



# Introdução aos Escoamentos Compressíveis

José Pontes, Norberto Mangiavacchi e Gustavo R. Anjos

GESAR – Grupo de Estudos e Simulações Ambientais de Reservatórios  
UERJ – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

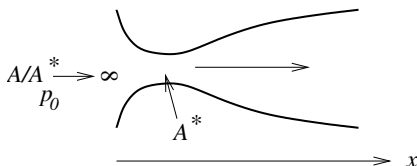
30 de julho a 5 de agosto de 2017

# Conteúdo do curso

1. Equações Básicas;
2. Escoamentos Potenciais Compressíveis;
3. Escoamentos Isoentrópicos;
4. Choque Normal;
5. Escoamento com Transf. de Calor – Linha de Rayleigh;
6. Escoamento com Atrito – Linha de Fanno;
7. Choque Oblíquo;
8. Resolução Numérica de Escoamentos Compressíveis;

# Escoamentos Isoentrópicos

Bocal convergente - divergente



**Relação área-velocidade:**

Entropia: 
$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

Quant. movimento: 
$$u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \rightarrow u du = -\frac{dp}{\rho}$$
$$u du = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho. = -a^2 \frac{d\rho}{\rho}$$

# Relação área-velocidade

$$\left. \begin{aligned} u \, du &= -a^2 \frac{d\rho}{\rho} \\ \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{du}{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \longrightarrow u \, du = a^2 \left( \frac{dA}{A} + \frac{du}{u} \right)$$

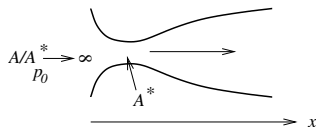
Obtém-se:

$$\left( M^2 - 1 \right) \frac{du}{u} = \frac{dA}{A} \quad \text{onde:} \quad M = \frac{u}{a} \quad (\text{Compressível})$$

$$\left( Fr^2 - 1 \right) \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \frac{dl}{l} \quad \text{onde:} \quad Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}} \quad (\text{Canal aberto})$$

# Analogia Compressível – Hidráulica de Canal Aberto

## Compressível



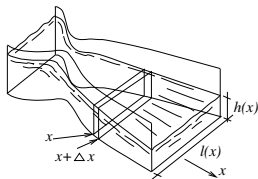
$$\rho A u = C^{te}$$

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 =$$

$$(p + \Delta p) + \frac{1}{2}\rho(u + \Delta u)^2$$

$$-\Delta p = u \Delta u$$

## Canal Aberto:



$$h l u = C^{te}$$

$$h + \frac{u^2}{2g} =$$

$$(h + \Delta h) + (u + \Delta u)^2 / 2g$$

$$-\Delta h = u \Delta u / g$$

# Relação de $T$ , $P$ e $\rho$ com o $M$ – esc. isentrópicos

Hipóteses:

1.  $C_p T_0 = C_p T + \frac{u^2}{2}$
2.  $s = C^{te} \rightarrow \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = a^2$
3.  $C_p - C_v = \mathcal{R}, \quad \frac{C_p}{C_v} = \gamma$

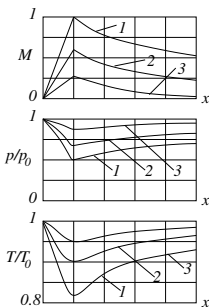
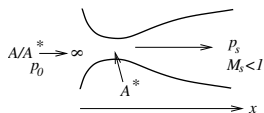
Obtém-se:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \qquad \frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma - 1)}$$

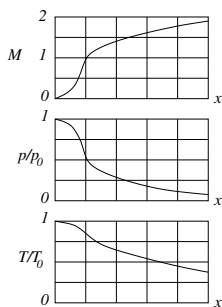
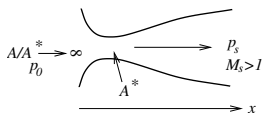
$$\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma - 1)}$$

onde  $T_0$ : temperatura de estagnação

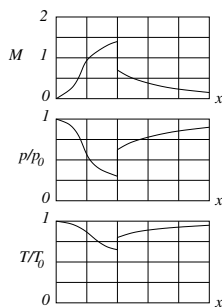
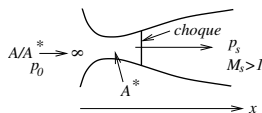
# Perfis subsônicos, supersônicos e choque normal



Subsônico



Supersônico



Choque normal

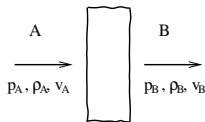
# Choque normal – a relação de Rankine Hugoniot

**Choque normal:** Descontinuidade do campo, com passagem do supersônico para o subsônico, aumento de pressão e produção de entropia. O choque é induzido por:

1. Pressão mais alta a juzante;
2. Adição de calor ou efeitos viscosos.

Conservam-se: massa, quantidade de movimento e energia, expressas por:

$$\begin{aligned}\rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 &= p_2 + \rho_2 u_2^2 \\ h_1 + \frac{u_1^2}{2} &= h_2 + \frac{u_2^2}{2}\end{aligned}$$





# Efeitos viscosos e de adição de calor – resumo:

## Adição de calor Linha de Rayleigh

### Supersônico:

1. Aumentam:  $p$ ,  $T$  e  $T_0$ ;
2. Diminuem:  $M$ ,  $p_0$  e  $u$ .

### Subsônico:

1. Aumentam:  $M$ ,  $T_0$  e  $u$ ;
2.  $T$  aumenta para  $M < \gamma^{-1/2}$   
e diminui para  $M > \gamma^{-1/2}$ ;
3. Diminuem:  $p$  e  $p_0$ .

## Adição de calor Linha de Rayleigh

### Supersônico:

1. Aumentam:  $p$  e  $T$ ;
2. Diminuem:  $M$ ,  $p_0$  e  $u$ .

### Subsônico:

1. Aumentam:  $M$  e  $u$ ;
2. Diminuem:  $p$ ,  $T$  e  $p_0$ .