PROGRAMAÇÃO NUMÉRICA
ENGENHARIA MECÂNICA

INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO NUMÉRICA PARA ENGENHEIROS MECÂNICOS

Preparado por: Prof. Gustavo Anjos
24 de Agosto de 2017

Resumo. Este texto de nível introdutório tem como objetivo familiarizar o estudante de graduação e pós-graduação na criação de ferramentas e solução de problemas reais encontracos em engenharia mecânica que podem ser modelados através de equações diferenciais. A linguagem de programação é usada para processamento de dados e também para visualização de resultados, mostrando-se versátil e uma ferramenta indispensável para o futuro profissional. Este texto não se restringe a alunos de engenharia mecânica, mas também pode ser usado por alunos que desejam obter conhecimento em programação numérica de solução de problemas diferenciais. Este texto também pode oferecer base para a construção de códigos numéricos elaborados.

Conteúdo

1 Introdução

1.1 Considerações iniciais

Este texto foi elaborado para atender as necessidades de ensino de programação numérica a alunos de Transmissão de Calor II do 8º período de Engenharia Mecânica da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Nas primeiras seções o estudante pode obter informações sobre ferramentas usadas em programação numérica, como o editor de texto, controle de versões e o paradigma de orientação a objetos. Seguindo o conteúdo do texto, diversos exercícios são propostos para solução de problemas encontrados em engenharia, como a mecânica de massas pontuais, onde a segunda lei de Newton é utilizada para modelagem do problema do tipo massa-mola ou ainda lançamento de um projétil. Outros exercícios são sugeridos para solução de problema térmico unidimensional e a criação de malhas sofisticadas para o uso no método de elementos finitos. Este texto é finalizado com problemas envolvendo escoamentos multifásicos onde duas fases distintas (contínua e dispesa) coexistem no mesmo problema.

O texto está em contínuo desenvolvimento e ainda carece de informações essenciais para o desenvolvimento de todos os exemplos apresentados. Por isso, o autor pede a compreensão do estudante para falta de dados e exemplos mais ilustrativos ao longo do texto. Este texto está baseado no livro Mecânica Clássica [**?**] e outros.

1.2 Importânica da linguagem Python na Engenharia Mecânica

O Python é uma linguagem de programação de alto nível, de script, que pode ser orientada a objetos. Esta linguagem foi lançada por Guido van Rossun em 1991 como uma linguagem acadêmica para ensino de programação numérica a alunos de graduação.

1.3 Orientação a objetos

A programação orientada a objetos é um modelo de projeto para desenvolvimento de projetos numéricos, baseado na integração dos diversos segmentos do programa chamados objetos. Diferentemente da programação estruturada, a orientação a objetos é conceituada no campo da abstração de conceitos do mundo real (ver [1]).

Abaixo encontra-se alguns conceitos relacionados à programação orientada a objetos.

- classe: estrutura para abstração de um conjuto de objetos com caracterísiticas em comum através da utilização de métodos e atributos;
- objeto/instância: elemento computacional que representa uma entidade abstrata ou concreta;
- atributo: são elementos que definem as partes (ou estruturas) de uma classe. Os valores associados aos atributos definem os objetos.
- método: é a função que é executada pelo objeto ao receber instrução;
- herança: é um princípio que permite que classes compartilham métodos e atributos de outra classe;
- encapsulamento: conceito de tornar o programa mais flexível, fácil de modificar e de usar, escondendo detalhes do programa desnecessários para o conhecimento do usuário final;
- polimorfismo: uso do mesmo nome para múltiplos métodos com lista de argumentos diferentes;

Descrever diagrama UML (Unified Modeling Language).

1.4 Solução de problemas diferenciais

- **Solução geral**: solução que apresenta n constantes independentes entre si, onde n é a ordem da EDO. Essas constantes, de acordo com a conveniência, podem ser escritas como c, $2c$, c^2, lnc;
- **Solução Particular**: solução obtida a partir da solução geral do problema, mediante a imposição das condições dadas (chamadas condições iniciais ou condições de contorno).

As equações diferencias parciais (EDP) de 2a. ordem podem ser classificadas em três tipos distintos:

- Equação hiperbólica: usadas para estudo de vibrações, oscilações elétricas, acústica etc. É comumente conhecidada como **Equação da Onda**.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

- Equação parabólica: usada no estudo de problemas de difusão de calor ou massa, propagação de calor etc.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

- Equação elíptica: usada para modelar campos magnéticos, hidridinâmica e problemas de transferência de calor estacionários. Na matemática se $f(x, y) = 0$, esta equação recebe o nome de **Equação de Laplace**, em referência à Pierre Simon Laplace. Se $f(x, y) \neq 0$ esta equação recebe o nome de **Equação de Poisson**, em referência à Siméon-Denis Poisson.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{3}$$

Um método simples para identificação do tipo de EPD pode ser obtido da seguinte forma. Se uma função $u(x, y)$ pode ser definida no espaço $\mathbb{R}^2$, qualquer EPD de 2a. ordem pode ser escrita da seguinte forma:

$$a\frac{d^2 u(x,y)}{dx^2} + 2b\frac{d^2 u(x,y)}{dxdy} + c\frac{d^2 u}{dy^2} + d\frac{du}{dx} + e\frac{du}{dy} + fu = g \tag{4}$$

Considerando que os coeficientes a, b e c forem constantes e tais que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \tag{5}$$

Podemos classificar as EPDs através da seguinte relação:

- **hiperbólicas**: $b^2 - 4ac > 0$, raízes reais e distintas;
- **parabólicas**: $b^2 - 4ac = 0$, raízes reais e idênticas;
- **elípticas**: $b^2 - 4ac < 0$, raízes conjugadas e complexas;

1.5 Como medir erros

Toda vez que não conseguimos representar um valor exato, adicionamos um erro no sistema. Dependendo do algoritmo, este erro pode ser propagado até o final do processo, correndo o risco de acumular e fazer com que haja convergência para a solução do problema proposto.

- **erro de trucamento**: é a diferença entre o resultado real e o resultado que deveria ser produzido por um algoritmo dado usando aritimética exata. Este erro é devido a aproximações de truncamento de séries infinitas, como por exemplo substituindo uma derivada por uma diferença finita, ou substituindo um dízima periódica por um número com 3 casas decimais, ou pela substituição de uma função arbitrária por um polinômio, ou ainda pela parada de um processo iterativo antes da convergência.
- **erro de arredondamento**: é a diferença entre o resultado produzido por um algoritmo dado usando aritimética exata e o resultado do mesmo algoritmo usando precisão finita, aritimética de arredondamento. É devido ao falta de exatidão na representação de um número real e operações aritiméticas em cima destes números.
- **erro absoluto**: valor aproximado - valor exato
- **erro relativo**: $\frac{\text{erro absoluto}}{\text{valor exato}}$

1.6 Importância da validação do código numérico

Validação de código é importante para se testar os limites de aplicação do código numérico bem como se certificar de o código está respondendo como planejado. Um código numérico deverá sempre ser validado e testado. Para o caso da engenharia, as validações devem cobrir de três campos importantes:

- modelo matemático
- física do problema
- lógica numérica

O modelo matemático adotado para reproduzir o fenômeno físico deve estar condizente com a realidade do problema, ou seja com a física do problema. Por exemplo, ao se tratar problemas de condução unidimensional de calor em sólidos sem fonte de calor, usa-se a equação de Laplace para encontrar a distribuição de temperatura. Através desta escolha, *modela-se* o problema físico através de uma equação matemática.

A lógica numérica trata das sequências lógicas que são criadas no código numérico para automatização de processos repetitivos. Esta lógica deve ser questionada durante todo o desenvolvimento do código para que o cientista/programador não acredite que um erro pode estar vindo daquele procedimento. Note que esta lógica pode abranger o código como um todo, bem como trechos envolvendo funções, loops, classes etc. É importante validar e verificar que o procedimento leva a resultados esperados.

Além destes campos, é importante verificar a abrangência da solução obtida, conhecendo o erro inserido nas discretizações e sua propagação através dos diversos procedimentos (ver [4]).

1.7 Controle de versões - GIT

O controle de versões é necessário no desenvolvimento de softwares para que o programador tenha um histórico de cada etapa relacionada a sua construção. Este controle digital se assemelha a um caderno de anotações, onde o estudante anota o desenvolvimento de suas atividades em cada dia de trabalho quando executa uma tarefa qualquer. A qualquer momento o estudante pode voltar nas anotações e saber o que foi modificado ou realizado na data em questão. Analisando mais profundamente esta mesma situação, poderíamos envolver mais um estudante para realizar o mesmo trabalho, onde cada pessoa ficaria encarregada de um turno no dia. Se as anotações são feitas rigorosamente, o estudante seguinte toma conhecimento das ações e decisões tomadas pelo anterior. Existem diversos controladores de versão que ainda são bastante utilizados pela comunidade: *SVN*, *CVS*, *Git*, *Mercurial*, *Monotone*, *SVK*, *Rational ClearCase*, *Borland StarTeam* etc.

A ferramenta *Git* é um sistema de controle de versão distribuído e também um sistema de gerenciamento de código fonte. O *Git* foi projetado pelo criador do sistema Linux (Linus Torvalds) e é adotado por diversas empresas que desenvolvem softwares comerciais de pequeno e grande porte (VLC, Reddit, rsync, Samba, VTK). O *Git* é um software livre e pode ser instalado em todos os sistemas operacionais através de download na página (https://git-scm.com).

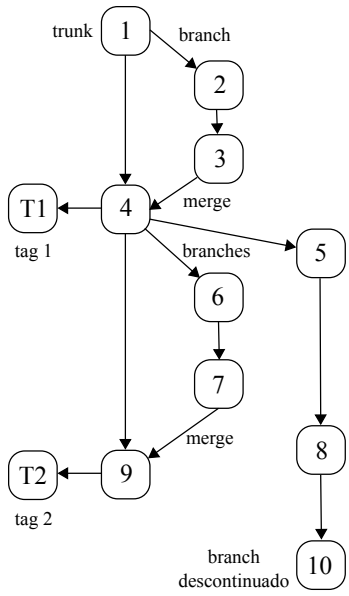


Figura 1: Exemplo da visualização do histórico de um projeto usando um sistema de controle de versões

Abaixo encontra-se alguns comandos do git bastante utilizados:

- git add "nome-do-arquivo"adiciona um arquivo no git
- git commit submete as modificações marcadas por add para o git
- git commit -a submete todas as modificações para o git
- git log mostra descrição do desenvolvimento do projeto
- git shortlog mostra descrição curta do desenvolvimento do projeto
- git status verifica modificações no diretório do projeto

- git branch lista branches do projeto
- git init inicializa um diretório git
- git push enviar modificações para o servidor
- git pull atualiza versão local pela versão do servidor

É importante notar que o *Git* não é um sistema dedicado à linguagem de programação, podendo ser usando em qualquer tipo de código fonte, como por exemplo em documentos Word ou Notepad e de LaTeX.

1.8 Editor de texto - VIM

Existem diversos editores de texto são aplicativos essenciais em qualquer ambiente de trabalho e estão disponíveis para instalação nos diversos sistemas operacionais existentes. Alguns deles já são pré-instalados pelo sistema, enquanto que alguns outros devem ser comprados ou transferidos gratuitamente de páginas na internet. Alguns exemplos de editores de texto conhecidos no sistema *Windows* são Microsoft Office e Notepad, no sistema *Mac OS X* pode-se citar o TextEdit e o Notes. Alguns editores estão disponíveis para os diversos sistemas operacionais, como é o caso do Microsoft Word, encontrado nos sistemas *Windows* e *Mac OS X* e o OpenOffice que pode ser instalados nos sistemas *Windows*, *Mac OS X* e *Linux*. Um editor de texto pode ser projetado para criar/editar diversos tipos de texto, entretanto também pode ser especializado em uma determinada função, como por exemplo em textos de programação numérica.

O *VIM* é um editor de texto poderoso que utiliza baixo recurso gráfico, tornando-o flexível, versátil e de baixíssimo consumo de processador. Apesar de ser um editor que opera em modo texto, é possível encontrar versões deste editor em modo gráfico (gvim), acompanhado de botões para abrir arquivo, gravar, editar, imprimir etc. É interessante notar que a curva de aprendizagem deste editor necessita do programador um esforço inicial para que ele consiga dominar as funções básicas de edição, entretanto o próprio vim oferece uma ferramenta de tutorial que vem acompanhada do editor: *vimtutor*. Abaixo encontra-se alguns comandos de edição bastante utilizados:

- :w gravar documento
- :q sair do editor
- :qa sair do editor caso esteja editando mais de um documento
- :wq gravar o documento e sair do editor
- :wqa gravar todos os documentos e sair do editor
- :saveas gravar como novo documento
- :e . abrir gerenciador de arquivos no VIM
- :args lista de arquivos abertos no editor
- :e nome-do-arquivo editar outro arquivo
- :split nome-do-arquivo separar janelas horizontalmente e carregar outro arquivo
- :vsplit nome-do-arquivo separar janelas verticalmente e carregar outro arquivo
- :sview nome-do-arquivo abrir arquivo em modo de leitura
- :set backup criar arquivo de backup
- :ggVG selecionar todo documento
- :make rodar script Makefile no editor
- :32 ir para a linha 32

O editor de texto VIM suporta a instalações de aditivos para facilitar o desenvolvimento de projetos. Alguns exemplos são:

- taglist.vim - gerenciador de arquivos fonte
- The Nerd Commenter - plugin para facilitar comentários em diversos tipos de arquivos
- Align - alinhamento de textos automáticos
- BlockComment.vim - automatização de comentários de blocos de código
- DirDiff.vim - plugin para manipulação de diretórios

Os aditivos devem ser instalados na pasta de instalação do editor VIM. Estes aditivos estão centralizados no seguinte endereço eletrônico:

http://www.vim.org/scripts/

Este editor de texto é compatível com os mais importantes sistemas operacionais.

2 Mecânica de massas pontuais

2.1 Movimento Horizontal de um Carrinho

Neste exemplo deseja-se calcular como a força de atrito linear $F_{drag} = -bv$ atua em um carrinho com massa m a fim de desacelerá-lo até sua completa parada na direcao x. Desconsidere o atrito dos mancais no eixo de rodas do carrinho em Fig. (3).

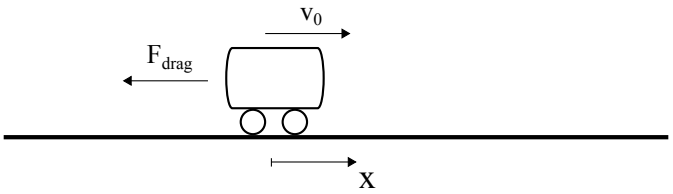


Figura 2: Desaceleração de carrinho por atrito do ar linear $F_{drag} = -bv$.

$$m\frac{dv}{dt} = -bv \tag{6}$$

Para encontramos a solução numérica deste problema, usaremos diferenças finitas progressiva para a discretização da derivada da velocidade em relação ao tempo:

$$m\frac{v^{n+1} - v^n}{dt} = -bv \tag{7}$$

Note que o método de discretização acima recebe também o nome de *Método de Euler* para solução de equação diferencial. Este método é o tipo de método explícito mais básico para integração numérica. Como todo método numérico, o Método de Euler é uma aproximação da solução exata, por isso, a solução numérica pode se afastar da solução exata dependendo da escolha do tamanho do passo de tempo dt. No limite onde dt tende a zero, a solução numérica coincide com a solução exata. Em problemas simples, pode-se escolher um passo de tempo extremamente pequeno, de modo que o erro gerado pela solução numérica seja praticamente desprezível. Entretanto, para problemas de grande porte, o uso de passos de tempo pequenos inviabilizam a solução devido à duração total de simulação, que pode levar dias, meses ou até mesmo anos para que se chegue na solução desejada. Outros métodos de aproximação podem ser usados para obtenção de resultados mais precisos e mais rápidos. No caso de equações ordinárias, pode-se usar o Método de Runge-Kutta.

Uma vez encontrada a equação discreta da equação ordinária, pode-se determinar o valor da velocidade no próximo passo de tempo $n + 1$ fazendo:

$$v^{n+1} = v^n - dt\frac{bv}{m} \tag{8}$$

Este procedimento pode então ser repetido sucessivamente para que se obtenha a velocidade em diversos tempos, ou seja, $n+1, n+2, n+3, n+4 \ldots$ e com isso determine a distribuição da velocidade em função do tempo. Para o problema em questão, observa-se que a velocidade diminuirá exponencialmente até um valor próximo a zero,

concluindo-se que a velocidade do carrinho foi reduzida até sua parada completa. Note que *à priori* não se sabe quantas repetições devem ser realizadas no cálculo de v^{n+1} para que se obtenha o valor zero para a velocidade. Este cálculo dependerá dos dados do problema e do tamanho escolhido para o passo de tempo dt.

Para efeitos de validação do método de cálculo numérico apresentado, pode-se usar a solução analítica da Eq. (6) para $v(t)$. Note que nem sempre é possível obter solução analítica de problemas para validação, entretanto busca-se, sempre que possível, o uso desta ferramenta para comprovação do código numérico elaborado. A solução analítica toma a seguinte forma:

$$v(t) = v_0 e^{-bt/m} \tag{9}$$

onde v_0 é a velocidade inicial do carrinho, t é o tempo medido em segundos e b é o coeficiente de atrito linear. Ao integrarmos novamente a equação de $v(t)$ obtemos a solução da posição, já que $dx/dt = v$:

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = x_\infty(1 - e^{-bt/m}) \tag{10}$$

onde $x_\infty = v_0 m/b$

Dados da simulação:

Tabela 1: Dados da simulação do carrinho submetido à força de atrito linear do ar.

massa da particula	coeficiente de atrito	passo de tempo
$[kg]$	$[kg]/[s]$	$[s]$
$m = 1.0$	$b = 0.1$	$dt = 0.1$

Condições iniciais:

Tabela 2: Condições iniciais da da simulação do carrinho submetido à força de atrito linear do ar.

tempo inicial	velocidade inicial	posição inicial
$[s]$	$[m]/[s]$	$[m]$
$time = 0.0$	$v_0 = 10.0$	$x = 0.0$

2.2 Velocidade terminal de uma gota

Neste problema deseja-se calcular como a força de atrito linear $F_{drag} = -bv$ atua em uma partícula com massa m sob uma força de gravidade $F_{grav} = mg$ a fim de desacelerá-la até o equilíbrio de forças, onde a aceleração seja igual a 0 na direcao y.

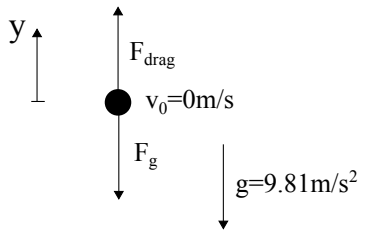


Figura 3: Aceleração de uma gota caíndo sob efeito gravitacional $F_g = mg$ e atrito do ar linear $F_{drag} = -bv$.

Através da 2a. Lei de Newton, a equação matemática para modelar este problema pode ser escrito como:

$$m\frac{dv}{dt} = F_{drag} + F_g \tag{11}$$

onde v, que é uma função do tempo t é a incógnita que queremos resolver.

$$m\frac{v^{n+1}-v^n}{dt} = bv - mg \tag{12}$$

$$v^{n+1} = v^n + dt\frac{bv}{m} - dtg \tag{13}$$

Este procedimento deverá ser repetido sucessivamente para que se obtenha a velocidade nos diversos tempos, ou seja, $n+1, n+2, n+3, n+4\ldots$ e com isso determine a distribuição da velocidade em função do tempo. Para o problema em questão, observa-se que a velocidade aumentará até que a gota esteja em equilíbrio dinâmica, ou seja, a força de atrito fique igual à força de gravidade. Novamente, não se sabe quantas repetições devem ser realizadas no cálculo de v^{n+1} para que se obtenha o valor de velocidade terminal para a gota. Este cálculo dependerá dos dados do problema e do tamanho escolhido para o passo de tempo dt.

A Eq. (11) pode ser resolvida analiticamente para $v(t)$ e sua solução analítica toma a seguinte forma:

$$v(t) = v_0 e^{-bt/m} + v_{lim}(1 - e^{-bt/m}) \tag{14}$$

onde V_0 é a velocidade inicial do carrinho, t é o tempo medido em segundos e b é o coeficiente de atrito. Ao integrarmos novamente a equação de $v(t)$ obtemos a solução da posição, já que $dx/dt = v$:

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt \tag{15}$$

Tabela 3: Dados da simulação da gota submetida à força de atrito linear do ar.

diâmetro da gota óleo	densidade do líquido	aceleração da gravidade	volume da gota
$[m]$	$[kg]/[m^3]$	$[m]/[s^2]$	$[m^3]$
$D = 1.5e-06$	$\rho = 840.0$	$g = 9.81$	$V = \pi D^3/6.0$

Tabela 4: Continuação de dados da simulação do carrinho submetido à força de atrito linear do ar.

massa da partícula	viscosidade dinâmica do ar	coeficiente de atrito linear	passo de tempo
$[kg]$	$[kg]/[m][s]$	$[kg]/[s]$	$[s]$
$m = \rho V$	$\beta = 1.6e-04$	$b = \beta D$	$dt = 1e-7$

2.3 Lançamento de projétil

Neste exemplo deseja-se calcular como a forca de atrito linear $F = bv$, ou a forca de atrito quadratica $F = cv^2$ ou ausencia de forcas de atrito atuam em uma particula com massa m sob uma forca de gravidade $F = mg$.

A equacao vetorial (em X e Y) toma a seguinte forma:

(16)

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{drag} + \mathbf{F}_g \begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} = F_{drag_x} \\ m\frac{dv_y}{dt} = F_{drag_y} + F_{g_y} \end{cases} \tag{17}$$

Dados da simulação;

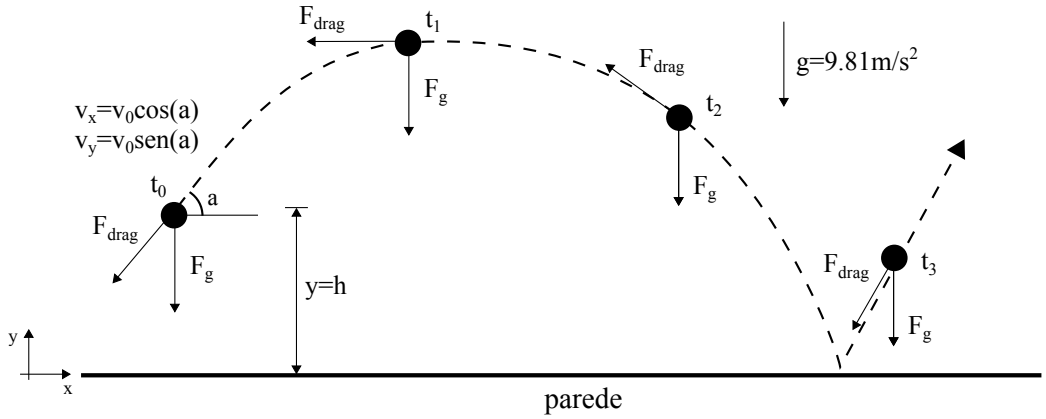


Figura 4: Desaceleração de um projetil por atrito do ar $F_{drag} = -bv$ sob efeito de gravidade.

- $\#D = 1.5e-06$ $[m]$ diâmetro do projétil
- $D = 7.0e-02$ $[m]$ diâmetro da gota de neblina
- $g = 9.81$ $[m/s^2]$ aceleração da gravidade
- $V = \pi D^3/6.0$ $[m^3]$ volume da gota
- $m = 0.15$ $[kg]$ massa da partícula
- $\beta = 0.25$ $[kg/ms]$ viscosidade dinâmica do ar
- $b = \beta D$ $[kg/s]$ coeficiente de atrito linear
- $\gamma = 0.25$ $[Ns^2/m^4]$
- $c = \gamma D^2$ coeficiente de atrito linear
- $dt = 0.01$ $[s]$ passo de tempo

Condições iniciais

- $time = 0.0$ $[s]$ tempo
- $x = 0.0$ $[m]$ posição
- $y = 0.0$ $[m]$ posição
- $vx = 19.3$ $[m/s]$ velocidade
- $vy = 23.0$ $[m/s]$ velocidade

2.4 Sistema massa-mola

Neste exemplo deseja-se calcular como a força de mola $F_{spring} = -kx$ atua em uma particula com massa m sem dissipação.

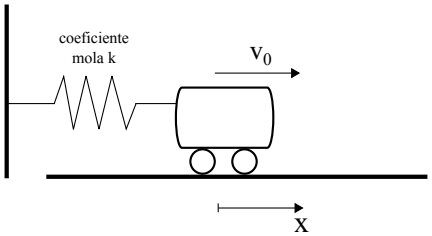


Figura 5: Sistema massa-mola sem dissipação $F_{spring} = -kx$

A solução analítica da equação:

$$m\frac{dv}{dt} = -kx \tag{18}$$

$$v(t) = v_0 e^{-bt/m} \tag{19}$$

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = x_\infty(1 - e^{-bt/m}) \tag{20}$$

onde $x_{inf} = v_0 m/b$

Dados da simulação

- $m = 1.0$ massa da partícula
- $k = 0.1$ coeficiente da mola
- $dt = 0.1$ passo de tempo

Condições iniciais:

- $time = 0.0$ tempo total da simulação
- $x = 0.0$ posição inicial da partícula
- $v_x = 10.0$ velocidade inicial da partícula

2.5 Sistema massa-mola dissipativo

Neste exemplo deseja-se calcular como a forca de atrito linear $F = -bv$ atua em uma partícula com massa m sob uma forca elástica (de mola) linear $F = -kx$ a fim de desacelerá-la ate o equilíbrio de forças, onde a aceleração seja igual a 0 na direcao y.

A equação em X:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{spring} + \mathbf{F}_{friction} \tag{21}$$

Dados da simulação:

- $m = 1.0$ massa da partícula
- $k = 0.1$ coeficiente da mola
- $b = 0.1$ coeficiente de atrito linear
- $dt = 0.1$ passo de tempo

Condições iniciais:

- $time = 0.0$ tempo total da simulação
- $x = 0.0$ posição inicial da partícula
- $v_0 = 10.0$ velocidade inicial da partícula

2.6 Sistema massa-mola vertical

Neste exemplo deseja-se calcular como a força de gravidade $F = -mg$ atua em uma partícula com massa m sob uma forca elástica (de mola) $F = -ky$ a fim de mantê-la oscilando.

A equação em X:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{spring} + \mathbf{F}_{grav} \tag{22}$$

$\mathbf{F}_{spring} = F_{spring_y} - ky$ e $\mathbf{F}_{grav} = F_{grav_y} mg$

Dados da simulação:

- $m = 1.0$ massa da partícula
- $k = 0.1$ coeficiente da mola
- $b = 0.1$ coeficiente de atrito linear
- $y = 0.0$ posição inicial da partícula
- $v_0 = 10.0$ velocidade inicial da partícula
- $g = 9.81$ $[m/s^2]$ aceleração da gravidade
- $D = 7.0e-02$ $[m]$ diâmetro da partícula
- $\gamma = 0.25$ $[Ns^2/m^4]$
- $c = \gamma * D * D$ coeficiente de atrito linear
- $dt = 0.1$ $[s]$ passo de tempo
- $time = 0.0$ tempo total da simulação
- $\#D = 1.5e-06$ $[m]$ diâmetro do projétil
- $m = 0.15$ $[kg]$ massa da partícula
- $\beta = 0.25$ $[kg/ms]$ viscosidade dinâmica do ar
- $b = \beta D$ $[kg/s]$ coeficiente de atrito linear

2.7 Pêndulo simples

Deseja-se resolver o problema do pêndulo simples sob efeito de força gravitacional $F_g = mg$:

$$m\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mg}{l}\sin\theta = 0 \tag{23}$$

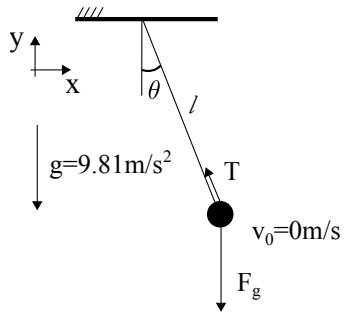


Figura 6: Pêndulo simples sob efeito de força gravitacional $F_g = mg$.

Esta equação pode ser resolvida de diferentes formas. A mais simples é tornar esta equação diferencial de segunda ordem em duas equações de ordem mais baixa:

$$\frac{d\theta}{dt} = v \tag{24}$$

e

$$m\frac{dv}{dt} + \frac{mg}{l}\sin\theta = 0 \tag{25}$$

Com isso, resolve-se a equação para encontrar θ no tempo $n+1$:

$$\frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} = v^n \longrightarrow \theta^{n+1} = \theta^n + \Delta t v^n \tag{26}$$

E depois a Eq. (25) para encontrar v no tempo $n+1$:

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = -\frac{g}{l}\sin\theta \longrightarrow v^{n+1} = v^n - \Delta t\frac{g}{l}\sin\theta^{n+1} \tag{27}$$

Este processo deve ser repetido sucessivamente em um *loop* para encontrar a evolução de v e θ no tempo t. Como não há adição ou perda de energia no sistema, espera-se um comportamento de movimento repetitivo com o tempo.

Para pequenas perturbações esta equação tem solução analítica, com isso aproxima-se $\sin\theta = \theta$, chegando à seguinte equação:

$$m\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mg}{l}\theta = 0 \tag{28}$$

A solução analítica é então escrita da seguinte forma para pequenos angulos ($< 10°$):

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\sqrt{g/l}t) \tag{29}$$

Dados da simulação:

Tabela 5: Dados da simulação do pêndulo submetido à força de gravidade.

massa da particula	aceleração da gravidade	passo de tempo	comprimento da haste
$[kg]$	$[m]/[s^2]$	$[s]$	$[m]$
$m = 1.0$	$g = 9.81$	$dt = 0.01$	$l = 1.0$

Condições iniciais:

Tabela 6: Condições iniciais da simulação do pêndulo simples.

tempo inicial	velocidade inicial	ângulo inicial	posição inicial
$[s]$	$[m]/[s]$	$°$	$[rad]$
$time = 0.0$	$v_0 = 0.0$	10	$\theta_0 = \frac{2grad\pi}{360}$

3 Geração de Malha

3.1 Geração de malha 1D

Criação de malha 1D para o método de elementos finitos com dx variando conforme as seguintes equações:

- constante: $dx = cte$
- quadrática: x^2
- cúbica: x^3
- exponencial: $exp(x)$

Observe cada caso ilustriado na Fig. (7), onde a função escolhida fornece o espaçamento entre nós da malha. Para o caso linear Fig. (7a), o espaçamento dx é constante. Para os outros casos, o espaçamento varia conforme a função adotada.

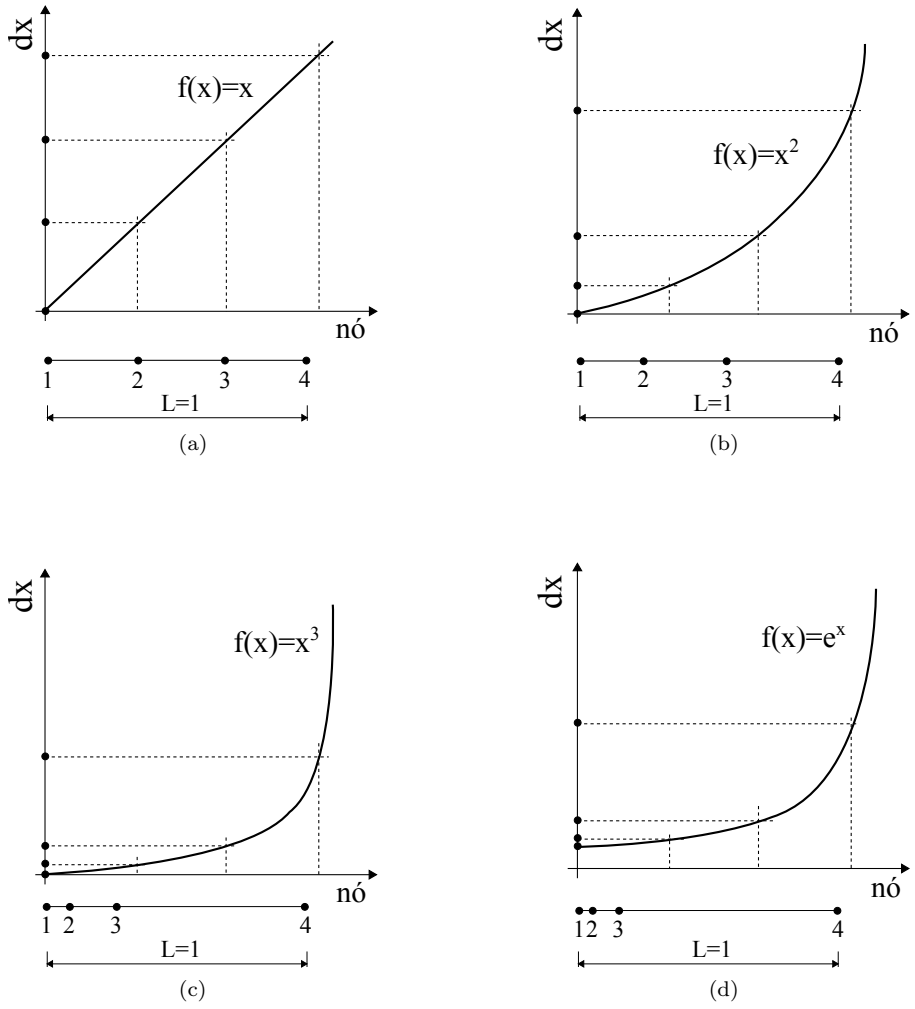
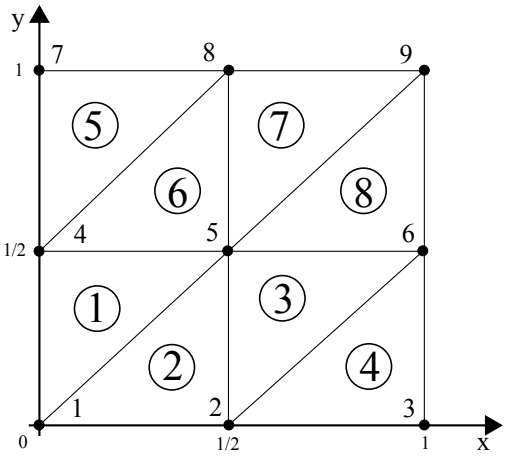


Figura 7: Distribuição de espaçamento de malha dx e representação final da malha unidimensional com dimensão $L = 1$ usando função (a) linear, (b) quadrática, (c) cúbica e (d) exponecial.

Parâmetros da malha:

- $L = 1.0$ comprimento total da malha
- $nx = 10$ número total de nós
- $ne = nx - 1$ número total de elementos



	v_1	v_2	v_3
1	1	5	4
2	1	2	5
3	2	6	5
4	2	3	6
5	4	8	7
6	4	5	8
7	5	9	8
8	5	6	9

Figura 8: Distribuição de pontos e elementos em malha bidimensional. A numeração dos elementos é definida pelos números com círculos, enquanto os índices dos nós estão localizados ao lado nó e estrutura da matriz de conectividade IEN_{ij}. Note que a numeração do primeiro vértice e do primeiro elemento começam com 1. Em algumas linguagens de programação, como o Python e C/C++, é conveniente começar a numeração com 0.

Dica: para criação de malha computacional, 2 estruturas são necessárias: um vetor de coordenadas dos nós da malha onde cada elemento do vetor é a posição do nó, e uma matriz de conectividade de nós onde a linha da matriz representa o elemento e as colunas representam os nós daquele elemento.

3.2 Geração de malha 2D

A criação de malha em duas dimensões é um processo matemático sofisticado e requer especial atenção na escolha de formação dos elementos. Neste problema, deseja-se criar uma malha computacional 2D simplificada, onde a distribuição de pontos é regular e uniforme e a triangulação é estruturada, com isso simplificando o processo de criação de malha 2D.

Parâmetros da malha:

- $L_x = 1.0$ comprimento total da malha na direção x
- $L_y = 1.0$ comprimento total da malha na direção y
- $nx \times ny = 4 \times 3 = 12$ número total de nós
- $ne = 2(nx - 1)(ny - 1)$ número total de elementos

Dica: para criação de malha computacional bidimensional, 3 estruturas são agora necessárias: dois vetores de coordenadas dos nós da malha onde cada elemento do vetor é a posição do nó no plano $x - y$, e uma matriz de conectividade de nós onde a linha da matriz representa o elemento e as colunas representam os nós daquele elemento.

Perturbe a parte de malha onde $Y = Y_{max}$ usando a seguinte uma função de onda senoidal do tipo:

$$y(x) = Asin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \phi\right) \tag{30}$$

onde A representa a amplitude da onda, λ o comprimento de onda que equivale a $\lambda = L/n$, n é o número de ondas, x é a coordenada do ponto ao longo do eixo x e ϕ é o deslocamento de fase. Adote os seguintes valores:

- $A = 0.07$
- $\phi = 2\pi/4.0$

- $\lambda = 24/6$
- $k = 2\pi/\lambda$
- $Lx = 10.0$
- $Ly = 0.5$
- $nx = 100$
- $ny = 120$

Depois de completada esta tarefa, propague a perturbação da onda gerada em $Y = Y_{max}$ suavemente para o restante da malha, ou seja, variando y, de modo que a distribuição final tenha perturbação nula para $Y = 0$.

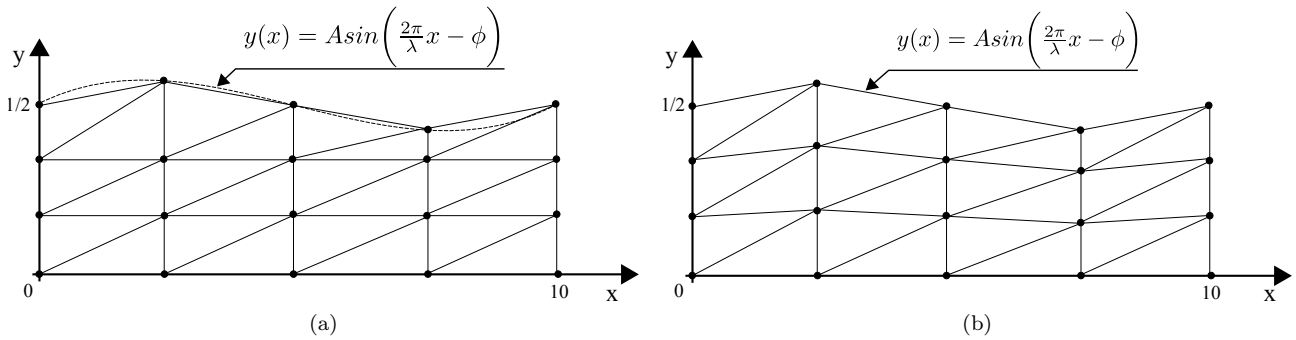
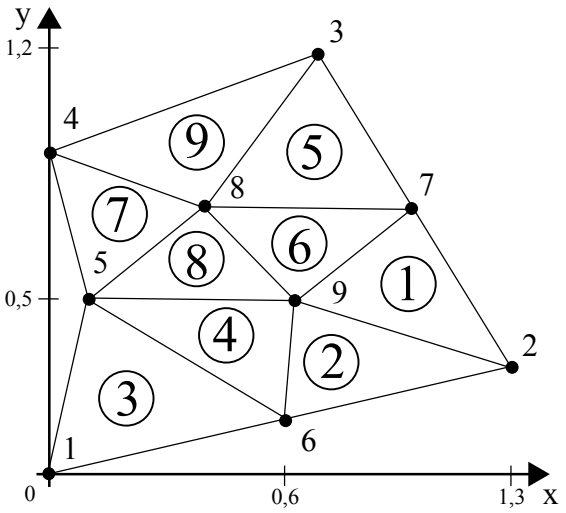


Figura 9: Malha bidimensional de triângulos com perturbação senoidal no (a) topo e (b) propagada para o interior com amortecimento da função.

3.3 Lista de nós de contorno em malha 2d

Considere uma malha arbitrária bidimensional com contornos irregulares, a matriz de conectividade e os vetores de coordenadas como mostrado na Fig. (10).

Processe duas listas contendo os nós do contorno Γ e os nós do interior da malha.



IEN	v_1	v_2	v_3	X	Y
1	9	2	7	0.0	0.0
2	6	2	9	1.3	0.3
3	1	6	5	0.6	0.6
4	5	6	9	0.0	0.9
5	3	8	7	0.2	0.2
6	7	8	9	0.6	0.1
7	4	5	8	0.9	0.9
8	5	9	8	0.4	0.8
9	3	4	8	0.7	0.5

Figura 10: Distribuição de pontos e elementos em malha bidimensional arbitrária.

3.4 Curvatura 2D

Curvatura é a quantidade na qual um objeto geométrico se desvia do plano, portanto a curvatura de um plano é zero.

Para ilustrar simplificadamente um problema envolvendo o cálculo de curvatura discreta, considere uma malha de linha fechada com elementos de segmentos de reta conectados. Calcule a curvatura discreta em cada ponto da malha conhecendo a matriz de conectividade e os vetores de coordenadas.

4 Mecânica do contínuo

4.1 Solução de problema térmico permanente 1D

Neste exemplo deseja-se calcular a distribuição de temperatura unidimensional em regime permanente em uma barra com dimensão adimensional $L = 1$ e temperaturas constantes $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$ nas extremidades da barra.

A equação de interesse:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \tag{31}$$

para $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$

Execução do programa:

- $nx = 4$ número de pontos em x
- $L = 1.0$ comprimento total
- $dx = L/nx$ intervalo dx
- $T_i = 0.0$ condição de contorno do primeiro nó
- $T_f = 1.0$ condição de contorno do último nó

Neste problema, a discretização da derivada é em relação ao espaço e não ao tempo como nos casos do anteriores. É comum impregar os índices n para designição temporal e i para espacial. Além disto, a equação apresenta uma derivada de senguda ordem que pode ser discretizada de diversas formas (diferenças centradas, diferenças adiantadas e diferenças atrasadas), além da ordem de discretização (primeira ordem, segunda ordem, terceira ordem), tornando assim o procedimento mais preciso (ver [3]). Para a discretização temporal de primeira ordem, busca-se o valor de $v_{n+1} = v_n + \Delta T * F/m$. No caso da derivada no espaço deste problema, é necessário construir um sistema linear de equações, onde cada linha da matriz é a equação do ponto i, com isso a Eq. (31) em sua forma discreta utilizando diferenças finitas centradas, é reescrita para o nó da malha i como:

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{dx^2} = 0 \tag{32}$$

Note que nesta equação a derivada no tempo não está presente. Dizemos então a equação é um modelo de condução de calor em modo permanente.

Se usarmos uma malha com 3 elementos lineares e 4 nós igualmente espaçados, a equação do nó 2 se escreve:

$$\frac{T_1 - 2T_2 + T_3}{dx^2} = 0 \tag{33}$$

Com isso, podemos também obter as equações dos outros nós $1, 3$ e 4. Entretanto, é de se notar que encontraremos um problema com o cáculo discreto da derivada segunda nos nós de contorno, pois o nó $i - 1$ cairia fora da malha computacional (levando em considereção que a malha tem nós $1 - 4$). Diversos soluções podem ser encontradas na literatura (referencia para livro), porém pode-se sugerir o uso de derivadas de ordem mais baixas que não necessitem da informação de nós fora da malha em combinação e/ou com esquemas do tipo diferenças progressivas e atrasadas. É importante notar que ao se usar aproximações de ordem mais baixa, a precisão do cálculo estará comprometida pois o erro será da ordem da aproximação menos precisa. Para fins ilustrativos,

K	1	2	3	4	T	b
1	1	-2	1	0	T_1	0
2	1	-2	1	0	T_2	0
3	0	1	-2	1	T_3	0
4	0	1	-2	1	T_4	0

Tabela 7: Estrutura da matriz K_{ij} e vetor de carregamento b_j antes da imposição de condições de contorno.

usaremos uma aproximação de primeira ordem nos nós de contorno com deferenças progressivas para o nó 1 e diferenças atrasadas para o nó 4 respectivamente.

$$\frac{T_1 - 2T_2 + T_3}{dx^2} = 0 \tag{34}$$

$$\frac{T_4 - 2T_3 + T_2}{dx^2} = 0 \tag{35}$$

Ao final do procedimento para todos os pontos i da malha, monta-se a matriz de rigidez K_{ij}, o vetor de incógnitas T_1, T_2, T_3, T_4 e o vetor do lado direito - chamaremos aqui de b - e que para o caso da equação de de Laplace $b = 0$.

Este procedimento resultará em um sistema linear de equações do tipo $Ax = b$ que poderá ser resolvido para obtenção dos valores da temperatura nos nós da malha. Entretanto, o aluno deve ainda se atentar ao fato de que de alguma maneira as condições de contorno do problema sejam passadas para o sistema linear e a solução das temperaturas forneça os valores corretos do problema particular, ao invés do problema geral. Uma discussão mais profunda deste procedimento pode ser encontrada em (referencia para livro).

O problema a ser resolvido, impõe condições de contorno de temperatura definida nos nós de contorno (1 e 4), com isso pode-se reescreve as equações deste nós e substituir nas linhas 1 e 4 da matriz K_{ij} por equações triviais, ou seja:

$$\frac{T_1 - 2T_2 + T_3}{dx^2} = 0 \longrightarrow 1T_1 = 0.0 \tag{36}$$

e

$$\frac{T_4 - 2T_3 + T_2}{dx^2} = 0 \longrightarrow 1T_4 = 1.0 \tag{37}$$

Note que a matriz K_ij não será alterada no seu tamanho, ou seja, permanecendo uma matriz 4×4. Outras técnicas podem ser usadas, como por exemplo a eliminação das linhas 1 e 4, e a consequente redução das dimensões da matriz, já que não há necessidade de calcular os valores de T_1 e T_4 (condições de contorno do problema). O método de penalidade também pode ser usado para imposição de condições de contorno (ver [2]). Entretanto, mantenhamo-nos no procedimento de substituição das equações e, ao final, verifica-se que as linhas 2 e 3 são dependentes dos valores de T_1 e T_4 e uma atualização deve ser procedida. Para isso, passamos os valores diferentes de zero da coluna 1 e multiplicado pela condição de contorno no nó 1 e subtraindo do vetor b. Repetimos o procedimento para o nó 4, passando os valores diferentes de zero da coluna 4 e multiplicado pela condição de contorno no nó 4 e subtraindo do vetor b do vetor b.

Após a obtenção do novo sistema linear representativo da equação de Laplace com as condições de contorno do problema, resolve-se o sistema linear invertendo a matriz de rigidez K_{ij} e multiplicando-a pelo vetor resultante b.

Tente resolver o mesmo problema com um número de pontos maior. Observe se há diferença na solução do problema. Mude os esquemas de diferenças finitas e verifique o grau de facilidade de implementação e o compromisso com a ordem de aproximação.

K	1	2	3	4	T	b
1	1	0	0	0	T_1	0
2	0	-2	1	0	T_2	$0-1T_1$
3	0	1	-2	1	T_3	$0-1T_4$
4	0	0	0	1	T_4	1

Tabela 8: Estrutura da matriz K_{ij} e vetor de carregamento b_j depois da imposição de condições de contorno do tipo Dirichlet nas duas extremidades ($T_1 = 0, T_4 = 1$).

4.2 Solução de problema térmico permanente com geração de calor 1D

Neste exemplo deseja-se calcular a distribuicao de temperatura unidimensional em regime permanente em uma barra com dimensão adimensional $L = 1$ e temperaturas adimensionais constantes $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 0$ nas extremidades da barra e com geração de calor Q.

A equação de interesse:

$$\alpha \frac{d^2T}{dx^2} = Q \tag{38}$$

para $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 0$

Execução do programa:

- $nx = 40$ número de pontos em x
- $L = 1.0$ comprimento total
- $dx = L/nx$ intervalo dx
- $Ti = 0.0$ condição de contorno do primeiro nó
- $Tf = 0.0$ condição de contorno do último nó
- $\alpha = 1.0$ difusividade térmica do material
- $Q = 2.0$ fonte de calor

4.3 Solução de problema térmico transiente 1D

Neste exemplo deseja-se calcular a evolucao temporal da distribui cão de temperatura unidimensional em uma barra com dimensao $L = 1$ e temperaturas constantes $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$ nas extremidades da barra.

A equação de interesse:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \frac{d^2T}{dx^2} \tag{39}$$

para $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$

A solução da equação em estado permanente se escreve:

$$T(x) = c_1 x + c_2 \tag{40}$$

Com constantes c_1 e c_2 a serem determinadas através da aplicação das condições de contorno. Para condições de contorno arbitrárias com temperatura fixa nas extremidades (condição de contorno do tipo Dirichlet), as constantes assumem os seguintes valores:

$$c_1 = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{L} \qquad c_2 = T_{s1} \tag{41}$$

onde T_{s1} é a temperatura da superfície 1 e T_{s2} é a temperatura da superfície 2. Com isso, a distribuição de temperatura para o caso de duas condições de contorno do tipo Dirichlet toma a forma:

$$T(x) = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{L} x + T_{s1} \tag{42}$$

Para o caso do problema sugerido, a solução final toma a forma de:

$$T(x) = \frac{x}{L} \tag{43}$$

4.4 Solução de problema térmico transiente 1D com geração de calor

Neste exemplo deseja-se calcular a evolucao temporal da distribuicao de temperatura unidimensional em uma barra com dimensao $L = 1m$ e temperaturas constantes $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$ nas extremidades da barra. A forma forte do problema se escreve:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \frac{d^2T}{dx^2} + Q \tag{44}$$

para $T(x = 0) = 0$ e $T(x = L) = 1$

A solução da equação em estado permanente se escreve:

$$T(x) = -\frac{QL}{2k}\left(x - \frac{x^2}{L}\right) + \frac{T_{s2}}{L}x + T_{s1} \tag{45}$$

Esta é a solucao particular para temperatura da superficie 1 igual a T_{s1} e temperatura da superficie 2 igual a T_{s2} no caso permanente ($\partial/\partial t = 0$). No caso de tomarmos as condições de contorno do problema $T_{s1} = T_{s2} = 0$, a solução da distribuição de temperatura $T(x)$ fica:

$$T(x) = -\frac{QL}{2k}\left(x - \frac{x^2}{L}\right) \tag{46}$$

4.5 Solução de equação de transporte

Neste exemplo deseja-se calcular a posição do perfil de temperatura T em função do tempo através da equação diferencial parcial usando o método de diferencas finitas com as seguintes metodologias:

- diferencas centradas
- upwind 1a. ordem
- upwind 2a. ordem
- semi-lagrangiano 1a. ordem
- semi-lagrangiano 2a. ordem
- lagrangiano

A equação diferencial parcial para $T(t, x)$:

$$\frac{dT}{dt} + v\frac{dT}{dx} = 0 \tag{47}$$

O número de Courant (CFL) é definido como:

$$CFL = v\frac{dt}{dx} \tag{48}$$

Tabela 9: Condições iniciais da simulação para equação de transporte.

tempo inicial	velocidade inicial	CFL	perfil inicial
$[s]$	$[m]/[s]$	$-$	$[m]$
$time = 0.0$	$a = 1.0$	0.5	$T[i] = \sin(\pi * (X[i] - L/6.0)/(L/6.0))$

Condições iniciais:

Usando o método de diferenças centradas para o termo espacial e um esquema explícito de derivação temporal, obtém-se a seguinte expressão para a equação:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{dt} - v^n \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2dx} = 0 \tag{49}$$

note que nesta equação o índice i representa a variação espacial, enquanto que n representa a variação temporal.

Para o método de upwind de 1a. ordem, a seguinte expressão é usada:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{dt} - v^n \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{dx} = 0 \tag{50}$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{dt} - v^n \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{dx} = 0 \tag{51}$$

Para o método de upwind de 2a. ordem, a seguinte expressão é usada:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{dt} - v^n \frac{-1T_{i+2}^n + 4T_{i+1}^n - 3T_i^n}{2dx} = 0 \tag{52}$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{dt} - v^n \frac{3T_i^n - 4T_{i-1}^n + T_{i-2}^n}{2dx} = 0 \tag{53}$$

No método Semi-lagrangiano, discretiza-se a derivada material $DT(x,t)/Dt$ diretamente aon invés do termo transiente e do termo convectivo (representação euleriana) como feito anteriormente. Para tal, é necessário encontrar o valor de $T(x,t)$ no passo de tempo anterior fazendo-se uma busca na malha e interpolando o valor de $T(x,t)$ na posição x_d^{n-1}:

$$\frac{DT}{Dt} \approx \frac{T^{n+1}(x^n) - T^n(x_d^{n-1})}{\Delta t} = 0 \tag{54}$$

Para sabermos qual é o valor de T na posição x_d^{n-1} precisamos calcular x_d através da seguinte equação:

$$\frac{x^n - x_d^{n-1}}{\Delta t} = v^n \tag{55}$$

de modo que o valor final de x_d^{n-1} possa ser encontrado:

$$x_d^{n-1} = x^n - \Delta t v^n \tag{56}$$

Este procedimento define a malha computacional do tempo anterior $n-1$, a qual chamaremos aqui de x_d. Esta malha é então usada para encontrar o valor de $T^n(x_d)$ através de uma interpolação dos valores de T^n em todos os pontos da mala x_d. Esta interpolação é necessária pois os valores de T geralmente não coincidem com os pontos da malha x_d. Uma vez encontrados os valores de T^n, calcula-se a derivada material para encontrar o valor de T^{n+1}:

$$\frac{T^{n+1}(x^n) - T^n(x_d^{n-1})}{\Delta t} = 0 \tag{57}$$

$$T^{n+1}(x^n) = T^n(x_d^{n-1}) \tag{58}$$

5 Escoamento multifásico

5.1 Introdução

Escoamentos multifásicos são encontrados abundamente na natureza. Ascensão de bolhas de ar em um copo de água gaseificada, o movimento das ondas do mar e o deslocamento de dunas de areia são alguns exemplos típicos deste complexo e intrigante fenônemo. Em dutos de petróleo também encontra-se escoamentos com mais de uma fase. Nestes dutos verificamos a presença de um líquido que se movimenta continuamente e carrega consigo partículas de sólidos dispersas, além de bolhas que se quebram e se aglomeram ao serem transportadas. Notamos ainda que o sangue contém partículas que são transportadas para promoção da nutrição de órgãos do nosso corpo.

Escoamentos com partículas são caracterizados por uma fase contínua, que pode ser líquida ou gasosa, e uma fase dispersa. A fase contínua é representada pela descrição do campo de velocidades e pressão através das equações de quantidade de movimento e continuidade utilizando-se a hipótese do contínuo (referência para a hipótese - livro). A fase dispersa, por sua vez, pode ser descrita através das equações da mecânica de massas pontuas, caracterizada pela quantidade de partículas presentes no escoamento, bem como pela dimensão e massa das mesmas. Dependendo destes fatores, e de alguns outros, o padrão do escoamento muda.

Nas seções seguintes sugerem-se exercícios para a modelagem simplificada de escoamentos multifásicos envolvendo uma fase contínua (água, ar e azeite) e uma fase dispersa, representado por uma partícula solitária ou por múltiplas partículas.

5.2 Escoamento com partícula - solução numérica

Deseja-se calcular a trajetoria de uma partícula em um canal sob efeito de um perfil de velocidades conhecido (dado por uma função em y) e submetida às forças de gravidade F_g, de arrasto F_{drag} e de sustentação F_{lift}. O perfil de velocidades é uma função unidimensional, pois só varia na direção y, entretanto as partículas estão localizadas no plano $x - y$. Diversas condições de contorno podem ser adotadas para as partículas, como condições de contorno de não deslizamento, elásticas e periódicas. Neste problema, deseja-se modelar o efeito de paredes elásticas para $y = 0$ e $y = y_{max}$, onde o efeito de elasticidade é completo, ou seja, a partícula rebate na parede com a mesma velocidade de choque. Para os contornos em $x = 0$ e $x = x_{max}$, modelaremos um canal infinito, onde a condição de periodicidade deve ser imposta em $x = x_{max}$ para repetir a trajetória da partícula no início do canal quando a coordenada x da partícula apresentar valor $x > x_{max}$. Note que a fase contínua (fluido) poderá ser modelada conforme Tabela (11).

A equacao vetorial de movimento da partícula no plano $x - y$ se escreve:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{drag} + \mathbf{F}_{lift} + \mathbf{F}_g \tag{59}$$

onde:

$$\mathbf{F_{drag}} = 3\pi\mu d_p v \tag{60}$$

$$\mathbf{F_{lift}} = 1.61\sqrt{\mu\rho_d}\, dp^2 |u - v| \frac{du}{dy}\sqrt{\left|\frac{du}{dy}\right|} \tag{61}$$

$$\mathbf{F_g} = mg \tag{62}$$

Note que esta equação vetorial tem solução analítica, não havendo necessidade de solução numérica, porém neste problema usaremos uma aproximação numérica explícita para encontrarmos v^{n+1} e, consequentemente, a posição das partículas x^{n+1}.

O perfil de velocidade $v(y)$ é conhecido e não deve ser calculado neste exemplo, tomando a forma:

$$v(y) = \frac{6}{L^2}(yL - y^2) \tag{63}$$

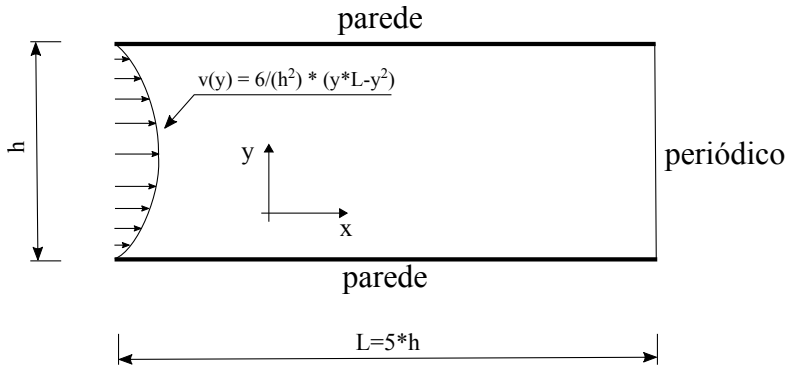


Figura 11: Domínio numérico e condições de contorno para partículas e perfil de velocidade.

As condições de contorno deste problema pode ser visualizadas na Fig. (11):

Dados da simulação:

fluido (fase contínua)

Tabela 10: Propriedades de algumas fases contínuas.

fluido	viscosidade $[N][s]/[m^2]$	densidade $[kg]/[m^3]$	temperatura $[^\circ]$
ar	$\mu = 17.2e-6$	$\rho = 1.225$	$T = 25$
água	$\mu = 1.003e-3$	$\rho = 997.0$	$T = 25$
azeite	$\mu = 81.0e-3$	$\rho = 703.0$	$T = 15$

partícula (fase dispersa)

Tabela 11: Propriedades de algumas fases dispersas. O volume pode ser calculado a partir de $V_p = (1.0/6.0)\pi d_p^3$, enquanto que a massa é dada por $m = \rho_p V_p$.

material	diâmetro $[m]$	densidade $[kg]/[m^3]$
madeira	$d_p = 1.0e-3$	$\rho = 785.0$
alumínio	$d_p = 1.0e-3$	$\rho = 2700.0$

condição inicial

- $v_x = 0.3$ $[m]/[s]$ velocidade
- $v_y = -0.1$ $[m]/[s]$ velocidade
- $x = 1.7$ $[m]$ posição
- $y = 0.3$ $[m]$ posição
- $time = 0.0$ $[s]$ tempo
- $g = 9.81$ $[m]/[s^2]$ gravidade

passo de tempo

- $dt = 0.01$ $[s]$ passo de tempo

5.3 Escoamento com múltiplas partículas

5.3.1 Acoplamento *One-way* sem choque entre partículas

Neste exemplo, deseja-se conhecer a trajetória de múltiplas partículas dispersas em um meio contínuo como no exercício anterior. Estas partículas estão em um canal sob efeito de um perfil de velocidades não conhecido e submetida às forças de gravidade F_g, de arrasto F_{drag} e de sustentação F_{lift}.

O perfil de velocidades é uma função unidimensional, pois só varia na direção y, entretanto as partículas estão localizadas no plano $x-y$. As condições de contorno deste problema são idênticas às condições de contorno do problema anterior, ou seja, de paredes elásticas para $y=0$ e $y=y_{max}$ e condição de contorno periódica para $x=0$ e $x=x_{max}$.

A equacao vetorial de movimento da uma partícula no plano $x-y$ se escreve:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{drag} + \mathbf{F}_{lift} + \mathbf{F}_g \tag{64}$$

onde:

$$\mathbf{F_{drag}} = 3\pi\mu d_p v \tag{65}$$

$$\mathbf{F_{lift}} = 1.61\sqrt{\mu\rho_d}\, dp^2|u-v|\frac{du}{dy}\sqrt{\left|\frac{du}{dy}\right|} \tag{66}$$

$$\mathbf{F_g} = mg \tag{67}$$

Para a representação de múltiplas partículas, pode-se usar estruturas numéricas que possibilitem a descrição de partículas simultaneamente. O uso de vetores numéricos é uma opção para a realização de operações básicas como soma e multiplicação. Com isso, deve-se alocar espaço para um vetor com um número n de itens, de modo que n represente o número total de partículas do problema. Tendo em vista as equações do movimento da partícula e das forças, vetores de posição x e y e de velocidade v_x e v_y devem ser criados. Na tabela abaixo são sugeridos alguns valores iniciais para o problema de múltiplas partículas. Note que os vetores de posição x e y são iniciados através de uma função aleatória de posição, onde os valores entre parênteses representam os limites da aleatoriedade. O mesmo se aplica para os vetores de velocidade v_x e v_y, garantindo assim que as partículas não sejam inicializadas com os mesmos valores de posição e velocidade.

\# condição inicial

- $numParticles = 1$ número total de partículas
- v_x = np.random.uniform(-0.1,0.1,(numParticles,1))
- v_y = np.random.uniform(-0.1,0.1,(numParticles,1))
- x = np.random.uniform(2.0,1.0,(numParticles, 1))
- y = np.random.uniform($0.8h$,$0.2h$,(numParticles, 1))
- $time = 0.0$ $[s]$ tempo
- $g = 9.81$ $[m]/[s^2]$ gravidade

\# passo de tempo

- $dt = 0.01$ $[s]$ passo de tempo

Referências

[1] G. Booch. *Object Oriented Analysis and Design with Applications.* Addison-Wesley, 2a. edition, 1993.

[2] J. Fish and T. Belytschko. *A First Course in Finite Elements.* John Wiley & Sons, Ltd, 1 edition, 2007.

[3] A.O. Fortuna. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos.* edUSP, 1a. edition, 2000.

[4] M.T Heath. *Scientific Computing - An Introductory Survey.* McGraw Hill, 2a. edition, 2002.