



Introdução aos Escoamentos Compressíveis

José Pontes, Norberto Mangiavacchi e Gustavo R. Anjos

GESAR – Grupo de Estudos e Simulações Ambientais de Reservatórios
UERJ – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

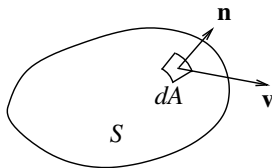
30 de julho a 5 de agosto de 2017

Conteúdo do curso

1. Escoamentos tridimensionais:
 - 1.1 Equações Básicas;
 - 1.2 Escoamentos Potenciais Compressíveis.
2. Escoamentos quase unidimensionais:
 - 2.1 Escoamentos Isoentrópicos;
 - 2.2 Choque Normal;
 - 2.3 Escoamentos com Transf. de Calor – Linha de Rayleigh;
 - 2.4 Escoamentos com Atrito – Linha de Fanno;
 - 2.5 Choque Oblíquo.
3. Resolução Numérica de Escoamentos Compressíveis.

Conservação da massa

Conservação da massa:



$$\left(\begin{array}{c} \text{Taxa de acumulação de} \\ \text{massa dentro do vo-} \\ \text{lume} \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{c} \text{Fluxo líquido de massa} \\ \text{para fora do volume} \end{array} \right)$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho v_j n_j dA$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$$

Teorema de Gauss:

$$\int_V \frac{\partial v_j}{\partial x_j} dV = \oint_S v_j n_j dA$$

$$\int_V \text{div } \mathbf{v} dV = \oint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$$

Conservação da massa

Aplicando o teorema de Gauss:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho v_j n_j dA = - \int_V \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} dV$$

Forma diferencial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \overbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)}^{D/Dt} \rho + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

Incompressível: $\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$

Conservação da massa

Aplicação da forma integral: permanente, velocidade uniforme nas entradas e saídas:

$$-\sum(\rho Au)_{\text{entradas}} + \sum(\rho Au)_{\text{saídas}} = 0$$

$$\sum(\rho Au)_s = \sum(\rho Au)_e$$

Apenas uma entrada e uma saída:

$$\rho Au = C^{te}$$

Na forma diferencial:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{du}{u} = 0$$

Conservação da quantidade de movimento

Acumulação e transporte de um escalar

$$\int_V \frac{\partial \rho X}{\partial t} dV = - \oint_S \rho X v_j n_j dA$$

onde X é um escalar por unidade de massa.

X	$=$	v_i	<i>quant. mov/kg</i>
	$=$	$v^2/2$	<i>energia cinética/kg</i>
	$=$	$e = C_v T$	<i>energia térmica/kg</i>
	$=$	$h = C_p T$	<i>entalpia/kg</i>
	$=$	$C_p T + v^2/2$	<i>(entalpia+cinética)/kg</i>
	$=$	s	<i>entropia/kg</i>

Conservação da quantidade de movimento

Quantidade de movimento

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação} \\ \text{de quantidade de mo-} \\ \text{vimento dentro do vo-} \\ \text{lume de controle} \end{array} \right) &= - \left(\begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de} \\ \text{quantidade de movi-} \\ \text{mento para fora do} \\ \text{volume} \end{array} \right) + \\ \left(\begin{array}{l} \text{Resultante das forças} \\ \text{de superfície} \end{array} \right) &+ \left(\begin{array}{l} \text{Resultante das for-} \\ \text{ças de volume} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\int_V \frac{\partial \rho \mathbf{v}_i}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \mathbf{v}_i v_j n_j dA + \oint_S \sigma_{ij} n_j dA + \int_V \rho g_i dV$$

$$\text{Forças de superfície: } dF_i = \sigma_{ij} n_j dA$$

Conservação da quantidade de movimento

Aplicando o teorema de Gauss:

$$\int_V \frac{\partial \rho \mathbf{v}_i}{\partial t} dV = - \int_V \frac{\partial \rho \mathbf{v}_i v_j}{\partial x_j} dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho g_i dV$$

Para um volume infinitesimal:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \mathbf{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \mathbf{v}_i v_j}{\partial x_j}}_{\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \mathbf{v}_i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i$$
$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \mathbf{v}_i = \rho \frac{D \mathbf{v}_i}{Dt}$$

Decomposição do tensor de tensões: pressão e tensor desviatório (viscoso):

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$$

Conservação da quantidade de movimento



$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \text{div} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{g}$$

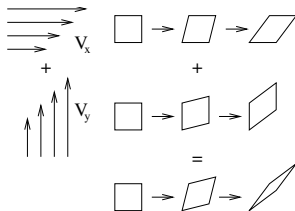
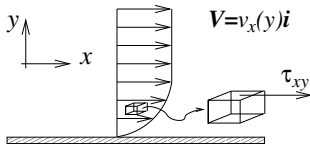
Fluidos newtonianos

τ_{xy} \longrightarrow Tensão de cisalhamento na direção x , atuando na face y .

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial j} + \frac{\partial v_j}{\partial i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$



Equação de Navier-Stokes (incompressível)

Eq. de Navier-Stokes = Quant. mov. + Newtoniano

Forma dimensional:

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mathbf{g}_i$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}$$

Forma adimensional:

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mathbf{g}_i$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}$$

Equação de Euler

Eq. de Euler \rightarrow ordem mais baixa do que Navier-Stokes.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{g}$$

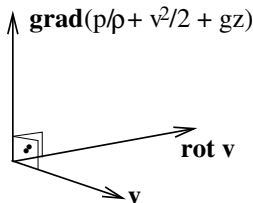
$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{v_j v_j}{2} - \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{g}$$

Equação de Bernoulli

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left(P + \frac{v^2}{2} + gz \right) = \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}$$

onde : $P = \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i = \int \frac{dp}{\rho}$



Campo irrotacional, permanente e incompressível:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = Y \quad \text{Energia específica;}$$

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = H \quad \text{Altura de carga;}$$

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gz = P_0 \quad \text{Pressão de estagnação.}$$

Escoamentos potenciais incompressíveis

Se $\text{rot } \mathbf{v} = 0 \rightarrow \mathbf{v} = \text{grad } \phi$ $v_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$

Continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{Equação de Laplace})$$

Campo *linear* e desacoplado da pressão.

Pressão \rightarrow Navier-Stokes.

Termo viscoso:

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

A viscosidade não atua em potenciais incompressíveis.

Equação da circulação

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i = \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i + \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dx_i$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{dp}{\rho} + \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dx_i$$

$$\text{Se } p = p(\rho, s) = p(\rho) \longrightarrow \oint_C \frac{dp}{\rho} = 0$$

Teorema de Bjerknes – Na ausência de efeitos viscosos:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{dp}{\rho}$$

Teorema de Kelvin – Na ausência de efeitos termodinâmicos e viscosos:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

Equação da energia total

$$\begin{aligned}
 & \left(\text{Taxa de acumulação de } m(e + v^2/2) \text{ dentro do} \right. \\
 & \quad \left. \text{volume de controle} \right) \\
 & = \\
 & - \left(\text{Fluxo líquido de } \dot{m}(e + v^2/2) \text{ para fora do vo-} \right. \\
 & \quad \left. \text{lume} \right) + \left(\text{Trabalho das forças de} \right. \\
 & \quad \left. \text{superfície por unidade} \right. \\
 & \quad \left. \text{de tempo} \right) \\
 & + \\
 & \left(\text{Trabalho das forças de} \right. \\
 & \quad \left. \text{volume por unidade de} \right. \\
 & \quad \left. \text{tempo} \right) - \overbrace{\left(\text{Fluxo líquido de calor} \right.}^{\mathbf{q = -\kappa \text{ grad } T}} \\
 & \quad \left. \text{para fora do volume} \right) \\
 & + \\
 & \left(\text{Taxa de geração de calor dentro do} \right. \\
 & \quad \left. \text{volume} \right)
 \end{aligned}$$

Equações: energia total, entalpia de estagnação, entropia

Energia total:

$$\frac{D}{Dt} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

Entalpia total: soma-se $\partial p / \partial t$ aos dois membros e reorganiza-se os termos:

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}.$$

$$\text{onde: } h_0 = h + \frac{v^2}{2} \quad \longrightarrow \quad C_p T_0 = C_p T + \frac{v^2}{2}$$

Entropia:

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

Equação potencial dos escoamentos compressíveis

Hipóteses:

1. Equação de Euler;
2. $\text{rot } \mathbf{v} = 0$;
3. Isoentrópico: $p = p(\rho, s) = p(\rho)$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

onde: $a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \text{velocidade do som.}$

$$a^2 = \sqrt{\gamma \mathcal{R} T} \quad (\text{Gases perfeitos}).$$

Obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)$$

Equação potencial dos escoamentos compressíveis

Casos particulares:

1. Tridimensional permanente:

$$\left(v_i v_j - a^2 \delta_{ij} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0$$

2. Tridimensional permanente, $v_x \gg v_y, v_z$ (Esbeltos, baixo ângulo de ataque, fora do transônico):

$$(1 - M^2) \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0$$

(Pequenas velocidades perpendiculares ao incidente).

3. Bidimensional permanente:

$$(v_x^2 - a^2) \phi_{xx} + (v_y^2 - a^2) \phi_{yy} + 2v_x v_y \phi_{xy} = 0$$

Equação potencial dos escoamentos compressíveis

Casos particulares:

4. Unidimensional não permanente:

$$\phi_{xx} = \frac{1}{a^2} \left(v_x^2 \phi_{xx} + \phi_{tt} + 2v_x \phi_{tx} \right)$$

5. Tridimensional não permanente, $v^2 \ll a^2$:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2} \phi_{tt} \quad (\text{Equação de ondas})$$

6. Tridimensional permanente, $v^2 \ll a^2$:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{Equação de Laplace})$$

Uma classificação das EDPs

Campo bidimensional:

$$(v_x^2 - a^2)\phi_{xx} + 2v_x v_y \phi_{xy} + (v_y^2 - a^2)\phi_{yy} = 0$$

$$A\phi_{xx} + B\phi_{xy} + C\phi_{yy} + D = 0$$

Características: curvas $\Sigma = (x(\sigma), y(\sigma))$ sobre as quais as derivadas da velocidade são descontínuas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

1. Elíptica, se $B^2 - 4AC < 0$ (não há características);
2. Parabólica, se $B^2 - 4AC = 0$ (uma família);
3. Hiperbólica, se $B^2 - 4AC > 0$ (duas famílias).

Uma classificação das EDPs

1. $v^2 < a^2 \implies$ elíptica;
2. $v^2 = a^2 \implies$ parabólica;
3. $v^2 > a^2 \implies$ hiperbólica.

Hiperbólica, com $v_y = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\pm\theta) = \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad \text{sen } \theta = \frac{1}{M}$$

