$$\int_0^L \rho u^2 l \, dy = \rho u^2 l h = f(x)$$

O fluxo de quantidade de movimento que sai do volume de controle em  $x + \Delta x$  é dado por:

$$-f(x + \Delta x) = - \left( f(x) + \frac{df}{dx} \Delta x \right) = - \left( \rho u^2 l h + \frac{d}{dx} (\rho u^2 l h) \Delta x \right)$$

O fluxo líquido de quantidade de movimento para dentro do volume de controle é dado pela diferença entre o que entra e o que sai:

$$-\frac{d}{dx} (\rho u^2 l) \Delta x$$

Nestas condições a componente da equação de Euler na direção  $y$  se escreve simplesmente como  $dp = -\rho g \, dy$ . Esta equação, integrada, fornece a distribuição vertical de pressões na forma  $p = \rho g(h - y)$ . A constante de integração é determinada de modo a que a pressão se anule na superfície livre, onde  $y = h$ .

Seja um volume de controle de comprimento  $\Delta x$ , perpendicular à direção do escoamento e sejam  $l$  e  $h$  a largura do canal e a espessura da lâmina de fluido no ponto considerado. A equação da continuidade em regime permanente se escreve  $Q = C^{te}$ , ou

Como a densidade é constante e como pela equação da continuidade  $uhl$  também o é podemos passá-los para fora do operador de derivação da expressão acima, que se torna:

$$-\frac{d}{dx}(\rho u^2 l h) \Delta x = \rho u l h \frac{du}{dx} \Delta x$$

As forças que atuam sobre o volume de controle são devidas à pressão que atua sobre cada lado do mesmo. A força  $F(x)$  que atua no ponto  $x$  é dada pela integral da pressão em cada cota,  $\rho g(h - y)$ , multiplicada pelo elemento de área  $l dy$ :

$$F(x) = \int_0^L \rho g(h - y) l dy = \rho g l \left( hy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^h = \rho g l \frac{h^2}{2}$$

A força atuando em  $x + \Delta x$  é dada por  $F(x + \Delta x) = -(F(x) + dF/dx \Delta x)$  e a resultante é portanto:

$$-\frac{d}{dx} F(x) \Delta x = -\rho g \frac{d}{dx} \left( l \frac{h^2}{2} \right) \Delta x$$

O balanço de quantidades de movimento torna-se portanto:

$$0 = -\rho u l h \frac{du}{dx} \Delta x - \rho g \frac{d}{dx} \left( l \frac{h^2}{2} \right) \Delta x$$

ou:

$$uhl \frac{du}{dx} = -g \frac{d}{dx} \left( l \frac{h^2}{2} \right) = -gl \frac{d}{dx} \frac{h^2}{2} - g \frac{h^2}{2} \frac{dl}{dx} = -glh \frac{dh}{dx} - g \frac{h^2}{2} \frac{dl}{dx}$$

Multiplicando esta última equação por  $dx/(glh^2)$  obtemos:

$$\frac{u}{gh} du = \frac{dh}{h} - \frac{1}{2} \frac{dl}{l}$$

Substituindo  $dh/h$  pela expressão dada pela eq. (7.15) obtemos:

$$\frac{u}{gh} du = \frac{du}{u} + \frac{dl}{l} - \frac{1}{2} \frac{dl}{l}$$

ou:

$$\frac{u}{gh} du - \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \frac{dl}{l}$$

Pondo em evidência o termo  $du/u$  do membro esquerdo obtemos:

$$\left( \frac{u^2}{gh} - 1 \right) \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \frac{dl}{l}$$

O termo  $u^2/gh$  é o *número de Froude* ao quadrado,  $Fr^2$ . Utilizando esta definição temos então:

$$(Fr^2 - 1) \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \frac{dl}{l}$$

## 7.5 Propriedades dos Escoamentos Potenciais

Escoamentos irrotacionais caracterizam-se pela existência de um potencial  $\Phi$ , cujo gradiente é o campo de velocidades  $\mathbf{v}$ . De forma geral, o potencial é função do tempo e da posição, isto é,  $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, t)$ . Obtemos a seguir uma equação de evolução para o potencial  $\Phi$ .

A equação de Euler pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p$$

onde  $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ . No caso de um campo irrotacional de velocidades esta equação torna-se:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{v^2}{2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Exprimindo a componente de velocidade em função do potencial,  $v_i = \partial \Phi / \partial x_i$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{v^2}{2} = 0$$

Integrando esta última equação obtém-se:

$$\int \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i + \int \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{v^2}{2} dx_i = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = F(t)$$

A função  $F(t)$  pode ser incorporada ao potencial, o que resulta em:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = 0$$

Derivando-se esta última equação com relação ao tempo obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} = 0 \quad (7.16)$$

O termo que contém a integral na equação acima pode ser reescrito como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{dp}{\rho} = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{a^2}{\rho} d\rho = a^2 \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d\rho}{\rho} = a^2 \frac{\partial}{\partial t} \ln \rho = \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

onde  $a^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$  é a velocidade do som. Substituindo o termo acima na eq. (7.16) obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} = 0 \quad (7.17)$$

Multiplicando a equação de Euler por  $v_i$  obtém-se:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{v_i}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

ou:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{a^2}{\rho} v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

Utilizando a equação da continuidade substituímos o termo  $v_i \partial \rho / \partial x_i$  da equação acima por:

$$v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = - \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)$$

e obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{a^2}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)$$

Utilizando a eq. (7.17) substituímos o termo  $(a^2 \rho)(\partial \rho / \partial t)$  na equação acima:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = a^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t}$$

Substituindo  $\frac{1}{2} \partial v^2 / \partial t = v_i \partial v_i / \partial t$  obtemos:

$$2v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = a^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Substituindo  $v_i = \partial \Phi / \partial x_i$  temos:

$$2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

e finalmente:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \quad (7.18)$$

Esta última é a equação potencial dos escoamentos compressíveis, válida em regiões onde não haja produção de entropia, desde que o escoamento incidente sobre a região considerada seja também irrotacional.

Condições de contorno para o potencial  $\Phi$ :

a) Sólidos estacionários:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

$n$  é a coordenada ao longo da direção  $\mathbf{n}$ , perpendicular à superfície do sólido. Esta condição é equivalente a  $\mathbf{grad} \Phi \cdot \mathbf{n} = 0$

b) Sólidos em movimento permanente com velocidade  $\mathbf{U}$ .

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}$$

Esta condição também pode ser escrita como  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{U}) = 0$ , onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade local.

Consideramos agora alguns casos limite da equação potencial dos escoamentos compressíveis.

Notação: indicamos a operação de derivação por um índice contendo a variável em relação à qual o potencial  $\phi$  é derivado:  $\partial \Phi / \partial t = \Phi_t$ ,  $\partial^2 \Phi / \partial x^2 = \Phi_{xx}$ , etc.

a) Escoamento bi-dimensional permanente:

$$(\Phi_x^2 - a^2)\Phi_{xx} + (\Phi_y^2 - a^2)\Phi_{yy} + 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} = 0$$

ou:

$$(u^2 - a^2)\Phi_{xx} + (v^2 - a^2)\Phi_{yy} + 2uv\Phi_{xy} = 0$$

b) Escoamento tri-dimensional permanente,  $u \gg v$ ,  $u \gg w$  (corpos esbeltos sob baixo ângulo de ataque, fora da região transônica):

$$(1 - M^2)\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0$$

c) Escoamento tri-dimensional permanente, com todas as componentes de velocidade pequenas em relação à velocidade do som:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0$$

d) Escoamento uni-dimensional não-permanente:

$$\Phi_{xx} = \frac{1}{a^2} (\Phi_x^2 \Phi_{xx} + \Phi_{tt} + 2\Phi_x \Phi_{tx})$$

ou:

$$\Phi_{xx} = \frac{1}{a^2} (u^2 \Phi_{xx} + \Phi_{tt} + 2u \Phi_{tx})$$

e) Escoamento uni-dimensional não-permanente,  $u^2 \ll a^2$ ,  $uu_t \ll a^2$ :

$$\Phi_{xx} = \frac{1}{a^2} \Phi_{tt}$$

# Capítulo 8

## Transferência de Calor

### 8.1 Introdução

Neste capítulo trataremos de alguns princípios de transferência de calor, utilizando as equações constitutivas e as provenientes da aplicação dos princípios de conservação, apresentadas nos capítulos anteriores. Em alguns casos há uma analogia entre os mecanismos de difusão de calor e os de difusão de espécies químicas, da qual também trataremos.

### 8.2 Mecanismos de Transferência de Calor

Há dois processos de transferência de calor entre dois corpos, ou entre dois elementos de massa de um meio: se o meio for contínuo, o calor se *difunde* por contato entre as partículas do meio, isto é, este processo se faz através da massa. Na maioria dos casos de interesse da engenharia a difusão de calor obedece a uma equação constitutiva conhecida como lei de Fourier,  $\mathbf{q} = -\kappa \mathbf{grad} T$ . Aplicando-se o princípio de conservação da energia, a lei de Fourier e a definição de calor específico, chega-se a uma das duas equações abaixo, dependendo de ser o meio um fluido incompressível em movimento ou um sólido, conforme visto no capítulo anterior:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho C_p} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p} \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p} \quad (8.2)$$

onde  $\alpha = \kappa/(\rho C_p)$  é a difusividade térmica do material e  $\kappa$ , a condutividade térmica do mesmo.

O segundo processo de transferência de calor existe independentemente da existência de matéria como meio transmissor: trata-se da radiação, através do qual um corpo emite calor na forma de ondas eletromagnéticas. A transferência de calor por radiação se faz, na maior parte dos casos de interesse da engenharia, a partir de *superfícies*, embora existam casos de emissão de calor pelo interior de um volume, como ocorre com o caso de uma chama. Para que um volume emita calor é necessário que o mesmo seja transparente ao calor irradiado.

No caso de radiação por superfícies o fluxo de calor, isto é, o calor emitido por unidade de tempo e de área é dado por:

$$\dot{q} = e \sigma T^4 \quad (8.3)$$

onde  $e$  é a emissividade da superfície,  $\sigma$ , a constante de *Stefan-Boltzman* e  $T$ , a temperatura absoluta da superfície. A quantidade total de calor emitida por uma superfície é obtida integrando-se o fluxo de todos os elementos da mesma:

$$\dot{Q} = \int_S e \sigma T^4 dA$$

A emissividade é um número que varia entre 0 e 1 e depende não apenas do material, mas também do acabamento da superfície. Superfícies polidas têm baixa emissividade e superfícies foscas têm alta emissividade. A constante de Stefan-Boltzman é igual a  $5,66 \times 10^{-8} W/(m^2 K^4)$ .

Os problemas de transferência de calor em engenharia envolvem com frequência o cálculo do fluxo de calor entre superfícies sólidas e fluidos, como por exemplo o ar ou um fluido de resfriamento. Muitas vezes a temperatura da superfície é conhecida  $T_1$ , assim como a do fluido,  $T_2$ , a uma certa distância da superfície, isto é, fora da *camada limite térmica*. Uma forma de abordar este problema consiste em resolver a eq. (8.1) juntamente com as equações de Navier-Stokes, determinar a componente do gradiente de temperatura na direção perpendicular à superfície,  $\partial T / \partial n$  e obter o fluxo de calor como sendo  $q_n = -\kappa \partial T / \partial n$ . Ao abordar o problema desta forma obtém-se também o campo de velocidades. Este foi o procedimento que adotamos no capítulo anterior, seções (5.3) e (5.4), quando estudamos os escoamentos sobre uma placa inclinada e de Couette. Este procedimento é, na maior parte dos casos, muito trabalhoso e requer frequentemente o uso do cálculo numérico. Além disto, fornece um nível de descrição dos campos de temperatura e de velocidades muito maior do que o necessário. Nos problemas de transferência de calor de uma superfície para um fluido em movimento o que se procura é calcular o fluxo de calor em função das temperaturas da superfície e do fluido longe da mesma. A pergunta que se faz é se é possível exprimir o fluxo de calor na forma:

$$\dot{q} = h(T_1 - T_2) \quad (8.4)$$

onde  $h$  é um coeficiente a determinar. A resposta é afirmativa. A equação acima é na verdade uma *definição* do coeficiente  $h$ . Procuraremos aqui identificar as variáveis das quais depende  $h$  e apresentaremos algumas relações empíricas que permitem o cálculo do mesmo.

Pela importância dos processos de transferência de calor em fluidos, ou entre superfícies e fluidos, estes processos recebem o nome de *convecção*. O coeficiente  $h$  denomina-se coeficiente de transferência de calor por convecção, ou simplesmente coeficiente de convecção, de película, ou de filme.

Distingue-se três mecanismos de convecção:

- Convecção *forçada*, quando o campo de velocidades do fluido é imposto, isto é, não depende do campo de temperaturas;

- No outro extremo, o campo de velocidades é totalmente determinado pelo campo de temperaturas. Na ausência de gradientes de temperatura, o campo de velocidades é identicamente nulo. Este fenômeno ocorre por exemplo com o movimento de massas de ar na atmosfera, cuja densidade se altera ao ser aquecida pelo solo. Têm-se um caso de convecção *livre*;
- Há também casos de convecção *mista* em que o campo de velocidades imposto é alterado pelo campo de temperaturas. Como exemplo desta situação pode-se mencionar o caso de um fluido que escoar em uma tubulação horizontal aquecida por baixo. Ao campo de velocidades definido pela vazão imposta, superpõe-se correntes ascendentes e descendentes secundárias.

Outro importante mecanismo de transferência de calor é o associado à evaporação de uma substância. Este mecanismo é largamente utilizado em sistemas biológicos, que devem rejeitar o calor gerado pelo metabolismo. No caso de seres vivos que habitam regiões quentes do nosso planeta a evaporação desempenha função vital pois a capacidade de rejeição por convecção diminui podendo se inverter à medida que a temperatura ambiente sobe. Nestas condições extremas os seres vivos absorvem calor por convecção e rejeitam por evaporação, de modo que o fluxo líquido de calor ainda seja voltado para fora do organismo. Como resultado destes dois processos um ser vivo consegue, dentro de certos limites, manter sua temperatura abaixo da temperatura ambiente e ainda rejeitar o calor gerado pelo metabolismo.

A rejeição de calor é também um problema com o qual a engenharia frequentemente se defronta. E muitos casos o calor é gerado em processos industriais, como em unidades químicas, siderúrgicas, usinas termoeletricas, dispositivos eletrônicos, etc. Em outros casos é necessário rejeitar calor por motivo de conforto. Em todos estes casos o meio ambiente se constitui no destino final para onde o calor é rejeitado. O mecanismo de evaporação é uma das alternativas à disposição da engenharia, por vezes a mais favorável. Nos sistemas que utilizam este processo o calor é inicialmente transferido para um sistema de recirculação de água. A água aquecida circula por trocadores de calor onde uma pequena parcela se evapora. A parcela que se evapora retira o calor latente do fluxo em recirculação, reduzindo sua temperatura. A água resfriada volta então às unidades de processo.

Duas são as vantagens dos sistemas de resfriamento evaporativos, sobre os que são construídos utilizando apenas o mecanismo de convecção:

- A água de recirculação pode ser resfriada a temperaturas mais baixas do que as obtidas através de convecção;
- Os trocadores de calor onde o resfriamento evaporativo ocorre tem menor custo do que trocadores convectivos pois, sendo a condutividade térmica do ar muito baixa os coeficientes de transferência de calor por convecção para o ar também o são. Por isso os trocadores convectivos são normalmente aletados pelo lado externo de modo a aumentar a superfície de troca térmica, o que requer mais quantidade de material e os torna mais caros.

Por outro lado cabe ressaltar que sistemas evaporativos tem a desvantagem de necessitarem de reposição da água evaporada e esta é cada vez mais um bem escasso, a ser preservado.



## 8.3 Condução de Calor Unidimensional em Sólidos

Nesta secção trataremos dos seguintes problemas de condução de calor em sólidos:

- Condução de calor unidimensional em regime permanente com fontes distribuídas;
- Condução de calor unidimensional em tubo de paredes finas em regime permanente;
- Condução unidimensional em regime permanente em um sólido, com transferência de calor por convecção para um fluido;
- Condução de calor unidimensional em regime não-permanente.
- Transferência de calor em *aletas*.

### 8.3.1 Condução de calor unidimensional em regime permanente com fontes distribuídas

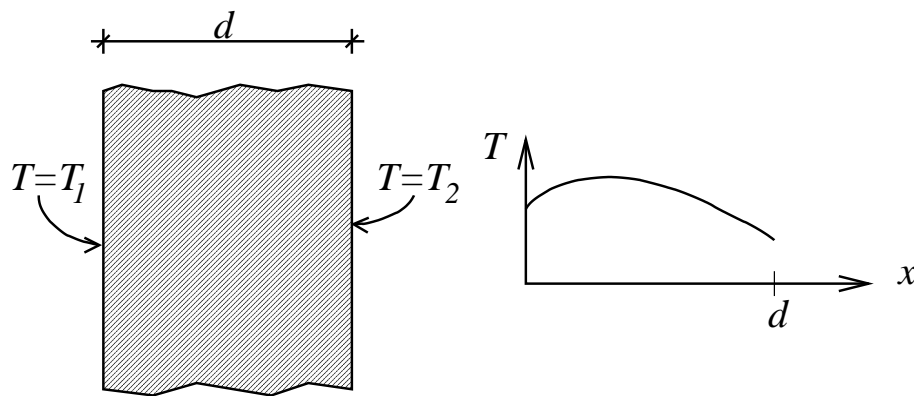


Figura 8.1: Campo estacionário de temperaturas em um sólido uni-dimensional com fontes internas de calor.

Consideramos o caso de condução de calor na direção  $x$  em um sólido conforme a fig. (8.1). As paredes  $x = 0$  e  $x = d$  são mantidas às temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente. O sólido contém uma distribuição uniforme de fontes internas de calor que geram  $\dot{Q}$  unidades de calor por unidade de tempo e de volume.

A equação:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p}$$

simplifica-se e toma a forma:

$$\alpha \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p} = 0$$

Levando em conta que  $\alpha = \kappa/(\rho C_p)$  temos então:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\dot{Q}}{\kappa} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{Q}}{\kappa}x + C_1 \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{\dot{Q}}{\kappa} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  são determinadas a partir das condições de contorno:  $T = T_1$  em  $x = 0 \Rightarrow C_2 = T_1$ . Por outro lado,  $T = T_2$  em  $x = d$ , o que implica em:

$$T_2 = -\frac{\dot{Q}}{\kappa} \frac{d^2}{2} + C_1 d + T_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{T_2 - T_1}{d} + \frac{\dot{Q}}{\kappa} \frac{d}{2}$$

e obtém-se portanto o perfil de temperaturas na forma:

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{d}x + \frac{\dot{Q}}{2\kappa}x(d - x)$$

### 8.3.2 Condução de calor em um tubo de paredes finas

Consideramos agora o caso de condução de calor em um tubo cilíndrico circular de paredes finas em regime permanente, sem fontes internas, conforme fig. (8.2). Os raios interno e externo do tubo são, respectivamente,  $r_i$  e  $r_e$ . A superfície externa é mantida à temperatura  $T_e$  e o tubo é submetido a um fluxo estacionário de  $q_e$  unidades de calor por unidade de tempo e de área na direção radial. Este fluxo refere-se à parede *externa* do tubo. Cabe notar que para uma dada taxa de transferência de calor por unidade de tempo o fluxo varia ao longo da coordenada  $r$  pois a superfície cilíndrica perpendicular ao fluxo aumenta com  $r$ .

A equação:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p}$$

simplifica-se e toma a forma:

$$\nabla^2 T = 0$$

ou

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

O fluxo de calor é dado por  $\mathbf{q}_e = -\kappa \mathbf{grad} T$ , que, em coordenadas cilíndricas, toma a forma:

$$\mathbf{q}_e = -\kappa \left( \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{e}_z \right)$$

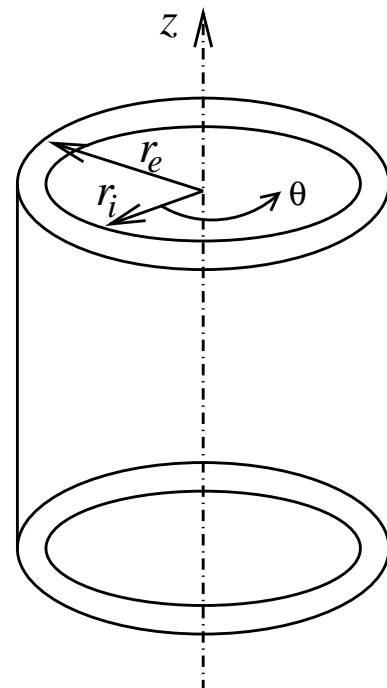


Figura 8.2: Condução de calor em um cilindro de paredes finas.

Em virtude da simetria do problema todas as derivadas na direção  $\theta$  se anulam. Por outro lado consideramos que não há variações de temperatura na direção  $z$ . Ressaltamos que em muitos problemas de engenharia despreza-se o fluxo de calor nesta direção mesmo que haja variações axiais de temperatura, pois como as paredes do tubo são finas, a área de condução é pequena nesta direção, quando comparada com a área disponível para a transferência de calor na direção radial. As duas equações acima se simplificam portanto e temos então:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = 0 \quad (8.5)$$

$$q_e = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r} \quad (8.6)$$

A solução da eq. (8.5) é da forma:

$$T = Ar^2 + B + C \ln r$$

Derivando duas vezes esta expressão obtemos  $\partial T / \partial r = 2Ar + C/r$  e  $\partial^2 T / \partial r^2 = 2A - C/r^2$ . Substituindo a expressão das duas derivadas na eq. (8.5) obtemos  $4A = 0 \rightarrow A = 0$ . O perfil de temperaturas é portanto da forma  $T = B + C \ln r$ , sendo as constantes obtidas a partir dos valores conhecidos do fluxo de calor  $q_e$  e da temperatura externa  $T_e$ . O fluxo de calor é dado por:

$$q_e = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r} = -\kappa \frac{C}{r} \quad \rightarrow \quad C = -\frac{q_e r_e}{\kappa}$$

Por outro lado a parede externa é mantida à temperatura  $T_e$ :

$$T_e = B - \frac{q_e r_e}{\kappa} \ln r_e \quad \rightarrow \quad B = T_e + \frac{q_e r_e}{\kappa} \ln r_e$$

e obtém-se o perfil de temperaturas na forma:

$$T = T_e + \frac{q_e r_e}{\kappa} \ln \frac{r_e}{r}$$

### 8.3.3 Condução unidimensional com transferência de calor por convecção para um fluido

Estudamos agora um problema de transferência de calor envolvendo os processos de condução e convecção. Consideramos o caso de um corpo do qual um das paredes é mantida à temperatura  $T_q$  e a outra se encontra em contato com um fluido cuja temperatura é  $T_f$ , longe do corpo, conforme fig. (8.3). O coeficiente de troca de calor por convecção entre o corpo e o fluido é  $h$ . Pede-se determinar a temperatura da parede em contato com o fluido e exprimir o fluxo de calor em função de  $T_q$  e  $T_f$ . O corpo tem espessura  $d$ .

A equação de condução de calor no sólido é:

$$\nabla^2 T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

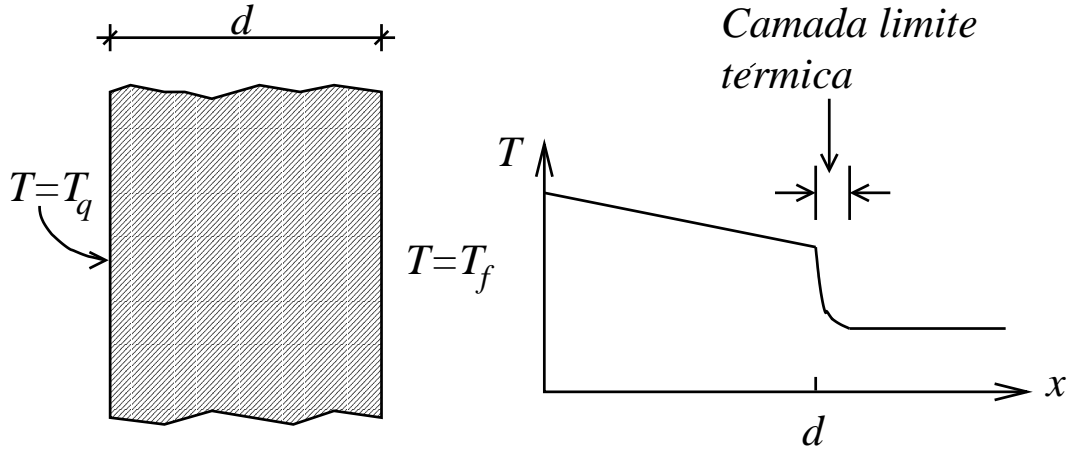


Figura 8.3: Campo estacionário de temperaturas em um sólido uni-dimensional com convecção em uma das paredes.

Integrando-se esta equação duas vezes obtém-se  $dT/dx = C_1$  e  $T = C_1x + C_2$ . Estes resultados mostram que o perfil de temperaturas é linear. A constante  $C_1$  é da forma  $C_1 = (T_q - T_s)/d$ , onde  $T_s$  é a temperatura da superfície do sólido em contato com o fluido. Para determinarmos o valor da constante  $C_2$  devemos levar em conta a transferência de calor por convecção para o fluido. Como  $dT/dx = C_1$ , o fluxo de calor é dado por  $q = -\kappa dT/dx = \kappa C_1 = \kappa(T_q - T_s)/d$ . Por sua vez, este fluxo de calor também é dado por  $h(T_s - T_f)$ . Portanto:

$$\kappa \frac{(T_q - T_s)}{d} = h(T_s - T_f)$$

ou:

$$(T_q - T_s) = \frac{hd}{\kappa}(T_s - T_f) = Bi(T_s - T_f)$$

onde  $Bi = hd/\kappa$  é um grupo adimensional denominado *número de Biot*. Desta última equação obtém-se que:

$$(T_q - T_s) = \frac{hd}{\kappa}(T_s - T_f) = Bi(T_s - T_f) \quad \Rightarrow \quad T_s = \frac{T_q + Bi T_f}{Bi + 1}$$

Este último resultado mostra que quando o número de Biot é muito grande  $T_s \approx Bi T_f / Bi = T_f$ , ou seja, a temperatura da superfície em contato com o fluido é praticamente igual à temperatura do fluido longe do sólido. Praticamente não há queda de temperatura no fluido.

O problema envolvendo condução de calor através de um sólido e a transferência por convecção para um fluido permite estabelecer uma analogia entre o fluxo de calor e a corrente em um circuito elétrico. Para identificarmos a analogia notamos inicialmente que a quantidade de calor que flui por unidade de tempo é dada por:

$$\dot{Q} = hA(T_s - T_f)$$

A temperatura  $T_s$  pode ser eliminada lembrando-se que  $T_s = (T_q + Bi T_f)/(Bi + 1)$ :

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= hA \left( \frac{T_q + Bi T_f}{Bi + 1} - T_f \right) = hA \left( \frac{T_q + Bi T_f - Bi T_f - T_f}{Bi + 1} \right) = hA \left( \frac{T_q - T_f}{Bi + 1} \right) \\ &= \frac{hA}{Bi + 1} (T_q - T_f) = \frac{hA}{\frac{hd}{\kappa} + 1} (T_q - T_f)\end{aligned}$$

Portanto:

$$\dot{Q} = \frac{h\kappa}{hd + \kappa} A (T_q - T_f) = UA (T_q - T_f) \quad (8.7)$$

o que mostra que a taxa de transferência de calor pode ser expressa como função das temperaturas limite  $T_q$  e  $T_f$ , na forma:

$$\dot{Q} = UA (T_q - T_f)$$

onde  $U = h\kappa/(hd + \kappa)$ . Como vimos, a grandeza  $U$  denomina-se *coeficiente global* de troca de calor e o produto  $UA$  é a *condutância térmica* do sistema formado pelo sólido e o fluido. Este nome justifica-se pois a equação acima tem a mesma forma da equação da corrente em um circuito elétrico,  $i = U_e(V_q - V_f)$ , onde  $i$  é a corrente elétrica,  $V_q$  e  $V_s$  são os potenciais nos terminais do circuito e  $U_e$  é a condutância elétrica equivalente. Esta condutância é o inverso da resistência equivalente  $R_e$ , que, por sua vez, é dada pela soma das resistências em série do circuito:

$$\frac{1}{U_e} = R_e = \sum_i R_i = \sum_i \frac{1}{U_i}$$

O calor transferido por unidade de tempo é dado por:

$$\dot{Q} = \kappa A \frac{T_q - T_s}{d} = \frac{\kappa}{d} A (T_q - T_s) = hA (T_s - T_f)$$

Os coeficientes  $(\kappa/d)A$  e  $hA$  são as condutâncias térmicas do sólido e do fluido. Utilizando a analogia elétrica calculamos a condutância equivalente como:

$$\frac{1}{UA} = \frac{d}{\kappa A} + \frac{1}{hA} = \frac{hd + \kappa}{h\kappa A}$$

Portanto:

$$UA = \frac{h\kappa}{hd + \kappa} A \quad \implies \quad U = \frac{h\kappa}{hd + \kappa}$$

A expressão de  $U$  é exatamente a mesma da eq. (8.7), o que confirma a validade da analogia entre taxa de transferência de calor e corrente elétrica.

Observamos por fim que se o termo  $hd$  for pequeno quando comparado a  $\kappa$  a condutância  $U$  é igual a  $h$ , isto é, a resistência térmica do sólido é desprezível quando comparada

à da *camada limite térmica* que se desenvolve no fluido junto ao sólido. Esta situação ocorre algumas vezes em trocadores de calor, onde dois fluidos são postos em contato térmico através de uma parede fina. As resistências térmicas se encontram essencialmente na camada limite de cada fluido, próxima à parede que os separa.

## 8.4 O Método de separação de variáveis

Nesta seção apresentaremos o método de Separação de Variáveis, que é empregado na solução de equações a derivadas parciais lineares, como é em geral o caso da equação de condução de calor em sólidos. Ilustraremos o método determinando o campo estacionário de temperaturas bidimensional em uma placa retangular e o campo de temperaturas dependente do tempo em um sólido unidimensional. A seguir generalizaremos o método para sólidos de geometria arbitrária.

### 8.4.1 Condução de calor bi-dimensional permanente

Consideremos o problema da determinação do campo de temperaturas bi-dimensional permanente em uma placa plana retangular sem fontes internas, cujos bordos laterais e inferior são mantidos à temperatura  $T_1$  e cujo bordo superior é mantido à temperatura  $T_2$ , conforme mostrado na fig. (8.4). As dimensões da placa nas direções  $x$  e  $y$  são, respectivamente,  $L$  e  $W$ . A equação de condução de calor em sólidos aplicada ao problema se simplifica e toma a forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Introduzimos a variável temperatura adimensional  $\theta$ , definida por:

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}.$$

Pode-se verificar facilmente que:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{T_2 - T_1} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

sendo portanto necessário que:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

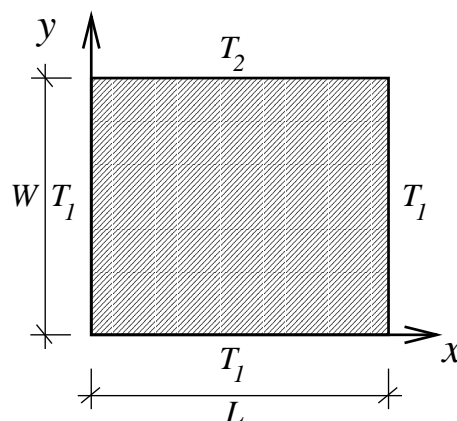


Figura 8.4: Condução bi-dimensional permanente em uma placa plana.

As condições de contorno para a temperatura adimensional são  $\theta = 0$  em  $x = 0$ ,  $x = L$ ,  $y = 0$  e  $\theta = 1$  em  $y = W$ . O método de separação de variáveis consiste em procurar-se uma solução para o campo de temperaturas na forma de um produto de funções, cada uma dependendo de apenas uma das variáveis independentes do problema. Assim, procuramos uma solução na forma:

$$\theta = X(x)Y(y).$$

Substituindo esta possível solução na equação que rege o campo de temperaturas na placa encontramos:

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

Esta última equação pode ser reescrita como:

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

Sendo o membro esquerdo da equação acima função apenas da variável  $x$  e o membro direito, da variável  $y$ , quaisquer que sejam os valores de  $x$  e de  $y$  a igualdade acima só se verifica se ambos os membros forem constantes. Denominamos esta constante como *auto-valor* da equação. Seja  $\lambda^2$ ,  $\lambda \in \mathcal{R}$ , o valor desta constante. Justificaremos adiante a escolha de um valor positivo para  $\lambda$ . Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2 \quad (8.8)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda^2 \quad (8.9)$$

A eq. (8.9) admite como soluções  $Y_1 = (C_1/2)e^{\lambda y}$  e  $Y_2 = (C_2/2)e^{-\lambda y}$ . Sendo a equação linear a soma de ambas as soluções é também solução. Portanto:

$$Y = \frac{C_1}{2}e^{\lambda y} + \frac{C_2}{2}e^{-\lambda y}$$

Em virtude da condição de contorno  $\theta = 0$  em  $y = 0$  é necessário que  $C_1 = -C_2 = C$ . A solução para função  $Y$  toma então a forma:

$$Y = \frac{C}{2}e^{\lambda y} - \frac{C}{2}e^{-\lambda y} = C \frac{e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}}{2} = C \sinh \lambda y$$

A eq. (8.8) admite como soluções  $X_1 = Ae^{i\lambda x}$  e  $X_2 = A^*e^{-i\lambda x}$ , onde  $A^*$  representa o complexo conjugado de  $A$ . Analogamente ao caso da equação de  $Y$ , a soma de  $X_1$  e  $X_2$  é também solução da eq. (8.8). Adicionalmente a solução resultante é *real*, como mostramos a seguir. De fato,

$$\begin{aligned} X &= A \exp(i\lambda x) + cc = A \exp(i\lambda x) + A^* \exp(-i\lambda x) \\ &= (\Re(A) + i \Im(A))(\cos \lambda x + i \sin \lambda x) + (\Re(A) - i \Im(A))(\cos \lambda x - i \sin \lambda x) \\ &= 2\Re(A) \cos \lambda x - 2\Im(A) \sin \lambda x \end{aligned}$$

Aplicando a condição de contorno  $\theta = 0$  em  $x = 0$  concluímos que  $\Re(A) = 0$ . A solução do campo de temperaturas é portanto da forma:

$$\theta = -2 C \Im(A) \sinh \lambda y \sin \lambda x$$

ou:

$$\theta = B \sinh \lambda y \sin \lambda x$$

Por outro lado, para que tenhamos  $\theta = 0$  em  $x = L$  é necessário que  $\lambda = \pi/L$ , ou de forma mais geral, que  $\lambda_n = n\pi/L$  com  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Há portanto um número infinito de valores admissíveis para  $\lambda$  e a solução geral para o campo de temperaturas é dada pela soma de todas estas soluções. Cabe ressaltar que a solução na forma de uma soma de senos na direção  $x$  decorre de termos imposto que  $\lambda^2 > 0$ . A solução da eq. (8.8) com  $\lambda^2 < 0$  não satisfaz às condições de contorno na direção  $x$ . Temos então:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \lambda_n y \sin \lambda_n x$$

Restam os coeficientes  $B_n$  a determinar. Utilizando a condição de contorno  $\theta = 1$  em  $y = W$  temos que:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \lambda_n W \sin \lambda_n x \quad (8.10)$$

A série é da forma:

$$1 = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \mathbf{e}_n \quad (8.11)$$

onde  $\xi_n = B_n \sinh \lambda_n W$  e  $\mathbf{e}_n = \sin \lambda_n x$ . Esta última série é analoga à utilizada para descrever um vetor  $\mathbf{X}$  em uma base ortonormal  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots\}$ :

$$\mathbf{X} = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \mathbf{e}_n$$

No caso de um vetor cada coeficiente  $\xi_m$  representa a coordenada do mesmo na direção de  $\mathbf{e}_m$  e pode ser obtida multiplicando-se o vetor escalarmente por  $\mathbf{e}_m$ . Representando o produto escalar de  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{e}_n$  por  $\langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_n \rangle$ , temos:

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_m \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \right\rangle = \xi_m$$

pois  $\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = 0$  se  $n \neq m$  e  $\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = 1$  se  $n = m$ .

Da mesma forma que no caso de vetores, os coeficientes  $B_n$  da série que representa o campo de temperaturas em  $y = W$ , eq. (8.11), podem ser obtidos através de um produto escalar, devidamente redefinido. Definimos este produto escalar como sendo:

$$\langle \sin \lambda_n x, \sin \lambda_m x \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \lambda_n x \sin \lambda_m x dx$$



e mostramos a seguir que  $\langle \text{sen } \lambda_n x, \text{sen } \lambda_m x \rangle = 0$  se  $n \neq m$  e que  $\langle \text{sen } \lambda_n x, \text{sen } \lambda_m x \rangle = 1$  se  $n = m$ . Lembrando que:

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \text{sen } a \text{sen } b\end{aligned}$$

temos que:

$$\text{sen } a \text{sen } b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)).$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\frac{2}{L} \int_0^L \text{sen } \lambda_n x \text{sen } \lambda_m x \, dx &= \\ \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \cos(\lambda_n - \lambda_m)x \, dx - \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \cos(\lambda_n + \lambda_m)x \, dx.\end{aligned}\quad (8.12)$$

Desenvolvendo a primeira integral do membro direito da igualdade (8.12) para o caso de  $n \neq m$  temos:

$$\begin{aligned}\frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \cos(\lambda_n - \lambda_m)x \, dx &= \frac{1}{(\lambda_n - \lambda_m)L} \int_0^L \cos(\lambda_n - \lambda_m)x \, d(\lambda_n - \lambda_m)x \\ \frac{\text{sen } (\lambda_n - \lambda_m)x}{(\lambda_n - \lambda_m)L} \Big|_0^L &= \frac{\text{sen } (n-m)\pi x/L}{(\lambda_n - \lambda_m)L} \Big|_0^L = 0\end{aligned}$$

Da mesma forma a segunda integral da igualdade (8.12) é igual a zero tanto para o caso de  $n = m$  quanto para o de  $n \neq m$ . Se  $n = m$ , então  $\lambda_n - \lambda_m = 0$  e a primeira integral do membro direito da igualdade (8.12) torna-se:

$$\frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \cos(\lambda_m - \lambda_m)x \, dx = \frac{1}{L} \int_0^L \cos 0 \, dx = \frac{1}{L} \int_0^L 1 \, dx = 1$$

o que mostra que de fato:

$$\langle \text{sen } \lambda_n x, \text{sen } \lambda_m x \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L \text{sen } \lambda_n x \text{sen } \lambda_m x \, dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

Multiplicamos então a eq. (8.10) escalarmente por  $\text{sen } \lambda_m x$ . Para o membro esquerdo temos:

$$\begin{aligned}\frac{2}{L} \int_0^L 1 \text{sen } \lambda_m x \, dx &= \frac{2}{\lambda_m L} \int_0^L 1 \text{sen } \lambda_m x \, d\lambda_m x = \frac{-2}{\lambda_m L} \cos \lambda_m x \Big|_0^L \\ \frac{2L}{m\pi L} (-\cos \frac{m\pi}{L} L + \cos 0) &= \begin{cases} 4/m\pi & \text{se } m \text{ for ímpar} \\ 0 & \text{se } m \text{ for par} \end{cases}\end{aligned}$$

Para o membro esquerdo da eq. (8.10) temos:

$$\langle \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{senh } \lambda_n W \text{sen } \lambda_n x, \text{sen } \lambda_m x \rangle = B_m \text{senh } \lambda_m W$$

Portanto:

$$B_m \sinh \lambda_m W = \frac{4}{m\pi} \quad m = 2, 4, 6, \dots$$

e:

$$B_m = \frac{4}{m\pi \sinh \frac{2m\pi W}{L}} \quad m = 2, 4, 6, \dots$$

ou ainda:

$$B_m = \frac{2}{m\pi \sinh \frac{2m\pi W}{L}} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

O campo adimensional de temperaturas na placa é dado portanto pela relação:

$$\theta(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m\pi \sinh \frac{2m\pi W}{L}} \sinh \frac{2m\pi y}{L} \sin \frac{2m\pi x}{L}$$

## 8.4.2 Condução de calor unidimensional dependente do tempo

Trataremos nesta seção do problema de condução de calor unidimensional dependente do tempo em um sólido sem fontes internas. Consideramos um corpo de comprimento  $L$ , cujas paredes localizadas em  $x = 0$  e em  $x = L$  são mantidas à temperatura  $T = 0$ . A distribuição de temperaturas no tempo  $t = 0$  é  $T_0(x)$ , conforme mostrado na fig. (8.5).

A equação de condução de calor toma a forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

ou:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Procuramos uma solução para a distribuição de temperaturas na forma  $T(t, x) = F(t)G(x)$ . Trata-se mais uma vez, de uma solução por *separação de variáveis*. Substituindo a forma de  $T(t, x)$  na equação de condução de calor obtemos:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} F(t)G(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(t)G(x) \quad \implies \quad \frac{1}{\alpha} F'(t)G(x) = F(t)G''(x)$$

onde  $F'(t) = dF/dt$  e  $G''(x) = d^2G/dx^2$ . A última equação pode ainda se escrita como:

$$\frac{1}{\alpha F(t)} F'(t) = \frac{1}{G(x)} G''(x)$$

O membro esquerdo da equação acima é função apenas do tempo, enquanto que o membro direito é função da posição  $x$  apenas. Esta situação só é possível se ambas as funções forem iguais a uma constante comum, denominada *autovalor* da equação. Seja  $-\lambda^2$  este autovalor. Temos então:

$$\frac{1}{\alpha F(t)} F'(t) = -\lambda^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{dF}{dt} = -\alpha \lambda^2 F \quad (8.13)$$

$$\frac{1}{G(x)} G''(x) = -\lambda^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 G}{dx^2} = -\lambda^2 G \quad (8.14)$$

A solução da eq. (8.13) é da forma:

$$F = \exp(-\lambda^2 t)$$

enquanto que a eq. (8.14) tem duas soluções:

$$G_{1,2} = A \exp(\pm i \lambda x)$$

A solução geral desta última equação é dada pela soma das duas soluções acima. Como o campo de temperaturas deve ser uma função real é necessário que as constantes  $A$  e  $B$  sejam números

complexos conjugados, conforme já demonstrado. Por razão que apresentaremos abaixo, exigiremos que  $\cos \lambda x$  e  $\sin \lambda x$  completem um número inteiro de períodos em  $x = L$ . Há portanto uma infinidade de números  $\lambda_n$  satisfazendo a esta condição. Conseqüentemente:

$$\lambda_n L = 2n\pi \quad \longrightarrow \quad \lambda_n = \frac{2\pi}{L} n$$

A solução geral do campo de temperaturas é dada pela soma da solução associada a cada  $\lambda_n$ . Temos então:

$$T(t, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \exp(-\alpha \lambda_n^2 t + i \lambda_n x) + cc$$

onde “cc” indica o complexo conjugado.

Os coeficientes  $A_n$  são obtidos a partir da distribuição de temperaturas em  $t = 0$ , que é a condição inicial do problema. Naquele instante:

$$T(0, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \exp(i \lambda_n x) + cc$$

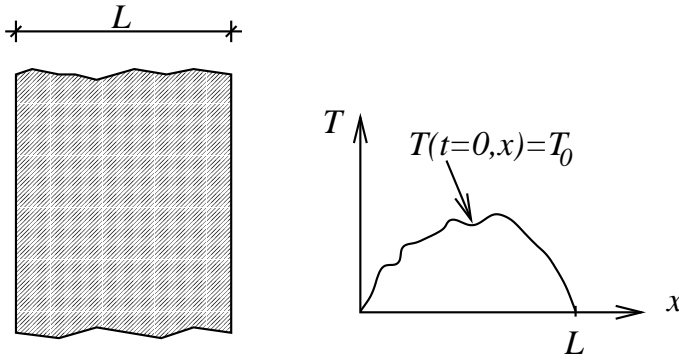


Figura 8.5: Distribuição inicial de temperaturas em um sólido uni-dimensional.

Utilizaremos agora a condição de periodicidade imposta a  $\exp(i\lambda_n x)$ . Calculamos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{L} \int_0^L T(0, x) \exp(-i\lambda_m x) dx &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{L} \int_0^L (A_n \exp(i\lambda_n x) + cc) \exp(-i\lambda_m x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{L} \int_0^L A_n \exp(i(\lambda_n - \lambda_m)x) dx + \\ &\quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{L} \int_0^L A_n^* \exp(-i(\lambda_n + \lambda_m)x) dx\end{aligned}$$

Todas as integrais do membro direito da equação acima se anulam, pois tratam-se de integrais de senos e de cossenos, sobre número inteiro de períodos. A única exceção ocorre quando  $n = m$ . Neste caso:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{L} \int_0^L (A_m \exp(i\lambda_n x) + cc) \exp(-i\lambda_m x) dx &= \frac{1}{L} \int_0^L A_m \exp(i(\lambda_m - \lambda_m)x) dx = \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L A_m dx = \frac{1}{L} A_m L = A_m\end{aligned}$$

Portanto:

$$A_n = \frac{1}{L} \int_0^L T(0, x) \exp(-i\lambda_n x) dx$$

### 8.4.3 O Método *Point-Matching*

Nesta seção apresentamos o método *Point-Matching*, que possibilita a resolução de problemas de condução de calor em regime permanente ou não, em sólidos de geometria arbitrária. O método aplica-se a problemas descritos por equações a derivadas parciais, sujeitas a condições iniciais e/ou de contorno.

Deve-se conhecer uma solução particular do problema e outra na forma de uma série homogênea. Nos problemas que só envolvem condições de contorno o método permite a determinação de um número finito de coeficientes da série. Nos problemas de valor inicial, além destes, obtém-se um número finito de autovalores.

Ilustramos a aplicação do método nos dois problemas seguintes.

#### Condução de calor bi-dimensional em regime permanente com fontes distribuídas

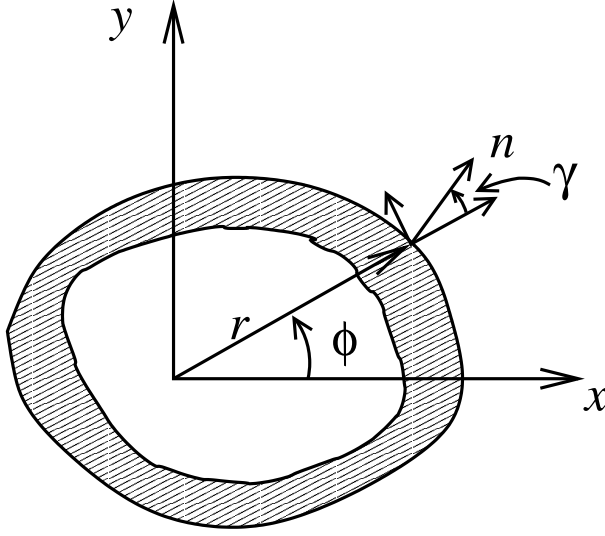
Consideremos um sólido bi-dimensional de geometria arbitrária conforme mostrado na fig. (8.6). O sólido tem uma distribuição interna de fontes de calor da forma  $f(r, \phi)$ . A temperatura no exterior do sólido é mantida constante em um valor que fixamos como sendo zero. Procuraremos determinar o campo estacionário de temperaturas neste sólido, utilizando coordenadas polares. Incorporando a difusividade térmica  $\alpha$  do sólido à função  $f$  escrevemos a equação de condução de calor na forma:

$$\nabla^2 T + f(r, \phi) = 0$$

ou, em coordenadas polares:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + f(r, \phi) = 0 \quad (8.15)$$

Seja  $\mathbf{n}$  o vetor de comprimento unitário, normal à superfície do sólido e seja  $\gamma$  o ângulo entre  $n$  e a direção do vetor  $r$ .



As condições de contorno do problema envolvem transferência de calor por convecção e um fluxo de calor por radiação, que supomos independente da temperatura do sólido. O fluxo líquido de calor por condução na fronteira do sólido deve ser igual à soma do fluxo de calor transferido por convecção para fora do mesmo (ver sec. 8.6) menos o fluxo de calor transferido para o sólido por radiação,  $F$ . Adotamos a convenção de que o fluxo de calor para fora do sólido é *positivo*. Sejam  $M$  e  $N$ , os coeficientes de transferência de calor por condução e por convecção, respectivamente. Podemos então equacionar as condições de contorno na forma:

$$-M \frac{\partial T}{\partial n} = NT - F$$

ou

$$M \frac{\partial T}{\partial n} + NT = F$$

onde  $n$  é a coordenada ao longo da direção normal à superfície do sólido. A projeção do gradiente de temperatura nesta direção é dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \left( \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \right) \cdot \mathbf{n} = \cos \gamma \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi}$$

A condição de contorno pode portanto ser reescrita como:

$$M \left( \cos \gamma \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + NT = F \quad (8.16)$$

A eq. (8.15) admite uma solução particular  $T_p$ , da qual não nos ocuparemos, e uma solução geral da equação homogênea associada,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = 0 \quad (8.17)$$

Procuramos uma solucao para a eq. (8.17) por separação de variáveis, na forma:

$$T = R(r)\Phi(\phi)$$

Substituindo esta forma na eq. (8.17) encontramos:

$$r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} R\Phi + r \frac{\partial}{\partial r} R\Phi + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} R\Phi = 0$$

ou:

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}$$

O membro esquerdo da equação acima é função de  $r$  apenas, ao passo que o membro direito é função de  $\phi$  apenas. Ambos devem portanto ser constantes. Seja  $n^2$  esta constante. Obtemos então as duas equações seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} &= -n^2 \\ \frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} - n^2 r &= 0 \end{aligned}$$

A solução da primeira equação é da forma:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi$$

É necessário que  $n$  seja um número inteiro para que a temperatura seja a mesma ao se acrescentar  $2\pi$  à variável  $\phi$ . No que se refere à segunda equação, pode-se verificar facilmente que a mesma admite como soluções uma constante  $A_0$ ,  $A_1 \ln r$  se  $n = 0$  e  $r^n + r^{-n}$  se  $n > 0$ . A solução geral da eq. (8.15) é portanto:

$$T = T_p + A_0 + A_1 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\phi + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n r^n + E_n r^{-n}) \sin n\phi \quad (8.18)$$

Substituindo a solução acima na eq. (8.16) da condicao de contorno encontramos:

$$\begin{aligned} F = M & \left( \cos \gamma \frac{\partial T_p}{\partial r} + \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial T_p}{\partial \phi} + \frac{A_1 \cos \gamma}{r} + \right. \\ & \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} (B_n \cos n\phi + D_n \sin n\phi) \cos \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} (-B_n \sin n\phi + D_n \cos n\phi) \sin \gamma - \\ & \left. \sum_{n=1}^{\infty} n r^{-n-1} (C_n \cos n\phi + E_n \sin n\phi) \cos \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} n r^{-n-1} (-C_n \sin n\phi + E_n \cos n\phi) \sin \gamma \right) \\ & + N \left( T_p + A_0 + A_1 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\phi + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n r^n + E_n r^{-n}) \sin n\phi \right) \end{aligned}$$

ou ainda:

$$F = M \left( \cos \gamma \frac{\partial T_p}{\partial r} + \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial T_p}{\partial \phi} + \frac{A_1 \cos \gamma}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} (B_n \cos(n\phi + \gamma) + D_n \sin(n\phi + \gamma)) - \sum_{n=1}^{\infty} n r^{-n-1} (C_n \cos(n\phi - \gamma) + E_n \sin(n\phi - \gamma)) \right) + N \left( T_p + A_0 + A_1 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\phi + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n r^n + E_n r^{-n}) \sin n\phi \right)$$

Truncando a série em  $n = n_0$  e aplicando-se o resultado em pontos discretos do contorno  $(r_i, \phi_i)$  é possível um sistema algébrico linear em que as incógnitas são os coeficientes  $A_n, B_n, C_n$  e  $D_n$ . Se o número de incógnitas for igual ao de equações o sistema pode ser resolvido diretamente. Se for maior, os coeficientes podem ser determinados pelo método de mínimos quadrados.

O *erro*, definido como a diferença entre a temperatura real e a estimada, é uma função harmônica e como tal, assume o valor máximo na fronteira do sólido. Diminuindo-se os erros na fronteira, diminui-se os do interior.

### Condução de calor bi-dimensional em regime transitório sem fontes internas

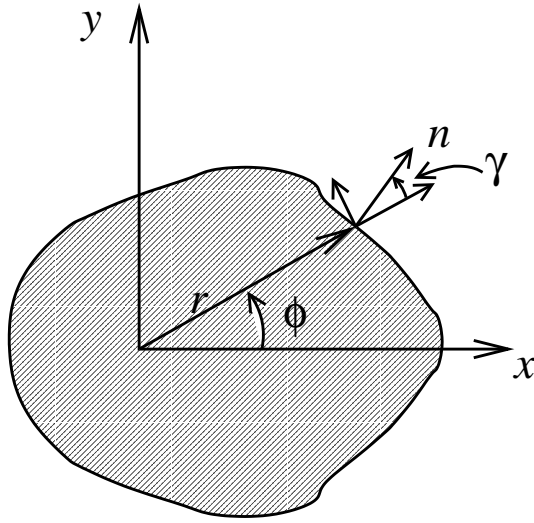


Figura 8.7: Campo estacionário de temperaturas em um sólido bi-dimensional simétrico em relação ao eixo  $x$ .

Tratamos agora da determinação do campo de temperaturas dependente do tempo em um sólido bi-dimensional de geometria arbitrária, sem fontes internas. Para simplificar o tratamento do problema consideramos que o sólido seja simétrico com relação ao eixo  $x$ , conforme mostrado na fig. (8.7).

A equação de condução de calor, escrita em coordenadas cilíndricas toma a forma:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}$$

Condições iniciais e de contorno do problema:

$$T = F(r, \phi) \quad \text{em } t = 0$$

$$M \frac{\partial T}{\partial n} + NT = 0 \quad \text{na fronteira}$$

onde  $n$  é a coordenada ao longo da direção perpendicular à superfície do corpo. A temperatura ambiente longe do mesmo é fixada em  $t_{\infty} = 0$ . A condição de contorno pode ser reescrita na forma:

$$M \left( \cos \gamma \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + NT = 0 \quad (8.19)$$

onde  $\gamma$  é o ângulo entre o vetor de comprimento unitário perpendicular à superfície do sólido,  $\mathbf{n}$ , e a direção  $r$ .

Procuramos uma solução por separação de variáveis, na forma:

$$T = \Theta(t)R(r)\Phi(\phi)$$

Substituindo esta forma na equação de condução de calor encontramos:

$$\frac{R\Phi}{\alpha} \frac{d\Theta}{dt} = \Theta\Phi \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{\Theta\Phi}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{\Theta R}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}$$

ou então, dividindo por  $\Theta R\Phi$ :

$$\frac{1}{\alpha\Theta} \frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}$$

O membro esquerdo da equação acima é função do tempo apenas enquanto que o membro direito é função de  $r$  e de  $\phi$ . Para que a igualdade se verifique é necessário que ambos os membros sejam constantes. Adicionalmente, esta constante deve ser real e negativa para que a temperatura do corpo decaia para o valor da temperatura ambiente quando  $t \rightarrow \infty$ . Seja  $-\lambda^2$  o valor da constante. Obtemos duas equações:

$$\frac{1}{\alpha\Theta} \frac{d\Theta}{dt} = -\lambda^2 \quad (8.20)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -\lambda^2 \quad (8.21)$$

A solução da eq. (8.20) é da forma:

$$\Theta = Ae^{-\alpha\lambda^2 t}$$

Quanto à eq. (8.21), temos:

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -r^2\lambda^2$$

ou:

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + r^2\lambda^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}$$

O membro esquerdo da equação acima depende apenas de  $r$ , enquanto que o direito depende somente de  $\phi$ . Como nos casos anteriores é necessário que ambos os membros sejam constantes. Seja  $n^2$  esta constante, com  $n \in \mathcal{R}$ . Obtemos duas equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + r^2\lambda^2 &= n^2 \\ \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} &= -n^2 \end{aligned}$$



ou ainda:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (r^2 \lambda^2 - n^2) R = 0 \quad (8.22)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -n^2 \Phi \quad (8.23)$$

A solução geral das eqs. (8.22) e (8.23) é da forma:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} J_n(\lambda r) + C_{2n} Y_n(\lambda r) \\ \Phi &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{3n} \cos n\phi + C_{4n} \sin n\phi \end{aligned}$$

onde  $J_n$  e  $Y_n$  são, respectivamente, as funções de Bessel de primeira e de segunda espécie de ordem  $n$ . A constante de separação  $n$  deve ser um número inteiro para que o campo de temperaturas se repita cada vez que se acresce  $2\pi$  ao valor de  $\phi$ . Por outro lado a constante  $C_{4n}$  deve se anular em virtude da simetria do campo de temperaturas com relação ao eixo  $x$ . A constante  $C_{2n}$  também se anula por não serem as funções  $Y_n$  definidas na origem.

A solução do campo de temperaturas é portanto da forma:

$$T = A e^{-\alpha \lambda^2 t} \sum_{n=0}^{\infty} D_n J_n(\lambda r) \cos n\phi$$

O problema admite uma infinidade de autovalores  $\lambda_m$  e por isto o campo de temperaturas toma a forma:

$$T = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\alpha \lambda_m^2 t} \omega_m(r, \phi)$$

onde:

$$\omega_m(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{m,n} J_n(\lambda_m r) \cos n\phi$$

Notação adotada:

$$\begin{aligned} G_{m,n}(r, \phi) &= J_n(\lambda_m r) \cos n\phi \\ \omega_m(r, \phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_{m,n} G_{m,n} \end{aligned}$$

Utilizando-se a condição de contorno, eq. (8.19), tem-se que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\alpha \lambda_m^2 t} \left( M \left( \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r} \omega_m(r, \phi) + \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \omega_m(r, \phi) \right) + N \omega_m(r, \phi) \right) = 0$$

Como  $e^{-\alpha\lambda_m^2 t}$  varia no tempo a condição de contorno acima só se verifica se:

$$M \left( \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r} \omega_m(r, \phi) + \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \omega_m(r, \phi) \right) + N \omega_m(r, \phi) = 0$$

isto é, se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_{m,n} \left( M \left( \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r} G_{m,n} + \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} G_{m,n} \right) + N G_{m,n} \right) = 0$$

Truncando a série em  $n = N$  e aplicando a condição acima a  $N + 1$  pontos do contorno monta-se um sistema algébrico linear da forma:

$$B \begin{pmatrix} D_{m,0} \\ \vdots \\ D_{m,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde  $B$  é um operador da forma:

$$\begin{pmatrix} M \left( m_r \frac{\partial G_{m,0}}{\partial r} + m_\phi \frac{\partial G_{m,0}}{\partial \phi} \right) + N G_{m,0} \Big|_{r_0, \phi_0} & \dots & M \left( m_r \frac{\partial G_{m,N}}{\partial r} + m_\phi \frac{\partial G_{m,N}}{\partial \phi} \right) + N G_{m,N} \Big|_{r_0, \phi_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M \left( m_r \frac{\partial G_{m,0}}{\partial r} + m_\phi \frac{\partial G_{m,0}}{\partial \phi} \right) + N G_{m,0} \Big|_{r_N, \phi_N} & \dots & M \left( m_r \frac{\partial G_{m,N}}{\partial r} + m_\phi \frac{\partial G_{m,N}}{\partial \phi} \right) + N G_{m,N} \Big|_{r_N, \phi_N} \end{pmatrix}$$

Para que os coeficientes  $D_{m,n}$  sejam diferentes de zero é necessário que  $\det B = 0$ . Esta condição conduz a uma equação que, resolvida, fornece os autovalores  $\lambda_m$  do problema.

Os coeficientes  $D_{m,n}$  admitem uma infinidade de soluções para cada valor de  $m$ , em virtude de ser o operador  $B$  singular. Fixando  $B_{m,0} = 1$  os demais podem ser determinados. Desta forma as funções  $\omega_m(r, \phi)$  ficam determinadas e o campo de temperaturas toma a forma:

$$T(t, r, \phi) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\alpha\lambda_m^2 t} \omega_m(r, \phi)$$

Os coeficientes  $A_m$  são determinados através das condições iniciais do problema. Truncando-se a série em  $m = N$  e utilizando-se a condição inicial em  $N$  pontos do interior do corpo em  $t = 0$

$$F(r, \phi) = \sum_{m=1}^N A_m \omega_m(r, \phi)$$

ou:

$$\begin{pmatrix} \omega_1(r_1, \phi_1) & \omega_2(r_1, \phi_1) & \dots & \omega_N(r_1, \phi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1(r_N, \phi_N) & \omega_2(r_N, \phi_N) & \dots & \omega_N(r_N, \phi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(r_1, \phi_1) \\ \vdots \\ F(r_N, \phi_N) \end{pmatrix}$$

## 8.5 O Método de Diferenças Finitas

Os métodos de resolução de equações a derivadas parciais podem de forma geral, ser agrupados em duas categorias, conforme a estratégia que utilizam: Ou procura-se uma solução aproximada para a equação que descreve o fenômeno, ou substitui-se a equação original por um sistema de equações aproximadas e procura-se uma solução exata para este novo sistema. Pertencem à primeira categoria os métodos *espectrais* e o método de *elementos finitos*. Pertence à segunda categoria o método de diferenças finitas. Nesta seção apresentaremos uma breve descrição deste método, abordando as seguintes questões:

- Representação discreta de derivadas temporais e espaciais;
- Métodos *explícitos* e *implícitos* – estabilidade;
- Problemas uni-dimensionais;
- Problemas bi-dimensionais – o método das direções alternadas (ADI).

A idéia do método de diferenças finitas consiste em se definir uma *malha* sobre o corpo, contendo um número finito de pontos, e em se calcular a temperatura nos pontos desta malha em tempos sucessivos, espaçados entre si por intervalos igualmente finitos. Assim, obtém-se como resultado não o conhecimento da distribuição contínua de temperaturas, mas o conhecimento desta distribuição em pontos *discretos* do espaço e do tempo.

A malha espacial pode ser *uniforme* ou variável. Da mesma forma, o *passo de integração* que é a distância entre dois tempos sucessivos em que a temperatura de cada ponto é calculada também pode ser variável. Trataremos aqui do caso de malhas uniformes e de passos de integração  $\Delta t$  constantes.

Identificamos a os pontos da malha através de um índice inferior associado à temperatura do corpo e o e o número do passo de integração através de um índices superior, associados à mesma temperatura. Assim, no caso de um problema bi-dimensional, representamos a temperatura no ponto de coordenadas  $i, j$  da malha espacial e no tempo  $n$  por  $T_{ij}^n$ . Se a malha espacial tiver uma direção apenas a representação será  $T_i^n$

O passo seguinte, consiste em substituir os operadores diferenciais da equação original por representações *discretas* aproximadas dos mesmos. Esta representação e a avaliação do erro que se incorre ao se adotar esta representação são o objeto das sec. (8.5.1 e 8.5.2).

### 8.5.1 Representação discreta de derivadas temporais

Para representarmos a derivada temporal da temperatura de forma discreta utilizamos o seguinte desenvolvimento em série de Taylor:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \Delta t \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_i^n + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (8.24)$$

$$T_i^n = T_i^{n+1} - \Delta t \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_i^{n+1} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (8.25)$$

Desprezando termos de segunda ordem e superiores temos:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \Delta t \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^n + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (8.26)$$

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \Delta t \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^{n+1} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (8.27)$$

A eq. (8.26) é um esquema correto até *primeira ordem* no tempo para cálculo de  $T_i^{n+1}$ , pois despreza-se os termos de segunda ordem e maiores. Além disso, este esquema é *explícito* pois a derivada  $\partial T/\partial t$  é calculada no tempo  $n$ , em que o campo de temperaturas é conhecido. Esta derivada é dada pelo membro direito da equação de condução de calor em sólidos (eq. 8.2). Analogamente, a eq. (8.27) é um esquema correto até primeira ordem no tempo, sendo no entanto *implícito* pois a derivada  $\partial T/\partial t$  deve ser calculada no “novo” tempo,  $n+1$ . Esta derivada é portanto uma incógnita.

Cabe notar que remanejando os termos da eq. (8.26) obté-se uma representação com erro de *primeira ordem*, isto é, da ordem de  $\Delta t$  para derivada temporal. De fato:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^n = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + \mathcal{O} \left( \frac{\Delta t^2}{\Delta t} \right)$$

e portanto:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^n = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$$

Subtraindo-se a eq. (8.25) da eq. (8.24) obtém-se um esquema correto até *segunda ordem* no tempo para o cálculo de  $T^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} T_i^{n+1} - T_i^n &= T_i^n - T_i^{n+1} + \Delta t \left( \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^n + \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^{n+1} \right) + \\ &\quad \frac{\Delta t^2}{2} \left( \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_i^n - \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_i^{n+1} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \end{aligned}$$

O termo em  $\Delta t^2$  é de fato de terceira ordem no tempo, pois:

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_i^{n+1} = \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_i^n + \Delta t \left( \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} \right)_i^n$$

e portanto:

$$\frac{\Delta t^2}{2} \left( \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_i^n - \left( \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_i^{n+1} \right) = -\frac{\Delta t^3}{2} \left( \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} \right)_i^n$$

Temos então:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \Delta t \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^n + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^{n+1}}{2} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (8.28)$$

Desprezando-se os termos de terceira ordem e superiores obtém-se portanto uma fórmula de segunda ordem no tempo, implícita pois a mesma requer o cálculo da derivada temporal no tempo  $n + 1$ .

### 8.5.2 Representação discreta de derivadas espaciais

Consideramos agora o campo de temperaturas uni-dimensional de um sólido em um determinado tempo  $n$ . Sobre este sólido definimos uma malha espacial uniforme ao longo da direção  $x$ , sendo  $\Delta x$  a distância entre dois pontos sucessivos da mesma.

Procuramos exprimir a temperatura nos pontos  $i + 1$  e  $i - 1$  da malha em função da temperatura no ponto  $i$ . Utilizando um desenvolvimento em série de Taylor podemos escrever:

$$T_{i+1}^n = T_i^n + \Delta x \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^n + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n + \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_i^n + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (8.29)$$

$$T_{i-1}^n = T_i^n - \Delta x \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^n + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n - \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_i^n + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (8.30)$$

Da eq. (8.29) temos:

$$T_{i+1}^n = T_i^n + \Delta x \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^n + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Desta última igualdade tem-se que:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^n = \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta x}\right)$$

e portanto:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^n = \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

A fórmula acima representa a primeira derivada espacial. O erro cometido na utilização da mesma é de *primeira ordem* em  $\Delta x$ .

Pode-se obter uma fórmula para a representação da primeira derivada espacial com erro de *segunda ordem* em  $\Delta x$ , subtraindo-se a eq. (8.30) da eq. (8.29):

$$T_{i+1}^n - T_{i-1}^n = 2\Delta x \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^n + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

donde:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^n = \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta x^3}{\Delta x}\right)$$

portanto:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^n = \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Obtemos agora uma representação com erro de *segunda ordem* em  $\Delta x$  para a segunda derivada espacial. Para isto, somamos as eqs. (8.29) e (8.30):

$$T_{i-1}^n + T_{i+1}^n = 2T_i^n + \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

donde:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta x^4}{\Delta x^2}\right)$$

portanto:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

### 8.5.3 Métodos explícitos e implícitos – estabilidade

Na seleção de um método numérico para a integração de equações diferenciais deve-se levar em conta a *estabilidade* numérica do mesmo. Esta estabilidade se manifesta pela capacidade do mesmo em atenuar ou não erros que são continuamente introduzidos de truncamento no cálculo. Vimos que, na representação da derivada temporal pode-se optar por esquemas *explícitos*, em que a mesma é calculada com base no campo de temperaturas já conhecido. Alternativamente, pode-se optar por esquemas *implícitos*, em que há incógnitas na representação da derivada temporal, pois ao menos alguns termos ainda não foram calculados. Esquemas explícitos são em geral *condicionalmente* estáveis. Para assegurar a estabilidade do esquema deve-se limitar o tamanho do passo de integração, o que resulta em muitos casos, em custos computacionais inaceitáveis.

Para contornar a restrição ao tamanho do passo de integração utilizam-se os métodos implícitos. Em geral estes métodos exigem um esforço computacional maior por passo de integração mas permitem passos muito maiores, que redundam em menor custo total de cálculo. Nesta seção mostraremos a restrição a ser imposta para assegurar a estabilidade de um esquema explícito e o caráter *incondicionalmente* estável de um esquema implícito.

Consideremos o caso de um sólido unidimensional de comprimento  $L$  sem fontes internas de calor. O perfil de temperaturas do mesmo é dado por  $T(t, x)$ . A este perfil acrescentamos uma perturbação  $V$ , que pode ser descrita pela soma de modos trigonométricos. O valor da perturbação no tempo  $n$  e no ponto  $i$  da malha é dado por:

$$V_i^n = \sum \xi_\kappa^n e^{i\kappa j \Delta x}$$

onde  $\kappa = 2m\pi/L$  e  $\xi_\kappa^n$  é a amplitude do modo  $\kappa$ , no tempo  $n$ . O modo  $\kappa$  isoladamente, é dado por:

$$v_i^n = \xi_\kappa^n e^{i\kappa j \Delta x}$$

Sendo a eq. (8.2) linear, admite como solução uma soma de soluções. Assim podemos estudar a evolução da perturbação isoladamente e ainda, de um de seus modos apenas. Procuramos identificar o modo mais instável.

Vejamos inicialmente a evolucao de um modo, utilizando a seguinte representação explícita da equação de condução de calor unidimensional, em um sólido sem fontes internas:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n)$$

Procuramos determinar como evolui a amplitude do modo  $\kappa$ . Temos:

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (v_{i-1}^n - 2v_i^n + v_{i+1}^n)$$

ou:

$$v_i^{n+1} = \left(1 - 2\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\right) v_i^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (v_{i-1}^n + v_{i+1}^n)$$

Substituindo-se  $v$  por sua expressão encontramos:

$$\xi_\kappa^{n+1} e^{i\kappa j \Delta x} = \left(1 - 2\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\right) \xi_\kappa^n e^{i\kappa j \Delta x} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (\xi_\kappa^n e^{i\kappa(j-1)\Delta x} + \xi_\kappa^n e^{i\kappa(j+1)\Delta x})$$

Dividindo-se igualdade acima por  $e^{i\kappa j \Delta x}$  encontramos:

$$\xi_\kappa^{n+1} = \left(1 - 2\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\right) \xi_\kappa^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (\xi_\kappa^n e^{-i\kappa \Delta x} + \xi_\kappa^n e^{i\kappa \Delta x})$$

Pode-se verificar facilmente que  $e^{-i\kappa \Delta x} + e^{i\kappa \Delta x} = 2 \cos \kappa \Delta x$ . Levando em conta este resultado e reagrupando os termos encontramos:

$$\xi_\kappa^{n+1} = \left(1 - 2\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}(1 - \cos \kappa \Delta x)\right) \xi_\kappa^n$$

Para que o esquema numérico seja estável é necessário que o módulo da perturbação decresça, isto é, que:

$$-1 \leq \left(1 - 2\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}(1 - \cos \kappa \Delta x)\right) \leq 1$$

No caso de  $\cos \kappa \Delta x = 1$  a desigualdade acima é satisfeita. No caso de  $\cos \kappa \Delta x = -1$  temos:

$$-1 \leq 1 - 4\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$$

ou:

$$-2 \leq -4 \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq 0$$

A condição  $-4(\alpha \Delta t)/\Delta x^2 \leq 0$  é satisfeita. Para que  $2 \leq -4(\alpha \Delta t)/\Delta x^2$  é necessário que:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\alpha}$$

o que mostra que o esquema explícito é *condicionalmente* estável. Para que isto ocorra deve-se adotar passos de integração suficientemente pequenos, o que se constitui muitas vezes em severa restrição ao uso deste esquema.

Consideremos agora o seguinte esquema implícito:

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (v_{i-1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i+1}^{n+1})$$

ou:

$$\left(1 + 2 \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\right) v_i^{n+1} - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (v_{i-1}^{n+1} + v_{i+1}^{n+1}) = v_i^n$$

Seguindo procedimento semelhante ao adotado no caso do esquema explícito encontramos:

$$\left(1 + 2 \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (1 - \cos \kappa \Delta x)\right) \xi_\kappa^{n+1} = \xi_\kappa^n$$

É fácil verificar que o coeficiente de  $\xi_\kappa^{n+1}$  é sempre maior ou igual que 1 e que, conseqüentemente,  $\xi_\kappa^{n+1} \leq \xi_\kappa^n$ . Portanto a amplitude da perturbação decresce no tempo e o esquema é *incondicionalmente* estável.

#### 8.5.4 Implementação de um esquema implícito – caso unidimensional

Nesta seção discutiremos alguns aspectos referentes à resolução de um problema de condução de calor uni-dimensional em um sólido, utilizando um esquema implícito. Trata-se de determinar o campo de temperaturas que evolui obedecendo à equação:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

sujeito à condição  $T_0(t = 0, x)$  e à condição de contorno  $T = T_e$  nas duas extremidades do sólido. Definimos uma malha espacial contendo  $N$  pontos espaçados entre si por uma distância  $\Delta x$  e utilizaremos o seguinte esquema implícito:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) \quad (8.31)$$



O esquema acima não pode ser aplicado ao primeiro nem ao último ponto da malha, pois, o cálculo da derivada segunda espacial em um ponto  $i$  requer a utilização da temperatura nos pontos  $i - 1$  e  $i + 1$ . Assim, utiliza-se as condições de contorno nestes dois pontos e aplica-se o esquema aos  $N - 2$  pontos internos da malha. A eq. (8.31) pode ser re-escrita na forma:

$$\left(1 + 2\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} (T_{i-1}^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) = T_i^n$$

ou:

$$AT_{i-1}^{n+1} + BT_i^{n+1} + AT_{i+1}^{n+1} = T_i^n$$

Vemos que para calcular a temperatura no ponto  $i$  necessitamos da temperatura nos pontos  $i - 1$  e  $i + 1$ , que também são incógnitas do problema. Ao contrário do esquema explícito do qual estudamos a estabilidade agora não se pode calcular a temperatura em um nó da malha de cada vez. A temperatura de cada ponto está *acoplada* à dos pontos vizinhos. Ao escrevermos todas as equações necessárias à solução do problema obtemos um sistema de  $N - 2$  equações algébricas lineares acopladas que devem ser resolvidas simultaneamente. O sistema toma a forma:

$$\begin{pmatrix} B & A & & & \\ A & B & A & & \\ & \dots & & A & B & A \\ & & & A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ \dots \\ T_{n-2}^{n+1} \\ T_{n-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_2^n - AT_1^n \\ T_3^n \\ \dots \\ T_{n-2}^n \\ T_{n-1}^n - AT_n^n \end{pmatrix} \quad (8.32)$$

O operador que multiplica o vetor de incógnitas da eq. (8.32) é uma matriz em *bandas* onde estão indicados apenas os elementos diferentes de zero. Estes elementos situam-se ao longo da diagonal principal e da primeira diagonal acima e abaixo da principal. Trata-se de uma matriz *tri-diagonal*. Ao se codificar o algoritmo para o cálculo numérico é usual armazenar esta matriz em apenas três vetores, um para cada diagonal, com o objetivo de se minimizar o espaço de memória necessário. Cabe notar que mesmo com esta precaução o algoritmo faz uso de um espaço de memória de no mínimo *cinco* vezes o número de pontos da malha espacial. Este espaço é ocupado pelo vetor de incógnitas, pelo vetor do membro direito da eq. (8.32) e pelos vetores necessários ao armazenamento das três diagonais do operador. Adicionalmente, as rotinas utilizadas na solução do sistema algébrico requerem em geral mais um vetor com o número de pontos da malha para o procedimento de inversão do operador. Ainda assim a demanda de memória resultante situa-se normalmente em nível aceitável quando se resolve problemas uni-dimensionais. Entretanto o mesmo não ocorre quando se transpõe este esquema sem modificações para problemas bi-dimensionais. Neste caso torna-se necessário introduzir refinamentos no algoritmo implícito, que trataremos na sec. (8.5.5).

O problema de determinação da evolução do campo de temperaturas reduz-se portanto ao da solução de um sistema algébrico linear, cujo operador é uma matriz tri-diagonal. O sistema é resolvido tantas vezes quantos forem os passos de integração. Ao se executar o primeiro passo de utiliza-se a condição inicial para cálculo do campo de temperaturas no tempo  $t = \Delta t$ . O novo campo é utilizado como condição inicial para o passo seguinte e prossegue-se assim sucessivamente.

### 8.5.5 Problemas bi-dimensionais

#### O método das direções alternadas (ADI)

Consideramos nesta seção o caso do cmo de temperaturas bi-dimensional em um sólido de forma retangular, com temperatura  $T_e$  constante nos bordos. A malha de pontos tem agora duas dimensões, com  $M$  pontos na direção  $x$ ,  $N$  na direção  $y$  e um total de  $M \times N$  pontos. A transposição do esquema implícito utilizado na sec. (8.5.4) sem modificações resultaria na discretização de em um algoritmo da forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^{n+1} + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)^{n+1} \right) \quad (8.33)$$

O espaço de memória necessário à implementação do esquema torna-se muito grande. Uma solução para contornar o problema consiste em executar cada passo de integração em duas etapas, com parte do membro direito da eq. (8.33) calculada de forma implícita e parte de forma *explícita*. Na etapa seguinte inclui-se na parte implícita os termos que haviam sido deixados explícitos na etapa anterior. Exemplo deste tipo de método é o das *Direções Alternadas* (ADI-“Alternating Directions Implicit”). A implementação deste esquema ao problema bi-dimensional de condução de calor resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{T_i^{n+1/2} - T_i^n}{\Delta t/2} &= \alpha \left( \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^{n+1/2} + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)^n \right) \\ \frac{T_i^{n+1} - T_i^{n+1/2}}{\Delta t/2} &= \alpha \left( \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^{n+1/2} + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

No primeiro meio-passo a derivada em relação a  $x$  é calculada de forma implícita. Como estas derivadas acoplam os pontos de uma linha mas não os de linhas distintas pode-se resolver o sistema referente a cada linha independentemente dos demais. No segundo meio-passo as derivadas em relação a  $y$  são calculadas de forma implícita, acoplando os pontos de uma mesma coluna. Resolve-se uma de cada vez. O algoritmo mantém os requisitos de memória dentro de limites aceitáveis.

## 8.6 Transferência de Calor por Convecção e Evaporação

Abordaremos nesta seção as questões referentes à determinação do coeficiente de transferência de calor por convecção e da transferência de calor associada à evaporação de uma substância. Iniciaremos discutindo as variáveis das quais o este coeficiente depende, no caso de convecção forçada. A seguir apresentaremos algumas correlações empíricas que permitem calcular o coeficiente de transferência de calor nos casos de convecção livre e forçada. Em sequência, discutiremos o problema de transferência de calor por evaporação. Concluindo, apresentaremos tratamento exato para a determinação do coeficiente de transferência de calor por convecção no escoamento laminar bi-dimensional de um fluido entre duas placas paralelas submetido a um fluxo de calor externo constante ao longo das placas.

### 8.6.1 Correlações empíricas para a determinação do número de Nusselt

No estudo do campo de velocidades de um fluido viscoso nas proximidades de uma placa plana que é posta em movimento no tempo  $t = 0$  (problema de Rayleigh) vimos que o número de Reynolds pode ser interpretado como função da relação entre a dimensão característica do corpo e a espessura da camada limite hidrodinâmica,  $\delta_H$ :

$$\frac{L}{\delta_H} = a Re^{1/2} = a \left( \frac{UL}{\nu} \right)^{1/2} \quad (8.34)$$

onde  $a$  é uma constante. Utilizaremos este resultado para identificarmos as variáveis das quais o coeficiente de transferência de calor por convecção depende.

O número de Reynolds envolve a velocidade  $U$ , característica do campo, um parâmetro característico da geometria do corpo e um parâmetro característico do fluido, a viscosidade  $\nu$ . Se substituirmos a viscosidade  $\nu$  pela difusividade térmica  $\alpha$  no número de Reynolds podemos esperar como resultado, uma estimativa da espessura da camada limite *térmica*,  $\delta_T$ :

$$\frac{L}{\delta_T} = a \left( \frac{UL}{\nu} \right)^{1/2} \left( \frac{\nu}{\alpha} \right)^{1/2} = a Re^{1/2} Pr^{1/2}$$

O resultado acima permite interpretar o número de Prandtl como sendo a relação entre a espessura das camadas limite hidrodinâmica e térmica. O número de Prandtl é uma propriedade física de cada fluido. Fluidos com número de Prandtl maior do que 1 desenvolvem camada limite térmica mais espessa do que a hidrodinâmica. Este é o caso de líquidos. Gases têm em geral número de Prandtl próximo a 1 e metais líquidos têm número de Prandtl menor do que 1.

Utilizaremos agora o resultado expresso pela equação acima para avaliarmos o gradiente de temperatura junto à superfície de um corpo que troca calor com um fluido em movimento. Seja  $T$  a temperatura da superfície e  $T + \Delta T$  a temperatura do fluido fora da camada limite térmica.

Fazemos uma estimativa da componente do gradiente de temperatura perpendicular à superfície,  $\partial T / \partial n$ , dividindo  $\Delta T$  por  $\delta_T$ :

$$\frac{\partial T}{\partial n} \approx \frac{\Delta T}{\delta_T} = \frac{1}{L} \left( \frac{L}{\delta_T} \right) \Delta T = \frac{1}{L} \left( a Re^{1/2} Pr^{1/2} \right) \Delta T$$

Se multiplicarmos o gradiente de temperaturas pela condutividade térmica do fluido teremos uma estimativa do *fluxo de calor*. Este fluxo por seu lado, é igual a  $h \Delta T$ . Temos então:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial n} \approx \frac{\kappa}{L} \left( a Re^{1/2} Pr^{1/2} \right) \Delta T = h \Delta T$$

Dividindo a forma acima por  $\Delta T$  encontramos:

$$\frac{\kappa}{L} a Re^{1/2} Pr^{1/2} = h$$

ou:

$$Nu = \frac{hL}{\kappa} = a Re^{1/2} Pr^{1/2}$$

A fração  $Nu = hL/\kappa$  é um grupo adimensional denominado *número de Nusselt*. Os argumentos apresentados acima permitem inferir que no caso de convecção forçada, o número de Nusselt seja função dos números de Reynolds e de Prandtl, o que efetivamente ocorre. Apresentamos abaixo algumas correlações empíricas para o o número de Nusselt.

No caso de corpos submersos em um campo com número de Reynolds na faixa  $10^3 < Re < 5 \times 10^4$  o número de Nusselt é dado por<sup>1</sup>:

$$Nu = 0,26 Re^{0,60} Pr^{0,3} \quad (8.35)$$

No caso de escoamento turbulento dentro de tubos com as camadas limite hidrodinâmica e térmica totalmente desenvolvidas, temos<sup>2</sup>:

$$0,5 < Pr < 1,0 \quad (\text{gases}) \quad Nu = 0,022 Re^{0,8} Pr^{0,6} \quad (8.36)$$

$$1,0 < Pr < 20 \quad (\text{água e líquidos leves}) \quad Nu = 0,0155 Re^{0,83} Pr^{0,5} \quad (8.37)$$

$$Pr > 20 \quad (\text{óleos}) \quad Nu = 0,0118 Re^{0,9} Pr^{0,3} \quad (8.38)$$

Cabe ressaltar qe as correlações acima apresentadas aplicam-se a problemas de convecção em que o campo de velocidades é imposto, isto é, a problemas de convecção forçada. No caso de convecção livre, o número de Nusselt é função dos números de Rayleigh e Prandtl. O número de Rayleigh é definido como sendo  $Ra = g\beta \Delta T d^3/\alpha\nu$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\beta$ , o coeficiente de dilatação térmica a pressão constante do fluido,  $\Delta T$ , a diferença de temperaturas imposta e  $d$ , a dimensão característica do sistema.

Outras correlações empíricas para o número de Nusselt são<sup>3</sup>:

- Placa vertical, convecção livre:

$$Nu = \left( 0,825 + \frac{0,387 Ra^{1/6}}{\left( 1 + \left( \frac{0,492}{Pr} \right)^{9/16} \right)^{8/27}} \right)^2$$

- Superfície inferior de uma placa aquecida ou superfície superior de uma placa resfriada:

$$Nu = 0,27 Ra^{0,25} \quad 10^5 \leq Ra \leq 10^{10}$$

- Superfície superior de uma placa aquecida ou superfície inferior de uma placa resfriada:

$$\begin{aligned} Nu &= 0,54 Ra^{0,25} & 10^4 \leq Ra \leq 10^7 \\ Nu &= 0,15 Ra^{1/3} & 10^7 \leq Ra \leq 10^{11} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>ref: Geiger & Poirier. *Transport Phenomena in Metallurgy*. Addison-Wesley, 1973.

<sup>2</sup>ref: Kays, W. M. *Convective Heat and Mass Transfer*. Mc-Graw-Hill, 1975.

<sup>3</sup>ref: Incropera, F. P. & DeWitt, D. P. *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*; Livros Técnicos e Científicos, 1998.

## 8.6.2 Transferência de calor por evaporação

O problema da determinação da quantidade de calor retirada por evaporação envolve duas questões:

- A determinação da taxa de evaporação da substância resfriada;
- O cálculo da taxa de transferência de calor associada ao processo de evaporação.

Esta última é facilmente determinada multiplicando-se a taxa de evaporação de massa pelo calor latente na temperatura em que a evaporação se faz. Assim a dificuldade maior reside na determinação da taxa de evaporação e na identificação das variáveis das quais a mesma depende. Iniciaremos abordando esta questão.

A primeira observação que fazemos é de há analogias importantes entre os mecanismos de transferência de calor e de massa. O calor se difunde em uma substância segundo a lei de Fourier,  $\mathbf{q} = -\kappa \mathbf{grad} T$ . De forma análoga, uma espécie química  $\mathcal{A}$  se difunde através de outra,  $\mathcal{B}$ , segundo uma lei semelhante, conhecida como *Primera Lei de Fick*:

$$\mathbf{J}_{\mathcal{A}} = -\mathcal{D}_{\mathcal{AB}} \mathbf{grad} c_{\mathcal{A}} \quad (8.39)$$

onde  $\mathbf{J}$  é o fluxo da espécie  $\mathcal{A}$  em moles por unidade de área e tempo,  $c_{\mathcal{A}}$ , a concentração de  $\mathcal{A}$  em moles por unidade de volume e  $\mathcal{D}_{\mathcal{AB}}$ , a *difusividade* ou coeficiente de difusão de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{B}$ .

Vimos que quando há transferência de calor por convecção na interface entre um sólido e o fluido em escoamento forma-se uma camada limite hidrodinâmica e outra térmica, sendo que a relação entre ambas é governada pelo número de Prandtl do fluido. A relação entre a dimensão característica do corpo e a espessura da camada limite hidrodinâmica é dada pelas eqs. (5.33 e 8.34). Analogamente, quando um fluido escoar em contato com a superfície livre de uma substância que se evapora forma-se uma camada limite de massa. As camadas mais internas do fluido se saturam da substância que se evapora enquanto que pontos distantes da interface, não afetados pela presença da substância contém a concentração contida a priori no escoamento.

Em outras palavras, a *concentração ou pressão de vapor* da substância que se evapora varia do valor de saturação *na temperatura da interface* até o valor encontrado em pontos distantes.

A espessura da camada limite de massa pode ser estimada substituindo-se a viscosidade do fluido (ou coeficiente de difusão da velocidade) pelo coeficiente de difusão  $\mathcal{D}_{\mathcal{AB}}$  da substância que se evapora no fluido em escoamento:

$$\frac{L}{\delta_m} = a \left( \frac{UL}{\nu} \right)^{1/2} \left( \frac{\nu}{\mathcal{D}_{\mathcal{AB}}} \right)^{1/2} = a Re^{1/2} \frac{\nu}{\mathcal{D}_{\mathcal{AB}}}^{1/2} = a Re^{1/2} Sc^{1/2}$$

A relação  $\nu/\mathcal{D}_{\mathcal{AB}} = Sc$  denomina-se *Número de Schmidt* e define a relação entre a espessura das camadas limite hidrodinâmica e de difusão de massa.

Seguindo o mesmo procedimento adotado no caso transferências de calor por convecção, utilizaremos agora o resultado acima para avaliarmos o gradiente de concentração junto à

interface entre a substância que se evapora e o fluido que escoar. Seja  $c_A$  a concentração de  $\mathcal{A}$  junto à superfície e  $c_A + \Delta c_A$  a concentração fora da camada limite de massa.

Fazemos uma estimativa da componente do gradiente de concentração perpendicular à superfície,  $\partial c_A / \partial n$ , dividindo  $\Delta c_A$  por  $\delta_m$ :

$$\frac{\partial c_A}{\partial n} \approx \frac{\Delta c_A}{\delta_m} = \frac{1}{L} \left( \frac{L}{\delta_m} \right) \Delta c_A = \frac{1}{L} (a Re^{1/2} Sc^{1/2}) \Delta c_A$$

Se multiplicarmos o gradiente de concentração pela difusividade  $\mathcal{D}_{AB}$  teremos uma estimativa do *fluxo*  $\mathbf{J}_A$  da *espécie química*  $\mathcal{A}$ . Este fluxo por seu lado, é igual a  $h \Delta c_A$ . Temos então:

$$\mathbf{J}_A = \mathcal{D}_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial n} \approx \frac{\mathcal{D}_{AB}}{L} (a Re^{1/2} Sc^{1/2}) \Delta c_A = h_m \Delta c_A$$

Dividindo a forma acima por  $\Delta c_A$  encontramos:

$$\frac{\mathcal{D}_{AB}}{L} a Re^{1/2} Sc^{1/2} = h_m$$

ou:

$$Sh = \frac{h_m L}{\mathcal{D}_{AB}} = a Re^{1/2} Sc^{1/2}$$

onde  $h_m$  é o coeficiente de transferência por evaporação da substância  $\mathcal{A}$ . A fração  $Sh = hL/\mathcal{D}_{AB}$  é um grupo adimensional denominado *número de Sherwood*. Os argumentos apresentados acima permitem inferir que no caso de convecção forçada, o número de Sherwood seja função dos números de Reynolds e de Schmidt, o que efetivamente ocorre. Assim, o coeficiente de transferência de massa por convecção pode ser estimado utilizando-se as correlações empíricas já apresentadas, substituindo-se o número de Prandtl pelo de Schmidt.

No desenvolvimento acima escrevemos o fluxo  $\mathbf{J}_A$  na forma:

$$\mathbf{J}_A = h_m \Delta c_A$$

A diferença de concentrações deve ser entendida com a diferença entre a concentração de saturação da substância evaporada *na temperatura da interface* e a concentração da mesma fora da camada limite de massa.

## 8.7 Trocadores de Calor

Trocadores de calor são dispositivos utilizados para o resfriamento ou aquecimento de um equipamento ou de um fluido, denominado fluido de *processo*. O resfriamento ou aquecimento se faz por intermédio de outro fluido, denominado fluido de *serviço*. Como exemplos de trocadores de calor podemos citar as caldeiras de aquecimento de água e os geradores de vapor, onde o fluido de processo é a água, que é vaporizada por gases quentes provenientes

da combustão de um óleo. Trocadores de calor são elementos essenciais dos motores de combustão interna, dos equipamentos de refrigeração, de ar condicionado, sendo largamente utilizados nas indústrias química, alimentar e siderúrgica. São importantes também nos “chips” dos computadores.

Trataremos aqui de trocadores de calor em que um fluido é resfriado por outro. Podemos classificá-los em duas categorias:

- Trocadores *abertos*, em que um fluido tem contato direto com o outro. Exemplo deste tipo de trocador de calor são as *torres de resfriamento* em que a água de um sistema de recirculação que resfria diversos equipamentos é resfriada em contato direto com o ar. Torres de Resfriamento são largamente utilizadas em sistemas de ar condicionado de médio e de grande porte e em unidades industriais. A água é resfriada por convecção e, sobretudo pela *evaporação* de uma parcela da vazão de circulação. Este tipo de trocador de calor permite o resfriamento da água a temperaturas *inferiores* à do ar. Neste caso, o limite termodinâmico de resfriamento é a *temperatura de bulbo úmido* do ar ambiente.
- Trocadores *fechados*, em que um fluido não tem contato direto com o outro, isto é, a transferência de calor se faz através de uma parede.

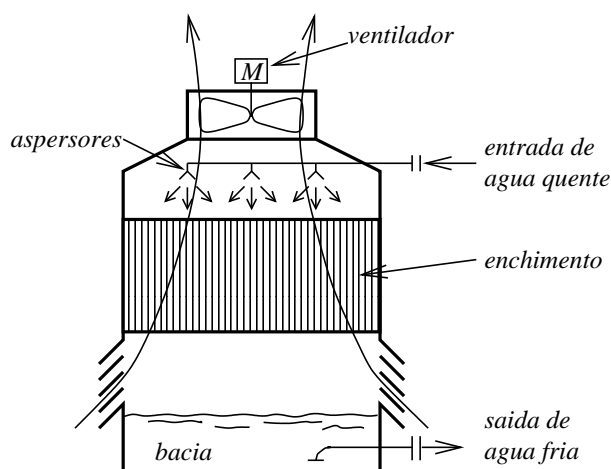


Figura 8.8: Esquema de uma torre de resfriamento do tipo *contra-corrente* com tiragem *induzida*.

O esquema da fig. (8.8) mostra os principais elementos de uma Torre de Resfriamento do tipo *contra-corrente* com tiragem de ar *induzida* por um ventilador: A água quente é borrifada pela parte superior da Torre sobre o *enchimento*. O enchimento consiste de uma colméia ou de várias camadas de barras horizontais de madeira. No primeiro caso o enchimento provê um grande superfície de contato que é recoberta com uma fina lâmina de água. A água escorre sob ação da gravidade e é resfriada pelo ar que circula em sentido contrário. No segundo caso a superfície de contato é obtida pelo fracionamento do fluxo de água em gotas que se produzem ao se chocarem com as barras de madeira, na queda através deste tipo de enchimento.

A água resfriada é coletada na *bacia*, de onde é recirculada.

Trocadores fechados envolvem a troca térmica entre dois líquidos, dois gases, ou entre um líquido e um gás. Dois tipos comuns de trocadores de calor fechados são os de *casco e tubos* e os trocadores de *placas*.

Trocadores de calor de casco e tubos consistem de um feixe de tubos por onde circula em geral o fluido de processo. Este feixe é montado em um vaso de pressão por onde circula o fluido de serviço. Estes trocadores são utilizados para a transferência de calor entre

líquidos ou entre um líquido e um gás. Podem trabalhar em condições de pressão bastante elevada porém com diferenças de temperatura não muito baixas entre os dois fluidos, pois este tipo de arranjo não resulta em superfícies de troca térmica muito grandes. O esquema da fig. (8.9) ilustra a configuração de um trocador de calor do tipo casco e tubos.

Trocadores de placas consistem de um conjunto de placas em geral de aço inoxidável, formando canais alternados dos fluidos de processo e de serviço, conforme mostrado na fig. (8.10). Todas as vedações são feitas através de *gaxetas* de borracha ou outro material sintético. Este tipo de trocador de calor permite que se obtenha grandes áreas de troca térmica em pequenos volumes. Conseqüentemente, é a escolha indicada para situações onde a diferença de temperatura entre os dois fluidos é baixa e que requeiram equipamentos compactos. No entanto este tipo de trocador de calor não é adequado para uso com gases nem sob condições de temperatura ou pressão elevada. O esquema da fig. (8.10) mostra o arranjo de um trocador de calor a placas.

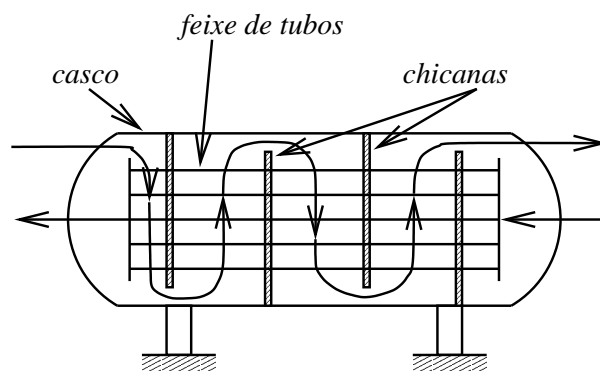


Figura 8.9: Esquema de um trocador de calor do tipo *casco e tubos*.

Os trocadores de calor podem também ser classificados de acordo com o arranjo relativo do fluxo dos dois fluidos. Se os dois fluidos seguirem trajetórias razoavelmente paralelas e de mesmo sentido, o trocador denomina-se como sendo de fluxo *paralelo*. Se as trajetórias forem razoavelmente paralelas mas de sentido contrário, o trocador denomina-se como sendo de fluxo *contra-corrente* ("counter-flow"). Se as trajetórias forem perpendiculares, o trocador denomina-se como sendo de escoamento cruzado ("cross-flow"). Mostramos abaixo o diagrama de evolução das temperaturas ao longo de um trocador paralelo e de outro do tipo contra-corrente.

Um dos parâmetros mais importantes de um trocador de calor é a diferença média de temperaturas entre os dois fluidos. Procuramos calculá-la de modo a permitir que a taxa de transferência de calor  $\dot{Q}$ , ou *carga térmica* do trocador possa ser expressa na forma:

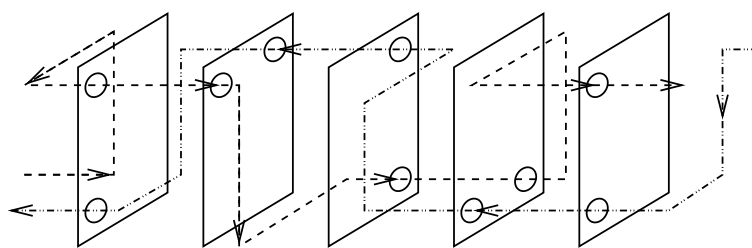


Figura 8.10: Esquema de um trocador de calor a *placas*.

$$\dot{Q} = UA \Delta T$$



onde  $U$  é o coeficiente global do trocador e  $A_e$ , a área de troca associada a esta condutância e  $\Delta T$ , a diferença média que procuramos calcular. Consideremos o caso de um trocador contra-corrente, em que um dos fluidos circula dentro de um tubo de seção circular. Sejam  $T_1$  e  $T_2$  as temperaturas de entrada e saída do fluido quente e  $T_3$  e  $T_4$ , as temperaturas de entrada e saída do fluido frio. As vazões em massa dos fluidos que circulam interna e externamente são  $\dot{m}_i$  e  $\dot{m}_e$ , respectivamente.

A condutância global é dada por:

$$\frac{1}{UA_e} = \frac{1}{h_e A_e} + R_e + \frac{1}{h_i A_i} \quad (8.40)$$

onde os índices  $e$  e  $i$  referem-se a propriedades do lado externo e interno do tubo respectivamente. Para calcularmos a carga térmica devemos multiplicar o coeficiente global  $U$  por uma área. No caso de um tubo, a área externa é diferente da área interna e podemos escolher qualquer uma das duas ou mesmo outra. Escolheremos a área *externa*,  $A_e$ .

Na equação acima  $R_e$  é a resistência térmica à condução do tubo. Calculemos esta resistência: Vimos que a distribuição radial de temperaturas nas paredes de um cilindro é dada por:

$$T = T_e + \frac{q_e r_e}{k} \ln \frac{r_e}{r}$$

onde  $q_e$  é o fluxo de calor na parede externa do tubo. A temperatura na parede interna é obtida substituindo-se  $r$  por  $r_i$ :

$$T_i = T_e + \frac{q_e r_e}{k} \ln \frac{r_e}{r_i}$$

Desta igualdade obtemos:

$$q_e = \frac{k}{r_e \ln r_e / r_i} (T_i - T_e)$$

Quanto à carga térmica temos:

$$\dot{Q} = q_e A_e = \frac{k A_e}{r_e \ln r_e / r_i} (T_i - T_e)$$

A resistência térmica da parede do tubo é portanto:

$$R_e = \frac{r_e \ln r_e / r_i}{k A_e}$$

Por sua vez a condutância térmica do trocador,  $UA_e$ , é obtida substituindo-se a forma da resistência térmica da parede do tubo na eq. (8.40):

$$\frac{1}{UA_e} = \frac{1}{h_e A_e} + \frac{r_e \ln r_e / r_i}{k A_e} + \frac{1}{h_i A_i}$$

e o coeficiente global associado à área externa dos tubos,  $A_e$ , é dado por:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_e} + \frac{r_e \ln r_e / r_i}{k} + \frac{1}{h_i} \frac{A_e}{A_i} \quad (8.41)$$

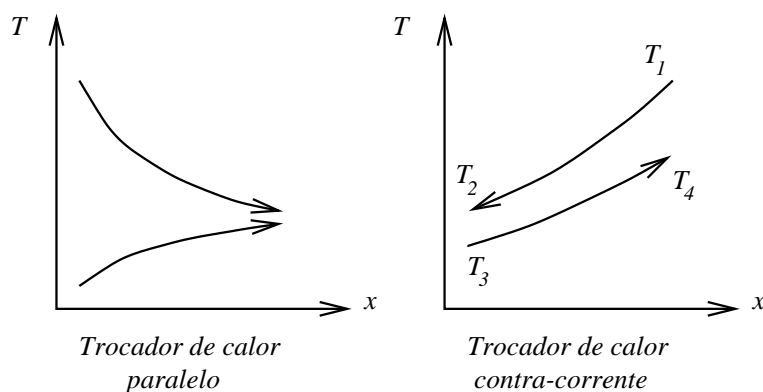


Figura 8.11: Diagrama de temperaturas de um trocadores de calor paralelos e contra-corrente.

Calculamos portanto o coeficiente global  $U$  de transferência de calor do trocador, o qual multiplicado pela área externa dos tubos e por uma diferença média de temperaturas entre os dois fluidos fornece a carga térmica  $\dot{Q}$  do trocador. Procuramos agora calcular esta diferença de temperaturas e expressá-la em função das temperaturas de entrada e saída dos dois fluidos.

Consideremos um elemento de comprimento  $dx$  do trocador de calor, conforme esquema ao lado e um volume de controle envolvendo apenas o fluido que circula dentro dos tubos. O fluxo líquido de entalpia para fora deste volume de controle é igual à taxa de transferência de calor para dentro do mesmo:

$$\dot{m}_i C_i dT_i = U 2\pi r_e dx (T_e - T_i)$$

onde  $C_i$  é o calor específico do fluido e  $T_e$  e  $T_i$  são as temperaturas locais dos fluidos externo e interno, respectivamente. Da equação acima obtemos:

$$\frac{dT_i}{T_e - T_i} = \frac{U 2\pi r_e}{\dot{m}_i C_i} dx \quad (8.42)$$

Consideremos agora um volume de controle que contenha o fluido que circula pelo lado externo dos tubos, no elemento de comprimento  $dx$  do trocador de calor. O fluxo líquido de entalpia para fora deste volume de controle é igual à taxa de transferência de calor para dentro do mesmo. Esta, por sua vez é igual ao negativo da taxa de calor transferido para o fluido que escoar dentro dos tubos:

$$\dot{m}_e C_e dT_e = -U 2\pi r_e dx (T_e - T_i)$$

onde  $C_e$  é o calor específico do fluido externo. Da equação acima obtemos:

$$\frac{dT_e}{T_e - T_i} = -\frac{U 2\pi r_e}{\dot{m}_e C_e} dx \quad (8.43)$$

Subtraindo a eq. (8.42) da eq. (8.43) obtemos:

$$\frac{d(T_e - T_i)}{T_e - T_i} = -U 2\pi r_e \left( \frac{1}{\dot{m}_e C_e} + \frac{1}{\dot{m}_i C_i} \right) dx \quad (8.44)$$

os termos  $1/\dot{m}_e C_e$  e  $1/\dot{m}_i C_i$  podem ser expressos em função da carga térmica  $\dot{Q}$  e das temperaturas de entrada e saída de cada fluido:

$$\begin{aligned}\dot{Q} = \dot{m}_e C_e (T_1 - T_2) &\implies \frac{1}{\dot{m}_e C_e} = \frac{T_1 - T_2}{\dot{Q}} \\ \dot{Q} = \dot{m}_i C_i (T_3 - T_4) &\implies \frac{1}{\dot{m}_i C_i} = \frac{T_3 - T_4}{\dot{Q}}\end{aligned}$$

Substituindo-se as expressões acima na eq. (8.44) obtemos:

$$\frac{d(T_e - T_i)}{T_e - T_i} = -\frac{U 2\pi r_e}{\dot{Q}} (T_1 - T_2 + T_3 - T_4) dx$$

ou:

$$\frac{d(T_e - T_i)}{T_e - T_i} = \frac{U 2\pi r_e}{\dot{Q}} (\Delta T_{II} - \Delta T_I) dx$$

onde  $\Delta T_I = T_2 - T_3$  e  $\Delta T_{II} = T_1 - T_4$ . Integrando ao longo do trocador obtemos:

$$\ln \frac{\Delta T_{II}}{\Delta T_I} = \frac{U 2\pi r_e L}{\dot{Q}} (\Delta T_{II} - \Delta T_I) = \frac{U A_e}{\dot{Q}} (\Delta T_{II} - \Delta T_I)$$

ou:

$$\dot{Q} = U A_e \frac{\Delta T_{II} - \Delta T_I}{\ln(\Delta T_{II}/\Delta T_I)} \quad (8.45)$$

o termo:

$$\frac{\Delta T_{II} - \Delta T_I}{\ln(\Delta T_{II}/\Delta T_I)}$$

é a diferença média de temperaturas procurada. Este termo denomina-se *diferença média logarítmica de temperaturas*, ou simplesmente *LMTD* (“Logarithmic Mean Temperature Difference”). A equação acima se escreve então:

$$\dot{Q} = U A_e LMTD \quad (8.46)$$

O *LMTD* é um parâmetro facilmente calculável pois as temperaturas de entrada e saída dos dois fluidos são especificadas em geral. Como a carga térmica também o é, a equação acima permite calcular a condutância térmica requerida de um trocador de calor, que é o dado de partida para o projeto do mesmo.

A carga térmica de um trocador de calor também pode ser calculada através da vazão e das temperaturas de entrada e saída do fluido de processo:  $\dot{Q} = \dot{m} C \Delta T_p$ . Temos então :

$$\dot{m} C \Delta T_p = U A_e LMTD$$

ou:

$$\frac{\Delta T_p}{LMTD} = \frac{UA_e}{\dot{m}C} \quad (8.47)$$

Este parâmetro põe em evidência que quanto menor for a diferença média de temperaturas  $LMTD$  entre os dois fluidos, maior deve ser o produto  $UA$ . O parâmetro denomina-se *comprimento térmico* do trocador de calor.

O aumento do comprimento térmico se faz em geral aumentando-se a área de troca térmica, pois nem sempre se pode aumentar o coeficiente global  $U$ . Porém este aumento de área deve ser feito pelo aumento do comprimento dos tubos dentro do trocador e não do diâmetro dos mesmos, pois o aumento do diâmetro reduz a velocidade do fluido e, conseqüentemente, os coeficientes de troca térmica, os quais são função do número de Reynolds, conforme eqs. (8.36-8.38). Por este motivo a condutância térmica  $UA$  é de fato proporcional ao comprimento dos tubos, o que justifica o nome *comprimento térmico*.

Ressaltamos por fim que a redução das vazões em um trocador de calor não resulta em uma redução proporcional na “capacidade de resfriamento”, entendida como redução do  $LMTD$ , ou, por exemplo, como obtenção de temperaturas mais baixas do fluido resfriado. De fato, operando com vazões menores, o número de Reynolds dos escoamentos também diminui, o que causa uma redução dos coeficientes de convecção e portanto, do coeficiente global  $U$ .

## 8.8 Radiação

Nesta seção apresentaremos apenas algumas observações a respeito da radiação de calor por superfícies. A primeira refere-se ao fato de que a radiação se faz em todos os comprimentos de onda. No entanto a distribuição da intensidade do calor irradiado não é uniforme. Quanto maior a temperatura da superfície menor é o comprimento de onda em torno do qual se concentra a maior parte da emissão. A equação de Planck relaciona a taxa de emissão por comprimento de onda com a temperatura da superfície e com o comprimento de onda  $\lambda$  da radiação:

$$q_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{ch}{\kappa_B \lambda T}\right) - 1} \quad (8.48)$$

onde  $h$  é a constante de Planck,  $c$ , a velocidade da luz e  $\kappa_b$ , a constante de Boltzmann. Esta equação refere-se a corpos com emissividade igual a 1, isto é, a *corpos negros*.

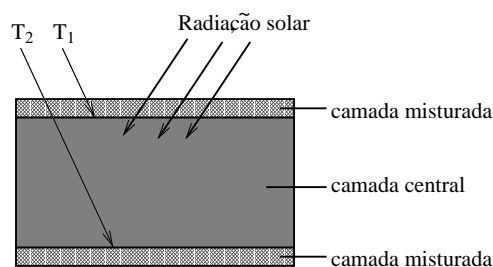
A radiação de uma superfície é máxima na direção normal à mesma. Em direções inclinadas, a radiação varia com o cosseno do ângulo entre a direção considerada e a normal à superfície. Da mesma forma, o calor irradiado que atinge sobre uma superfície depende do ângulo de incidência. Estes dois ângulos devem ser levados em consideração no cálculo do calor trocado por radiação entre duas superfícies.

## 8.9 Problemas

1. Em um dado instante de tempo a distribuição de temperatura em uma parede com  $0,3\text{ m}$  de espessura é  $T(x) = a + bx + cx^2$  onde  $T$  é dado em graus Celsius,  $x$  em metros,  $a = 200^\circ\text{C}$ ,  $b = -200^\circ\text{C}/\text{m}$  e  $C = 30^\circ\text{C}/\text{m}^2$ . A condutividade térmica do material da parede é  $\kappa = 1\text{ W}/\text{mK}$ . Pede-se:

- A taxa de transferência de calor para dentro e para fora da parede e a taxa de acumulação de energia no interior da mesma, por unidade de área;
- Se a superfície fria da parede estiver em contato com um fluido a  $100^\circ\text{C}$  qual é o coeficiente de transferência de calor por convecção entre ambos?

2. Um tanque solar de gradiente salino se constitui de um corpo raso de água formado por três camadas distintas, que é usado para coletar energia solar. As camadas externas encontram-se bem misturadas e servem para manter as superfícies superior e inferior da camada intermediária a temperaturas uniformes,  $T_1$  e  $T_2$ , onde  $T_1 > T_2$ .



Embora exista movimento nas camadas misturadas pode-se considerar que a camada central se encontra em repouso. Esta camada absorve radiação solar de modo equivalente a uma distribuição interna de fontes de calor da forma  $\dot{Q} = Ae^{-ax}$ . A distribuição de temperatura na mesma é dada por:

$$T(x) = \frac{A}{ka^2}e^{-ax} + Bx + C$$

onde  $A$ ,  $a$ ,  $B$  e  $C$  são constantes conhecidas e  $\kappa$  é a condutividade térmica do fluido. Pede-se:

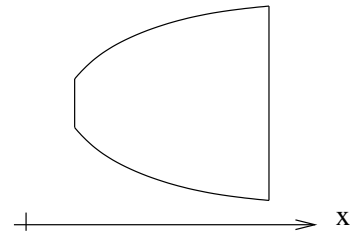
- Uma expressão para a taxa de transferência de calor por unidade de área, da camada inferior para a central e desta para a superior;
  - Uma expressão para a taxa de geração de calor na camada central, por unidade de área superficial;
  - Determinar se o campo de temperaturas da camada central é estacionário ou não.
3. Uma peça de aço é inicialmente à temperatura  $T_0 = 700^\circ\text{C}$  é submetida a processo de têmpera. A peça é mergulhada em água à temperatura  $T_\infty = 30^\circ\text{C}$ . Determinar o tempo em que a peça deve ficar imersa na água para que sua temperatura atinja  $150^\circ\text{C}$ . Considerar a temperatura da peça uniforme, isto é, a mesma em todos os pontos. Dados:
- Massa da peça:  $5\text{ kg}$ ;
  - Calor específico do aço:  $434\text{ J}/\text{Kg}^\circ\text{C}$ ;
  - Coeficiente de transferência de calor convecção entre a peça e a água:  $10\text{ W}/\text{m}^2\text{C}$ ;

- Área externa da peça:  $0,15\text{ m}^2$ .
4. Uma linha de transmissão de energia elétrica é feita por cabos condutores de alumínio de diâmetro  $d = 12\text{ mm}$ , *sem* isolamento. Pede-se:
- Simplificar a equação de condução de calor para o caso do condutor de alumínio e mostrar que a solução da mesma é da forma  $T = Ar^2 + B$ ; Determinar os coeficientes  $A$  e  $B$ ;
  - Qual o limite de corrente para que a temperatura do condutor não ultrapasse  $40^\circ\text{C}$  acima da temperatura ambiente?

Dados:

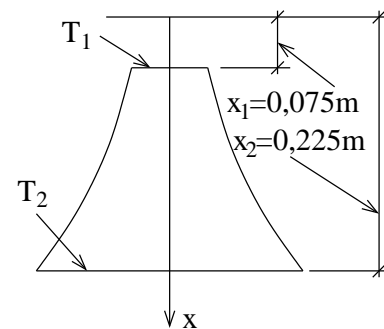
- Resistividade elétrica do alumínio:  $\rho_{el} = 2,85 \times 10^{-8}\ \Omega\text{m}$ ;
  - Condutividade térmica do alumínio:  $\kappa_{Al} = 205\text{ W/mC}$ ;
  - Número de Biot:  $Bi = 5,0 \times 10^{-4}$
5. A figura abaixo mostra um tronco de cone cônico fabricado em alumínio ( $\kappa = 177\text{ W/mK}$ ) com seção reta circular de diâmetro  $d = ax^{1/2}$ , onde  $a = 0,5\text{ m}^{1/2}$ . A menor extremidade está localizada em  $x_1 = 25\text{ mm}$  e a maior, em  $x_2 = 125\text{ mm}$ . As extremidades encontram-se  $T_1 = 600\text{ K}$  e  $T_2 = 400\text{ K}$ , respectivamente. Pede-se:

- Uma expressão para o perfil de temperaturas unidimensional no tronco de cone,  $T(x)$ ;
- Uma expressão para a taxa de transferência de calor,  $Q$ .



6. Um cone sólido truncado tem a seção reta circular com diâmetro relacionado à coordenada axial de acordo com a relação  $D = ax^{3/2}$  com  $a = 1,0\text{ m}^{-1/2}$ . A superfície lateral do sólido é isolada termicamente, a superior é mantida a  $T_1 = 100^\circ\text{C}$  e a inferior, a  $T_2 = 20^\circ\text{C}$ . Pede-se:

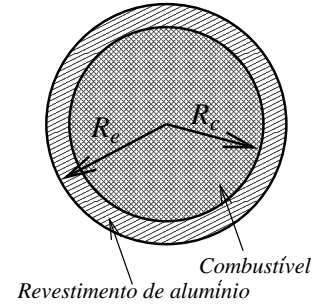
- Uma expressão para a distribuição de temperaturas no sólido,  $T = T(x)$ ;
- A taxa de transferência de calor através do sólido.



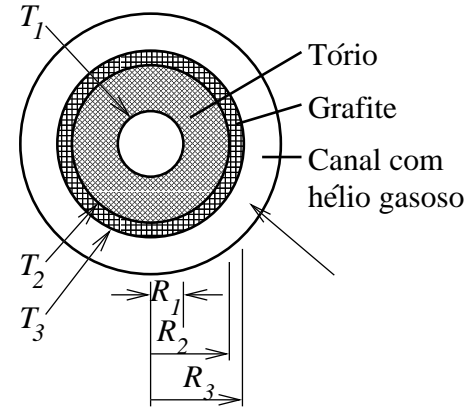
7. O elemento combustível típico de reator nuclear consiste de uma vareta cilíndrica longa de combustível sólido revestida externamente por uma proteção de alumínio, conforme a figura ao lado. A taxa de geração de calor por unidade de volume dentro do combustível varia ao longo do raio e é dada por:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_0 \left[ 1 + b \left( \frac{r}{R_c} \right)^2 \right]$$

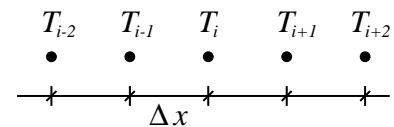
onde  $\dot{Q}_0$  é a taxa de geração de calor no eixo do elemento,  $b$  uma constante e  $R_c$  o raio externo do combustível. O calor gerado dentro do elemento combustível é transferido por convecção para a água que circula em torno do mesmo, sendo  $h$  o coeficiente de transferência de calor por convecção. Obter uma expressão para os perfis de temperaturas dentro do combustível e no revestimento, bem como para a temperatura máxima no elemento.



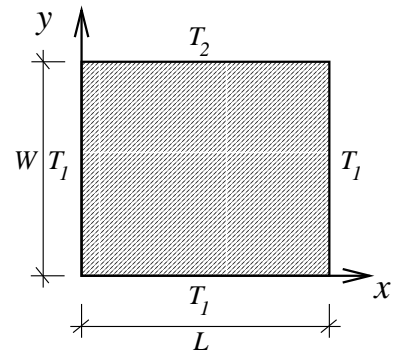
8. Um reator nuclear de alta temperatura com resfriamento a gás é formado um anel cilíndrico de tório ( $\kappa = 57 \text{ W/mK}$ ) onde a taxa de geração interna de calor é de  $10^8 \text{ W/m}^3$ . O anel de tório é envolvido por outro de grafite ( $\kappa = 3 \text{ W/mK}$ ), o qual resfriado por hélio gasoso que escoia através de um canal externo, a  $T_\infty = 600 \text{ K}$ , conforme figura ao lado. O coeficiente de transferência de calor entre o grafite e o hélio é de  $h = 2000 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Determinar as temperaturas  $T_1$  e  $T_2$  nas superfícies interna e externa do tório.



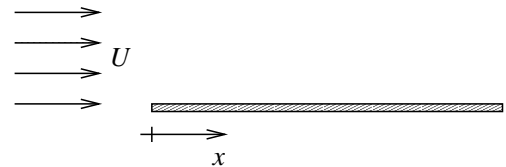
9. Um aquecedor elétrico delgado é enrolado ao redor da superfície externa de um tubo cilíndrico longo cuja superfície interna é mantida à temperatura de  $5^\circ\text{C}$ . Os raios interno e externo da parede são iguais, respectivamente, a  $25$  e  $27 \text{ mm}$  respectivamente e a condutividade térmica de  $10 \text{ W/mK}$ . A resistência térmica de contato por unidade de comprimento entre o aquecedor e a superfície é de  $0,01 \text{ mK/W}$ . A superfície externa do tubo está em contato com um fluido à temperatura  $T_\infty = -10^\circ\text{C}$  e o coeficiente de transferência de calor por convecção entre ambos é  $h_{ext} = 100 \text{ W/mK}$ . Qual é a potência do aquecedor por unidade de comprimento, requerida para mantê-lo a  $T_0 = 25^\circ\text{C}$ ?
10. Seja uma malha espacial uniforme de pontos, utilizada para integração numérica da equação de condução de calor, conforme representado na figura ao lado. Obter uma expressão para o cálculo de  $(\partial^3 T / \partial x^3)_i$ , com erro da ordem de  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ .



11. Obter uma expressão para o campo bi-dimensional estacionário de temperaturas em uma placa plana, da qual os lados laterais e inferior são mantidos à temperatura  $T_1 = 0^\circ C$  e o lado superior é mantido à temperatura  $T_2$ .

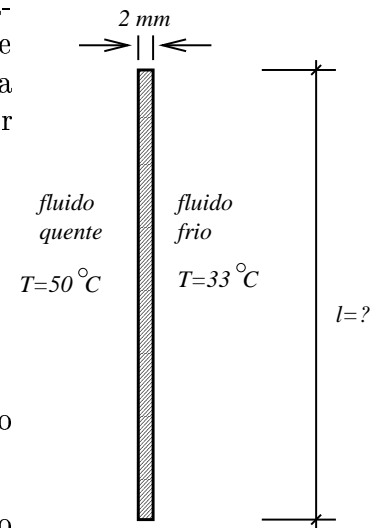


12. Esboçar os perfis de velocidade e temperatura para os casos de uma placa plana com origem em  $x = 0$ , sobre a qual escoam fluidos com número de Prandtl  $Pr = 5$  e  $Pr = 0,5$ .



13. Um trocador de calor se constitui de uma placa de aço separando dois fluidos, conforme esquema ao lado. O fluido quente é mantido à temperatura de  $50^\circ C$  enquanto o frio é mantido a  $33^\circ C$ . A carga térmica transferida é de  $Q = 50 kW$ . Calcular a altura  $l$  da placa sabendo que:

- largura da placa:  $b = 0,5 m$ ;
- espessura da placa:  $e = 2 mm$ ;
- condutividade térmica do aço:  $\kappa = 47 W/m^\circ C$ ;
- coeficiente de transferência de calor por convecção do lado do fluido quente:  $h_q = 15 kW/m^2^\circ C$ ;
- coeficiente de transferência de calor por convecção do lado do fluido frio:  $h_f = 20 kW/m^2^\circ C$ ;



14. Um trocador de calor do tipo casco e tubos deve ser projetado para transferir calor de um fluido de processo (água) para um fluido de serviço (água), nas seguintes condições:

- Temperaturas de entrada e saída do fluido de processo (lado dos tubos):  $55^\circ C$  e  $38^\circ C$ , respectivamente;
- Temperaturas de entrada e saída do fluido de serviço (lado do casco):  $32^\circ C$  e  $45^\circ C$ , respectivamente;
- Carga térmica:  $\dot{Q} = 12 MW$ ;
- Número de tubos em paralelo:  $n = 100$ ;
- Diâmetro interno de cada tubo:  $d_i = 2,5 \times 10^{-2} m$ ;
- Diâmetro externo de cada tubo:  $d_e = 2,9 \times 10^{-2} m$ ;
- Velocidade do fluido de serviço (lado do casco):  $v_s = 3 m/s$ .

Pede-se:



- Mostrar que a condutância térmica  $U$  do trocador, referida à área externa dos tubos, é dada por:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_i} \frac{d_e}{d_i} + \frac{r_e}{\kappa} \ln \frac{r_e}{r_i} + \frac{1}{h_e}$$

onde  $r_e$  e  $r_i$  são, respectivamente, os diâmetros externo e interno dos tubos;

- Determinar o comprimento de cada tubo;
- Determinar a perda de carga nos tubos.

Dados:

- Densidade da água:  $\rho = 991 \text{ kg/m}^3$ ;
- Calor específico da água:  $C_p = 4,18 \text{ KJ/kg}^\circ\text{C}$ ;
- Viscosidade cinemática da água:  $\nu = 0,5 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ;
- Condutividade térmica da água:  $\kappa_{H_2O} = 0,653 \text{ W/mK}$ ;
- Número de Prandtl da água: 7;
- Condutividade térmica do aço:  $\kappa_{aço} = 46,7 \text{ W/mK}$ ;

15. Ar seco escoa sobre uma placa molhada de comprimento  $L = 500 \text{ mm}$  e largura  $b = 150 \text{ mm}$ . A velocidade e a temperatura do ar são  $U_\infty = 20 \text{ m/s}$  e  $T_\infty = 35^\circ\text{C}$ , respectivamente. Um aquecedor elétrico embutido na placa fornece potência para manter a temperatura da superfície em  $20^\circ\text{C}$ . Determinar a taxa de evaporação de água sobre a placa ( $\text{kg/h}$ ) e a potência necessária para manter as condições de regime estacionário.

Dados do ar:  $\nu = 15,89 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\kappa = 26,3 \times 10^{-6} \text{ kW/mK}$ ,  $\rho = 1,1614 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_p = 1,007 \text{ kJ/kg K}$ ; Constante universal dos gases perfeitos:  $\mathcal{R} = 8,314 \text{ kJ/kmol K}$ ; Massa molecular da água:  $M = 18 \text{ kg/kmol}$ ; Coeficiente de difusão do vapor d'água no ar:  $D = 0,26 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ; Pressão de vapor saturado da água a  $20^\circ\text{C}$ :  $p_v = 1,917 \times 10^3 \text{ Pa}$ ; Calor latente de vaporização da água a  $20^\circ\text{C}$ :  $L = 2449 \text{ kJ/kg K}$ .

$$Nu = 0,680 Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

$$J = h_m(\rho - \rho_\infty)$$

# Capítulo 9

## Transferência de Massa

### 9.1 Introdução

Neste capítulo tratamos de algumas questões referentes ao problema da transferência de massa. Esclarecemos inicialmente o significado da expressão *Transferência de Massa*: utilizaremos esta expressão para designar o transporte de espécies químicas que se movem em um meio contínuo, quer sejam levadas pelo fluxo de um fluido em movimento, ou por difusão, em meios que se encontram em repouso. Como exemplo do primeiro caso podemos citar o transporte de umidade pelos ventos, de regiões costeiras para o interior de continentes, e a dispersão de poluentes na atmosfera. Como exemplo do segundo caso citamos a difusão de gases em metais e a difusão de substâncias diversas em tecidos de seres vivos. É neste sentido que empregaremos a expressão *Transferência de Massa* neste capítulo.

Iniciaremos equacionando o princípio de conservação de espécies químicas que reagem entre si e se difundem em virtude da existência de gradientes de concentração. Esta formulação leva a equações do tipo *reação-difusão*. A seguir discutiremos o problema do surgimento espontâneo de uma heterogeneidade na distribuição espacial de duas espécies químicas em um sistema reação-difusão. Este problema tem aplicações no estudo da formação de padrões espaciais em várias áreas como a química, a biologia teórica e a ciência de materiais.

### 9.2 Equações Reação-Difusão

O equacionamento do princípio de conservação de espécies que reagem entre si e se difundem é feito seguindo-se procedimento semelhante ao utilizado na obtenção da equação da energia: considera-se um volume de controle fixo no espaço e procura-se uma equação para a taxa de variação do número de moles da espécie química  $\mathcal{A}$  dentro deste volume. Consideramos que não haja nenhum transporte por correntes convectivas, isto é, que  $\mathbf{v} \equiv 0$ .

Podemos então enunciar o princípio de conservação de uma espécie química da seguinte forma:

A taxa de acumulação da espécie  $\mathcal{A}$  no volume de controle deve ser igual ao

fluxo  $\mathbf{J}_A$  da espécie para dentro do volume, acrescido da taxa de produção ou consumo da espécie, em virtude de reações químicas que ocorrem no volume.

Desta forma podemos escrever:

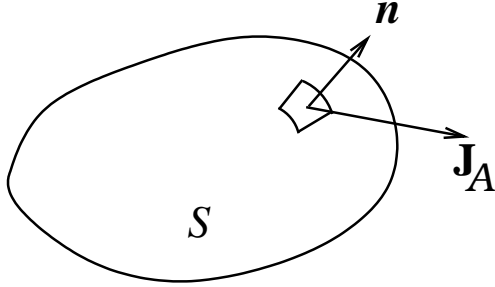


Figura 9.1: Volume de controle ao qual se aplica o princípio de conservação das espécies químicas.

$$\int_V \frac{\partial c_A}{\partial t} dV = - \oint_S \mathbf{J}_A \cdot \mathbf{n} dA + \int_V f(\mathbf{C}) dV$$

onde  $c_A$  é a concentração da espécie  $A$  em moles por unidade de volume,  $\mathbf{J}_A$  é fluxo de  $A$  em moles por unidade de tempo e de área e  $f(\mathbf{C})$  representa a cinética de formação e consumo da espécie.  $\mathbf{C}$  é o vetor que contém a concentração de cada uma das espécies envolvidas na cinética da reação.  $\mathbf{n}$  é o vetor de comprimento unitário normal à superfície de controle e orientado para fora.

Aplicando o teorema de Gauss transformamos a integral de superfície em uma integral de volume e obtemos a forma diferencial do princípio de conservação da espécie química  $A$ :

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{J}_A + f(\mathbf{C})$$

O fluxo da espécie  $A$  pode ser substituído pela expressão dada pela primeira lei de Fick, conforme eq. (8.39) ( $\mathbf{J}_A = -D_{AB} \text{grad } c_A$ ). Obtemos uma equação do tipo *reação-difusão*, que se escreve:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \nabla^2 c_A + f(\mathbf{C})$$

onde  $D_{AB}$  é a difusividade da espécie  $A$  no meio  $B$ . No caso de não haver reação, a equação acima reduz-se à *Segunda Lei de Fick*:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \nabla^2 c_A$$

No caso de um sistema químico contendo duas espécies cujas concentrações molares são respectivamente,  $u$  e  $v$  obtemos um sistema de duas equações a duas incógnitas da forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D_1 \nabla^2 u + f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_2 \nabla^2 v + g(u, v) \end{aligned}$$

onde  $f(u, v)$  e  $g(u, v)$  são as cinéticas de produção e consumo de  $u$  e  $v$  respectivamente e  $D_1$  e  $D_2$ , os coeficientes de difusão de cada espécie.

## 9.3 Estruturas de Turing

Nesta seção trataremos do problema do surgimento espontâneo de uma distribuição espacial periódica de duas espécies químicas que reagem entre si. O mecanismo que leva à formação destas *estruturas espaciais* foi proposto em 1952 por A. M. Turing, o inventor da máquina de Turing e da moderna ciência da computação e comprovado experimentalmente em 1990 por P. De Kepper e colaboradores, do Instituto Paul Pascal de Bordeaux, França. Estas heterogeneidades denominam-se *estruturas de Turing*.

O mecanismo proposto por Turing considera um sistema reação-difusão com duas espécies químicas cujas concentrações são  $u$  e  $v$ , que possui um estado estacionário uniforme no espaço, no qual as concentrações são  $u_0$  e  $v_0$ . Este estado é *estável* por hipótese a perturbações independentes da posição dentro do reator e instável a pequenas perturbações periódicas no espaço, se os coeficientes de difusão satisfizerem certas condições que deduziremos nesta seção. Turing identificou portanto uma condição em que a difusão *instabiliza* o comportamento de um sistema, contrariando a idéia de que a mesma seja sempre fator de estabilidade.

O mecanismo pressupõe que o transporte das espécies químicas se faça exclusivamente por *difusão* e baseia-se na interação entre um inibidor que se difunde rapidamente e um ativador que se difunde de forma lenta pelo espaço. Estes requisitos não são facilmente preenchidos nos experimentos de laboratório. Por isso as estruturas de Turing só foram observadas em 1990 com os trabalhos de De Kepper e colaboradores, a respeito da reação química entre íons cloreto, iodeto e ácido malônico (reação CIMA). De Kepper e colaboradores utilizaram um reator contendo um *gel* que impedia a formação de correntes convectivas e empregaram um indicador que formava longa cadeia molecular com o iodeto, reduzindo a mobilidade daquela espécie química.

Antes de prosseguirmos com a formulação do problema convém descrevermos as etapas do método de abordagem que adotaremos e definiremos alguns termos:

As estruturas de Turing resultam da *instabilidade* do estado estacionário homogêneo  $u_0$  e  $v_0$ , com relação a pequenas perturbações periódicas no espaço. Isto significa que o estado homogêneo é solução das equações de evolução do sistema, porém não é observado pois pequenas perturbações, que estão sempre presentes em qualquer sistema físico, são amplificadas e o afastam do estado inicial. A abordagem do problema procura portanto identificar as condições para que estas pequenas perturbações sejam amplificadas. Quando isto ocorre tem-se uma condição *suficiente* para a instabilidade do sistema. O procedimento envolve então as seguintes etapas:

- Superposição de uma pequena perturbação à solução estacionária uniforme e determinação das condições que a cinética deve satisfazer para que esta perturbação decresça ao longo do tempo. Supõe-se que a cinética satisfaça a estas condições;
- Superposição de uma perturbação periódica no espaço e identificação das condições em que a mesma se torna instável, isto é, que cresça ao longo do tempo;
- Em ambos os casos determina-se evolução da perturbação através de equações linearizadas, pois sendo a mesma pequena desprezamos termos contendo produtos da mesma.

O procedimento denomina-se *análise de estabilidade linear* do estado estacionário homogêneo.

A instabilidade surge quando os coeficientes de difusão das espécies são suficientemente diferentes entre si. O valor da relação entre os coeficientes em que ocorre a instabilidade define um *ponto de bifurcação* no espaço dos valores possíveis daquela relação. O comprimento de onda dos modos que se tornam instáveis no ponto de bifurcação denomina-se *comprimento de onda crítico*. Modos críticos crescem exponencialmente nos primeiros instantes de evolução da instabilidade. Quando a amplitude dos mesmos atinge um valor finito os mecanismos não-lineares da cinética passam a atuar e modificam a evolução do sistema de duas formas: gerando novos modos e saturando o crescimento exponencial dos primeiros instantes. Neste trabalho trataremos apenas da identificação do ponto de bifurcação e do comprimento de onda crítico.

Seja um sistema reação-difusão com duas espécies químicas, cujas concentrações denominamos  $u$  e  $v$ , respectivamente. A evolução temporal deste sistema é regida pelo seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + D_1 \nabla^2 u \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) + D_2 \nabla^2 v \quad (9.2)$$

onde  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ . As funções  $f(u, v)$  e  $g(u, v)$  representam a cinética das reações químicas que ocorrem no sistema. Estados uniformes no espaço são caracterizados por derivadas espaciais nulas e evoluem obedecendo o sistema:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f(u, v) \\ \frac{dv}{dt} &= g(u, v) \end{aligned}$$

O plano formado pelos valores de  $(u, v)$  definem o *espaço de fases* do sistema. Os pontos em que  $u$  e  $v$  não variam com o tempo são definidos pelas curvas  $f(u, v) = 0$  e  $g(u, v) = 0$ . Pontos de interseção destas duas curvas definem estados estacionários homogêneos no espaço. Consideraremos aqui a cinética proposta por Schnackenberg (1979):

$$f(u, v) = a - u + u^2 v \quad (9.3)$$

$$g(u, v) = b - u^2 v \quad (9.4)$$

onde  $a$  e  $b$  são duas constantes. Estados uniformes de sistemas que obedecem à cinética de Schnackenberg evoluem portanto de acordo com as equações:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= a - u^2 + u^2 v \\ \frac{dv}{dt} &= b - u^2 v \end{aligned}$$

o comportamento descrito por esta cinética pode ser descrito da seguinte forma: inicialmente, quando as concentrações de  $u$  e  $v$  são muito pequenas, ambas as aumentam de forma

constante no tempo, com taxas iguais a  $a$  e a  $b$ , que são os termos dominantes nas eqs. (9.3) e (9.4). Na etapa seguinte as concentrações de  $u$  e  $v$  ainda são pequenas de modo que os efeitos do termo  $u^2v$  ainda não se fazem sentir. A concentração baixa de  $u$  inibe seu próprio crescimento e a de  $v$  segue aumentando. Quando a concentração de  $v$  atinge um nível suficientemente elevado passa a favorecer o crescimento de  $u$ , através do termo não-linear  $u^2v$ . Esta etapa se caracteriza por um efeito *auto-catalítico*, em que a presença de  $u$  favorece seu próprio crescimento. Finalmente, concentrações elevadas de  $u$  atuam no sentido de reduzir a de  $v$ , o que limita a ação do mecanismo auto-catalítico e a concentração de  $u$  diminui.

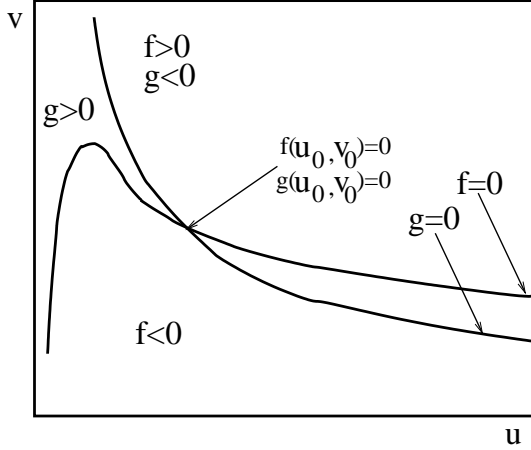


Figura 9.2: Curvas de  $f(u, v) = 0$  e  $g(u, v) = 0$  da cinética de Schnackenberg.

Quando as concentrações de  $u$  e  $v$  não variam nem no tempo nem no espaço tem-se  $f(u, v) = a - u^2 + u^2v = 0$  e  $g(u, v) = b - u^2v = 0$ . As curvas  $f(u, v) = 0$  e  $g(u, v) = 0$  da cinética de Schnackenberg estão representadas de forma esquemática na fig.(9.2) e se cruzam no ponto  $(u_0, v_0)$ , que define o estado estacionário e uniforme no espaço.

Determinamos inicialmente as condições para a estabilidade linear do estado estacionário com relação a pequenas perturbações uniformes no espaço. Para isto superpomos uma perturbação da forma abaixo e seguimos sua evolução.

$$\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

Admitimos que  $\Re(\lambda) < 0$  para este tipo de perturbação. Sendo  $\Delta u$  e  $\Delta v$  pequenos o estado perturbado evolui no tempo obedecendo ao seguinte sistema de equações linearizadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u_0 + u_p) &= f(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial u}u_p + \frac{\partial f}{\partial v}v_p + D_1 \nabla^2(u_0 + u_p) \\ \frac{\partial}{\partial t}(v_0 + v_p) &= g(u_0, v_0) + \frac{\partial g}{\partial u}u_p + \frac{\partial g}{\partial v}v_p + D_2 \nabla^2(v_0 + v_p) \end{aligned}$$

onde as derivadas  $\partial f/\partial u$ ,  $\partial f/\partial v$ ,  $\partial g/\partial u$  e  $\partial g/\partial v$  são calculadas no ponto  $(u_0, v_0)$ . Como  $\partial u_0/\partial t = \partial v_0/\partial t = 0$ ,  $f(u_0, v_0) = g(u_0, v_0) = 0$  e a perturbação não varia no espaço as equações de evolução do estado perturbado tomam a forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(e^{\lambda t} \Delta u) &= \frac{\partial f}{\partial u}e^{\lambda t} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}e^{\lambda t} \Delta v \\ \frac{\partial}{\partial t}(e^{\lambda t} \Delta v) &= \frac{\partial g}{\partial u}e^{\lambda t} \Delta u + \frac{\partial g}{\partial v}e^{\lambda t} \Delta v \end{aligned}$$

ou:

$$\lambda(e^{\lambda t} \Delta u) = \frac{\partial f}{\partial u}e^{\lambda t} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}e^{\lambda t} \Delta v$$

$$\lambda(e^{\lambda t} \Delta v) = \frac{\partial g}{\partial u} e^{\lambda t} \Delta u + \frac{\partial g}{\partial v} e^{\lambda t} \Delta v$$

simplificando o fator  $e^{\lambda t}$  e reescrevendo o sistema resultante em forma matricial temos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

A eq. (9.5) caracteriza um problema de auto-valores e auto-vetores que pode ser reescrito como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} - \lambda & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Denominamos  $L$  a matriz do membro esquerdo da eq. (9.5). Para que  $\Delta u$  e  $\Delta v$  admitam solução diferente da trivial é necessário que  $\det(L - \lambda \mathbf{I}) = 0$ , isto é, que:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} - \lambda & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

A imposição desta condição resulta na seguinte equação característica:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial u} - \lambda \right) \left( \frac{\partial g}{\partial v} - \lambda \right) - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

Rearranjando os termos:

$$\lambda^2 - \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) \lambda + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

O coeficiente do termo que multiplica  $\lambda$  é o traço da matriz  $L$ , que representamos por  $\text{tr}(L)$  enquanto o termo independente de  $\lambda$  é o *determinante* de  $L$ . A equação característica pode ser reescrita então como:

$$\lambda^2 - \text{tr}(L)\lambda + \det(L) = 0$$

O estado uniforme é *estável* se as duas raízes da equação característica forem negativas, pois neste caso a perturbação decrescerá exponencialmente no tempo. Esta condição é satisfeita se a soma das raízes for negativa e se o produto das mesmas for positivo, isto é, se:

$$\text{tr}(L) = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} < 0 \quad (9.6)$$

$$\det(L) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} > 0 \quad (9.7)$$

O mecanismo de Turing pressupõe que estas duas condições sejam satisfeitas.

Determinaremos agora as condições para que uma perturbação periódica nas direções  $x$  e  $y$  seja *instável*, sendo válidas as condições dadas pelas eqs. (9.6) e (9.7).

Consideremos uma perturbação da forma:

$$\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} e^{\lambda t} e^{i(\kappa_x x + \kappa_y y)} + c.c. = \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + c.c.$$

onde  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \kappa_x x + \kappa_y y$ .  $\kappa_x, \kappa_y$  são as componentes do vetor de onda  $\mathbf{k}$  e *c.c.* indica o complexo conjugado do termo precedente. A soma da função complexa acima com seu complexo conjugado resulta em uma perturbação *real* e periódica no espaço, pois contém o seno e o cosseno de  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ . Sendo a perturbação pequena, evolui obedecendo a um sistema de equações lineares. Nestas condições podemos estudar a evolução de cada parcela isoladamente. O comportamento da perturbação é dado pela soma dos comportamentos de cada uma das parcelas. Superpondo uma parcela da perturbação ao estado  $(u_0, v_0)$  e substituindo o resultado nas eqs. (9.1) e (9.2) linearizadas obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u_0 + u_p) &= f(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial u} u_p + \frac{\partial f}{\partial v} v_p + D_1 \nabla^2 (u_0 + u_p) \\ \frac{\partial}{\partial t}(v_0 + v_p) &= g(u_0, v_0) + \frac{\partial g}{\partial u} u_p + \frac{\partial g}{\partial v} v_p + D_2 \nabla^2 (v_0 + v_p) \end{aligned}$$

Como  $\partial u_0 / \partial t = \partial v_0 / \partial t = 0$ ,  $f(u_0, v_0) = g(u_0, v_0) = 0$ ,  $\nabla^2 u_0 = 0$  e  $\nabla^2 v_0 = 0$  as equações de evolução do estado perturbado tomam a forma:

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta u &= \frac{\partial f}{\partial u} e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial v} e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta v - D_1 (\kappa_x^2 + \kappa_y^2) e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta u \\ \lambda e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta v &= \frac{\partial g}{\partial u} e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta u + \frac{\partial g}{\partial v} e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta v - D_2 (\kappa_x^2 + \kappa_y^2) e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta v \end{aligned}$$

Dividindo ambas as equações por  $e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  e notando que  $\kappa_x^2 + \kappa_y^2 = \kappa^2$  é o *módulo* do vetor de onda da perturbação, obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda \Delta u &= \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v - D_1 \kappa^2 \Delta u \\ \lambda \Delta v &= \frac{\partial g}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial g}{\partial v} \Delta v - D_2 \kappa^2 \Delta v \end{aligned}$$

Reescrevendo o sistema em forma matricial temos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} - D_1 \kappa^2 & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} - D_2 \kappa^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

A eq. (9.8) caracteriza um problema de auto-valores e auto-vetores que pode ser reescrito como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} - D_1 \kappa^2 - \lambda & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} - D_2 \kappa^2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Para que  $\Delta u$  e  $\Delta v$  admitam solução diferente da trivial é necessário que:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} - D_1 \kappa^2 - \lambda & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} - D_2 \kappa^2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Impondo esta condição chegamos à seguinte equação característica:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial u} - D_1 \kappa^2 - \lambda \right) \left( \frac{\partial g}{\partial v} - D_2 \kappa^2 - \lambda \right) - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

Desenvolvendo os termos da equação obtemos:

$$\lambda^2 + \left( \kappa^2 (D_1 + D_2) - \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) \right) \lambda + h(\kappa^2) = 0$$

onde:

$$h(\kappa^2) = \kappa^4 D_1 D_2 - \kappa^2 \left( D_1 \frac{\partial g}{\partial v} + D_2 \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u}$$

Um caso de instabilidade ocorre se a soma das raízes da equação característica for positiva, isto é, se:

$$\kappa^2 (D_1 + D_2) - \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) < 0$$

Esta condição não é satisfeita pois  $\kappa^2 (D_1 + D_2)$  e  $-(\partial f / \partial u + \partial g / \partial v) > 0$ , conforme eqs. (9.6). A instabilidade de um modo só pode ocorrer portanto se o produto das raízes,  $h(\kappa^2)$ , isto é, se:

$$\kappa^4 D_1 D_2 - \kappa^2 \left( D_1 \frac{\partial g}{\partial v} + D_2 \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \det(L) < 0$$

Como  $\kappa^4 D_1 D_2$  e, pela eq. (9.7)  $\det(L) > 0$  é necessário porém não suficiente que:

$$D_1 \frac{\partial g}{\partial v} + D_2 \frac{\partial f}{\partial u} > 0$$

ou:

$$\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{D_2}{D_1} \frac{\partial f}{\partial u} > 0$$

No entanto, de acordo com a eq. (9.7)  $\partial f / \partial u + \partial g / \partial v < 0$ . O diagrama da fig. (9.2) mostra que no ponto  $u_0, v_0$   $\partial f / \partial u > 0$  e que  $\partial g / \partial v < 0$ . Para que a relação acima seja satisfeita é necessário portanto que  $D_2 / D_1 > 1$ . Tal condição é necessária mas não suficiente para a

instabilidade de Turing. Para que a mesma ocorra é necessário também que o valor mínimo de  $h(\kappa^2) < 0$ . No ponto de mínimo:

$$\frac{\partial h}{\partial \kappa^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad 2\kappa^2 D_1 D_2 - \left( D_1 \frac{\partial g}{\partial v} + D_2 \frac{\partial f}{\partial u} \right) = 0$$

o valor de  $\kappa^2$  que minimiza a função  $h(\kappa^2)$  é dado por:

$$\kappa_{min}^2 = \frac{1}{2D_2} \left( \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{D_2}{D_1} \frac{\partial f}{\partial u} \right)$$

O valor mínimo de  $h(\kappa^2)$  é então:

$$h_{min} = \frac{D_1 D_2}{4D_2^2} \left( \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{D_2}{D_1} \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 - \frac{1}{2D_2} \left( \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{D_2}{D_1} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \left( D_1 \frac{\partial g}{\partial v} + D_2 \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \det(L)$$

ou, remanejando os termos:

$$h_{min} = -\frac{1}{4d} \left( \frac{\partial g}{\partial v} + d \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \det(L)$$

onde  $d = D_2/D_1$ . A condição de  $h_{min} < 0$  é portanto:

$$\det(L) < \frac{1}{4d} \left( \frac{\partial g}{\partial v} + d \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2$$

No ponto de bifurcação:

$$4d_c \det(L) = \left( \frac{\partial g}{\partial v} + d_c \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 \quad (9.9)$$

onde  $d_c$  é o valor crítico da relação  $D_2/D_1$ . Desenvolvendo os termos de  $\det(L)$  encontramos:

$$-4d_c \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} \right) + \left( \frac{\partial g}{\partial v} + d_c \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 = 0$$

ou ainda:

$$\frac{\partial f}{\partial u} d_c^2 + 2 \left( 2 \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} \right) + \left( \frac{\partial g}{\partial v} \right)^2 = 0$$

O valor crítico da relação entre os coeficientes de difusão,  $d_c$ , é dado pela raiz positiva da equação acima, enquanto que o número de onda crítico é igual a:

$$\kappa_c^2 = \frac{1}{2D_2} \left( \frac{\partial g}{\partial v} + d_c \frac{\partial f}{\partial u} \right)$$

Da eq. (9.9) obtemos:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial v} + d_c \frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 = 2(d_c \det(L))^{1/2}$$

O número de onda crítico pode portanto ser expresso como:

$$\kappa_c^2 = \frac{2(d_c \det(L))^{1/2}}{2D_2} \longrightarrow \kappa_c^2 = \left(\frac{\det(L)}{D_1 D_2}\right)^{1/2}$$

Deve-se notar que o comprimento de onda crítico só depende da cinética do sistema, através do  $\det(L)$  e dos coeficientes de difusão. Os limites da faixa de números de onda instáveis,  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  são dados pelas raízes da equação:

$$h(\kappa^2) = \kappa^4 D_1 D_2 - \kappa^2 \left(D_1 \frac{\partial g}{\partial v} + D_2 \frac{\partial f}{\partial u}\right) + \det(L) = 0$$

ou ainda:

$$D_1 d \kappa^4 - \kappa^2 \left(\frac{\partial g}{\partial v} + d \frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\det(L)}{D_1} = 0$$

Ou seja a faixa de números de onda instáveis está compreendida entre  $\kappa_1 \leq \kappa \leq \kappa_2$ , onde:

$$\kappa_{1,2} = \frac{1}{2d} \left[ \left(\frac{\partial g}{\partial v} + d \frac{\partial f}{\partial u}\right) \pm \left( \left(\frac{\partial g}{\partial v} + d \frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - 4d \frac{\det(L)}{D_1} \right)^{1/2} \right]$$

O estudo apresentado acima consistiu de uma *análise de estabilidade linear* do estado homogêneo no espaço  $(u_0, v_0)$ , em que determinamos os seguintes parâmetros:

- O ponto de bifurcação, isto é, o ponto do espaço de parâmetros além do qual pequenas perturbações periódicas deixam de ser amortecidas e passam a crescer exponencialmente no tempo;
- Em segundo lugar vimos que a perturbação instável tem forma senoidal e determinamos o comprimento de onda *crítico* da mais instável.

Em resumo as condições para a formação de uma estrutura de Turing são:

$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} < 0$	$\text{tr}(L) < 0$
$\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} > 0$	$\det(L) > 0$
$\frac{\partial g}{\partial v} + d \frac{\partial f}{\partial u} > 0$	Condição necessária para que o produto das raízes seja negativo
$\left(\frac{\partial g}{\partial v} + d \frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - 4d \det(L) > 0$	Mínimo do produto das raízes negativo

Esta análise determina uma condição *suficiente* para a instabilidade, pois pequenas perturbações estão sempre presentes em qualquer sistema físico. Cabe ressaltar que esta análise identifica o comprimento de onda crítico mas não sua orientação espacial. De fato, a análise de estabilidade linear determina uma infinidade de modos pois todas as orientações são igualmente prováveis a priori. Várias perguntas podem ser feitas neste ponto: O que ocorre além do ponto de bifurcação? O crescimento do modo instável se satura? O comportamento do sistema além do ponto de bifurcação é de fato caracterizado pelos modos críticos? Qual a orientação da estrutura espacial que se forma além do ponto de bifurcação? A estrutura pode conter mais de um modo em cada ponto do espaço?

Nem todas as questões acima podem ser respondidas de forma geral. No entanto a experiência mostra que o comportamento de uma importante classe de sistemas se caracteriza pelos modos mais instáveis e as estruturas de Turing se encontram nesta classe. Tais sistemas denominam-se *fracamente não-lineares*. Outros exemplos de sistemas fracamente não-lineares são painéis metálicos que *flambam* sob efeito de carregamento, padrões morfológicos encontrados em sistemas biológicos, em ciência de materiais, etc. Para estes sistemas faz sentido que se procure determinar como evolui no tempo e como se satura a *amplitude* dos modos críticos. Este estudo é objeto de intensa atividade de pesquisa na física contemporânea. Algumas das questões acima formuladas encontram resposta neste estudo, que está além dos objetivos deste trabalho.



# Apêndice A

## Principais Grupos Adimensionais

$$Re = \frac{Ud}{\nu}$$

**Número de Reynolds:** Pode ser interpretado de várias formas: *a)* Como a relação entre forças de inércia e forças viscosas que agem sobre uma partícula de fluido em movimento; *b)* Quadrado da relação entre a dimensão característica de um corpo e a espessura da camada limite hidrodinâmica que se desenvolve em torno do mesmo; *c)* Quadrado da relação entre a velocidade do escoamento e a velocidade de espalhamento da vorticidade; *d)* Relação entre quantidades de movimento transferidas por convecção e por difusão.

$$Pe = \frac{Ud}{\alpha}$$

**Número de Péclet:** É utilizado em problemas de mecânica dos fluidos envolvendo transferência de calor e semelhante ao número de Reynolds. Pode ser interpretado como o quadrado da relação entre a dimensão característica de um corpo e a espessura da camada limite térmica, ou como relação entre calor transferido por convecção e calor transferido por condução.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

**Número de Prandtl:** Relação entre a espessura das camadas limite hidrodinâmica e térmica.  $\nu$  e  $\alpha$  são, respectivamente, a viscosidade cinemática e a difusividade térmica do fluido. Em geral  $Pr = \mathcal{O}(1)$  em gases,  $Pr > 1$  em líquidos,  $Pr \gg 1$  em sólidos e  $Pr \ll 1$  em metais líquidos como o mercúrio.

$$Sc = \frac{\nu}{D}$$

**Número de Schmidt:** Relação entre a espessura das camadas limite hidrodinâmica e de difusão de massa.  $\nu$  e  $D$  são, respectivamente, a viscosidade cinemática e a difusividade da espécie química que se difunde no fluido.

$$M = \frac{U}{a}$$

**Número de Mach:** Utilizado em aerodinâmica de alta velocidade; é a relação entre a velocidade do escoamento e a velocidade do som.

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gd}}$$

**Número de Froude:** Utilizado em problemas de mecânica de fluidos com superfície livre; é a relação entre velocidade do escoamento e a velocidade de propagação de uma pequena perturbação na superfície livre.

$$Br = \frac{\mu U}{q_0 H}$$

**Número de Brinkman:** Mede a importância do aquecimento devido aos efeitos viscosos, com relação ao aquecimento devido apenas à convecção.  $U$  é a velocidade do escoamento,  $q_0$ , o fluxo de calor de convecção e  $H$ , a dimensão característica do problema.

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T d^3}{\nu^2}$$

**Número de Grashof:** Utilizado em problemas de convecção livre.  $\beta$  é o coeficiente de dilatação térmica do fluido  $\beta = (\partial \rho / \partial T)_p$ .  $\Delta T$  é a diferença de temperaturas vertical imposta ao fluido, com a temperatura inferior sendo mais alta do que a superior.

$$Ra = \frac{\beta g \Delta T d^3}{\nu \alpha}$$

**Número de Rayleigh:** Semelhante ao número de Grashof. Define a estabilidade de massas submetidas a um gradiente de temperaturas. Pode ser interpretado como taxa de fornecimento de energia de energia potencial ao fluido cuja densidade é maior nas camadas superiores, e a taxa de dissipação de energia por efeitos viscosos.

$$Ma = \frac{\Delta T d \sigma / dT d^3}{\nu \alpha}$$

**Número de Marangoni:** Utilizado em problemas de convecção livre com efeitos de tensão superficial.  $\sigma$  é a tensão superficial do fluido.

$$Bi = \frac{hd}{\kappa}$$

**Número de Biot:** Utilizado em problemas de condução de calor em sólidos com convecção na superfície do sólido. Mede a relação entre a resistência térmica de condução de calor dentro do corpo e a resistência térmica de convecção.  $\kappa$  é a condutividade térmica do sólido.

$$Nu = \frac{hd}{\kappa}$$

**Número de Nusselt:** Utilizado em problemas de transferência de calor por convecção: representa a relação entre as taxas de transferência de calor por convecção e a que se obteria por condução com um gradiente de temperatura dado por  $\Delta T/d$ .  $\kappa$  é a condutividade térmica do fluido.

$$Sh = \frac{h_m d}{D}$$

**Número de Sherwood:** Utilizado em problemas de transferência de massa. É semelhante ao número de Nusselt.  $h_m$  é o coeficiente de transferência de massa por convecção e  $D$ , o coeficiente de difusão da espécie química.

$$St = \frac{fd}{U}$$

**Número de Strouhal:** é importante em problemas de aerodinâmica envolvendo vibrações ou formação periódica de vórtices.

$$Ri = \frac{-g d \rho / dz}{\rho (dU/dz)^2}$$

**Número de Richardson:** Utilizado em problemas de estabilidade em meteorologia e oceanografia. Números de Richardson negativos indicam a existência de massas de fluido mais densas nas camadas superiores, que tendem a instabilizar o meio.

$$K = \frac{d}{\lambda}$$

**Número de Knudsen:** Utilizado em escoamentos de gases rarefeitos.  $d$  é a dimensão característica do problema e  $\lambda$ , o livre caminho médio das moléculas do gás.

$$E = \frac{U^2}{C_p(\Delta T)}$$

**Número de Eckert:** Este número relaciona aquecimento devido a compressão, com aquecimento por transferência de calor. Pode também ser utilizado em problemas envolvendo o escoamento de fluidos incompressíveis.

$$Bo = \frac{\rho g d^2}{\sigma}$$

**Número de Bond:** Utilizado em problemas de convecção livre com interface entre dois fluidos.  $\sigma$  é a tensão superficial do fluido.

$$Ca = \frac{U^2}{E/\rho}$$

**Número de Cauchy:** É semelhante ao número de Mach.  $E$  é o módulo de elasticidade do meio.

$$f = \frac{\Delta H/(U^2/2g)}{L/d}$$

**Coefficiente de perda de carga em tubos:** Utilizado no cálculo de tubulações.  $\Delta H$  é a perda de carga e  $L$ , o comprimento da tubulação.

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$$

**Coefficiente de sustentação:** Utilizado em aerodinâmica;  $L$  é a força de sustentação de um aerofólio e  $A$ , sua superfície em planta.

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$$

**Coefficiente de arraste:** Utilizado em aerodinâmica;  $D$  é a força de resistência ao avanço de um corpo que se move com velocidade  $U$  em um fluido e  $A$ , sua área frontal.

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

**Coefficiente de pressão:** Utilizado em aerodinâmica;  $p_\infty$  é a pressão longe do corpo.

$$\sigma = \frac{p - p_v}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

**Coefficiente de cavitação:** Utilizado na engenharia de máquinas hidráulicas;  $p_v$  é a pressão parcial de vapor do fluido.





# Apêndice B

## Revisão de Conceitos do Cálculo Vetorial

### B.1 Introdução

Neste apêndice revisaremos o conceito dos operadores *gradiente*, *divergente* e *rotacional*, que são de fundamental importância para que possamos expressar os princípios de conservação da massa, quantidade de movimento e energia, aplicados a meios contínuos. Revisaremos também duas importantes proposições do cálculo vetorial, que são os teoremas de Gauss e de Stokes.

Apresentaremos a noção de *notação de índices* ou de *tensores cartesianos*. Utilizaremos esta notação ao longo do curso, sem no entanto abandonarmos a notação vetorial, com a qual os alunos de cursos de engenharia tem familiaridade.

O material apresentado nessas notas se apoia essencialmente na notação vetorial. Entretanto, a notação de índices apresenta vantagens nítidas em certos casos, o que, no nosso entender, justifica a utilização progressiva da mesma, paralelamente à notação vetorial. A notação de índices permite que as equações da mecânica dos fluidos se expressem de forma muito compacta. Algumas propriedades vetoriais podem ser identificadas mais facilmente com o uso desta notação, do que com o uso da notação vetorial. Em alguns problemas da mecânica dos fluidos como por exemplo no da relação entre efeitos viscosos e variação da energia interna de uma partícula de fluido o uso da notação de índices permite que se obtenha facilmente a relação entre os dois efeitos. O mesmo trabalho é extremamente penoso quando se utiliza a notação vetorial.

Concluindo o apêndice apresentaremos algumas propriedades vetoriais utilizadas na formulação da mecânica dos fluidos.

## B.2 Operador gradiente

O *gradiente* de uma função escalar é definido, em coordenadas cartesianas, como o vetor cujas componentes são as derivadas parciais do escalar:

$$\mathbf{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

ou

$$\mathbf{grad} f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{e}_i,$$

onde  $\partial f / \partial x_i$  é a componente do gradiente na direção  $x_i$ .

O gradiente de um escalar é um vetor orientado na direção em que a variação da função  $f$  é máxima. Cabe notar que a variação da função na direção perpendicular ao gradiente é nula. De fato, o valor da função em um ponto  $\mathbf{X}^1 = x_1^1 \mathbf{e}_1 + x_2^1 \mathbf{e}_2 + x_3^1 \mathbf{e}_3$ , localizado na vizinhança de um ponto  $\mathbf{X}^0 = x_1^0 \mathbf{e}_1 + x_2^0 \mathbf{e}_2 + x_3^0 \mathbf{e}_3$ , é dado aproximadamente por:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}^1) &= f(\mathbf{X}^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2^1 - x_2^0) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_3^1 - x_3^0) \\ &= f(\mathbf{X}^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \Delta x_3 \\ &= f(\mathbf{X}^0) + \mathbf{grad} f \cdot \Delta \mathbf{X} \\ &= f(\mathbf{X}^0) + |\mathbf{grad} f| |\Delta \mathbf{X}| \cos \theta \end{aligned}$$

o que mostra que a variação da função é máxima na direção do gradiente, quando  $\cos \theta = 1$ .

Em coordenadas cilíndricas, o operador gradiente toma a forma:

$$\mathbf{grad} = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Podemos também definir o gradiente de um vetor, como por exemplo, a velocidade de uma partícula de fluido. Sendo  $\mathbf{v}$  o vetor velocidade, de coordenadas  $(v_x, v_y \text{ e } v_z)$ , o gradiente de velocidade terá nove componentes, que podemos agrupar em uma matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

A forma geral de um elemento do gradiente de velocidades é dada por  $\partial v_i / \partial x_j$  onde:

$v_i \longrightarrow$  componente da velocidade na direção  $i$   
 $x_j \longrightarrow$  coordenada na direção  $j$ .

A ação do operador gradiente sobre uma função  $f$  resulta em uma grandeza de *ordem* mais elevada, como esquematizado abaixo:

$f$	<b>grad <math>f</math></b>
escalar (tensor de ordem zero)	vetor (tensor de ordem um)
vetor (tensor de ordem um)	matriz (tensor de ordem dois)

Estas propriedades se refletem no número de índices da variável:

escalar:	$T$
vetor:	$v_i, \partial T / \partial x_i$
tensor de segunda ordem:	$\partial v_i / \partial x_j$

## B.3 Operador divergente

O *divergente* de um vetor é dado, em um sistema de coordenadas cartesianas, por:

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k})$$

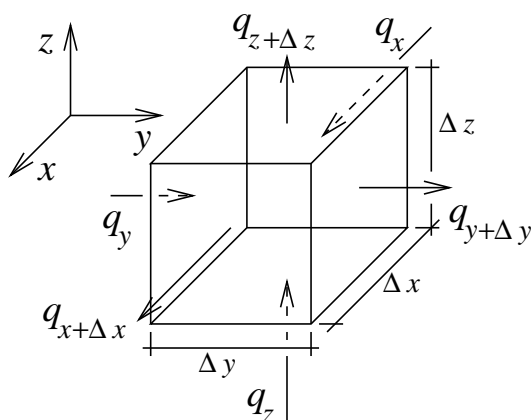


Figura B.1: Fluxo de calor através das paredes de um elemento de fluido.

O divergente reduz a ordem de um tensor. Assim, o divergente de um vetor é um escalar e o divergente de um tensor de segunda ordem é um tensor de primeira ordem, ou um vetor.

Procuramos dar uma interpretação ao divergente de um campo vetorial. Considere-mos um partícula submetida a um fluxo de calor, conforme mostrado na Fig. (B.1):

$$\mathbf{q}(x, y, z) = q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k}.$$

Fazemos um balanço da quantidade de calor que é transferida para fora do elemento, menos a que é transferida para dentro.

Fazendo o balanço do fluxo de calor temos que a quantidade de calor acumulada no elemento por unidade de tempo, devido

à componente do fluxo na direção  $x$  é dada por:

$$\left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z - q_x \Delta y \Delta z = \frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Nas direções  $y$  e  $z$  temos, respectivamente:

$$\left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z - q_y \Delta x \Delta z = \frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\left( q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y - q_z \Delta x \Delta y = \frac{\partial q_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Somando-se as três contribuições obtém-se a quantidade de calor acumulada no elemento considerado, por unidade de tempo:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial q_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Dividindo-se a expressão acima por  $\Delta x \Delta y \Delta z$  obtemos:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \text{div } \mathbf{q}.$$

Unidades de  $\text{div } \mathbf{q}$ :

$$[\text{div } \mathbf{q}] = \frac{\frac{\text{calor/tempo}}{\text{área}}}{\text{comprimento}} = \frac{\text{calor/tempo}}{\text{volume}}$$

o que mostra que o divergente do fluxo de calor representa a variação da energia interna por unidade de tempo e de volume, no elemento infinitesimal de volume considerado. Cabe notar que, ao fazermos o balanço, calculamos a quantidade de calor que *sai* do elemento, menos a que *entra*. A taxa de acumulação de calor é portanto, dada pelo *negativo* do divergente do fluxo de calor.

## B.4 Teorema de Gauss

O teorema de Gauss generaliza o resultado acima, para o caso de um volume finito. Consideremos um volume  $V$ , fixo no espaço e simplesmente conexo, conforme mostrado na Fig. (B.2). O volume é limitado externamente por uma superfície  $S$ . Seja  $\mathbf{n}$  o vetor de comprimento unitário perpendicular à superfície e orientado para fora e  $\mathbf{q}$ , um campo vetorial definido no espaço onde se encontra o volume considerado. O teorema de Gauss estabelece que:

$$\int_V \text{div } \mathbf{q} dV = \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA$$

Tendo em vista o teorema de Gauss podemos definir o divergente de um vetor  $\mathbf{q}$  de forma independente do tipo do sistema de coordenadas utilizado:

$$\text{div } \mathbf{q} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA$$

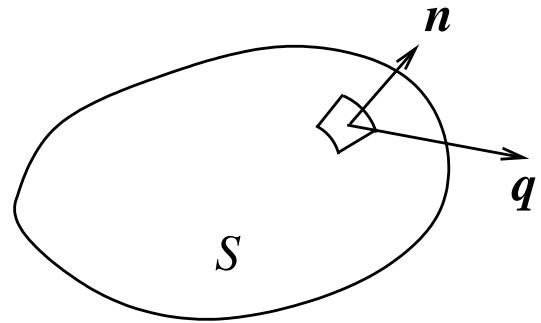


Figura B.2: Volume de controle ao qual se aplica o teorema de Gauss.  $\mathbf{n}$  é o vetor de comprimento unitário perpendicular à superfície no ponto considerado.

## B.5 Operador rotacional

O rotacional de um vetor é dado, no caso de um sistema de coordenadas cartesianas, por:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z$$

Consideremos a componente na direção  $\mathbf{k}$  do rotacional,  $\partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y$ . O esquema da Fig. (B.3) mostra que a tendência à rotação de uma partícula de fluido, devido à variação de  $v_y$  na direção  $x$  é compensado pela variação de  $v_x$  na direção  $y$ .

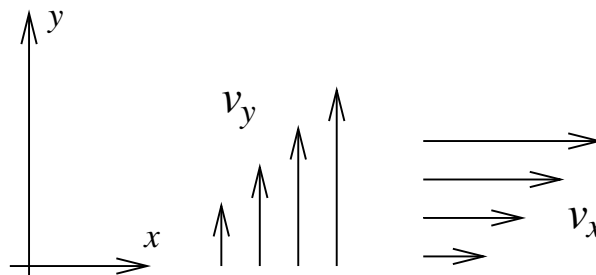


Figura B.3: Variação da componente de velocidade  $v_y$  na direção  $x$  e da componente de velocidade  $v_x$  na direção  $y$ . No caso,  $\partial v_y / \partial x > 0$  e  $\partial v_x / \partial y > 0$ . O rotacional deste campo de velocidades bidimensional é dado por  $(\partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y) \mathbf{k}$ .

## B.6 Teorema de Stokes

O teorema de Stokes estabelece que o fluxo do rotacional de um vetor  $\mathbf{v}$  através de uma superfície  $S$  é igual à integral de linha da projeção da velocidade sobre a tangente à curva  $\Gamma$  que limita a superfície considerada. Esta propriedade se expressa por:

$$\int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \oint_\Gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

## B.7 Notação de índices

Foi visto que as componentes de uma grandeza vetorial podem ser representadas através de um símbolo contendo um único índice. Por exemplo, a  $i$ -ésima componente de um vetor  $\mathbf{v}$

pode ser representada por  $v_i$ . No caso de uma matriz, ou de um tensor cartesiano de segunda ordem, são necessários *dois* índices para representarmos o elemento geral do mesmo. Assim, o elemento geral de uma matriz  $A$  se representa por  $a_{ij}$  e o elemento geral do gradiente de um vetor, por  $\partial v_i / \partial x_j$ . A estes índices se dá o nome de índices *livres*.

Constata-se que, na mecânica dos meios contínuos, que freqüentemente os termos das equações contém somatórios feitos sobre os valores de índices que aparecem duas vezes no termo. Se considerarmos por exemplo o caso do divergente de um vetor, temos:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial q_j}{\partial x_j}$$

Outro exemplo é dado pela componente da aceleração de uma partícula de fluido na direção  $i$ :

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} &= \frac{d}{dt} v_i(t, x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{dv_i}{dt} &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Observando que  $dx/dt = v_x$ ,  $dy/dt = v_y$  e que  $dz/dt = v_z$  pode-se re-escrever a última expressão na forma:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_i}{\partial z} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Nos dois exemplos acima vê-se que quando algum termo contém um somatório, o índice sobre o qual se faz a soma aparece duas vezes. A informação de que se deve fazer uma soma já está contida portanto na existência do índice repetido e pode-se portanto dispensar o sinal do somatório. Adota-se então na mecânica de meios contínuos a notação de *índices*, ou dos *tensores cartesianos*, ou de *Einstein*, que consiste em suprimir o sinal do somatório. A existência de índices repetidos indica por si, que se deve efetuar o somatório sobre todos os valores daquele índice. Assim, o divergente de um vetor e a componente da aceleração de uma partícula na direção  $i$  se escrevem, nesta notação:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{q} &= \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \\ \frac{dv_i}{dt} &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

O índice repetido denomina-se índice *mudo*. Assim, na última expressão acima,  $j$  é um índice mudo e  $i$  é um índice livre. A denominação de *mudo* vem da variável muda das integrais, onde:

$$\int_0^Z x \, dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^Z = \int_0^Z y \, dy = \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^Z = \frac{z^2}{2}.$$

Neste caso  $x$  é a variável muda podendo se substituída por qualquer letra que o resultado será sempre  $z^2/2$ .

A ordem do tensor é dada pelo número de índices livres. De fato, observa-se que não há índices livres na expressão do divergente de um vetor, que é efetivamente um escalar e que há um índice livre na expressão da aceleração de uma partícula, que é um vetor.

Dois operadores são comumente utilizados quando se emprega a notação de índices: os operadores  $\delta_{ij}$  e  $\epsilon_{ijk}$ . O operador  $\delta_{ij}$  é definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

O operador  $\delta_{ij}$  representa de fato o elemento geral da matriz identidade,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que multiplicando um vetor  $\mathbf{a}$  dá como resultado o próprio vetor:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

A última expressão pode ser re-escrita na seguinte forma, utilizando-se a notação de índices:

$$\sum_{j=1}^3 \delta_{ij} a_j = a_i,$$

ou simplesmente:

$$\delta_{ij} a_j = a_i.$$

Como o resultado da multiplicação de  $a_j$  por  $\delta_{ij}$  é  $a_i$ , o operador  $\delta_{ij}$  é também denominado como *operador de troca de índices*. De fato, as componentes  $b_i$  de um vetor qualquer podem ser representadas por  $\delta_{ij} b_j$ .

O operador  $\epsilon_{ijk}$  é definido da seguinte forma:  $\epsilon_{ijk} = 1$  se o valor dos índices  $i, j$  e  $k$  forem, respectivamente, 1, 2, 3, ou 3, 1, 2, ou 2, 3, 1 (ordem *cíclica*);  $\epsilon_{ijk} = -1$  se o valor dos índices forem 3, 2, 1, ou 1, 3, 2, ou 2, 1, 3 (ordem *anti-cíclica*);  $\epsilon_{ijk} = 0$  se dois ou mais índices tiverem o mesmo valor. Este operador é usado para representar o produto vetorial e o rotacional de um vetor, como mostrado a seguir.

Vejamos inicialmente a representação do produto vetorial, utilizando o operador  $\epsilon_{ijk}$ . Consideremos a expressão  $\epsilon_{ijk} a_j b_k$ , onde  $a_j$  e  $b_k$  são as componentes dos vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , respectivamente.  $\epsilon_{ijk} a_j b_k$  representa as componentes de um *vetor*, pois tem apenas um



índice livre,  $i$ . Os índices  $j$  e  $k$  são repetidos e indicam que se deve somar sobre todos os valores dos mesmos, isto é:

$$\epsilon_{ijk}a_jb_k = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk}a_jb_k.$$

Para  $i = 1$  temos:

$$\begin{aligned}\epsilon_{123} &= 1 & \epsilon_{132} &= -1 \\ \epsilon_{111} &= \epsilon_{112} = \epsilon_{113} = \epsilon_{121} = \epsilon_{122} = \epsilon_{131} = \epsilon_{133} = 0 \\ \epsilon_{1jk}a_jb_k &= a_2b_3 - a_3b_2.\end{aligned}$$

Para  $i = 2$  temos:

$$\begin{aligned}\epsilon_{231} &= 1 & \epsilon_{213} &= -1 \\ \epsilon_{211} &= \epsilon_{212} = \epsilon_{221} = \epsilon_{222} = \epsilon_{223} = \epsilon_{232} = \epsilon_{233} = 0 \\ \epsilon_{2jk}a_jb_k &= a_3b_1 - a_1b_3.\end{aligned}$$

Para  $i = 3$  temos:

$$\begin{aligned}\epsilon_{312} &= 1 & \epsilon_{321} &= -1 \\ \epsilon_{311} &= \epsilon_{313} = \epsilon_{322} = \epsilon_{323} = \epsilon_{331} = \epsilon_{332} = \epsilon_{333} = 0 \\ \epsilon_{3jk}a_jb_k &= a_1b_2 - a_2b_1.\end{aligned}$$

As expressões  $a_2b_3 - a_3b_2$ ,  $a_3b_1 - a_1b_3$  e  $a_1b_2 - a_2b_1$  são, respectivamente, as componentes do produto vetorial  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  nas direções  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ .

Vemos agora a representação do rotacional de um campo vetorial, utilizando o operador  $\epsilon_{ijk}$ . Consideremos a expressão:

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

e mostramos a seguir que a mesma representa de fato as componentes do rotacional de um campo vetorial  $\mathbf{v}$ :

Para  $i = 1$   $\epsilon_{123} = 1$ ,  $\epsilon_{132} = -1$  e todos os demais valores de  $\epsilon_{1jk}$  são nulos, conforme o exemplo anterior. Temos então:

$$\epsilon_{1jk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}.$$

Para  $i = 2$   $\epsilon_{231} = 1$ ,  $\epsilon_{213} = -1$  e todos os demais valores de  $\epsilon_{2jk}$  são nulos. Temos então:

$$\epsilon_{2jk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}.$$

Analogamente, para  $i = 3$   $\epsilon_{312} = 1$ ,  $\epsilon_{321} = -1$  sendo os demais valores de  $\epsilon_{1jk}$  nulos.

$$\epsilon_{3jk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Os termos acima são as componentes de  $\mathbf{rot} \mathbf{v}$ .

## B.8 Outras propriedades vetoriais

Demonstramos a seguir duas outras propriedades vetoriais:

1. Se  $\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$ , onde  $\vec{\omega}$  é constante, então  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{v}$ .
2.  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = \mathbf{grad} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}$ .

Para mostrarmos a validade das duas propriedades acima necessitamos da seguinte identidade que é apresentada sem demonstração:

$$\epsilon_{kij} \epsilon_{kpq} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}.$$

A primeira propriedade relaciona o rotacional do campo com a velocidade angular quando esta é constante, isto é, independente da posição no espaço.

Temos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{v} &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \\ \mathbf{v} &= \vec{\omega} \times \mathbf{r} \longrightarrow v_k = \epsilon_{kpq} \omega_p r_q \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{v} &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon_{kpq} \omega_p r_q = \epsilon_{ijk} \epsilon_{kpq} \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_p r_q) = (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_p r_q) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ip} \omega_p \delta_{jq} r_q - \delta_{jp} \omega_p \delta_{iq} r_q) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_i r_j - \omega_j r_i) = \omega_i \frac{\partial r_j}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Mas, sendo  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ , temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_j}{\partial x_j} &= \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dy} + \frac{dz}{dz} = 3 \\ \frac{\partial r_i}{\partial x_j} &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \omega_i \frac{\partial r_j}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial r_i}{\partial x_j} = 3\omega_i - \omega_j \delta_{ij} = 3\omega_i - \omega_i = 2\omega_i$$

e:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{v}$$

A demonstração da propriedade  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = \mathbf{grad} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}$  se faz de forma semelhante, utilizando-se a identidade  $\epsilon_{kij} \epsilon_{kpq} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$ .

Reescrevemos inicialmente, cada um dos termos da igualdade, usando a notação de índices:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} &\longrightarrow v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ \mathbf{grad} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} &\longrightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j v_j) = \frac{1}{2} \left( v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\ -\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} &\longrightarrow -\epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{kpq} \frac{\partial v_q}{\partial x_p} \end{aligned}$$

O desenvolvimento dos termos do membro direito da igualdade demonstra a propriedade:

$$\begin{aligned} v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{kpq} \frac{\partial v_q}{\partial x_p} &= v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \epsilon_{kij} \epsilon_{kpq} v_j \frac{\partial v_q}{\partial x_p} = v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) v_j \frac{\partial v_q}{\partial x_p} \\ v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \left( v_j \delta_{ip} \delta_{jq} \frac{\partial v_q}{\partial x_p} - v_j \delta_{iq} \delta_{jp} \frac{\partial v_q}{\partial x_p} \right) &= v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \left( v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

## B.9 Problemas

1. Mostrar que se o campo de velocidades de um fluido  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$  puder ser escrito na forma de um gradiente, isto é, se:

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

então  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

2. Mostrar que  $\text{div}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) = 0$ , onde  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$  e  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$  são funções de  $x$ ,  $y$  e  $z$ .
3. Mostrar que:

$$\text{div}(f \mathbf{grad} g - g \mathbf{grad} f) = f \nabla^2 g - g \nabla^2 f$$

onde  $f$  e  $g$  são funções escalares de  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

4. Mostrar que:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) = \mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$$

ou:

$$\nabla \times (\nabla \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$$

onde  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$ .

5. Mostrar que:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$$

onde  $\mathbf{v}$  é uma função vetorial de  $x, y$  e  $z$  e  $\rho$ , uma função escalar das mesmas variáveis.



# Apêndice C

## Revisão de Conceitos da Termodinâmica Clássica

Nesta apêndice revisaremos alguns conceitos da termodinâmica clássica como as definições de entalpia e dos calores específicos de um gás a volume e a pressão constantes. Revisaremos também uma das equações mais importantes da termodinâmica e a re-escreveremos em forma mais conveniente para que possa ser aplicada à mecânica dos fluidos.

O estado de um gás perfeito é descrito pela equação:

$$pv = RT$$

onde  $p$  é a pressão absoluta,  $v$ , o volume específico,  $R$ , a constante do gás e  $T$ , a temperatura absoluta. A constante  $R$  é dada por  $R = \mathcal{R}/\mathcal{M}$ , onde  $\mathcal{R}$  é a constante universal dos gases perfeitos e  $\mathcal{M}$ , a massa molecular do gás considerado.

É comum escrevermos a equação dos gases perfeitos utilizando a densidade  $\rho = 1/v$  como variável. Neste caso a equação toma a forma:

$$\frac{p}{\rho} = RT.$$

Duas outras variáveis utilizadas na termodinâmica são a *energia interna*  $E$  e a *entalpia*  $H$ . Estas variáveis são do tipo *extensivas*, isto é, proporcionais à massa do sistema considerado e podem ser tornadas *intensivas* ou *específicas*, isto é, independentes da massa, dividindo-se o valor das mesmas pela massa do sistema. Denota-se a energia e a entalpia específicas, respectivamente, por  $e$  e  $h$ . No caso de substâncias simples, isto é, substâncias simples, que têm apenas duas variáveis independentes (como por exemplo a temperatura e a pressão), costuma-se representar a energia interna das mesmas por  $u$ .

A energia interna de um gás perfeito só depende da temperatura, isto é,  $u = u(T)$ . neste caso a entalpia é dada por:

$$h = u + pv = u + RT$$

o que mostra que a entalpia só depende igualmente da temperatura.

Os calores específicos a volume constante e a pressão constante são definidos por:

$$C_v = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_v$$

$$C_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

O calor específico a volume constante de um gás perfeito só depende da temperatura. Mostramos a seguir, que neste caso, o calor específico a pressão constante também só depende da temperatura:

$$C_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{\partial}{\partial T}(u + pv) \right)_p = \left( \frac{\partial}{\partial T}(u + RT) \right)_p = \frac{de}{dT} + R = C_v + R$$

o que mostra também que  $C_p - C_v = R$ .

No caso de substâncias simples, a seguinte relação é válida:

$$T ds = de + p dv \longrightarrow ds = \frac{de}{T} + \frac{p}{T} dv$$

Levando em consideração que, no caso de um gás perfeito,  $de = C_v dT$  e que  $p/T = R/v$ , re-escrevemos a última equação na forma:

$$ds = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}.$$

Esta equação pode ser integrada, dando como resultado:

$$s_2 - s_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1}.$$

No caso de processos isoentrópicos  $s_2 = s_1$ . Lembrando que  $C_p - C_v = R$  e que  $C_p/C_v = \gamma$ , temos:

$$C_v \ln \frac{T_2}{T_1} = -R \ln \frac{v_2}{v_1}$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = -\frac{R}{C_v} \ln \frac{v_2}{v_1} = -\frac{C_p - C_v}{C_v} \ln \frac{v_2}{v_1} = -(\gamma - 1) \ln \frac{v_2}{v_1}.$$

Donde:

$$T v^{\gamma-1} = C^{te}.$$

Considerando que  $T = pv/R$ , re-escrevemos a última equação:

$$\frac{pv}{R} v^{\gamma-1} = \frac{pv^\gamma}{R} = C^{te} \longrightarrow pv^\gamma = C^{te} \text{ ou } \frac{p}{\rho^\gamma} = C^{te}.$$

A relação  $T ds = de + p dv$  pode ser re-escrita, levando-se em conta que  $d(pv) = p dv + v dp$ , o que implica em que  $p dv = d(pv) - v dp$ :

$$T ds = de + p dv = de + d(pv) - v dp = d(u + pv) - v dp$$

e portanto:

$$\begin{aligned} T ds &= dh - v dp && \text{ou} \\ T ds &= dh - \frac{dp}{\rho} \end{aligned} \tag{C.1}$$

As quantidades  $ds$ ,  $dh$  e  $dp$  podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} ds &= \mathbf{grad} s \cdot d\mathbf{x} \\ dh &= \mathbf{grad} h \cdot d\mathbf{x} \\ dp &= \mathbf{grad} p \cdot d\mathbf{x} \end{aligned}$$

onde  $d\mathbf{x} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$ . Levando em consideração as expressões acima re-escrevemos a Eq.(C.1) na forma:

$$\begin{aligned} T \mathbf{grad} s \cdot d\mathbf{x} &= \mathbf{grad} h \cdot d\mathbf{x} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p \cdot d\mathbf{x} && \text{ou} \\ T \mathbf{grad} s &= \mathbf{grad} h - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p \end{aligned}$$





# Lista de Figuras

1.1	Força agindo sobre uma mola . . . . .	3
1.2	Campo de velocidades na proximidade de uma placa plana . . . . .	3
1.3	Fluxo de calor em um elemento de fluido . . . . .	4
1.4	Força atuando em um sistema massa-mola . . . . .	7
1.5	Esquema de forças atuando em um pêndulo . . . . .	8
2.1	Volume de controle ao qual se aplica o princípio de conservação da massa . .	11
2.2	Volume de fluido cruzando um elemento da superfície de controle . . . . .	12
2.3	Sistema de coordenadas cilíndricas . . . . .	14
2.4	Sistema de coordnadas esféricas . . . . .	14
2.5	Tubo de corrente . . . . .	16
2.6	Vazão através de uma curva ligando duas linhas de corrente . . . . .	17
2.7	Cálculo da vazão através de uma curva ligando duas linhas de corrente . . .	18
3.1	Volume de controle ao qual se aplica a conservação da quantidade de movimento	22
3.2	Deformação de um elemento de fluido . . . . .	31
3.3	Esquema de composição da carga hidráulica de uma tubulação . . . . .	36
4.1	Volume de controle ao qual se aplica o princípio de conservação da energia . .	46
4.2	Circulação em torno de uma massa de fluido que se desloca . . . . .	58
5.1	Campo de pressões em torno de uma esfera . . . . .	68
5.2	Escoamento laminar lâmina de fluido sobre uma placa plana inclinada . . . .	69
5.3	Escoamento de Couette entre duas placas planas horizontais . . . . .	74
5.4	Perfis de temperatura e de $dT/dy$ no escoamento de Couette . . . . .	76
5.5	Escoamento laminar forçado entre duas placas horizontais . . . . .	77
5.6	Escoamento entre duas placas paralelas sob fluxo de calor constante . . . . .	79
5.7	Balanco de energia em uma seção de canal sob fluxo de calor constante . . .	80
5.8	Campo de velocidades sobre uma placa plana semi-infinita . . . . .	86

5.9	Calculo da constante da expressão da vorticidade no problema de Rayleigh . . . . .	87
5.10	Campo de velocidades na proximidade do eixo de um disco rotatório . . . . .	89
5.11	Perfis de velocidade próximo ao eixo de um disco rotatório . . . . .	91
6.1	Escoamento sobre diedros e cunhas . . . . .	100
6.2	Escoamento na iminência de descolar . . . . .	101
6.3	Controle do descolamento de camadas-limite . . . . .	101
7.1	Esquema de um bocal convergente-divergente . . . . .	105
7.2	Número de Mach e distribuição de pressões em um bocal (regime subsônico) . . . . .	111
7.3	Número de Mach e distribuição de pressões em um bocal (regime supersônico) . . . . .	112
7.4	Escoamento em uma calha com superfície livre . . . . .	116
8.1	Campo de temperaturas em um sólido com fontes internas de calor . . . . .	124
8.2	Condução de calor em um cilindro de paredes finas . . . . .	125
8.3	Campo de temperaturas em um sólido com convecção em uma das paredes . . . . .	127
8.4	Condução bi-dimensional permanente em uma placa plana . . . . .	129
8.5	Distribuição inicial de temperaturas em um sólido uni-dimensional . . . . .	134
8.6	Campo de temperaturas em um sólido bi-dimensional de geometria arbitrária . . . . .	136
8.7	Campo de temperaturas em um sólido bi-dimensional simétrico . . . . .	138
8.8	Esquema de uma torre de resfriamento do tipo <i>contra-corrente</i> . . . . .	154
8.9	Esquema de um trocador de calor do tipo <i>casco e tubos</i> . . . . .	155
8.10	Esquema de um trocador de calor a <i>placas</i> . . . . .	155
8.11	Diagrama de temperaturas de trocadores de calor . . . . .	157
9.1	Volume de controle ao qual se aplica a conservação das espécies químicas . . . . .	166
9.2	Curvas de $f(u, v) = 0$ e $g(u, v) = 0$ da cinética de Schnackenberg . . . . .	169
B.1	Fluxo de calor através das paredes de um elemento de fluido . . . . .	183
B.2	Volume de controle ao qual se aplica o teorema de Gauss . . . . .	184
B.3	Variação da componente $v_y$ na direção $x$ e de $v_x$ na direção $y$ . . . . .	185

# Referências Bibliográficas

- [1] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Mechanics*. Cambridge, 1994.
- [2] R. B. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot. *Transport Phenomena*. Wiley, New York, 1960.
- [3] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover, New York, 1961.
- [4] J. Douglass and H. H. Rachford. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82:421–439, 1956.
- [5] F. P. Incropera and D. P. De Witt. *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1998.
- [6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon, New York, 1959.
- [7] W. H. Liepman and A. Roshko. *Elements of Gas Dynamics*. Wiley, New York, 1957.
- [8] H. Meinhardt. *The Algorithmic Beauty of Sea Shells*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [9] J. D. Murray. *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [10] D. W. Peaceman and H. H. Rachford Jr. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *SIAM*, 3:28–41, 1955.
- [11] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in C*. Cambridge, New York, 1990.
- [12] H. Schlichting and K. Gersten. *Boundary Layer Theory*. Springer, 2000.
- [13] D. J. Tritton. *Physical Fluid Dynamics*. Oxford, 1995.