

Departamento/Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
Metalúrgica e de Materiais – Escola Politécnica/COPPE  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

# Fenômenos de Transferência

Com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia

## Volume 2: Aplicações

José da Rocha Miranda Pontes  
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

Norberto Mangiavacchi  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

Leonardo Santos de Brito Alves  
Universidade Federal Fluminense – UFF

Silvia da Costa Hirata  
Université Lille 1

Reinaldo Roberto Rosa  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

Kémelli Campanharo Estacio-Hiroms  
The University of Texas at Austin

Gustavo Rabello dos Anjos  
Massachussets Institute of Technology – MIT

Abril 2013

Fenômenos de Transferência com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia

José da Rocha Miranda Pontes

Norberto Mangiavacchi

Maio 2010

Cadastrado no Registro de Direitos Autorais da Fundação Biblioteca Nacional  
sob o número 351717, livro 648, folha 377

À memória de  
Júlia Adriana da Rocha Miranda



# Sumário

Prefácio dos autores	vii
<b>III Análise de Estabilidade Linear em Camadas de Mistura</b>	<b>1</b>
<b>11 Jatos: Camadas de Mistura Cilíndricas</b>	<b>3</b>
11.1 Introdução . . . . .	3
11.2 Modelo para Escoamento Descontínuo . . . . .	4
11.3 Jato Livre Descontínuo . . . . .	9
11.4 Jato Transversal Descontínuo . . . . .	11
11.5 Modelo para Escoamento Contínuo . . . . .	22
11.6 Jato Livre Contínuo . . . . .	26
11.7 Jato Transversal Contínuo . . . . .	32
11.8 Problemas . . . . .	51
<b>IV Convecção de Rayleigh-Bénard</b>	<b>53</b>
<b>12 O Problema de Rayleigh-Bénard: Estabilidade Linear</b>	<b>55</b>
12.1 Introdução . . . . .	55
12.2 Comportamento Linear, Não Linearidade Fraca e Não Linearidade Forte . .	56
12.3 Comportamento Linear . . . . .	57
<b>13 O Problema de Rayleigh-Bénard: Equações de Amplitude</b>	<b>67</b>
13.1 O Método de Multi-escalas . . . . .	67
13.2 As Equações de Evolução com Escalas Lentas de Tempo e de Espaço . . .	72
13.3 A Solução em Série de Potências da Distância ao Ponto de Bifurcação . .	73
13.4 Equações de Ginzburg-Landau . . . . .	96
13.5 Equações de Newell-Witthead-Segel . . . . .	100

13.6 Estabilidade de Estruturas Espaciais . . . . .	101
13.7 Estruturas Fora de Sintonia com o Modo Crítico . . . . .	104
<b>14 O Problema de Rayleigh-Bénard: Equação de Swift-Hohenberg</b>	<b>109</b>
14.1 Introdução . . . . .	109
14.2 A Equação de Swift-Hohenberg . . . . .	110
14.3 Resultados Numéricos . . . . .	111
14.4 Conclusões . . . . .	118
<b>15 Caos Determinístico em Sistemas de Rayleigh-Bénard</b>	<b>121</b>
15.1 O Modelo de Lorenz . . . . .	121
15.2 Coerência do Modelo . . . . .	125
15.3 Problemas . . . . .	126
<b>V Estabilidade Hidrodinâmica em Células Eletroquímicas</b>	<b>127</b>
<b>16 Estabilidade Hidrodinâmica em Células Eletroquímicas – Campos Hidrodinâmico e de Concentração Desacoplados</b>	<b>129</b>
16.1 Introdução . . . . .	129
16.2 Instabilidades de Corrente no Sistema $\text{Fe} - \text{H}_2\text{SO}_4$ . . . . .	131
16.3 O Campo Hidrodinâmico com a Viscosidade Estratificada . . . . .	134
16.4 Estabilidade Hidrodinâmica: Perturbações Unidimensionais . . . . .	137
16.5 Estabilidade Hidrodinâmica: Perturbações Tri-dimensionais . . . . .	140
<b>17 Estabilidade Hidrodinâmica em Células Eletroquímicas – Campos Hidrodinâmico e de Concentração Acoplados</b>	<b>153</b>
17.1 Acoplamento da Hidrodinâmica ao Campo de uma Espécie Química . . . . .	153
17.2 O Campo Estacionário . . . . .	154
17.3 Estabilidade Hidrodinâmica: Perturbações Tri-dimensionais . . . . .	159
17.4 Conclusões . . . . .	180
<b>VI Tópicos Especiais em Fenômenos de Transferência</b>	<b>183</b>
<b>18 Instabilidades e Padrões de Turbulência no Universo</b>	<b>185</b>
18.1 Introdução . . . . .	185
18.2 Instabilidades e Regimes Turbulentos em Fluidos Neutros e Ionizados . . . . .	186

18.3 Caracterização Estatística de Padrões Turbulentos . . . . .	188
18.4 Padrões Turbulentos em Escalas Estelares . . . . .	189
18.5 Padrões Turbulentos em Escalas Galácticas . . . . .	189
18.6 Padrões Turbulentos em Escalas Cosmológicas . . . . .	190
18.7 Conclusão . . . . .	191
<b>19 Introdução aos Escoamentos Bifásicos</b>	<b>193</b>
19.1 Introdução . . . . .	193
19.2 Equações de Governo . . . . .	195
19.3 Abordagem Numérica . . . . .	197
19.4 Abordagem Empírica ou Experimental . . . . .	202
19.5 Problemas . . . . .	207
<b>20 Escoamento de Fluidos Viscosos em Moldes</b>	<b>209</b>
20.1 Introdução . . . . .	209
20.2 Equações Governantes . . . . .	210
20.3 Condições de Contorno . . . . .	223
20.4 Modelos de Viscosidade . . . . .	224
20.5 Problemas . . . . .	225
<b>21 Transferência de Massa e Estruturas de Turing</b>	<b>227</b>
21.1 Introdução . . . . .	227
21.2 Equações Reação-Difusão . . . . .	227
21.3 Estruturas de Turing . . . . .	229
<b>22 Computação Simbólica na Análise de Estabilidade Linear</b>	<b>239</b>
22.1 Introdução . . . . .	239
22.2 Convecção Mista de Fluidos Viscoelásticos em Meios Porosos . . . . .	240
22.3 Computação Simbólica . . . . .	241
22.4 Problemas . . . . .	253
<b>VII Apêndice</b>	<b>255</b>
<b>D Álgebra Linear, Sistemas Dinâmicos e Equações Diferenciais Ordinárias</b>	<b>257</b>
D.1 Álgebra Linear e Espaços Vetoriais de Dimensão Finita . . . . .	257
D.2 Sistemas Dinâmicos . . . . .	278

D.3	Equações Diferenciais Ordinárias com Autovalores Reais e Distintos . . . . .	287
D.4	Equações Diferenciais Ordinárias com Autovalores Complexos e Distintos . .	290
D.5	Exemplos – Sistemas com Duas Variáveis . . . . .	293
D.6	Exponencial de Operadores . . . . .	297
D.7	Autovalores Repetidos e Forma Canônica de Jordan . . . . .	301
D.8	Problemas . . . . .	309

# Prefácio dos autores

Este segundo volume de nosso livro Fenômenos de Transferência com Aplicações às Ciências Físicas e Engenharia complementa o primeiro, dedicado aos fundamentos da disciplina (Partes I e II). O segundo volume compreende as Partes III a VII, com aplicações especializadas, mas centradas no estudo de instabilidades em sistemas físicos. Destina-se a estudantes de graduação em nível mais avançado e a estudantes de cursos de pós-graduação. Especificamente:

1. A Parte III comprehende o estudo da estabilidade de camadas de mistura cilíndricas e inclui contribuições do professor Leonardo Santos de Brito Alves da Universidade Federal Fluminense. Aos ele, JP e NM expressam seus agradecimentos pela contribuição;
2. A Parte IV trata do problema de Rayleigh-Bénard, que se endereça aos fenômenos que tem origem na instabilidade de uma fina lâmina de fluido cujas camadas inferiores são aquecidas e se tornam menos densas que as superiores. Essa parte contém um capítulo sobre aspectos da estabilidade linear da lâmina de fluido. O capítulo que se segue aborda o comportamento não linear de estruturas com pequeno número de modos que emergem na vizinhança da primeira instabilidade (ou bifurcação), e a emergência das instabilidades secundárias que se seguem. O capítulo que seguinte (Cap. 14) trata do comportamento não linear de estruturas contendo número arbitrário de modos de comprimento de onda próximo ao crítico. O Cap. 15 trata de aspectos sobre o comportamento caótico de células confinadas de Bénard, no regime fortemente não linear.
3. A parte V aborda o problema da estabilidade hidrodinâmica em células eletroquímicas. Todo o material apresentado nos capítulos 16 e 17 contém resultados de linha de pesquisa desenvolvida por dois de nós (JP e NM). Essa parte trata da análise de estabilidade de uma solução clássica das equações da hidrodinâmica descoberta por von Kármán (1921)[163] e modificada pela presença de um perfil estacionário de viscosidade segundo uma das direções (capítulo 16). O Cap. 17 aborda a estabilidade linear do campo de von Kármán acoplado, através da viscosidade, ao de uma espécie química. Sendo o resultado de uma das linhas de pesquisa dos autores, o material dedicado ao assunto é um relatório sobre nosso trabalho em andamento e uma proposição de problemas com potencial interesse científico para trabalhos futuros.
4. A Parte VI, denominada Tópicos Especiais em Mecânica do Contínuo, contém resultados e material em desenvolvimento dentro das linhas de pesquisa dos autores. Os Caps. 19 e 20 baseam-se em duas teses de doutoramento de nossos ex-alunos Gustavo

Rabello dos Anjos e Kémelli Campanharo Estacio-Hiroms. Esses capítulos tratam de introdução aos escoamentos bifásicos e da injeção de fluidos viscosos em moldes, respectivamente. Há também um capítulo sobre turbulência em sistemas cosmológicos, que mostra uma aplicação dos métodos tratados no primeiro volume, a um problema fora da área de interesse específico da engenharia. O capítulo foi escrito pelo prof. Reinaldo Roberto Rosa. E ainda, um capítulo sobre o uso de ferramentas de computação simbólica na análise de estabilidade linear, de autoria dos profs Leonardo Santos de Brito Alves e Silvia da Costa Hirata. Aos cinco, JP e NM expressam seus agradecimentos pela contribuição. Essa parte contém ainda um capítulo sobre instabilidades de Turing.

5. A Parte VII contém um apêndice com revisão de princípios da álgebra linear, da teoria de equações diferenciais ordinárias lineares, homogêneas a coeficientes constantes e elementos da teoria de Sistemas Dinâmicos.

Temos a agradecer a várias pessoas, que permitiram que o texto chegasse até esse ponto: Aos profs. Renato Machado Cotta e Luiz Bevilacqua da COPPE/UFRJ. Ao Departamento/Programa de Pós-graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, onde parte desse trabalho foi escrito. Ao prof. Oscar Rosa Mattos, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, pelo apoio ao estudo do problema de estabilidade hidrodinâmica em células eletroquímicas. Ao prof. Antônio Castelo Filho, da Universidade de São Paulo, que nos forneceu um dos códigos numéricos para o levantamento das curvas de estabilidade neutra desse problema. Ao Núcleo de Atendimento em Computação de Alto Desempenho (NACAD) da COPPE/UFRJ e ao Prof. Álvaro L. G. A. Coutinho, pelo uso dos computadores, onde parte importante dessas curvas foram calculadas. Aos profs. Su Jian, Átila P. S. Freire, Fernando Pereira Duda e Roberto Fernandes de Oliveira da COPPE/UFRJ, Wladimir Neves do Instituto de Matemática/UFRJ, Helio Salim Amorim e Nicim Zagury do Instituto de Física/UFRJ pelo interesse com que acompanharam, por anos, o desenvolvimento do trabalho. Aos profs. Elbert Einstein N. Macau (INPE), à prof.<sup>a</sup> Rosana Sueli da Motta Jafelice, da Universidade Federal de Uberlândia e em especial ao prof. José Alberto Cuminato, do Instituto de Ciências Matemáticas e da Computação – ICMC/USP – S. Carlos, pela orientação na escolha da SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, como a editora à qual submetemos o trabalho para publicação. A nossos alunos, pela recepção do texto, pelas críticas, sugestões e por apontarem várias vezes as incorreções do mesmo.

JP agradece também ao Engº Luiz Fernando Bonilauri pelo exame cuidadoso do manuscrito, por suas observações pertinentes e por seu exemplo como pessoa e como profissional. Agradece em especial ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica e à Universidade Livre de Bruxelas, a quem deve sua formação acadêmica.

Os autores agradecem apoio financeiro da agências de fomento CNPq, CAPES e FAPERJ.

E agradecemos a nossos familiares, pelo tempo de convívio que nos cederam, para que pudéssemos nos dedicar aos resultados aqui incluídos e à preparação do texto.

Rio de Janeiro, 12 de abril de 2014

José da Rocha M. Pontes  
Norberto Mangiavacchi



## Parte III

# Análise de Estabilidade Linear em Camadas de Mistura



# Capítulo 11

## Jatos: Camadas de Mistura Cilíndricas

Leonardo S. de B. Alves

*Laboratório de Mecânica Teórica e Aplicada*

*Departamento de Engenharia Mecânica*

*Universidade Federal Fluminense*

### 11.1 Introdução

O capítulo atual apresenta uma extensão da análise feita no capítulo anterior sobre camadas de mistura incompressíveis, saindo do caso plano e passando para o caso cilíndrico. Este caso representa escoamentos que são mais conhecidos na literatura especializada como jatos. Dois tipos canônicos serão descritos aqui, jatos livres e transversais. Os jatos livres são aqueles formados com a saída de fluido, inicialmente escoando dentro de um injetor, para um meio inerte contendo o mesmo fluido ou até mesmo um fluido diferente. Já os jatos transversais são formados quando o meio onde o fluido é injetado se move perpendicularmente em relação ao injetor. Nos dois casos, os injetores são, essencialmente, bocais convergentes ou dutos com área de seção transversal constante. Os resultados apresentados aqui são frutos de trabalhos anteriores já publicados [45, 107, 46, 85], mas também contém uma série de extensões importantes.

Seis seções são usadas para descrever instabilidades em camadas de mistura cilíndricas. A primeira mostra as equações diferenciais que modelam um escoamento não-viscoso. As duas seções seguintes descrevem o comportamento de jatos não-viscosos livres e transversais, ambos descontínuos na interface entre o jato e o escoamento externo. Neste caso, as equações para um escoamento irrotacional são utilizadas para modelar seus comportamentos. Outras três seções são apresentadas na seqüência seguindo o mesmo padrão, porém agora para o caso viscoso e rotacional, onde a vorticidade se encontra distribuída ao longo de uma região finita

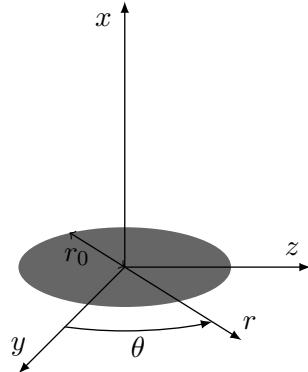


Figura 11.1: Sistema de coordenadas cilíndricas usado para jatos

e não-nula conhecida como camada de mistura. O comportamento instável de jatos livres já é bastante conhecido na literatura [53, 142]. Contudo, eles são novamente discutidos aqui por servirem de base para o estudo dos jatos transversais, onde a instabilidade das camadas de mistura cilíndricas é modificada pelo escoamento transversal.

Todos os escoamentos que serão mostrados e discutidos nestas seções tomam como referência o sistema de coordenadas cilíndricas  $(x, r, \theta)$  apresentado na Fig. 11.1, onde o referencial Cartesiano  $(x, y, z)$  também é mostrado para fins de comparação. Nesta figura, o disco cinza representa o fim do duto ou bocal por onde saí o jato, que ainda está alinhado com o eixo  $x$  imediatamente ao sair de um ou outro.

## 11.2 Modelo para Escoamento Descontínuo

O problema de autovalor para jatos na ausência de viscosidade é estabelecido a partir de funções potenciais, chamadas de  $\phi = \phi_i$  e  $\phi_e$  para suas regiões interna e externa, respectivamente. Como este escoamento é assumido não-viscoso, uma folha de vorticidade existe e está concentrada na descontinuidade que se inicia em  $r = r_0$  quando  $x = 0$ , separando as duas regiões do jato. Fora desta folha, o escoamento é irrotacional.

### 11.2.1 Equações de Governo

As equações de governo são obtidas combinando a equação da continuidade  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  com a definição da velocidade potencial  $\mathbf{u} = \mathbf{grad} \phi$ . Desta forma, temos

$$\nabla^2 \phi_i = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \theta^2} = 0, \quad (11.1)$$

para a região interna e

$$\nabla^2 \phi_e = \frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi_e}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_e}{\partial \theta^2} = 0, \quad (11.2)$$

para a região externa, sempre com  $r \neq \varrho(x, \theta, t)$ , que é a posição da interface. O campo de pressão em ambas as regiões é obtido a partir da equação de Bernoulli. Com isso, temos

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad} \phi_i \cdot \mathbf{grad} \phi_i + \frac{P_i}{\rho_i} = C_i, \quad (11.3)$$

para a região interna e

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad} \phi_e \cdot \mathbf{grad} \phi_e + \frac{P_e}{\rho_e} = C_e, \quad (11.4)$$

para a região externa, onde  $\rho_i$  e  $\rho_e$  são as respectivas densidades do fluido. Vale a pena notar ainda que a gravidade será desprezada neste estudo pois impomos  $\rho = \rho_i = \rho_e$ . Além disso,  $C_i$  e  $C_e$  são as respectivas constantes da equação de Bernoulli, que não são iguais devido a folha de vorticidade que separa as duas regiões do jato.

### 11.2.2 Condições de Interface

Condições de contorno para o problema acima são facilmente impostas e serão discutidas em maiores detalhes mais a frente. Contudo, elas não são suficientes para que a função potencial e, consequentemente, a pressão sejam completamente determinadas. Para tal, é necessário impor condições de interface. A primeira delas também é conhecida como condição dinâmica. Na ausência de tensão interfacial, esta condição impõe continuidade da pressão na interface entre as regiões, ou seja,  $P_i(x, \varrho, \theta) = P_e(x, \varrho, \theta)$ . Assim sendo, as equações (11.3) e (11.4) podem ser combinadas para gerar

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad} \phi_i \cdot \mathbf{grad} \phi_i - C_i = \frac{\partial \phi_e}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad} \phi_e \cdot \mathbf{grad} \phi_e - C_e, \quad (11.5)$$

em  $r = \varrho$ . Já a segunda condição é conhecida como condição cinemática. Para entender sua origem, devemos considerar uma partícula se movendo na interface  $r = \varrho(x, \theta, t)$ . Sob uma ótica Lagrangeana, podemos dizer que esta partícula deve obedecer

$$\frac{d}{dt} (r - \varrho) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}, \quad (11.6)$$

sempre que não houver troca de massa através da interface. Voltando agora para uma ótica Euleriana, podemos re-escrever esta equação como

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad (11.7)$$

que é verdade para  $\phi = \phi_i$  e  $\phi_e$ , ambos em  $r = \varrho$ .

### 11.2.3 Escoamento Base

Todas as análise de estabilidade que serão feitas neste capítulo consideram o escoamento base como uma solução assintótica em regime permanente do modelo acima. Conseqüentemente, estas soluções para as funções potenciais, chamadas de  $\bar{\phi}_i$  e  $\bar{\phi}_e$  para as regiões interna e externa do jato, são obtidas das equações

$$\nabla^2 \bar{\phi}_i = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 \bar{\phi}_e = 0, \quad (11.8)$$

respectivamente. Estas equações estão sujeitas as condições de contorno tradicionais que serão especificadas durante o estudo de cada jato, separadamente. Além disso, são impostas as condições de interface

$$\left\{ \frac{1}{2} \mathbf{grad} \bar{\phi}_i \cdot \mathbf{grad} \bar{\phi}_i - C_i = \frac{1}{2} \mathbf{grad} \bar{\phi}_e \cdot \mathbf{grad} \bar{\phi}_e - C_e \right\}_{r=\bar{\varrho}}, \quad (11.9)$$

que representa continuidade de pressão, e também

$$\left\{ \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial r} = \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \theta} \right\}_{r=\bar{\varrho}} \quad \text{e} \quad \left\{ \frac{\partial \bar{\phi}_e}{\partial r} = \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}_e}{\partial \theta} \right\}_{r=\bar{\varrho}}, \quad (11.10)$$

que representam a ausência da troca de massa entre as duas regiões. O escoamento base será obtido posteriormente destas equações, para cada modelo de jato estudado.

### 11.2.4 Análise de Estabilidade

Uma análise de estabilidade investiga o comportamento de perturbações introduzidas no escoamento base que se deseja estudar, sejam elas controladas pelo usuário ou não. Para tal, ela usa modelos com diferentes níveis de simplificação em relação ao problema original.

#### Linearização:

O primeiro passo na construção destes modelos é assumir que as perturbações, como o próprio nome sugere, possuem pequenas amplitudes. Desta forma, impomos

$$\phi_i = \bar{\phi}_i + \tilde{\phi}_i \quad , \quad \phi_e = \bar{\phi}_e + \tilde{\phi}_e \quad \text{e} \quad \varrho = \bar{\varrho} + \tilde{\varrho} , \quad (11.11)$$

onde o circunflexo representa a perturbação. Para um escoamento base pré-determinado, esta separação permite que o estudo se volte para a evolução de perturbações superpostas ao escoamento base. Com isso, é necessário saber quais equações governam esta evolução.

Substituindo nas equações (11.1) e (11.2) a separação (11.11) e subtraindo (11.8) dos resultados, obtemos

$$\nabla^2 \tilde{\phi}_i = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 \tilde{\phi}_e = 0 , \quad (11.12)$$

que são as equações de governo para as perturbações. As constantes provenientes destas equações são determinadas a partir de condições de contorno, que serão definidas posteriormente para cada jato, separadamente, e também condições de interface.

As equações para o escoamento base (11.8) e perturbações (11.12) são equivalentes porque o sistema original (11.1) e (11.2) é linear. Ao seguirmos o mesmo procedimento para as condições de interface, é necessário lidar com suas não-linearidades. Substituindo (11.11) na condição dinâmica (11.5), obtemos

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{\phi}_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad} \bar{\phi}_i \cdot \mathbf{grad} \bar{\phi}_i + \mathbf{grad} \bar{\phi}_i \cdot \mathbf{grad} \tilde{\phi}_i + \frac{1}{2} \mathbf{grad} \tilde{\phi}_i \cdot \mathbf{grad} \tilde{\phi}_i - C_i \\ &= \frac{\partial \tilde{\phi}_e}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad} \bar{\phi}_e \cdot \mathbf{grad} \bar{\phi}_e + \mathbf{grad} \bar{\phi}_e \cdot \mathbf{grad} \tilde{\phi}_e + \frac{1}{2} \mathbf{grad} \tilde{\phi}_e \cdot \mathbf{grad} \tilde{\phi}_e - C_e \end{aligned} \right\}_{r=\bar{\varrho}} , \quad (11.13)$$

que deve ser linearizada primeiro em relação a posição da interface antes de qualquer outro procedimento. Isto pode ser feito através da série de Taylor

$$f(x, \varrho, \theta, t) = f(x, \bar{\varrho}, \theta, t) + \tilde{\varrho} \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{r=\bar{\varrho}} + O(\tilde{\varrho}^2) , \quad (11.14)$$

onde  $f$  representa a condição dinâmica na forma (11.13). Este passo não foi executado em trabalhos anteriores [45, 46], que consideraram apenas  $f(x, \varrho, \theta, t) = f(x, \bar{\varrho}, \theta, t) + O(\tilde{\varrho})$ . Linearizando esta equação, ou seja, desprezando todos os termos envolvendo produtos de perturbações, para então subtrair (11.9) do resultado, finalmente obtemos

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{\phi}_i}{\partial t} + \mathbf{grad} \bar{\phi}_i \cdot \mathbf{grad} \tilde{\phi}_i + \frac{\tilde{\varrho}}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{grad} \bar{\phi}_i \cdot \mathbf{grad} \bar{\phi}_i) \\ &= \frac{\partial \tilde{\phi}_e}{\partial t} + \mathbf{grad} \bar{\phi}_e \cdot \mathbf{grad} \tilde{\phi}_e + \frac{\tilde{\varrho}}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{grad} \bar{\phi}_e \cdot \mathbf{grad} \bar{\phi}_e) \end{aligned} \right\}_{r=\bar{\varrho}} , \quad (11.15)$$

que é a condição dinâmica para as perturbações. Para encerrar, repetimos esta derivação para a condição cinemática. Substituindo (11.11) em (11.7), obtemos

$$\left\{ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} = \frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} \right) \right\}_{r=\varrho}, \quad (11.16)$$

que deve ser linearizada em relação a posição da interface com a aproximação (11.14), porém agora  $f$  representa a condição cinemática na forma (11.16). Desprezando os produtos entre perturbações do resultado e subtraindo (11.10), obtemos

$$\left\{ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} + \tilde{\varrho} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} = \frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right. \\ \left. + \tilde{\varrho} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right) \right\}_{r=\bar{\varrho}}, \quad (11.17)$$

que é verdade para  $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_i$  e  $\tilde{\phi}_e$ , lembrando que  $\partial \bar{\varrho} / \partial r = 0$ .

### Análise Local:

O segundo passo desta análise é assumir que os escoamentos base aqui estudados tem apenas uma direção espacial não-homogênea, ou seja, que a análise de estabilidade é local. Como a folha de vorticidade impõe uma não-homogeneidade na direção radial e a direção azimute possui uma periodicidade intrínseca, resta discutir o comportamento do escoamento na direção axial. Ela é a principal direção de propagação dos jatos considerados neste capítulo. Contudo, estes mesmos jatos evoluem lentamente nesta direção. Em outras palavras, a não-homogeneidade na direção  $x$  é fraca. Podemos então assumir

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} \simeq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x} \simeq 0, \quad (11.18)$$

o que nos leva a re-escrever a condição cinemática (11.17) como

$$\left\{ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} + \tilde{\varrho} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} = \frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} + \tilde{\varrho} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right) \right\}_{r=\bar{\varrho}}, \quad (11.19)$$

onde as outras equações para as perturbações permanecem inalteradas.

### Modo Normal:

Restringir a presente investigação para escoamentos locais nos permite ainda outra hipótese simplificadora, porém agora sobre a natureza das perturbações. O próximo passo desta

análise é assumir que elas podem ser decompostas em modos de Fourier na forma

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_i \\ \tilde{\phi}_e \\ \tilde{\varrho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_i(r, \theta) \\ \Phi_e(r, \theta) \\ \Psi(\theta) \end{pmatrix} \exp[i(\alpha x - \omega t)] + c.c., \quad (11.20)$$

onde *c.c.* significa seu complexo conjugado e a letra  $i$  não subscrita é o número complexo  $i = \sqrt{-1}$ . Nesta formulação,  $\Phi$  e  $\Psi$  são as amplitudes das perturbações na função potencial e posição da interface, respectivamente. A análise local do escoamento nos permite assumir que o número de onda  $\alpha$  é constante para cada modo de freqüência  $\omega$ . Já a hipótese de modos normais no tempo e em  $x$  nos permite dar uma passo a mais. Ela diz que cada par  $(\alpha, \omega)$  é independente ou desacoplado de qualquer outro par  $(\alpha, \omega)$ . Já o comportamento das perturbações com respeito à direção azimute será discutida separadamente em cada caso estudado nas próximas subseções.

Um interlúdio deve ser feito para explicar os papéis de  $\alpha$  e  $\omega$ . Ambos podem, a princípio, ser números complexos. Ainda mais importante do que isso, são justamente estas partes complexas que ditam o comportamento das perturbações e, consequentemente, a estabilidade linear de um escoamento base. A Figura 11.2 ilustra os resultados obtidos do problema de autovalor generalizado. Uma vez conhecido o mapa de um escoamento base, fica mais fácil entender algumas hipóteses simplificadoras adicionais que são tradicionalmente feitas. Quando existe instabilidade convectiva, costuma-se impor que  $\text{Im}[\omega] = 0$  para o cálculo e análise do número de onda complexo  $\alpha$ . Em outras palavras, as perturbações são consideradas periódicas no tempo. Da mesma forma, se impõe  $\text{Im}[\alpha] = 0$  para o estudo de  $\omega$  no caso absolutamente instável, i.e., as perturbações são periódicas no espaço (em  $x$ ).

Substituindo (11.20) em (11.12), encontramos a equação de governo

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \alpha^2 \Phi = 0, \quad (11.21)$$

para as amplitudes das perturbações, uma vez que ela é válida para  $\Phi = \Phi_i$  e  $\Phi_e$ .

O mesmo deve ser feito agora para as condições de interface linearizadas. Substituindo (11.20) na condição dinâmica linearizada (11.15), obtemos

$$\left\{ -i \left( \omega - \alpha \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial x} \right) \Phi_i + \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} + \frac{\Psi}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{grad} \bar{\phi}_i \cdot \mathbf{grad} \bar{\phi}_i) \right\}_{r=\bar{r}} = 0, \quad (11.22)$$

$$= -i \left( \omega - \alpha \frac{\partial \bar{\phi}_e}{\partial x} \right) \Phi_e + \frac{\partial \bar{\phi}_e}{\partial r} \frac{\partial \Phi_e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}_e}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} + \frac{\Psi}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{grad} \bar{\phi}_e \cdot \mathbf{grad} \bar{\phi}_e) \Big|_{r=\bar{r}},$$

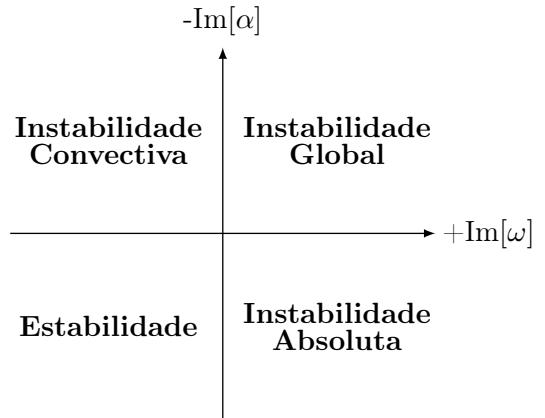


Figura 11.2: Mapa da estabilidade linear de modos normais num escoamento base local

e fazendo o mesmo com a condição cinemática linearizada (11.19), obtemos

$$\left\{ \left( i \left( \omega - \alpha \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right) \right) \Psi - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{d\theta} = \right. \\ \left. - \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\}_{r=\bar{\varrho}}, \quad (11.23)$$

que é verdade para  $\Phi = \Phi_i$  e  $\Phi_e$ .

## 11.3 Jato Livre Descontínuo

O primeiro caso que será abordado neste capítulo é o do jato inserido num meio contendo o mesmo fluido, porém em repouso, conhecido como jato livre. Suas particularidades e detalhes, mesmo já bastante estudados na literatura, são discutidos nas próximas seções como base para a análise posterior do jato transversal.

### 11.3.1 Escoamento Base

Podemos agora determinar o perfil do jato livre  $\bar{\phi} = \bar{\phi}_0$  e  $\bar{\varrho} = \bar{\varrho}_0$ , para uso na análise de estabilidade que vem a seguir. Ele toma a forma da solução de regime permanente

$$\bar{\phi}_0 = \begin{cases} \bar{\phi}_{i,0} & , r < \bar{\varrho}_0 \\ \bar{\phi}_{e,0} & , r > \bar{\varrho}_0 \end{cases} \quad \text{onde} \quad \bar{\phi}_{i,0} = x, \quad \bar{\phi}_{e,0} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\varrho}_0 = 1, \quad (11.24)$$

que satisfazem (11.8) à (11.10), onde o vetor velocidade potencial  $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{grad} \bar{\phi}_0$  é

$$\bar{u}_0 = \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial x} = \begin{cases} 1 & , r < \bar{\varrho}_0 \\ 0 & , r > \bar{\varrho}_0 \end{cases}, \quad \bar{v}_0 = \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{w}_0 = \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial z} = 0, \quad (11.25)$$

e  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  são as componentes do vetor velocidade nas respectivas direções  $(x, r, \theta)$ , que foram escritas na forma adimensional usando o raio do bocal ou duto  $R_0$  e a velocidade do jato na saída destes  $U_j$ .

### 11.3.2 Análise de Estabilidade

A relação de dispersão, o principal resultado de uma análise de estabilidade linear, para este escoamento base já é conhecida fazem quase cinco décadas [11]. Para obtê-la, se faz necessário definir a dependência azimute das amplitudes de cada perturbação.

#### Modo Normal:

Tradicionalmente, considera-se um modo normal na forma

$$\begin{pmatrix} \Phi_i \\ \Phi_e \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{i,0}(r) \\ \Phi_{e,0}(r) \\ \Psi_0 \end{pmatrix} \exp[i m \theta] + c.c., \quad (11.26)$$

onde  $m$  é o número (inteiro) de azimute.

Substituindo esta nova aproximação (11.26) em (11.21), obtemos

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi_0}{dr} \right) - \left( \alpha_0^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \Phi_0 = 0 , \quad (11.27)$$

que é a equação de governo para a amplitude das perturbações  $\Phi_0 = \Phi_{i,0}$  e  $\Phi_{e,0}$ . Vale a pena notar que substituímos  $\alpha$  por  $\alpha_0$  na expressão acima e nas seguintes também, mas o motivo desta mudança de notação ficará claro apenas quando tratarmos do jato transversal. Outro detalhe importante deve ser mencionado. A razão pela qual modos de Fourier positivo ( $+m$ ) e negativo ( $-m$ ) não são considerados simultaneamente se deve ao número de azimute, que aparece elevado ao quadrado na equação (11.27). Isto significa que modos positivo e negativo tem o mesmo número de onda  $\alpha_0$ , e não precisam ser incluídos juntos.

O mesmo deve ser feito para as condições de interface. Substituindo o modo normal azimute (11.26), assim como o escoamento base (11.24), na condição dinâmica simplificada (11.22), encontramos

$$\left\{ (\omega_0 - \alpha_0) \Phi_{i,0} = \omega_0 \Phi_{e,0} \right\}_{r=\bar{r}_0} , \quad (11.28)$$

e, fazendo o mesmo com a condição cinemática simplificada (11.23), encontramos

$$\left\{ i(\omega_0 - \alpha_0) \Psi_0 = \frac{d\Phi_{i,0}}{dr} \right\}_{r=\bar{r}_0} \quad \text{e} \quad \left\{ i\omega_0 \Psi_0 = \frac{d\Phi_{e,0}}{dr} \right\}_{r=\bar{r}_0} . \quad (11.29)$$

### Dependência Radial:

Agora que o problema de estabilidade linear do jato livre descontínuo chegou a sua forma mais simples, vemos claramente que a função potencial é governada por uma equação diferencial ordinária na direção radial. Portanto, basta impor condições de contorno nesta direção para chegarmos a uma solução única para (11.27). Assim, impomos

$$\Phi_{i,0}(r \rightarrow 0) = n^{\circ} \text{ finito} \quad \text{e} \quad \Phi_{e,0}(r \rightarrow \infty) = 0 , \quad (11.30)$$

uma vez que a perturbação precisa possuir um limite superior no centro do jato ao mesmo tempo em que deve desaparecer na medida que se afasta dele. Isso nos leva à

$$\Phi_{i,0} = \mathcal{A}_0 I_m[\alpha_0 r] \quad \text{e} \quad \Phi_{e,0} = \mathcal{B}_0 K_m[\alpha_0 r] , \quad (11.31)$$

cujo comportamento pode ser observado na Figura 11.3.

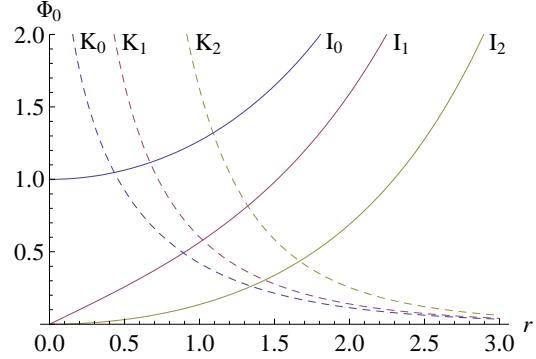


Figura 11.3: Funções de Bessel que são soluções da equação (11.27) com  $\alpha_0 = 1$  e  $m = 0, 1$  e  $2$ .

## Relação de Dispersão:

As constantes  $\mathcal{A}_0$  e  $\mathcal{B}_0$  presentes nessa solução, em conjunto com a perturbação na posição da interface  $\Psi_0$ , são determinadas pelas condições de interface que foram obtidas acima. Desta forma, substituindo a solução nas condições dinâmica (11.28) e cinemática (11.29), geramos o sistema de equações

$$\mathcal{A}_0(\omega_0 - \alpha_0) I_m[\alpha_0 \bar{\varrho}_0] = \mathcal{B}_0 \omega_0 K_m[\alpha_0 \bar{\varrho}_0] , \quad (11.32)$$

$$i(\omega_0 - \alpha_0) \Psi_0 = \mathcal{A}_0 I'_m[\alpha_0 \bar{\varrho}_0] \quad \text{e} \quad i\omega_0 \Psi_0 = \mathcal{B}_0 K'_m[\alpha_0 \bar{\varrho}_0] ,$$

para estas três incógnitas. Ao tentar resolver este sistema com  $\bar{\varrho}_0 = 1$ , devemos impor

$$D^{(0)}(m, \omega_0, \alpha_0) = \left( \frac{\omega_0 - \alpha_0}{\omega_0} \right)^2 + \frac{(I_{m+1}[\alpha_0] + I_{m-1}[\alpha_0]) K_m[\alpha_0]}{I_m[\alpha_0] (K_{m+1}[\alpha_0] + K_{m-1}[\alpha_0])} = 0 , \quad (11.33)$$

para evitarmos uma solução trivial, algo esperado para um problema de autovalor. Toda equação obtida com esta restrição é conhecida como relação de dispersão.

Jatos livres são convectivamente instáveis em condições normais de operação. Logo, o número de onda é complexo e a freqüência é real. A Figura 11.4 mostra que a taxa de crescimento espacial das perturbações cresce monotonicamente com a freqüência, o que não é um resultado observado experimentalmente. Como veremos em seções futuras, isto ocorre devido a descontinuidade no escoamento base. Além disso, esta solução é uma boa aproximação para a solução correta no limite de baixas freqüências. Desta forma, algumas conclusões já podem ser tomadas. Podemos ver nesta figura que o segundo modo helicoidal ( $m = 2$ ) é o mais instável para baixas freqüências, mas que o modo axissimétrico ( $m = 0$ ) se torna o mais instável para freqüências maiores, a partir de um certo valor crítico.

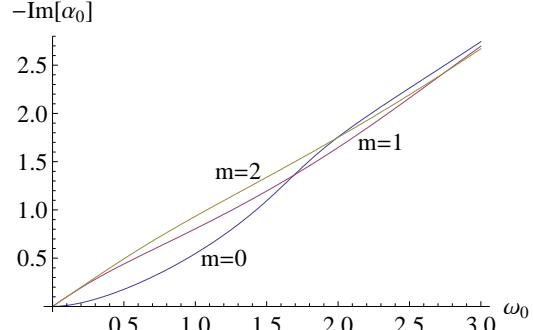


Figura 11.4: Dependência da taxa de crescimento espacial  $-Im[\alpha_0]$  com a freqüência  $\omega_0$  para  $m = 0, 1$  e  $2$ .

## 11.4 Jato Transversal Descontínuo

O segundo caso que será abordado neste capítulo é o do jato inserido num escoamento perpendicular a ele, conhecido na literatura como jato transversal. Será considerado aqui apenas o caso descontínuo, que é uma extensão do estudo discutido anteriormente. Sua análise é apresentada nas próximas subseções.

### 11.4.1 Escoamento Base

Um modelo não-viscoso, incompressível e tridimensional de uma folha de vorticidade saindo de uma tubulação para um meio escoando perpendicular a ele foi apresentado na literatura

já fazem quase três décadas [33]. Segundo este trabalho, a velocidade potencial e a posição da interface podem ser expressas de acordo com as expansões assintóticas

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}_0 + \lambda \bar{\phi}_1 + \lambda^2 \bar{\phi}_2 + O(\lambda^3) \quad \text{e} \quad \bar{\varrho} = \bar{\varrho}_0 + \lambda^2 \bar{\varrho}_2 + O(\lambda^3), \quad (11.34)$$

com  $\bar{\phi} = \bar{\phi}_i$  e  $\bar{\phi}_e$ , onde  $\lambda = U_\infty/U_j$  é o parâmetro de perturbação dado pela razão entre as velocidades do escoamento transversal  $U_\infty$  e jato  $U_j$ . Desta forma, um novo modelo para cada ordem em  $\lambda$  é obtido a partir das equações (11.8) à (11.10), gerando as soluções

$$\bar{\phi}_i = x + \lambda^2 (C_2 - x) r^2 \cos[2\theta] + O(\lambda^3), \quad (11.35)$$

para a região interna do jato transversal, ou seja,  $r < \bar{\varrho}$ , e

$$\bar{\phi}_e = \lambda \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos[\theta] - \lambda^2 \left( \frac{C_2 - x}{r^2} \right) \cos[2\theta] + O(\lambda^3), \quad (11.36)$$

para sua região externa, ou seja,  $r > \bar{\varrho}$ , onde a folha de vorticidade separando as duas regiões se encontra em

$$\bar{\varrho} = 1 - \lambda^2 \left( x(x - 2C_2) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_3[\sigma_n] \right) \cos[2\theta] + O(\lambda^3), \quad (11.37)$$

sendo que estas três equações estão escritas numa forma adimensional usando o raio do bocal ou duto  $R_0$  e a velocidade do jato na saída destes  $U_j$ . Os valores numéricos dos coeficientes  $C_2$ ,  $A_n$  e  $B_n$  são determinados ao impormos continuidade da velocidade potencial  $\bar{\phi}_i$  e suas derivadas na saída do bocal em  $x = 0$ , fazendo uso da ortogonalidade das funções de Bessel [32]. O coeficiente  $B_n$  é determinado a partir do sistema linear

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m \tau_m J_2[\tau_m]}{\sigma_m - \tau_m} = -\frac{1}{\sigma_n}, \quad (11.38)$$

o que permite avaliar os coeficientes  $A_n$  e  $C_2$  das fórmulas

$$A_n = \frac{2}{\sigma_n J_3[\sigma_n]} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m \tau_m^2 J_2[\tau_m]}{\sigma_m^2 - \tau_m^2} \quad \text{e} \quad C_2 = \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_2[\tau_m], \quad (11.39)$$

onde  $\sigma_n$  e  $\tau_n$  são os zeros da função de Bessel  $J_2$  e sua primeira derivada.

Alguns comentários devem ser feitos sobre o escoamento base descrito aqui. Estas equações são válidas para o campo próximo a saída do bocal ou duto, porém com  $x > 1/3$ . Isto permite eliminar algumas exponenciais indesejáveis e chegar na solução apresentada acima. Outra vantagem desta simplificação é o fato de  $\partial\bar{\phi}/\partial x$  não depender mais de  $x$ . Com isso, a hipótese (11.18), necessária para uma análise de estabilidade local, é automaticamente satisfeita ao impormos  $\bar{\varrho}'_2(x) \simeq 0$ . Finalmente, existe um erro na condição cinemática para a velocidade potencial do escoamento externo [4]. Isto fazia com que a solução original para  $\bar{\phi}_e$  com  $O(\lambda^2)$ , ou seja,  $\bar{\phi}_{e,2}$ , fosse trivial [32]. Vale a pena mencionar que as outras funções permaneciam inalteradas. Todos os estudos apresentados neste capítulo utilizam a versão corrigida e simplificada (11.36). Os respectivos perfis de velocidade associados a esta fórmula e também a (11.35) são mostrados na Figura 11.10 para cada ordem em  $\lambda$ .

### 11.4.2 Análise de Estabilidade

Derivar a relação de dispersão do jato transversal requer uma modificação da abordagem usada no jato livre para modelar a dependência azimute das perturbações. Tendo escolhido o modelo azimute, os passos posteriores utilizados na análise do jato livre descontínuo são então repetidos. Uma diferença importante deve ser mencionada. O comportamento local imposto para este jato livre afeta apenas as perturbações, já que o escoamento base satisfaz esta hipótese implicitamente, i.e., ele não depende de  $x$ . O mesmo não ocorre para o jato transversal, mas a hipótese de escoamento local ainda será imposta. Com isso,  $x$  se torna agora o parâmetro  $x_0$  para a velocidade e não é mais uma variável independente.

Uma aproximação adicional se faz necessária neste ponto. As condições dinâmica (11.22) e cinemática (11.23) são avaliadas na interface  $\bar{\varrho}$  do jato transversal descontínuo, que possui dependência azimute em  $O(\lambda^2)$ . Desta forma, a série de Taylor

$$f(\bar{\varrho}, \theta; x_0) \simeq f(\bar{\varrho}_0, \theta; x_0) + \lambda^2 \bar{\varrho}_2(x_0) \cos[2\theta] \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{r=\bar{\varrho}_0} + O(\lambda^3) \quad (11.40)$$

deve ser utilizada antes de prosseguirmos com a análise, onde  $f$  representa as condições de interface,  $\bar{\varrho}_0$  foi definido em (11.24) e  $\bar{\varrho}_2$  é o termo entre parênteses na relação (11.37).

#### Expansão Assintótica:

A abordagem escolhida se aproveita da forma na qual o escoamento base do jato transversal está escrita para modelar o comportamento das perturbações. Em outras palavras, buscamos descobrir como as taxas de crescimento do jato livre descontínuo são modificadas na presença de um fraco escoamento transversal. Desta forma, utilizamos as expansões assintóticas

$$\begin{pmatrix} \Phi_i \\ \Phi_e \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{i,0}^+(r) \\ \Phi_{e,0}^+(r) \\ \Psi_0^+ \end{pmatrix} \exp[+i m \theta] + \begin{pmatrix} \Phi_{i,0}^-(r) \\ \Phi_{e,0}^-(r) \\ \Psi_0^- \end{pmatrix} \exp[-i m \theta] + \lambda \begin{pmatrix} \Phi_{i,1}(r, \theta) \\ \Phi_{e,1}(r, \theta) \\ \Psi_1(\theta) \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} \Phi_{i,2}(r, \theta) \\ \Phi_{e,2}(r, \theta) \\ \Psi_2(\theta) \end{pmatrix} + c.c. , \quad (11.41)$$

e também  $\omega = \omega_0 + \lambda \omega_1 + \lambda^2 \omega_2$  e  $\alpha = \alpha_0 + \lambda \alpha_1 + \lambda^2 \alpha_2$ , todas baseadas na razão de velocidades  $\lambda$  como parâmetro de perturbação, para descrever o comportamento azimute das amplitudes. Três comentários devem ser feitos neste momento. Em primeiro lugar, apesar da estabilidade linear de um jato livre não depender da direção azimute, perturbações com ambos os sinais  $\pm m$  devem ser incluídas na análise do jato transversal. Apenas desta forma haverá uma interação adequada entre escoamento base e perturbações helicoidais. Este ponto não é relevante para perturbações axissimétricas, uma vez que elas não possuem dependência azimute. Para estas perturbações em particular, é preciso impor  $\Phi_{i,0}^+ = \Phi_{i,0}^- = \frac{1}{2} \Phi_{i,0}$ ,  $\Phi_{e,0}^+ = \Phi_{e,0}^- = \frac{1}{2} \Phi_{e,0}$  e  $\Psi_0^+ = \Psi_0^- = \frac{1}{2} \Psi_0$  devido a redundância destes termos na expansão (11.41). Segundo, as palavras axissimétrico e helicoidal são estritamente válidas apenas

para descrever a instabilidade dos jatos livres. Contudo, elas serão mantidas na análise de estabilidade linear dos jatos transversais por conveniência. Por fim, a dependência azimute das amplitudes com  $O(\lambda)$  e  $O(\lambda^2)$  não pode ser determinada *a priori*, mas pode ser obtida ao longo da análise em diferentes ordens em  $\lambda$ .

- Problema de Ordem Zero: O jato livre

Aplicando a aproximação (11.40) nas condições de interface (11.22) e (11.23), substituindo as expansões (11.34) e (11.41) nos resultados obtidos e também na equação (11.21) e coletando os diferentes coeficientes de Fourier com  $O(\lambda^0)$  do sistema resultante, percebemos que as equações encontradas para  $\Phi_{i,0}^+$  e  $\Phi_{i,0}^-$  são idênticas. Isto significa que estas amplitudes tem a mesma dependência radial, que pode diferir por uma constante. O mesmo ocorre para as outras perturbações. Logo, impondo  $\Phi_{i,0}^+ = \Phi_{i,0}^- = \Phi_{i,0}$ ,  $\Phi_{e,0}^+ = \Phi_{e,0}^- = \Phi_{e,0}$  e  $\Psi_0^+ = \Psi_0^- = \Psi_0$  para o caso helicoidal ou as relações do parágrafo anterior para o caso axissimétrico, se obtém o mesmo problema para o jato livre descontínuo descrito na seção anterior.

### Problema de Primeira Ordem:

Para determinarmos a dependência azimute das amplitudes nesta ordem, é preciso analisar com cuidado as condições de interface. Seguimos o mesmo procedimento descrito para ordem zero, porém agora coletamos os diferentes coeficientes de Fourier com  $O(\lambda)$ . Desta forma, a condição dinâmica nessa ordem é

$$\begin{aligned} & i(\alpha_0 - \omega_0)\Phi_{i,1}(1, \theta) + i(\exp[+i m \theta] + \exp[-i m \theta])(\alpha_1 - \omega_1)\mathcal{A}_0 I_m[\alpha_0] = \\ & -i\omega_0\Phi_{e,1}(1, \theta) - i(\exp[+i m \theta] + \exp[-i m \theta])\omega_1\mathcal{B}_0 K_m[\alpha_0] + (\exp[+i(m-1)\theta] \\ & + \exp[-i(m-1)\theta] - \exp[+i(m+1)\theta] - \exp[-i(m+1)\theta])m\mathcal{B}_0 K_m[\alpha_0], \quad (11.42) \end{aligned}$$

e as condições cinemáticas nesta ordem são

$$\left. \frac{\partial \Phi_{i,1}}{\partial r} \right|_{r=1} = i(\alpha_1 - \omega_1)(\exp[+i m \theta] + \exp[-i m \theta])\Psi_0 + i(\alpha_0 - \omega_0)\Psi_1(\theta) \quad (11.43)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi_{e,1}}{\partial r} \right|_{r=1} = & \left( m(\exp[+i(m-1)\theta] + \exp[-i(m-1)\theta] - \exp[+i(m+1)\theta] - \right. \\ & \left. \exp[-i(m+1)\theta]) - (\exp[+i(m-1)\theta] + \exp[-i(m-1)\theta] + \exp[+i(m+1)\theta] \right. \\ & \left. + \exp[-i(m+1)\theta]) - i\omega_1(\exp[+i m \theta] + \exp[-i m \theta]) \right) \Psi_0 - i\omega_0\Psi_1(\theta), \quad (11.44) \end{aligned}$$

deixando evidente que os autovalores de  $O(\lambda)$  não possuem a mesma dependência azimute do escoamento base nesta mesma ordem.

- Modo Normal:

Esta ausência de interação nos permite impor  $\alpha_1 = \omega_1 = 0$ , já que o interesse desta análise é descobrir como o escoamento transversal, e nada mais, influencia a instabilidade

do jato. Desta forma, devemos escrever

$$\begin{aligned}\Phi_{i,1}(r, \theta) &= \Phi_{i,1}^+(r) (\exp[+i(m+1)\theta] + \exp[-i(m+1)\theta]) \\ &\quad + \Phi_{i,1}^-(r) (\exp[+i(m-1)\theta] + \exp[-i(m-1)\theta]),\end{aligned}\quad (11.45)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{e,1}(r, \theta) &= \Phi_{e,1}^+(r) (\exp[+i(m+1)\theta] + \exp[-i(m+1)\theta]) \\ &\quad + \Phi_{e,1}^-(r) (\exp[+i(m-1)\theta] + \exp[-i(m-1)\theta]) \quad \text{e}\end{aligned}\quad (11.46)$$

$$\begin{aligned}\Psi_1(\theta) &= \Psi_1^+ (\exp[+i(m+1)\theta] + \exp[-i(m+1)\theta]) \\ &\quad + \Psi_1^- (\exp[+i(m-1)\theta] + \exp[-i(m-1)\theta]).\end{aligned}\quad (11.47)$$

- Dependência Radial:

A dependência radial destas amplitudes é determinada substituindo as expansões para  $\Phi_i$  e  $\Phi_e$  em (11.41) na equação (11.21), coletando os termos de ordem  $\lambda$  e substituindo as expressões (11.45) e (11.46) no resultado. Este procedimento nos leva às equações

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi_1^\pm}{dr} \right) - \left( \alpha_0^2 + \frac{(m \pm 1)^2}{r^2} \right) \Phi_1^\pm = 0,\quad (11.48)$$

para  $\Phi_1 = \Phi_{i,1}$  e  $\Phi_{e,1}$ , que também estão sujeitas as condições de contorno (11.30). Suas soluções, assim como as apresentadas em (11.31), são dadas por

$$\Phi_{i,1}^\pm = \mathcal{A}_1^\pm I_{m\pm 1}[\alpha_0 r] \quad \text{e} \quad \Phi_{e,1}^\pm = \mathcal{B}_1^\pm K_{m\pm 1}[\alpha_0 r].\quad (11.49)$$

- Relação de Dispersão:

Uma vez encontradas as dependências azimute e radial das amplitudes associadas a cada perturbação, dadas pelas relações (11.45) a (11.47) e (11.49), podemos então determinar suas constantes ainda desconhecidas  $\mathcal{A}_1^\pm$ ,  $\mathcal{B}_1^\pm$  e  $\Psi_1^\pm$  através das condições de interface (11.42) a (11.44). Com isso, as novas condições dinâmicas provenientes de (11.42) se tornam

$$i(\alpha_0 - \omega_0) \mathcal{A}_1^\pm I_{m\pm 1}(\alpha_0) = \mp m \mathcal{B}_0 K_m(\alpha_0) - i \omega_0 \mathcal{B}_1^\pm K_{m\pm 1}(\alpha_0)\quad (11.50)$$

e as novas condições cinemáticas provenientes de (11.43) e (11.44) se tornam

$$\alpha_0 \mathcal{A}_1^\pm I'_{m\pm 1}(\alpha_0) = i(\alpha_0 - \omega_0) \Psi_1^\pm \quad \text{e} \quad \alpha_0 \mathcal{B}_1^\pm K'_{m\pm 1}(\alpha_0) = \mp(m \pm 1) \Psi_0 - i \omega_0 \Psi_1^\pm,\quad (11.51)$$

que podem agora ser combinadas para gerar

$$\frac{\mathcal{A}_1^\pm}{\mathcal{B}_0} = \pm \frac{i(\alpha_0 - \omega_0)(m K_m(\alpha_0) K'_{m\pm 1}(\alpha_0) + (m \pm 1) K_{m\pm 1}(\alpha_0) K'_m(\alpha_0))}{(\alpha_0 - \omega_0)^2 I_{m\pm 1}(\alpha_0) K'_{m\pm 1}(\alpha_0) - \omega_0^2 K_{m\pm 1}(\alpha_0) I'_{m\pm 1}(\alpha_0)},\quad (11.52)$$

$$\frac{\mathcal{B}_1^\pm}{\mathcal{B}_0} = \mp \frac{i(m \omega_0^2 K_m(\alpha_0) I'_{m\pm 1}(\alpha_0) + (m \pm 1)(\alpha_0 - \omega_0)^2 I_{m\pm 1}(\alpha_0) K'_m(\alpha_0))}{\omega_0 ((\alpha_0 - \omega_0)^2 I_{m\pm 1}(\alpha_0) K'_{m\pm 1}(\alpha_0) - \omega_0^2 K_{m\pm 1}(\alpha_0) I'_{m\pm 1}(\alpha_0))} \quad \text{e}\quad (11.53)$$

$$\frac{\Psi_1^\pm}{\mathcal{B}_0} = \pm \frac{\alpha_0 I'_{m\pm 1}(\alpha_0) (m K_m(\alpha_0) K'_{m\pm 1}(\alpha_0) + (m \pm 1) K_{m\pm 1}(\alpha_0) K'_m(\alpha_0))}{(\alpha_0 - \omega_0)^2 I_{m\pm 1}(\alpha_0) K'_{m\pm 1}(\alpha_0) - \omega_0^2 K_{m\pm 1}(\alpha_0) I'_{m\pm 1}(\alpha_0)},\quad (11.54)$$

onde  $\Psi_0$  foi eliminado em favor de  $\mathcal{B}_0$  usando a última equação em (11.32). Vale a pena ressaltar que este ainda é um problema de autovalor, por isso uma constante ainda permanece indeterminada. Apesar de  $\mathcal{B}_0$  ter sido escolhida aqui, qualquer outra constante do problema com  $O(\lambda^0)$  poderia ter sido selecionada em seu lugar. Além disso, notamos que as amplitudes nesta ordem não são mais nulas para o caso axissimétrico como previamente encontrado [46]. Este novo resultado é fruto da maior acurácia da aproximação (11.14).

### Problema de Segunda Ordem:

Novamente é preciso olhar primeiro para as condições de interface para determinarmos a dependência azimute das amplitudes nesta ordem. Seguimos o mesmo procedimento descrito para ordem zero, porém agora coletamos os diferentes coeficientes de Fourier com  $O(\lambda^2)$  e usamos os resultados obtidos com  $O(\lambda)$ . Logo, a condição dinâmica nessa ordem é

$$\begin{aligned}
& i(\alpha_0 - \omega_0) \Phi_{i,2}(1, \theta) + 2i(\alpha_2 - \omega_2) \mathcal{A}_0 I_m(\alpha_0) \cos[m\theta] - \\
& \left\{ 2\Psi_0 - \mathcal{A}_0 \left( \alpha_0 (2(C_2 - x_0) + i(\alpha_0 - \omega_0) \bar{\varrho}_2(x_0)) I'_m(\alpha_0) - \right. \right. \\
& \left. \left. (2m(C_2 - x_0) + i\alpha_0 - 3i(\alpha_0 - \omega_0) \bar{\varrho}_2(x_0)) I_m(\alpha_0) \right) \right\} \cos[(m+2)\theta] - \\
& \left\{ 2\Psi_0 - \mathcal{A}_0 \left( \alpha_0 (2(C_2 - x_0) + i(\alpha_0 - \omega_0) \bar{\varrho}_2(x_0)) I'_m(\alpha_0) + \right. \right. \\
& \left. \left. (2m(C_2 - x_0) - i\alpha_0 + 3i(\alpha_0 - \omega_0) \bar{\varrho}_2(x_0)) I_m(\alpha_0) \right) \right\} \cos[(m-2)\theta] = -i\omega_0 \Phi_{e,2}(1, \theta) + \\
& 2((m+1)\mathcal{B}_1^+ K_{m+1}(\alpha_0) - (m-1)\mathcal{B}_1^- K_{m-1}(\alpha_0) - i\omega_2 \mathcal{B}_0 K_m(\alpha_0) - 2\Psi_0) \cos[m\theta] + \\
& \left( 2\Psi_0 + (2m(C_2 - x_0) + i\alpha_0 - 3i\omega_0 \bar{\varrho}_2(x_0)) \mathcal{B}_0 K_m(\alpha_0) + \right. \\
& \left. \alpha_0 (2(C_2 - x_0) - i\omega_0 \bar{\varrho}_2(x_0)) \mathcal{B}_0 K'_m(\alpha_0) - 2(m+1)\mathcal{B}_1^+ K_{m+1}(\alpha_0) \right) \cos[(m+2)\theta] + \\
& \left( 2\Psi_0 - (2m(C_2 - x_0) - i\alpha_0 + 3i\omega_0 \bar{\varrho}_2(x_0)) \mathcal{B}_0 K_m(\alpha_0) + \right. \\
& \left. \alpha_0 (2(C_2 - x_0) - i\omega_0 \bar{\varrho}_2(x_0)) \mathcal{B}_0 K'_m(\alpha_0) + 2(m-1)\mathcal{B}_1^- K_{m-1}(\alpha_0) \right) \cos[(m-2)\theta] ,
\end{aligned} \tag{11.55}$$

e as condições cinemáticas nesta ordem são

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi_{i,2}}{\partial r} \right|_{r=1} &= i(\alpha_0 - \omega_0) \Psi_2(\theta) + 2i(\alpha_2 - \omega_2) \Psi_0 \cos[m\theta] - \left( 2(C_2 - x_0) \Psi_0 \right. \\ &\quad \left. + \alpha_0 \mathcal{A}_0 \bar{\varrho}_2(x_0) (3I'_m(\alpha_0) + \alpha_0 I''_m(\alpha_0)) \right) (\cos[(m+2)\theta] + \cos[(m-2)\theta]) \\ &- \left( (2m(C_2 - x_0) + i\alpha_0) \Psi_0 - (3i(\alpha_0 - \omega_0) \Psi_0 - 2m\mathcal{A}_0 I_m(\alpha_0)) \bar{\varrho}_2(x_0) \right) \cos[(m+2)\theta] \\ &+ \left( (2m(C_2 - x_0) - i\alpha_0) \Psi_0 + (3i(\alpha_0 - \omega_0) \Psi_0 + 2m\mathcal{A}_0 I_m(\alpha_0)) \bar{\varrho}_2(x_0) \right) \cos[(m-2)\theta] \text{ e} \end{aligned} \quad (11.56)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi_{e,2}}{\partial r} \right|_{r=1} &= -i\omega_0 \Psi_2(\theta) + (2m(\Psi_1^+ - \Psi_1^-) - 2i\omega_2 \Psi_0) \cos[m\theta] \\ &+ \left\{ (i\alpha_0 + 2(m+3)(C_2 - x_0)) \Psi_0 - 2(m+2) \Psi_1^+ \right. \\ &\quad \left. - (3i\omega_0 \Psi_0 + \mathcal{B}_0 (2mK_m(\alpha_0) + 3\alpha_0 K'_m(\alpha_0) - \alpha_0^2 K''_m(\alpha_0))) \bar{\varrho}_2(x_0) \right\} \cos[(m+2)\theta] \\ &+ \left\{ (i\alpha_0 - 2(m-3)(C_2 - x_0)) \Psi_0 + 2(m-2) \Psi_1^- \right. \\ &\quad \left. - (3i\omega_0 \Psi_0 - \mathcal{B}_0 (2mK_m(\alpha_0) - 3\alpha_0 K'_m(\alpha_0) - \alpha_0^2 K''_m(\alpha_0))) \bar{\varrho}_2(x_0) \right\} \cos[(m-2)\theta], \end{aligned} \quad (11.57)$$

deixando claro que as correções com  $O(\lambda^2)$  para o número de onda ( $\alpha_2$ ) e a freqüência ( $\omega_2$ ) interagem com o escoamento transversal para qualquer modo azimute  $m$ . Também é possível observar uma ressonância para os modos azimute  $m = \pm 1$ , onde há uma interação entre as perturbações de ordem zero e um com o escoamento base de segunda-ordem. Isto ocorre porque os termos  $\cos[m\theta]$  e  $\cos[(m \pm 2)\theta]$  geram a mesma dependência azimute, mas apenas neste caso. Para os outros modos, onde  $m \neq \pm 1$ , há uma interação destas perturbações apenas com o escoamento base de primeira-ordem.

- Modo Normal:

De qualquer forma, podemos definir

$$\begin{pmatrix} \Phi_{i,2} \\ \Phi_{e,2} \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{i,2}^+(r) \\ \Phi_{e,2}^+(r) \\ \Psi_2^+ \end{pmatrix} \exp[+im\theta] + \begin{pmatrix} \Phi_{i,2}^-(r) \\ \Phi_{e,2}^-(r) \\ \Psi_2^- \end{pmatrix} \exp[-im\theta] + \begin{pmatrix} \Phi_{i,2}^{\text{nr}} \\ \Phi_{e,2}^{\text{nr}} \\ \Psi_2^{\text{nr}} \end{pmatrix}, \quad (11.58)$$

onde o sobrescrito nr indica os termos que não interagem de maneira ressonante ou não são contribuições do escoamento transversal para  $\alpha_2$  e  $\omega_2$ . Ao substituir a aproximação (11.58) nas condições de interface acima, é possível perceber que existe uma simetria nesta ordem para os modos azimute  $\pm m$ . Esta é a mesma simetria que ocorre no problema de ordem zero, i.e., no jato livre descontínuo. Desta forma, a aproximação (11.58) é utilizada com as simplificações  $\Phi_2^+ = \Phi_2^- = \Phi_2$  e  $\Psi_2^+ = \Psi_2^- = \Psi_2$ .

- Dependência Radial:

Antes de prosseguir, é preciso obter a dependência radial de  $\Phi_2$ . Ela é governada pelas equações obtidas substituindo (11.41) na equação (11.21), coletando os termos de ordem  $\lambda^2$

e impondo a versão simplificada das aproximações (11.58) no resultado. Isto gera

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi_2}{dr} \right) - \left( \alpha_0^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \Phi_2 = 2 \alpha_0 \alpha_2 \Phi_0 , \quad (11.59)$$

para  $\Phi_2 = \Phi_{i,2}$  e  $\Phi_{e,2}$ , que também estão sujeitas as condições de contorno (11.30). A solução deste problema não-homogêneo é obtida através do método de variação de parâmetros [16]. Este método nos diz que a solução da equação diferencial ordinária não-homogênea

$$y''(x) + p(x) y'(x) + q(x) y(x) = g(x) , \quad (11.60)$$

é dada por

$$y(x) = y_1(x) \left( c_1 - \int \frac{y_2(x) g(x)}{W(x)} dx \right) + y_2(x) \left( c_2 + \int \frac{y_1(x) g(x)}{W(x)} dx \right) , \quad (11.61)$$

onde  $y_1$  e  $y_2$  são suas soluções homogêneas,  $c_1$  e  $c_2$  as respectivas constantes destas soluções e  $W(x) = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)$ . Baseado em (11.59), onde  $y = \Phi_2$  e  $x = r$ , temos que

$$\begin{aligned} y_1 &= I_m(\alpha_0 r) , \quad y_2 = K_m(\alpha_0 r) , \quad c_1 = \mathcal{A}_2 , \quad c_2 = \mathcal{B}_2 , \\ W &= -\frac{1}{r} , \quad p = \frac{1}{r} \quad \text{e} \quad g = 2 \alpha_0 \alpha_2 \Phi_0 , \end{aligned} \quad (11.62)$$

o que nos obriga a calcular

$$\int r I_m^2(\alpha_0 r) dr = \frac{1}{2} r^2 (I_m^2(\alpha_0 r) - I_{m+1}(\alpha_0 r) I_{m-1}(\alpha_0 r)) , \quad (11.63)$$

$$\begin{aligned} \int r I_m(\alpha_0 r) K_m(\alpha_0 r) dr &= \frac{1}{4} r^2 (I_{m+1}(\alpha_0 r) K_{m-1}(\alpha_0 r) + 2 I_m(\alpha_0 r) K_m(\alpha_0 r) \\ &\quad + I_{m-1}(\alpha_0 r) K_{m+1}(\alpha_0 r)) - \frac{m}{2 \alpha_0^2} \quad \text{e} \end{aligned} \quad (11.64)$$

$$\int r K_m^2(\alpha_0 r) dr = \frac{1}{2} r^2 (K_m^2(\alpha_0 r) - K_{m+1}(\alpha_0 r) K_{m-1}(\alpha_0 r)) , \quad (11.65)$$

para, finalmente, poder escrever

$$\begin{aligned} \Phi_{i,2} &= \mathcal{A}_2 I_m(\alpha_0 r) + 2 \alpha_0 \alpha_2 \mathcal{A}_0 I_m(\alpha_0 r) \int r I_m(\alpha_0 r) K_m(\alpha_0 r) dr \\ &\quad - 2 \alpha_0 \alpha_2 \mathcal{A}_0 K_m(\alpha_0 r) \int r I_m^2(\alpha_0 r) dr \quad \text{e} \end{aligned} \quad (11.66)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{e,2} &= 2 \alpha_0 \alpha_2 \mathcal{B}_0 I_m(\alpha_0 r) \int r K_m^2(\alpha_0 r) dr \\ &\quad + \mathcal{B}_2 K_m(\alpha_0 r) - 2 \alpha_0 \alpha_2 \mathcal{B}_0 K_m(\alpha_0 r) \int r I_m(\alpha_0 r) K_m(\alpha_0 r) dr . \end{aligned} \quad (11.67)$$

- Relação de Dispersão:  $m \neq \pm 1$

Substituindo a aproximação (11.58) na condição dinâmica (11.55), encontramos

$$\begin{aligned} i(\omega_2 - \alpha_2)\mathcal{A}_0 I_m(\alpha_0) + i(\omega_0 - \alpha_0)\Phi_{i,2}(1) = \\ 2\Psi_0 + i\omega_2\mathcal{B}_0 K_m(\alpha_0) + (m-1)\mathcal{B}_1^- K_{m-1}(\alpha_0) - (m+1)\mathcal{B}_1^+ K_{m+1}(\alpha_0) + i\omega_0\Phi_{e,2}(1) , \end{aligned} \quad (11.68)$$

onde os termos ressonantes não foram incluídos e a simetria discutida anteriormente foi imposta. Fazendo o mesmo com as condições cinemáticas (11.56) e (11.57), obtemos

$$\frac{d\Phi_{i,2}}{dr}\Big|_{r=1} = i\Psi_2(\alpha_0 - \omega_0) + i\Psi_0(\alpha_2 - \omega_2) \quad \text{e} \quad (11.69)$$

$$\frac{d\Phi_{e,2}}{dr}\Big|_{r=1} = m(\Psi_1^+ - \Psi_1^-) - i\Psi_2\omega_0 - i\Psi_0\omega_2 . \quad (11.70)$$

A correção da relação de dispersão com  $O(\lambda^2)$  pode agora ser construída. Primeiro, combinamos as condições cinemáticas acima para eliminar  $\Psi_2$ . Este resultado, em conjunto com (11.68), forma um conjunto de duas equações para as duas incógnitas  $\mathcal{A}_2$  e  $\mathcal{B}_2$ . Por sua vez, combinando este sistema de maneira adequada e substituindo as relações obtidas nos problemas de ordem zero e primeira ordem, encontramos

$$\mathcal{B}_0 D^{(2)}(m, \omega_0, \omega_2, \alpha_0, \alpha_2) + \mathcal{B}_2 D^{(0)}(m, \omega_0, \alpha_0) = 0 , \quad (11.71)$$

que, por sua vez, pode ser re-escrita como o problema de autovalor

$$\mathcal{I}_1(m, \omega_0, \alpha_0)\omega_2 + \mathcal{I}_2(m, \omega_0, \alpha_0)\alpha_2 + \mathcal{I}_3(m, \omega_0, \alpha_0) = 0 , \quad (11.72)$$

uma vez que a equação (11.33) impõe  $D^{(0)} = 0$ .  $\mathcal{I}_1$ ,  $\mathcal{I}_2$  e  $\mathcal{I}_3$  são coeficientes conhecidos usados aqui para simplificar a notação e reduzir o tamanho da correção de dispersão  $D^{(2)} = 0$ . A solução desta equação nos dá a correção de segunda ordem  $\alpha_2$  para o número de onda  $\alpha_0$  para as freqüências  $\omega_0$  e  $\omega_2$  e modo azimute  $m$  pré-determinados pelo usuário.

- Relação de Dispersão:  $m = \pm 1$

Os mesmos passos da subseção anterior são repetidos aqui, porém agora avaliando da equação (11.55) à (11.58) em  $m = \pm 1$ . Com isso, os termos  $\cos[m\theta]$  com  $m = +1$  e  $\cos[(m+2)\theta]$  com  $m = -1$  geram contribuições do tipo  $\cos[\theta]$ . Da mesma forma, os termos  $\cos[m\theta]$  com  $m = -1$  e  $\cos[(m-2)\theta]$  com  $m = +1$  geram contribuições do tipo  $\cos[-\theta]$ . Esta superposição construtiva de termos já discutida anteriormente é chamada neste estudo de ressonância. Assim sendo, a condição dinâmica (11.55) se torna

$$\begin{aligned} & (i\alpha_0 + 2i(\omega_2 - \alpha_2) - 2(C_2 - x_0) + 3i(\omega_0 - \alpha_0)\bar{\varrho}_2(x_0))\mathcal{A}_0 I_1(\alpha_0) - \\ & \alpha_0(2(C_2 - x_0) - i(\omega_0 - \alpha_0)\bar{\varrho}_2(x_0))\mathcal{A}_0 I'_1(\alpha_0) + 2i(\omega_0 - \alpha_0)\Phi_{i,2}(1) = - \\ & 4\mathcal{B}_1^+ K_2(\alpha_0) - (i\alpha_0 + 2i\omega_2 - 2(C_2 - x_0) - 3i\omega_0\bar{\varrho}_2(x_0))\mathcal{B}_0 K_1(\alpha_0) - \\ & \alpha_0(2(C_2 - x_0) - i\omega_0\bar{\varrho}_2(x_0))\mathcal{B}_0 K'_1(\alpha_0) + 2i\omega_0\Phi_{e,2}(1) , \end{aligned} \quad (11.73)$$

para  $m = +1$ , sendo que um resultado equivalente é obtido quando  $m = -1$ . Fazendo o mesmo com as condições cinemáticas (11.56) e (11.57), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{i,2}}{dr} \Big|_{r=1} &= i\Psi_2(\alpha_0 - \omega_0) + i\Psi_0 \left( (\alpha_2 - \omega_2) - \frac{\alpha_0}{2} \right) \\ &+ \frac{\bar{\varrho}_2(x_0)}{2} \left( 3i\Psi_0(\alpha_0 - \omega_0) + \mathcal{A}_0 \left( 2I_1(\alpha_0) - 3\alpha_0 I'_1(\alpha_0) - \alpha_0^2 I''_1(\alpha_0) \right) \right) \text{ e } (11.74) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{e,2}}{dr} \Big|_{r=1} &= \Psi_1^+ - 2\Psi_1^- - i\Psi_2\omega_0 - i\Psi_0 \left( \omega_2 - \frac{\alpha_0}{2} + 2i(C_2 - x_0) \right) \\ &- \frac{\bar{\varrho}_2(x_0)}{2} \left( 3i\Psi_0\omega_0 - \mathcal{B}_0 \left( 2K_1(\alpha_0) - 3\alpha_0 K'_1(\alpha_0) - \alpha_0^2 K''_1(\alpha_0) \right) \right) . \quad (11.75) \end{aligned}$$

Combinando as equações (11.73) à (11.75) com as relações obtidas nos problemas de ordem zero e um, é possível chegar à nova relação

$$\mathcal{B}_0 D^{(2)}(x_0, m, \omega_0, \omega_2, \alpha_0, \alpha_2) + \mathcal{B}_2 D^{(0)}(m, \omega_0, \alpha_0) = 0 , \quad (11.76)$$

que depende agora de  $x_0$ ,  $C_2$  e  $\bar{\varrho}_2$ , sendo os dois últimos provenientes do escoamento base de segunda ordem. Dela, encontramos o novo problema de autovalor

$$\mathcal{I}_1(x_0, m, \omega_0, \alpha_0)\omega_2 + \mathcal{I}_2(x_0, m, \omega_0, \alpha_0)\alpha_2 + \mathcal{I}_3(x_0, m, \omega_0, \alpha_0) = 0 , \quad (11.77)$$

assim como feito para a equação (11.72).

## Análise de Resultados:

Como o jato livre possui uma instabilidade convectiva, não é difícil imaginar que o mesmo ocorre para o jato transversal dentro do limite de validade da presente expansão assintótica, i.e.,  $\lambda \ll 1$ . De qualquer forma, já sabemos hoje que este escoamento se torna globalmente instável para  $\lambda \gtrsim 1/3$  [?, 107]. Assim sendo, mostramos na Figuras 11.5, 11.6 e 11.7 tanto as correções  $\alpha_2$  quanto o valor total  $\alpha = \alpha_0 + \lambda^2 \alpha_2$  do número de onda para os três primeiros modos azimutais  $m = 0, 1$  e  $2$ . Apenas as taxas de crescimento espaciais, ou seja, a parte complexa de  $\alpha_2$  e  $\alpha$ , são analisadas aqui para valores reais da freqüência  $\omega_0$ , com  $\omega_2 = 0$ . Além disso, impomos  $x_0 = 1$ . Como a influência deste parâmetro é praticamente desprezível, seu impacto será ignorado neste estudo.

O primeiro resultado importante deste trabalho é apresentado na Figura 11.5 para o modo com simetria axial. Considerar a aproximação (11.14) com  $O(\tilde{\varrho})$  conduz a ausência de interação entre o escoamento transversal e este modo [46]. Contudo, o resultado de maior precisão construído neste trabalho e apresentado nesta figura indica que isso não é verdade. Ele mostra que o escoamento transversal tem um impacto reduzido no modo  $m = 0$  para baixas freqüências, onde este impacto é desestabilizador para  $\omega_0 \gtrsim 1.21$ . Além disso, a correção  $-Im[\alpha_2]$  mostra a possibilidade do aparecimento de dois máximos locais na taxa de crescimento para freqüências mais altas. Desta forma, elas poderiam aparecer num experimento apenas quando a espessura da camada de mistura do jato é reduzida.

Já o comportamento do primeiro modo helicoidal é apresentado na Figura 11.6. O efeito desestabilizador do escoamento transversal inicia em  $\omega_0 \gtrsim 2.10$ , um valor mais elevado

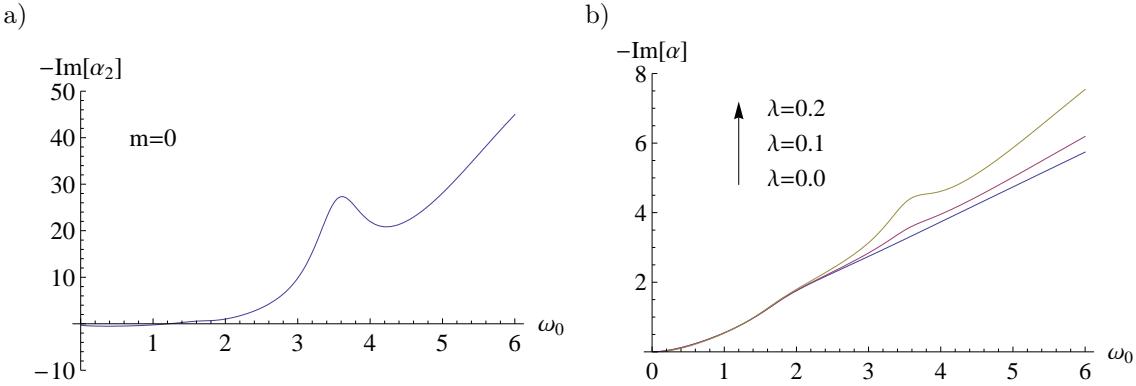


Figura 11.5: Comportamento das taxas de crescimento espaciais, para  $m = 0$  e  $x_0 = 1$ , com a freqüência: a) Correção de segunda ordem e b) taxa de crescimento total.

que o encontrado na análise anterior [46]. Além disso, um comportamento distinto do anterior é observado. Apesar deste efeito ainda ocorrer para freqüências assintoticamente maiores, existe uma região estabilizadora entre  $3.15 \lesssim \omega_0 \lesssim 3.77$ . Assim como no caso axissimétrico, este resultado mostra um potencial para o aparecimento de dois máximos locais na taxa de crescimento do primeiro modo helicoidal. Além do mais, eles poderiam ser observados num experimento para os mesmos valores da espessura da camada de mistura do caso  $m = 0$ .

Finalmente, o comportamento do segundo modo helicoidal é apresentado na Figura 11.7. O efeito desestabilizador inicia agora para  $\omega_0 \gtrsim 4.69$ . De modo geral, o comportamento qualitativo deste modo é aproximadamente igual ao observado na análise anterior [46]. Este resultado indica que o modo axissimétrico é o modo dominante na região próxima a saída do jato pelo bocal ou duto de injeção, i.e.,  $x_{0b} \neq 1$ .

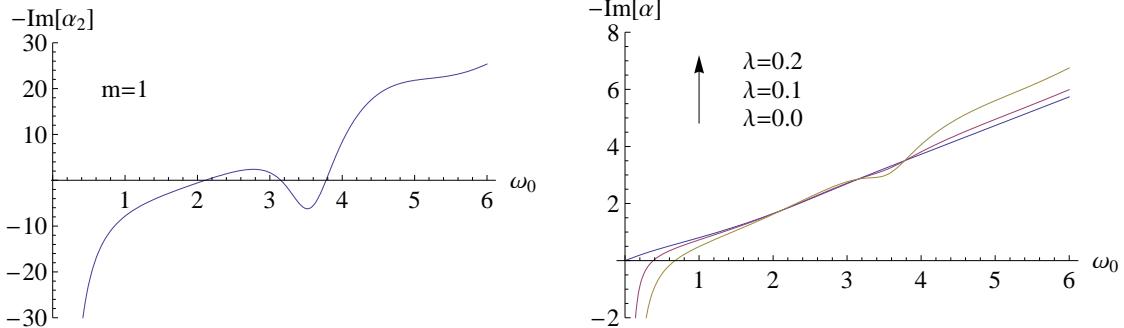


Figura 11.6: Comportamento das taxas de crescimento espaciais, para  $m = 1$  e  $x_0 = 1$ , com a freqüência: a) Correção de segunda ordem e b) taxa de crescimento total.

Antes de encerrar este estudo do jato transversal descontínuo, um comportamento anômalo encontrado nas Figuras 11.6 e 11.7 deve ser mencionado. Para estes dois modos, tanto a parte real quanto a parte complexa da correção para o número de onda tendem para  $\alpha_2 \rightarrow -\infty$  quando  $\omega_0 \rightarrow 0$ . A princípio, se especulou que isso ocorria devido ao comportamento não-local induzido pelo escoamento transversal, visto que esta análise de estabilidade é local [45]. Em outras palavras, perturbações que possuem comprimentos de onda muito altos não são encontradas no jato transversal. Contudo, podemos ver na

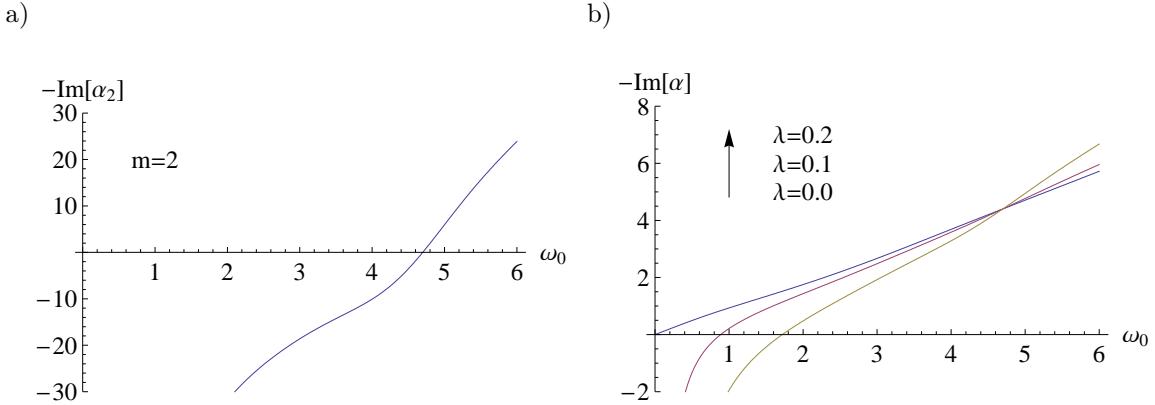


Figura 11.7: Comportamento das taxas de crescimento espaciais, para  $m = 2$  e  $x_0 = 1$ , com a freqüência: a) Correção de segunda ordem e b) taxa de crescimento total.

Figura 11.5 que o mesmo não ocorre com o modo axissimétrico. O único termo ausente na composição da correção de segunda ordem para este modo, quando comparado aos modos helicoidais, é a perturbação de primeira ordem na posição da interface. Isto pode ser visto comparando as condições cinemáticas (11.70) e (11.75), uma vez que  $\Psi_1^\pm$  só aparecem nestas equações. Logo, a quebra de simetria na posição da interface promovida pelo escoamento transversal que induz o caráter não-local de modos com elevado comprimento de onda.

## 11.5 Modelo para Escoamento Contínuo

Na presença de viscosidade, a descontinuidade que contém a folha de vorticidade desaparece e existe uma transição contínua e suave entre as regiões interna e externa do jato, seja ele livre ou transversal. O problema de autovalor é agora obtido a partir das equações de Navier-Stokes para um escoamento incompressível.

### 11.5.1 Equações de Governo

As equações de governo para o caso contínuo, onde existe o escoamento incompressível de um único fluido, são compostas pela equação da conservação de massa

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 , \quad (11.78)$$

mais conhecida como equação da continuidade, para um fluido de massa específica constante, e pelas equações da conservação de movimento linear para um fluido Newtoniano

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} , \quad (11.79)$$

mais conhecidas como equações de Navier-Stokes, onde  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  nas direções  $\mathbf{x} = (x, r, \theta)$ . Escrevendo as equações para cada direção separadamente, obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right\}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} \text{ e} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{vw}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\},\end{aligned}\quad (11.80)$$

onde estas equações foram escritas na forma adimensional utilizando os mesmos parâmetros das seções anteriores.

### 11.5.2 Escoamento Base

Com as equações que governam o escoamento de jatos incompressíveis já estabelecidas, podemos passar para o próximo passo desta análise. Ele envolve a definição do escoamento base viscoso a ser perturbado e ter sua estabilidade analisada. A inclusão da viscosidade visa eliminar as inconsistências do modelo descontínuo anterior, permitindo a obtenção de soluções válidas para uma faixa de freqüências mais ampla. Este escoamento base deve, a princípio, obedecer a versão em regime permanente das equações de governo descritas na seção anterior. Desta forma, a equação (11.78) passa a ser re-escrita como

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{v}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} = 0, \quad (11.81)$$

e, similarmente, as equações (11.80) são re-escritas como

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{grad} \bar{\mathbf{u}} = -\operatorname{grad} \bar{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{\mathbf{u}}, \quad (11.82)$$

ou, na forma equivalente,

$$\begin{aligned}\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \theta^2} \right\}, \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - \frac{\bar{w}^2}{r} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \theta^2} - \frac{\bar{v}}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} \right\} \text{ e} \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} + \frac{\bar{v} \bar{w}}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \left( r \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} - \frac{\bar{w}}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right\},\end{aligned}\quad (11.83)$$

que são as equações da continuidade e movimento linear, respectivamente, escritas em regime permanente. Maiores simplificações são possíveis no estudo de cada um dos jatos discutidos neste capítulo, mas estas serão abordadas apenas posteriormente.

### 11.5.3 Análise de Estabilidade

Apesar do escoamento base ser agora contínuo, a análise de estabilidade segue os mesmos três passos essenciais descritos na seção 11.2. Algumas pequenas diferenças em relação à metodologia da subseção 11.2.4 ainda existem, e serão destacadas a seguir.

#### Linearização:

Tendo definido o escoamento base a ser estudado, o próximo passo é verificar como ele reage ao ser perturbado. Isto é feito investigando o comportamento de pequenas perturbações inseridas neste escoamento. Desta forma, substituímos

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{e} \quad p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x}) + \tilde{p}(\mathbf{x}, t) , \quad (11.84)$$

na equação da continuidade (11.78) e nas equações de movimento linear (11.79) ou (11.80), onde o circunflexo representa novamente a perturbação. Subtraindo as respectivas equações para o escoamento base do resultado, obtemos

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{v}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} = 0 , \quad (11.85)$$

para a equação da continuidade e

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{grad} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{grad} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{grad} \tilde{\mathbf{u}} = -\operatorname{grad} \tilde{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} , \quad (11.86)$$

para a equação da conservação de movimento linear das perturbações. Já se sabe desde as primeiras análises de estabilidade para jatos [111] que o mecanismo que controla a evolução destas perturbações não é viscoso quando  $Re \gtrsim 1000$ . Com isso, é possível desprezar o termo viscoso da equação acima e re-escrevê-la como

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{grad} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{grad} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{grad} \tilde{\mathbf{u}} \simeq -\operatorname{grad} \tilde{p} , \quad (11.87)$$

que pode ainda ser linearizada, uma vez que apenas iremos considerar situações onde a amplitude destas perturbações se mantém pequena, e re-escrita na forma

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{grad} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{grad} \tilde{\mathbf{u}} \simeq -\operatorname{grad} \tilde{p} , \quad (11.88)$$

ou, na forma equivalente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\tilde{w}}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} &\simeq -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} , \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\tilde{w}}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - 2 \frac{\tilde{w} \bar{w}}{r} &\simeq -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \quad \text{e} \quad (11.89) \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \frac{\tilde{w}}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v} \bar{w}}{r} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} + \frac{\bar{v} \tilde{w}}{r} &\simeq -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} . \end{aligned}$$

### Análise Local:

A outra hipótese também utilizada para o caso contínuo se refere a homogeneidade do escoamento base, onde apenas uma direção não-homogênea será mantida. A análise de estabilidade resultante desta simplificação é considerada local. Esta hipótese é válida para escoamentos base com elevado número de Reynolds, visto que estes possuem fraca variação axial. Para fazer uso dela, devemos impor

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} \simeq 0 , \quad (11.90)$$

às equações da conservação de movimento linear das perturbações (11.89). Com isso, elas assumem a forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\tilde{w}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} &\simeq -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} , \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \frac{\tilde{w}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - 2 \frac{\tilde{w}\bar{w}}{r} &\simeq -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \text{ e} \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\tilde{w}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}\bar{w}}{r} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}\tilde{w}}{r} &\simeq -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} , \end{aligned} \quad (11.91)$$

sendo que a equação da continuidade das perturbações (11.85) permanece inalterada. Assim como no caso descontínuo, a variável independente  $x$  se torna o parâmetro  $x_0$ . Ele representa a distância a jusante do bocal ou duto que determina o perfil local do escoamento base.

### Modo Normal:

Finalmente, o último passo essencial na derivação da equação de dispersão para o caso contínuo assume que as perturbações podem ser decompostas em modos normais de Fourier, onde a discussão sobre a estabilidade local de modos normais da subseção 11.2.4 permanece válida e não será repetida aqui. Desta forma, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(\mathbf{x}, t) \\ \tilde{v}(\mathbf{x}, t) \\ \tilde{w}(\mathbf{x}, t) \\ \tilde{p}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}(r, \theta) \\ i \hat{v}(r, \theta) \\ i \hat{w}(r, \theta) \\ \hat{p}(r, \theta) \end{pmatrix} \exp[i(\alpha x - \omega t)] , \quad (11.92)$$

onde  $\alpha$  e  $\omega$  ainda são o número de onda e freqüência complexos da perturbação e  $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$  é a autofunção ou amplitude da perturbação.

Substituindo as relações (11.92) na equação da continuidade (11.85) obtemos

$$\alpha \hat{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{v}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \theta} = 0 , \quad (11.93)$$

que é a equação da continuidade e

$$-i(\omega - \alpha \bar{u}) \hat{u} + \bar{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} + i \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \hat{v} + i \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \hat{w} \simeq -i \alpha \hat{p} ,$$

$$\begin{aligned} \left( \omega - \alpha \bar{u} + i \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) \hat{v} + i \bar{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial r} + i \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \theta} + i \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - 2 \frac{\bar{w}}{r} \right) \hat{w} &\simeq - \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} \quad \text{e} \quad (11.94) \\ \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{w}) \hat{v} + \left( \omega - \alpha \bar{u} + i \frac{\bar{v}}{r} + i \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} \right) \hat{w} + i \bar{v} \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} + i \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \theta} &\simeq - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

que representam as equações da conservação do movimento linear para as amplitudes das perturbações. Vale a pena notar que as amplitudes  $\hat{u}$  e  $\hat{p}$  podem ser eliminadas usando as duas primeiras das quatro equações acima, reduzindo o número de incógnitas para dois. Esta simplificação será elaborada posteriormente para cada jato estudado.

## 11.6 Jato Livre Contínuo

Seguimos aqui a mesma abordagem utilizada no modelo descontínuo, analisando primeiro o jato livre para, então, analisar o jato transversal. Isto é necessário pois os resultados do primeiro são usados na etapa inicial da obtenção dos resultados do segundo.

### 11.6.1 Escoamento Base

Dois modelos diferentes são utilizados como escoamentos base para análise de estabilidade do jato livre, e posteriormente transversal, contínuo. Eles são discutidos a seguir.

#### Modelo da Tangente Hiperbólica:

A análise de estabilidade linear do jato livre descontínuo [11] foi estendida pela primeira vez para seu equivalente contínuo com o uso de um perfil de velocidade aproximado por uma função tangente hiperbólica [109]. Esta função não satisfaz conservação de movimento linear, mas satisfaz conservação de massa e também as condições de contorno não-viscosas. Além disso, ela também possui boa concordância com resultados experimentais, como mostra a Figura 11.8. Sua forma exata é dada pela expressão

$$\bar{u}_0(r) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left[ \frac{1}{4\theta_0} \left( \frac{r}{r_0} - \frac{r_0}{r} \right) \right], \quad (11.95)$$

onde  $\bar{v}_0 = \bar{w}_0 = 0$  e  $\theta_0$  representa a espessura local da camada de mistura em uma posição arbitrária  $x_0$ . Ele é um parâmetro arbitrário da análise, assim como  $x_0$ . Utilizamos nesta figura  $\theta_0 \simeq 7,14 \times 10^{-2}$ , além do fator de correção  $r_0 \simeq 0,95$  para um melhor ajuste dos dados experimentais. Para encerrar, notamos que o subscrito zero foi introduzido para indicar que este modelo é para o jato livre, deixando-o em concordância com a notação que será utilizada em seções posteriores para o jato transversal.

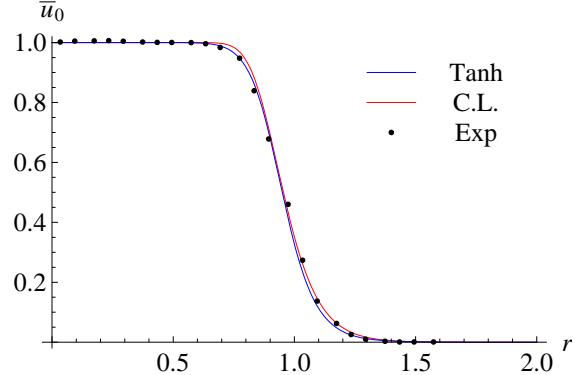


Figura 11.8: Perfil de velocidade  $\bar{u}_0(r)$  do jato livre. Comparação entre modelos teóricos e dados experimentais [106].

## Modelo da Camada Limite:

Como já mencionado, o modelo aproximado acima não satisfaz conservação de movimento linear. Contudo, este problema pode ser remediado se utilizarmos uma solução das equações de governo. Repetindo a análise apresentada na seção 8.2 do volume 1, porém agora em coordenadas cilíndricas, as equações (11.81) e (11.83) podem ser simplificadas para

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{v}_0) = 0 \quad \text{e} \quad \bar{u}_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} + \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial r} = \frac{1}{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial r} \right), \quad (11.96)$$

que são as equações de camada limite para o jato livre, ou seja, na ausência de gradientes externos de pressão. Lembramos ainda que o jato livre possui simetria axial, o que resulta em  $\partial/\partial\theta = 0$ , e não possui movimento azimute, o que resulta em  $\bar{w}_0 = 0$ . Apesar de  $x$  ser uma variável independente deste sistema de equações, se tornará o parâmetro  $x_0$  após a solução ser obtida, assim como nas análises anteriores.

Uma hipótese simplificadora adicional será considerada neste ponto. O comportamento não-viscoso da velocidade descrito em (11.25) próximo à camada limite é dado por

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \bar{u}_0 = 1 \quad , \quad \lim_{r \rightarrow 1^+} \bar{u}_0 = 0 \quad , \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} \bar{v}_0 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 1^+} \bar{v}_0 = 0 \quad , \quad (11.97)$$

indicando que apenas a componente axial do jato livre descontínuo possui uma camada de mistura. Contudo, podemos assumir que esta camada de mistura viscosa é extremamente fina, permitindo a definição da nova variável independente para esta região

$$r = r_0 + \delta \bar{r} , \quad (11.98)$$

onde  $\delta \ll 1$  e  $r_0 = 1$ . Este último, porém, pode ser ajustado para melhor representar dados experimentais, como feito na aproximação (11.95). De modo a manter consistência com a equação da continuidade em (11.96), esta transformação nos obriga a definir

$$\bar{u}_0(x, r) = \bar{u}_{0,0}(x, \bar{r}) + \delta \bar{u}_{0,1}(x, \bar{r}) + O(\delta^2) \quad \text{e} \quad (11.99)$$

$$\bar{v}_0(x, r) = \quad + \delta \bar{v}_{0,1}(x, \bar{r}) + \delta^2 \bar{v}_{0,2}(x, \bar{r}) + O(\delta^3) , \quad (11.100)$$

e, para manter consistência com a equação da quantidade de movimento linear em (11.96), também devemos definir

$$\delta = Re^{-1/2} , \quad (11.101)$$

o que nos leva as novas equações de camada limite para o jato livre

$$\frac{\partial \bar{u}_{0,0}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_{0,1}}{\partial \bar{r}} \simeq 0 \quad \text{e} \quad \bar{u}_{0,0} \frac{\partial \bar{u}_{0,0}}{\partial x} + \bar{v}_{0,1} \frac{\partial \bar{u}_{0,0}}{\partial \bar{r}} \simeq \frac{\partial^2 \bar{u}_{0,0}}{\partial \bar{r}^2} , \quad (11.102)$$

que possuem  $O(\delta)$  e são válidas apenas na região  $\bar{r} \simeq 0$ . Estas equações são equivalentes as encontradas para camadas de mistura planas descritas no capítulo anterior. Neste caso, sabemos que as respectivas equações de maior ordem para  $\bar{u}_{0,1}$  e  $\bar{v}_{0,2}$  geram perfis de velocidade nulos [155, 88] e, portanto, são ignoradas neste estudo. Por fim, devemos notar que o comportamento assintótico para  $\bar{u}_{0,0}$  e, consequentemente, para  $\bar{v}_{0,1}$ , já satisfazem as condições de contorno não-viscosas.

- Similaridade:

O sistema de equações (11.102) pode ser resolvido pela mesma técnica de similaridade explicada na seção 8.3 do volume 1, porém agora definindo a nova variável independente de similaridade  $\eta$  como

$$\eta = (r - r_0) \sqrt{\frac{Re}{x}} = \frac{\bar{r}}{\sqrt{x}} , \quad (11.103)$$

onde as novas variáveis dependentes são definidas como

$$\bar{u}_{0,0} = \frac{df_0}{d\eta} \quad \text{e} \quad \bar{v}_{0,1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left( \eta \frac{df_0}{d\eta} - f_0 \right) \quad (11.104)$$

pois assim já satisfazem a equação de continuidade em (11.102). Substituindo estas definições na respectiva equação da quantidade de movimento linear leva a

$$2f_0''' + f_0 f_0'' = 0 , \quad (11.105)$$

que nada mais do que uma versão modificada da equação de Blasius (8.8). Uma diferença importante deve ser mencionada. As condições de contorno naturais para este problema são obtidas dos limites não-viscosos em (11.97) e podem ser escritas como

$$f'_0(\eta \rightarrow -\infty) = 1 \quad \text{e} \quad f'_0(\eta \rightarrow +\infty) = 0 , \quad (11.106)$$

mas a terceira condição de contorno não é conhecida *a priori*. Sua escolha determina a localização da linha de corrente central que emana da placa que separa as camadas [91, 97]. Ela pode ser determinada separando as regiões de entrada e mistura do escoamento e casando seus comportamentos assintóticos na interface comum entre as regiões [2]. Como ela apenas controla a componente transversal da velocidade  $\bar{v}_{0,1}$ , que será ignorada nesta análise de estabilidade, iremos simplesmente impor a condição mais usada  $f_0(\eta = 0) = 0$  [89].

- Método do Tiro:

A técnica de solução numérica utilizada já é bastante conhecida, mas iremos elaborá-la em maiores detalhes aqui pois ela também será usada para o jato transversal. Seu primeiro passo envolve a definição de versões assintóticas do problema original próximas aos seus respectivos contornos. De acordo com (11.106), a equação (11.105) pode ser re-escrita como

$$2f_0''' + (\eta + a_1) f_0'' = 0 , \quad (11.107)$$

próximo ao limite  $\eta \rightarrow -\infty$ , cuja solução é

$$f_0 = a_1 + \eta + a_2 \exp\left[-\frac{\eta(2a_1 + \eta)}{4}\right] \times \\ \left( 2 + \sqrt{\pi} \exp\left[\frac{(a_1 + \eta)^2}{4}\right] (a_1 + \eta) \left( 1 + \operatorname{erf}\left[\frac{a_1 + \eta}{2}\right] \right) \right) \quad (11.108)$$

e como

$$2f_0''' + a_3 f_0'' = 0 , \quad (11.109)$$

próximo ao limite  $\eta \rightarrow +\infty$ , cuja solução é

$$f_0 = a_3 + \frac{4a_4}{a_3^2} \exp\left[-\frac{a_3 \eta}{2}\right] , \quad (11.110)$$

sendo as constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$  incógnitas do problema. As soluções assintóticas acima são avaliadas nos extremos do domínio truncado em  $\eta = -9$  e  $\eta = 36$ , o que garante um erro menor que  $10^{-10}$  em relação as condições de contorno originais, para gerar condições iniciais com o número mínimo de constantes adicionais. Usando estimativas iniciais para estas constantes, o problema original é marchado de ambos os extremos em direção ao centro da camada de mistura, arbitrariamente escolhido em  $\eta = 0$  aqui. Neste ponto, verifica-se a continuidade da função e suas primeira e segunda derivadas. Caso elas não sejam contínuas, um método de busca é usado para encontrar novos valores mais precisos destas constantes. Todo o processo é repetido até que esta continuidade seja obtida com uma precisão pré-determinada. Combinando as rotinas **NDSolve** e **FindRoot** do sistema *Mathematica* [170], encontramos  $a_1 = 0,52886$ ,  $a_2 = -0,15375$ ,  $a_3 = 1,2385$  e  $a_4 = -0,62633$ . A Figura 11.8 mostra uma comparação da solução obtida para  $\bar{u}_{0,0}(x_0, r)$ , usando  $Re = 325$ ,  $x_0 = 1$  e  $r_0 = 0,93$ , com o modelo aproximado e dados experimentais, sendo possível verificar uma boa concordância entre todas.

### 11.6.2 Análise de Estabilidade

Algumas hipóteses adicionais podem ser feitas para simplificar ainda mais esta análise de estabilidade. Contudo, elas são exclusivas para o problema do jato livre e, por isso, não foram discutidas no caso geral da seção 11.5. Elas serão abordadas a seguir.

#### Escoamento Paralelo:

Independente do perfil de velocidade escolhido como escoamento base para o jato livre, seja o modelo da tangente hiperbólica ou da camada limite, uma hipótese simplificadora permanece a mesma. Assumimos que o escoamento é paralelo, ou seja, todas as componentes da velocidade são nulas exceto a axial. Esta componente possui ainda simetria axial e varia apenas na direção radial. Desta forma, a equação (11.93) é re-escrita como

$$\alpha_0 \hat{u}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{v}_0) + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \theta} = 0 , \quad (11.111)$$

e as equações (11.94) se tornam

$$\begin{aligned} -i(\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_{0,0}) \hat{u}_0 + i \frac{d\bar{u}_{0,0}}{dr} \hat{v}_0 &= -i \alpha_0 \hat{p}_0 , \\ (\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_{0,0}) \hat{v}_0 &= -\frac{\partial \hat{p}_0}{\partial r} \quad \text{e} \\ (\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_{0,0}) \hat{w}_0 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{p}_0}{\partial \theta} , \end{aligned} \quad (11.112)$$

onde o subscrito zero foi acrescentado para destacar o fato desta análise ser válida apenas para o jato livre. As equações neste sistema podem ser combinadas para gerar a equação

$$\frac{\partial^2 \hat{p}_0}{\partial r^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{2 \alpha_0}{\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_{0,0}} \frac{d\bar{u}_{0,0}}{dr} \right) \frac{\partial \hat{p}_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{p}_0}{\partial \theta^2} - \alpha_0^2 \hat{p}_0 = 0 , \quad (11.113)$$

cuja única incógnita é a amplitude da perturbação da pressão. Uma vez obtida uma solução da equação acima, as outras amplitudes podem ser obtidas através das equações (11.112).

### Modo Normal:

Assim como no caso descontínuo, uma prática comum no estudo do jato livre contínuo é assumir que os modos azimutes de suas perturbações são independentes. Desta forma, podemos considerar novamente a hipótese de modos normais separáveis e impor

$$\check{p}_0 = \check{p}_0(r) \exp[i m \theta] , \quad (11.114)$$

o que nos permite re-escrever a equação (11.113) e definir o problema de autovalor como

$$\frac{d^2 \check{p}_0}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{2 \alpha_0}{\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_{0,0}} \frac{d\bar{u}_{0,0}}{dr} \right) \frac{d\check{p}_0}{dr} - \left( \frac{m^2}{r^2} + \alpha_0^2 \right) \check{p}_0 = 0 . \quad (11.115)$$

Esta equação possui o mesmo comportamento azimute da equação (11.27), ou seja, modos helicoidais positivos ( $+m$ ) e negativos ( $-m$ ) possuem a mesma taxa de crescimento  $\alpha_0$ . Por esta razão, eles não são incluídos simultaneamente em (11.114). Notamos ainda que a dependência azimute das demais amplitudes  $\hat{u}_0$ ,  $\hat{v}_0$  e  $\hat{w}_0$  são obtidas por inferência ao substituirmos (11.114) no sistema (11.112).

### Condições de Contorno:

Tendo chegado a forma final do problema de autovalor, dada pela equação (11.115), devemos agora definir suas condições de contorno. Como a autofunção  $\check{p}_0$  possui apenas dependência radial, devemos impor somente que

$$\check{p}_0(r \rightarrow 0) = n^o \text{ finito} \quad \text{e} \quad \check{p}_0(r \rightarrow \infty) = 0 , \quad (11.116)$$

como feito em (11.30) para a versão descontínua deste problema.

### Relação de Dispersão:

A equação (11.115) em conjunto com as condições de contorno (11.116) formam o problema de autovalor que determina a estabilidade do jato livre contínuo. Ao contrário da versão descontínua da equação de dispersão (11.33), não é possível obter uma forma fechada para os autovalores  $\alpha_0$  nesta versão contínua. Isto decorre da ausência de uma solução analítica para a autofunção  $\check{p}_0$  a partir da equação (11.115). Conseqüentemente, a relação de dispersão neste caso não é algébrica, mas sim diferencial, e requer uma solução numérica e simultânea para autofunção e autovalor. Isto é feito com o procedimento abaixo.

- Método do Tiro:

Para solucionarmos este problema de autovalor, recorremos ao mesmo procedimento descrito na obtenção de uma solução de similaridade para o jato livre contínuo conhecido como método do tiro. O primeiro passo envolve a obtenção de soluções assintóticas nos contornos. De acordo com os perfis de velocidade apresentados na Figura 11.8, a equação (11.115) pode ser escrita em sua forma adjunta como

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d\check{p}_0}{dr} \right) - \left( \frac{m^2}{r^2} + \alpha_0^2 \right) \check{p}_0 = 0, \quad (11.117)$$

nos limites  $r \rightarrow 0$  e  $r \rightarrow \infty$ , uma vez que a derivada radial da velocidade é nula em ambos os casos. Neste estudo, o tamanho do domínio foi escolhido de tal forma que  $d\bar{u}_{0,0}/dr \simeq 10^{-10}$  independente dos valores impostos aos parâmetros  $\theta_0$ ,  $r_0$ ,  $Re$  ou  $x_0$ . Suas soluções, nestes limites, são

$$\begin{aligned} \check{p}_0(r) &= \mathcal{A}_0 I_m(\alpha_0 r) \quad \text{e} \\ \check{p}_0(r) &= \mathcal{B}_0 K_m(\alpha_0 r), \end{aligned} \quad (11.118)$$

respectivamente. Os comportamentos destas funções de Bessel já foram ilustrados na Figura 11.3, uma vez que apareceram também na análise do jato livre descontínuo. Estas soluções fornecem as condições iniciais que permitem a substituição do problema de valor de contorno original em dois problemas de valor inicial. Suas soluções são dadas por

$$\check{p}_0(r) = \mathcal{A}_0 f_0(r) \quad \text{e} \quad \check{p}_0(r) = \mathcal{B}_0 f_\infty(r), \quad (11.119)$$

respectivamente. Desta forma, podemos procurar pela solução da equação

$$\mathcal{F}(\alpha_0) = f_0(r_0) f'_\infty(r_0) - f'_0(r_0) f_\infty(r_0) = 0, \quad (11.120)$$

para encontrar o autovalor  $\alpha_0$ , assim como uma das constantes  $\mathcal{A}_0$  ou  $\mathcal{B}_0$ , que irão garantir a continuidade da autofunção  $\check{p}_0(r_0)$  e sua derivada  $\check{p}'_0(r_0)$  em uma posição arbitrária  $r_0$  com uma precisão pré-determinada pelo usuário. Isto é feito combinando as rotinas **NDSolve** e **FindRoot** do *Mathematica* como mostrado anteriormente. A Figura 11.9 mostra a taxa de crescimento espacial  $-Im[\alpha_0]$  para o primeiro modo helicoidal  $m = \pm 1$ , comparando os resultados obtidos com a equação (11.33) para o caso descontínuo e com a equação (11.95) para o caso contínuo. Fica claro nesta figura a região de validade do modelo descontínuo, que aumenta na medida que a espessura da camada de mistura  $\theta_0$  diminui, e sua importância para validação dos resultados obtidos com os modelos contínuos. Outros resultados para o jato livre contínuo serão mostrados em conjunto com a análise do jato transversal.

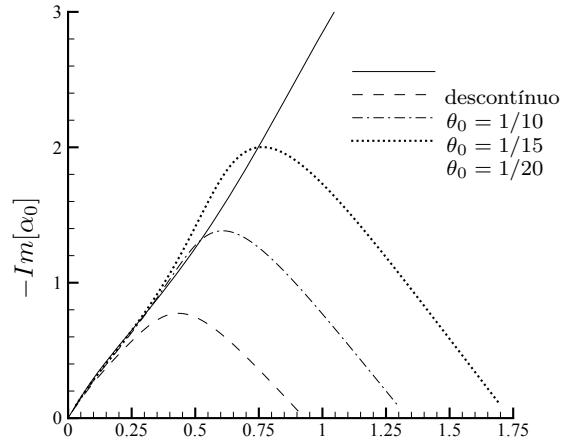


Figura 11.9: Comparação entre taxas de crescimento espacial do primeiro modo helicoidal obtidas com escoamentos base descontínuo e contínuo, do modelo da tangente hiperbólica.

## 11.7 Jato Transversal Contínuo

Este capítulo se encerra com a inclusão de um fraco escoamento transversal no estudo de jatos apresentado na seção anterior. A seguir, mostramos como isso é feito tanto para o escoamento base quanto para a análise de estabilidade linear.

### 11.7.1 Escoamento Base

Os dois modelos utilizados como escoamento base do jato livre foram adaptados para a construção do jato transversal com  $r_0 = 1$ . Algumas pequenas porém importantes diferenças existem e serão ressaltadas a seguir.

#### Modelo da Tangente Hiperbólica:

A extensão do jato livre descontínuo para seu contraposto transversal foi feita com sucesso na primeira metade deste capítulo. Com isso, o primeiro e mais natural passo no estudo do caso contínuo foi modificar a solução não-viscosa introduzindo viscosidade de maneira artificial, como feito no modelo da tangente hiperbólica para o jato livre. Logo, temos

$$\begin{aligned}\bar{u}(r, \theta) &= \bar{u}_0(r) + &+ \lambda^2 \bar{U}_2(r, \theta) , \\ \bar{v}(r, \theta) &= &+ \lambda \bar{V}_1(r, \theta) + \lambda^2 \bar{V}_2(r, \theta) \text{ e} \\ \bar{w}(r, \theta) &= &+ \lambda \bar{W}_1(r, \theta) + \lambda^2 \bar{W}_2(r, \theta) ,\end{aligned}\tag{11.121}$$

onde impomos  $\bar{U}_1(r, \theta) = 0$ , uma vez que  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{grad} \phi$  para o caso não-viscoso. Da mesma forma, definimos a dependência azimute como

$$\begin{aligned}\bar{U}_2(r, \theta) &= \bar{u}_2(r) \cos[2\theta] , \\ \bar{V}_1(r, \theta) &= \bar{v}_1(r) \cos[\theta] , \quad \bar{V}_2(r, \theta) = \bar{v}_2(r) \cos[2\theta] , \\ \bar{W}_1(r, \theta) &= \bar{w}_1(r) \sin[\theta] \text{ e } \bar{W}_2(r, \theta) = \bar{w}_2(r) \sin[2\theta] ,\end{aligned}\tag{11.122}$$

segundo o mesmo comportamento observado nas soluções não-viscosas (11.35) e (11.36). As dependências radiais nas expressões acima devem ser obtidas de maneira consistente com o modelo aproximado da subseção 11.6.1. Em outras palavras, a conservação de massa (11.81) em sua forma local de acordo com (11.90), deve obedecer

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{v}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} = 0 ,\tag{11.123}$$

e o comportamento assintótico não-viscoso fora da camada de mistura

$$\begin{aligned}\bar{u}_0(r) &= \begin{cases} 1 & ; \quad r < 1 \\ 0 & ; \quad r > 1 \end{cases} , & \bar{u}_2(r) &= \begin{cases} -r^2 & ; \quad r < 1 \\ 1/r^2 & ; \quad r > 1 \end{cases} , \\ \bar{v}_1(r) &= \begin{cases} 0 & ; \quad r < 1 \\ 1 - 1/r^2 & ; \quad r > 1 \end{cases} , & \bar{v}_2(r) &= \begin{cases} 2(C_2 - x)r & ; \quad r < 1 \\ 2(C_2 - x)/r^3 & ; \quad r > 1 \end{cases} ,\end{aligned}\tag{11.124}$$

$$\bar{w}_1(r) = \begin{cases} 0 & ; \quad r < 1 \\ 1 + 1/r^2 & ; \quad r > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \bar{w}_2(r) = \begin{cases} 2(C_2 - x)r & ; \quad r < 1 \\ 2(x - C_2)/r^3 & ; \quad r > 1 \end{cases},$$

associado as soluções (11.35) e (11.36), deve ser respeitado. Satisfazendo estas restrições para cada ordem em  $\lambda$  leva a

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \bar{v}_1) + \frac{1}{r} \bar{w}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \bar{v}_2) + \frac{2}{r} \bar{w}_2 = 0, \quad (11.125)$$

que são a nova forma das equações da continuidade em  $O(\lambda^1)$  e  $O(\lambda^2)$ , respectivamente.

No problema de primeira ordem, as componentes da velocidade refletem a influência que o jato tem no escoamento transversal. Nesta ordem, outra camada de mistura existe. Ela representa o cisalhamento tangencial devido ao deslocamento promovido pelo jato no escoamento transversal, e pode ser aproximada como

$$\bar{w}_1(r) = (\bar{u}_0 - 1) \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right), \quad (11.126)$$

mantendo coerência com a construção do cisalhamento axial representado por  $\bar{u}_0$ . Isto faz com que a componente radial possa ser obtida a partir da integração da conservação de massa local (11.125) nesta ordem em  $\lambda$ , levando a

$$\bar{v}_1(r) = \frac{1}{2r} \left\{ (1 + r_1 r) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) + 4\theta_0 \log \left[ \cosh \left[ \frac{r^2 - 1}{4r\theta_0} \right] / \cosh \left[ \frac{r_1^2 - 1}{4r_1\theta_0} \right] \right] \right\}, \quad (11.127)$$

onde  $r_1$  é apenas um parâmetro da integração que evita a singularidade em  $r = 0$  e não tem influência significativa na solução se  $0 < r_1 \ll r_0$ .

Já no problema de segunda ordem, as componentes da velocidade refletem a influência do escoamento transversal no jato. As componentes axial e radial são aproximadas da mesma forma que  $\bar{w}_1$ , ou seja, baseadas em (11.35) e (11.36). Com isso, obtemos

$$\bar{u}_2(r) = \frac{1 - \bar{u}_0}{r^2} - r^2 \bar{u}_0 \quad \text{e} \quad (11.128)$$

$$\bar{v}_2(r) = 2(C_2 - x_0) \left( r \bar{u}_0 + \frac{1 - \bar{u}_0}{r^3} \right), \quad (11.129)$$

o que nos permite integrar a equação (11.125) para obter a componente tangencial

$$\bar{w}_2(r) = 2(C_2 - x_0) \left\{ \frac{1}{r^3} - \left( r + \frac{1}{r^3} \right) \bar{u}_0 - \frac{1}{2} \left( r^2 - \frac{1}{r^2} \right) \frac{d\bar{u}_0}{dr} \right\}, \quad (11.130)$$

de modo a satisfazer conservação de massa nesta ordem em  $\lambda$ .

Finalmente, completamos este modelo da tangente hiperbólica relacionando a distância entre o perfil local escolhido e a saída do bocal ou duto  $x_0$  com a espessura da camada de mistura  $\theta_0$  através da fórmula

$$\theta_0 = \frac{3x_0 + 4}{100} \quad \text{ou} \quad x_0 = \frac{4}{3}(25\theta_0 - 1), \quad (11.131)$$

utilizada originalmente para jatos livres [37], uma vez que  $\lambda \ll 1$ . A Figura 11.10 mostra uma comparação de todos os componentes da velocidade obtidos deste modelo aproximado com suas respectivas versões descontínuas. Ela mostra uma camada de mistura de tamanho finito e não-nulo assim como sua transição suave para os limites descontínuos.

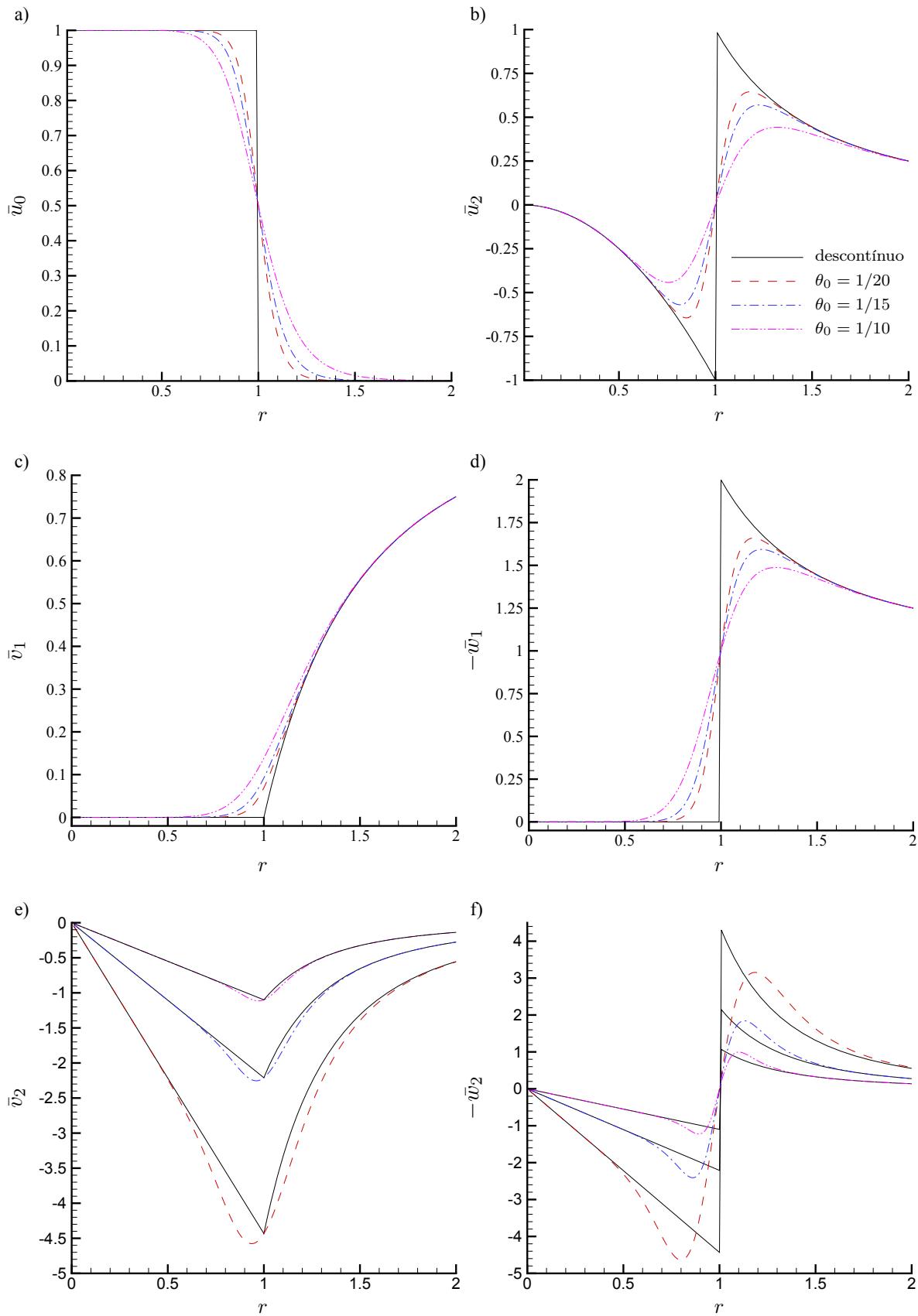


Figura 11.10: Perfil de velocidade do jato transversal de acordo com os modelos descontínuo e da tangente hiperbólica para  $\theta_0 = 1/10$ ,  $1/15$  e  $1/20$ .

## Modelo da Camada Limite:

A simplicidade do modelo anterior tem o seu custo, uma vez que a conservação da quantidade de movimento não é satisfeita. Simulações numéricas diretas deste problema representam outra alternativa, onde a média temporal das soluções transientes resultantes são utilizadas como escoamento base [13]. Contudo, esta abordagem permite que perturbações lineares e não-lineares entrem em sua composição. Desta forma, apesar de possuir uma riqueza significativamente maior de detalhes sobre o escoamento, médias temporais também não são soluções das equações de governo originais. Uma solução para este impasse seria manipular a simulação numérica para que esta dissipe as perturbações temporais presentes sem afetar a resolução espacial do escoamento. Isto é possível [1] e já foi utilizado para gerar uma solução de regime permanente para o jato transversal e estudar sua estabilidade linear [7]. A precisão e riqueza de detalhes deste modelo também tem o seu custo, uma vez que o tempo computacional necessário é elevado. Por isso, buscamos um meio termo nesta subseção. A idéia é obter uma solução mais precisa que o modelo aproximado mas sem o custo computacional dos modelos mais sofisticados.

Para alcançar este objetivo, buscamos uma solução na forma

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, r, \theta) &= \bar{u}_0(x, r) + \lambda \bar{U}_1(x, r, \theta) + \lambda^2 \bar{U}_2(x, r, \theta), \\ \bar{v}(x, r, \theta) &= \bar{v}_0(x, r) + \lambda \bar{V}_1(x, r, \theta) + \lambda^2 \bar{V}_2(x, r, \theta) \quad \text{e} \\ \bar{w}(x, r, \theta) &= \quad \quad \quad + \lambda \bar{W}_1(x, r, \theta) + \lambda^2 \bar{W}_2(x, r, \theta),\end{aligned}\tag{11.132}$$

onde a pressão foi excluída desta expansão pois seu impacto seria nulo. Além disso, iremos desconsiderar temporariamente a hipótese local (11.90) para o escoamento base, lidando assim diretamente com as equações (11.81) e (11.83) por enquanto. Assim como ocorreu no modelo da camada de mistura para o jato livre contínuo, a hipótese local é utilizada apenas posteriormente na análise de estabilidade.

- Problema de Ordem Zero:

Nesta ordem, recuperamos o modelo da camada limite para o jato livre discutido em seções anteriores. Desta forma, esta etapa não será mencionada novamente aqui.

- Problema de Primeira Ordem:

Esta análise começa com uma investigação do comportamento da solução não-viscosa (11.122) na medida que ela se aproxima da camada de mistura. Ele é dado por

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 1^-} \bar{U}_1 &= 0 \quad , \quad \lim_{r \rightarrow 1^+} \bar{U}_1 = 0 \quad , \\ \lim_{r \rightarrow 1^-} \bar{V}_1 &= 0 \quad , \quad \lim_{r \rightarrow 1^+} \bar{V}_1 = 0 \quad , \\ \lim_{r \rightarrow 1^-} \bar{W}_1 &= 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 1^+} \bar{W}_1 = 2 \sin[\theta] \quad ,\end{aligned}\tag{11.133}$$

indicando que existe uma camada de mistura apenas para  $\bar{W}_1$ . Assim como no caso do jato livre, devemos re-escrever o problema na nova coordenada independente  $\bar{r}$  definida em

(11.98). Para manter consistência com a equação da continuidade (11.81), devemos definir

$$\bar{V}_1(x, r, \theta) = + \delta \bar{V}_{1,1}(x, \bar{r}, \theta) + O(\delta^2) \quad \text{e} \quad (11.134)$$

$$\bar{W}_1(x, r, \theta) = \bar{W}_{1,0}(x, \bar{r}, \theta) + \delta \bar{W}_{1,1}(x, \bar{r}, \theta) + O(\delta^2) \quad , \quad (11.135)$$

exceto para a componente axial, uma vez que ela não aparece na solução não-viscosa. De qualquer forma, a equação (11.81) se torna

$$\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}_{1,1}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{W}_{1,0}}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad (11.136)$$

o que nos permite definir

$$\begin{aligned} \bar{U}_1(x, \bar{r}, \theta) &= \bar{u}_1(x, \bar{r}) \cos[\theta] \quad , \quad \bar{V}_{1,1}(x, \bar{r}, \theta) = \bar{v}_{1,1}(x, \bar{r}) \cos[\theta] \quad , \\ \bar{W}_{1,0}(x, \bar{r}, \theta) &= \bar{w}_{1,0}(x, \bar{r}) \sin[\theta] \quad \text{e} \quad \bar{W}_{1,1}(x, \bar{r}, \theta) = \bar{w}_{1,1}(x, \bar{r}) \sin[\theta] \quad , \end{aligned} \quad (11.137)$$

para então re-escrever a equação (11.136) como

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_{1,1}}{\partial \bar{r}} + \bar{w}_{1,0} \simeq 0 \quad . \quad (11.138)$$

Podemos agora fazer o mesmo com as equações da quantidade de movimento linear (11.83). Na direção axial encontramos

$$\bar{u}_{0,0} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_{0,0}}{\partial x} + \bar{v}_{0,1} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{r}} + \bar{v}_{1,1} \frac{\partial \bar{u}_{0,0}}{\partial \bar{r}} \simeq \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{r}^2} \quad , \quad (11.139)$$

onde utilizamos novamente (11.101). Vale a pena analisar este resultado com cuidado. Se tivéssemos imposto que  $\bar{u}_1 = 0$ , tomando como base o fato desta componente ser nula nos seus limites não-viscosos em (11.133), teríamos encontrado que  $\bar{v}_{1,1} \partial \bar{u}_{0,0} / \partial \bar{r} = 0$  porque  $\bar{P}_1 = 0$  com base no problema não-viscoso. Isto é uma contradição. Por isso, mantemos  $\bar{u}_1 \neq 0$  e obtemos esta componente das equações de camada limite. Como ocorre no problema de ordem zero, a equação da quantidade de movimento na direção radial apenas nos fornece informações sobre a pressão. Ela nos diz que

$$\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{r}} \sim O(\delta^2) \quad , \quad (11.140)$$

e pode, portanto, ser ignorada aqui. Finalmente, na direção tangencial encontramos

$$\bar{u}_{0,0} \frac{\partial \bar{w}_{1,0}}{\partial x} + \bar{v}_{0,1} \frac{\partial \bar{w}_{1,0}}{\partial \bar{r}} \simeq \frac{\partial^2 \bar{w}_{1,0}}{\partial \bar{r}^2} \quad , \quad (11.141)$$

que possui, assim como as equações anteriores,  $O(\lambda)$  (ou melhor,  $O(\lambda^1 \delta^0)$ ).

Como  $\bar{V}_1$  possui  $O(\delta^2)$ , devemos encontrar  $\bar{W}_1$  com a mesma precisão para sermos consistentes. Assim sendo, basta considerar a equação da quantidade de movimento na direção tangencial com  $O(\lambda \delta)$  para obter

$$\bar{u}_{0,0} \frac{\partial \bar{w}_{1,1}}{\partial x} + \bar{v}_{0,1} \frac{\partial \bar{w}_{1,1}}{\partial \bar{r}} + \bar{v}_{0,1} \bar{w}_{1,0} \simeq \frac{\partial^2 \bar{w}_{1,1}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{\partial \bar{w}_{1,0}}{\partial \bar{r}} \quad , \quad (11.142)$$

e tornar o nosso sistema de quatro equações determinado.

- Problema de Segunda Ordem:

Não há um problema de camada limite nesta ordem. Além disso, o sistema encontrado não possui solução analítica e, por isso, este modelo da camada limite para o escoamento base terá apenas  $O(\lambda^2)$ ,  $O(\lambda \delta)$  e  $O(\delta^2)$ .

- Similaridade:

A técnica utilizada para resolver o problema de ordem zero, que já foi apresentada na subseção 11.6.1, também pode ser utilizada nos problemas de maior ordem discutidos acima. As mesmas variável e velocidades similares (11.103) e (11.104), respectivamente, ainda são válidas, porém devemos definir as relações adicionais

$$\bar{u}_1(x, \bar{r}) = 2x f_1(\eta) , \quad \bar{v}_{1,1}(x, \bar{r}) = 2\sqrt{x} h_1(\eta) \quad \text{e} \quad \bar{w}_{1,0}(x, \bar{r}) = 2g_{1,0}(\eta) , \quad (11.143)$$

para, quando substituídas nas equações da continuidade (11.138) e quantidade de movimento linear nas direções axial (11.139) e radial (11.141), gerar o respectivo sistema similar

$$h'_1 - \frac{\eta}{2} f'_1 + f_1 - g_{1,0} = 0 , \quad (11.144)$$

$$f''_1 + \frac{f_0}{2} f'_1 - \left( f'_0 - \frac{\eta}{2} f''_0 \right) f_1 - f''_0 h_1 = 0 \quad \text{e} \quad (11.145)$$

$$2g''_{1,0} + f_0 g'_{1,0} = 0 , \quad (11.146)$$

para o problema de  $O(\lambda)$ . Já para no problema de  $O(\lambda \delta)$ , utilizamos a transformação

$$\bar{w}_{1,1}(x, \bar{r}) = -2\sqrt{x} g_{1,1}(\eta) , \quad (11.147)$$

na equação da quantidade de movimento na direção tangencial (11.142) para obter

$$2g''_{1,1} + f_0 g'_{1,1} - f'_0 g_{1,1} - 2g'_{1,0} - (f_0 - \eta f'_0) g_{1,0} = 0 . \quad (11.148)$$

A solução deste sistema similar requer a especificação de suas respectivas condições de contorno. Antes de fazê-lo, é necessário utilizar as simplificações

$$1 - \frac{1}{r^2} \simeq 2\delta\bar{r} + O(\delta^2) \quad \text{e} \quad 1 + \frac{1}{r^2} \simeq 2 - 2\delta\bar{r} + O(\delta^2) \quad (11.149)$$

para re-escrever as soluções não-viscosas de  $O(\lambda)$  em (11.124) como

$$\bar{v}_1(\bar{r}) \simeq \begin{cases} 0 & ; \bar{r} < 0 \\ 2\delta\bar{r} & ; \bar{r} > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \bar{w}_1(\bar{r}) \simeq \begin{cases} 0 & ; \bar{r} < 0 \\ 2 - 2\delta\bar{r} & ; \bar{r} > 0 \end{cases} , \quad (11.150)$$

e, somente então, obter o novo comportamento assintótico de (11.133) na forma

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow 0^-} \bar{U}_1 = 0 , \quad \lim_{\bar{r} \rightarrow 0^+} \bar{U}_1 = 0 , \quad (11.151)$$

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow 0^-} \bar{V}_{1,1} = 0 , \quad \lim_{\bar{r} \rightarrow 0^+} \bar{V}_{1,1} = 2\bar{r} \cos[\theta] , \quad (11.152)$$

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow 0^-} \bar{W}_{1,0} = 0 , \quad \lim_{\bar{r} \rightarrow 0^+} \bar{W}_{1,0} = 2 \sin[\theta] , \quad (11.153)$$

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow 0^-} \bar{W}_{1,1} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\bar{r} \rightarrow 0^+} \bar{W}_{1,1} = -2\bar{r} \sin[\theta] , \quad (11.154)$$

o que nos permite impor os seguintes valores limites para as funções similares

$$f_1(\eta \rightarrow -\infty) = 0 \quad , \quad f_1(\eta \rightarrow +\infty) = 0 \quad , \quad (11.155)$$

$$h_1(\eta \rightarrow -\infty) = 0 \quad , \quad h_1(\eta \rightarrow +\infty) = \eta \quad , \quad (11.156)$$

$$g_{1,0}(\eta \rightarrow -\infty) = 0 \quad , \quad g_{1,0}(\eta \rightarrow +\infty) = 1 \quad , \quad (11.157)$$

$$g_{1,1}(\eta \rightarrow -\infty) = 0 \quad \text{e} \quad g_{1,1}(\eta \rightarrow +\infty) = \eta \quad , \quad (11.158)$$

de acordo com as definições (11.137) em conjunto com (11.143) e (11.147).

- Método do Tiro:

Novamente usamos o mesmo método da subseção 11.6.1 para obter uma solução para o sistema similar derivado acima. Assim sendo, é necessário gerar as respectivas soluções assintóticas. Começamos com a equação (11.146), uma vez que ela está acoplada apenas as equações de ordem zero que já são conhecidas, e suas condições de contorno (11.157). No limite quando  $\eta \rightarrow -\infty$ , podemos escrever

$$2g_{1,0}'' + (a_1 + \eta)g_{1,0}' = 0 \quad , \quad (11.159)$$

cuja solução é

$$g_{1,0} = b_1 \sqrt{\pi} \exp\left[\frac{a_1^2}{4}\right] \left(1 + \operatorname{erf}\left[\frac{a_1 + \eta}{2}\right]\right) \quad , \quad (11.160)$$

porém, no limite quando  $\eta \rightarrow +\infty$  temos

$$2g_{1,0}'' + a_3 g_{1,0}' = 0 \quad , \quad (11.161)$$

cuja solução é

$$g_{1,0} = 1 - \frac{2b_2}{a_3} \exp\left[-\frac{a_3 \eta}{2}\right] \quad , \quad (11.162)$$

onde  $b_1$  e  $b_2$  são as constantes a serem determinadas. Repetimos então o mesmo método do tiro já descrito para o jato livre contínuo, porém agora com o objetivo de garantir continuidade para  $g_{1,0}$  e sua primeira derivada  $g_{1,0}'$  em  $\eta = 0$ . Os valores encontrados para estas constantes são  $b_1 = 0,15375$  e  $b_2 = 0,62633$ .

A equação (11.148) também pode ser resolvida individualmente, pois está acoplada à equação (11.146) que já possui uma solução conhecida, em conjunto com suas condições de contorno (11.158). No limite quando  $\eta \rightarrow -\infty$ , ela se torna

$$2g_{1,1}'' + (a_1 + \eta)g_{1,1}' - g_{1,1} = 0 \quad , \quad (11.163)$$

cuja solução é

$$g_{1,1} = -b_3 \exp\left[-\frac{(a_1 + \eta)^2}{4}\right] \quad , \quad (11.164)$$

porém no limite  $\eta \rightarrow +\infty$ , ela se torna

$$2g_{1,1}'' + a_3 g_{1,1}' - a_3 = 0 \quad , \quad (11.165)$$

que possui uma solução na forma

$$g_{1,1} = \eta - \frac{2b_4}{a_3} \exp\left[-\frac{a_3}{2}\eta\right] , \quad (11.166)$$

onde  $b_3$  e  $b_4$  são constantes a serem determinadas pelo método do tiro. Impondo continuidade para a função  $g_{1,1}$  e sua primeira derivada  $g'_{1,1}$  em  $\eta = 0$  neste procedimento de solução, encontramos  $b_3 = 0,17100$  e  $b_4 = 0,66945$ .

Finalmente, nos voltamos para as duas últimas equações (11.144) e (11.145), que são acopladas e devem ser resolvidas simultaneamente, e suas condições de contorno (11.155) e (11.156). No limite quando  $\eta \rightarrow -\infty$ , este sistema se torna

$$f_1'' + \frac{a_1 + \eta}{2} f_1' - f_1 = 0 \quad \text{e} \quad h_1' = 0 , \quad (11.167)$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned} f_1 = & -b_5 (2 + a_1 + \eta) \left\{ \frac{a_1 + \eta}{4(2 + (a_1 + \eta)^2)} \exp\left[-\eta \frac{2a_1 + \eta}{4}\right] + \right. \\ & \left. \frac{\sqrt{\pi}}{8} \exp\left[\frac{a_1^2}{4}\right] \left(1 + \operatorname{erf}\left[\frac{a_1 + \eta}{2}\right]\right) \right\} \quad \text{e} \quad h_1 = b_6 , \end{aligned} \quad (11.168)$$

porém no limite  $\eta \rightarrow +\infty$ , o sistema muda para

$$f_1'' + \frac{a_3}{2} f_1' = 0 \quad \text{e} \quad h_1' = 1 , \quad (11.169)$$

cujas soluções são

$$f_1 = \frac{2b_7}{a_3} \exp\left[-\frac{a_3\eta}{2}\right] \quad \text{e} \quad h_1 = \eta - b_8 , \quad (11.170)$$

onde  $b_5$ ,  $b_6$ ,  $b_7$  e  $b_8$  são constantes a serem determinadas. A solução deste sistema pelo método do tiro, utilizando todas as quatro constantes, não segue exatamente as mesmas linhas das aplicações anteriores desta metodologia. A razão é simples. Duas condições de contorno foram especificadas para  $h_1$  em (11.156), levando às duas soluções assintóticas diferentes acima. Contudo, a equação diferencial (11.144) é de primeira ordem, ou seja, este problema está sub-determinado. Em outras palavras, só é possível impor continuidade para  $f_1$ ,  $f_1'$  e  $h_1$  em  $\eta = 0$ . Isto significa que somente três das quatro constantes podem ser determinadas no processo de busca do método. As constantes  $b_5$  e  $b_7$  foram mantidas, uma vez que a equação diferencial (11.145) é de segunda ordem. Antes

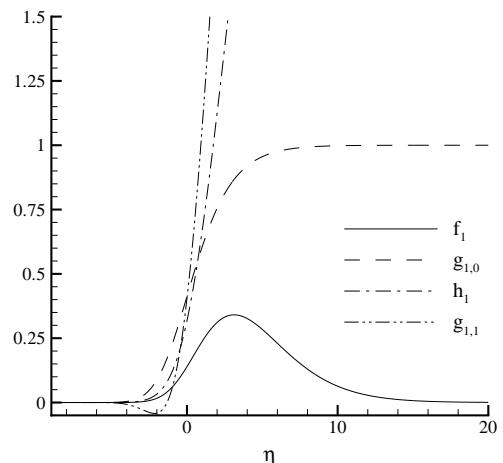


Figura 11.11: Velocidades similares de acordo com o modelo da camada limite com  $O(\lambda)$  e  $O(\lambda \delta)$  para o jato transversal contínuo.

de determinar qual das outras duas constantes seria escolhida, alguns experimentos numéricos foram realizados. Eles indicaram que o valor obtido para  $b_8$  era sempre o mesmo, independente do valor escolhido para  $b_6$ . Além disso, não era possível calcular as constantes caso  $b_8$  fosse especificado. Desta forma, impomos  $b_6 = 0$  para encontrar  $b_5 = 151,74$ ,  $b_7 = 312,18$  e  $b_8 = 4,5029$ . Nos parece que  $b_6$  controla o deslocamento da linha de corrente central, como ocorre com seu contraposto no jato livre contínuo, porém sua determinação foge ao escopo deste trabalho. As soluções obtidas para  $f_1$ ,  $h_1$ ,  $g_{1,0}$  e  $g_{1,1}$  são mostradas na Figura 11.11.

- Solução Assintótica Uniformemente Válida:

A componente axial  $\bar{u}_1$  da velocidade contínua, obtida pelo modelo da camada limite com a fórmula (11.143), se comporta como a solução não-viscosa fora da camada de mistura. Isto pode ser observado na Figura 11.11, que mostra  $f_1 \rightarrow 0$  nos limites  $\eta \rightarrow \pm\infty$ . Contudo, o mesmo não ocorre para as outras componentes obtidas deste modelo. A principal causa desta discrepância são as aproximações (11.149), usadas para re-escrever estas componentes não-viscosas em (11.124) como (11.150) nas fronteiras da camada de mistura. Este passo foi necessário para construção de uma solução de camada limite, porém faz com que as componentes radial e tangencial tenham um comportamento distinto da solução não-viscosa original fora da camada de mistura. Uma maneira de consertar este problema é utilizar o método das expansões assintóticas casadas [55, 34]. Ele permite a unificação das soluções viscosa e não-viscosa. Apesar da solução gerada não ser única, seu erro tem a mesma ordem do erro das soluções utilizadas no processo de composição.

Esta metodologia é relativamente simples de implementar. Segundo ela, devemos apenas somar as soluções não-viscosa e viscosa, subtraindo do resultado uma correção que contém os termos que ambas soluções tem em comum. No caso da componente tangencial da quantidade de movimento linear, devemos ter

$$\bar{w}_1(x, r) = \bar{w}_1^{(desc)} + \bar{w}_1^{(cont)} + \bar{w}_1^{(corr)} , \quad (11.171)$$

onde os sobrescritos significam que a solução utilizada é  $(desc) \equiv$  descontínua,  $(cont) \equiv$  contínua e  $(corr) \equiv$  correção. As duas primeiras já são conhecidas dos modelos apresentados anteriormente, sendo a última definida aqui como

$$\bar{w}_1^{(corr)} = \begin{cases} 0 & ; \quad r < 1 \\ 2(r - 1) - 2 & ; \quad r > 1 \end{cases} . \quad (11.172)$$

Já a construção da solução unificada para a componente radial da quantidade de movimento linear requer a solução de outro problema, associado ao efeito causado por  $b_8$ . Se repetirmos o procedimento utilizado para  $\bar{w}_1$ , toda a solução para  $\bar{v}_1$  seria deslocada. Esta é a razão pela qual associamos a escolha de  $b_8$  com o deslocamento da linha de corrente central. Desta forma, substituímos  $\eta$  por  $\eta - b_8$  na solução de camada limite desta variável para eliminar este problema na composição

$$\bar{v}_1(x, r) = \bar{v}_1^{(desc)} + \bar{v}_1^{(cont)} + \bar{v}_1^{(corr)} , \quad (11.173)$$

onde os sobrescritos tem a mesma interpretação, porém a correção é dada por

$$\bar{v}_1^{(corr)} = \begin{cases} 0 & ; \quad r < 1 \\ 2(1 - r) & ; \quad r > 1 \end{cases} . \quad (11.174)$$

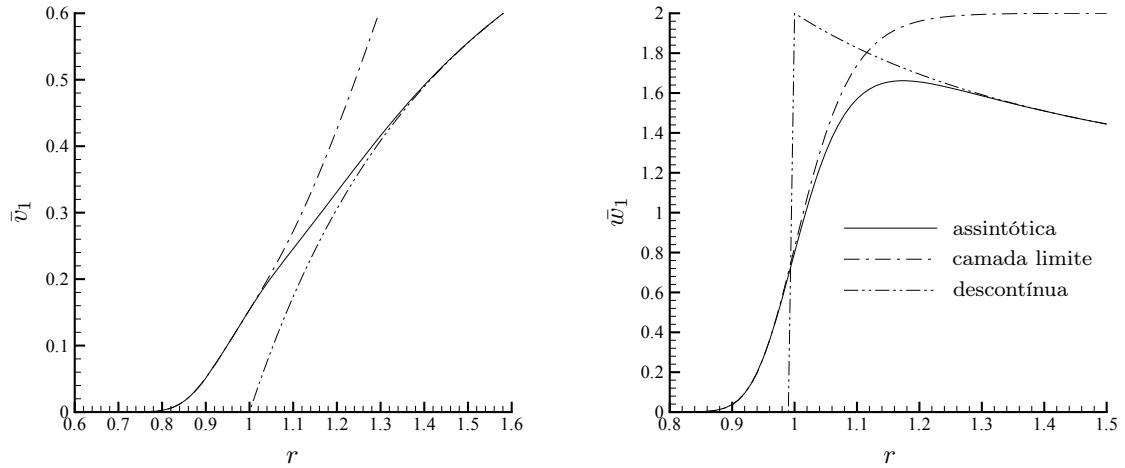


Figura 11.12: Componentes radial  $\bar{v}_1$  e tangencial  $\bar{w}_1$  da solução assintótica uniformemente válida de  $O(\lambda)$  para o jato transversal com  $Re = 1000$  e  $x = 1$ .

Finalmente, mostramos os resultados deste perfil composto pelas fórmulas (11.173) e (11.171) na Figura 11.12, gerada com  $Re = 1000$  e  $x = 1$ . O comportamento qualitativo destas componentes apresentado nesta figura é muito semelhante às respectivas curvas na Figura 11.10, validando até certo ponto o modelo aproximado da tangente hiperbólica. Concluímos esta seção mencionado a existência de uma descontinuidade na segunda derivada destas componentes da velocidade. Apesar deste fato não estar aparente nesta figura, ele pode ser visto mais claramente na Figura 11.13. Este problema também é decorrente da aproximação (11.149). Por ser de  $O(\delta^2)$ , ela garante continuidade em  $r \sim 1$  apenas de cada velocidade e sua primeira derivada. Logo, para conseguir continuidade em derivadas de maior ordem é necessário incluir mais termos nestas expansões em  $\delta$ . Isto não é necessário no presente estudo, uma vez que derivadas de segunda ou maior ordem destas componentes não aparecem explicitamente na análise de estabilidade descrita a seguir.

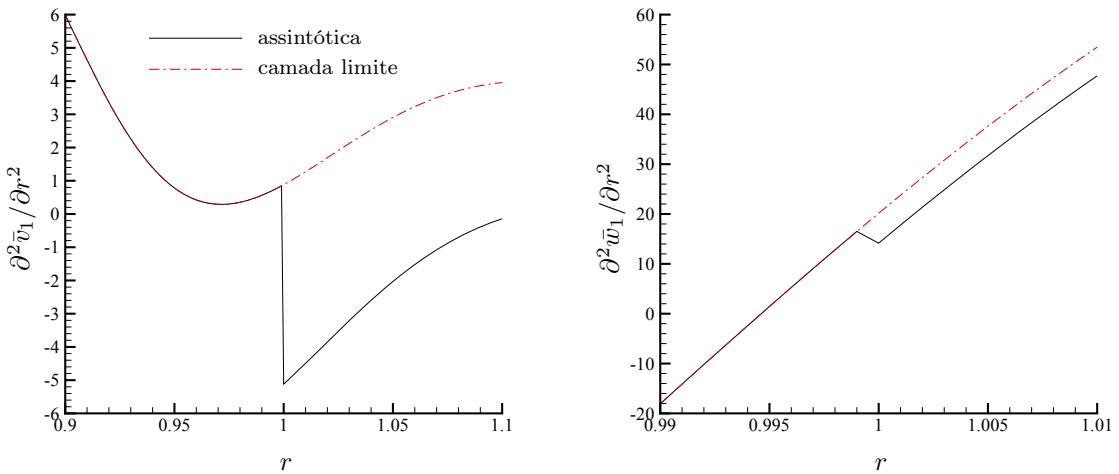


Figura 11.13: Segunda derivada com respeito a  $r$  dos resultados mostrados da Figura ??.

### 11.7.2 Análise de Estabilidade

Na presente seção, iremos perturbar o sistema de equações (11.93) e (11.94) utilizando a razão de velocidades  $\lambda$  como parâmetro de perturbação para, então, desenvolver uma análise de estabilidade linear considerando modos normais em cada ordem deste parâmetro. Este procedimento é o mesmo descrito para o jato transversal descontínuo. Contudo, ao contrário do respectivo caso descontínuo, apenas esta análise será desenvolvida para a versão contínua deste problema. Modos não-normais acoplados não serão considerados.

Seguindo o passo (11.41) do caso descontínuo, impomos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \check{p}_0^+(r) \\ \check{u}_0^+(r) \\ \check{v}_0^+(r) \\ \check{w}_0^+(r) \end{pmatrix} \exp[+i m \theta] + \begin{pmatrix} \check{p}_0^-(r) \\ \check{u}_0^-(r) \\ \check{v}_0^-(r) \\ \check{w}_0^-(r) \end{pmatrix} \exp[-i m \theta] \\ &+ \lambda \begin{pmatrix} \hat{p}_1(r, \theta) \\ \hat{u}_1(r, \theta) \\ \hat{v}_1(r, \theta) \\ \hat{w}_1(r, \theta) \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} \hat{p}_2(r, \theta) \\ \hat{u}_2(r, \theta) \\ \hat{v}_2(r, \theta) \\ \hat{w}_2(r, \theta) \end{pmatrix} + c.c. \end{aligned} \quad (11.175)$$

além de  $\omega = \omega_0 + \lambda \omega_1 + \lambda^2 \omega_2$  e  $\alpha = \alpha_0 + \lambda \alpha_1 + \lambda^2 \alpha_2$ , para descrever o comportamento azimute das amplitudes. Todos os comentários feitos a respeito desta aproximação para o respectivo caso descontínuo são válidos aqui e não serão repetidos.

A derivação da relação de dispersão para o jato transversal contínuo foi feita utilizando computação simbólica através do programa *Mathematica* [170]. O caso genérico para modos azimute arbitrários, obtido com o uso da aproximação acima, gera resultados extremamente longos. Para evitar fórmulas demasiadamente intrincadas, iremos apresentar aqui apenas o caso dos modos com simetria axial, ou seja,  $m = 0$ . Esta escolha se deve ao fato dele incluir todos os aspectos importantes da derivação e gerar fórmulas relativamente simples. Desta forma, iremos nesta seção descrever a derivação da relação de dispersão integro-diferencial apenas para o modo  $m = 0$ , impondo

$$\begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \check{p}_0(r) \\ \check{u}_0(r) \\ \check{v}_0(r) \\ \check{w}_0(r) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \hat{p}_1(r, \theta) \\ \hat{u}_1(r, \theta) \\ \hat{v}_1(r, \theta) \\ \hat{w}_1(r, \theta) \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} \hat{p}_2(r, \theta) \\ \hat{u}_2(r, \theta) \\ \hat{v}_2(r, \theta) \\ \hat{w}_2(r, \theta) \end{pmatrix} + c.c. \quad (11.176)$$

no lugar da expansão anterior. Contudo, os resultados a ser apresentados incluirão os modos não-simétricos  $m = \pm 1$  e  $m = \pm 2$  também, além do modo com simetria axial  $m = 0$ .

#### Problema de Ordem Zero:

O problema nesta ordem é obtido em três passos. Primeiro, substituímos as expansões (11.132) para o escoamento base e (11.176) para as perturbações nas equações da continuidade (11.93) e também quantidade de movimento linear (11.94). Posteriormente, coletamos os termos não multiplicados por  $\lambda$  para, finalmente, combinarmos as equações resultantes de modo a obter a relação de dispersão para o jato livre contínuo. Ela é idêntica a relação

obtida anteriormente e dada por (11.115), porém com  $m = 0$ . Por esta razão, este problema não será descrito novamente aqui.

### Problema de Primeira Ordem:

Repetindo o procedimento descrito no parágrafo anterior, porém agora coletando os termos de  $O(\lambda)$ , nos leva ao sistema de equações contendo

$$\alpha_0 \hat{u}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{v}_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \theta} = -\alpha_1 \check{u}_0 , \quad (11.177)$$

que é a equação da continuidade com  $O(\lambda)$ , e também

$$\begin{aligned} -(\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0) \hat{u}_1 + \frac{d\bar{u}_0}{dr} \hat{v}_1 + \alpha_0 \hat{p}_1 &= (\omega_1 - \alpha_1 \bar{u}_0 - \alpha_0 \bar{U}_1) \check{u}_0 + i \bar{V}_1 \frac{d\check{u}_0}{dr} - \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial r} \check{v}_0 - \alpha_1 \check{p}_0 , \\ (\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0) \hat{v}_1 + \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial r} &= -\left( \omega_1 - \alpha_1 \bar{u}_0 - \alpha_0 \bar{U}_1 + i \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial r} \right) \check{v}_0 - i \bar{V}_1 \frac{d\check{v}_0}{dr} \quad \text{e} \\ (\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0) \hat{w}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \theta} &= -\frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{W}_1) \check{v}_0 , \end{aligned} \quad (11.178)$$

que são as equações da quantidade de movimento linear para as perturbações com  $O(\lambda)$ . Os termos não-homogêneos nestas equações contém informações sobre o escoamento base até primeira ordem, mas não segunda. Como os termos de ordem zero não dependem de  $\theta$  e os termos de primeira ordem seguem as relações (11.122) ou (11.137), chegamos a conclusão que as correções  $\omega_1$  e  $\alpha_1$  para os autovalores  $\omega_0$  e  $\alpha_0$  não são afetadas pelo escoamento transversal. Logo, podemos impor que  $\omega_1 = \alpha_1 = 0$ . Esta conclusão também é verdadeira para os modos não simétricos  $m \neq 0$ , o que pode ser demonstrado por um argumento intuitivo. As correções nesta ordem deveriam ser as mesmas independente da direção do escoamento transversal. Contudo, o sinal de  $\lambda$  muda se trocarmos o escoamento transversal de direção, o que mudaria a natureza das correções para os autovalores. Conseqüentemente, as correções de primeira ordem para os autovalores tem que ser nulas.

- Modo Normal:

Impor  $\omega_1 = \alpha_1 = 0$  não significa que suas respectivas amplitudes sejam nulas nesta ordem. Para calculá-las, devemos antes definir suas dependências azimute como

$$\begin{aligned} \hat{p}_1(r, \theta) &= \check{p}_1(r) \cos[\theta] , \quad \hat{u}_1(r, \theta) = \check{u}_1(r) \cos[\theta] , \\ \hat{v}_1(r, \theta) &= \check{v}_1(r) \cos[\theta] \quad \text{e} \quad \hat{w}_1(r, \theta) = \check{w}_1(r) \sin[\theta] , \end{aligned} \quad (11.179)$$

de acordo com os termos não-homogêneos nas equações (11.177) e (11.178). Substituindo nestas equações as relações acima para as perturbações, em conjunto (11.122) ou (11.137) para o escoamento base, obtemos

$$\alpha_0 \check{u}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \check{v}_1) + \frac{\check{w}_1}{r} = 0 , \quad (11.180)$$

para continuidade com  $O(\lambda)$ , e

$$-(\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0) \check{u}_1 + \frac{d\bar{u}_0}{dr} \check{v}_1 + \alpha_0 \check{p}_1 = -\alpha_0 \bar{u}_1 \check{u}_0 + i \bar{v}_1 \frac{d\bar{u}_0}{dr} - \frac{d\bar{u}_1}{dr} \check{v}_0 , \quad (11.181)$$

$$(\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0) \check{v}_1 + \frac{d\check{p}_1}{dr} = \left( \alpha_0 \bar{u}_1 - i \frac{d\bar{v}_1}{dr} \right) \check{v}_0 - i \bar{v}_1 \frac{d\check{v}_0}{dr} \quad \text{e} \quad (11.182)$$

$$(\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0) \check{w}_1 - \frac{\check{p}_1}{r} = -\frac{i}{r} \frac{d}{dr} (r \bar{w}_1) \check{v}_0 , \quad (11.183)$$

para quantidade de movimento linear com  $O(\lambda)$ . Eliminando  $\check{v}_1$  da equação (11.180) com (11.183) e usando o resultado para eliminar  $\check{u}_1$  da equação (11.181), reduzimos o problema acima para o sistema de duas equações

$$(\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \check{v}_1) + \alpha_0 \frac{d\bar{u}_0}{dr} \check{v}_1 + \left( \alpha_0^2 + \frac{1}{r^2} \right) \check{p}_1 = \Lambda_1 \quad \text{e} \quad (11.184)$$

$$(\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0) \check{v}_1 + \frac{d\check{p}_1}{dr} = \Lambda_2 , \quad (11.185)$$

onde os novos termos não-homogêneos  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  são dados por

$$\Lambda_1 = i \alpha_0 \bar{v}_1 \frac{d\bar{u}_0}{dr} - \alpha_0^2 \bar{u}_1 \check{u}_0 - \left( \alpha_0 \frac{d\bar{u}_1}{dr} + \frac{i}{r^2} \frac{d}{dr} (r \bar{w}_1) \right) \check{v}_0 \quad \text{e} \quad (11.186)$$

$$\Lambda_2 = \left( \alpha_0 \bar{u}_1 - i \frac{d\bar{v}_1}{dr} \right) \check{v}_0 - i \bar{v}_1 \frac{d\check{v}_0}{dr} . \quad (11.187)$$

Ainda é possível reduzir esta relação de dispersão de um sistema para uma única equação. Para fazê-lo, eliminamos  $\check{v}_1$  da equação (11.184) com a equação (11.185), obtendo

$$\frac{d^2 \check{p}_1}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{2 \alpha_0}{\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0} \frac{d\bar{u}_0}{dr} \right) \frac{d\check{p}_1}{dr} - \left( \alpha_0^2 + \frac{1}{r^2} \right) \check{p}_1 = \Lambda_3 , \quad (11.188)$$

onde o novo termo não-homogêneo  $\Lambda_3$  é dado por

$$\Lambda_3 = \frac{d\Lambda_2}{dr} + \left( \frac{1}{r} + \frac{2 \alpha_0}{\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0} \frac{d\bar{u}_0}{dr} \right) \Lambda_2 - \Lambda_1 . \quad (11.189)$$

- Condições de Contorno:

Tendo definido o problema de autovalor com as equações acima, podemos impor as condições de contorno

$$\check{p}_1(r \rightarrow 0) = n^o \text{ finito} \quad \text{e} \quad \check{p}_1(r \rightarrow \infty) = 0 , \quad (11.190)$$

segundo a mesma linha das condições (11.116).

- Método do Tiro:

O procedimento de cálculo dos autovalores nesta ordem segue as mesmas linhas das análises anteriores, com apenas algumas poucas diferenças. A primeira delas envolve as

equações usadas pelo método do tiro. Quando o modelo da tangente hiperbólica é usado como escoamento base, a equação (11.188) pode ser usada diretamente, como feito com (11.115) para  $m = 1$ . Suas soluções assintóticas são dadas por

$$\check{p}_1(r) = \mathcal{A}_1 I_1(\alpha_0 r) \quad \text{e} \quad \check{p}_1(r) = \mathcal{B}_1 K_1(\alpha_0 r) , \quad (11.191)$$

uma vez que  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$  em ambos os limites. Mais uma vez, o problema de valor de contorno é transformado em dois problemas de valor inicial para as variáveis  $f_0$  e  $f_\infty$ , separados em  $r_0$ . Contudo, o procedimento de busca será usado agora para determinar os valores de  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{B}_1$  que satisfazem  $f_0(r_0) = f_\infty(r_0)$  para garantir continuidade de  $\check{p}_1$  em  $r = r_0$  e  $f'_0(r_0) = f'_\infty(r_0)$  para garantir continuidade de sua derivada no mesmo ponto. Por outro lado, a equação (11.188) não deve ser usada quando o modelo da camada limite é escolhido como escoamento base. Isto se deve ao fato da segunda derivada de  $\bar{v}_1$  aparecer em  $\Lambda_3$ . Como ela é descontínua neste modelo, devemos resolver o sistema de equações contendo (11.184) e (11.185) no lugar de (11.188). Neste cenário, as soluções assintóticas para  $\check{v}_1$  são obtidas usando (11.191) na equação (11.185), uma vez que  $\Lambda_2 = 0$  em ambos os limites. Além disso, as constantes são determinadas para garantir continuidade de  $\check{p}_1$  e  $\check{v}_1$  em  $r = r_0$ .

Outras diferenças ainda existem. A segunda delas está relacionada ao tamanho do domínio truncado. Ele deve ser escolhido de modo a garantir que não somente  $d\bar{u}_0/dr$  nos extremos seja menor que uma tolerância pré-determinada, mas também  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$ . Já a terceira diferença está associada ao uso de  $\check{p}_0$ . Como temos um problema de autovalor em ordem zero, uma das constantes da perturbação na pressão não é determinada. Neste trabalho, escolhemos  $\mathcal{A}_0$  como sendo a constante desconhecida. Logo, a perturbação na pressão em todas as ordens está normalizada em relação a esta constante.

### Problema de Segunda Ordem:

Mais uma vez repetimos o procedimento descrito para o problema de ordem zero, mas agora coletando os termos de  $O(\lambda^2)$ . Isto nos leva ao sistema de equações contendo

$$\alpha_0 \hat{u}_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{v}_2) + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \theta} = -\alpha_2 \check{u}_0 , \quad (11.192)$$

que é a equação da continuidade com  $O(\lambda^2)$ , e também

$$\begin{aligned} -(\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0) \hat{u}_2 + \frac{d\bar{u}_0}{dr} \hat{v}_2 + \alpha_0 \hat{p}_2 &= (\omega_2 - \alpha_2 \bar{u}_0 - \alpha_0 \bar{U}_2) \check{u}_0 + i \bar{V}_2 \frac{d\check{u}_0}{dr} - \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial r} \check{v}_0 - \alpha_2 \check{p}_0 \\ &\quad - \alpha_0 \bar{U}_1 \hat{u}_1 + i \bar{V}_1 \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial r} + i \frac{\bar{W}_1}{r} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial r} \hat{v}_1 - \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \theta} \frac{\hat{w}_1}{r} , \\ (\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0) \hat{v}_2 + \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial r} &= - \left( \omega_2 - \alpha_2 \bar{u}_0 - \alpha_0 \bar{U}_2 + i \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial r} \right) \check{v}_0 - i \bar{V}_2 \frac{d\check{v}_0}{dr} \\ &\quad + \alpha_0 \bar{U}_1 \hat{v}_1 - i \frac{\partial}{\partial r} (\bar{V}_1 \hat{v}_1) - i \frac{\bar{W}_1}{r} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \theta} - \frac{i}{r} \left( \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial \theta} - 2 \bar{W}_1 \right) \hat{w}_1 \quad \text{e} \\ (\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0) \hat{w}_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \theta} &= - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{W}_2) \check{v}_0 \\ &\quad - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{W}_1) \hat{v}_1 + \left( \alpha_0 \bar{U}_1 - \frac{i}{r} \left( \bar{V}_1 + \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial \theta} \right) \right) \hat{w}_1 - i \left( \bar{V}_1 \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial r} + \frac{\bar{W}_1}{r} \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \theta} \right) , \end{aligned} \quad (11.193)$$

que são as equações da quantidade de movimento linear com  $O(\lambda^2)$ .

- Modo Normal:

Seus termos não-homogêneos contém informações sobre o escoamento base em todas as ordens, onde suas dependências azimute seguem as relações (11.122) ou (11.137). Além disso, as correções  $\omega_2$  e  $\alpha_2$  para os autovalores  $\omega_0$  e  $\alpha_0$  estão contidas em termos que tem variação radial mas não tangencial. Desta forma, eles interagem de maneira ressonante apenas com os termos relacionados ao escoamento transversal que possuem a mesma dependência. Este não é o caso da última equação no sistema (11.193), mas tal ressonância ocorre nas outras três equações. Com isso, podemos definir a dependência azimute como

$$\hat{p}_2(r, \theta) = \check{p}_2(r) , \quad \hat{u}_2(r, \theta) = \check{u}_2(r) , \quad \hat{v}_2(r, \theta) = \check{v}_2(r) \quad \text{e} \quad \hat{w}_2(r, \theta) = 0 , \quad (11.194)$$

o que nos permite re-escrever as equações (11.192) e (11.193) na forma

$$\alpha_0 \hat{u}_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{v}_2) = -\alpha_2 \check{u}_0 , \quad (11.195)$$

$$-(\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0) \hat{u}_2 + \frac{d\bar{u}_0}{dr} \hat{v}_2 + \alpha_0 \hat{p}_2 = \Gamma_1 \quad \text{e} \quad (11.196)$$

$$(\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0) \hat{v}_2 + \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial r} = \Gamma_2 , \quad (11.197)$$

onde a última equação do sistema (11.193) foi desprezada e os termos fonte são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= (\omega_2 - \alpha_2 \bar{u}_0) \check{u}_0 - \alpha_2 \check{p}_0 \\ &+ \left( \frac{i}{2r} \bar{w}_1 - \frac{\alpha_0}{2} \bar{u}_1 \right) \check{u}_1 + i \bar{v}_1 \frac{d\check{u}_1}{dr} - \frac{1}{2} \frac{d\bar{u}_1}{dr} \check{v}_1 - \frac{\bar{u}_1 \check{w}_1}{2r} \quad \text{e} \end{aligned} \quad (11.198)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= -(\omega_2 - \alpha_2 \bar{u}_0) \check{v}_0 \\ &+ \left( \frac{\alpha_0}{2} \bar{u}_1 + \frac{i}{2r} \bar{w}_1 \right) \check{v}_1 - \frac{i}{2} \frac{d}{dr} (\bar{v}_1 \check{v}_1) + \frac{i}{2r} (\bar{v}_1 + 2 \bar{w}_1) \check{w}_1 . \end{aligned} \quad (11.199)$$

Eliminado  $\check{u}_2$  da equação (11.196) com (11.195) e  $\check{u}_2$  da equação resultante com (11.197), podemos deduzir este sistema para uma única equação na forma

$$\frac{d^2 \check{p}_2}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{2\alpha_0}{\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0} \frac{d\bar{u}_0}{dr} \right) \frac{d\check{p}_2}{dr} - \alpha_0^2 \check{p}_2 = \Gamma_3 , \quad (11.200)$$

sendo o novo termo fonte obtido com

$$\Gamma_3 = \alpha_2 (\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0) \check{u}_0 - \alpha_0 \Gamma_1 + \left( \frac{1}{r} + \frac{2\alpha_0}{\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0} \frac{d\bar{u}_0}{dr} \right) \Gamma_2 + \frac{d\Gamma_2}{dr} . \quad (11.201)$$

- Condição de Solvabilidade:

A equação (11.200) pode ser utilizada para obtenção da correção  $\alpha_2$  para o número de onda  $\alpha_0$ . Esta correção pode ser obtida impondo que a solução homogênea da equação (11.200) seja ortogonal ao termo fonte desta mesma equação em sua forma auto-adjunta. A solução homogênea é dada por  $\check{p}_0$ , visto que as equações (11.115) e (11.200) são idênticas

quando  $m = 0$  e  $\Gamma_3 = 0$ , respectivamente. Já a forma auto-adjunta da equação (11.200) é dada por

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{r}{(\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0)^2} \frac{d\check{p}_2}{dr} \right) - \frac{r \alpha_0^2 \check{p}_2}{(\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0)^2} = \frac{r \Gamma_3}{(\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0)^2} , \quad (11.202)$$

o que nos leva a condição de solvabilidade

$$\int_0^\infty \frac{r \check{p}_0 \Gamma_3}{(\omega_0 - \alpha_0 \bar{u}_0)^2} dr = 0 , \quad (11.203)$$

permitindo que uma solução explícita para  $\alpha_2$  seja obtida, uma vez que esta integral pode ser re-escrita na forma

$$\alpha_2 \int_0^\infty \mathcal{I}_1 dr + \omega_2 \int_0^\infty \mathcal{I}_2 dr + \int_0^\infty \mathcal{I}_3 dr = 0 . \quad (11.204)$$

Dois aspectos relevantes devem ser mencionados. Primeiro, as segundas derivadas de  $\bar{v}_1$  e  $\bar{w}_1$  aparecem em  $\Gamma_3$ . Apesar destas derivadas serem descontínuas no modelo da camada limite, o impacto desta descontinuidade é limitado uma vez a condição de solvabilidade requer sua integração. Alternativamente, um método do tiro poderia ser usado. Contudo, o tempo computacional desta abordagem se mostrou maior que o necessário para integração acima e ela não foi utilizada. Finalmente, a análise dos modos sem simetria axial ( $m \neq 0$ ) é similar a análise descrita aqui. A única diferença significativa ocorre para os modos azimute  $m = \pm 1$ , onde uma ressonância entre a perturbação de ordem zero e o escoamento base de segunda ordem é observada, semelhante a que foi descrita para o jato transversal descontínuo. Isto leva ao aparecimento de ainda mais termos em  $\Gamma_3$ . O impacto desta ressonância, assim como outros resultados do modelo contínuo são discutidos a seguir.

## Análise de Resultados:

Assim como ocorreu no estudo do modelo descontínuo, o número de onda dos dois primeiros modos helicoidais apresentou um comportamento peculiar para baixas freqüências. Notamos de novo que isto provavelmente se deve a natureza local da análise de estabilidade, uma vez que o comportamento não-local do jato transversal se torna cada vez mais forte na medida que  $\lambda$  aumenta. No caso contínuo, este fenômeno se manifesta no termo  $\mathcal{I}_3$  em (11.204), que cresce indefinidamente quando a freqüência vai a zero, embora tanto  $\mathcal{I}_1$  quanto  $\mathcal{I}_2$  permaneçam finitos neste limite.

- **Modelo da Tangente Hiperbólica:**

Nos resultados apresentados a seguir, focamos apenas nas taxas de crescimento e não nos comprimentos de onda. Assumimos que a correção  $\omega_2$  para a freqüência  $\omega_0$  é nula, uma vez que este escoamento é convectivamente instável. Iniciamos a análise com o modo  $m = 0$ , que possui simetria axial. A Figura 11.14 mostra a correção proveniente do escoamento transversal ( $-Im[\alpha_2]$ ) para a taxa de crescimento do jato livre ( $-Im[\alpha_0]$ ) junto com a taxa de crescimento total ( $-Im[\alpha = \alpha_0 + \lambda \alpha_2]$ ), ambas como função da freqüência ( $\omega_0 \pi$ ). Podemos notar na Figura 11.14.a que estas correções são desprezíveis para baixas freqüências ( $\omega_0 \pi \lesssim 0.4$ ), mas não para altas freqüências, assim como no caso descontínuo. O aumento

nesta região fica ainda mais significativo com a redução da espessura da camada de mistura  $\theta_0$ . Como pode ser visto na Figura 11.14.b para  $\theta_0 = 1/15$ , o escoamento transversal causa um aumento na taxa de amplificação total, sendo que seu valor máximo se desloca para as regiões de alta freqüência. Notamos ainda que esta análise é válida para  $\lambda \lesssim 0.3$ , o que pode ser observado nesta mesma figura. Quando  $\lambda \leq 0.1$ , os desvios em relação ao jato livre são modestos, mas passam a ser elevados quando  $0.1 \leq \lambda \leq 0.2$ . Isso já é um indicativo de que estamos perto do limite de validade dessa análise.

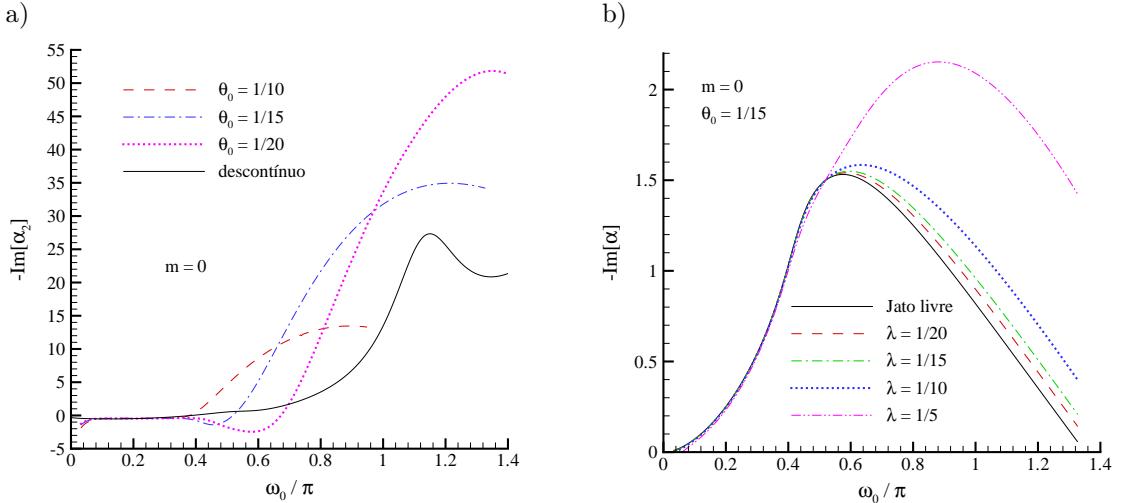


Figura 11.14: Taxa de crescimento para o modo com simetria axial obtidos com o modelo da tangente hiperbólica usando  $\omega_2 = 0$ : a) Correção de segunda ordem b) taxa total.

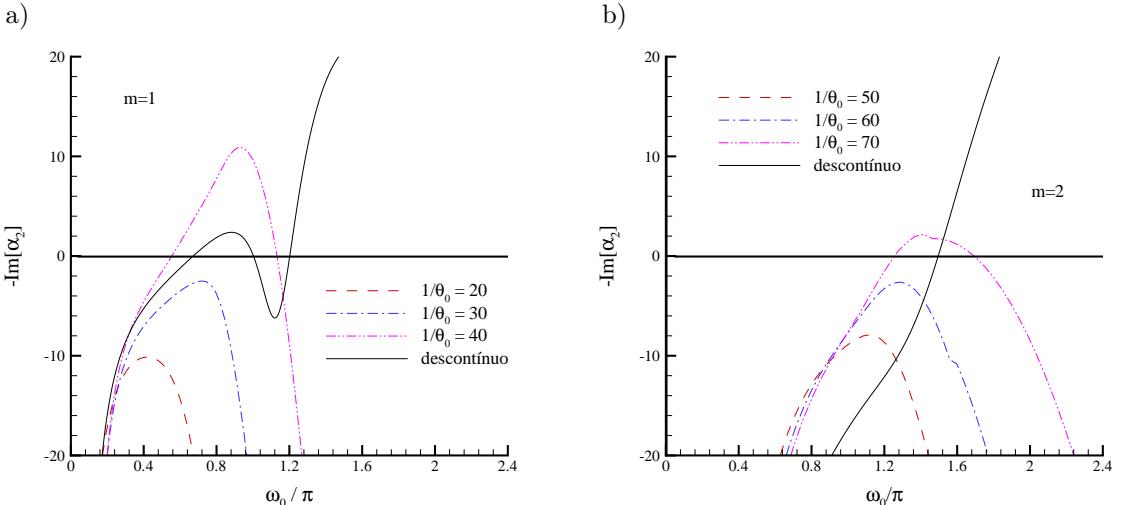


Figura 11.15: Correção para taxa de crescimento dos modos sem simetria axial obtida com o modelo da tangente hiperbólica usando  $\omega_2 = 0$ : a)  $m = 1$  e b)  $m = 2$ .

O comportamento do modo  $m = 0$  está de acordo com observações experimentais [107]. Contudo, apenas as perturbações mais instáveis foram observadas neste experimento. Logo, devemos verificar se o modo com simetria axial é realmente o mais instável de todos. Isto é feito através da Figura 11.15, que mostra as correções para a taxa de crescimento do primeiro e segundo modos azimute. Ela mostra claramente que a correção do primeiro modo azimute é desestabilizadora apenas quando  $\theta_0 \lesssim 1/30$ . Já no caso do segundo modo azimute, isto ocorre apenas quando  $\theta_0 \lesssim 1/60$ . Podemos então concluir que o modo com

simetria axial é realmente o mais instável próximo a saída do bocal, onde  $1/10 < \theta_0 < 1/20$  [107], assim como indica a análise do jato transversal descontínuo.

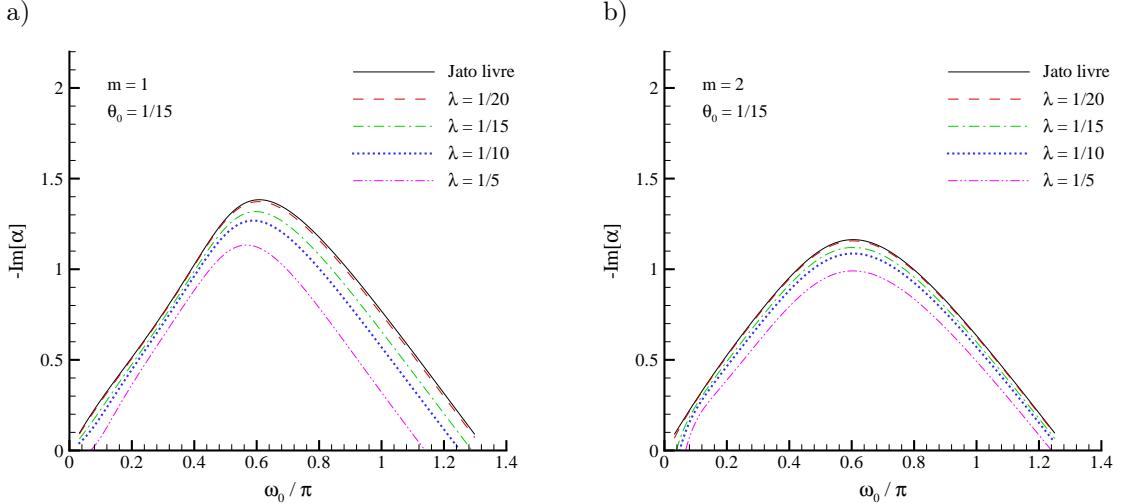


Figura 11.16: Taxa de crescimento total dos modos sem simetria axial obtida com o modelo da tangente hiperbólica usando  $\omega_2 = 0$ : a)  $m = 1$  e b)  $m = 2$ .

Esta figura também aparenta mostrar uma pior concordância entre resultados viscosos e não-viscosos para o modo  $m = 2$ . Isso, porém, não é verdade. A Figura 11.15.a para  $m = 1$  mostra que estes modelos contínuos e descontínuos concordam para  $\omega_0/\pi \lesssim 0.4$ , assim como observado na Figura 11.14.a para o modo  $m = 0$ . O mesmo ocorre no caso do segundo modo helicoidal, mas os resultados significativos para comparação com os outros modos já aparecem nesta figura fora desta região de concordância entre os dois modelos.

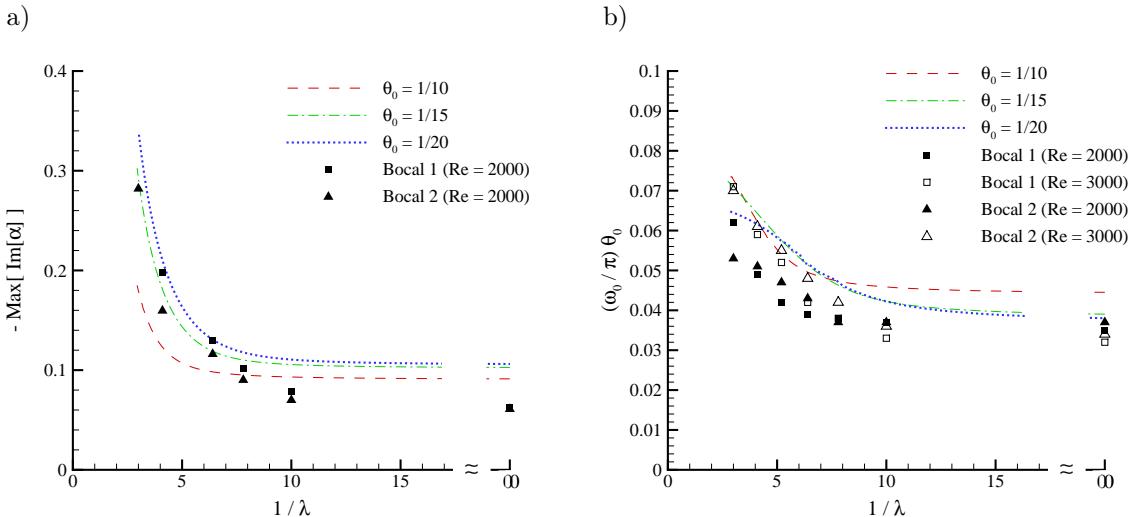


Figura 11.17: Modo com simetria axial obtido com o modelo da tangente hiperbólica usando  $\omega_2 = 0$ : a) Taxa de crescimento total máxima e b) sua freqüência normalizada. Pontos representam dados experimentais [107].

Além disso, podemos inferir que os modos sem simetria axial ( $m \neq 0$ ) se tornam cada vez mais estáveis na medida que o número azimute  $m$  aumenta. Isto ocorre para estes modos, em relação ao modo com  $m = 0$ , porque suas taxas de crescimento associadas ao jato livre ( $\lambda = 0$ ) diminuem e suas correções devido ao escoamento transversal também diminuem. A Figura 11.16 ilustra esta observação, mostrando a taxa de amplificação total destes modos

quando  $\theta_0 = 1/15$ . Podemos notar ainda que a freqüência associada a maior taxa de crescimento apresenta uma leve redução para  $m = 1$  e aumento para  $m = 2$ , comparados aos seus respectivos valores para o jato livre. De qualquer forma, este comportamento depende da espessura da camada de mistura, como sugere a Figura 11.15. Vale a pena mencionar também que os dois pontos de máximo sugeridos pelo modelo descontínuo para os modos  $m = 0$  e  $m = 1$  não aparecem nos resultados para o modelo contínuo.

Para encerrar esta subseção, apresentamos na Figura 11.17 uma comparação de caráter quantitativa entre os resultados obtidos da análise de estabilidade e os dados experimentais mencionados anteriormente [107]. Esta figura mostra como a taxa de crescimento máxima e sua respectiva freqüência normalizada variam com respeito a razão de velocidades. Uma boa concordância pode ser observada para  $\lambda > 1/3$ , evidência de que a instabilidade do jato transversal é realmente de natureza convectiva para esta faixa.

- Modelo da Camada Limite:

Os próximos resultados apresentados seguem a mesma forma dos anteriores, mas dizem respeito ao modelo da camada limite com  $x_0 = 1$ . Uma diferença importante deve ser citada. Como não foi possível encontrar uma solução de segunda ordem neste modelo, o primeiro modo azimute não pode ser calculado. Isto se deve a fato deste modo ser o único que sofre influência do escoamento base de segunda ordem, devido a uma ressonância especial e exclusiva dele. De qualquer forma, os outros modos ainda podem ser analisados.

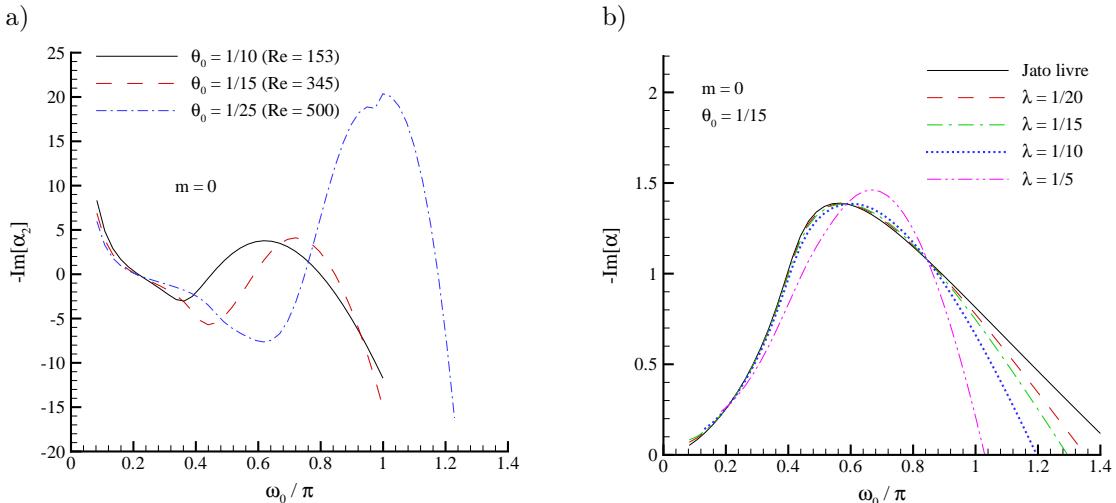


Figura 11.18: Taxa de crescimento para o modo com simetria axial obtidos com o modelo da camada limite usando  $\omega_2 = 0$  e  $x_0 = 1$ : a) Correção de segunda ordem b) taxa total.

Começamos com a Figura 11.18, que representa a versão da Figura 11.14 para o modelo da camada limite. Duas diferenças entre estas figuras são aparentes. Primeiro, a variação da correção em baixas freqüências ( $\omega_0/\pi \lesssim 0.4$ ) é mais pronunciada. Em segundo lugar, seu efeito desestabilizador em altas freqüências é significativamente mais fraco. Por esta razão mostramos o resultado com  $\theta_0 = 1/25$  no lugar de  $\theta_0 = 1/20$ , sendo seus respectivos números de Reynolds mostrados entre parênteses. A consequência deste efeito é claro na taxa de crescimento total máxima, seu aumento na medida que  $\lambda$  aumenta é muito menor que o encontrado no modelo da tangente hiperbólica. O mesmo ocorre com o aumento da freqüência associada a esta taxa máxima. Podemos então concluir que a concordância destes resultados com os dados experimentais mostrados na Figura 11.17 é pior que a do modelo

da tangente hiperbólica usado nesta figura.

Alguns comentários interessantes ainda podem ser feitos aqui. Este modelo possui uma velocidade axial de primeira ordem não nula ( $\bar{u}_1 \neq 0$ ), ao contrário do modelo anterior. Se eliminarmos esta componente do cálculo das correções para a taxa de crescimento, com o objetivo de tornar os dois modelos mais parecidos, o escoamento transversal passa a ter um efeito estabilizador [85]. Finalmente, apesar das discrepâncias entre resultados gerados pelos dois modelos, seus comportamentos qualitativos são semelhantes. Isto é verdade exceto para um caso. A Figura 11.14 mostra um aumento da faixa de freqüências instáveis com o aumento de  $\lambda$ , enquanto a Figura 11.18 mostra uma redução desta faixa.

Para encerrar, vale a pena mostrar que o comportamento qualitativo para o segundo modo helicoidal ( $m = 2$ ) observado na Figura 11.16 para o modelo da tangente hiperbólica também é observado no modelo da camada limite. Isto é mostrado na Figura 11.19. Uma diferença importante entre os dois resultados é a magnitude da estabilização promovida pelo escoamento transversal no modelo da camada limite, que é bem maior. Nota-se também que a freqüência com maior taxa de crescimento aumenta com  $\lambda$  de maneira mais pronunciada. Com este comentário, encerramos aqui a discussão sobre a estabilidade linear de jatos livres e transversais.

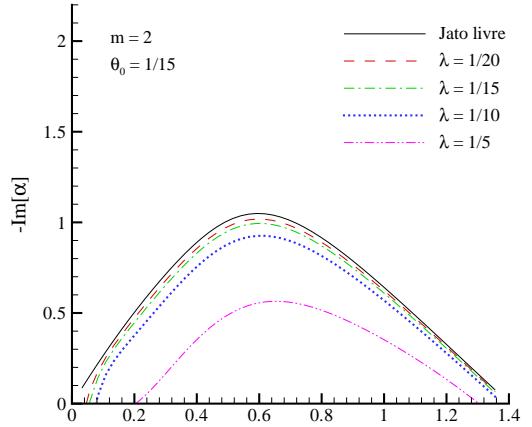


Figura 11.19: Taxa de crescimento total do modo  $m = 2$  obtida com o modelo da camada limite usando  $\omega_2 = 0$ .

## 11.8 Problemas

1. Reescreva as equações (11.1) a (11.7) em coordenadas cartesianas bi-dimensionais, com a interface agora localizada em  $y = \varrho(x, t)$ , e faça uma análise de estabilidade linear para a camada de mistura plana descontínua. . onde o escoamento base também é descontínuo.
2. Refaça o problema anterior (1), porém agora assumindo que as massas específicas dos fluidos em cada lado da interface são diferentes.
3. Refaça o problema anterior (2), porém agora incluindo a ação da gravidade na direção não-homogênea.
4. Reescreva as equações (11.78) e (11.79) em coordenadas cartesianas bi-dimensionais e faça uma análise de estabilidade linear para a camada de mistura plana contínua. Use uma função tangente hiperbólica para construir o escoamento base contendo a espessura adimensional da camada de mistura  $\theta$  para uma razão de velocidades  $U_1/U_2$  fixa. A solução deste problema pode ser vista como uma aproximação para o caso do jato livre contínuo quando esta espessura é muito menor que o raio do jato, i.e.  $\theta \ll 1$ . Se concentre no regime de instabilidade convectiva.

5. Refaça o problema anterior (4), porém agora modificando o escoamento base de modo a incluir a possibilidade de sucção, ou seja, quando as duas camadas se movem em direções opostas ( $U_2 < 0$ ). Determine como a instabilidade convectiva é modificada nesse cenário para  $\theta$  fixo, onde o parâmetro de controle é  $R = (U_1 - U_2)/(U_1 + U_2)$ .

# Parte IV

## Convecção de Rayleigh-Bénard



# Capítulo 12

## O Problema de Rayleigh-Bénard: Estabilidade Linear

### 12.1 Introdução

A emergência de um campo de velocidades em uma fina lâmina horizontal de fluido aquecida pela face inferior foi estudada pela primeira vez por Bénard em 1900, embora já tivesse sido identificada anteriormente por Rumford em 1797 e por James Thomson em 1882 [24]. As camadas inferiores de fluido são menos densas do que as superiores, o que conduz a uma situação de instabilidade.

Quando o gradiente adverso de temperaturas ultrapassa um valor crítico e situa-se em um nível não muito acima desse valor, o estado de repouso do fluido é substituído por um estado de movimento de celular de caráter estacionário. Em experimentos cuidadosamente conduzidos as células de convecção formam uma estrutura hexagonal, como a mostrada na Fig. 12.1. Os fundamentos teóricos que conduziram à compreensão dos fatos acima foram estabelecidos por Lord Rayleigh, que mostrou que o fator determinante da estabilidade ou não do estado de repouso da lâmina de fluido é o valor numérico do grupo adimensional que hoje recebe o nome de número de Rayleigh, e é definido por:

$$Ra = \frac{\beta g |\Delta T_0|}{\alpha \nu} d^3, \quad (12.1)$$

onde  $\beta = -1/\rho_0 (\partial \rho / \partial T)_p$  é o coeficiente de expansão volumétrica do fluido,  $\Delta T_0 = T_1 - T_0$ , a diferença adversa de temperaturas aplicada verticalmente e  $d$ , a espessura da lâmina de fluido. Lord Rayleigh mostrou que o estado de repouso torna-se instável quando  $Ra$  excede um valor crí-

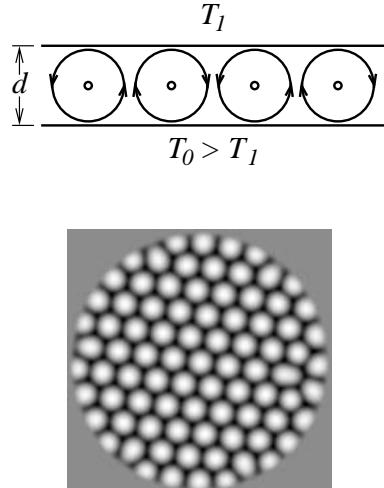


Figura 12.1: Esquema de uma célula de Rayleigh-Bénard e estrutura celular obtida numericamente pelos autores. A estrutura é periódica ao longo de três direções que formam um ângulo de  $120^\circ$  entre si.

tico  $Ra_0$  e que a estrutura celular que emerge logo após a instabilidade é estacionária. Esse capítulo aborda a estabilidade linear do estado de repouso de uma célula de Rayleigh-Bénard, o comportamento não linear da estrutura que emerge da primeira instabilidade em sistemas cujas dimensões horizontais são muito maiores do que a dimensão característica da estrutura (sistemas estendidos), algumas instabilidades secundárias e o modelo de Lorenz [12], que trata do comportamento caótico de células de pequenas dimensões.

O problema é regido pelas equações de Bousinesq, discutidas no Vol. 1 desse trabalho e abaixo reescritas:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (12.2)$$

$$\rho_0 \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathbf{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \mathbf{g} \quad (12.3)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \quad (12.4)$$

## 12.2 Comportamento Linear, Não Linearidade Fraca e Não Linearidade Forte

O comportamento do estado de movimento de sistemas de Rayleigh-Bénard pode ser agrupado em três classes. A primeira refere-se aos primeiros instantes após a primeira bifurcação, quando modos com vetor de onda crítico são amplificados e crescem exponencialmente. Trata-se do regime linear, tratado na Sec. 12.3. Essa seção analisa a estabilidade linear do estado de repouso, usando o método também empregado no Vol. 1 desse trabalho e nos Caps. 21, 16 e 17 e no Apêndice D. Do ponto de vista linear a amplitude  $A$  de um modo instável é uma constante de valor arbitrário no ponto de bifurcação e cresce exponencialmente acima desse. A análise linear não fornece respostas sobre o comportamento da amplitude acima do ponto de bifurcação, nem sobre a interação entre modos, ou ainda, sobre os mecanismos de seleção de modos instáveis. Com o crescimento da perturbação, os efeitos não lineares passam a atuar de duas maneiras: saturando, ou amplificando ainda mais a amplitude, e gerando novos modos.

A segunda classe de fenômenos do estado convectivo corresponde a situações em que o número de Rayleigh situa-se pouco acima do valor crítico da primeira instabilidade. Os efeitos não lineares atuam saturando o crescimento exponencial dos primeiros instantes da instabilidade. Em muitos casos, mas não em todos, a importância dos efeitos não lineares se manifesta progressivamente, à medida em que o parâmetro de bifurcação ultrapassa o valor crítico. Esse é o caso do problema de Rayleigh-Bénard. Nessas condições os efeitos não lineares intervêm para saturar o crescimento da instabilidade e na seleção dos modos que sobrevivem na estrutura em formação. O comportamento do sistema é caracterizado pelos primeiros modos instáveis. A geração de novos modos se manifesta introduzindo pequenas distorções nos modos que sobrevivem. Os métodos de análise desse regime procuram determinar como evolui a amplitude do modo, ou dos modos que caracterizam a estrutura e os mecanismos de interação entre os mesmos. O Cap. 13 aborda a evolução e instabilidades secundárias da amplitude de contendo um único modo com direção especificada, na vizinhança do ponto de bifurcação, isso é, no regime fracamente não linear [118, 117, 104, 41]. O Cap. 14 trata do comportamento não linear na vizinhança da primeira bifurcação, de

estruturas contendo número arbitrário de modos com comprimento de onda próximo ao crítico, o que permite que a estrutura se curve [153, 124, 70, 41, 134].

Situação diferente ocorre quando os efeitos não lineares se manifestam progressivamente mas o número de Rayleigh ultrapassa em muito o valor crítico. Nesse caso, os efeitos não lineares não atuam somente para atenuar o crescimento exponencial dos primeiros instantes. Os novos modos gerados tornam-se importantes e o comportamento do sistema não é mais caracterizado pelo dos primeiros modos. Trata-se do regime fortemente não linear. O Cap. 15 discute o modelo de Lorenz [98, 12, 143, 121] que aborda a interação não linear forte da amplitude de três modos em sistemas confinados. Ao contrário do regime fracamente não linear, posiciona-se o sistema longe da primeira bifurcação. Perto dessa, a estrutura emergente é estacionária. Longe, a geração de novos modos é intensa e conduz ao comportamento não estacionário, aperiódico e sensível às condições iniciais, isso é, caótico. Por sistemas confinados entende-se os que são suficientemente pequenos para que a amplitude dos modos ativos não sofra nenhuma modulação espacial.

## 12.3 Comportamento Linear

### 12.3.1 O estado base: solução de repouso das equações de Boussinesq

As Eqs. 12.2 a 12.4 admitem uma solução de repouso, com o campo de velocidades identicamente nulo. O correspondente campo estacionário de temperaturas é obtido da Eq. 12.4, com ( $\mathbf{v} \equiv 0$ ) e a hipótese de que  $T = T(z)$ :

$$T = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{d} z \quad (12.5)$$

Introduzindo a solução do campo de temperaturas na equação de Navier-Stokes com ( $\mathbf{v} \equiv 0$ ), têm-se:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{dz} = - [1 - \beta (T_0 + \gamma z - T_0)] g = - (1 - \beta \gamma z) g,$$

onde  $\gamma = (T_1 - T_0)/d$  e  $g = -|\mathbf{g}|$ . Integrando essa equação obtém-se o perfil estacionário do fluido em repouso:

$$p = p_0 - \rho_0 \left( z - \frac{\beta}{2} \gamma z^2 \right) g \quad (12.6)$$

Quando a densidade do fluido diminui com a temperatura e o meio é submetido a um gradiente vertical de temperaturas adverso, isso é, quando as camadas inferiores de fluido estão a temperaturas mais altas do que as superiores, têm-se uma condição em que a densidade aumenta progressivamente com a elevação  $z$ . A solução de repouso, torna-se instável quando o módulo do gradiente adverso de temperaturas (ver Fig. 12.1), ultrapassa um valor crítico.

### 12.3.2 Equações de evolução

O problema de Rayleigh-Bénard é regido pela aproximação Boussinesq, dada pelas Eqs. 12.2, 12.3 e 12.4. As variáveis das equações de Boussinesq são adimensionalizadas como segue:

$$\begin{aligned} t &= \frac{d^2}{\alpha} t^* & x_i &= x_i^* d & v_i &= \frac{\beta g |\Delta T_0| d^2}{\nu} v_i^* \\ p &= \rho_0 \left( \frac{\beta g |\Delta T_0| d^2}{\nu} \right)^2 p^* & T &= T_0 + |\Delta T_0| (T^* - 1) \end{aligned}$$

onde as variáveis adimensionais são escritas com um asterisco. A solução base do campo de temperaturas em variáveis adimensionais toma a forma:

$$T^* = 1 + \frac{T - T_0}{|\Delta T_o|} = 1 + \frac{T_0 + [(T_1 - T_0)/d] z - T_0}{|\Delta T_o|} = 1 + \frac{(T_1 - T_0)}{|\Delta T_o|} \frac{z}{d} = 1 - \frac{z}{d} = 1 - z^*. \quad (12.7)$$

A temperatura adimensional varia do valor  $T = 1$  na superfície inferior ( $z = 0$ ) a  $T = 0$  na superfície superior ( $z = 1$ ). Introduzindo as definições acima nas Eqs. 12.2, 12.3 e 12.4 obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\beta g |\Delta T_0| d}{\nu} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i^*} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\beta g |\Delta T_0| d^2}{\nu} \frac{\alpha}{d^2} \frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + \rho_0 \left( \frac{\beta g |\Delta T_0| d^2}{\nu} \right)^2 \frac{1}{d} v_j^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} &= \\ -\rho_0 \left( \frac{\beta g |\Delta T_0| d^2}{\nu} \right)^2 \frac{1}{d} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \rho_0 [1 - \beta |\Delta T_0| (T^* - 1)] g_i + \rho_0 \nu \frac{\beta g |\Delta T_0| d^2}{\nu} \frac{1}{d^2} \nabla^2 v_i^* & \\ \frac{\alpha}{d^2} \frac{\partial}{\partial t^*} [T_0 + |\Delta T_0| (T^* - 1)] + \frac{\beta g |\Delta T_0| d^2}{\nu} \frac{1}{d} v_j^* \frac{\partial}{\partial x_j^*} [T_0 + |\Delta T_0| (T^* - 1)] &= \\ \frac{\alpha}{d^2} \nabla^2 [T_0 + |\Delta T_0| (T^* - 1)] & \end{aligned}$$

Simplificando as três equações acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i^*} &= 0 \\ \frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + \frac{\beta g |\Delta T_0|}{\alpha \nu} d^3 v_j^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} &= -\frac{\beta g |\Delta T_0|}{\alpha \nu} d^3 \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\nu}{\alpha} \left[ \frac{1}{\beta |\Delta T_0|} - (T^* - 1) \right] \frac{g_i}{g} + \frac{\nu}{\alpha} \nabla^2 v_i^* \\ \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\beta g |\Delta T_0|}{\alpha \nu} d^3 v_j^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} &= \nabla^2 T^* \end{aligned}$$

Observando que  $\nu/\alpha = Pr$  é o número de Prandtl e definindo  $\lambda_i = g_i/g$ , têm-se  $\lambda_i = -1$  na direção vertical e  $\lambda_i = 0$  nas demais. A equação de Navier-Stokes toma a forma:

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + Ra v_j^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} = -Ra \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + Pr \left[ \frac{1}{\beta |\Delta T_0|} - (T^* - 1) \right] \lambda_i + Pr \nabla^2 v_i^*$$

Reescrevendo as três equações e eliminando o asterisco das variáveis adimensionais, obtém-se:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (12.8)$$

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + Ra v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{Ra}{Pr} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \left[ \frac{1}{\beta |\Delta T_0|} - (T - 1) \right] \lambda_i + \nabla^2 v_i \quad (12.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + Ra v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \nabla^2 T. \quad (12.10)$$

Escrevemos as equações de evolução adimensionais acima sem a pressão. Para isso, aplica-se inicialmente o operador  $\nabla^2$  à equação da componente segundo a direção  $z$  da equação de Navier-Stokes, o que resulta em:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 v_z + \nabla^2 T - \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 p = \frac{Ra}{Pr} \nabla^2 \left( v_j \frac{\partial v_z}{\partial x_j} \right). \quad (12.11)$$

Obtém-se a seguir uma equação para a componente vertical do rotacional, (ou vorticidade)  $\xi = \partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y$ . A equação do rotacional é obtida aplicando-se o operador  $\partial / \partial y$  à componente segundo a direção  $x$  da equação de Navier-Stokes, o operador  $\partial / \partial x$  à componente segundo a direção  $y$  da mesma e subtraindo a primeira da segunda:

$$\begin{aligned} & \left( \nabla^2 - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \right) \xi = \\ & \frac{Ra}{Pr} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Aplica-se a seguir o operador divergente à equação de Navier-Stokes:

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{Ra}{Pr} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) = -\frac{Ra}{Pr} \nabla^2 p - \lambda_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + \nabla^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Eliminando os termos do divergente da velocidade, que é igual a zero, chega-se a:

$$-\frac{Ra}{Pr} \nabla^2 p = \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \lambda_i \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Substituindo o lado direito da equação acima na Eq. 12.11 obtém-se a equação procurada, da equação da componente  $z$  de Navier-Stokes sem a pressão:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 v_z + \nabla^2 T + \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{Ra}{Pr} \nabla^2 \left( v_j \frac{\partial v_z}{\partial x_j} \right).$$

Rearranjando os termos:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 v_z + \nabla^2 T = \frac{Ra}{Pr} \left[ \nabla^2 \left( v_j \frac{\partial v_z}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right],$$

onde  $\nabla_2^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ . O sistema de equações sem a pressão, que rege o comportamento dos campos de velocidades e de temperaturas em células de Bénard, comprehende

portanto as equações da continuidade, da componente vertical do rotacional,  $\xi$ , da componente vertical da velocidade e da temperatura. O sistema é portanto:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (12.13)$$

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \right) \xi = \frac{Ra}{Pr} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( v_j \frac{\partial v_y}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( v_j \frac{\partial v_x}{\partial x_j} \right) \right] \quad (12.14)$$

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 v_z + \nabla^2 T = \frac{Ra}{Pr} \left[ \nabla^2 \left( v_j \frac{\partial v_z}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] \quad (12.15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + Ra v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \nabla^2 T. \quad (12.16)$$

Cabem duas observações sobre as equações acima:

1. Notamos, em primeiro lugar, que o termo:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial x} + 2 \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (12.17)$$

não é a função dissipação;

2. Os segundo aspecto importante refere-se ao fato de que o número de Prandtl aparece no denominador das derivadas temporais, assim como no do membro direito das equações da vorticidade e da componente vertical da velocidade. Têm-se uma situação semelhante à que ocorre nas equações adimensionais que regem escoamentos, onde existe um número de Reynolds que, quando alto, torna o termo viscoso desprezível, exceto em determinadas regiões, como em esteiras e em camadas limite. Da mesma forma, valores elevados do número de Prandtl tornam as derivadas temporais desprezíveis e fazem com que as equações da vorticidade e de  $v_z$  deixem de ser evolutivas. O campo de velocidades passa a se adaptar rapidamente a variações do campo de temperaturas. Essa última torna-se então, a única variável lenta, que comanda a evolução do campo todo.

### 12.3.3 Linearização das equações de evolução

Sobrepoê-se uma pequena perturbação à solução de repouso das equações de Boussinesq:

$$\begin{aligned} v_i &= \bar{v}_i + \tilde{V}_i \\ \xi &= \bar{\xi} + \tilde{\xi} \\ T &= \bar{T} + \tilde{T}, \end{aligned}$$

onde  $\bar{v}_i$  e  $\bar{T}_i$  são a solução de repouso. As Eqs. 12.2 a 12.4 podem ser escritas na forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{Z} \quad \text{ou:} \quad F_I(\mathbf{X}) = 0, \quad (12.18)$$

onde  $\mathbf{F}$  é o vetor de funções obtido passando-se o membro direito das Eqs. 12.2 a 12.4 para o lado esquerdo e  $\mathbf{Z}$  é o vetor zero.  $\mathbf{X}$  é o vetor cujas componentes são a velocidade e a

temperatura. A Eq. 12.18 admite uma solução  $\mathbf{X}_0$  que é o estado base do problema de Rayleigh-Bénard. Para que uma perturbação  $\Delta\mathbf{X}$  satisfaça a essa equação deve-se ter:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}) = \mathbf{Z}.$$

Como a perturbação introduzida é pequena, pode-se escrever:

$$F_i(\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}) = F_i(\mathbf{X}_0) + \left. \frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right|_{\mathbf{X}_0} \Delta X_j = 0.$$

Como  $F_i(\mathbf{X}_0) = 0$ , deve-se ter:

$$\left. \frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right|_{\mathbf{X}_0} \Delta X_j = 0.$$

Aplicando-se a equação acima à Eq. 12.13 obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial v_j} \tilde{v}_j = \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_j} = 0,$$

pois  $\partial v_i / \partial v_j = \delta_{ij}$ . Com relação aos termos lineares das Eqs. 12.15 e 12.16, o procedimento é análogo. Desenvolvendo o primeiro termo não-linear do lado direito da Eq. 12.15:

$$\frac{\partial v_j}{\partial v_k} \tilde{v}_k \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x_j} + \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_z}{\partial v_k} \tilde{v}_k = \tilde{v}_j \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x_j} + \bar{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial x_j},$$

pois  $\partial v_j / \partial v_k = \delta_{jk}$  e  $\partial v_z / \partial v_k = \delta_{zk}$ . Os dois termos do lado direito da equação acima desaparecem pois  $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{Z}$ . Desenvolvendo o segundo termo não-linear do lado direito da Eq. 12.15:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial v_k} \tilde{v}_k \right) - - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial v_k} \tilde{v}_k = \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j}.$$

Os dois termos resultantes são iguais a zero, pois  $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{Z}$ . Adota-se o mesmo procedimento para o termo não-linear da Eq. 12.16 e para a Eq. 12.12 e chega-se ao seguinte sistema de equações linearizadas, notando que  $\partial \tilde{T} / \partial z = -1$  (ver Eq. 12.7):

$$\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{12.19}$$

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial t} = Pr \nabla^2 \tilde{\xi} \tag{12.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \tilde{v}_z = Pr \left( \nabla^4 \tilde{v}_z + \nabla_2^2 \tilde{T} \right) \tag{12.21}$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = Ra \tilde{v}_z + \nabla^2 \tilde{T}. \tag{12.22}$$

As equações de  $\tilde{v}_z$  e a de  $\tilde{T}$  estão desacopladas das equações da continuidade e do rotacional e podem ser resolvidas de forma independente dessas duas. Escrevendo as Eqs. 12.21 e 12.22 na forma matricial:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nabla^2 \tilde{v}_z \\ \tilde{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Pr \nabla^4 & Pr \nabla_2^2 \\ Ra & \nabla^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}_z \\ \tilde{T} \end{pmatrix}. \tag{12.23}$$

### 12.3.4 A solução das equações linearizadas

Admitimos a condição de contorno do tipo livre-livre para a velocidade, em que  $\tilde{v}_z = 0$  em  $z = 0$  e em  $z = 1$ , mas não exigimos que as duas componentes horizontais da velocidade se anulem nos bordos. Trata-se da condição de contorno conhecida como livre-livre. Observamos que o problema também admite solução analítica para o campo perturbado, com as componentes horizontais da velocidade nulas nos bordos [24].

A perturbação de temperatura deve se anular nas superfícies superior e inferior.

Procura-se uma solução para a Eq. 12.23 e para a vorticidade na forma:

$$A \begin{pmatrix} \tilde{v}_z \\ \tilde{T} \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \exp[i(\kappa_x x + \kappa_y y) + \omega t] \operatorname{sen} n\pi z + c.c. \quad (12.24)$$

onde *c.c.* representa o complexo conjugado,  $n$  é um número inteiro e

$$\mathbf{G} = A \begin{pmatrix} V_{kn} \\ \theta_{kn} \\ Z \end{pmatrix}. \quad (12.25)$$

$A$  é a amplitude da perturbação,  $V_{kn}$  e  $\theta_{kn}$  são constantes que caracterizam o autovetor do operador algébrico abaixo obtido.  $Z$  é outra constante. Levando essa solução à Eq. 12.23, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A \begin{pmatrix} V_{kn} \nabla^2 \\ \theta_{kn} \end{pmatrix} \exp[i(\kappa_x x + \kappa_y y) + \omega t] \operatorname{sen} n\pi z = \\ A \begin{pmatrix} Pr \nabla^4 & Pr \nabla_2^2 \\ Ra & \nabla^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{kn} \\ \theta_{kn} \end{pmatrix} \exp[i(\kappa_x x + \kappa_y y) + \omega t] \operatorname{sen} n\pi z. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Observamos que a amplitude  $A$  pode ser eliminada da equação acima. No âmbito da análise de estabilidade linear, a amplitude é uma constante indeterminada, com a restrição de que deve ser suficientemente pequena para que os termos não lineares das equações de evolução da perturbação possam ser desprezados. Essa amplitude e sua evolução temporal e espacial podem no entanto ser determinadas pela análise do comportamento não linear do sistema, na vizinhança do ponto em que o estado base perde a estabilidade. Denotando  $E = \exp[i(\kappa_x x + \kappa_y y) + \omega t]$  verificamos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \omega E \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= i\kappa_x E & \text{e:} & \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\kappa_x^2 E \\ \frac{\partial E}{\partial y} &= i\kappa_y E & \text{e:} & \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = -\kappa_y^2 E. \end{aligned}$$

Temos portanto que:

$$\begin{aligned} \nabla_2^2 E \operatorname{sen} n\pi z &= -(\kappa_x^2 + \kappa_y^2) E \operatorname{sen} n\pi z = -\kappa^2 E \operatorname{sen} n\pi z \\ \nabla^2 E \operatorname{sen} n\pi z &= -(\kappa^2 + n^2 \pi^2) E \operatorname{sen} n\pi z \\ \nabla^4 E \operatorname{sen} n\pi z &= (\nabla^2)^2 E \operatorname{sen} n\pi z = (\kappa^2 + n^2 \pi^2)^2 E \operatorname{sen} n\pi z, \end{aligned}$$

onde  $\kappa^2 = (\kappa_x^2 + \kappa_y^2)$  é o quadrado do módulo do vetor de onda. Inserindo os resultados acima na Eq. 12.26 obtemos:

$$\begin{aligned} \omega \begin{pmatrix} (-\kappa^2 - n^2\pi^2) V_{kn} \\ \theta_{kn} \end{pmatrix} E \sin n\pi z = \\ \begin{pmatrix} Pr(\kappa^2 + n^2\pi^2)^2 & -Pr k^2 \\ Ra & -\kappa^2 - n^2\pi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{kn} \\ \theta_{kn} \end{pmatrix} E \sin n\pi z. \end{aligned}$$

Simplificando o termo  $E \sin n\pi z$ :

$$\omega \begin{pmatrix} (-\kappa^2 - n^2\pi^2) V_{kn} \\ \theta_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Pr(\kappa^2 + n^2\pi^2)^2 & -Pr \kappa^2 \\ Ra & -\kappa^2 - n^2\pi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{kn} \\ \theta_{kn} \end{pmatrix}. \quad (12.27)$$

Os vetores dos dois membros da Eq. 12.27 não são iguais. Se dividirmos a primeira linha da equação por  $(-\kappa^2 - n^2\pi^2) V_{kn}$  os dois vetores tornam-se iguais e recai-se em um problema de determinação dos autovalores e autovetores de um operador algébrico linear. Não é necessário fazer a divisão a que aludimos acima. A Eq. 12.27 pode ser reescrita sob a forma:

$$\begin{pmatrix} Pr(\kappa^2 + n^2\pi^2)^2 + (\kappa^2 + n^2\pi^2)\omega & -Pr \kappa^2 \\ Ra & -\kappa^2 - n^2\pi^2 - \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{kn} \\ \theta_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Essa última equação admite solução não trivial para o autovetor  $(V_{kn}; \theta_{kn})$  se o determinante do operador se anular. Denotando  $(\kappa^2 + n^2\pi^2) = a$ , impomos:

$$\det \begin{pmatrix} a^2 Pr + a\omega & -Pr \kappa^2 \\ Ra & -a - \omega \end{pmatrix} = 0.$$

O que conduz a uma equação característica (também denominada de relação de dispersão) para os autovalores  $\omega$ :

$$(a^2 Pr + a\omega)(-a - w) + Ra Pr \kappa^2 = 0.$$

Desenvolvendo os termos da equação acima chega-se a:

$$a\omega^2 + a^2(Pr + 1)\omega + Pr(a^3 - Ra \kappa^2) = 0. \quad (12.28)$$

Analizando os coeficientes da relação de dispersão constata-se que:

1. Sendo  $a = \kappa^2 + n^2\pi^2$ , é sempre positivo. Em consequência, a soma das raízes da relação de dispersão é sempre negativa;
2. O produto das raízes é positivo para valores de  $Ra$  suficientemente baixos. Nessas condições, os dois autovalores são negativos e o estado de repouso é estável com relação à perturbação considerada. Com o aumento de  $Ra$ , o produto das raízes se torna negativo, o que leva à existência de dois autovalores reais, sendo um positivo e o outro, negativo. A condição em que um dos autovalores se anula caracteriza um ponto de bifurcação, em que o estado base perde a estabilidade;

3. Os autovalores do operador são reais no ponto de bifurcação. De fato, se fossem complexos, a parte real dos mesmos se anularia e a soma das raízes deveria ser igual a zero, o que não ocorre. Concluímos que os autovalores são reais. A bifurcação que resulta da instabilidade do estado de repouso com relação à perturbação imposta é estacionária.

Uma vez obtida a solução para a componente  $v_z$  da velocidade, pode-se determinar as componentes  $v_x$  e  $v_y$  [24]. Admitimos que as componentes horizontais da velocidade se expressem através de duas funções  $\phi$  e  $\psi$  que satisfaçam às seguintes condições:

$$\tilde{v}_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \omega \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e:} \quad \tilde{v}_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Sendo as funções  $\phi$  e  $\psi$  proporcionais a  $\exp[i(\kappa_x x + \kappa_y y) + \omega t]$ , têm-se, pela equação da continuidade, que:

$$-\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\kappa^2 \phi$$

e:

$$\tilde{\xi} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\kappa^2 \psi.$$

Portanto:

$$\phi = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} \quad \text{e:} \quad \psi = -\frac{1}{\kappa^2} \tilde{\xi}.$$

Têm-se portanto, que as componentes horizontais da velocidade são dadas por:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_x &= \frac{1}{\kappa^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial y} \right) = \frac{i}{\kappa^2} \left( \kappa_x \frac{\partial v_z}{\partial z} - \kappa_y \tilde{\xi} \right) \\ \tilde{v}_y &= \frac{1}{\kappa^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x} \right) = \frac{i}{\kappa^2} \left( \kappa_y \frac{\partial v_z}{\partial z} - \kappa_x \tilde{\xi} \right). \end{aligned}$$

Da Eq. 12.20 têm-se que  $Pr \nabla^2 \tilde{\xi} = \omega \tilde{\xi}$ . Na vizinhança do ponto de bifurcação  $\omega = 0$ , o que implica em que  $\nabla^2 \tilde{\xi} = 0$ . Adicionalmente, como considera-se o caso em que as tensões de cisalhamento horizontais em  $z = 0$  e em  $z = 1$  são nulas têm-se, nas duas superfícies:

$$\begin{aligned} \tau_{zy} &= \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0 \\ \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Das duas equações acima obtém-se:

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial x} = 0.$$

Conclui-se que  $\partial \tilde{\xi} / \partial z = 0$  em  $z = 0$  e em  $z = 1$ . A vorticidade é regida pela equação de Laplace,  $\nabla^2 \tilde{\xi} = 0$ , próximo ao ponto de bifurcação e sujeita a condições de contorno de Neumann. A única solução para a equação de Laplace nessas condições é a trivial. Conclui-se que a componente vertical da vorticidade é identicamente nula,  $\tilde{\xi} \equiv 0$ , próximo ao ponto de bifurcação.

### 12.3.5 O número de Rayleigh crítico e modos instáveis

O número de Rayleigh para o qual a taxa de crescimento  $\omega$  se anula é determinado com a condição de que o produto das raízes da relação de dispersão é igual a zero. Nessas condições têm-se que:

$$Ra = \frac{(\kappa^2 + n^2\pi^2)^3}{\kappa^2}.$$

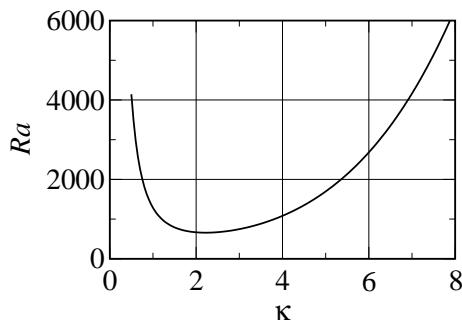


Figura 12.2: Número de Rayleigh que anula a taxa de crescimento da perturbação, em função do número de onda da mesma ( $n = 1$ ).

O número de Rayleigh crítico se encontra no ponto de mínimo da curva  $Ra = Ra(\kappa)$ . (ver Fig. 12.2). Nesse ponto:

$$\begin{aligned} \frac{dRa}{d\kappa} &= \frac{6k(\kappa^2 + n^2\pi^2)^2}{\kappa^2} - \\ &\quad \frac{2(\kappa^2 + n^2\pi^2)^3}{\kappa^3} = 0. \end{aligned}$$

Obtém-se a seguinte equação para o número de onda que minimiza o número de Rayleigh associado a perturbações marginalmente estáveis:

$$2\kappa^6 + 3\kappa^4n^2\pi^2 - n^6\pi^6 = 0.$$

O número de onda, solução da equação acima e o correspondente número de Rayleigh são dados por:

$$\kappa = \frac{n\pi}{\sqrt{2}} \quad Ra = 2 \frac{(3n^2\pi^2/2)^3}{n^2\pi^2} = \frac{27}{4}n^4\pi^4.$$

O valor crítico dos números de Rayleigh e de onda são obtidos tomando-se  $n = 1$ . Os dois são independentes do número de Prandtl. O resultado aplica-se ao problema de Rayleigh-Bénard com condições de contorno do tipo livre-livre, em que as tensões de cisalhamento são nulas em ambos os bordos. Obtém-se:

$$Ra_0 = 657,51 \quad \text{e:} \quad \kappa_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

A relação de dispersão contém o módulo do número de onda, mas não, suas componentes. Todos os modos com dado comprimento do vetor de onda têm mesma taxa de crescimento. Essa propriedade decorre da ação do laplaciano sobre a perturbação, que resulta na substituição das componentes do vetor de onda por seu módulo. No ponto de bifurcação, um número infinito de modos com orientação arbitrária torna-se marginalmente estável. A pergunta que então se põe refere-se à orientação do modo selecionado e ao número de modos que sobrevivem em cada ponto da estrutura que emerge da bifurcação. A seleção do número de modos resulta da interação entre os que são mais amplificados nos primeiros momentos da formação da estrutura. Esses modos se originam da condição inicial, que normalmente contém um componente aleatório. A interação entre modos é um fenômeno intrinsecamente não linear, não descrito pela solução do problema linearizado. A análise de

estabilidade linear não responde portanto, às questões relativas à orientação e ao número de modos da estrutura. Um exemplo de estrutura com três modos em cada ponto se encontra na Fig. 12.1. Os modos formam um ângulo de  $2\pi/3$  radianos entre si.

A Fig. 12.3 mostra três curvas da taxa de crescimento  $\omega$  para  $n = 1$  e  $Ra = 500$ , 657,51 e 800. O número de Prandtl adotado foi  $Pr = 7$ . No ponto de bifurcação, têm-se que:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \kappa} = 0. \quad (12.29)$$

A estrutura emergente só pode conter modos críticos. Nenhuma modulação é admitida, pois isso implicaria na presença de outros modos. À medida em que o sistema se torna supercrítico, isso é, que o número de Rayleigh ultrapassa o valor crítico, uma faixa de números de onda se torna instável, possibilitando a modulação da estrutura em distâncias progressivamente menores e o surgimento de defeitos na estrutura. A estrutura mostrada na Fig. 12.1 apresenta alguns defeitos.

O número de onda dimensional é obtido pela relação  $\kappa_d = \kappa/d$ , o que mostra que a dimensão característica da estrutura celular que emerge da bifurcação depende da dimensão do sistema. Esse aspecto é típico dos sistemas hidrodinâmicos e contrário ao que ocorre em sistemas químicos.

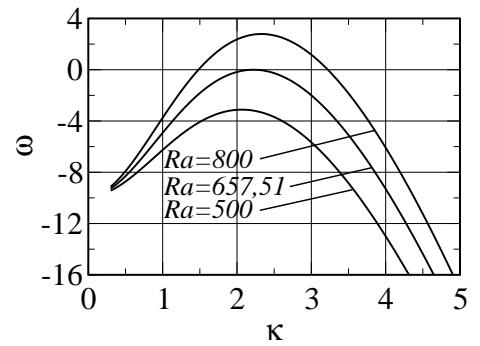


Figura 12.3: Curvas da taxa de crescimento,  $\omega \times \kappa$ , para três valores do número de Rayleigh,  $Pr = 7$  e  $n = 1$ . Observa-se a existência de um intervalo de números de onda instáveis no caso de  $Ra = 800$ . A taxa de crescimento é a raiz positiva da Eq. 12.28.

# Capítulo 13

## O Problema de Rayleigh-Bénard: Equações de Amplitude

### 13.1 O Método de Multi-escalas

Quando o número de Rayleigh ultrapassa o valor crítico, mas mantém-se pouco acima desse valor, os efeitos não lineares passam a atuar, saturando o crescimento e limitando a velocidade com que a amplitude evolui. Quanto mais próximo o número de Rayleigh estiver do valor crítico, mais lento é o crescimento exponencial da amplitude e mais estreita é a faixa de números de onda instáveis, o que restringe as modulações mais e mais qualquer modulação espacial da amplitude. No ponto de bifurcação, nenhuma modulação espacial é possível, pois apenas vetores de onda com o comprimento crítico não são atenuados. Além do ponto de bifurcação, a amplitude evolui no espaço, em escala mais longa do que a característica da estrutura que se forma. Da mesma maneira, a amplitude evolui em uma escala mais lenta de tempos. Têm-se uma separação de escalas. As escalas de tempo e espaço tornam-se progressivamente mais longas, quanto mais próximo o parâmetro de bifurcação estiver do valor crítico. O método de multi-escalas baseia-se nessa separação de escalas: admite-se que a amplitude de um modo dependa apenas de escalas longas de tempo e espaço e procura-se construir uma solução para o comportamento do modo na vizinhança do ponto de bifurcação. Esboçamos abaixo os princípios do método multi-escalas [130, 122, 121].

As Eqs. 12.13 a 12.16 podem ser representadas na forma:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{U}, Ra),$$

onde  $\mathbf{U}$  é o vetor que contém as três componentes da velocidade e a temperatura e  $\gamma = Ra - Ra_0$ . Esse sistema admite uma solução estacionária  $\mathbf{U}_0$ , que é o estado base do problema, tratado na Sec. 12.3.1. Superpõe-se uma pequena perturbação  $\mathbf{u}$  ao estado base. A equação de evolução da perturbação se escreve:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{U}_0 + \mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{U}_0, Ra_c) + \mathbf{L} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{h}(\mathbf{U}_0, \mathbf{u}, \gamma), \quad (13.1)$$

onde:

$$L_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial U_j} \right|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0}$$

e  $\mathbf{h}(\mathbf{U}_0, \mathbf{u}, \gamma)$  é um vetor de funções não lineares.  $\partial F_i / \partial u_j$  é o elemento geral do operador linear do membro direito da Eq. 12.27. Como  $\mathbf{U}_0$  é uma solução estacionária, têm-se que  $\partial \mathbf{U}_0 / \partial t = 0$  e  $\mathbf{F}(\mathbf{U}_0, \gamma_c) = 0$ . A equação de evolução da perturbação torna-se:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{h}(\mathbf{u}, \gamma). \quad (13.2)$$

o estado base do problema permanece como solução estacionária, quando se altera o parâmetro de bifurcação. Essa propriedade implica em  $\partial^n \mathbf{F}(\mathbf{U}_0, Ra) / \partial \gamma^n = 0$ . A questão que procura-se responder é: como evolui a amplitude do modo associado ao maior autovalor, quando esse torna-se positivo, em consequência de o parâmetro de controle ultrapassar o valor crítico?

Apresentamos a seguir a definição de sistema assintoticamente estável e três teoremas [122, 121] que, embora aplicáveis estritamente apenas a sistemas sem dependência espacial, dão indicações sobre a resposta procurada.

**Definição:** O estado  $\mathbf{X}_0$  de um sistema é assintoticamente estável se existir uma vizinhança do mesmo, tal que se  $|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| < \delta$  então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| = 0.$$

**Princípio de Estabilidade Linearizada:** Este princípio compara as propriedades de estabilidade de dois problemas: o original, dado pela Eq. (13.2) e o linearizado,

$$\frac{dx_i}{dt} = L_{ij}x_j \quad (13.3)$$

O princípio estipula que, se a solução estacionária  $\mathbf{X}_s$  do problema linearizado for assintoticamente estável, a solução do problema não-linear também é assintoticamente estável e, se a solução  $\mathbf{X}_s$  do problema linearizado for instável, a solução do problema não-linear também o é.

Demonstramos esse teorema para o caso de sistemas com uma única variável. Nesse caso  $\mathbf{F} = F$  e  $\mathbf{x} = x$ . Têm-se que:

$$\frac{dx}{dt} = F'x + \frac{1}{2}F''x^2 + \frac{1}{6}F'''x^3 + \dots = \lambda x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Procura-se determinar como o módulo da perturbação (ou seu quadrado), evolui no tempo:

$$\frac{1}{2} \frac{d|x|^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt} = x \frac{dx}{dt} = \lambda x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \dots = g(x)$$

Têm-se que  $g(x=0) = 0$ ,  $g'(x=0) = 0$  e  $g''(x=0) = 2\lambda$ . Pode-se escrever, portanto, que:

$$g(x) = g(x=0) + \frac{x^2}{2}g(\theta x) = \frac{x^2}{2}g(\theta x) \quad 0 < \theta < 1$$

Sendo  $g''(x=0) = \lambda > 0$ , existe uma vizinhança de  $x = 0$ , por continuidade, em que  $g(\theta x) > 0$ . Analogamente, se  $g''(x=0) = \lambda < 0$ , existe uma vizinhança de  $x = 0$ , em que  $g(\theta x) < 0$ . Se  $\lambda = 0$ , não se pode tirar conclusões sobre o sinal da taxa de crescimento do

módulo da perturbação porque qualquer vizinhança de  $x = 0$  pode conter valores positivos e negativos de  $\lambda$ . O raciocínio demonstra o teorema acima enunciado.

**Teorema 1:** Se  $\mathbf{U} = 0$  for solução da Eq.(13.1) quando o parâmetro de bifurcação  $\gamma$  atinge um valor crítico,  $\gamma = \gamma_c$  e, sendo  $\gamma_c$  um autovalor de multiplicidade ímpar quando  $\Re(\omega) = 0$ , então  $\gamma = \gamma_c$  é um ponto de bifurcação, no sentido de que existe pelo menos um ramo de novas soluções do problema não linear, começando em  $\mathbf{U} = 0$ . Esse ramo se estende até o infinito ou até outro ponto de bifurcação.

**Teorema 2:** Se  $\omega$  for um autovalor de multiplicidade 1 do operador linearizado, tal que sua parte real se anula ( $\Re(\omega) = 0$ ) e:

$$\frac{d\Re(\omega)}{d\gamma} \Big|_{\gamma=\gamma_c} \neq 0$$

então a nova solução que surge em  $\mathbf{U} = 0$ ,  $\lambda = \lambda_c$  é estacionária se  $\Im(\omega) = 0$  e periódica se  $\Im(\omega) \neq 0$  (Bifurcação de Hopf). Em ambos os casos, a solução supercrítica  $\gamma > \gamma_c$  é estável e a subcrítica (estado de base) é instável, desde que a parte real dos demais autovalores do operador linearizado  $L_{ij}$  seja negativa.

Como os autovalores do problema de são reais, a solução que emerge da bifurcação tem um crescimento monotônico, sem oscilar. Incorporando a taxa de crescimento à perturbação reescrevemos a Eq. 12.24 na forma:

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_z \\ \tilde{T} \\ \xi \end{pmatrix} = A(t, x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_{kn} \\ Z \end{pmatrix} \exp [i(\kappa_x x + \kappa_y y)] \sin n\pi z + c.c. \quad (13.4)$$

Decompondo a amplitude em modos de Fourier:

$$A(t, x, y) = \sum A_n \exp [i(\Delta\kappa_x x + \Delta\kappa_y y) + \omega t] \quad (13.5)$$

onde  $\omega$  é a taxa de crescimento da amplitude e  $(\Delta\kappa_x; \Delta\kappa_y)$  é o desvio do vetor de onda da perturbação introduzido na estrutura em formação pela modulação espacial da amplitude. Desenvolvendo a taxa de crescimento  $\omega$  em função dos desvios do parâmetro de bifurcação e do módulo do número de onda em relação aos valores críticos, encontra-se:

$$\omega \propto Ra - Ra_c + \frac{\partial \omega}{\partial (\kappa^2)} (\kappa^2 - \kappa_c^2) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial (\kappa^2)^2} (\kappa^2 - \kappa_c^2)^2 + \dots,$$

onde  $\kappa^2 = \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\kappa}$ . Como as derivadas nessa equação são calculadas no ponto de bifurcação, têm-se, pela Eq. 12.29, que  $\partial\omega/\partial(\kappa^2) = 0$ . Levando em conta esse fato, obtém-se:

$$\omega \propto Ra - Ra_c + \frac{\partial^2 \omega}{\partial (\kappa^2)^2} (\kappa^2 - \kappa_c^2)^2 + \dots \quad (13.6)$$

Essa equação descreve a dependência entre a taxa de crescimento com os desvios do parâmetro de bifurcação e do número de onda em relação aos valores críticos. Notando que  $\partial^2 \omega / (\partial k^2)^2 < 0$ , reescrevemos:

$$\omega \propto Ra + Ra_c - (\kappa^2 - \kappa_c^2)^2 + \dots$$

Da Eq. 13.5, têm-se que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \omega A \\ \frac{\partial A}{\partial x} &= i \Delta \kappa_x A & \frac{\partial A_n}{\partial y} &= i \Delta \kappa_y A. \\ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= -\Delta \kappa_x^2 A & \frac{\partial^2 A_n}{\partial y^2} &= -\Delta \kappa_y^2 A. \end{aligned} \right\} \quad (13.7)$$

Multiplicando a Eq. 13.6 por  $A_n$  obtém-se:

$$\omega A \propto (Ra - Ra_c) A - (\kappa^2 - \kappa_c^2)^2 A + \dots \quad (13.8)$$

Desenvolvendo o termo  $(\kappa^2 - \kappa_c^2)^2$  e desprezando os de ordem superior obtemos:

$$(\kappa^2 - \kappa_c^2)^2 = [(\kappa_x + \Delta \kappa_x)^2 + (\kappa_y + \Delta \kappa_y)^2 - (\kappa_x^2 r + -\kappa_y^2)]^2 \approx 2(\kappa_x \Delta \kappa_x + \kappa_y \Delta \kappa_y)^2$$

Comparando essa última equação com 13.7 vê-se que a lei de evolução da amplitude compreende os seguintes termos lineares:

$$\frac{\partial A}{\partial t} \propto (Ra - Ra_c) A + (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{grad})^2 A \quad (13.9)$$

Pode-se escrever também:

$$\frac{\partial}{\partial t} \propto (Ra - Ra_c) + \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \kappa_y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (13.10)$$

A instabilidade cresce exponencialmente nos primeiros momentos, mas esse crescimento exponencial se altera por efeito das não linearidades que regem a evolução do sistema. Para valores de  $\gamma$  suficientemente próximos de  $\gamma_c$ , a amplitude  $A(t)$  evolui em uma escala de tempos lenta do que as observadas em problemas onde imaginária  $\Omega$  do autovalor é diferente de zero. Da mesma forma, a estrutura emergente é modulada por uma amplitude varável no espaço, em escalas maiores do que a característica do número de onda do modo instável, em virtude do número de onda  $(\Delta \kappa_x; \Delta \kappa_y)$  ser pequeno. Reescrevemos perturbação dada pela Eq 13.4 na forma:

$$\mathbf{u} = A(\tau, X, Y) \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \\ \xi \end{pmatrix} \exp[i(\kappa_x x + \kappa_y y)] \sin n\pi z + c.c., \quad (13.11)$$

onde  $\tau = \tau(t, Ra - Ra_c)$ ,  $X = X(x, Ra - Ra_c)$  e  $Y = X(y, Ra - Ra_c)$ , são o tempo e as coordenadas espaciais dos quais a amplitude depende. Essas escalas são mais longas, no sentido de que  $t$ ,  $x$  e  $y$  devem variar muito até que  $\tau$ ,  $X$  e  $Y$  variem significativamente. Nessas condições:

$$u_i = u_i(t, x, y, \tau, X, Y, Ra)$$

e fazemos as substituições:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{dX}{dx} \frac{\partial u_i}{\partial x} \quad \text{e:} \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{dY}{dy} \frac{\partial u_i}{\partial y}$$

Introduzimos um pequeno parâmetro  $\varepsilon$ , tal que  $\varepsilon \rightarrow 0$  quando  $Ra \rightarrow Ra_c$  (isso é,  $\varepsilon \rightarrow 0$  quando  $\gamma \rightarrow \gamma_c$ ), fazemos  $X = \varepsilon x$  e  $Y = \varepsilon y$ , o que resulta em:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u_i}{\partial X} \quad \text{e:} \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial u_i}{\partial Y}$$

De forma mais geral, consideramos a existência de várias escalas lentas de tempo,  $\tau_1, \tau_2 \dots$  e de espaço,  $X_1, X_2 \dots$  e consideramos a amplitude dependendo de todas as escalas lentas de tempo e de espaço:

$$A = A(\tau_1, \tau_2, \dots, X_1, X_2, \dots, Y_1, Y_2, \dots),$$

onde:

$$X_1 = \varepsilon x, \quad X_2 = \varepsilon^2 x, \dots, \quad \text{e:} \quad Y_1 = \varepsilon x, \quad Y_2 = \varepsilon^2 y, \dots$$

As derivadas espaciais são substituídas por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + \dots \quad (13.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial Y_2} + \dots \quad (13.13)$$

Deve-se observar que o desenvolvimento do laplaciano com as escalas lentas de espaço toma a forma:

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \left( \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + \dots ; \frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial Y_2} + \dots \right) \cdot \\ &\quad \left( \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + \dots ; \frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial Y_2} + \dots \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial Y_1^2} + \dots \quad (13.14) \end{aligned}$$

Desenvolve-se a solução  $(\mathbf{v}, p, \theta)$  e  $Ra - Ra_c$  em série do parâmetro  $\varepsilon$ :

$$\mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{v}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{v}_2 + \dots \quad (13.15)$$

$$\theta = \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \dots \quad (13.16)$$

$$p - p_0 = \varepsilon p_1 + \varepsilon p_2 + \dots \quad (13.17)$$

$$Ra - Ra_0 = \varepsilon Ra_1 + \varepsilon^2 Ra_2 + \dots \quad (13.18)$$

onde as funções  $\mathbf{v}_j$ ,  $\theta_j$ ,  $p_j$  e  $Ra_j$  são determinadas da análise que se segue.

As escalas de tempo lentas têm um desenvolvimento em série diferente do usado para as variáveis espaciais e hidrodinâmicas. Adota-se:

$$\tau_1 = \varepsilon^2 t, \quad \tau_2 = \varepsilon^4 t, \dots$$

e substituímos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots$$

Substituindo o desenvolvimento da derivada temporal, das derivadas espaciais e do parâmetro de bifurcação na Eq. 13.10, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots &\propto \varepsilon Ra_1 + \varepsilon^2 Ra_2 + \dots - \\ &\left[ \kappa_x \left( \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1} + \dots \right) + \kappa_y \left( \frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y_1} + \dots \right) \right]^2 \end{aligned}$$

Notando que a amplitude não depende das escalas rápidas de tempo e espaço e retendo apenas termos até  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ , simplificamos a equação acima:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \dots \propto \varepsilon Ra_1 + \varepsilon^2 Ra_2 + \dots + \varepsilon^2 \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial Y_1} + \kappa_y^2 \frac{\partial^2}{\partial Y_1^2} \right) + \dots$$

Vê-se da equação acima que  $Ra_1 = 0$ , por ser o único termo de ordem  $\varepsilon$ . Vê-se também que a escolha das escalas lentas de tempo foram corretas para assegurar a existência de derivadas espaciais e de tempo na primeira ordem em  $\varepsilon$  em que as mesmas aparecem. As escalas de tempo e de espaço e o desenvolvimento da solução são introduzidos nas Eqs. 12.13 a 12.16. Obtém-se um sistema de equações na forma:

$$\varepsilon^0 \mathbf{F}_0 + \varepsilon^1 \mathbf{F}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{F}_2 + \varepsilon^3 \mathbf{F}_3 + \dots = 0.$$

Como  $\varepsilon$  pode ser variado independentemente de  $\mathbf{F}_i$  é necessário que  $\mathbf{F}_i = 0$  em todas as ordens.

## 13.2 As Equações de Evolução com Escalas Lentas de Tempo e de Espaço

Introduzindo inicialmente apenas as escalas lentas de tempo e espaço nas equações de evolução obtemos:

### Equação da continuidade

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \varepsilon \left( \frac{\partial v_x}{\partial X_1} + \frac{\partial v_y}{\partial Y_1} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial X_2} + \frac{\partial v_y}{\partial Y_2} \right) = 0 \quad (13.19)$$

### Equação da vorticidade

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \\ &\varepsilon \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\partial v_y}{\partial X_1} - \frac{\partial v_x}{\partial Y_1} \right) + 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \right) \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \\ &\varepsilon^2 \left[ 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \right) \left( \frac{\partial v_y}{\partial X_1} - \frac{\partial v_x}{\partial Y_1} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \right) \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] = \\ &\frac{Ra}{Pr} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( v_j \frac{\partial v_y}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( v_j \frac{\partial v_x}{\partial x_j} \right) \right] + \varepsilon \left[ \frac{\partial}{\partial X_1} \left( v_j \frac{\partial v_y}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial Y_1} \left( v_j \frac{\partial v_x}{\partial x_j} \right) \right] + \\ &\varepsilon^2 \left[ \frac{\partial}{\partial X_1} \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial X_1} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial Y_1} + \right) - \frac{\partial}{\partial Y_1} \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial X_1} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial Y_1} + \right) \right] \end{aligned} \quad (13.20)$$

### Equação da componente vertical da velocidade

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^4 v_z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 v_z}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 v_z}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 v_z}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 v_z}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 v_z}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \\
& \varepsilon \left[ 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial x^3 \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial y^3 \partial Y_1} + 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial x^2 \partial y \partial Y_1} + 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial y^2 \partial x \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial z^2 \partial x \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial z^2 \partial y \partial Y_1} + \right. \\
& \left. 2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial Y_1} \right] + \varepsilon^2 \left[ 6 \frac{\partial^4 v_z}{\partial x^2 \partial X_1^2} + 6 \frac{\partial^4 v_z}{\partial y^2 \partial Y_1^2} + 2 \frac{\partial^4 v_z}{\partial x^2 \partial Y_1^2} + 2 \frac{\partial^4 v_z}{\partial y^2 \partial X_1^2} + \right. \\
& \left. 8 \frac{\partial^4 v_z}{\partial x \partial y \partial X_1 \partial Y_1} + 2 \frac{\partial^4 v_z}{\partial z^2 \partial X_1^2} + 2 \frac{\partial^4 v_z}{\partial z^2 \partial X_1^2} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \nabla^2 v_z + \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \right] = \\
& \frac{Ra}{Pr} \left[ \nabla^2 \left( v_j \frac{\partial v_z}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \varepsilon \frac{Ra}{Pr} \left[ \nabla^2 \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial X_1} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial Y_1} \right) + \right. \\
& \left. 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \right) \left( v_j \frac{\partial v_z}{\partial x_j} \right) - \right. \\
& \left. 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial X_1} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial Y_1} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial Y_1} + \frac{\partial v_y}{\partial X_1} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial Y_1} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial X_1} \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] + \\
& \varepsilon^2 \frac{Ra}{Pr} \left[ 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \right) \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial X_1} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial Y_1} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y_1^2} \right) \left( v_j \frac{\partial v_z}{\partial x_j} \right) - \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial z} \left( \left( \frac{\partial v_x}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial Y_1} \right)^2 + \frac{\partial v_y}{\partial X_1} \frac{\partial v_x}{\partial Y_1} \right) \right] \tag{13.21}
\end{aligned}$$

### Equação da temperatura

$$\begin{aligned}
Ra v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} + \varepsilon Ra \left( v_x \frac{\partial T}{\partial X_1} + v_y \frac{\partial T}{\partial Y_1} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial T}{\partial \tau_1} = \\
\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 2\varepsilon \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial Y_1} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y_1^2} \right) \tag{13.22}
\end{aligned}$$

### 13.3 A Solução em Série de Potências da Distância ao Ponto de Bifurcação

Procura-se uma solução em série de potências de  $\varepsilon$ :

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \dots + c.c., \tag{13.23}$$

A solução acima é substituída nas Eqs. 13.19 a 13.22 e identifica-se os termos em cada ordem de grandeza em  $\varepsilon$ .

### 13.3.1 Ordem $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ : a solução do estado base

Substituindo-se a solução na forma da Eq. 13.23 e retendo apenas os termos de ordem  $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$  das Eqs. 13.19 a 13.22 recupera-se as equações que regem a estabilidade linear do problema (Eqs. 12.19 a 12.22). Essas equações admitem o estado base como solução:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1-z \end{pmatrix} \quad (13.24)$$

### 13.3.2 Ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)$ : o problema linear

As equações de ordem  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  são obtidas de acordo com o procedimento abaixo:

1. Retem-se os termos de ordem  $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$  das Eqs. 13.19 a 13.22, nos quais substitui-se os de ordem  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  da Eq. 13.23 e produtos desses pelo termo não nulo do estado base, que é de ordem  $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ ; Os termos não lineares são descartados, pois tornam-se de ordem  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ;
2. Retem-se os termos de ordem  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  das Eqs. 13.19 a 13.22, nos quais substitui-se os de ordem  $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$  da Eq. 13.23. Esses últimos são dados pela solução do estado base, conforme Eq. 13.24.

Obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} &= 0 \\ \nabla^2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) &= 0 \\ \nabla^4 w_1 + \nabla^2 \theta_1 &= 0 \\ Ra w_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} &= \nabla^2 \theta_1. \end{aligned}$$

A solução de primeira ordem são da forma:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = A_1(\tau_1, X_1, Y_1) E_0 \begin{pmatrix} u_{10} \\ v_{10} \\ w_{10} \\ \theta_{10} \end{pmatrix} + cc. \quad (13.25)$$

Na equação acima:  $E_0 = \exp(i\kappa_x x + i\kappa_y y)$  e  $\kappa_0 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2$ .  $\kappa_0$  é um modo crítico, de orientação especificada. Substituindo a solução dada pela Eq. 13.25 nas equações de primeira

ordem encontra-se:

$$\begin{aligned} i\kappa_x A_1 E_0 u_{10} + i\kappa_y A_1 E_0 v_{10} + A_1 E_0 \frac{\partial w_{10}}{\partial z} &= 0 \\ \nabla^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} A_1 E_0 v_{10} - \frac{\partial}{\partial y} A_1 E_0 u_{10} \right) &= 0 \\ A_1 E_0 \mathcal{L}_{10}^2 w_{10} - \kappa_0^2 A_1 E_0 \theta_{10} &= 0 \\ Ra_0 A_1 E_0 w_{10} \frac{\partial}{\partial z} (1-z) &= A_1 E_0 \mathcal{L}_{10} w_{10}, \end{aligned}$$

onde:  $\mathcal{L}_{10} = \partial/\partial z - \kappa_0^2$ . Simplificando as equações acima obtém-se:

$$\kappa_x u_{10} + \kappa_y v_{10} = i \frac{\partial}{\partial z} w_{10} \quad (13.26)$$

$$\mathcal{L}_{10} (\kappa_x v_{10} - \kappa_y u_{10}) = 0 \quad (13.27)$$

$$\mathcal{L}_{10}^2 w_{10} - \kappa_0^2 \theta_{10} = 0 \quad (13.28)$$

$$Ra_0 w_{10} + \mathcal{L}_{10} \theta_{10} = 0. \quad (13.29)$$

Das duas primeiras equações e notando que, no ponto de bifurcação, a componente vertical da vorticidade é igual a zero (ver Pág. 64), têm-se que:

$$v_{10} = \frac{\kappa_y}{\kappa_x} u_{10} \quad \text{e:} \quad u_{10} = i \frac{\kappa_x}{\kappa_0^2} \frac{\partial}{\partial z} w_{10}. \quad (13.30)$$

As equações da componente vertical da velocidade e da temperatura estão desacopladas das equações da continuidade e da vorticidade e podem ser agrupadas na forma:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{10}^2 & -\kappa_0^2 \\ Ra_0 & \mathcal{L}_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{10} \\ \theta_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.31)$$

As condições de contorno para a equação acima são  $\theta_{10} = w_{10} = \partial w_{10}/\partial z = \partial u_{10}/\partial z = \partial v_{10}/\partial z = 0$  em  $z = 0$  e  $z = 1$ . O primeiro modo a satisfazer a Eq. 13.31, com  $n = 1$  (ver Eq. 12.26) é da forma:

$$w_{10} = \gamma \Theta_{10} \sin \pi z.$$

$$\theta_{10} = \Theta_{10} \sin \pi z$$

Substituindo a solução acima nas equações de  $\mathcal{O}(\epsilon)$  encontra-se:

$$\begin{pmatrix} (\pi^2 + \kappa_0^2) & -\kappa_0^2 \\ Ra_0 & -(\pi^2 + \kappa_0^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \Theta_{10} \\ \Theta_{10} \end{pmatrix} \sin \pi z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que conduz a  $Ra_0 = (\pi^2 + \kappa_0^2)^3$  e a:

$$\pi^2 + \kappa_0^2 = \gamma Ra_0 \quad \longrightarrow \quad \gamma = \frac{\kappa_0^2}{(\pi^2 + \kappa_0^2)}$$

### 13.3.3 Ordem $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$

Equação da continuidade:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial v_1}{\partial Y_1} = 0.$$

Substituindo-se a solução de primeira ordem, dada pela Eq. 13.25, na equação acima obtém-se:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} + E_0 u_{10} \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + E_0 v_{10} \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} = 0. \quad (13.32)$$

Equação da vorticidade:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \nabla^2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial Y_1} \right) + 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \right) \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \\ \frac{Ra}{Pr} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (13.33)$$

Substitui-se a solução de primeira ordem, dada pela Eq. 13.25, na equação da vorticidade e encontra-se para os termos dessa última:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial Y_1} \right) &= E_0 \mathcal{L}_{10} \left( v_{10} \frac{\partial A_1}{\partial X_1} - u_{10} \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right) \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} (\kappa_x v_{10} - \kappa_y u_{10}) \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} (\kappa_x v_{10} - \kappa_y u_{10}) \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) & \\ 2 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^2 \partial X_1} - 2 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial y \partial X_1} &= -2\kappa_x^2 E_0 \frac{\partial A_1}{\partial X_1} v_{10} + 2\kappa_x \kappa_y E_0 \frac{\partial A_1}{\partial X_1} u_{10}. \end{aligned}$$

Levando em conta que  $\kappa_x v_{10} = \kappa_y u_{10}$  conclui-se que:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) &= 0. \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) &= A_1^2 E_0^2 \left( i\kappa_x w_{10} \frac{d}{dz} - \kappa_x^2 u_{10} - \kappa_x \kappa_y v_{10} \right) v_{10}, \end{aligned}$$

onde  $E_0^2 = \exp(2i\kappa_x x + 2i\kappa_y y)$ . Levando em conta as Eqs. 13.30 simplifica-se a equação acima e obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) = i\kappa_x A_1^2 E_0^2 \left( w_{10} \frac{dv_{10}}{dz} - v_{10} \frac{dw_{10}}{dz} \right).$$

Analogamente:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) = i\kappa_y A_1^2 E_0^2 \left( w_{10} \frac{du_{10}}{dz} - u_{10} \frac{dw_{10}}{dz} \right).$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( v_j \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( v_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right) &= \\ i A_1^2 E_0^2 \left( \kappa_x w_{10} \frac{dv_{10}}{dz} - \kappa_x v_{10} \frac{dw_{10}}{dz} - \kappa_y w_{10} \frac{du_{10}}{dz} + \kappa_y u_{10} \frac{dw_{10}}{dz} \right) &= 0, \end{aligned}$$

pois  $\kappa_x v_{10} - \kappa_y u_{10} = 0$ . A equação de segunda ordem da componente vertical da vorticidade é então:

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) = -E_0 \mathcal{L}_{10} \left( u_{10} \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} - v_{10} \frac{\partial A_1}{\partial X_1} \right)$$

Equação da componente vertical da velocidade:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 v_z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 v_z}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 v_z}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 v_z}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 v_z}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 v_z}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \\ \varepsilon \left[ 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial x^3 \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial y^3 \partial Y_1} + 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial x^2 \partial y \partial Y_1} + 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial y^2 \partial x \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial z^2 \partial x \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial z^2 \partial y \partial Y_1} + \right. \\ \left. 2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial Y_1} \right] = \frac{Ra_0}{Pr} \left[ \nabla^2 \left( v_j \frac{\partial v_z}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (13.34) \end{aligned}$$

Introduzindo-se os termos de primeira e de segunda ordem dos campos de velocidades, de temperatura na equação acima chega-se a:

$$\begin{aligned} \nabla^4 w_2 + \nabla_2^2 \theta_2 &= -\varepsilon \left[ 4 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^3 \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^3 \partial Y_1} + 4 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y \partial Y_1} + 4 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^2 \partial x \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^2 \partial x \partial X_1} + \right. \\ &\quad \left. 4 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^2 \partial y \partial Y_1} + 2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y \partial Y_1} \right] + \frac{Ra_0}{Pr} \left[ \nabla^2 \left( v_j \frac{\partial v_z}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right]. \end{aligned}$$

Substituindo-se a solução de primeira ordem, dada pela Eq. 13.25, encontra-se:

$$\begin{aligned} \frac{Ra_0}{Pr} \left[ \nabla^2 \left( v_j \frac{\partial v_z}{\partial x_j} \right) \right] &= \frac{Ra_0}{Pr} A_1^2 E_0^2 \mathcal{L}_{20} \left[ \left( i \kappa_x u_{10} + i \kappa_y v_{10} + \frac{dw_{10}}{dz} \right) w_{10} \right] + \\ &\quad \frac{Ra_0}{Pr} |A_1|^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ \left( i \kappa_x u_{10} + i \kappa_y v_{10} + \frac{dw_{10}}{dz} \right) w_{10} \right] + c.c. = 0. \end{aligned}$$

O desenvolvimento do termo  $\partial v_i / \partial x_j \partial v_j / \partial x_i$  é dado pela Eq. 12.17. Desenvolvemos inicialmente a derivada em relação a  $z$  dos três primeiros termos do lado direito daquela igualdade:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_1}{\partial z} \right)^2 \right] &= 2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial x} + 2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial y} + 2 \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = \\ &- 2 A_1^2 E_0^2 \left( \kappa_x^2 u_{10} \frac{du_{10}}{dz} + \kappa_y^2 v_{10} \frac{dv_{10}}{dz} - \frac{dw_{10}}{dx} \frac{d^2 w_{10}}{dz^2} \right) + \\ &2 |A_1|^2 \left( \kappa_x^2 u_{10}^* \frac{du_{10}}{dz} + \kappa_y^2 v_{10}^* \frac{dv_{10}}{dz} + \frac{dw_{10}^*}{dx} \frac{d^2 w_{10}}{dz^2} \right) + c.c. \end{aligned}$$

Desenvolvemos os três últimos termos do lado direito da Eq. 12.17:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( 2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) = -2A_1^2 E_0^2 \left( \kappa_x \kappa_y u_{10} \frac{dv_{10}}{dz} + \kappa_x \kappa_y v_{10} \frac{du_{10}}{dz} - i \kappa_x \frac{dw_{10}}{dz} \frac{du_{10}}{dz} - i \kappa_x w_{10} \frac{du_{10}^2}{dz^2} - i \kappa_y \frac{dw_{10}}{dz} \frac{dv_{10}}{dz} - i \kappa_y w_{10} \frac{d^2 v_{10}}{dz^2} \right) + 2 |A_1|^2 \left( \kappa_x^2 u_{10}^* \frac{du_{10}}{dz} + \kappa_y^2 v_{10}^* \frac{dv_{10}}{dz} + \frac{dw_{10}^*}{dx} \frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + \kappa_x \kappa_y u_{10} \frac{dv_{10}^*}{dz} + i \kappa_x \frac{dw_{10}^*}{dx} \frac{du_{10}}{dz} + i \kappa_y \frac{dw_{10}^*}{dx} \frac{dv_{10}}{dz} \right). \quad (13.35)$$

Reagrupoando os termos das Eqs. 13.35 e 13.35 e utilizando as equações da continuidade e do rotacional de primeira ordem (Eqs. 13.26 e 13.30) encontra-se:

$$\frac{Ra_0}{Pr} \left[ \nabla^2 \left( v_j \frac{\partial v_z}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = -2 \frac{Ra_0}{Pr} A_1^2 E_0^2 \left( \frac{dw_{10}}{dz} \frac{d^2 w_{10}}{dz^2} - w_{10} \frac{d^3 w_{10}}{dz^3} \right)$$

Desenvolvendo os termos lineares:

$$4 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^3 \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^2 \partial x \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^2 \partial x \partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial X_1} = 2i \kappa_x E_0 \frac{\partial A_1}{\partial X} (2\mathcal{L}_{10} w_{10} + \theta_{10}) + cc$$

$$4 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^3 \partial Y_1} + 4 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y \partial Y_1} + 4 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^2 \partial y \partial Y_1} + 2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y \partial Y_1} = 2i \kappa_y E_0 \frac{\partial A_1}{\partial Y} (2\mathcal{L}_{10} w_{10} + \theta_{10}) + cc.$$

A equação de  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  da componente vertical da velocidade é portanto

$$\nabla^4 w_2 + \nabla_2^2 \theta_2 = -2i E_0 \left( \kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X} + \kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y} \right) (2\mathcal{L}_{10} + \theta_{10}) - 2 \frac{Ra_0}{Pr} A_1^2 E_0^2 \left( \frac{dw_{10}}{dz} \frac{d^2 w_{10}}{dz^2} - w_{10} \frac{d^3 w_{10}}{dz^3} \right)$$

Equação da temperatura:

$$Ra v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} + \varepsilon Ra \left( v_x \frac{\partial T}{\partial X_1} + v_y \frac{\partial T}{\partial Y_1} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 2\varepsilon \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial Y_1} \right). \quad (13.36)$$

Introduzindo-se os termos de ordem zero, de primeira e de segunda ordem dos campos de velocidades, de temperatura e do desenvolvimento em série do número de Rayleigh na equação acima encontra-se:

$$Ra_0 \left( u_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + w_2 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right) = \nabla^2 \theta_2 + 2 \left( \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y \partial Y_1} \right),$$

ou ainda, lembrando que  $\partial \theta_0 / \partial z = -1$ :

$$Ra_0 w_2 + \nabla^2 \theta_2 = Ra_0 \left( u_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) - 2 \left( \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y \partial Y_1} \right).$$

Substituindo-se a solução de primeira ordem, dada pela Eq. 13.25, na equação da temperatura encontra-se, para os diversos termos:

$$\begin{aligned} Ra_0 \left( u_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) &= Ra_0 A_1^2 E_0^2 \left( w_{10} \frac{d\theta_{10}}{dz} - \theta_{10} \frac{dw_{10}}{dz} \right) + \\ &\quad 2Ra_0 |A_1|^2 \frac{d}{dz} (\theta_{10} w_{10}^*) + cc \\ 2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial X_1} &= 2i\kappa_x E_0 \theta_{10} \quad 2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y \partial Y_1} = 2i\kappa_y E_0 \theta_{10} \\ 2 \left( \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y \partial Y_1} \right) &= 2iE_0 \theta_{10} \left( \kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + \kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right), \end{aligned}$$

onde o asterisco indica o complexo conjugado. Reagrupando só termos, obtem-se a equação de segunda ordem da temperatura:

$$\begin{aligned} Ra_0 w_2 + \nabla^2 \theta_2 &= 2Ra_0 |A_1|^2 \frac{d}{dz} (\theta_{10} w_{10}^*) + Ra_0 A_1^2 E_0^2 \left( w_{10} \frac{d\theta_{10}}{dz} - \theta_{10} \frac{dw_{10}}{dz} \right) - \\ &\quad 2E_0 \theta_{10} \left( i\kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + i\kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right). \end{aligned}$$

Em resumo, encontra-se as equações de  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ , conforme abaixo:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = -E_0 \left( u_{10} \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + v_{10} \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right) + c.c. \quad (13.37)$$

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) = E_0 \mathcal{L}_{10} \left( u_{10} \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} - v_{10} \frac{\partial A_1}{\partial X_1} \right) + c.c. \quad (13.38)$$

$$\begin{aligned} \nabla^4 w_2 + \nabla_2^2 \theta_2 &= -2iE_0 \left( \kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X} + \kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y} \right) (2\mathcal{L}_{10} + \theta_{10}) \\ &\quad - 2 \frac{Ra_0}{Pr} A_1^2 E_0^2 \left( \frac{dw_{10}}{dz} \frac{d^2 w_{10}}{dz^2} - w_{10} \frac{d^3 w_{10}}{dz^3} \right) \end{aligned} \quad (13.39)$$

$$\begin{aligned} Ra_0 w_2 + \nabla^2 \theta_2 &= 2Ra_0 |A_1|^2 \frac{d}{dz} (\theta_{10} w_{10}^*) + Ra_0 A_1^2 E_0^2 \left( w_{10} \frac{d\theta_{10}}{dz} - \theta_{10} \frac{dw_{10}}{dz} \right) - \\ &\quad 2E_0 \theta_{10} \left( i\kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + i\kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right). \end{aligned} \quad (13.40)$$

As Eqs. 13.39 a 13.40 encontram-se desacopladas das Eqs. 13.37 a 13.38 e podem ser reescritas na forma:

$$\begin{pmatrix} \nabla^4 & \nabla_2^2 \\ Ra_0 & \nabla^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \\ G_2 \end{pmatrix}, \quad (13.41)$$

Trata-se de uma equação linear, não homogênea, forçada pela interação não linear da solução de primeira ordem. Por ser uma equação linear, a resposta é proporcional à forçagem. O operador que atua sobre o vetor de incógnitas é o mesmo encontrado em primeira ordem (ver Eq. 13.31), ao qual impôs-se que fosse singular para que a equação admita solução

não trivial. Esse operador singular surge novamente em segunda ordem, porém o membro direito da Eq. 13.41 não é identicamente nulo, como em primeira ordem. A equação admite solução, porém é necessário que a forçagem satisfaça a certas condições, discutidas à frente. Essa situação se repete em todas as ordens: obtém-se uma equação linear, forçada pelo resultado da interação da solução das ordens inferiores. O operador do membro esquerdo é sempre o mesmo. O método multi-escalas substitui um sistema de equações não lineares por uma sequência infinita de equações lineares.

As funções  $F_2$  e  $G_2$  são dadas por:

$$\begin{aligned} F_2 &= -2iE_0 \left( \kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X} + \kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y} \right) (2\mathcal{L}_{10} + \theta_{10}) \\ &\quad - 2 \frac{Ra_0}{Pr} A_1^2 E_0^2 \left( \frac{dw_{10}}{dz} \frac{d^2 w_{10}}{dz^2} - w_{10} \frac{d^3 w_{10}}{dz^3} \right) \\ G_2 &= 2Ra_0 |A_1|^2 \frac{\partial}{\partial z} (\theta_{10} w_{10}^*) + Ra_0 A_1^2 E_0^2 \left( w_{10} \frac{d\theta_{10}}{dz} - \theta_{10} \frac{dw_{10}}{dz} \right) - \\ &\quad 2E_0 \theta_{10} \left( i\kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + i\kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right). \end{aligned}$$

Procura-se uma solução particular para a Eq. 13.41 na forma:

$$\begin{pmatrix} w_{2p} \\ \theta_{2p} \end{pmatrix} = |A_1|^2 \begin{pmatrix} w_{21} \\ \theta_{21} \end{pmatrix} + A_1^2 E_0^2 \begin{pmatrix} w_{22} \\ \theta_{22} \end{pmatrix} + \\ 2iE_0 \kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X_1} \begin{pmatrix} w_{23} \\ \theta_{23} \end{pmatrix} + 2iE_0 \kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \begin{pmatrix} w_{24} \\ \theta_{24} \end{pmatrix} + cc. \quad (13.42)$$

Substituindo-se a solução acima na Eqs. 13.41 encontra-se:

$$\begin{aligned} \nabla^4 |A_1|^2 w_{21} + \nabla^4 A_1^2 E_0^2 w_{22} + \nabla_2^2 A_1^2 E_0^2 \theta_{22} + \\ 2i\kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X_1} (\nabla^4 E_0 w_{23} + \nabla_2^2 E_0 \theta_{23}) + 2i\kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} (\nabla^4 E_0 w_{24} + \nabla_2^2 E_0 \theta_{24}) &= F_2 \\ Ra_0 |A_1| w_{21} + \nabla^2 |A_1| \theta_{21} + Ra_0 A_1^2 E_0^2 w_{22} + \nabla^2 A_1^2 E_0^2 \theta_{22} + \\ 2i\kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X_1} (Ra_0 E_0 w_{23} + \nabla_2^2 E_0 \theta_{23}) + 2i\kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} (Ra_0 E_0 w_{24} + \nabla_2^2 E_0 \theta_{24}) &= G_2 \end{aligned}$$

As equações acima tornam-se, após a aplicação dos operadores:

$$\begin{aligned} |A_1|^2 \frac{\partial^4 w_{21}}{\partial z^4} + A_1^2 E_0^2 (\mathcal{L}_{20} w_{22} - 4\kappa_0 \theta_{22}) + \\ 2i\kappa_x E_0 \frac{\partial A_1}{\partial X_1} (\mathcal{L}_{10}^2 w_{23} - \kappa_0^2 \theta_{23}) + 2i\kappa_y E_0 \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} (\mathcal{L}_{10}^2 w_{24} - \kappa_0^2 \theta_{24}) &= F_2 \\ |A_1|^2 \left( Ra_0 w_{21} + \frac{\partial^2 \theta_{21}}{\partial z^2} \right) + A_1^2 E_0^2 (Ra_0 w_{22} + \mathcal{L}_{20} \theta_{22}) + \\ 2i\kappa_x E_0 \frac{\partial A_1}{\partial X_1} (Ra_0 w_{23} + \mathcal{L}_{10} \theta_{23}) + 2iE_0 \kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} (Ra_0 w_{24} + \mathcal{L}_{10} \theta_{24}) &= G_2, \end{aligned}$$

onde:  $\mathcal{L}_{20} = \partial^2/\partial z^2 - 4\kappa_0^2$ . Comparando os termos das duas equações acima com as expressões das funções  $F_2$  e  $G_2$  obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{dw_{21}}{dz} &= 0 \\ \mathcal{L}_{20}w_{22} - 4\kappa_0\theta_{22} &= -2\frac{Ra_0}{Pr} \left( \frac{dw_{10}}{dz} \frac{d^2w_{10}}{dz^2} - w_{10} \frac{d^3w_{10}}{dz^3} \right) \\ \mathcal{L}_{10}^2 w_{23} - \kappa_0^2 \theta_{23} &= \mathcal{L}_{10}^2 w_{24} - \kappa_0^2 \theta_{24} = -(2\mathcal{L}_{10} + \theta_{10}) \\ Ra_0 w_{21} + \frac{d^2\theta_{21}}{dz^2} &= 2Ra_0 \frac{d}{dz} (\theta_{10} w_{10}^*) \\ Ra_0 w_{22} + \mathcal{L}_{20} \theta_{22} &= Ra_0 \left( w_{10} \frac{d\theta_{10}}{dz} - \theta_{10} \frac{dw_{10}}{dz} \right) \\ Ra_0 w_{23} + \mathcal{L}_{10} \theta_{23} &= Ra_0 w_{24} + \mathcal{L}_{10} \theta_{24} = -\theta_{10}.\end{aligned}$$

Procura-se uma solução particular para as componentes horizontais de segunda ordem da velocidade, sob a forma:

$$\begin{pmatrix} u_{2p} \\ v_{2p} \end{pmatrix} = |A_1|^2 \begin{pmatrix} u_{21} \\ v_{21} \end{pmatrix} + A_1^2 E_0^2 \begin{pmatrix} u_{22} \\ v_{22} \end{pmatrix} + 2i\kappa_x E_0 \frac{\partial A_1}{\partial X_1} \begin{pmatrix} u_{23} \\ v_{23} \end{pmatrix} + 2iE_0 \kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \begin{pmatrix} u_{24} \\ v_{24} \end{pmatrix} + c.c.$$

Substituindo a forma acima nas Eqs. 13.37 e 13.38 obtém-se:

$$\begin{aligned}|A_1| \frac{dw_{21}}{dz} + A_1^2 E_0^2 \left( 2i\kappa_x u_{22} + 2i\kappa_y u_{22} i + \frac{dw_{22}}{dz} \right) - 2\kappa_x E_0 \frac{\partial A_1}{\partial X_1} \left( \kappa_x u_{23} + \kappa_y v_{23} - i \frac{dw_{23}}{dz} \right) - \\ 2\kappa_y E_0 \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \left( \kappa_x u_{24} + \kappa_y v_{24} - i \frac{dw_{24}}{dz} \right) &= -E_0 \left( u_{10} \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + v_{10} \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right) \\ 2iA_1^2 E_0^2 \mathcal{L}_{20} (\kappa_y u_{22} - \kappa_x v_{22}) - 2E_0 \kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X_1} \mathcal{L}_{10} (\kappa_y u_{23} - \kappa_x v_{23}) - \\ 2E_0 \kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \mathcal{L}_{10} (\kappa_y u_{24} - \kappa_x v_{24}) &= E_0 \mathcal{L}_{10} \left( u_{10} \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} - v_{10} \frac{\partial A_1}{\partial X_1} \right) + c.c.\end{aligned}$$

Donde obtém-se:

$$\frac{dw_{21}}{dz} = 0 \quad (13.43)$$

$$2\kappa_x \left( \kappa_x u_{23} + \kappa_y v_{23} - i \frac{dw_{23}}{dz} \right) = u_{10} \quad (13.44)$$

$$2\kappa_y \left( \kappa_x u_{24} + \kappa_y v_{24} - i \frac{dw_{24}}{dz} \right) = v_{10} \quad (13.45)$$

$$\mathcal{L}_{20} (\kappa_y u_{22} - \kappa_x v_{22}) = 0 \quad (13.46)$$

$$\kappa_x u_{22} + \kappa_y v_{22} - i \frac{dw_{22}}{dz} = 0 \quad (13.47)$$

$$2\kappa_x (\kappa_y u_{23} - \kappa_x v_{23}) = -v_{10} \quad (13.48)$$

$$2\kappa_x (\kappa_y u_{24} - \kappa_x v_{24}) = u_{10}. \quad (13.49)$$

A Eq. 13.43 mostra que a componente vertical associada ao modo homogêneo de segunda ordem não varia na direção. Como essa componente é nula nas interfaces superior e inferior conclui-se que  $w_{21} \equiv 0$ . As componentes horizontais  $u_{21}$  e  $v_{21}$  sendo independentes de  $x$  e de  $y$  fazem com que a componente horizontal associada ao modo homogêneo seja uniforme em todos os planos horizontais. Como nos bordos a componente horizontal se anula,  $u_{21} \equiv v_{21} \equiv 0$ .

A Eq. 13.46 deve ser satisfeita qualquer que sejam as componentes  $\kappa_x$  e  $\kappa_y$  do vetor de onda. Essa condição só é satisfeita se  $\kappa_y u_{22} - \kappa_x v_{22} = 0$ .

Das Eqs. 13.44, 13.45 e 13.30 obtém-se que:

$$\kappa_x u_{23} + \kappa_y v_{23} - i \frac{dw_{23}}{dz} = \kappa_x u_{24} + \kappa_y v_{24} - i \frac{dw_{24}}{dz}.$$

Não há impedimentos a que  $w_{23} = w_{24}$  e que  $\theta_{23} = \theta_{24}$ . As equações de segunda ordem admitem portanto uma solução dessa forma. Nessas condições, a equação acima simplifica-se e toma a forma:

$$\kappa_x u_{23} + \kappa_y v_{23} = \kappa_x u_{24} + \kappa_y v_{24},$$

isso é, o produto escalar das duas velocidades horizontais  $(u_{23}; v_{23})$  e  $(u_{24}; v_{24})$  pelo vetor de onda  $(\kappa_x; \kappa_y)$  deve ser igual. Mostramos a seguir que existe uma solução em que  $(u_{23}; v_{23}) = (u_{24}; v_{24})$ . Para isso, procura-se as condições para a existência de uma solução particular para as componentes horizontais de segunda ordem da velocidade, na forma:

$$\begin{pmatrix} u_{2p} \\ v_{2p} \end{pmatrix} = 2iE_0 \left( \kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + \kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right) \begin{pmatrix} u_{23} \\ v_{23} \end{pmatrix} + c.c., \quad (13.50)$$

Substituindo a solução acima obtemos, após substituição nas Eqs. 13.37 e 13.38:

$$\begin{aligned} -2\kappa_x E_0 \frac{\partial A_1}{\partial X_1} \left( \kappa_x u_{23} + \kappa_y v_{23} - i \frac{dw_{23}}{dz} \right) - 2\kappa_y E_0 \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \left( \kappa_x u_{23} + \kappa_y v_{23} - i \frac{dw_{23}}{dz} \right) &= \\ -E_0 \left( u_{10} \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + v_{10} \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right) + c.c. & \\ -2E_0 \mathcal{L}_{10} \kappa_x (\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}) \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + 2E_0 \mathcal{L}_{10} \kappa_y (\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}) \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} &= \\ E_0 \mathcal{L}_{10} \left( u_{10} \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} - v_{10} \frac{\partial A_1}{\partial X_1} \right) + c.c. & \end{aligned}$$

Da equação da continuidade obtém-se:

$$2\kappa_x \left( \kappa_x u_{23} + \kappa_y v_{23} - i \frac{dw_{23}}{dz} \right) = u_{10} \quad \text{e:} \quad 2\kappa_y \left( \kappa_x u_{23} + \kappa_y v_{23} - i \frac{dw_{23}}{dz} \right) = v_{10}$$

Dividindo-se uma equação pela outra chega-se à Eq. 13.30. A equação da continuidade não impõe portanto, restrições à solução representada pela Eq. 13.50. No que se refere à equação do rotacional, obtém-se:

$$2\kappa_x (\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}) = v_{10} \quad \text{e:} \quad 2\kappa_y (\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}) = u_{10}.$$

Dividindo-se uma equação pela outra chega-se novamente à Eq. 13.30, o que mostra que a equação do rotacional também não impõe restrições à solução acima mencionada.

Em resumo, a solução de segunda ordem dos campos de velocidade e temperatura é da forma:

$$\begin{pmatrix} u_{2p} \\ v_{2p} \\ w_{2p} \\ \theta_{2p} \end{pmatrix} = |A_1|^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_{21} \end{pmatrix} + A_1^2 E_0^2 \begin{pmatrix} u_{22} \\ v_{22} \\ w_{22} \\ \theta_{22} \end{pmatrix} + 2iE_0 \left( \kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + \kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right) \begin{pmatrix} u_{23} \\ v_{23} \\ w_{23} \\ \theta_{23} \end{pmatrix} + c.c. \quad (13.51)$$

A solução de segunda ordem resulta portanto da forçagem das mesmas pela solução de primeira e por modos que surgem da interação não-linear da solução de primeira ordem com ela mesma. Essa interação produz uma solução composta de um modo uniforme de temperatura e um modo contendo o segundo harmônico. O Cap. 15 trata da interação entre o modo fundamental de primeira ordem e os modos homogêneo e do segundo harmônico em sistemas confinados, onde as dimensões horizontais do mesmo são suficientemente pequenas para impedir a modulação espacial da amplitude tratada no presente capítulo.

Os perfis verticais de segunda ordem resultam da solução das equações abaixo:

$$\frac{d\theta_{21}}{dz} = 2Ra_0 w_{10}^* \theta_{10} \quad (13.52)$$

$$\kappa_x u_{22} + \kappa_y v_{22} - \frac{i}{2} \frac{dw_{22}}{dz} = 0 \quad (13.53)$$

$$\kappa_x v_{22} - \kappa_y u_{22} = 0 \quad (13.54)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{20}^2 & -4\kappa_0^2 \\ Ra_0 & \mathcal{L}_{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{22} \\ \theta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \frac{Ra_o}{Pr} \left[ \frac{dw_{10}}{dz} \frac{d^2 w_{10}}{dz^2} - w_{10} \frac{d^3 w_{10}}{dz^3} \right] \\ Ra_0 \left[ w_{10} \frac{d^3 \theta_{10}}{dz^3} - \theta_{10} \frac{dw_{10}}{dz} \right] \end{pmatrix} \quad (13.55)$$

$$2\kappa_x \left( \kappa_x u_{23} + \kappa_y v_{23} - i \frac{dw_{23}}{dz} \right) = u_{10} \quad (13.56)$$

$$2\kappa_y \left( \kappa_x u_{23} + \kappa_y v_{23} - i \frac{dw_{23}}{dz} \right) = v_{10} \quad (13.57)$$

$$2\kappa_x (\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}) = -v_{10} \quad (13.58)$$

$$2\kappa_y (\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}) = u_{10} \quad (13.59)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{10}^2 & -\kappa_0^2 \\ Ra_0 & \mathcal{L}_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{23} \\ \theta_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mathcal{L}_{10} w_{10} + \theta_{10} \\ -\theta_{10} \end{pmatrix}. \quad (13.60)$$

As Eqs. 13.52 a 13.55 podem ser resolvidas sem dificuldades mas a Eq. 13.60 requer atenção especial por ser não homogênea, com um membro direito não trivial e um operador singular,  $\mathcal{L}$ . Para que o sistema admita solução é necessário que o vetor de funções do membro direito pertença ao subespaço varrido pelas colunas do operador  $\mathcal{L}$ . Essa condição é satisfeita se o vetor do membro direito for ortogonal ao espaço nulo do operador adjunto,  $\mathcal{L}^+$ . A condição é conhecida como Alternativa de Fredholm [121, 83] – ver Sec. D.1.12).

O vetor de funções que gera o espaço nulo do operador adjunto  $\mathcal{L}^+$  satisfaz a equação:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{10}^2 & Ra_0 \\ -\kappa_0^2 & \mathcal{L}_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{10}^+ \\ \theta_{10}^+ \end{pmatrix} = 0. \quad (13.61)$$

As funções que formam a base do espaço nulo de  $\mathcal{L}^+$  são:

$$w_{10}^+ = Ra_0 w_{10} \quad \text{e:} \quad \theta_{10}^+ = -\kappa_0^2 \theta_{10}, \quad (13.62)$$

pois:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{10}^2 & Ra_0 \\ -\kappa_0^2 & \mathcal{L}_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{10}^+ \\ \theta_{10}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{10}^2 & Ra_0 \\ -\kappa_0^2 & \mathcal{L}_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ra_0 w_{10} \\ -\kappa_0^2 \theta_{10} \end{pmatrix},$$

onde obtém-se as duas equações do problema de primeira ordem (Eq. 13.31), ambas iguais a zero:

$$Ra_0 (\mathcal{L}_{10}^2 w_{10} - \kappa_0^2 \theta_{10}) = 0 \quad \text{e:} \quad -\kappa_0^2 (Ra_0 w_{10} + \mathcal{L}_{10} \theta_{10}) = 0$$

A condição de solvabilidade se expressa por:

$$\int_0^1 [\theta_{10} \theta_{10}^+ + (2\mathcal{L}_{10} w_{10} + \theta_{10}) w_{10}^+] dz = 0. \quad (13.63)$$

Substituindo as funções  $w_{10}^+$  e  $\theta_{10}^+$  por seu valor encontra-se:

$$\int_0^1 [-\kappa_0^2 \theta_{10}^2 + (2\mathcal{L}_{10} w_{10} + \theta_{10}) Ra_0 w_{10}] dz = 0. \quad (13.64)$$

Essa condição é satisfeita.

### 13.3.4 Ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)^3$

#### Equação da continuidade

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial v_2}{\partial Y_1} = 0.$$

Substituindo a solução de segunda ordem na equação acima obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial X_1} \left[ A_1^2 E_0^2 u_{22} + 2i\kappa_x E_0 \frac{\partial A_1}{\partial X_1} u_{23} + 2i\kappa_y E_0 \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} u_{23} \right] + \\ \frac{\partial}{\partial Y_1} \left[ A_1^2 E_0^2 v_{22} + 2i\kappa_x E_0 \frac{\partial A_1}{\partial X_1} v_{23} + 2i\kappa_y E_0 \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} v_{23} \right] = 0 \end{aligned}$$

e ainda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} + 2A_1 E_0^2 \frac{\partial A_1}{\partial X_1} u_{22} + 2A_1 E_0^2 \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} v_{22} + \\ 2i\kappa_x E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} u_{23} + 2i\kappa_y E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} u_{23} + 2i\kappa_x E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} v_{23} + 2i\kappa_y E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} v_{23} = 0. \end{aligned}$$

## Equação da vorticidade

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \varepsilon \left[ \nabla^2 \left( \frac{\partial v_y}{\partial X_1} - \frac{\partial v_x}{\partial Y_1} \right) + 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \right) \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \\ \varepsilon^2 \left[ 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \right) \left( \frac{\partial v_y}{\partial X_1} - \frac{\partial v_x}{\partial Y_1} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y_1^2} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \right) \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] = \\ \frac{Ra}{Pr} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( v_j \frac{\partial v_y}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( v_j \frac{\partial v_y}{\partial x_j} \right) + \varepsilon \left( \frac{\partial}{\partial X_1} v_j \frac{\partial v_y}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial Y_1} v_j \frac{\partial v_y}{\partial x_j} \right) \right]. \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis que tornam a equação acima de terceira ordem encontra-se:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left( \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) + \left[ \nabla^2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial X_1} - \frac{\partial u_2}{\partial Y_1} \right) + 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \right) \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] + \\ \left[ 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \right) \left( \frac{\partial v_1}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial Y_1} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y_1^2} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \right) \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] = \\ \frac{Ra}{Pr} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial y} + w_1 \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} + w_1 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( u_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_2 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + w_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial X_1} \left( u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial Y_1} \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \right]. \quad (13.65) \end{aligned}$$

Desenvolve-se apenas os termos que intervém na condição de solvabilidade de terceira ordem, a partir desse ponto (termos ressonantes). Desenvolvendo cada termo da equação acima:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial X_1} - \frac{\partial u_2}{\partial Y_1} \right) \rightarrow \\ \nabla^2 2iE_0 \left[ \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + \kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right) v_{23} - \frac{\partial}{\partial Y_1} \left( \kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + \kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right) u_{23} \right] = \\ 2iE_0 \mathcal{L}_{10} \left[ \kappa_x v_{23} \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + (\kappa_y v_{23} - \kappa_x u_{23}) \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} - \kappa_y u_{23} \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right]. \end{aligned}$$

Cálculo do terceiro termo do membro esquerdo da Eq. 13.65:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \rightarrow 2i \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + \kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right) E_0 v_{23} - 2i \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + \kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right) E_0 u_{23} \\ = 2E_0 \left( \kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + \kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right) (\kappa_y u_{23} - \kappa_x v_{23}) \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \rightarrow 4iE_0 \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + \kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial Y_1} \right) (\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}) \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \rightarrow 4iE_0 \left( \kappa_y^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} + \kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial Y_1} \right) (\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}). \end{aligned}$$

Obtém-se para o terceiro termo do membro esquerdo da Eq. 13.65:

$$2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \right) \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \rightarrow \\ 4iE_0 \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial Y_1} + \kappa_y^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) (\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}).$$

Cálculo do quarto termo do membro esquerdo da Eq. 13.65:

$$\left( \frac{\partial v_1}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial Y_1} \right) = E_0 \left( v_{10} \frac{\partial A_1}{\partial X_1} - u_{10} \frac{\partial A_1}{\partial X_1} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial Y_1} \right) = i\kappa_x E_0 \left( v_{10} \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} - u_{10} \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial Y_1} \right) = i\kappa_y E_0 \left( v_{10} \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} - u_{10} \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) \\ 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \right) \left( \frac{\partial v_1}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial Y_1} \right) = \\ 2iE_0 \left[ \kappa_x v_{10} \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + (\kappa_y v_{10} - \kappa_x u_{10}) \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} - \kappa_y u_{10} \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right].$$

O termo:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y_1^2} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)$$

é igual a zero, pois a componente vertical da vorticidade se anula em primeira ordem.  
Desenvolve-se o termo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( u_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial y} + w_1 \frac{\partial v_2}{\partial z} \right)$$

e guarda-se apenas os termos ressonantes:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( u_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (A_1 E_0 u_{10} + A_1^* E_0^* u_{10}^*) \frac{\partial}{\partial x} (A_1^2 E_0^2 v_{22} + A_1^{*2} E_0^{*2} v_{22}^*) \right] \rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial x} [(A_1 E_0 u_{10} + A_1^* E_0^* u_{10}^*) (2i\kappa_x A_1^2 E_0^2 v_{22} - 2i\kappa_x A_1^{*2} E_0^{*2} v_{22}^*)] \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( u_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \rightarrow -2i\kappa_x^2 |A_1|^2 A_1 u_{10}^* v_{22} + cc \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( v_1 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \rightarrow -2i\kappa_x \kappa_y |A_1|^2 A_1 v_{10}^* v_{22} + cc \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( w_1 \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \rightarrow i\kappa_x |A_1|^2 A_1 w_{10}^* \frac{dv_{22}}{dz} + cc$$

Coletando os três termos acima:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( u_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial y} + w_1 \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \rightarrow \kappa_x |A_1|^2 A_1 \left( -2\kappa_x u_{10}^* - 2\kappa_y v_{10}^* + iw_{10}^* \frac{d}{dz} \right) v_{22} + cc \\ = i\kappa_x |A_1|^2 A_1 \left( 2v_{22} \frac{dw_{10}^*}{dz} + w_{10}^* \frac{dv_{22}}{dz} \right) + cc.$$

Analogamente:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} + w_1 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \longrightarrow i\kappa_y |A_1|^2 A_1 \left( 2u_{22} \frac{dw_{10}^*}{dz} + w_{10}^* \frac{du_{22}}{dz} \right) + cc.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( u_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial y} + w_1 \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} + w_1 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \longrightarrow \\ |A_1|^2 A_1 \left( 2\kappa_x v_{22} \frac{dw_{10}^*}{dz} + \kappa_x w_{10}^* \frac{dv_{22}}{dz} - 2\kappa_y u_{22} \frac{dw_{10}^*}{dz} - \kappa_y w_{10}^* \frac{du_{22}}{dz} \right) = \\ |A_1|^2 A_1 \left[ 2i(\kappa_x v_{22} - \kappa_y u_{22}) \frac{dw_{10}^*}{dz} + iw_{10}^* \frac{d}{dz} (\kappa_x v_{22} - \kappa_y u_{22}) \right] = 0. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o termo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( u_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_2 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right)$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( u_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[ (A_1^2 E_0^2 u_{22} + A_1^{*2} E_0^{*2} u_{22}^*) \frac{\partial}{\partial x} (A_1 E_0 v_{10} + A_1^* E_0^* v_{10}^*) \right] = \\ \frac{\partial}{\partial x} (A_1^2 E_0^2 u_{22} + A_1^{*2} E_0^{*2} u_{22}^*) (i\kappa_x A_1 E_0 v_{10} - i\kappa_x A_1^* E_0^* v_{10}^*). \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( u_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} (-i\kappa_x A_1 |A_1|^2 E_0 u_{22} v_{10}^* + cc) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( u_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \longrightarrow \kappa_x^2 A_1 |A_1|^2 E_0 u_{22} v_{10}^* + cc \end{aligned}$$

Analogamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \longrightarrow \kappa_x \kappa_y A_1 |A_1|^2 E_0 v_{22} v_{10}^* + cc \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( w_2 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \longrightarrow i\kappa_x A_1 |A_1|^2 E_0 w_{22} \frac{\partial v_{10}^*}{\partial z} + cc \end{aligned}$$

Reagrupando os termos ressonantes acima desenvolvidos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( u_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_2 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \longrightarrow \kappa_x A_1 |A_1|^2 E_0 \left[ (\kappa_x u_{22} + \kappa_y v_{22}) v_{10}^* + iw_{22} \frac{\partial v_{10}^*}{\partial z} \right] + cc \\ = i\kappa_x A_1 |A_1|^2 E_0 \left( \frac{1}{2} v_{10}^* \frac{\partial w_{22}}{\partial z} + w_{22} \frac{\partial v_{10}^*}{\partial z} \right) + cc \end{aligned}$$

Desenvolvendo a seguir o termo:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + w_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)$$

e obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left( u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) &\rightarrow \kappa_x \kappa_y |A_1|^2 E_0 u_{22} u_{10}^* + cc \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( v_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) &\rightarrow \kappa_y^2 |A_1|^2 E_0 v_{22} u_{10}^* + cc \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( w_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) &\rightarrow i \kappa_y |A_1|^2 E_0 w_{22} \frac{\partial u_{10}^*}{\partial z} + cc\end{aligned}$$

Reagrupando os termos ressonantes acima desenvolvidos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left( u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + w_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) &\rightarrow \kappa_y |A_1|^2 E_0 \left[ (\kappa_x u_{22} + \kappa_y v_{22}) u_{10}^* + i w_{22} \frac{\partial u_{10}^*}{\partial z} \right] + cc \\ &= i \kappa_y |A_1|^2 E_0 \left( \frac{1}{2} u_{10}^* \frac{\partial w_{22}}{\partial z} + w_{22} \frac{\partial u_{10}^*}{\partial z} \right) + cc.\end{aligned}$$

Têm-se então:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( u_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_2 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + w_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) &\rightarrow \\ i A_1 |A_1|^2 E_0 \left[ \kappa_x \left( \frac{1}{2} v_{10}^* \frac{\partial w_{22}}{\partial z} + w_{22} \frac{\partial v_{10}^*}{\partial z} \right) - \kappa_y \left( \frac{1}{2} u_{10}^* \frac{\partial w_{22}}{\partial z} + w_{22} \frac{\partial u_{10}^*}{\partial z} \right) \right] + cc. &= \\ i A_1 |A_1|^2 E_0 \left[ \frac{1}{2} (\kappa_x v_{10}^* - \kappa_y u_{10}^*) \frac{\partial w_{22}}{\partial z} + w_{22} \frac{\partial}{\partial z} (\kappa_x v_{10}^* - \kappa_y u_{10}^*) \right] + cc. &= 0.\end{aligned}$$

Os termos de:

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \left( u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial Y_1} \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)$$

não intervêm na condição de solvabilidade em terceira ordem e por isso, não são determinados. Coletando todos os termos ressonantes da equação da vorticidade em terceira ordem obtém-se:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \left( \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) &\rightarrow 2i E_0 \mathcal{L}_{10} \left[ \kappa_x v_{23} \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + (\kappa_y v_{23} - \kappa_x u_{23}) \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} - \kappa_y u_{23} \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right] + \\ &\quad 4i E_0 \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} + \kappa_y^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) (\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}) + \\ &\quad 2i E_0 \left[ \kappa_x v_{10} \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + (\kappa_y v_{10} - \kappa_x u_{10}) \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} - \kappa_y u_{10} \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right].\end{aligned}$$

Reagrupando os termos:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \left( \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) &\rightarrow 2i E_0 \left[ \kappa_x \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} (\mathcal{L}_{10} v_{23} + 2\kappa_x (\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}) + v_{10}) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} [\mathcal{L}_{10} (\kappa_y v_{23} - \kappa_x u_{23}) + 4\kappa_x \kappa_y (\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}) + (\kappa_y v_{10} - \kappa_x u_{10})] - \right. \\ &\quad \left. \kappa_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} (\mathcal{L}_{10} u_{23} - 2\kappa_y (\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}) + u_{10}) \right]\end{aligned}$$

A equação acima se simplifica, levando em conta as Eqs. 13.58 e 13.59 têm-se que:

$$\begin{aligned} 2\kappa_x(\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}) + v_{10} &= 2\kappa_y(\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}) + u_{10} = 0 \\ 4\kappa_x\kappa_y(\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}) + (\kappa_y v_{10} - \kappa_x u_{10}) &= \\ \kappa_x[2\kappa_y(\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}) - u_{10}] + \kappa_y[2\kappa_x(\kappa_x v_{23} - \kappa_y u_{23}) + v_{10}] &= 0. \end{aligned}$$

A equação da vorticidade em terceira ordem, forçada apenas pelos termos ressonantes, reduz-se a:

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) = 2iE_0 \mathcal{L}_{10} \left[ \kappa_x v_{23} \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + (\kappa_y v_{23} - \kappa_x u_{23}) \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} - \kappa_y u_{23} \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right]$$

### Equação da componente vertical da velocidade

$$\begin{aligned} \nabla^4 v_z + \nabla_2^2 T + \varepsilon \left[ 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial x^3 \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial y^3 \partial Y_1} + 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial x^2 \partial y \partial Y_1} + 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial y^2 \partial x \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial z^2 \partial y \partial Y_1} + \right. \\ \left. 4 \frac{\partial^4 v_z}{\partial z^2 \partial x \partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial Y_1} \right] + \varepsilon^2 \left( 6 \frac{\partial^4 v_z}{\partial x^2 \partial X_1^2} + 6 \frac{\partial^4 v_z}{\partial y^2 \partial Y_1^2} + 2 \frac{\partial^4 v_z}{\partial x^2 \partial Y_1^2} + \right. \\ \left. 2 \frac{\partial^4 v_z}{\partial y^2 \partial X_1^2} + 8 \frac{\partial^4 v_z}{\partial x \partial y \partial X_1 \partial Y_1} + 2 \frac{\partial^4 v_z}{\partial z^2 \partial X_1^2} + 2 \frac{\partial^4 v_z}{\partial z^2 \partial Y_1^2} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \nabla^2 v_z + \frac{\partial^2 T}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y_1^2} \right) = \\ \frac{Ra}{Pr} \left[ \nabla^2 \left( v_i \frac{\partial v_z}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right]. \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis que tornam todos os termos da equação da componente vertical da velocidade de terceira ordem obtém-se:

$$\begin{aligned} \nabla^4 w_3 + \nabla_2^2 \theta_3 &= - \left[ 4 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^3 \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^2 \partial x \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 w_2}{\partial z^2 \partial x \partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^3 \partial Y_1} + \right. \\ \left. 4 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y \partial Y_1} + 4 \frac{\partial^4 w_2}{\partial z^2 \partial y \partial Y_1} + 2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y \partial Y_1} \right] - \left( 6 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial X_1^2} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^2 \partial X_1^2} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^2 \partial X_1^2} + \right. \\ \left. 8 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x \partial y \partial X_1 \partial Y_1} + 6 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^2 \partial Y_1^2} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial Y_1^2} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^2 \partial Y_1^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \nabla^2 w_1 - \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial Y_1^2} \right) + \\ \frac{Ra}{Pr} \left[ \nabla^2 \left( u_1 \frac{\partial w_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial w_2}{\partial x} + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + \left( u_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} + w_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) - \right. \\ \left. 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) - \right. \\ \left. 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) - \right. \\ \left. 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_2}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned}$$

Desenvolvendo os termos ressonantes da equação da componente vertical da velocidade, que

intervém na condição de solvabilidade em terceira ordem, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& 4 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^3 \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^2 \partial x \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 w_2}{\partial z^2 \partial x \partial X_1} \longrightarrow \\
& \left[ 4 \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial x \partial X_1} \right] \left( 2i\kappa_x E_0 \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + 2i\kappa_y E_0 \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right) w_{23} \\
& - \left[ 4 \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial x \partial X_1} \right] 2i\kappa_x E_0 \frac{\partial A_1}{\partial X_1} w_{23} = \\
& - \left( 8\kappa_x^4 E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + 8\kappa_x^2 \kappa_y^2 E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} - 8\kappa_x^2 E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} \frac{\partial}{\partial z} \right) w_{23} = 8\kappa_x^2 E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} \mathcal{L}_{10} w_{23} \\
& - \left[ 4 \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial x \partial X_1} \right] 2i\kappa_y E_0 \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} w_{23} = 8\kappa_x \kappa_y E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} \mathcal{L}_{10} w_{23} \\
& - \left[ 4 \frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial Y_1} + 4 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y \partial Y_1} + 4 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial y \partial Y_1} \right] 2i\kappa_x E_0 \frac{\partial A_1}{\partial X_1} w_{23} = 8\kappa_x \kappa_y E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} \mathcal{L}_{10} w_{23} \\
& - \left[ 4 \frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial Y_1} + 4 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y \partial Y_1} + 4 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial y \partial Y_1} \right] 2i\kappa_y E_0 \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} w_{23} = 8\kappa_y^2 E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \mathcal{L}_{10} w_{23} \\
& - \left[ 4 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^3 \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^2 \partial x \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 w_2}{\partial z^2 \partial x \partial X_1} + 4 \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^3 \partial Y_1} + 4 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y \partial Y_1} + 4 \frac{\partial^4 w_2}{\partial z^2 \partial y \partial Y_1} \right] \longrightarrow \\
& 8E_0 \mathcal{L}_{10} \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} + \kappa_y^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) w_{23} = 8E_0 (\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla)^2 \mathcal{L}_{10} w_{23} \\
& -2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x \partial X_1} = -2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} \left[ 2iE_0 \left( \kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + \kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right) \right] \theta_{23} \\
& -2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x \partial X_1} = \left( 4\kappa_x^2 E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + 4\kappa_x \kappa_y E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} \right) \theta_{23} \\
& -2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y \partial Y_1} = \left( 4\kappa_x \kappa_y E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} + 4\kappa_y^2 E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) \theta_{23} \\
& - \left( 2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x \partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y \partial Y_1} \right) = 4E_0 \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} + 4\kappa_y^2 E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) \theta_{23} \\
& \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \nabla^2 w_1 = \frac{1}{Pr} E_0 \frac{\partial A_1}{\partial \tau_1} \mathcal{L}_{10} w_{10} \\
& - \left( \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial Y_1^2} \right) = -E_0 \left( \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) \theta_{10} \\
& - \left( 6 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial X_1^2} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^2 \partial X_1^2} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^2 \partial X_1^2} + \right) = \\
& \left( 6\kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + 2\kappa_y^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} - 2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_0 w_{10} = 4\kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} - 2E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} \mathcal{L}_{10} w_{10} \\
& -8 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x \partial y \partial X_1 \partial Y_1} = 8\kappa_x \kappa_y w_{10} \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( 6 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^2 \partial Y_1^2} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial Y_1^2} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^2 \partial Y_1^2} + \right) = \\
& \left( 6 \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} + 2 \kappa_y^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} - 2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_0 w_{10} = 4 \kappa_y^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} - 2 E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \mathcal{L}_{10} w_{10} - \\
& \left( 6 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial X_1^2} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^2 \partial X_1^2} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^2 \partial X_1^2} + 8 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x \partial y \partial X_1 \partial Y_1} + 6 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^2 \partial Y_1^2} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial Y_1^2} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^2 \partial Y_1^2} \right) \\
& = 4 E_0 \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + 2 \kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} \kappa_y^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) w_{10} - 2 E_0 \left( \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) \mathcal{L}_{10} w_{10}
\end{aligned}$$

Em prosseguimento, desenvolve-se os termos de:

$$\frac{Ra}{Pr} \left[ \nabla^2 \left( v_i \frac{\partial v_z}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right].$$

Retém-se apenas os termos que intervém na equação que resulta da imposição da condição de solvabilidade em terceira ordem.

$$\begin{aligned}
\nabla^2 u_1 \frac{\partial w_2}{\partial x} & \longrightarrow \nabla^2 (A_1 E_0 u_{10} + A_1^* E_0^* u_{10}^*) (2i \kappa_x A_1^2 E_0^2 w_{22} - 2i \kappa_x A_1^* 2 E_0^{2*} w_{22}^*) \longrightarrow \\
\nabla^2 (2i \kappa_x A_1 |A_1|^2 E_0 u_{10}^* w_{22} + cc) & = 2i \kappa_x A_1 |A_1|^2 E_0 \mathcal{L} (u_{10}^* w_{22}) + cc \\
\nabla^2 v_1 \frac{\partial w_2}{\partial y} & \longrightarrow 2i \kappa_y A_1 |A_1|^2 E_0 \mathcal{L} (v_{10}^* w_{22}) + cc \\
\nabla^2 w_1 \frac{\partial w_2}{\partial z} & \longrightarrow \nabla^2 (A_1 E_0 w_{10} + A_1^* E_0^* w_{10}^*) \left( A_1^2 E_0^2 w_{22} \frac{\partial w_{22}}{\partial z} - A_1^* 2 E_0^{2*} w_{22}^* \frac{\partial w_{22}^*}{\partial z} \right) \longrightarrow \\
\nabla^2 \left( A_1 |A_1|^2 E_0 w_{10}^* \frac{\partial w_{22}}{\partial z} + cc \right) & = A_1 |A_1|^2 E_0 \mathcal{L}_{10} \left( w_{10}^* \frac{\partial w_{22}}{\partial z} \right) + cc.
\end{aligned}$$

Reagrupoando os termos ressonantes e tomando o complexo conjugado da Eq. 13.26 obtém-se sucessivamente:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \left( u_1 \frac{\partial w_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial w_2}{\partial y} + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) & = A_1 |A_1|^2 E_0 \mathcal{L}_{10} \left[ \left( 2i \kappa_x u_{10}^* + 2i \kappa_y v_{10}^* + w_{10}^* \frac{\partial}{\partial z} \right) w_{22} \right] \\
& = A_1 |A_1|^2 E_0 \mathcal{L}_{10} \left( 2w_{22} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} + w_{10}^* \frac{\partial w_{22}^*}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

Em prosseguimento, desenvolve-se os termos de:

$$\nabla^2 \left( u_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w_1}{\partial y} + w_2 \frac{\partial w_1}{\partial z} \right).$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 u_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} & \longrightarrow (A_1^2 E_0^2 u_{22} + A_1^{*2} E_0^{*2} u_{22}^*) (i \kappa_x A_1 E_0 w_{10} - i \kappa_x A_1^* E_0^* w_{10}^*) \longrightarrow \\
\nabla^2 (i \kappa_x |A_1|^2 A_1 E_0 u_{22} w_{10}^* + cc) & = -i \kappa_x A_1 |A_1|^2 A_1 E_0 \mathcal{L}_{10} u_{22} w_{10}^* + cc \\
\nabla^2 v_2 \frac{\partial w_1}{\partial y} & \longrightarrow -i \kappa_y A_1 |A_1|^2 A_1 E_0 \mathcal{L}_{10} v_{22} w_{10}^* + cc \\
\nabla^2 w_2 \frac{\partial w_1}{\partial z} & \longrightarrow A_1 |A_1|^2 A_1 E_0 \mathcal{L}_{10} v_{22} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} + cc
\end{aligned}$$

Usando a Eq. 13.53 obtém-se:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left( u_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w_1}{\partial y} + w_2 \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) &\longrightarrow |A_1|^2 A_1 E_0 \mathcal{L}_{10} \left( -i\kappa_x u_{22} - i\kappa_y v_{22} + w_{22} \frac{\partial}{\partial z} \right) w_{10}^* + cc \\ &= |A_1|^2 A_1 E_0 \mathcal{L}_{10} \left( \frac{w_{10}^*}{2} \frac{\partial w_{22}}{\partial z} + w_{22} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} \right) + cc \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{Ra}{Pr} \left[ \nabla^2 \left( u_1 \frac{\partial w_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial w_2}{\partial y} + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) + \nabla^2 \left( u_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w_1}{\partial y} + w_2 \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) \right] &\longrightarrow \\ \frac{Ra}{Pr} A_1 |A_1|^2 E_0 \mathcal{L}_{10} \left( 2w_{22} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} + w_{10}^* \frac{\partial w_{22}}{\partial z} + \frac{w_{10}^*}{2} \frac{\partial w_{22}}{\partial z} + w_{22} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} \right) &= \\ \frac{Ra}{Pr} A_1 |A_1|^2 E_0 \mathcal{L}_{10} \left( 3w_{22} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} + \frac{3}{2} w_{10}^* \frac{\partial w_{22}}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Desenvolvendo o termo:

$$\begin{aligned} -\frac{Ra}{Pr} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) &= -\frac{Ra}{Pr} \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_2}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

e retendo apenas os termos que intervém na condição de solvabilidade em terceira ordem encontra-se:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) &\longrightarrow \\ 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ (i\kappa_x A_1 E_0 u_{10} - i\kappa_x A_1^* E_0^* u_{10}^*) (2i\kappa_x A_1^2 E_0^2 u_{22} - 2i\kappa_x A_1^{*2} E_0^{*2} u_{22}^*) \right] &= \\ 2 \frac{\partial}{\partial z} (2\kappa_x^2 A_1 |A_1|^2 E_0 u_{10}^* u_{22}) + cc &= 4\kappa_x^2 |A_1|^2 A_1 E_0 \frac{\partial}{\partial z} (u_{10}^* u_{22}) + cc \\ 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) &\longrightarrow 4\kappa_y^2 |A_1|^2 A_1 E_0 \frac{\partial}{\partial z} (v_{10}^* v_{22}) + cc \\ 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) &\longrightarrow 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( A_1 E_0 \frac{\partial w_{10}}{\partial z} + A_1^* E_0^* \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} \right) \left( A_1^2 E_0^2 \frac{\partial w_{22}}{\partial z} + A_1^{*2} E_0^{*2} \frac{\partial w_{22}^*}{\partial z} \right) = \\ 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( |A_1|^2 A_1 E_0 \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} \frac{\partial w_{22}}{\partial z} \right) + cc &= 2 |A_1|^2 A_1 E_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} \frac{\partial w_{22}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) &\longrightarrow 4\kappa_x \kappa_y |A_1|^2 A_1 E_0 \frac{\partial}{\partial z} (u_{10}^* v_{22}) + cc \\ 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) &\longrightarrow 4\kappa_x \kappa_y |A_1|^2 A_1 E_0 \frac{\partial}{\partial z} (v_{10}^* u_{22}) + cc \\ 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) &\longrightarrow 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( A_1 E_0 \frac{\partial w_{10}}{\partial z} + A_1^* E_0^* \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} \right) (2i\kappa_x A_1^2 E_0^2 w_{22} - 2i\kappa_x A_1^{*2} E_0^{*2} w_{22}^*) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial}{\partial z} \left( 2i\kappa_x |A_1|^2 A_1 E_0^2 w_{22} \frac{\partial u_{10}^*}{\partial z} \right) + cc &= 4i\kappa_x |A_1|^2 A_1 E_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( w_{22} \frac{\partial u_{10}^*}{\partial z} \right) + cc \\
2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) &\longrightarrow -2i\kappa_x |A_1|^2 A_1 E_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( w_{10} \frac{\partial u_{22}^*}{\partial z} \right) \\
2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) &\longrightarrow 4i\kappa_y |A_1|^2 A_1 E_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( w_{22} \frac{\partial v_{10}^*}{\partial z} \right) \\
2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_2}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) &\longrightarrow -2i\kappa_y |A_1|^2 A_1 E_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( w_{10} \frac{\partial v_{22}^*}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

Reagrupando os termos obtém-se:

$$\begin{aligned}
-\frac{Ra}{Pr} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) &= \\
\frac{Ra}{Pr} A_1 |A_1|^2 E_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( 4\kappa_x^2 u_{10}^* u_{22} + 4\kappa_y^2 v_{10}^* v_{22} + 2 \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} \frac{\partial w_{22}^*}{\partial z} + 4\kappa_x \kappa_y u_{10}^* v_{22} + 4\kappa_y^2 v_{10}^* u_{22} + \right. \\
&\quad \left. 4i\kappa_x w_{22} \frac{\partial u_{10}^*}{\partial z} - 2i\kappa_x w_{10}^* \frac{\partial u_{22}}{\partial z} + 4i\kappa_y w_{22} \frac{\partial v_{10}^*}{\partial z} - 2i\kappa_y w_{10}^* \frac{\partial v_{22}}{\partial z} \right) = \\
\frac{Ra}{Pr} A_1 |A_1|^2 E_0 \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2\kappa_x \left( 2\kappa_x u_{10}^* + 2\kappa_y v_{10}^* - iw_{10}^* \frac{\partial}{\partial z} \right) u_{22} + \right. \\
&\quad \left. 2\kappa_y \left( 2\kappa_x u_{10}^* + 2\kappa_y v_{10}^* - iw_{10}^* \frac{\partial}{\partial z} \right) v_{22} + 2 \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} \frac{\partial w_{22}^*}{\partial z} + 4i\kappa_x w_{22} \frac{\partial u_{10}^*}{\partial z} + 4i\kappa_y w_{22} \frac{\partial v_{10}^*}{\partial z} \right]
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o termo:

$$\begin{aligned}
2\kappa_x \left( 2\kappa_x u_{10}^* + 2\kappa_y v_{10}^* - iw_{10}^* \frac{\partial}{\partial z} \right) u_{22} + 2\kappa_y \left( 2\kappa_x u_{10}^* + 2\kappa_y v_{10}^* - iw_{10}^* \frac{\partial}{\partial z} \right) v_{22} &= \\
2i\kappa_x \left( -2u_{22} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} - w_{10}^* \frac{\partial u_{22}}{\partial z} \right) + 2i\kappa_y \left( -2v_{22} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} - w_{10}^* \frac{\partial v_{22}}{\partial z} \right) &= \\
-2 \left[ (2i\kappa_x u_{22} + 2i\kappa_y v_{22}) \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} + w_{10}^* \frac{\partial}{\partial z} (i\kappa_x u_{22} + i\kappa_y v_{22}) \right] &= 2 \frac{\partial w_{22}}{\partial z} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} + w_{10}^* \frac{\partial^2 w_{22}}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$

Têm-se portanto, que:

$$\begin{aligned}
-\frac{Ra}{Pr} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) &= -\frac{Ra}{Pr} A_1 |A_1|^2 E_0 \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2 \frac{\partial w_{22}}{\partial z} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} + w_{10}^* \frac{\partial^2 w_{22}}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} \frac{\partial w_{22}^*}{\partial z} + \right. \\
&\quad \left. 4w_{22} \frac{\partial}{\partial z} (i\kappa_x u_{22} + i\kappa_y v_{22}) \right] = -\frac{Ra}{Pr} A_1 |A_1|^2 E_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( 4 \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} \frac{\partial w_{22}^*}{\partial z} + w_{10}^* \frac{\partial^2 w_{22}}{\partial z^2} + 4w_{22} \frac{\partial^2 w_{10}^*}{\partial z^2} \right)
\end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned}
\frac{Ra}{Pr} \left[ \nabla^2 \left( v_i \frac{\partial v_z}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] &= \frac{Ra}{Pr} A_1 |A_1|^2 E_0 \left[ \mathcal{L}_{10} \left( 3w_{22} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} + \frac{3}{2} w_{10}^* \frac{\partial w_{22}^*}{\partial z} \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial}{\partial z} \left( 4 \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} \frac{\partial w_{22}^*}{\partial z} + w_{10}^* \frac{\partial^2 w_{22}}{\partial z^2} + 4w_{22} \frac{\partial^2 w_{10}^*}{\partial z^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

Reagrupando todos os termos ressonantes da equação da componente vertical da velocidade em terceira ordem, obtém-se:

$$\begin{aligned}\nabla^4 w_3 + \nabla_2^2 \theta_3 &= 8E_0 \mathcal{L}_{10} \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} + \kappa_y^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) w_{23} + \\ &4E_0 \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} + 4\kappa_y^2 E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) \theta_{23} + \frac{1}{Pr} E_0 \frac{\partial A_1}{\partial \tau_1} \mathcal{L}_{10} w_{10} - \\ &E_0 \left( \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) \theta_{10} + 4E_0 \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + \kappa_y^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) w_{10} - \\ &2E_0 \left( \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) \mathcal{L}_{10} w_{10} + \frac{Ra}{Pr} A_1 |A_1|^2 E_0 \left[ \mathcal{L}_{10} \left( 3w_{22} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} + \frac{3}{2} w_{10}^* \frac{\partial w_{22}^*}{\partial z} \right) - \right. \\ &\left. \frac{\partial}{\partial z} \left( 4 \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} \frac{\partial w_{22}^*}{\partial z} + w_{10}^* \frac{\partial^2 w_{22}}{\partial z^2} + 4w_{22} \frac{\partial^2 w_{10}^*}{\partial z^2} \right) \right]\end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}\nabla^4 w_3 + \nabla_2^2 \theta_3 &= 4E_0 \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} + \kappa_y^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) (2\mathcal{L}_{10} w_{23} + \theta_{23} + \theta_{10}) + \\ &\frac{1}{Pr} E_0 \frac{\partial A_1}{\partial \tau_1} \mathcal{L}_{10} w_{10} - E_0 \left( \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) (2\mathcal{L}_{10} w_{10} + \theta_{10}) + \frac{Ra}{Pr} A_1 |A_1|^2 E_0 \left[ \mathcal{L}_{10} \left( 3w_{22} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{3}{2} w_{10}^* \frac{\partial w_{22}^*}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( 4 \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} \frac{\partial w_{22}^*}{\partial z} + w_{10}^* \frac{\partial^2 w_{22}}{\partial z^2} + 4w_{22} \frac{\partial^2 w_{10}^*}{\partial z^2} \right) \right]\end{aligned}$$

## Equação da temperatura

$$\begin{aligned}Ra_0 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} + \varepsilon Ra_0 \left( v_x \frac{\partial T}{\partial X_1} + v_y \frac{\partial T}{\partial Y_1} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial T}{\partial \tau_1} + Ra_1 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) &= \\ \nabla^2 T + 2\varepsilon \left( \frac{\partial T}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial T}{\partial y \partial Y_1} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial T}{\partial X_1} + \frac{\partial T}{\partial Y_1} \right) &\end{aligned}$$

Substituindo as variáveis que tornam todos os termos da equação acima de terceira ordem encontra-se:

$$\begin{aligned}Ra_0 \left( u_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} + u_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + w_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + w_3 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right) + Ra_2 w_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} + \\ Ra_0 \left( u_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1} + v_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial Y_1} \right) + \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau_1} &= \nabla^2 \theta_3 + 2 \left( \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y \partial Y_1} \right) + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial Y_1^2}.\end{aligned}$$

Desenvolvendo os termos ressonantes da equação acima obtém-se:

$$\begin{aligned}Ra_0 \left( u_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} + u_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + w_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + w_3 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right) &= \\ Ra_0 |A_1|^2 A_1 E_0 \left( 2\theta_{22} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} + w_{10}^* \frac{\partial \theta_{22}}{\partial z} + w_{10} \frac{\partial \theta_{21}}{\partial z} + \frac{1}{2} \theta_{10}^* \frac{\partial w_{22}}{\partial z} + w_{22} \frac{\partial \theta_{10}^*}{\partial z} \right) - Ra_0 w_3 & \\ Ra_2 w_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} &= -Ra_2 A_1 E_0 w_{10}\end{aligned}$$

O termo:

$$Ra_0 \left( u_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1} + v_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial Y_1} \right)$$

não dá contribuições ressonantes à equação da temperatura em terceira ordem. Em prosseguimento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau_1} &= E_0 \theta_{10} \frac{\partial A_1}{\partial \tau_1} \\ 2 \left( \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y \partial Y_1} \right) &= 2 \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y_1} \right) 2iE_0 \left( \kappa_x \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + \kappa_y \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} \right) \theta_{23} \right] = \\ -4E_0 \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial^2 X_1} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} + \kappa_y^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial^2 Y_1} \right) \theta_{23} \\ \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial^2 X_1} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial^2 Y_1} &= E_0 \theta_{10} \frac{\partial^2 A_1}{\partial^2 X_1} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial^2 Y_1}. \end{aligned}$$

Reagrupando todos os termos ressonantes da equação da temperatura em terceira ordem encontra-se:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \theta_3 + Ra_0 w_3 &= \\ Ra_0 |A_1|^2 A_1 E_0 \left( 2\theta_{22} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} + w_{10}^* \frac{\partial \theta_{22}}{\partial z} + w_{10} \frac{\partial \theta_{21}}{\partial z} + \frac{1}{2} \theta_{10}^* \frac{\partial w_{22}}{\partial z} + w_{22} \frac{\partial \theta_{10}^*}{\partial z} \right) - \\ Ra_2 A_1 E_0 w_{10} + E_0 \theta_{10} \frac{\partial A_1}{\partial \tau_1} + 4E_0 \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial^2 X_1} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} + \kappa_y^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial^2 Y_1} \right) \theta_{23} - \\ E_0 \theta_{10} \frac{\partial^2 A_1}{\partial^2 X_1} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial^2 Y_1}. \end{aligned}$$

Em resumo, as equações da continuidade, da componente vertical da vorticidade e da componente vertical da velocidade, forçadas apenas pelos termos ressonantes, são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} + 2A_1 E_0^2 \frac{\partial A_1}{\partial X_1} u_{22} + 2A_1 E_0^2 \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} v_{22} + 2i\kappa_x E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} u_{23} + \\ 2i\kappa_y E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} u_{23} + 2i\kappa_x E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} v_{23} + 2i\kappa_y E_0 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} v_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (13.66)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left( \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) &= \\ 2iE_0 \mathcal{L}_{10} \left[ \kappa_x v_{23} \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + (\kappa_y v_{23} - \kappa_x u_{23}) \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} - \kappa_y u_{23} \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right] & \end{aligned} \quad (13.67)$$

$$\begin{aligned} \nabla^4 w_3 + \nabla_2^2 \theta_3 &= 4E_0 \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + \kappa_y^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) (2\mathcal{L}_{10} w_{23} + \theta_{23} + \theta_{10}) + \\ \frac{1}{Pr} E_0 \frac{\partial A_1}{\partial \tau_1} \mathcal{L}_{10} w_{10} - E_0 \left( \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2} \right) (2\mathcal{L}_{10} w_{10} + \theta_{10}) + \frac{Ra}{Pr} A_1 |A_1|^2 E_0 \left[ \mathcal{L}_{10} \left( 3w_{22} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{2} w_{10}^* \frac{\partial w_{22}^*}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( 4 \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} \frac{\partial w_{22}^*}{\partial z} + w_{10}^* \frac{\partial^2 w_{22}}{\partial z^2} + 4w_{22} \frac{\partial^2 w_{10}^*}{\partial z^2} \right) \right] & \end{aligned} \quad (13.68)$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \theta_3 + Ra_0 w_3 &= \\
Ra_0 |A_1|^2 A_1 E_0 \left( 2\theta_{22} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} + w_{10}^* \frac{\partial \theta_{22}}{\partial z} + w_{10} \frac{\partial \theta_{21}}{\partial z} + \frac{1}{2} \theta_{10}^* \frac{\partial w_{22}}{\partial z} + w_{22} \frac{\partial \theta_{10}^*}{\partial z} \right) - \\
Ra_2 A_1 E_0 w_{10} + E_0 \theta_{10} \frac{\partial A_1}{\partial \tau_1} + 4E_0 \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial^2 X_1} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} + \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial^2 Y_1} \right) \theta_{23} - \\
E_0 \theta_{10} \frac{\partial^2 A_1}{\partial^2 X_1} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial^2 Y_1}.
\end{aligned} \tag{13.69}$$

### 13.4 Equações de Ginzburg-Landau

Procura-se uma solução particular das equações 13.68 a 13.69 sob a forma:

$$\begin{pmatrix} w_3 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = A_{31} E_0 \begin{pmatrix} w_{31} \\ \theta_{31} \end{pmatrix}.$$

Substituindo-se essa forma nas Eqs. 13.68 a 13.69 a obtém-se:

$$\begin{aligned}
A_{31} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{10}^2 & -4\kappa_0^2 \\ Ra_0 & \mathcal{L}_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{31} \\ w_{31} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_1 \\ G_1 \end{pmatrix} |A_1|^2 A_1 + \\
\begin{pmatrix} F_2 \\ G_2 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial^2 X_1} + \begin{pmatrix} F_3 \\ G_3 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} + \begin{pmatrix} F_4 \\ G_4 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial^2 Y_1} + \begin{pmatrix} F_5 \\ G_5 \end{pmatrix} A_1 - \begin{pmatrix} F_6 \\ G_6 \end{pmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial \tau_1}, \tag{13.70}
\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{Ra}{Pr} \left[ \mathcal{L}_{10} \left( 3w_{22} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} + \frac{3}{2} w_{10}^* \frac{\partial w_{22}^*}{\partial z} \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial}{\partial z} \left( 4 \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} \frac{\partial w_{22}^*}{\partial z} + w_{10}^* \frac{\partial^2 w_{22}}{\partial z^2} + 4w_{22} \frac{\partial^2 w_{10}^*}{\partial z^2} \right) \right] \\
G_1 &= Ra_0 \left( 2\theta_{22} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial z} + w_{10}^* \frac{\partial \theta_{22}}{\partial z} + w_{10} \frac{\partial \theta_{21}}{\partial z} + \frac{1}{2} \theta_{10}^* \frac{\partial w_{22}}{\partial z} + w_{22} \frac{\partial \theta_{10}^*}{\partial z} \right) \\
F_2 &= 4\kappa_x^2 (w_{10} + 2\mathcal{L}_{10} w_{23} + \theta_{23}) - 2\mathcal{L}_{10} w_{10} - \theta_{10} \\
G_2 &= 4\kappa_x^2 \theta_{23} - \theta_{10} \\
F_3 &= 8\kappa_x \kappa_y (2\mathcal{L}_{10} w_{23} + \theta_{23} + w_{10}) \\
G_3 &= 8\kappa_x \kappa_y \theta_{23} \\
F_4 &= 4\kappa_y^2 (w_{10} + 2\mathcal{L}_{10} w_{23} + \theta_{23}) + 2\mathcal{L}_{10} w_{10} - \theta_{10} \\
G_4 &= 4\kappa_y^2 \theta_{23} - \theta_{10} \\
F_5 &= 0 \\
G_5 &= -Ra_2 w_{10} \\
F_6 &= -\frac{1}{Pr} \mathcal{L}_{10} w_{10} \\
G_6 &= -\theta_{10}.
\end{aligned}$$

A Eq. 13.70, contendo um operador singular no membro esquerdo e forçada por um termo ressonante, admite soluções se o vetor que constitui o membro direito da mesma pertencer

ao subespaço varrido pelas colunas do operador. A equação pode ser reescrita na forma:

$$A_{31} \begin{pmatrix} w_{31} \\ \theta_{31} \end{pmatrix} = \mathbf{q}.$$

A condição de solvabilidade acima enunciada se efetiva se o vetor  $\mathbf{q}$  for ortogonal ao vetor  $\mathbf{v}$ , que gera o espaço nulo do operador do membro esquerdo da Eq. 13.70 (Alternativa de Fredholm – ver Sec. D.1.12). O vetor  $\mathbf{v}$ , dado por:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} w_{10}^+ \\ \theta_{10}^+ \end{pmatrix},$$

é determinado de modo a satisfazer à Eq. 13.61. A imposição da condição de solvabilidade,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{q} = 0$ , à Eq. 13.70 conduz à equação abaixo:

$$\alpha_6 \frac{\partial A_1}{\partial \tau_1} = Ra_2 A_1 + \alpha_1 |A_1|^2 A_1 + \alpha_2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X_1 \partial Y_1} + \alpha_4 \frac{\partial^2 A_1}{\partial Y_1^2}, \quad (13.71)$$

onde:

$$\alpha_i = \int_0^1 (F_i w_{10}^+ + G_i \theta_{10}^+) dz.$$

Nesse ponto do desenvolvimento, pode-se retornar às variáveis originais rápidas de espaço, tempo e amplitude do modo instável considerado. Multiplicando a Eq. 13.71 por  $\varepsilon^3$  obtém-se:

$$\alpha_6 \frac{\partial \varepsilon A_1}{\partial \tau_1 / \varepsilon^2} = \varepsilon^2 Ra_2 \varepsilon A_1 + \alpha_1 |\varepsilon^2 A_1|^2 \varepsilon A_1 + \alpha_2 \frac{\partial^2 \varepsilon A_1}{\partial X_1^2 / \varepsilon^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 \varepsilon A_1}{\partial X_1 \partial Y_1 / \varepsilon^2} + \alpha_4 \frac{\partial^2 \varepsilon A_1}{\partial Y_1^2 / \varepsilon^2},$$

Observando que  $X_1 = \varepsilon x$ ,  $Y_1 = \varepsilon y$ ,  $\tau_1 = \varepsilon^2 t$ ,  $A = \varepsilon A_1$  e que  $Ra - Ra_0 = \varepsilon^2 Ra_2$ , reescreve-se a Eq. 13.71 sob a forma:

$$\tau_0 \frac{\partial A}{\partial t} = (Ra - Ra_0) A - g_D |A|^2 A + D_x \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y^2} + D_y \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \quad (13.72)$$

onde  $\tau_0 = \alpha_6$ ,  $g = \alpha_1$ ,  $D_x = \alpha_2$ ,  $D_{xy} = \alpha_3$  e  $D_y = \alpha_4$ . Mostra-se a seguir que  $D_x = D\kappa_x^2$ ,  $D_{xy} = 2D\kappa_x\kappa_y$  e  $D_y = D\kappa_y^2$ . O coeficiente  $\alpha_2$  é dado por:

$$\begin{aligned} D_x &= \int_0^1 (F_2 w_{10}^+ + G_2 \theta_{10}^+) dz = \int_0^1 [4\kappa_x^2 (w_{10} + 2\mathcal{L}_{10} w_{23} + \theta_{23}) w_{10}^+ + 4\theta_{23} \theta_{10}^+] dz \\ &\quad - \int_0^1 [(2\mathcal{L}_{10} w_{10} + \theta_{10}) w_{10}^+ \theta_{10} \theta_{10}^+] dz. \end{aligned}$$

A segunda integral do último membro da equação acima é igual a zero em virtude da condição de solvabilidade em segunda ordem (Eq. 13.63). O coeficiente  $D_x$  é portanto, dado por:

$$D_x = D\kappa_x^2 = \kappa_x^2 \int_0^1 [4\kappa_x^2 (w_{10} + 2\mathcal{L}_{10} w_{23} + \theta_{23}) w_{10}^+ + 4\theta_{23} \theta_{10}^+] dz.$$

Analogamente, o coeficiente  $D_y$  é dado por:

$$D_y = D\kappa_x^2 = \kappa_y^2 \int_0^1 [4\kappa_x^2 (w_{10} + 2\mathcal{L}_{10}w_{23} + \theta_{23}) w_{10}^+ + 4\theta_{23}\theta_{10}^+] dz.$$

Quanto ao coeficiente  $D_{xy}$ , têm-se:

$$D_{xy} = 2D\kappa_x\kappa_y = 2\kappa_x\kappa_y \int_0^1 [4\kappa_x^2 (w_{10} + 2\mathcal{L}_{10}w_{23} + \theta_{23}) w_{10}^+ + 4\theta_{23}\theta_{10}^+] dz.$$

A Eq. 13.72 pode portanto, ser escrita sob a forma:

$$\tau_0 \frac{\partial A}{\partial t} = (Ra - Ra_0) A - g_D |A|^2 A + D \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2\kappa_x\kappa_y \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} + \kappa_y \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right). \quad (13.73)$$

Trata-se de uma equação de amplitude do tipo Ginzburg-Landau, que rege a evolução da amplitude de um único modo com vetor de onda crítico com orientação espacial especificada, na vizinhança da primeira bifurcação. A equação tem a invariança  $A \rightarrow -A$  (invariança de paridade), isso é, se  $A$  for solução da equação,  $-A$  também o é. As equações de Ginzburg-Landau têm caráter universal, à medida em que regem a evolução de um modo crítico instável, de qualquer sistema que tenha a invariança de paridade.

A constante de tempo  $\tau_0$  pode ser incorporada ao tempo, através da renormalização  $t \rightarrow t/\tau_0$ . Essa renormalização é adotada na Sec. 13.6.

Se dois modos críticos com direções distintas, mas especificadas, emergirem da primeira bifurcação e interagirem entre si, as equações que descrevem a evolução da amplitude e a interação entre os dois modos são da forma:

$$\begin{aligned} \tau_0 \frac{\partial A_1}{\partial t} &= (Ra - Ra_0) A_1 - (g_N |A_1|^2 + g_D |A_2|^2) A_1 + \\ &\quad D \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + 2\kappa_x\kappa_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y} + \kappa_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} \right) \\ \tau_0 \frac{\partial A_2}{\partial t} &= (Ra - Ra_0) A_2 - (g_N |A_1|^2 + g_D |A_2|^2) A_2 + \\ &\quad D \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + 2\kappa_x\kappa_y \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial y} + \kappa_y \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

O coeficiente  $g_N$  depende do ângulo formado pelos vetores de onda dos dois modos.

O caso particular de estruturas que desenvolvem um motivo espacial de forma hexagonal conduz ao aparecimento de novos termos nas equações de amplitude [104, 18, 134]. Uma estrutura de hexágonos se constitui pela presença de três modos  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  e  $\kappa_3$  os correspondentes complexos conjugados. Os modos formam entre si um ângulo de  $2\pi/3$ . A interação não linear entre os modos  $\kappa_2^*$  e  $\kappa_3^*$  resulta em contribuição ao modo  $\kappa_1$ , conforme ilustrado na Fig. 13.1. A contribuição ao modo crítico resulta em novos termos quadráticos nas equações de amplitude. Como cada modo de um termo quadrático é de ordem  $\epsilon$ , os termos de terceira ordem devem conter uma derivada espacial em relação à variável lenta  $X_1$  ou  $Y_1$ . A equação de evolução da amplitude do modo  $A_1$ , de uma estrutura hexagonal,

toma então a forma:

$$\tau_0 \frac{\partial A_1}{\partial t} = (Ra - Ra_0) A_1 - [g_D |A_1|^2 + g_N (|A_2|^2 + |A_3|^2)] A_1 + \quad (13.74)$$

$$C_{x23} A_2^* \frac{\partial A_3^*}{\partial x} + C_{y23} A_2^* \frac{\partial A_3^*}{\partial y} + C_{x32} A_2^* \frac{\partial A_3^*}{\partial x} + C_{y32} A_2^* \frac{\partial A_3^*}{\partial y} + \quad (13.75)$$

$$D \left( \kappa_x^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y} + \kappa_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} \right). \quad (13.76)$$

Os termos quadráticos da equação das amplitudes  $A_2$  são dados por:

$$\text{Eq. da amplitude } A_2 : \quad C_{x13} A_1^* \frac{\partial A_3^*}{\partial x} + C_{y13} A_1^* \frac{\partial A_3^*}{\partial y} + C_{x31} A_1^* \frac{\partial A_3^*}{\partial x} + C_{y31} A_1^* \frac{\partial A_3^*}{\partial y}$$

$$\text{Eq. da amplitude } A_3 : \quad C_{x12} A_1^* \frac{\partial A_2^*}{\partial x} + C_{y12} A_1^* \frac{\partial A_2^*}{\partial y} + C_{x12} A_1^* \frac{\partial A_2^*}{\partial x} + C_{y12} A_1^* \frac{\partial A_2^*}{\partial y}.$$

Os coeficientes dos termos quadráticos das três equações de amplitude são dados na Tab. 13.1.

Tabela 13.1: Coeficientes dos termos quadráticos das equações de amplitude de estruturas de hexágonos.

Coeficientes da equação de $A_1$		Coeficientes da equação de $A_2$	
$C_{x23}$	$= a\kappa_{1x} + b\kappa_{2x} + c\kappa_{3x} + d\kappa_{3y}$	$C_{x13}$	$= b\kappa_{1x} + a\kappa_{2x} + c\kappa_{3x} - d\kappa_{3y}$
$C_{y23}$	$= a\kappa_{1y} + b\kappa_{2y} + c\kappa_{3y} - d\kappa_{3x}$	$C_{y13}$	$= b\kappa_{1y} + a\kappa_{2y} + c\kappa_{3y} + d\kappa_{3x}$
$C_{x32}$	$= a\kappa_{1x} + c\kappa_{2x} - d\kappa_{2y} + b\kappa_{3x}$	$C_{x31}$	$= c\kappa_{1x} + d\kappa_{1y} + a\kappa_{2x} + b\kappa_{3x}$
$C_{y32}$	$= a\kappa_{1y} + c\kappa_{2y} + d\kappa_{2x} + b\kappa_{3y}$	$C_{y13}$	$= c\kappa_{1y} - d\kappa_{1x} + a\kappa_{2y} + b\kappa_{3y}$

Coeficientes da equação de $A_3$	
$C_{x23}$	$= a\kappa_{1x} + b\kappa_{2x} + c\kappa_{3x} + d\kappa_{3y}$
$C_{y23}$	$= a\kappa_{1y} + b\kappa_{2y} + c\kappa_{3y} - d\kappa_{3x}$
$C_{x32}$	$= a\kappa_{1x} + c\kappa_{2x} - d\kappa_{2y} + b\kappa_{3x}$
$C_{y32}$	$= a\kappa_{1y} + c\kappa_{2y} + d\kappa_{2x} + b\kappa_{3y}$

Os coeficientes  $a, b, c$  e  $d$  são dados por:

$$a = \frac{1}{r} \int_0^1 (-\kappa_0^2 \theta_{10} a_1 + Ra_0 w_{10} a_2) dz \quad b = \frac{1}{r} \int_0^1 (-\kappa_0^2 \theta_{10} b_1 + Ra_0 w_{10} b_2) dz$$

$$c = \frac{1}{r} \int_0^1 (-\kappa_0^2 \theta_{10} c_1 + Ra_0 w_{10} c_2) dz \quad d = \frac{1}{r} \int_0^1 (-\kappa_0^2 \theta_{10} d_1 + Ra_0 w_{10} d_2) dz$$

$$r = Ra_2 \kappa_0^2 \int_0^1 w_{10} \theta_{10} dz$$

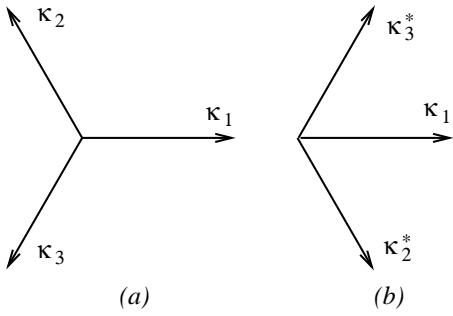


Figura 13.1: Modos de uma estrutura de hexágonos e iteração entre os modos  $\kappa_2^*$  e  $\kappa_3^*$ , que resultam em contribuição ao modo  $\kappa_1$ .

Todos os termos que intervém no integrando da expressão dos coeficientes  $b$ ,  $c$  e  $d$  contém produtos de derivadas pares e ímpares dos perfis verticais. No caso de células de Rayleigh-Bénard confinadas entre superfícies superior e inferior rígidas, as derivadas pares dos perfis são funções pares e as ímpares, são ímpares. Funções pares e ímpares são ortogonais no intervalo  $0 \leq z \leq 1$  e, consequentemente, os coeficientes  $b$ ,  $c$  e  $d$  se anulam, se a célula estiver confinada entre paredes rígidas. O coeficiente  $a$  é dado por:

$$a = \frac{2i}{r} \int_0^1 \left[ \kappa_0^2 \theta_{10} \theta_{25}^* - Ra_0 w_{10} \left( 2 \frac{d^2 w_{25}^*}{dz^2} - 2\kappa_0^2 w_{25}^* + \theta_{25}^* + 3 \frac{Ra_0}{Pr} w_{10}^* \frac{dw_{10}^*}{dz} \right) \right] dz$$

O integrando acima contém produtos de funções ímpares por funções pares, que são ortogonais entre si, o que faz com que o coeficiente  $a$  se anule. Os termos quadráticos não se anulam no caso de células de Bénard confinadas entre um fundo rígido e uma superfície superior livre.

## 13.5 Equações de Newell-Witehead-Segel

Problemas distribuídos no espaço e isotrópicos admitem a introdução de escalas espaciais distintas nas direções  $x$  e  $y$ , que refletem a importante propriedade de que a modulação da estrutura se faz com mais facilidade na direção perpendicular à direção perpendicular ao vetor de onda e com mais dificuldade na direção desse. Para a identificação dessa propriedade orienta-se o referencial com o eixo  $x$  na direção do vetor de onda, isto é:

$$\kappa_{0x} = \kappa_0 \quad \text{e} \quad \kappa_{0y} = 0$$

Nesse caso:

$$\begin{aligned} \omega &= a(\lambda - \lambda_c) - b(\kappa_0^2 - \kappa^2)^2 = a(\lambda - \lambda_c) - b(\kappa_0^2 - (\kappa_0 - \Delta\kappa_x)^2 - \Delta\kappa_y^2)^2 \approx \\ &a(\lambda - \lambda_c) - b(2\kappa_0\Delta\kappa_x - \Delta\kappa_y^2)^2 \end{aligned}$$

A última expressão mostra que  $\Delta\kappa_y$  pode ser maior do que  $\Delta\kappa_x$  para que os termos  $2\kappa_0\Delta\kappa_x$  e  $\Delta\kappa_y^2$  sejam da mesma ordem de grandeza. Substituindo  $\Delta\kappa_x \rightarrow i\partial/\partial x$  e  $\Delta\kappa_y \rightarrow i\partial/\partial y$  obtém-se:

$$\omega \approx a(\lambda - \lambda_c) - b \left( 2i\kappa_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 = a(\lambda - \lambda_c) + 4\kappa_0^2 b \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2i\kappa_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2$$

Para que  $\partial/\partial x$  e  $\partial^2/\partial y^2$  sejam da mesma ordem de grandeza é necessário que as escalas lentas nas direções  $x$  e  $y$  sejam:

$$\begin{aligned} X_1 &= \varepsilon x, & X_2 &= \varepsilon^2 x, \dots \\ Y_1 &= \varepsilon^{1/2} y, & Y_2 &= \varepsilon y, \dots \end{aligned}$$

Esse tipo de escalas lentas do espaço conduz à Equação de Newell-Witehead-Segel [118, 104]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = (\lambda - \lambda_c) A - g|A|^2 A + \xi_0^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2i\kappa_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 A \quad (13.77)$$

## 13.6 Estabilidade de Estruturas Espaciais

Esta seção aborda a estabilidade de estruturas unimodais com relação a perturbações contendo um único modo e a estabilidade de estruturas de bimodais, em que os dois modos que a compõe são perturbados.

### 13.6.1 Estabilidade de uma estrutura unimodal com relação a perturbações reais unimodais

Considera-se o inicialmente, o caso em que a amplitude das estruturas é uniforme no espaço, o que elimina o termo difusivo das equações de amplitude. A evolução e a interação entre os dois modos são descritos pelas equações:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} = rA_1 - (g_D |A_1|^2 + g_N |A_2|^2) A_1 \quad (13.78)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t} = rA_1 - (g_N |A_1|^2 + g_D |A_2|^2) A_2, \quad (13.79)$$

onde  $r = (Ra - Ra_0)$ . Os pontos fixos (ver Pág. 279) do sistema cuja evolução obedece às equações acima são:

$$\begin{aligned} (a) \quad A_1 &= 0 & \text{e} \quad A_2 &= 0 \\ (b) \quad A_1 &= 0 & \text{e} \quad |A_2| &= \sqrt{r/g_D} \\ (c) \quad |A_1| &= \sqrt{r/g_D} & \text{e} \quad A_2 &= 0 \\ (d) \quad |A_1| &= |A_2| = \sqrt{r/(g_D + g_N)}. \end{aligned}$$

A solução trivial é linearmente instável. Introduz-se uma perturbação real ( $\delta A_1, \delta A_2$ ) na solução estacionária (c) e procura-se determinar a evolução temporal das mesmas. As Eqs. 13.78 e 13.79 tomam a forma, desprezando o termo  $(\delta A_1)^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta A_1}{\partial t} &= r(A_1 + \delta A_1) - g_D (A_1^2 + 2A_1 \delta A_1) (A_1 + \delta A_1) \\ \frac{\partial \delta A_2}{\partial t} &= r \delta A_2 - g_N (A_1^2 + 2A_1 \delta A_1) \delta A_2. \end{aligned}$$

Reagrupando os termos e desprezando produtos das pertubações chega-se às seguintes equações linearizadas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta A_1}{\partial t} &= \left(r - 3g_D \frac{r}{g_D}\right) \delta A_1 = -2r\delta A_1 \\ \frac{\partial \delta A_2}{\partial t} &= (g_D - G_N) \frac{r}{g_D} \delta A_2.\end{aligned}$$

O modo  $A_1 = \sqrt{r/g_D}$  é estável, enquanto  $A_2 = 0$  é estável se  $g_D < g_N$ .

### 13.6.2 Estabilidade de uma estrutura unimodal com relação a pertubações complexas unimodais

Arbitra-se a fase do estado de base como sendo igual zero. A solução de base perturbada se escreve:

$$A_1 = (A_1 + \rho_1) e^{i\varphi_1} \quad A_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}.$$

As equações de evolução da estrutura perturbada são:

$$\frac{\partial}{\partial t} (A_1 + \rho_1) e^{i\varphi_1} = r(A_1 + \rho_1) e^{i\varphi_1} - g_D (A_1^2 + 2A_1 \delta A_1) (A_1 + \delta A_1) e^{i\varphi_1} \quad (13.80)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_2 e^{i\varphi_2} = r\rho_2 e^{i\varphi_2} - g_N (A_1^2 + 2A_1 \delta A_1) \rho_2 e^{i\varphi_2}. \quad (13.81)$$

Desenvolvendo a Eq. 13.80 e desprezando os termos não lineares obtém-se:

$$i(A_1 + \rho_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -2r\rho_1.$$

Separando as partes real e imaginária:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -2r\rho_1 \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0.$$

Desenvolvendo a Eq. 13.81 obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_2 \varphi_2 = r \left(1 - \frac{g_N}{g_D}\right) \rho_2 \varphi_2.$$

As equações linearizadas acima mostram que a estrutura unimodal é estável se  $g_N > g_D$ , mas a estabilidade da fase é marginal. Essa propriedade decorre da invariança de translação no espaço do sistema não estruturado.

### 13.6.3 Estabilidade de estruturas bimodais

Considera-se agora o caso em que:

$$A_1 = A_2 = \sqrt{r/(g_D + g_N)}.$$

A equação de evolução do primeiro modo da estrutura bimodal perturbada é:

$$\frac{\partial}{\partial t} (A_1 + \rho_1) e^{i\varphi_1} = r (A_1 + \rho_1) e^{i\varphi_1} - g_D (A_1^2 + 2A_1 \delta A_1) (A_1 + \delta A_1) e^{i\varphi_1} - g_N (A_2^2 + 2A_2 \delta A_1) (A_1 + \delta A_1) e^{i\varphi_1}.$$

Separando as partes real e imaginária e desprezando os termos não lineares, que contém produtos das perturbações, obtém-se:

$$i (A_1 + \rho_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = r A_1 - g_D A_1^3 - g_N A_2^2 A_1 + r \rho_1 - 3g_D A_1^2 \rho_1 - g_N A_2^2 \rho_1 - 2g_N A_1 A_2 \rho_2.$$

A parte imaginária dessa equação mostra mais uma vez que a fase é marginalmente estável. As equações da parte das duas perturbações têm a mesma forma e estão acopladas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} &= r \rho_1 - 3g_D A_1^2 \rho_1 - g_N A_2 \rho_1 - 2g_N A_1 A_2 \rho_1 \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} &= r \rho_1 - 3g_D A_2^2 \rho_2 - g_N A_1 \rho_2 - 2g_N A_1 A_2 \rho_2. \end{aligned}$$

Sob forma matricial:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - 3g_D A_1^2 - g_N A_2^2 & 2g_N A_1 A_2 \\ 2g_N A_1 A_2 & r - 3g_D A_2^2 - g_N A_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}.$$

A solução da equação acima é da forma:

$$\rho_1 = R_1 e^{st} \quad \rho_2 = R_2 e^{st}.$$

Substituindo-se a solução na equação de perturbação das perturbações obtém-se:

$$\begin{pmatrix} r - 3g_D A_1^2 - g_N A_2^2 - s & 2g_N A_1 A_2 \\ 2g_N A_1 A_2 & r - 3g_D A_2^2 - g_N A_1^2 - s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores  $s_1$  e  $s_2$  resultam em:

$$s_1 = -2r \quad s_2 = -2r \frac{g_D - g_N}{g_D + g_N}.$$

Conclui-se que as estruturas bimodais apresentam uma estabilidade marginal com relação à fase, que as bimodais são estáveis se  $g_N < g_D$  e as unimodais são estáveis se  $g_N > g_D$ .

### 13.6.4 Evolução do módulo e da fase da amplitude

Considera-se uma estrutura unimodal, cuja evolução obedece à Eq. de Newell-Withead-Segel (Eq. 13.77). Escrevendo a amplitude complexa sob a forma  $A = R e^{i\varphi}$  e substituindo-a na Eq. 13.77 obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} R e^{i\varphi} = r R e^{i\varphi} - g R^3 e^{i\varphi} - \xi_0^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2i\kappa_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 R e^{i\varphi}. \quad (13.82)$$

No caso em unidimensional, em que a amplitude variável modula a estrutura na direção do vetor de onda apenas, têm-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} R e^{i\varphi} = (rR - gR^3) e^{i\varphi} - \xi_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} R e^{i\varphi}.$$

Desenvolvendo os termos da equação acima chega-se a:

$$a \frac{\partial R}{\partial t} + iR \frac{\partial \varphi}{\partial t} = rR - gR^3 + \xi_0^2 \left[ \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - R \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + i \left( 2 \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + R \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \right].$$

Separando as equações das partes real e imaginária:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \left[ r - \xi_0^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] R - gR^3 + \xi_0^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \quad (13.83)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi_0^2 \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]. \quad (13.84)$$

Como o módulo  $R$  da amplitude varia lentamente no espaço, isso é,  $\partial R / \partial x$  é pequeno, a Eq. 13.84 pode ser escrita, aproximadamente, como:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \approx \xi_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

o que mostra que a fase da amplitude evolui lentamente no tempo, por obedecer a uma equação de difusão.

## 13.7 Estruturas Fora de Sintonia com o Modo Crítico

As Eqs. 13.83 e 13.84 admitem uma solução estacionária para a fase ( $\partial \varphi / \partial t = 0$ ), tal que:

$$\frac{\partial R}{\partial x} \equiv 0 \quad (13.85)$$

$$\varphi = \varphi_0 + (\delta\kappa) x. \quad (13.86)$$

A correspondente solução estacionária do módulo da amplitude resulta da solução de:

$$[r - \xi_0^2 (\delta\kappa)^2] R - gR^3 = 0,$$

que é dada por:

$$R = \sqrt{\frac{1}{g} [r - \xi_0^2 (\delta\kappa)^2]} \quad \text{com a condição:} \quad \delta\kappa \leq \frac{\sqrt{r}}{\xi_0}.$$

O resultado acima mostra que a amplitude decresce à medida em que aumenta o número de onda  $\delta\kappa$  da amplitude. A modulação espacial da amplitude introduz uma alteração no número de onda da estrutura. O resultado acima pode ser interpretado como estabelecendo os limites para  $\delta\kappa$ , isso é o desvio do vetor de onda em relação ao crítico, além do que a

taxa de crescimento linear da estrutura espacial torna-se negativa. De fato, a amplitude é dada por:

$$A = Re^{i(\delta\kappa x + \varphi_0)} = \tilde{A}e^{i\delta\kappa x} \quad \text{onde:} \quad \tilde{A} = Re^{i\varphi_0}$$

e a estrutura espacial fora de sintonia com o modo crítico é descrita por:

$$w = Re^{i[(\delta\kappa)x + \varphi_0]} e^{i\kappa_0 x} + cc = Re^{i\varphi_0} e^{i[\kappa_0 + \delta\kappa]x} + cc, \quad (13.87)$$

o que evidencia o desvio de sintonia introduzido pela modulação espacial da amplitude, no modo crítico.

As variáveis da equação de Newell-Witehead-Segel (Eq. 13.77) são renormalizadas definindo-se:

$$\bar{A} = \frac{A}{\sqrt{g}} \quad \bar{x} = \frac{x}{\xi_0} \quad \bar{y} = \frac{y}{\sqrt{2\kappa_0/\xi_0}}$$

Utilizando as definições acima na reescreve-se a Eq. 13.77 com as variáveis renormalizadas  $\bar{A}$ ,  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  sem a barra sobre as mesmas:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = rA - |A|^2 A + \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 A = rA - |A|^2 A + L^2 A, \quad (13.88)$$

onde:

$$L = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Substituindo a solução dada pela Eq. 13.87 na Eq. 13.88 encontra-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{A}e^{i\delta\kappa x} = r\tilde{A}e^{i\delta\kappa x} - |\tilde{A}|^2 \tilde{A}e^{i\delta\kappa x} A + L^2 \tilde{A}e^{i\delta\kappa x}. \quad (13.89)$$

Desenvolvendo o termo que envolve as derivadas espaciais:

$$L^2 \tilde{A}e^{i\delta\kappa x} = L \left( e^{i\delta\kappa x} L \tilde{A} + i\delta\kappa \tilde{A}e^{i\delta\kappa x} \right) = 2i\delta\kappa e^{i\delta\kappa x} L \tilde{A} + e^{i\delta\kappa x} L^2 \tilde{A} - (\delta\kappa)^2 e^{i\delta\kappa x} \tilde{A}.$$

Substituindo o desenvolvimento do termo espacial na Eq. 13.89 obtém-se:

$$e^{i\delta\kappa x} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} = r\tilde{A}e^{i\delta\kappa x} - |\tilde{A}|^2 A e^{i\delta\kappa x} + 2i\delta\kappa e^{i\delta\kappa x} L \tilde{A} + e^{i\delta\kappa x} L^2 \tilde{A} - (\delta\kappa)^2 e^{i\delta\kappa x} \tilde{A},$$

e, simplificando o termo  $e^{i\delta\kappa x}$ :

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} = [r - (\delta\kappa)^2] \tilde{A} - |\tilde{A}|^2 \tilde{A} + 2i\delta\kappa L \tilde{A} + L^2 \tilde{A}. \quad (13.90)$$

A Eq. 13.90 tem por solução estacionária e uniforme no espaço:

$$\tilde{A}_0 = \sqrt{r - (\delta\kappa)^2}.$$

### 13.7.1 Estabilidade de soluções fora de sintonia com o vetor de onda crítico

Consideremos agora a estabilidade da solução dada pela Eq. 13.87. Essa solução é perturbada na forma:

$$\tilde{A} = \tilde{A}_0 + u + iv.$$

Substitui-se a solução perturbada na Eq. 13.90. Observando que  $\partial\tilde{A}_0/\partial t = 0$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u + iv) &= [r - (\delta\kappa)^2] (\tilde{A}_0 + u + iv) - |\tilde{A}_0 + u + iv|^2 (\tilde{A}_0 + u + iv) + \\ &\quad 2i\delta\kappa L(u + iv) + L^2(u + iv). \end{aligned} \quad (13.91)$$

Desenvolvendo o termo cúbico e desprezando os termos não lineares:

$$\begin{aligned} |\tilde{A}_0 + u + iv|^2 (\tilde{A}_0 + u + iv) &= [(\tilde{A}_0 + u + iv)(\tilde{A}_0 + u - iv)] (\tilde{A}_0 + u + iv) \longrightarrow \\ (\tilde{A}_0^2 + 2\tilde{A}_0 u)(\tilde{A}_0 + u + iv) &= \tilde{A}_0^3 + 3\tilde{A}_0^2 u + i\tilde{A}_0^2 v. \end{aligned}$$

Observando que:

$$[r - (\delta\kappa)^2] \tilde{A}_0 - \tilde{A}_0^3 = 0 \quad 3\tilde{A}_0^2 u = 3[r - (\delta\kappa)^2] u \quad i\tilde{A}_0^2 v = i[r - (\delta\kappa)^2] v.$$

Substitui-se os resultados acima na Eq. 13.91 obtém-se para seus diversos termos:

$$\begin{aligned} [r - (\delta\kappa)^2](u + iv) - 3[r - (\delta\kappa)^2]u + i[r - (\delta\kappa)^2]v &= -2[r - (\delta\kappa)^2]u \\ 2i\delta\kappa L(u + iv) &= 2i\delta\kappa \left( \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)(u + iv) = \\ 2i\delta\kappa \frac{\partial u}{\partial x} - 2\delta\kappa \frac{\partial v}{\partial x} + 2\delta\kappa \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2i\delta\kappa \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} & \\ L^2(u + iv) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2i\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right)(u + iv) = \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - 2i\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - i\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}. & \end{aligned}$$

Reagrupando o desenvolvimento dos diversos termos da Eq. 13.91 obtém-se uma equação para a parte real  $u$  da perturbação e outra para a parte imaginária  $v$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[ -2[r - (\delta\kappa)^2] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\delta\kappa \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] u - 2\frac{\partial}{\partial x} \left[ \delta\kappa - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] v \quad (13.92)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial x} \left[ \delta\kappa - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] u + \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\delta\kappa \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] v. \quad (13.93)$$

A solução das Eqs. 13.92 e 13.93 é da forma:

$$\begin{aligned} u &= Ue^{st} \cos q_x x \cos q_y y \\ v &= Ve^{st} \sin q_x x \cos q_y y. \end{aligned}$$

Substituindo a solução de  $u$  e de  $v$  nas Eqs.13.92 e 13.93 obtém-se:

$$\begin{aligned} su &= \left[ -2[r - (\delta\kappa)^2] - q_x^2 - 2\delta\kappa q_y^2 - q_y^4 \right] u - 2q_x(\delta\kappa + q_y^2) V e^{st} \sin q_x x \cos q_y y \\ sv &= -2q_x(\delta\kappa - q_y^2) U \sin q_x x \cos q_y y + (-q_x^2 - 2\delta\kappa q_y^2 - q_y^4) V, \end{aligned}$$

e ainda:

$$\begin{aligned} [s + 2[r - (\delta\kappa)^2] + q_x^2 + 2\delta\kappa q_y^2 + q_y^4] U + 2q_x(\delta\kappa + q_y^2) V &= 0 \\ 2q_x(\delta\kappa - q_y^2) U + (s + q_x^2 + 2\delta\kappa q_y^2 + q_y^4) V &= 0. \end{aligned}$$

Sob forma matricial:

$$\begin{pmatrix} s + 2[r - (\delta\kappa)^2] + q_x^2 + 2\delta\kappa q_y^2 + q_y^4 & 2q_x(\delta\kappa + q_y^2) \\ 2q_x(\delta\kappa - q_y^2) & s + q_x^2 + 2\delta\kappa q_y^2 + q_y^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde obtém-se a relação de dispersão:

$$\begin{aligned} s^2 + 2[r - (\delta\kappa)^2 + q_x^2 + 2\delta\kappa q_y^2 + q_y^4] s + \\ [2(r - (\delta\kappa)^2) + q_x^2 + 2\delta\kappa q_y^2 + q_y^4] [q_x^2 + 2\delta\kappa q_y^2 + q_y^4] - 4q_x^2 [(\delta\kappa)^2 - q_y^2] &= 0. \quad (13.94) \end{aligned}$$

As raízes da relação de dispersão são dadas por:

$$s = -[r - (\delta\kappa)^2 + q_x^2 + 2\delta\kappa q_y^2 + q_y^4] \pm \sqrt{[r - (\delta\kappa)^2]^2 + 4q_x^2 [(\delta\kappa)^2 - q_y^2]}. \quad (13.95)$$

As duas raízes são reais, com uma negativa. A estrutura unimodal de rolos com vetor de onda fora de sintonia com o crítico será instável se a outra raiz for positiva. A maior raiz da relação de dispersão é função de  $(q_x, q_y, \delta\kappa, r)$ . Para o estudo do comportamento dessa raiz é suficiente nos restringirmos ao domínio  $(q_x \geq 0, q_y \geq 0)$ .

### 13.7.2 Instabilidades de Eckhaus ( $\mathbf{q}_y = \mathbf{0}$ )

O caso em que  $q_y = 0$  corresponde à introdução de uma perturbação na direção do vetor de onda, sobre a estrutura caracterizada por modo fora de sintonia com o crítico. A relação de dispersão (Eq. 13.94) simplifica-se e toma a forma:

$$s^2 + 2[r - (\delta\kappa)^2 + q_x^2] s + [2(r - 3(\delta\kappa)^2) + q_x^2] q_x^2 = 0. \quad (13.96)$$

Como as raízes são reais e a soma das mesmas é sempre negativa, a estrutura é estável se ambas as raízes da relação de dispersão forem negativas. A instabilidade da estrutura ocorre para:

$$q_x^2 \leq 2(3(\delta\kappa)^2 - r),$$

o que ocorre para  $|\delta k| \geq \sqrt{r/3}$ . A perturbação  $q_x$ , admissível pela estrutura fora de sintonia com o modo crítico, tende a zero quando  $|\delta k| \rightarrow \sqrt{r/3}$ . Instabilidades da estrutura com relação a perturbações longitudinais em que  $q_y = 0$  denominam-se *Instabilidades de Eckhaus*.

### 13.7.3 Instabilidades Zig-Zag ( $\mathbf{q}_x = \mathbf{0}$ )

Perturbações com  $q_x = 0$  introduzem uma modulação na amplitude da estrutura, na direção perpendicular ao vetor de onda da mesma. Instabilidades da estrutura com relação a esse tipo de perturbações denominam-se *Instabilidades Zig-Zag*. A raiz positiva da relação de dispersão (Eq. 13.95) com  $q_x = 0$  torna-se:

$$s = -q_y^2 (2\delta\kappa + q_y^2). \quad (13.97)$$

Portanto, instabilidades *Zig-Zag* ocorrem quando  $(2\delta\kappa + q_y^2) < 0$ . As regiões estável, de instabilidades de Eckhaus e de instabilidades Zig-Zag são mostradas esquematicamente na Fig. 13.2.

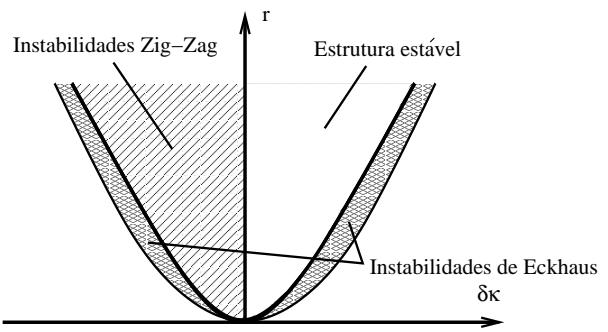


Figura 13.2: Representação esquemática das regiões estável, de instabilidades de Eckhaus e de instabilidades Zig-Zag, no plano  $(q_x q_y)$ .

# Capítulo 14

## O Problema de Rayleigh-Bénard: Equação de Swift-Hohenberg

### 14.1 Introdução

O tratamento apresentado no Cap. 13 aplica-se a estruturas com pequeno número de modos críticos, ou próximos do crítico, de orientação especificada. Pequenos desvios do comprimento de onda em relação ao crítico são toleráveis por essas estruturas, à medida em que o número de Rayleigh ultrapassa e se afasta do ponto de bifurcação. Esse tratamento não descreve no entanto, estruturas contendo apenas um modo em cada ponto do espaço, mas que se curvam dentro da célula de convecção. Em tais casos a estrutura contém um número infinito de modos, de comprimento próximo ao crítico, mas cuja direção varia continuamente.

Uma alternativa à simulação numérica direta do problema, por integração das equações completas da hidrodinâmica, consiste no uso de modelos matemáticos não lineares propostos desde a década de 1970, que retém as características essenciais dos fenômenos observados em células de Rayleigh-Bénard.

Para o caso de fluidos com número de Prandtl elevado, as variáveis hidrodinâmicas adaptam-se rapidamente a variações da temperatura, de modo que apenas essa é a variável lenta, dependente do tempo. Ecaí-se em um sistema de duas equações acopladas para a componente vertical da velocidade e para o desvio da temperatura em relação ao perfil condutivo. A variável rápida pode ser eliminada através de uma combinação linear com a lenta, reduzindo o número de variáveis do problema a apenas um. Denomina-se a esse processo de eliminação das variáveis rápidas e de redução da dimensionalidade do problema a *eliminação adiabática* das mesmas. A eliminação adiabática das variáveis rápidas resulta em uma redução da dimensionalidade do problema.

Dentre as características procuradas para um modelo que permita o estudo da formação de estruturas em células de Rayleigh-Bénard menciona-se:

1. Modelos bidimensionais, que descrevam o comportamento horizontal do valor médio vertical da única variável do problema são suficientes;
2. O modelo deve ter invariança de translação, no sentido de que se  $u(t, x, y)$  for solução da equação modelo,  $u(t, x + \Delta x, y + \Delta y)$  também deve ser solução;

3. O modelo dever ter invariança de rotação, refletindo o fato de que uma circunferência de modos com comprimento crítico mas de orientação arbitrária torna-se instável no ponto de bifurcação;
4. Saturação não linear de modos com vetor de onda próximo ao crítico.

Este capítulo apresenta os resultados numéricos e as conclusões obtidas pela integração numérica da equação proposta por Swift e Hohenberg (1977) [153] para o estudo de flutuações induzidas por ruídos, perto do ponto de bifurcação.

## 14.2 A Equação de Swift-Hohenberg

Em 1977, Swift e Hohenberg [153] propuseram um modelo para descrever a evolução de perturbações com comprimento de onda próximos do crítico, mas de orientação arbitrária, não definida *a priori*. Esse modelo contorna portanto, o problema encontrado nas equações de amplitude, em que a orientação e o número inicial de modos da estrutura deve ser especificado. A Equação de Swift-Hohenberg foi proposta para o problema de convecção de Bénard de um fluido com número de Prandtl elevado e condições de contorno livre-livre nas superfícies superior e inferior da lâmina de fluido. Supõe também que os bordos superior e inferior sejam bons condutores térmicos. Se os bordos forem maus condutores térmicos, o comprimento de onda crítico aumenta e diverge, para o caso de superfícies isolantes, não sendo mais comparável à espessura da lâmina de fluido.

A equação de Swift-Hohenberg aplica-se a muitos outros problemas onde ocorre a formação de estruturas de orientação arbitrária e de comprimento de onda bem definido. A equação pode ser obtida por argumentos de simetria.

Seja  $u$  a variável lenta cuja evolução se quer modelar e  $\lambda$ , a taxa de crescimento de uma perturbação com comprimento de onda próximo do crítico, em um meio bidimensional. Essa taxa de crescimento deve se reduzir em virtude de desvios do comprimento de onda em relação ao crítico, para mais ou para menos. A taxa de crescimento também se anula quando o valor absoluto da amplitude da perturbação atinge certo valor finito. Essas propriedades se traduzem por:

$$\omega = a(\lambda - \lambda_c) - (\kappa^2 - \kappa_0^2)^2 - gu^2$$

Nesse caso supomos que:

$$\kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2 \quad \text{e que} \quad \kappa_0^2 = \kappa_{0x}^2 + \kappa_{0y}^2$$

sendo  $\kappa_x$  e  $\kappa_y$  quaisquer, ao contrário das hipóteses feitas no estudo das equações de amplitude, em que admitimos que:

$$\kappa_x^2 = (\kappa_{0x} + \Delta\kappa_x^2)^2 \quad \text{e} \quad \kappa_y^2 = (\kappa_{0y} + \Delta\kappa_y^2)^2$$

Substituindo  $\omega \rightarrow \partial/\partial t$ ,  $\kappa_x \rightarrow i\partial/\partial x$  e  $\kappa_y \rightarrow i\partial/\partial y$ , obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} = a(\lambda - \lambda_c) - \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \kappa_0^2 \right)^2 - u^2$$

o que conduz à Equação de Swift-Hohenberg:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon u - (\nabla^2 + \kappa_0^2)^2 u - u^3. \quad (14.1)$$

O vetor de onda  $\kappa_0$  pode ser renormalizado para assumir o valor  $\kappa_0 = 1$ . Os resultados numéricos aqui apresentados foram obtidos sem renormalização dos parâmetros da equação de Swift-Hohenberg, que foi utilizada na forma:

$$\tau_0 \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon u - \xi_0 (\nabla^2 + \kappa_0^2)^2 u - gu^3. \quad (14.2)$$

Os resultados aqui apresentados foram obtidos com  $\tau_0 = 0,0509$ ,  $\kappa_0 = 3,1172$ ,  $x_0 = 0,015$  e  $g = 1,29$ . Os resultados referem-se a células de convecção de dimensões horizontais finitas, porém suficientemente grandes para permitir a modulação da estrutura. A modulação depende não apenas das dimensões da célula, medida em números de comprimento de onda críticos, mas também, do nível de supercriticalidade do parâmetro de bifurcação  $\varepsilon$ . Quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  apenas modos com vetor de onda crítico não são amortecidos. Nenhuma modulação é possível e o sistema de Rayleigh-Bénard tem características de sistemas confinados.

Caracterizamos o quanto um sistema é estendido, permitindo a modulação da estrutura, através de um parâmetro  $F$  definido por:

$$F = \frac{L}{\xi_0/\sqrt{\varepsilon}} \quad (14.3)$$

onde  $L$  é a dimensão horizontal característica do sistema, medida em número de vezes a espessura da célula de convecção.

Cabe observar que a Eq. de Swift-Hohenberg tem um potencial de Lyapunov associado,

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2}\varepsilon u^2 + \frac{1}{4}gu^4 + \frac{\xi_0}{2}(\nabla^2 + \kappa_0^2)^2 u^2.$$

Esse potencial deve decrescer de forma monotônica ao longo do tempo, o que exclui comportamentos assintóticos dependentes do tempo.

### 14.3 Resultados Numéricos

Os resultados abaixo referem-se a simulações feitas por um de nós (Pontes, 1994 [130], Pontes *et al.*, 2008 [134]), em que o parâmetro de bifurcação  $\varepsilon$  é uniforme ao longo de toda a célula de Rayleigh-Bénard, bem a casos em que  $\varepsilon$  varia. Os casos de forçagem uniforme são bem conhecidos, citando-se como exemplo, os trabalhos de Greenside & Coughram Jr. (1984) [70] e de Manneville (1990) [104]. Essas simulações permitem o estudo dos efeitos de bordas, a evolução e a dependência da quantidade de defeitos da estrutura com o nível de forçagem.

Os casos em que  $\varepsilon$  varia ao longo da célula permitem o estudo de outros efeitos não existentes em sistemas uniformemente forçados:

1. Influência do gradiente de  $\varepsilon$  na orientação escolhida pela estrutura;

- Forçagens não uniformes permitem a especificação de configurações em que  $\varepsilon < 0$  nas paredes laterais, possibilitando o estudo de efeitos de borda da fraca estrutura que se forma nessas regiões, induzida pela estrutura das regiões supercríticas.

As condições de contorno adotadas são  $u = \partial u / \partial n = 0$  na fronteira, onde  $n$  é a coordenada ao longo da direção normal à parede [19, 167].

### 14.3.1 Efeitos de borda – sistemas com forçagem uniforme

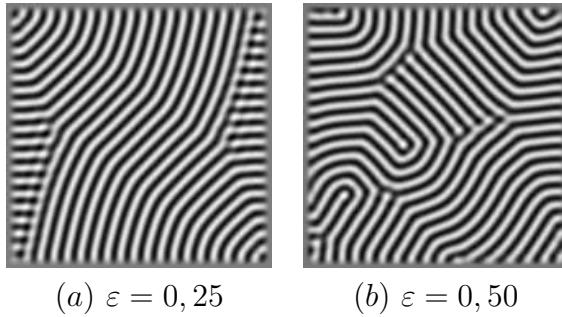


Figura 14.1: Duas estruturas de Rayleigh-Bénard em sistemas submetidos a forçagem uniforme. O nível de forçagem mais alto no sistema forçado com  $\varepsilon = 0,50$  reduz o comprimento de correlação da estrutura, facilitando a modulação e permitindo maior densidade de defeitos.

formam de modo a se aproximar das paredes laterais perpendicularmente às mesmas [39]. O efeito pode ser visto com clareza na Fig. 14.1. No entanto, células de convecção perpendiculares a uma parede lateral são, em consequência, paralelas às paredes adjacentes. Para que o sistema desenvolva células de convecção às quatro paredes laterais de células retangulares, é necessário que a estrutura se curve. No entanto, os efeitos de centro do sistema (*bulk effects*) tendem a produzir uma estrutura de células de convecção retilíneas, paralelas e de amplitude uniforme [40]. Os efeitos de borda introduzem portanto, requisitos conflitantes para a estrutura. Como esses efeitos predominam sobre os efeitos de centro do sistema, o aparecimento de *defeitos* é inevitável. E o nível de defeitos é tanto maior quanto maior for o nível de forçagem. As estruturas mostradas na Fig. 14.1 foram obtida com  $\varepsilon = 0,25$  (caso a) e  $\varepsilon = 0,50$  (caso b).

No caso de forçagens moderadas, como na Fig. 14.1a, a interação entre os efeitos de borda e de centro resultam em um par de *focos* localizados nos cantos diametralmente opostos do sistema. No caso oposto, de sistemas sujeitos a forçagens elevadas, como o mostrado na Fig. 14.1a, os comprimentos de correlação menores levam à “fusão” de estrutura [164] e ao surgimento de estruturas em labirinto, com densidade de defeitos mais alta.

A tendência da células de convecção se aproximarem de uma parede lateral perpendicularmente à mesma e maior dificuldade de modulação da estrutura na direção do vetor de onda aparecem com clareza na Fig. 14.2: as células de convecção perpendiculares às paredes

A equação de Newell-Whitehead-Segel (Eq. 13.77) aplica-se ao caso em que o vetor de onda da estrutura tem orientação paralela, ou quase paralela ao eixo de coordenadas  $x$ . A equação contém derivadas de primeira ordem na direção do vetor de onda e de segunda ordem na direção perpendicular. Esse diferença se origina da importante propriedade de que as perturbações na direção perpendicular ao vetor de onda podem ser maiores do que as paralelas (ver Sec. 13.5, Pág. 101).

A condição de contorno impõe obriga a amplitude da estrutura cair ao valor zero nas paredes laterais, o que exige a modulação da estrutura nessa região. Como modulação na direção perpendicular às células de convecção se faz mais facilmente, as células se

laterais direita e esquerda são substituídas por células perpendiculares às paredes laterais superior e inferior da figura. Não obstante, a estrutura dominante no resto do sistema ainda é visível próximo a essas duas paredes laterais.

### 14.3.2 Efeitos de borda – sistemas com forçagem não uniforme

A existência de um gradiente horizontal de temperaturas na face inferior do sistema determina uma direção preferencial para a estrutura, com as células de convecção alinhadas paralelamente ao gradiente [50, 102]. Sistemas sujeitos a um gradiente horizontal do número de Rayleigh apresentam uma bifurcação subcrítica (Walton 1982[165]) que possibilita a formação de uma fraca estrutura na região subcritica. Pode-se questionar se os efeitos de borda são os mesmos encontrados em sistemas com forçagem uniforme. Walton (1983) [166] foi o primeiro a estudar o problema, ao considerar uma célula sujeita a um gradiente do número de Rayleigh, em que o mesmo atinge o valor máximo em uma das paredes laterais. Walton verificou que, se o valor máximo do número de Rayleigh for suficientemente alto, as células de convecção são perpendiculares à parede. Se, ao contrário, o valor máximo do número de Rayleigh for menor do que o valor crítico, ou mesmo, ligeiramente superior, a estrutura desenvolve células de convecção paralelas à parede, induzidas pelo estado base não-trivial. O efeito foi experimentalmente constatado por Srulijes (1979) [147] e Kirchartz (1983) [87] e observado nas simulações numéricas feitas por De Wit (1993) [48], relativas à evolução de sistemas químicos.

Simulações feitas através da integração numérica de equações de amplitude correspondentes a uma estrutura contendo três modos mostraram o desenvolvimento de três regiões, cada uma contendo apenas um modo:

1. A primeira região compreende o centro do sistema, onde o modo cujas células melhor se aproximam da condição de paralelas ao gradiente do número de Rayleigh é o que sobrevive. Esse modo é, automaticamente, o que melhor preenche a condição de células perpendiculares à parede onde o valor do parâmetro de bifurcação é máximo;
2. As outras duas regiões compreendem as paredes laterais paralelas ao gradiente do número de Rayleigh. Nessas, apenas o modo que melhor satisfaz a condição de células perpendiculares às paredes laterais é o que sobrevive;

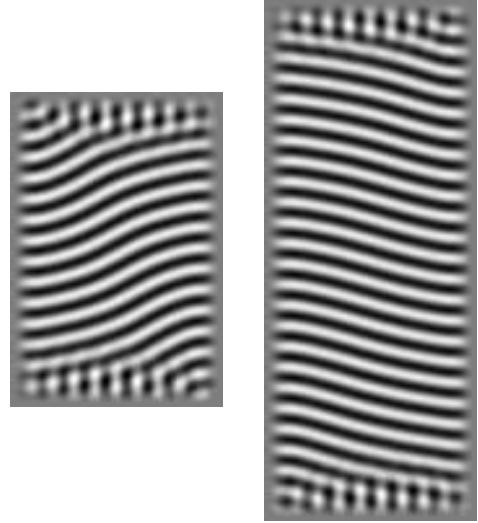


Figura 14.2: Duas estruturas de Rayleigh-Bénard em sistemas submetidos a forçagem uniforme. O nível de forçagem nos dois sistemas é  $\varepsilon = 0, 10$ . Vê-se com clareza que as células de convecção dominantes na maior parte do sistema são substituídas por células perpendiculares às paredes laterais superior e inferior, próximo às mesmas. Assim mesmo, a presença da estrutura dominante é visível próximo a essas paredes, devido à dificuldade de modulação na direção do vetor de onda.

3. O terceiro modo desaparece em toda a célula;
4. Observa-se também a formação de uma tênue estrutura próximo à parede subcrítica, onde o número de Rayleigh tem o menor valor.

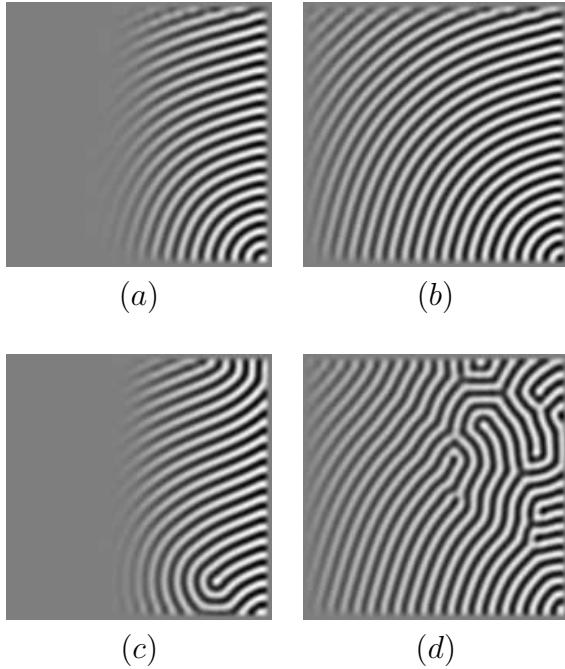


Figura 14.3: Quatro estruturas de Rayleigh-Bénard em sistemas forçados com gradiente do parâmetro de bifurcação, apontando na direção  $x$ . (a) e (c) : A condição crítica encontra-se ao longo da linha vertical traçada no ponto médio das paredes laterais alinhadas com a direção  $x$ . (b) e (d) : As paredes laterais esquerdas são mantidas na condição crítica. (a) :  $-0,5 \leq \varepsilon \leq 0,5$ ; (b) :  $0 \leq \varepsilon \leq 0,5$ ; (c) :  $-1,0 \leq \varepsilon \leq 1,0$ ; (d) :  $0 \leq \varepsilon \leq 1,0$ .

desenvolvem estruturas com densidade de defeitos menor do que a das estruturas uniformemente forçadas, mostradas na Fig. 14.1. O efeito subcrítico aparece com clareza nas Figs. 14.3(b) e (d), onde a estrutura é perpendicular à parede lateral direita, em que o parâmetro de bifurcação atinge o maior valor e à parede lateral inferior ( $y = 0$ ). Automaticamente, a estrutura é paralela à parede lateral esquerda. Os requisitos de bordo são menos conflitantes que no caso de sistemas forçados uniformemente, resultando em uma estrutura com menos defeitos. As Figs. 14.3(a) e (c) mostram que a estrutura prolonga-se pela região subcrítica e que as células de convecção tendem a assumir a direção paralela à parede mais subcrítica, nas proximidades dessa. O efeito é melhor mostrado na Fig. 14.4.

Essa figura apresenta o estado estacionário de três sistemas de Rayleigh-Bénard submetidos a forçagem com gradiente do parâmetro de bifurcação na direção  $x$  e com a metade

Esses resultados sugerem que sistemas submetidos a forçagens não uniformes, com regiões subcríticas e onde a orientação do vetor de onda não seja especificada, possam desenvolver estruturas mais complexas, ou com outro mecanismo definindo a estrutura espacial que se forma. O estudo dessas estruturas utilizando o formalismo de equações de amplitude exigiria a especificação de um número suficiente de modos para permitir a curvatura da estrutura formada. Optamos então por conduzir o estudo utilizando a equação de Swift-Hohenberg. Foram feitas simulações numéricas com o parâmetro de bifurcação aumentando linearmente ao longo da direção  $x$ . Foram estudados casos onde  $\varepsilon < 0$  junto à parede lateral esquerda, bem como casos em que  $\varepsilon = 0$  junto à mesma. Os resultados são comparados aos obtidos com forçagens uniformes.

A Fig. 14.3 mostra o estado estacionário de quatro estruturas obtidas em sistemas forçados com gradiente do parâmetro de bifurcação apontando na direção  $x$ . Parte da célula encontra-se em estado subcrítico nas Figs. 14.3(a) e (c), enquanto a parede lateral esquerda das células mostradas nas Figs. 14.3(b) e (d) é posta na condição crítica:  $0 \leq \varepsilon \leq 0,5$ .

Observa-se que as estruturas da Fig. 14.3 descrevem estruturas com densidade de defeitos menor do que a das estruturas uniformemente forçadas, mostradas na Fig. 14.1. O efeito subcrítico aparece com clareza nas Figs. 14.3(b) e (d), onde a estrutura é perpendicular à parede lateral direita, em que o parâmetro de bifurcação atinge o maior valor e à parede lateral inferior ( $y = 0$ ). Automaticamente, a estrutura é paralela à parede lateral esquerda. Os requisitos de bordo são menos conflitantes que no caso de sistemas forçados uniformemente, resultando em uma estrutura com menos defeitos. As Figs. 14.3(a) e (c) mostram que a estrutura prolonga-se pela região subcrítica e que as células de convecção tendem a assumir a direção paralela à parede mais subcrítica, nas proximidades dessa. O efeito é melhor mostrado na Fig. 14.4.

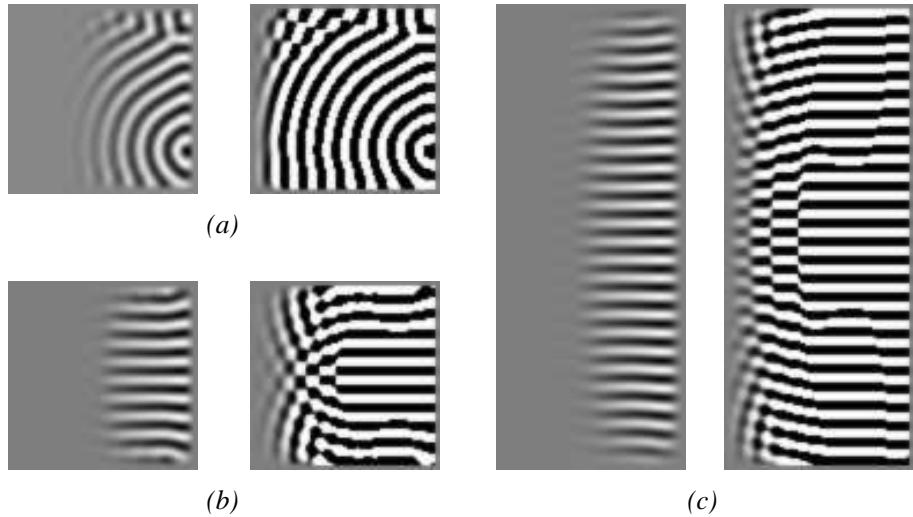


Figura 14.4: Três sistemas de Rayleigh-Bénard submetidos a forçagem com gradiente do parâmetro de bifurcação na direção  $x$  e com a metade da célula mantida em condições subcríticas. (a):  $-1 \leq \varepsilon \leq 1$  e condição inicial aleatória; (b) e (c):  $-0,5 \leq \varepsilon \leq 0,5$  e  $-0,1 \leq \varepsilon \leq 0,1$ , respectivamente e condição inicial de uma estrutura de células paralelas ao gradiente do parâmetro de bifurcação. As imagens à esquerda de (a), (b) e (c) foram feitas com escala linear de tons de cinza. As imagens à direita correspondem à mesma estrutura, no mesmo instante, mas foram construídas com uma escala não linear de tons de cinza para realçar a fraca estrutura que se forma na região subcrítica.

da célula mantida em condições subcríticas. A estrutura formada em (a) foi obtida com  $-1 \leq \varepsilon \leq 1$  e condição inicial aleatória; As estruturas formadas em (b) e (c) foram obtidas com rampas de  $-0,5 \leq \varepsilon \leq 0,5$  e  $-0,1 \leq \varepsilon \leq 0,1$ , respectivamente e com condição inicial de uma estrutura de células paralelas ao gradiente do parâmetro de bifurcação. As imagens à esquerda de (a), (b) e (c) foram feitas com escala linear de tons de cinza. As imagens à direita correspondem à mesma estrutura, no mesmo instante, mas foram construídas com uma escala não linear de tons de cinza para realçar a fraca estrutura que se forma na região subcrítica. Essas imagens mostram que mesmo no caso em que se impõe uma condição inicial de células paralelas ao gradiente de  $\varepsilon$  e a geometria favorece a persistência dessas estruturas, as células se curvam na região subcrítica e procuram tomar a direção paralela à parede mais subcrítica, próximo à mesma.

### 14.3.3 Saturação, dinâmica de fase e estados estacionários

Uma questão que se coloca nas simulações numéricas refere-se ao problema de se identificar quando a uma estrutura espacial atingiu o estado estacionário e a simulação está concluída. Os resultados existentes na literatura mostram o uso de critérios baseados na saturação da amplitude, ou na taxa de variação temporal do potencial de Lyapunov associado ao modelo, quando esse potencial existe, para caracterizar estados assintóticos de equilíbrio [70, 104]). Entretanto, a evolução de uma estrutura em direção ao equilíbrio inclui a saturação da amplitude e a evolução da fase. Critérios de identificação do estado estacionário baseados apenas na evolução da amplitude não captam a evolução da fase, que é mais lenta do que a da amplitude (ver Sec. 13.6.4). A fase da estrutura se altera devido a movimentos da

estrutura saturada, à dilatação ou à compressão da mesma, ou à eliminação de defeitos. Em muitos casos a evolução se acelera nos momentos de eliminação de defeitos surgidos na formação da estrutura.

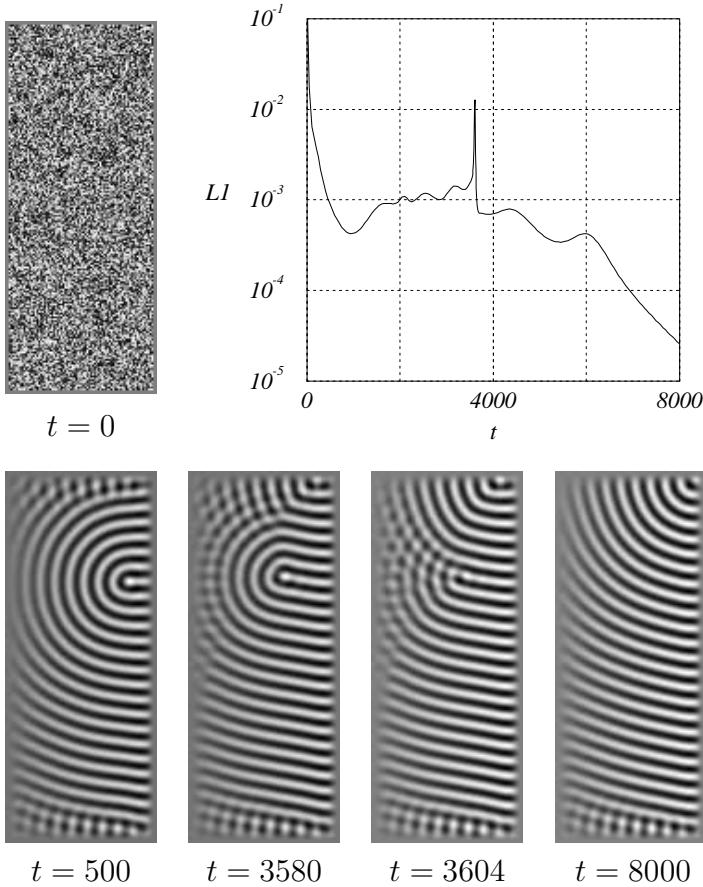


Figura 14.5: Instabilidade de um foco em uma estrutura de convecção de Rayleigh-Bénard modelada pela Eq. de Swift-Hohenberg. A célula tem dimensões de  $20 \times 40$  e o parâmetro de bifurcação  $\varepsilon$  varia linearmente, de  $0 \leq \varepsilon \leq 0.5$ , ao longo da direção  $x$ . O colapso do foco ocorre em  $t \approx 3600$ .

A rápida propagação do foco é precisamente registrada pelo pico mostrado no gráfico de evolução de  $L_1$ .

#### 14.3.4 Outras forçagens e classificação das estruturas de acordo com a densidade de defeitos

Tendo identificado o efeito subcrítico de bordas, responsável por tornar as células de convecção paralelas a paredes laterais subcríticas, procuramos verificar o tipo de estrutura que o sistema desenvolve quando todas as paredes se encontram em condição subcrítica. A resposta é dada pelos resultados da simulação de uma célula de convecção quadrada, de dimensões  $20 \times 20$ , forçada com uma distribuição gaussiana do parâmetro de bifurcação,

A evolução das estruturas apresentadas nesse capítulo foi monitorada registrando-se a taxa de variação de uma norma que mede a distância entre dois estados do sucessivos do sistema. Denominamos por  $L_1$  a variável que mede a taxa de variação da norma e a definimos por: [31, 131, 17]:

$$L_1 = \frac{1}{\Delta t} \frac{\sum_{i,j} |u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n|}{\sum_{i,j} |u^{n+1}|}, \quad (14.4)$$

onde as somas são feitas sobre os pontos  $i$  e  $j$  da malha espacial usada nas simulações numéricas.  $\Delta t$  é o passo de integração e  $n$  e  $n + 1$  representam dois passos sucessivos.  $L_1$  é sensível à saturação da estrutura e à evolução a fase. A Fig 14.5 mostra como  $L_1$  capta importantes aspectos da evolução da estrutura em formação. Partindo de uma condição inicial aleatória, a célula de convecção desenvolve inicialmente um foco junto à parede esquerda. Um novo foco formado no canto superior esquerdo propaga-se rapidamente e aniquila o primeiro.

com o máximo localizado no centro da célula:

$$\varepsilon(x, y) = 0.8 e^{-(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2/0.5} - 0.5 \quad (14.5)$$

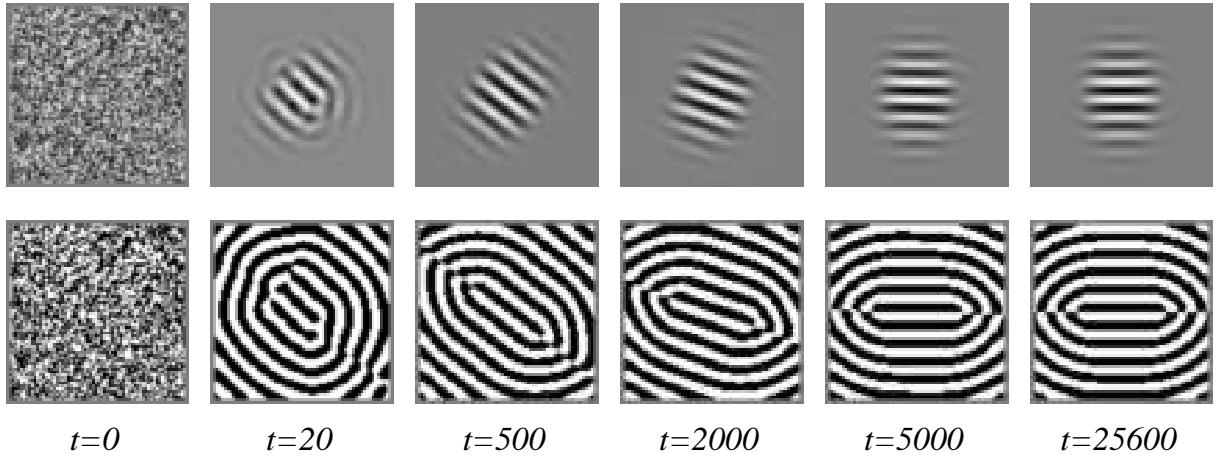


Figura 14.6: Estrutura de Rayleigh-Bénard formada com distribuição gaussiana de  $\varepsilon$  (Eq. 14.5). Na primeira linha: imagens feitas com escala linear de tons de cinza. Segunda linha: imagens feitas com escala não linear de tons de cinza para realçar a fraca estrutura que se forma na região subcrítica. Essas imagens mostram a tendência das células de convecção assumirem direção paralela às paredes subcríticas, próximo às mesmas.

As dimensões da célula são  $L = 2r$  e as coordenadas de  $r_0$  foram adotadas como  $(x = r, y = r)$ . A evolução da célula de convecção, partindo de uma condição de contorno aleatório, é mostrada na Fig. 14.5. A estrutura se orienta inicialmente, na direção de uma das diagonais e gira, sob ação do efeito subcrítico de bordas, até se tornar paralela a duas das paredes laterais. A estrutura se curva na região subcrítica de modo a evitar a direção perpendicular às outras duas paredes laterais. Esses resultados sugerem que o efeito subcrítico de bordas seja menos restritivo do que o efeito supercrítico, que exige células perpendiculares às paredes. Consequentemente, a estrutura com regiões subcríticas forma estruturas com menor densidade de defeitos.

De fato, sistemas estendidos, sujeitos a forçagem uniforme, ou são forçados fracamente e as células de convecção se aproximam perpendicularmente às paredes laterais, ou são forçados fortemente e o requisito de bordo não é estritamente obedecido. No primeiro caso, a estrutura apresenta defeitos que surgem da necessidade de acomodar domínios em que as células têm orientações diferentes. No segundo caso, a forçagem mais forte leva à "fusão" da estrutura [164], pelo aumento da densidade de defeitos. Os resultados aqui apresentados mostram a existência de uma nova classe de estruturas espaciais, caracterizada por uma densidade de defeitos muito menor do que as obtidas em células forçadas uniformemente. Essas estruturas se desenvolvem quando as paredes laterais são mantidas em condição subcrítica. A Fig. 14.7 mostra diferentes classes de defeitos obtidos em simulações que se iniciaram com a mesma condição inicial aleatória, mas com diferentes tipos de forçagem.

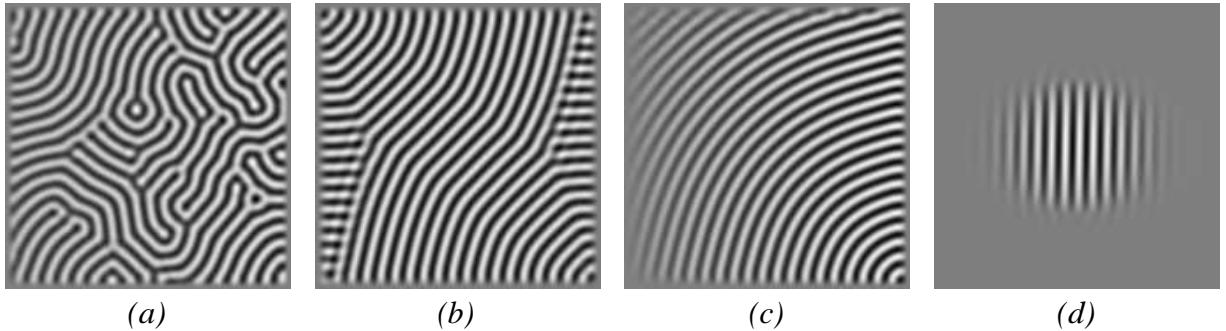


Figura 14.7: Resultados obtidos da integração numérica da Eq. de Swift-Hohenberg, a partir de condições iniciais aleatórias. Em (a): o parâmetro de bifurcação varia linearmente de 0,5, na parede esquerda, a 1, na parede direita. Em (b) parâmetro de bifurcação uniforme em todo o sistema ( $\varepsilon = 0,5$ ). Em (c): o parâmetro de bifurcação varia linearmente de 0, na parede esquerda, a 0,5, na parede direita. O nível de forçagem mais baixo do que em (a) e a tendência da estrutura de se alinhar paralelamente às paredes laterais quando  $\varepsilon \leq 0$  resultam em uma estrutura com nível de defeitos significativamente menor do que em (a). Em (d): Resultado obtido com uma distribuição gaussiana do parâmetro de bifurcação, sendo  $\varepsilon < 0$  próximo às paredes. Apesar da distribuição circular de  $\varepsilon$  observa-se a forma oval da estrutura, que mostra que a modulação da estrutura se faz com mais dificuldade na direção do vetor de onda do que na direção perpendicular, o que justifica a introdução de escalas lentas diferentes em cada direção e a forma do termo espacial da Eq. (13.77). Nos quatro casos, a estrutura mostrada corresponde ao estado estacionário, obtido ao fim da evolução.

### 14.3.5 Seleção do comprimento de onda da estrutura

Esta secção trata da determinação do comprimento de onda e do conteúdo espectral de uma estrutura de Rayleigh-Bénard, em termos de modos de Fourier. A Fig. 14.8 mostra uma estrutura (a) e o correspondente espectro de Fourier (b). O espectro mostra que os modos mais importantes situam-se em um anel circular.

Para a identificação da importância relativa da amplitude dos modos presentes na estrutura, sem levar em conta a orientação dos mesmos, procedeu-se à soma das amplitudes encontradas em anéis circulares da transformada de Fourier da estrutura, centrados em  $\kappa = 0$  e limitados por:

$$n\Delta\kappa - \Delta\kappa/2 \leq \kappa < n\Delta\kappa + \Delta\kappa/2,$$

onde,  $\Delta\kappa = 2\pi/l$  e  $n = 1, 2, \dots$ . Denominamos o número obtido por  $A$ . Os valores obtidos foram normalizados pelo  $\max(A)$  e plotados na Fig. 14.8c, em função de  $\kappa/\kappa_c$ .

O resultado encontra-se na Fig. 14.8. A curva apresenta um máximo em  $\kappa/\kappa_c = 1.04$ , que definimos como  $\kappa_f/\kappa_c$ , com  $\kappa_f$  sendo o modo fundamental da estrutura. Concluímos que o modo fundamental é, nesse caso, ligeiramente superior ao crítico.

## 14.4 Conclusões

Este capítulo apresenta os resultados de simulações numéricas da formação de estruturas de convecção em sistemas estendidos de Rayleigh-Bénard, sujeitos a forçagem não uniforme e com paredes laterais rígidas. As simulações foram feitas por integração numérica da equação de Swift-Hohenberg. Dois são os resultados principais obtidos:

1. O efeito de orientação da estrutura, devido ao gradiente do parâmetro de bifurcação é sempre dominado pelos efeitos de bordas, independentemente das dimensões do sistema.

2. Identificou-se com clareza um efeito de bordas subcrítico, que tende a orientar as células de convecção

paralelamente a uma parede lateral subcrítica. O efeito é forte o suficiente para alterar qualitativamente a estrutura com relação à desenvolvida em condições de forçagem uniforme: células paralelas a uma parede são automaticamente perpendiculares às paredes adjacentes e o foco desenvolvido nos cantos de sistemas forçados uniformemente se torna dispensável.

Sistemas forçados uniformemente desenvolvem tipicamente um foco em cada extremidade de uma das diagonais da célula de convecção, enquanto sistemas com uma parede em condição subcrítica desenvolve estruturas com um foco apenas. O efeito sugere que o nível de defeitos de uma estrutura de rolos possa ser controlado por forçagens não uniformes. As simulações feitas com todas as paredes laterais em condições subcríticas desenvolveram estruturas totalmente sem defeitos.

A dominância dos efeitos de bordos sobre os de centro do sistema pode decorrer do fato de que, quando parte do sistema tem regiões subcríticas e supercríticas, há sempre uma região em condições críticas, onde o comprimento de correlação diverge.

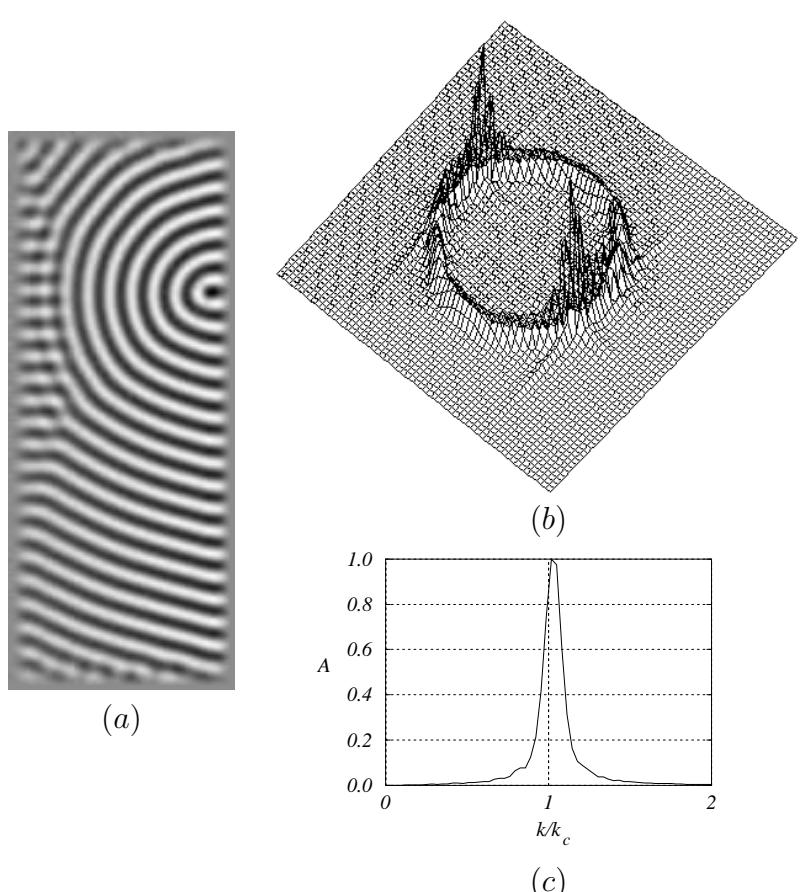


Figura 14.8: Uma estrutura de convecção de Rayleigh-Bénard, seu espectro de Fourier e determinação do modo fundamental da estrutura.



# Capítulo 15

## Caos Determinístico em Sistemas de Rayleigh-Bénard

### 15.1 O Modelo de Lorenz

Esse capítulo aborda o problema do comportamento temporal de um sistema de Rayleigh-Bénard de dimensões suficientemente pequenas para que não haja nenhuma modulação espacial da estrutura 1984 [12]). A estrutura formada se constitui de células de convecção na forma de cilindros retos alinhados na direção  $y$ , isso é, com o vetor de onda orientado na direção  $x$ . A Fig. 15.1 mostra o tipo de estrutura estudada. Trata-se de um problema bi-dimensional, ao qual pode-se associar uma função corrente para o campo de velocidades.

Decompõe-se os campos de velocidade de temperatura em modos de Fourier, com a amplitude de cada modo considerada dependente do tempo mas não, das coordenadas espaciais. Estuda-se a evolução no tempo de três modos independentes, resultante da interação não linear forte entre os mesmos. Os modos considerados são o harmônico fundamental da função corrente, o harmônico fundamental do desvio de temperatura em relação ao perfil do estado de repouso e o desvio do perfil de temperaturas do estado de repouso, independente das coordenadas espaciais. Esse modo homogêneo, cujas componentes do campo de velocidades são identicamente nulas, resulta da interação não linear do primeiro modo instável com ele mesmo, além do limite de estabilidade. Essa propriedade é mostrada na Sec. 13.3.3. Obtém-se um sistema de três equações diferenciais ordinárias não-lineares 1984 [12]. Trata-se do sistema dinâmico conhecido por Modelo de Lorenz [98]. A

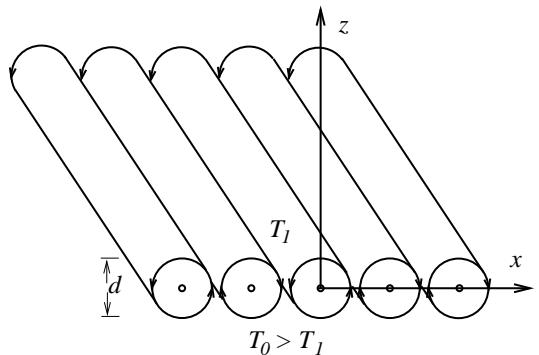


Figura 15.1: Um sistema confinado de Rayleigh Bénard. As células de convecção são formadas por cilindros retos e a amplitude dos campos de velocidade e temperatura independente da posição. A forte interação não linear entre o primeiro modo que emerge da instabilidade do estado de repouso com ele mesmo e com novos modos gerados pode dar origem a comportamento aperiódico.

dimensão do espaço de fases de desse sistema é igual a três, o que preenche uma das condições necessárias para a emergência de comportamento aperiódico e com sensibilidade às condições iniciais, isso é, caótico (ver Vol. 1 e Apêndice D).

Consideramos o sistema mostrado na Fig. 15.1, com a origem do eixo vertical  $z$  situa-se no centro das células de convecção. As condições de contorno da velocidade nas superfícies superior e inferior são do tipo livre-livre, isso é  $v_z = 0$  e  $\partial v_x / \partial z = 0$  em  $z = \pm 1/2$ .

Reescrevemos as equações adimensionais da continuidade, de Navier-Stokes e da temperatura, para o campo bidimensional perturbado. Como o estado base do campo de velocidades é o de repouso, as componentes da velocidades que aparecem nas Eqs. 12.8 a 12.10 são componentes de perturbação. O campo de temperaturas é substituído por:

$$T = \bar{T} + \theta = 1 - z + \theta.$$

Substituindo a forma do campo de perturbado de temperaturas na componente segundo a direção  $z$  da Eq. 12.9 obtém-se:

$$\frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} + Ra \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] = -\frac{Ra}{Pr} \frac{\partial p}{\partial z} - \left[ \frac{1}{\beta |\Delta T_0|} + (z - \theta) \right] + \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).$$

A equação de evolução da perturbação da temperatura é obtida substituindo-se a forma perturbada na Eq. 12.10. Obtém-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + Ra \left( v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} - v_z + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right).$$

O sistema de equações que rege o comportamento bidimensional de perturbações do sistema confinado de Rayleigh-Bénard é portanto:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (15.1)$$

$$\frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial t} + Ra \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] = -\frac{Ra}{Pr} \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (15.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} + Ra \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] &= -\frac{Ra}{Pr} \frac{\partial p}{\partial z} - \left[ \frac{1}{\beta |\Delta T_0|} + (z - \theta) \right] + \\ &\quad \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (15.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + Ra \left( v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} - v_z + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right). \quad (15.4)$$

Como o campo de velocidades é bidimensional podemos definir uma função corrente, da qual o campo de velocidades deriva. Notamos que funções corrente satisfazem automaticamente a equação da continuidade. A função corrente é tal que:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{e:} \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

As condições de contorno do campo de velocidades são satisfeitas se a função corrente satisfizer às condições abaixo:

$$\psi|_{z=\pm 1/2} = 0 \quad \text{e:} \quad \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right|_{z=\pm 1/2} = 0$$

As condições acima são atendidas por uma função do tipo:

$$\psi(t, x, z) = \frac{\psi_1(t)}{Ra} \cos \pi z \sin \kappa x,$$

o que resulta em um campo de velocidades da forma:

$$v_x = \pi \frac{\psi_1}{Ra} \sin \pi z \sin \kappa x \quad \text{e:} \quad v_z = \kappa \frac{\psi_1}{Ra} \cos \pi z \cos \kappa x.$$

A pressão é eliminada das Eqs. 15.2 e 15.3, derivando-se a primeira em relação  $z$ , a segunda em relação a  $x$  e subtraindo o resultado obtido com a operação sobre a segunda, do obtido com a primeira. O processo representa a aplicação do operador rotacional à equação de Navier-Stokes. Obtém-se:

$$\frac{1}{Pr} \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + Ra \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right) \right] = -\nabla^4 \psi - \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (15.5)$$

onde:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4}.$$

A interação não-linear dos modos de primeira ordem produz um modo no qual as três componentes da velocidade são nulas e a temperatura independe da posição no plano horizontal (Eq. 13.51). Decomponemos o campo de temperatura em modos de Fourier e retemos apenas o fundamental e o modo homogêneo:

$$\theta = \frac{1}{Ra} [\theta_1(t) \cos \pi z \cos \kappa x + \theta_2(t) \sin 2\pi z].$$

Substituindo as expressões de  $\psi$ ,  $v_x$ ,  $v_z$  e  $\theta$ , na Eq. 15.5 verifica-se que:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0$$

e obtém-se uma equação ordinária de primeira ordem para a amplitude  $\psi_1$  da função corrente:

$$\dot{\psi}_1 = -Pr \psi_1 + \frac{\kappa Pr}{\pi^2 + \kappa^2} \theta_1. \quad (15.6)$$

Reescrevemos a Eq. 15.4 e expressando as componentes da velocidade em termos da função corrente:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + Ra \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = Ra \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right). \quad (15.7)$$

Substituindo as expressões da função corrente  $\psi$  e de suas derivadas, assim como a expressão do desenvolvimento da perturbação  $\theta$  da temperatura no termo não linear da Eq. 15.4 encontramos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \pi \kappa \frac{\psi_1}{Ra} \left[ -\frac{\theta_1}{2} \sin 2\pi z + 2\theta_2 \cos \pi z \cos 2\pi z \cos \kappa x \right].$$

Desenvolvendo o último termo da igualdade acima encontramos:

$$\begin{aligned}\cos \pi z \cos 2\pi z &= \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{2} \frac{e^{2i\pi z} + e^{-2i\pi z}}{2} = \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z} + e^{3i\pi z} + e^{-3i\pi z}}{4} \\ &= \frac{1}{2} (\cos \pi z + \cos 3\pi z)\end{aligned}$$

Portanto:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \pi \kappa \frac{\psi_1}{Ra} \left[ -\frac{\theta_1}{2} \sin 2\pi z + \theta_2 (\cos \pi z + \cos 3\pi z) \cos \kappa x \right].$$

Desenvolvemos os termos do Laplaciano da perturbação de temperatura da Eq. 15.4:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -(\pi^2 + \kappa^2) \frac{\theta_1}{Ra} \cos \pi z \cos \kappa x - 4\pi^2 \frac{\theta_2}{Ra} \sin 2\pi z.$$

Reagrupando os termos da Eq. 15.7 obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 \cos \pi z \cos \kappa x + \dot{\theta}_2 \sin 2\pi z &= -\pi \kappa \psi_1 \left[ -\frac{\theta_1}{2} \sin 2\pi z + \theta_2 (\cos \pi z + \cos 3\pi z) \cos \kappa x \right] + \\ Ra \kappa \psi_1 \cos \pi z \cos \kappa x - (\pi^2 + \kappa^2) \theta_1 \cos \pi z \cos \kappa x - 4\pi^2 \theta_2 \sin 2\pi z.\end{aligned}$$

A equação acima só admite uma solução geral para o campo de temperaturas se o de velocidades for identicamente nulo. Outra possibilidade é desprezar o terceiro harmônico, que se origina da interação não linear dos modos e dividir a equação em duas, exigindo igualdade dos termos de cada lado da equação, que contém  $\cos \pi z \cos \kappa x$  e  $\sin 2\pi z$ . Nesse caso obtemos:

$$\dot{\theta}_1 = -5\pi \kappa \psi_1 + Ra \kappa \psi_1 - (\pi^2 + \kappa^2) \theta_1 \quad (15.8)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\pi \kappa \psi_1}{2} \theta_1 - 4\pi^2 \theta_2. \quad (15.9)$$

As Eqs. 15.6 a 15.9 simplificam-se com a mudança de variáveis:

$$\begin{aligned}t' &= (\pi^2 + \kappa^2) t & X &= \frac{\pi \kappa}{\sqrt{2}(\pi^2 + \kappa^2)} \psi_1 \\ Y &= \frac{\pi \kappa^2}{\sqrt{2}(\pi^2 + \kappa^2)^3} \theta_1 & Z &= \frac{\pi \kappa^2}{(\pi^2 + \kappa^2)^3} \theta_2.\end{aligned}$$

Definindo os parâmetros:

$$r = \frac{\kappa^2}{(\pi^2 + \kappa^2)^3} Ra \quad \text{e:} \quad b = \frac{4\pi^2}{\pi^2 + \kappa^2}$$

obtém-se um sistema de três equações diferenciais ordinárias não lineares conhecido como modelo de Lorenz (1963):

$$\frac{dX}{dt} = -Pr X + Pr Y \quad (15.10)$$

$$\frac{dY}{dt} = r X - Y - XZ \quad (15.11)$$

$$\frac{dZ}{dt} = XY - b Z. \quad (15.12)$$

Essas equações podem ser escritas de forma resumida como  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ , onde  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  é o vetor de funções não lineares do membro direito das Eqs. 15.6 a 15.9.

As trajetórias que se originam de qualquer ponto (ver Apêndice D) convergem para um subespaço compacto denominado *atrator*, cuja dimensão é menor do que a do espaço de fases, mas que não pode ser posto em correspondência biunívoca com subespaços compactos de dimensão 2.

Trajetórias que se originam de pontos arbitrariamente próximos se afastam, inicialmente de forma exponencial e, ao fim de tempos finitos não se encontram mais próximas. Qualquer erro na identificação da condição inicial impede a previsão sobre a posição do pontos no espaço de fases além de um tempo finito, caracterizando o regime caótico.

A Fig. 15.2 mostra a evolução de uma condição inicial rumo ao atrator de Lorenz. Parâmetros utilizados:  $Pr = 10$ ,  $r = 28$  e  $b = 8/3$ .

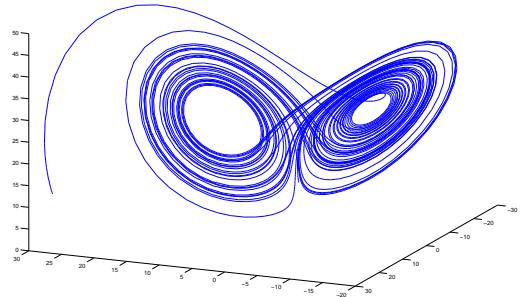


Figura 15.2: Evolução de uma condição inicial rumo ao atrator de Lorenz. Parâmetros utilizados:  $Pr = 10$ ,  $r = 28$  e  $b = 8/3$ .

## 15.2 Coerência do Modelo

O modelo de Lorenz é coerente com o requisito de que as variáveis relevantes do problema,  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  não devem divergir. Essa propriedade fica demonstrada pela existência de uma superfície fechada contendo a condição inicial, que delimita uma região na qual o vetor  $\mathbf{X}$  se mantém indefinidamente. A condição é satisfeita se o produto escalar da normal à superfície orientada para fora da mesma e o vetor velocidade,  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ , for negativo em todos os pontos da superfície. Tomemos como superfície o elipsóide de revolução dado por [12]):

$$f(X, Y, Z) = \frac{X^2}{2Pr} + \frac{Y^2}{2} + \frac{Z^2}{2} - (r+1)Z - \mu = 0. \quad (15.13)$$

O gradiente de  $f$  é dado por:

$$\mathbf{grad} f = \frac{X}{Pr} \mathbf{e}_x + Y \mathbf{e}_y + [Z - (r+1)] \mathbf{e}_z.$$

Fazendo o produto escalar do  $\mathbf{grad} f$  pela velocidade de evolução de  $\mathbf{X}$ , isso é, por  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ , cujas componentes são dadas pelo membro direito das Eqs. 15.10 a 15.12, obtemos:

$$\mathbf{grad} f \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}) = -X^2 - Y^2 - bZ^2 + (r+1)bZ.$$

Os termos quadráticos dominam o valor do produto escalar acima, para valores de  $\mu$  suficientemente grandes. Nessa situação o produto escalar é sempre negativo, confirmando o fato de que o vetor velocidade aponta para dentro da superfície e o sistema fica restrito a uma região finita do espaço de fases.

Cabe ainda a observação de que, sendo o modelo de Lorenz dissipativo, a contração exponencial de volumes no espaço de fases exclui a existência de atratores em forma toroidal, que exigiriam a conservação do volume interno do sólido. O modelo de Lorenz, como todo sistema dinâmico dissipativo, autônomo, definido em espaços de fase tridimensionais, não tem solução quase-periódica [12].

### 15.3 Problemas

1. Mostrar que o modelo de Lorenz é dissipativo, isso que  $\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{X}) < 0$  (ver Apêndice D).
2. Os valores mais usados na análise do modelo de Lorenz são  $Pr = 10$ ,  $r = 28$  e  $b = 8/3$ . Determinar os ponto fixos do modelo para esses valores dos parâmetros, escrever as equações linearizadas de evolução de pequenas perturbações em torno desses pontos e analisar a estabilidade linear dos mesmos, em função de valores assumidos pelo número de Rayleigh renormalizado,  $r$ . Mostrar que o ponto fixo é estável para  $r < 1$ .

## Parte V

# Estabilidade Hidrodinâmica em Células Eletroquímicas



# Capítulo 16

## Estabilidade Hidrodinâmica em Células Eletroquímicas – Campos Hidrodinâmico e de Concentração Desacoplados

### 16.1 Introdução

Esse capítulo aborda o problema da estabilidade linear de uma generalização da solução descoberta por Von Kármán (1921) [141] para o campo hidrodinâmico estacionário de um fluido incompressível, que se desenvolve nas proximidades do eixo de um disco rotatório e cujas principais características foram discutidas no Vol. 1 desse livro.

O estudo de estabilidade apresentado comprehende os resultados até aqui obtidos, da formulação de teoria com a qual se procura compreender as instabilidades de corrente observadas experimentalmente na dissolução de eletrodos de disco rotatórios de ferro em soluções de ácido sulfúrico [133, 103, 132]. Aborda-se a estabilidade do campo hidrodinâmico em que a viscosidade apresenta um perfil estacionário estratificado na direção axial. Analisa-se a estabilidade linear do campo hidrodinâmico com relação a dois tipos de perturbação, denominadas, respectivamente, uni-dimensional e tri-dimensional. A primeira não tem dependência na direção azimutal e varia de forma monotônica na direção radial. Os resultados mostram que a taxa de crescimento dessa perturbação é sempre negativa, isso é, o campo hidrodinâmico é estável com relação a esse tipo de perturbação. Não obstante, a formulação do problema tem interesse didático por ser relativamente simples e por ilustrar o procedimento adotado mais à frente, no estudo da estabilidade do campo com relação a perturbações tri-dimensionais, que incluem variação periódica nas direções radial e azimutal.

Os primeiros estudos sobre a estabilidade do campo hidrodinâmico próximo ao eixo de um disco rotatório foram feitos por Smith (1946) [144] e tiveram caráter puramente experimental. Smith observou a formação de estruturas na forma de espirais periódicas nas direções radial e azimutal, que se formam além de certa distância do eixo do disco. Gregory, Stuart e Walker (1955) [71] apresentaram os resultados de estudo experimental e teórico a respeito das características de perturbações em forma de espirais estacionárias, isso é, que

giram com a velocidade angular do disco. O tratamento teórico não levava em conta os efeitos viscosos. Para a visualização o escoamento, os autores utilizaram uma técnica experimental que consiste em adicionar um pó de alumínio ao escoamento, o qual, transportado pelo escoamento, permitia a visualização das linhas de corrente. As espirais foram encontradas em raios, expressos em forma adimensional, iguais ou maiores do que  $R = 430$ , sendo o raio adimensional definido pela relação:

$$R = r_e^* \left( \frac{\Omega}{\nu} \right)^{1/2} \quad (16.1)$$

onde  $r_e^*$  é o raio dimensional,  $\Omega$  a velocidade angular do disco e  $\nu$ , a velocidade cinemática do fluido. O raio adimensional assim definido é, na verdade, o número de Reynolds do problema, que surge naturalmente nas equações que governam a evolução de pequenas perturbações.

Chinn & Litt (1972) [30] usaram uma técnica eletroquímicas para determinar a região de transição, encontrando o início das instabilidades na faixa de números de Reynolds compreendida entre 412 e 590. O valor crítico do número de Reynolds obtido experimentalmente varia de 182 a 530. Malik & Williamson (1985) [100] atribuem a discrepância entre os primeiros valores e os mais recentes, mais baixos, à insensibilidade das técnicas visuais utilizadas nas primeiras investigações sobre o problema.

A partir da década de 1980, as contribuições ao estudo da estabilidade do problema passaram a vir, sobretudo, de grupos interessados no controle da camada limite laminar que se desenvolve sobre asas enflexadas de aviões cuja velocidade de cruzeiro se encontra na região do alto subsônico [160]. O ponto de transição onde a camada limite que se desenvolve sobre essas asas perde a estabilidade ocorre mais para perto do bordo de ataque do que no caso de asas sem enflexamento, resultando em aumento do arraste devido às tensões de cisalhamento junto à superfície. Acredita-se que o deslocamento do ponto de transição se deva ao escoamento transversal, resultante do enflexamento. Como cerca de 60% do arraste dos modernos aviões de transporte é devido à tensão de cisalhamento junto à superfície das asas [94] e essa parcela aumenta quando o ponto de transição se desloca em direção ao bordo de ataque, comprehende-se o esforço feito nas últimas décadas no sentido de se reduzir a influência da componente transversal da velocidade sobre a estabilidade de camadas limite tridimensionais.

Tal como em asas enflexadas, o escoamento próximo ao eixo de discos rotatórios apresenta uma componente de velocidade secundária, na direção radial, imposta pela rotação do disco. Entretanto, o escoamento sobre discos rotatórios apresenta certas vantagens e simplificações que o tornam um protótipo particularmente adequado ao estudo da estabilidade de camadas limite tri-dimensionais, dentre as quais destacam-se os arranjos experimentais relativamente simples, onde se tem um nível satisfatório de controle sobre ao escoamento e a existência da solução de similaridade de Von Kármán. Não obstante, os escoamentos sobre discos rotatórios apresentam algumas características, como a inexistência de gradiente de pressão na direção radial e a espessura constante da camada limite, que não se encontram nos escoamentos sobre asas enflexadas.

Na década de 1980, Malik [101, 99] incluiu os efeitos viscosos na abordagem do problema e obteve a primeira curva de estabilidade neutra do campo hidrodinâmico de von Kármán, para perturbações que giram com a velocidade angular do disco. Essas perturbações não são, no entanto, as mais instáveis. Parte dos resultados aqui apresentados são

generalizações do trabalho de Malik. Faller (1991) [62] e Lingwood (1996) [95] abordaram o problema de estruturas que giram com velocidade angular diferente da do disco. Lingwood (1996) estudou a estabilidade do escoamento com relação a perturbações impulsivas aplicadas ao escoamento. Durante década de 1990, surgiram trabalhos a respeito da estabilidade de escoamentos compressíveis sobre discos rotatórios, dentre os quais destacam-se os de Gajjar (1998) [160].

Vários dos procedimentos adotados nesse trabalho são os consagrados na literatura e que foram utilizados por Malik (1986) [99] e Lingwood (1996) [95]. Dentre eles, a notação e o referencial utilizado nas análises de estabilidade linear é solidário à superfície do disco rotatório, isso é, gira com a velocidade angular do disco e as curvas de estabilidade neutra são apresentadas de forma semelhante. Essa abordagem facilita a validação dos resultados aqui apresentados e a comparação com os da literatura.

## 16.2 Instabilidades de Corrente no Sistema Fe – H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>

Células eletroquímicas que utilizam um eletrodo de disco rotatório são largamente empregadas em eletroquímica devido à simplicidade do arranjo experimental e ao fato de ser o fluxo de massa na interface entre o eletrodo e o eletrólito, independente da posição radial [92]. Além disso, a taxa de transferência de íons de do elterodo é convenientemente controlada pela velocidade de rotação imposta ao eletrodo. As Figs. 16.1 e 16.2 mostram o arranjo dessas células [119]. O arranjo compreende uma célula com um três eletrodos. O contra-eletrodo consiste de uma malha disposta ao longo de toda parede lateral da célula de modo a assegurar a uniformidade da distribuição do potencial no interior da célula. Os potenciais monitorados nos experimentos são medidos em relação ao do eletrodo de referência.

O eletrodo de trabalho consiste de um bastão cilíndrico revestido com uma resina, exceto em um pequeno disco na base, por onde flui a corrente. Esse eletrodo é acoplado a um motor cuja velocidade angular é ajustável.

As curvas de polarização obtidas experimentalmente na eletrodissolução de eletrodos de ferro em soluções 1M de H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> apresentam três regiões distintas [9]. A primeira região ocorre quando a sobretensão aplicada ao eletrodo de trabalho é baixa. A corrente elétrica é aproximadamente proporcional à sobretensão aplicada, sendo função apenas dessa e do processo de eletrodissolução. O processo de transporte de cargas no eletrólito não afeta a dissolução do ferro nem a corrente elétrica. Aumentando-se a sobretensão apli-



Figura 16.1: Arranjo da célula eletroquímica com eletrodo de disco rotatório usada no Depto./Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais da Escola Politécnica/COPPE-UFRJ.

cada entre os eletrodos observa-se uma mudança qualitativa na curva de polarização, em que a corrente passa a depender também do campo hidrodinâmico, que, por seu lado, é função da velocidade angular  $\Omega$ , imposta ao eletrodo de trabalho. Aumentando-se ainda mais a sobretensão aplicada observa-se um patamar na curva de polarização. A corrente torna-se independente da sobretensão, sendo função apenas da velocidade angular do eletrodo. Maiores velocidades angulares resultam em patamares de corrente mais elevados.

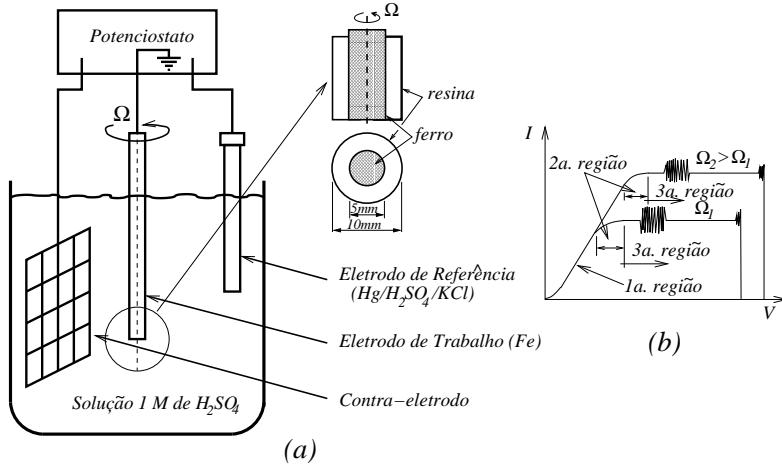


Figura 16.2: A célula eletroquímica e o eletrodo de disco rotatório em (a) e a curva de polarização típica, com as três regiões, mostrada de forma esquemática em (b).

instabilidade é, por contra, intrínseca ao sistema e motivo principal do estudo de estabilidade apresentado neste capítulo.

A maior parte das explicações para essas oscilações baseiam-se em mecanismos que propõe a existência de uma película de  $\text{FeSO}_4$  na superfície do eletrodo [140]. A precipitação e a dissolução do  $\text{FeSO}_4$  são aceitas na literatura, como responsáveis pelas oscilações na queda ômica de tensão observadas ao fim do patamar, onde ocorre a transição da superfície do eletrodo entre os estados ativo e passivo. No entanto, há razões para se supor que as oscilações do início do patamar sejam de outra natureza. Barcia *et al.* (1992) [9] verificaram, através de medidas de impedância eletrohidrodinâmica [158], que a superfície do eletrodo é uniformemente acessível antes e após a primeira instabilidade, não sendo portanto, coberta por película. Nessas condições, é pouco provável que o processo de eletro-dissolução leve à formação de uma película na faixa de potenciais em que a instabilidade ocorre e que a película desapareça ao fim da estabilidade, de modo a restaurar a corrente estacionária no mesmo nível de antes.

Barcia *et al.* (1992) [9] propõe que a formação de um gradiente axial de viscosidade, resultante do campo de espécies químicas proveniente da eletro-dissolução do ferro e que esse gradiente possa afetar a estabilidade do campo hidrodinâmico e, por consequência, a estabilidade da corrente. Essa é a razão do estudo de estabilidade aqui apresentado.

Ferreira *et al.* (1994) [63] e Geraldo (1998) [66] estudaram a influência da viscosidade do eletrólito nas oscilações de corrente observada no início do patamar de corrente. Esses

Duas instabilidades de corrente surgem no patamar de corrente. A primeira localiza-se no início do patamar e a segunda, no final, onde ocorre uma transição na superfície do eletrodo, que passa a um estado passivo, bloqueando a passagem da corrente [63]. Essa instabilidade é afetada pela impedância do equipamento de controle usado na aplicação da sobretensão imposta ao sistema e pode ser suprimida pelo uso de equipamento com características adequadas [56]. A primeira

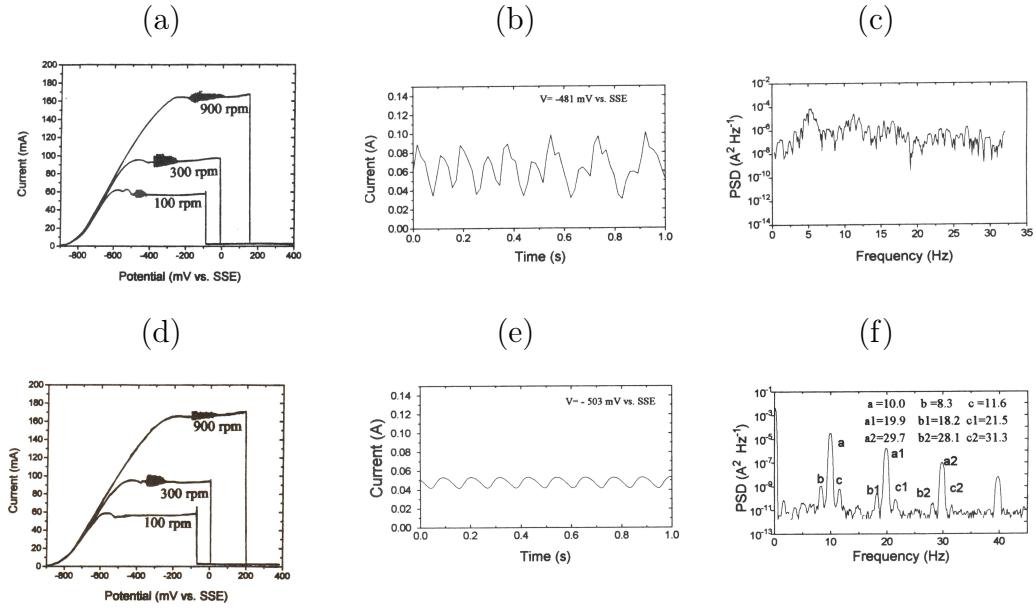


Figura 16.3: Curvas de polarização , séries temporais de corrente e densidade espectral de potência (PSD) na região da primeira instabilidade do patamar, obtidas na eletrodissolução de eletrodos de ferro em solução 1 M de  $\text{H}_2\text{SO}_4$ . (a), (b) e (c): curvas de polarização de eletrólito sem glicerol, série temporal de corrente a 100 rpm,  $-523\text{ mV}$  e PSD, respectivamente. (d), (e) e (f): Idem para eletrólito contendo solução 1 M de glicerol. A série temporal em (e) refere-se ao electrodo girando a 300 rpm sob potencial de  $-503\text{ mV}$  (cortesia de Geraldo *et al.*, 1998 [66]).

autores observaram que aumentando a viscosidade da solução pela adição de glicerol – e diminuindo, consequentemente, o número de Reynolds do experimento – as oscilações de corrente evoluem do regime caótico para o periódico e para um valor constante, suprimindo a instabilidade. Observaram também um aumento da instabilidade com o aumento da velocidade angular imposta ao eletrodo. Os principais resultados desses dois autores encontram-se na Fig. 16.3. A figura mostra as curvas de polarização obtidas experimentalmente, em três velocidades de rotação do eletrodo. As Figs. 16.3a - 16.3b referem-se, respectivamente, ao eletrólito sem glicerol e com uma solução 1 M de  $\text{H}_2\text{SO}_4$ . As Figs. 16.3c-d mostram as séries temporais das oscilações de corrente observadas a 100 rpm e  $-523\text{ mV}$  na Fig. 16.3a e a 300 rpm e 503 na Fig. 16.3b, respectivamente. A densidade espectral de potência é mostrada nas Figs. 16.3e-f. Em ambos os casos as oscilações de corrente a 900 rpm se estendem por uma faixa  $\Delta V$  de potenciais maior do que a rotações mais baixas. No caso do eletrólito contendo glicerol as oscilações desaparecem a 100 rpm. Além disso, as oscilações a 100 rpm na célula contendo glicerol são de caráter caótico, enquanto as que ocorrem a 300 rpm na célula com glicerol são periódicas.

### 16.3 O Campo Hidrodinâmico com a Viscosidade Estratificada

Essa seção apresenta o modelo para o campo hidrodinâmico estacionário, que se desenvolve nas proximidades do eletrodo de disco rotatório. O modelo é uma generalização da solução de similaridade descoberta por Von Kármán (1921) e descrita no Vol. 1 desse livro. O campo é regido pelas equações da continuidade e de conservação da quantidade de movimento de um fluido incompressível, reescritas no referencial giratório:

$$\mathbf{div} \mathbf{v} = 0 \quad (16.2)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \mathbf{div} \tau \quad (16.3)$$

onde  $\tau$  é o tensor de tensões viscosas de um fluido Newtoniano com a viscosidade  $\mu$  variável e:

$$\begin{aligned} -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} &= -2\Omega \mathbf{e}_z \times (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) = 2\Omega v_\theta \mathbf{e}_r - 2\Omega v_r \mathbf{e}_\theta \\ -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) &= -\Omega \mathbf{e}_z \times (\Omega \mathbf{e}_z \times (r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z)) = \Omega^2 r \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

Admite-se que o campo estacionário independa da coordenada azimutal  $\theta$  e que  $\partial p / \partial r \equiv 0$ . Nessas condições, o campo obedece às equações da continuidade e da quantidade de movimento (ver Vol. 1), que, escritas no referencial giratório, simplificam-se e tomam a forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (16.4)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = 2\Omega v_\theta + \Omega^2 r + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right] \quad (16.5)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -2\Omega v_r + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right] \quad (16.6)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] \quad (16.7)$$

As equações constitutivas do tensor de tensões são:

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} & \tau_{\theta\theta} &= 2\mu \frac{v_r}{r} & \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) & \tau_{\theta z} &= \tau_{z\theta} = \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} & \tau_{zr} &= \tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Desenvolvemos os termos viscosos das Eqs. (16.5 a 16.7), substituindo nas mesmas, as expressões dos elementos do tensor de tensões. Nesse estágio, introduzimos as hipóteses de que a componente vertical da velocidade e o perfil de viscosidade só variam ao longo da direção axial. A primeira hipótese foi utilizada também na obtenção das equações de von Kármán para o campo com viscosidade constante próximo ao eixo de um disco rotatório (ver Vol. 1). Obtemos, para o termo viscoso da Eq. (16.5):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right] &= \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( 2\mu r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - 2\mu \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right] \right\} = \\ \nu \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{2v_r}{r^2} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Para o termo viscoso da Eq. (16.6):

$$\frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right] = \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)$$

Para o termo viscoso da Eq. (16.6):

$$\frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] = \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + 2 \frac{\partial \nu}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Substituindo a expressão dos termos do tensor de tensão acima nas Eqs. (16.4 a 16.7) obtém-se:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (16.8)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = 2\Omega v_\theta + \Omega^2 r + \nu \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{2v_r}{r^2} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \quad (16.9)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -2\Omega v_r + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \quad (16.10)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + 2 \frac{\partial \nu}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (16.11)$$

Procura-se uma solução para as Eqs. (16.8-16.11) na forma:

$$\bar{v}_r = r \Omega F(z^*) \quad (16.12)$$

$$\bar{v}_\theta = r \Omega G(z^*) \quad (16.13)$$

$$\bar{v}_z = (\nu(\infty) \Omega)^{1/2} H(z^*) \quad (16.14)$$

$$\bar{p} = \rho \nu(\infty) \Omega P(z^*) \quad (16.15)$$

onde a coordenada adimensional  $z^*$  é definida como  $z^* = z[\Omega/\nu(\infty)]^{1/2}$  e  $\nu(\infty)$  é a viscosidade no seio da solução. Substitui-se a forma das componentes da velocidade e da pressão, dadas pelas Eqs. (16.12 a 16.15), nas Eqs. (16.8-16.11) e obtém-se o seguinte sistema de equações ordinárias não-lineares, para os perfis adimensionais  $F$ ,  $G$ ,  $H$  and  $P$ .

$$2F + H' = 0$$

$$F^2 - (G + 1)^2 + HF' = \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{\nu(z^*)}{\nu(\infty)} F' \right)$$

$$2F(G + 1) + HG' = \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{\nu(z^*)}{\nu(\infty)} G' \right)$$

$$P' + HH' = 2 \frac{\nu'(z^*)}{\nu(\infty)} H' + \frac{\nu(z^*)}{\nu(\infty)} H''$$

As condições de contorno para  $F$ ,  $G$  and  $H$  são  $F = H = G = 0$  junto à superfície do disco,  $z^* = 0$  e  $F = H' = 0$ ,  $G = -1$  quando  $z^* \rightarrow \infty$ . Para que as equações acima

possam ser integradas é necessário definir a forma do perfil de viscosidades. Utilizamos o perfil proposto por Barcia *et. al* (1992):

$$\frac{\nu(z^*)}{\nu(\infty)} = \frac{\nu(0)}{\nu(\infty)} + \left(1 - \frac{\nu(0)}{\nu(\infty)}\right) \frac{q^{1/3}}{\Gamma(4/3)} \int_0^{z^*} e^{-qz'^3} dz'^* \quad (16.16)$$

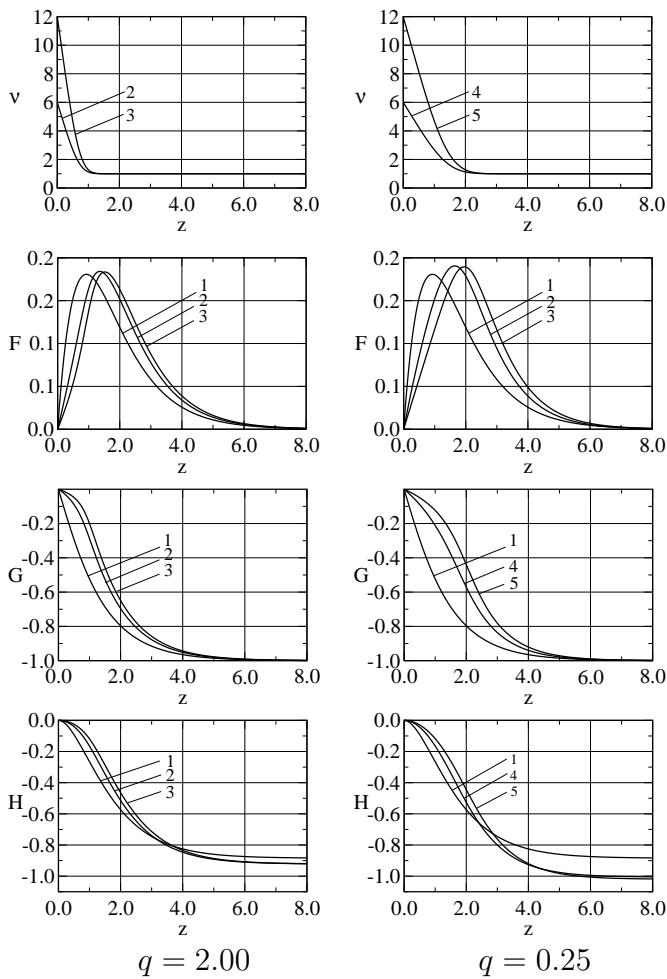


Figura 16.4: Viscosidade adimensional,  $\nu/\nu(\infty)$  e perfis de velocidade  $F$ ,  $G$  e  $H$ . As curvas No. 1 referem-se a fluidos com viscosidade constante. Curvas Nos. 2 e 3: fluidos com viscosidade variável,  $q = 2$ ; Curvas Nos. 3 e 4: idem,  $q = 0.25$  (ver Eq. 16.16).

A Eq. (16.16) contém dois parâmetros: a relação  $\nu(0)/\nu(\infty)$  e o fator  $q$ , que define a declividade do perfil de viscosidade próximo à superfície do eletrodo. As Eqs. (16.16-16.16) foram integradas numericamente, para os casos de fluido com viscosidade constante e de fluidos com viscosidade variável, em uma malha de pontos uniformemente espaçados, utilizando-se o método de Newton. Os perfis referentes aos casos de viscosidade variável foram calculados para quatro configurações de parâmetros, que são utilizadas na análise de estabilidade aqui apresentada. As configurações de viscosidade variável são definidas por dois valores de  $\nu(0)/\nu(\infty)$ , 6 e 12 e por dois valores de  $q$ , 2,00 e 0,25. Os perfis de viscosidade variável e das funções  $F$ ,  $G$  e  $H$  se encontram na Fig. (16.4). Observa-se que perfis de viscosidade calculados com  $q = 0,25$  atingem o valor do seio da solução a distâncias maiores da superfície do eletrodo, do que os perfis calculados com  $q = 2,00$ . Os perfis de velocidade são também, mais afetados no primeiro caso. Em particular, valores menores de  $q$  resultam em desvios maiores do valor de  $H$ , longe da superfície do eletrodo, isso é, em vazões maiores aproximando-se do mesmo.

## 16.4 Estabilidade Hidrodinâmica: Perturbações Unidimensionais

### 16.4.1 Linearização das equações e o campo perturbado

Esta seção analisa a estabilidade do campo estratificado, com relação a uma classe de perturbações, em relação às quais o campo estacionário é sempre estável. Essa análise tem interesse didático apenas.

O campo hidrodinâmico é escrito na forma da solução de Von Kármán mais uma perturbação. As variáveis da solução estacionária são identificadas com uma barra e as de perturbação, com um til:

$$\begin{aligned} v_r &= \bar{v}_r + \tilde{v}_r \\ v_\theta &= \bar{v}_\theta + \tilde{v}_\theta \\ v_z &= \bar{v}_z + \tilde{v}_z \\ p &= \bar{p} + \tilde{p} \end{aligned}$$

onde:

$$\tilde{v}_r = e^{\omega t} r \Omega f(z) \quad (16.17)$$

$$\tilde{v}_\theta = e^{\omega t} r \Omega g(z) \quad (16.18)$$

$$\tilde{v}_z = e^{\omega t} (\nu(\infty) \Omega)^{1/2} h(z) \quad (16.19)$$

Essas perturbações são denominadas de unidimensionais, por uma questão de conveniência.

As variáveis campo perturbado são introduzidas nas equações da continuidade e de Navier-Stokes. Subtrai-se os termos contendo apenas o estado de base e omite-se os termos não-lineares, contendo produtos das perturbações. As equações de evolução de pequenas perturbações tomam a forma:

$$\left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \tilde{v}_r + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (16.20)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} - \frac{2\bar{v}_\theta \tilde{v}_\theta}{r} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial z^2} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} \quad (16.21)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{v}_r \tilde{v}_\theta + \tilde{v}_r \bar{v}_\theta}{r} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} \quad (16.22)$$

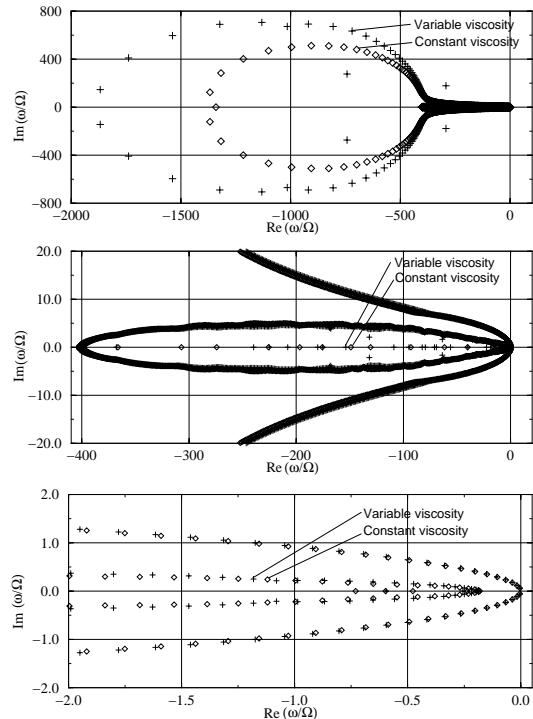


Figura 16.5: No alto: O espectro completo de autovalores para os casos de viscosidade constante e estratificado. Os dois gráficos seguintes mostram aumentos sucessivos da região próxima ao eixo das abscissas.

As equações acima foram obtidas com base na hipótese de que a pressão só varia na direção axial e de que todas as derivadas na direção azimutal se anulam. Consequentemente, as equações da continuidade e das componentes  $v_r$  e  $v_\theta$ , da quantidade de movimento se desacoplam da equação de  $v_z$  e podem ser resolvidas de forma independente. As expressões do estado base e as das perturbações são introduzidas nas equações linearizadas. Definindo a viscosidade adimensional como  $\nu^* = \nu(s^*)/\bar{\nu}(\infty)$  e reescrevendo a nova variável sem o asterisco obtemos:

$$2f + h' = 0 \quad (16.23)$$

$$\bar{\nu}f'' + \bar{\nu}'f' - Hf' - 2Ff + 2Gg - F'h = \frac{\omega}{\Omega}f \quad (16.24)$$

$$-2Gf + \bar{\nu}g'' + \bar{\nu}'g' - Hg' - 2Fg - G'h = \frac{\omega}{\Omega}g \quad (16.25)$$

As variáveis  $f$ ,  $f'$  and  $f''$  são eliminadas utilizando-se a equação da continuidade:

$$f = -\frac{h'}{2} \quad f' = -\frac{h''}{2} \quad f'' = -\frac{h'''}{2}$$

#### 16.4.2 O problema de autovalores e autofunções

Obtém-se um sistema de duas equações, uma contendo derivadas espaciais de terceira ordem e a outra, de segunda ordem:

$$\begin{pmatrix} \nu D^3 + (\nu' - H)D^2 - 2FD + 2F'; -4G \\ GD - G'; \nu D^2 + (\nu' - H)D - 2F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} = \frac{\omega}{\Omega} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \quad (16.26)$$

onde  $D^n = d^n/dz^n$ . A Eq. (16.26) define um problema generalizado de autovalores e autofunções. As autofunções são os modos normais que descrevem a perturbação na direção axial e as partes real e imaginária de cada autovalor representam a taxa de crescimento e a freqüência do modo.

Os únicos parâmetros do problema são os associados ao perfil de viscosidade imposto. O problema não tem um número de Reynolds, que é o parâmetro de bifurcação, que controla a estabilidade dos escoamentos. Como a solução estacionária já satisfaz às condições de contorno do problema a perturbação não deve modificar o campo junto à superfície do eletrodo, nem longe do mesmo. Consequentemente, requer-se que  $f = g = h = 0$  in  $z = 0$ . Adicionalmente, conclui-se da Eq. (16.23) que  $h' = 0$  na superfície do eletrodo. Em  $\xi \rightarrow \infty$ , impõe-se que a perturbação se anule ( $g = h = 0$ ).

#### 16.4.3 O procedimento numérico

O problema de autovalores e de autofunções é resolvido numericamente. As derivadas espaciais são representadas pelas seguintes fórmulas de segunda ordem, transformando o problema

original, no da determinação dos autovalores e autovetores de um operador algébrico linear:

$$\begin{aligned} X_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(X_i + X_{i+1}) \\ X'_{i+1/2} &= \frac{1}{\Delta z}(-X_i + X_{i+1}) \\ X''_{i+1/2} &= \frac{1}{2\Delta z^2}(X_{i-1} - X_i - X_{i+1} + X_{i+2}) \\ X'''_{i+1/2} &= \frac{1}{\Delta z^3}(-X_{i-1} + 3X_i - 3X_{i+1} + X_{i+2}) \end{aligned}$$

O problema é resolvido, utilizando-se a rotina *dgeev* da biblioteca LAPACK.

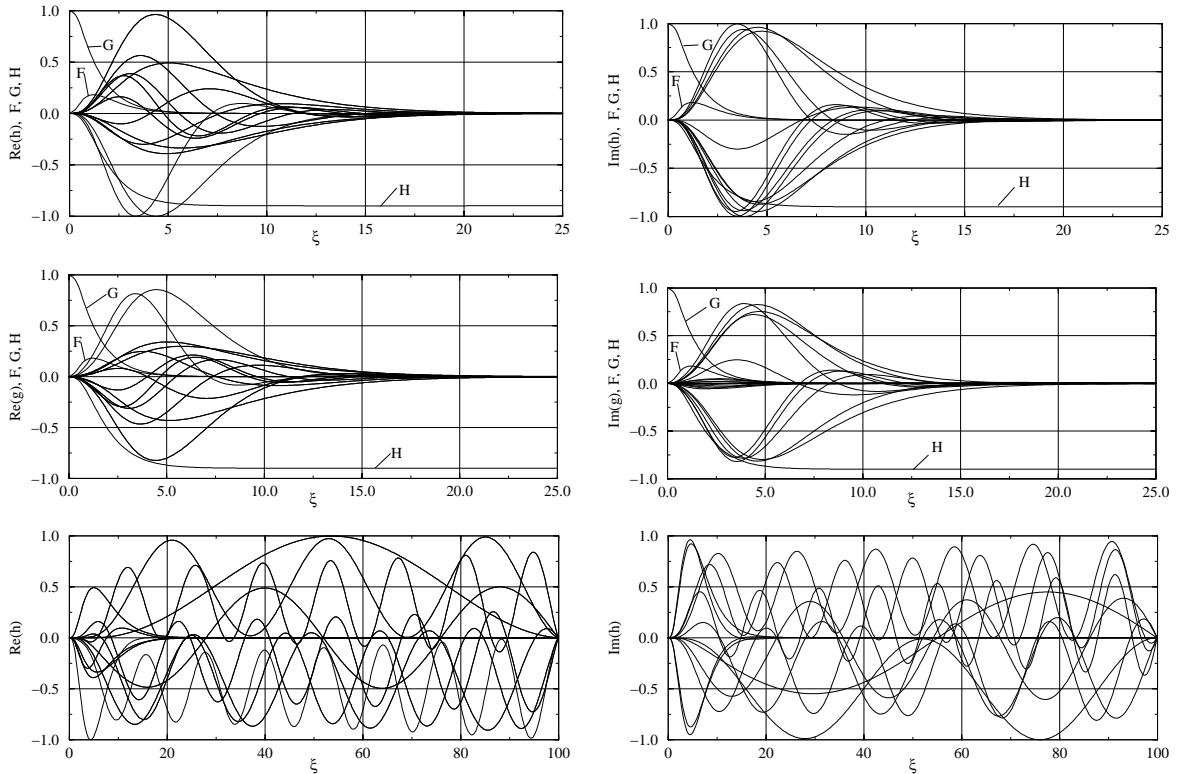


Figura 16.6: Primeira e segunda linhas: partes real e imaginária das autofunções  $h$  and  $g$  de maior parte real, que existem apenas nas proximidades do eletrodo. Terceira linha: partes real e imaginária da autofunção  $h$ , de maior parte real, que ocupa todo o domínio.

#### 16.4.4 Resultados

Os resultados são apresentados nas Figs. (16.5) e (16.6). A Fig. (16.5) mostra o espectro de autovalores associados aos problemas de viscosidade constante e estratificada, com  $\nu = 6.0$  and  $q = 15.0$ . Os espectros associados a outros perfis de viscosidade não diferem dos mostrados na Fig. (16.5). Os espectros mostram que essa classe de perturbações é sempre amortecida.

A Fig. (16.6) mostra as autofunções do problema com viscosidade estratificada,  $\nu(0)/\nu(\infty) = 6.0$  e  $q = 15$ , em um domínio de comprimento  $z = 25$ . Os cálculos foram feitos utilizando-se malha de 501 pontos uniformemente espaçados. Os resultados do caso de viscosidade constante são praticamente iguais.

## 16.5 Estabilidade Hidrodinâmica: Perturbações Tri-dimensionais

### 16.5.1 Linearização das equações de evolução

Reescrevemos novamente o campo hidrodinâmico na forma da solução de Von Kármán mais uma perturbação:

$$\begin{aligned} v_r &= \bar{v}_r + \tilde{v}_r & v_\theta &= \bar{v}_\theta + \tilde{v}_\theta \\ v_z &= \bar{v}_z + \tilde{v}_z & p &= \bar{p} + \tilde{p} \end{aligned}$$

As variáveis campo perturbado são introduzidas nas equações da continuidade e de Navier-Stokes. Subtrai-se os termos contendo apenas o estado de base e omite-se e os termos não-lineares, contendo produtos das perturbações. As equações de evolução de pequenas perturbações tomam a forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{v}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (16.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} - 2 \frac{\bar{v}_\theta \tilde{v}_\theta}{r} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} &= 2\Omega \tilde{v}_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \\ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{\tau}_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{\tau}_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{rz}}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (16.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}_r \tilde{v}_\theta + \tilde{v}_r \bar{v}_\theta}{r} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} &= -2\Omega \tilde{v}_r - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \\ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tilde{\tau}_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{\theta z}}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (16.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \\ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{\tau}_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zz}}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (16.30)$$

Desenvolvemos a seguir os termos viscosos das componentes da Eq. de Navier-Stokes. Os termos do tensor de tensões são obtidos suprimindo-se o divergente da velocidade das respectivas equações constitutivas e extraindo-se os termos contendo a equação da continuidade. Iniciando pela Eq. (16.28), têm-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{\tau}_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{\tau}_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{rz}}{\partial z} \right] &= \frac{2\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} \right) + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( r \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} \right) - \\ \frac{2\nu}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}_r}{r} \right) + \frac{\partial \nu}{\partial z} \left( \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z \partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo  $1/r \partial v_r / \partial r$  à expressão acima, substituindo:

$$\nu \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z \partial r} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} \right) - \frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z}$$

e rearranjando os termos obtemos:

$$\begin{aligned} & \nu \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}_r}{r^2} \right) + \frac{d\nu}{dz} \left( \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} \right) \\ & \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{v}_r}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} \right) \right] - \frac{\nu}{r} \left[ r \left( \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{v}_r}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

Os termos entre colchetes se anulam, restando apenas o primeiro, entre parênteses. Passamos ao desenvolvimento dos termos viscosos da Eq. (16.29)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \tilde{\tau}_{r\theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{\theta z}}{\partial z} \right] = \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} \right) + \\ & \frac{2\nu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}_r}{r} \right) + \frac{d\nu}{dz} \left( \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z \partial \theta} \right) = \\ & \nu \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} - \frac{\tilde{v}_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} \right) + \\ & \frac{d\nu}{dz} \left( \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z \partial \theta} \right) = \\ & \nu \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}_\theta}{r^2} \right) + \frac{d\nu}{dz} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Desenvolvendo os termos viscosos da Eq. (16.30):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \tilde{\tau}_{rz} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zz}}{\partial z} \right] = \\ & \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} \right) + 2 \frac{d\nu}{dz} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} + 2\nu \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial z^2} = \\ & \nu \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial r \partial z} \right) + 2 \frac{d\nu}{dz} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{v}_r}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

O termo entre colchetes se anula, pela equação da continuidade. Substituindo as expressões acima, dos termos viscosos simplificados, nas Eqs. (16.28 a 16.30) obtemos as equações de evolução de pequenas perturbações do campo estacionário, na forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{v}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (16.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} - 2 \frac{\bar{v}_\theta \tilde{v}_\theta}{r} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} &= 2\Omega v_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \\ \nu \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}_r}{r^2} \right) + \frac{d\nu}{dz} \left( \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} \right) & \quad (16.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}_r \tilde{v}_\theta + \tilde{v}_r \bar{v}_\theta}{r} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} &= -2\Omega v_r - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \\ \nu \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}_\theta}{r^2} \right) + \frac{d\nu}{dz} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} \right) & \quad (16.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \\ \nu \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} \right) + 2 \frac{d\nu}{dz} \frac{\partial v_z}{\partial z} & \quad (16.34) \end{aligned}$$

### 16.5.2 Adimensionalização das variáveis

O passo seguinte consiste na escolha apropriada dos fatores de adimensionalização das variáveis que intervém nas equações da hidrodinâmica.

Nessa seção, as variáveis adimensionais são indicadas com um asterisco, com exceção dos perfis  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $P$  do campo estacionário (ver seção 16.3) e do número de Reynolds,  $R$ , definido pela Eq. (16.1). As coordenadas espaciais são divididas pelo padrão de comprimento com o qual a espessura da camada limite é comparada,  $(\nu(\infty)/\Omega)^{1/2}$ . Cabe observar que a viscosidade utilizada é a do seio do eletrólito, cujo valor não é afetado pela dissolução do eletrodo. As componentes da velocidade e a pressão são divididas, respectivamente, por  $r_e \Omega$  e por  $\rho (r_e \Omega)^2$ , onde  $r_e$  é o raio (dimensional) no qual a análise é feita. A viscosidade é adimensionalizada pelo valor da mesma no seio da solução,  $\nu(\infty)$ . Têm-se então, para as coordenadas espaciais, para a componente genérica da velocidade,  $v_i$  e para pressão adimensionalizadas:

$$r^* = r \left( \frac{\Omega}{\nu(\infty)} \right)^{1/2} \quad z^* = z \left( \frac{\Omega}{\nu(\infty)} \right)^{1/2} \quad v_i^* = \frac{v_i}{r_e \Omega} \quad p^* = \frac{p}{\rho (r_e \Omega)^2}$$

O tempo e a freqüência das perturbações,  $\omega$ , são comparados com o tempo necessário para que uma partícula, deslocando-se com velocidade  $r_e \Omega$ , percorra a distância  $(\nu(\infty)/\Omega)^{1/2}$ , utilizada para medir a espessura da camada limite:

$$t^* = t r_e \Omega \left( \frac{\Omega}{\nu(\infty)} \right)^{1/2} = t \frac{r_e \Omega^{3/2}}{\nu(\infty)^{1/2}} \quad \omega^* = \omega \frac{\nu(\infty)^{1/2}}{r_e \Omega^{3/2}}$$

Para as componentes do campo estacionário:

$$\begin{aligned}\bar{v}_r^* &= \frac{r\Omega F}{r_e\Omega} = r \left( \frac{\Omega}{\nu(\infty)} \right)^{1/2} \frac{1}{r_e} \left( \frac{\nu(\infty)}{\Omega} \right)^{1/2} F = \frac{r^*}{R} F \\ \bar{v}_\theta^* &= \frac{r\Omega G}{r_e^*\Omega} = \frac{r^*}{R} G \quad \bar{v}_z^* = \frac{(\nu(\infty)\Omega)^{1/2} H}{r_e\Omega} = \frac{1}{r_e} \left( \frac{\nu(\infty)}{\Omega} \right)^{1/2} H = \frac{H}{R} \\ \bar{p}^* &= \frac{\rho\nu(\infty)\Omega P}{\rho(r_e\Omega)^2} = \frac{\nu(\infty)}{r_e^2\Omega} P = \frac{1}{R^2} P\end{aligned}$$

Passamos à adimensionalização das equações da hidrodinâmica, utilizando as definições acima e observando que os termos do tensor de tensões, divididos pela densidade do fluido, têm dimensões de  $[\nu][v][r]^{-1}$ , a equação de Navier Stokes toma a forma:

$$\frac{r_e^2\Omega^{5/2}}{\nu(\infty)^{1/2}} \left( \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}^* \right) = -2r_e\Omega^2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}^* - \frac{r_e^2\Omega^{5/2}}{\nu(\infty)^{1/2}} \mathbf{grad} p^* + \nu(\infty)r_e\Omega^2 \operatorname{div} \tau^*$$

onde os operadores vetoriais também são escritos em forma adimensional. Simplificando e passando a escrever as variáveis adimensionais sem asterisco deste ponto para a frente, temos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \mathbf{grad} \mathbf{v} = -\frac{2}{R} \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} - \mathbf{grad} p + \frac{1}{R} \operatorname{div} \tau$$

onde  $R$  é o número de Reynolds, definido pela Eq. (16.1). As Eqs. (16.31) a (16.34), escritas em forma adimensional, são portanto:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tilde{v}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (16.35)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} - 2 \frac{\bar{v}_\theta \tilde{v}_\theta}{r} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} &= 2 \frac{\tilde{v}_\theta}{R} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \\ \frac{1}{R} \left[ \nu \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}_r}{r^2} \right) + \frac{d\nu}{dz} \left( \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} \right) \right] & \quad (16.36)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}_r \tilde{v}_\theta + \tilde{v}_r \bar{v}_\theta}{r} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} &= -2 \frac{\tilde{v}_r}{R} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \\ \frac{1}{R} \left[ \nu \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}_\theta}{r^2} \right) + \frac{d\nu}{dz} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} \right) \right] & \quad (16.37)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \\ \frac{1}{R} \left[ \nu \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} \right) + 2 \frac{d\nu}{dz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] & \quad (16.38)\end{aligned}$$

### 16.5.3 O campo perturbado

No estudo da estabilidade do campo hidrodinâmico, depara-se com a questão inicial, de se especificar como o mesmo é perturbado. Não se consegue analisar a estabilidade do campo a perturbações de forma arbitrária e por isso é necessário restringi-las, especificando-se algumas de suas características, de modo a que tornem o problema, ao mesmo tempo

tratável do ponto de vista formal e descrevam o observado experimentalmente. A observação experimental é portanto instrumento indispensável, sem o qual não se avança no estudo desse e de outros problemas de estabilidade em sistemas físicos.

A classe de perturbações aqui especificada descreve é a mesma utilizada por Malik (1986), por Faller (1993) e por Lingwood (1995), que descreve observações de Smith (1946), Gregory, Stuart e Walker (1959) e, posteriormente por outros autores. Trata-se de perturbações onde as curvas de nível, em que a fase é constante, tomam a forma de espirais logarítmicas, ou de circunferências, ou ainda, de linhas retas na direção radial. As componentes da velocidade e a pressão perturbadas se escrevem:

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\Omega F \\ r\Omega G \\ (\nu/(\infty)\Omega)^{1/2}H \\ \rho\nu/(\infty)\Omega P \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} r_e\Omega f \\ r_e\Omega g \\ r_e\Omega h \\ \rho\nu(\infty)\Omega \pi \end{pmatrix} \exp [i(\alpha r + \beta R\theta - \omega t)] + cc \quad (16.39)$$

onde  $cc$  indica o complexo conjugado, isso é, a perturbação superposta ao campo estacionário é *real*. A variável  $\omega$  é a freqüência complexa da perturbação, sendo a parte real a velocidade angular da estrutura, medida no referencial solidário ao disco e a parte imaginária, a *taxa de crescimento* da mesma. As quantidades  $\alpha$  e  $\beta$ , são as componentes reais do vetor de onda da estrutura, nas direções radial e azimutal, respectivamente. Perturbações com  $\Im(\omega) = 0$  giram com a mesma velocidade angular do disco. Em um dado instante, a fase das perturbações é constante ao longo de espirais logarítmicas, com os braços curvados na direção horária se  $\beta/\alpha$  for positivo e na direção anti-horária, caso contrário. A estrutura gira na direção horária, isso é, com velocidade angular inferior à do disco, se  $\omega/\beta > 0$  e na direção anti-horária, isso é, com velocidade angular maior do que a do disco, se  $\omega/\beta < 0$ . A forma dessas perturbações é representada de forma esquemática na Fig. (16.7).

A amplitude da perturbação,  $A$ , é um número complexo cujo módulo é suficientemente pequeno para que os termos das equações de evolução que contenham produtos da mesma, sejam desprezados. Na etapa de análise de estabilidade linear o valor de  $A$  é indeterminado.  $F, G, H$   $p, f, g, h \pi$  são funções da coordenada axial adimensionalizada,  $z$ .

Reescrevendo as variáveis da Eq. (16.39) na forma adimensional:

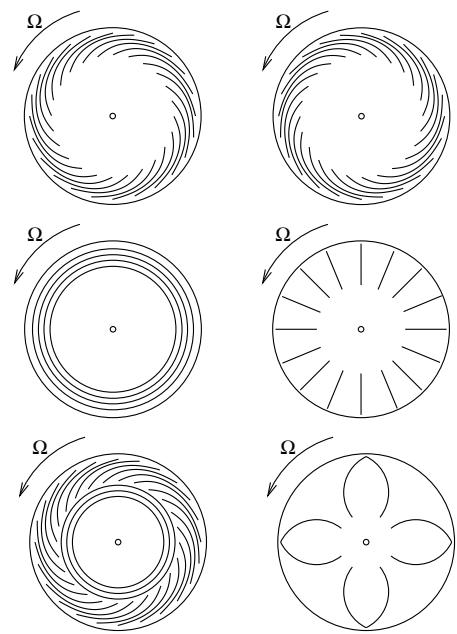


Figura 16.7: Possíveis padrões de perturbação, que emergem após a primeira instabilidade do campo estacionário, a perturbações na forma descrita pela Eq (16.39).

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rF/R \\ rG/R \\ H/R \\ p/R^2 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \\ \pi \end{pmatrix} \exp[i(\alpha r + \beta R\theta - \omega t)] + cc \quad (16.40)$$

Resolver o problema de estabilidade do campo estacionário com relação a perturbações na forma dada pela Eq. (16.40) significa determinar as funções  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $\pi$  e a freqüência complexa  $\omega$ , para valores especificados dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $R$ . Em particular, procura-se determinar o sinal da taxa de crescimento, dada por  $\Im(\omega)$ , pois valores positivos da mesma indicam que o campo é instável a perturbações da forma acima. A formulação desse problema é o objeto da seção (16.5.4).

#### 16.5.4 O problema de autovalores e autofunções

Para a determinação de  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $\pi$  e  $\omega$ , dispõe-se das quatro Eqs. (16.35 a 16.38). Como as incógnitas são cinco, é necessário que se imponha a restrição adicional, de que as funções  $f$ ,  $g$ ,  $h$  e  $\pi$  não se anulem identicamente, o que é feito recolocando-se o problema, como o da determinação dos autovalores e autofunções de um operador diferencial.

A forma do campo estacionário e da perturbação, dada pela Eq. (16.40), são introduzidos nas Eqs. (16.35 a 16.38). Como as equações de evolução da perturbação são lineares o princípio de superposição aplica-se e pode-se estudar a evolução de uma das partes da mesma, sem o complexo conjugado. As componentes de perturbação aparecem apenas uma vez em cada termo das equações, o que permite excluir a amplitude  $A$ , das mesmas. Esse fato justifica a afirmação de que a amplitude é, do ponto de vista da análise linear, uma constante indeterminada.

$$\frac{\tilde{v}_r}{r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (16.41)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} + \frac{r}{R} F \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{G}{R} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} + \frac{H}{R} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} + \frac{F}{R} \tilde{v}_r - \frac{2}{R} (G+1) \tilde{v}_\theta + \frac{r}{R} F' \tilde{v}_z = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \frac{\nu}{R} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}_r}{r^2} \right) + \frac{\nu'}{R} \left( \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} \right) \quad (16.42)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial t} + \frac{r}{R} F \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \frac{G}{R} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{H}{R} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} + \frac{F}{R} \tilde{v}_\theta + \frac{2}{R} (G+1) \tilde{v}_r + \frac{r}{R} G' \tilde{v}_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \frac{\nu}{R} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}_\theta}{r^2} \right) + \frac{\nu'}{R} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} \right) \quad (16.43)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial t} + \frac{r}{R} F \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \frac{G}{R} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} + \frac{H}{R} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} + \frac{H}{R} \tilde{v}_z = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{\nu}{R} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} \right) + 2 \frac{\nu'}{R} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} \quad (16.44)$$

O passo seguinte consiste em introduzir a forma adimensional do campo estacionário e da perturbação, dados pela Eq. (16.40), nas Eqs. (16.41 a 16.44). Obtém-se:

$$i \left( \alpha - \frac{i}{r} \right) f + i \frac{R}{r} \beta g + h' = 0 \quad (16.45)$$

$$\begin{aligned} i \left( \frac{r}{R} \alpha F + \beta G - \omega \right) f + \frac{r}{R} F' h + i \alpha \pi &= \frac{1}{R} \left( \nu f'' - \nu \left( \alpha^2 + \frac{R^2}{r^2} \beta^2 \right) f - F f + \right. \\ &\quad \left. 2(G+1)g - H f' + i \alpha \nu' h + \nu' f' \right) + \frac{1}{R^2} \left( i \frac{R}{r} \nu \alpha f - 2 i \frac{R^2}{r^2} \nu \beta g \right) - \frac{\nu}{R r^2} f \end{aligned} \quad (16.46)$$

$$\begin{aligned} i \left( \frac{r}{R} \alpha F + \beta G - \omega \right) g + \frac{r}{R} G' h + i \frac{R}{r} \beta \pi &= \frac{1}{R} \left[ \nu g'' - \nu \left( \alpha^2 + \frac{R^2}{r^2} \beta^2 \right) g - F g - \right. \\ &\quad \left. 2(G+1)f - H g' + i \frac{R}{r} \beta \nu' h + \nu' g' \right] + \frac{1}{R^2} \left( i \frac{R}{r} \nu \alpha g - 2 i \frac{R^2}{r^2} \nu \beta f \right) - \frac{\nu}{R r^2} g \end{aligned} \quad (16.47)$$

$$\begin{aligned} i \left( \frac{r}{R} \alpha F + \beta G - \omega \right) h + \pi' &= \frac{1}{R} \left[ \nu h'' - \nu \left( \alpha^2 + \frac{R^2}{r^2} \beta^2 \right) h - H h' - H' h + \right. \\ &\quad \left. 2 \nu' h' \right] + \frac{i}{R r} \nu \alpha h \end{aligned} \quad (16.48)$$

As equações acima mostram as variáveis do problema não são estritamente separáveis, pois não se consegue eliminar  $r$  das mesmas. Entretanto, no caso de fluidos pouco viscosos, as variações na direção radial ocorrem em uma escala de comprimentos muito maior do que as de variações na direção axial. Adota-se então a hipótese de *escoamento paralelo*, que consiste em supor que, dado um ponto  $r_e$ , o valor das variáveis praticamente não se altera em uma vizinhança no plano horizontal, cujo raio é comparável à dimensão característica da camada limite,  $(\nu(\infty)/\Omega)^{1/2}$ . Essa hipótese se traduz pela substituição de  $r$  por  $R$  nas equações acima e resulta em:

$$i \left( \alpha - \frac{i}{R} \right) f + i \beta g + h' = 0 \quad (16.49)$$

$$\begin{aligned} i (\alpha F + \beta G - \omega) f + F' h + i \alpha \pi &= \frac{1}{R} \left[ \nu f'' - \nu \lambda^2 f - F f + 2(G+1)g - H f' + \right. \\ &\quad \left. i \alpha \nu' h + \nu' f' \right] + \frac{1}{R^2} (i \nu \alpha f - 2 i \nu \beta g) - \frac{\nu}{R^3} f \end{aligned} \quad (16.50)$$

$$\begin{aligned} i (\alpha F + \beta G - \omega) g + G' h + i \beta \pi &= \frac{1}{R} \left[ \nu g'' - \nu \lambda^2 g - F g - 2(G+1)f - H g' + \right. \\ &\quad \left. i \beta \nu' h + \nu' g' \right] + \frac{1}{R^2} (i \nu \alpha g - 2 i \nu \beta f) - \frac{\nu}{R^3} g \end{aligned} \quad (16.51)$$

$$i (\alpha F + \beta G - \omega) h + \pi' = \frac{1}{R} (\nu h'' - \nu \lambda^2 h - H h' - H' h + 2 \nu' h') + \frac{i}{R^2} \nu \alpha h \quad (16.52)$$

onde  $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$ . As Eqs. 16.49-16.52 se reduzem às do caso de fluido com viscosidade constante, fazendo-se  $\nu = 1$  e  $\nu' = \nu'' = 0$  [101, 99]. O passo seguinte, na direção de reescrever as Eqs. 16.49-16.52 na forma de um problema de autovalores e autofunções consiste em eliminar a equação da continuidade, que não contém a freqüência, isso é, o autovalor do problema e a pressão, da qual as equações da hidrodinâmica não contém derivadas em relação ao tempo. Nessa etapa, desprezamos também os termos de  $\mathcal{O}(R^{-2})$  e  $\mathcal{O}(R^{-3})$ . Multiplica-se

inicialmente a Eq. 16.50 por  $\bar{\alpha} = \alpha - i/R$ , a Eq. 16.51 por  $\beta$ , soma-se as duas equações resultantes e despreza-se os termos de  $\mathcal{O}(R^{-2})$  e menores, obtendo-se:

$$\begin{aligned} i(\alpha F + \beta G - \omega)(\bar{\alpha}f + \beta g) + (\bar{\alpha}F' + \beta G')h + i(\bar{\alpha}\alpha + \beta^2)\pi = \\ \frac{1}{R} [\nu(\bar{\alpha}f'' + \beta g'') - \nu\lambda^2(\bar{\alpha}f + \beta g) - F(\bar{\alpha}f + \beta g) + 2(G+1)(\bar{\alpha}g - \beta f) - \\ H(\bar{\alpha}f' + \beta g') + i\nu'(\bar{\alpha}\alpha + \beta^2)h + \nu'(\bar{\alpha}f' + \beta g')] + \mathcal{O}(R^{-2}) \end{aligned} \quad (16.53)$$

Neste ponto introduz-se as definições  $\bar{\lambda}^2 = \alpha\bar{\alpha} + \beta^2$ ,  $\eta = \alpha g - \beta f$  e utiliza-se a equação da continuidade (Eq. 16.49) para substituir:  $(\bar{\alpha}f + \beta g) = ih'$ . Além disso, têm-se que:

$$\frac{1}{R} 2(G+1)(\bar{\alpha}g - \beta f) = \frac{1}{R} 2(G+1)\eta + \mathcal{O}(R^{-2})$$

Levando as definições e o resultado acima à Eq. 16.53 obtém-se:

$$\begin{aligned} -(\alpha F + \beta G - \omega)h' + (\bar{\alpha}F' + \beta G')h + i\bar{\lambda}^2\pi = \frac{1}{R} (i\nu h''' - i\nu\lambda^2h' - iFh' + \\ 2(G+1)\eta - iHh'' + i\nu'\bar{\lambda}^2h + i\nu'h'') \end{aligned} \quad (16.54)$$

Deriva-se a equação acima em relação a  $z$ :

$$\begin{aligned} -(\alpha F' + \beta G')h' - (\alpha F' + \beta G' - \omega)h'' + (\bar{\alpha}F'' + \beta G'')h + (\bar{\alpha}F' + \beta G')h' + i\bar{\lambda}^2\pi' = \\ \frac{1}{R} (i\nu'h''' + i\nu h'''' - i\nu'\lambda^2h' - i\nu\lambda^2h'' - iF'h' - iFh'' + 2G''\eta + 2(G+1)\eta' - \\ iH'h'' - iHh''' + i\nu''\bar{\lambda}^2h + i\nu'\bar{\lambda}^2h' + i\nu''h'' + i\nu'h''') \end{aligned} \quad (16.55)$$

Dois dos termos do membro esquerdo da Eq. (16.55) simplificam-se conforme abaixo:

$$-(\alpha F' + \beta G')h' + (\bar{\alpha}F' + \beta G')h' = \frac{-i}{R} F'h'$$

e o termo resultante,  $-i/R F'h'$ , cancela-se com outro idêntico, existente no membro direito da equação. Da Eq. 16.52 obtém-se:

$$\pi' = -i(\alpha F + \beta G - \omega)h + \frac{1}{R} (\nu h'' - \nu\lambda^2h - Hh' - H'h + 2\nu'h') + \frac{i}{R^2} \nu\alpha h$$

Substituindo-se os dois resultado acima na Eq. 16.55 e desprezando-se o termo de  $\mathcal{O}(R^{-2})$ , têm-se:

$$\begin{aligned} -(\alpha F' + \beta G' - \omega)h'' + (\bar{\alpha}F'' + \beta G'')h + \bar{\lambda}^2(\alpha F + \beta G - \omega)h = -\frac{1}{R} (i\bar{\lambda}^2\nu h'' - i\bar{\lambda}^2\nu\lambda^2h - \\ i\bar{\lambda}^2Hh' - H'h + 2i\bar{\lambda}^2\nu'h') + \frac{1}{R} (i\nu'h''' + i\nu h'''' - \nu'\lambda^2h' - \nu\lambda^2h'' - iFh'' + \\ 2G''\eta + 2(G+1)\eta' - iH'h'' - iHh''' + i\nu''\bar{\lambda}^2h + i\nu'\bar{\lambda}^2h' + i\nu''h'' + i\nu'h''') \end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por  $R$ , definindo  $D^n = d^n/dz^n$  e reagrupando os termos obtém-se:

$$\begin{aligned} [i\nu(D^2 - \lambda^2)(D^2 - \bar{\lambda}^2) + i\nu'D(2D^2 - \lambda^2 - \bar{\lambda}^2) + i\nu''(D^2 + \bar{\lambda}^2) + \\ R(\alpha F + \beta G - \omega)(D^2 - \bar{\lambda}^2) - R(\bar{\alpha}F'' + \beta G'') - iHD(D^2 - \bar{\lambda}^2) - iH'(D^2 - \bar{\lambda}^2) - \\ iFD^2]h + (2(G+1)D + 2G')\eta = 0 \end{aligned}$$

A segunda equação é obtida multiplicando-se a Eq. 16.51 por  $i\beta R$ , a Eq. 16.50 por  $-i\alpha R$  e somando-se as duas equações resultantes:

$$-2i(G+1)(\beta g + \alpha f) - [iR(\alpha G' - \beta F')] h + [i\nu(D^2 - \lambda^2) + i\nu'D + R(\alpha F + \beta G - \omega) - iHD - iF] \eta = 0$$

O termo  $(\beta g + \alpha f)$  pode ser substituído por  $Dh$ , de acordo com a Eq. 16.49 e desprezando-se o termo  $-i/R f$ . Obtém-se:

$$[2(G+1)D - iR(\alpha G' - \beta F')] h + [i\nu(D^2 - \lambda^2) + i\nu'D + R(\alpha F + \beta G - \omega) - iHD - iF] \eta = 0$$

Eliminando-se  $\pi$ , desprezando-se termos de ordem  $R^{-2}$  e  $R^{-3}$  e definindo-se  $D^n = d^n/d\xi^n$ ,  $\bar{\alpha} = \alpha - i/R$ ,  $\bar{\lambda}^2 = \alpha\bar{\alpha} + \beta^2$  e  $\eta = \alpha g - \beta f$  obtém-se um sistema de sexta ordem de equações acopladas, da forma:

$$\begin{aligned} & [i\nu(D^2 - \lambda^2)(D^2 - \bar{\lambda}^2) + i\nu'D(2D^2 - \lambda^2 - \bar{\lambda}^2) + i\nu''(D^2 + \bar{\lambda}^2) + \\ & R(\alpha F + \beta G - \omega)(D^2 - \bar{\lambda}^2) - R(\bar{\alpha}F'' + \beta G'') - iHD(D^2 - \bar{\lambda}^2) - iH'(D^2 - \bar{\lambda}^2) - \\ & iFD^2] h + [2(G+1)D + 2G'] \eta = 0 \end{aligned} \quad (16.56)$$

$$\begin{aligned} & [2(G+1)D - iR(\alpha G' - \beta F')] h + [i\nu(D^2 - \lambda^2) + i\nu'D + R(\alpha F + \beta G - \omega) - \\ & iHD - iF] \eta = 0 \end{aligned} \quad (16.57)$$

As Eqs. (16.56 a 16.57) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_4 D^4 + a_3 D^3 + a_2 D^2 + a_1 D + a_0; & b_1 D + b_0 \\ c_1 D + c_0; & d_2 D^2 + d_1 D + d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \eta \end{pmatrix} \\ & = \omega R \begin{pmatrix} q_2 D^2 + q_0; & 0 \\ 0; & s_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \eta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16.58)$$

com os coeficientes dados por:

$$\begin{aligned} a_4 &= i\nu & a_3 &= i(2\nu' - H) \\ a_2 &= i\nu'' - i\nu(\lambda^2 + \bar{\lambda}^2) + R(\alpha F + \beta G) - i(H' + F) \\ a_1 &= -i\nu'(\lambda^2 + \bar{\lambda}^2) + iH\bar{\lambda}^2 \\ a_0 &= i\bar{\lambda}^2(\nu'' + \nu\lambda^2) - R(\alpha F + \beta G)\bar{\lambda}^2 - R(\bar{\alpha}F'' + \beta G'') + iH'\bar{\lambda}^2 \\ b_1 &= 2(G+1) & b_0 &= 2G' \\ c_1 &= 2(G+1) & c_0 &= -iR(\alpha G' - \beta F') \\ d_2 &= i\nu & d_1 &= i(\nu' - H) \\ d_0 &= -i\nu\lambda^2 + R(\alpha F + \beta G) - iF \\ q_2 &= 1 & q_0 &= -\bar{\lambda}^2 & s_0 &= 1 \end{aligned}$$

As condições de contorno do problema exigem que a velocidade do fluido seja igual à do disco junto à superfície e decrescerem exponencialmente quando  $z \rightarrow \infty$ . Essas condições já são satisfeitas pelo satisfeitas pelo estado de base, de modo que a perturbação não deve alterar o campo nem junto à superfície, nem longe do disco. Em consequência deve-se requerer que  $g = h = 0$  in  $z = 0$ . Além disso, conclui-se, com base na Eq. (16.45) que  $h' = 0$  na superfície do eletrodo. Fora da camada limite ( $z \rightarrow \infty$ ) impõe-se que  $h' = 0$ .

### 16.5.5 O procedimento numérico

A construção das curvas de estabilidade neutra implica na identificação de um conjunto de pontos  $c(s) = (\alpha(s), \beta(s), R(s))$ , satisfazendo a condição  $F(c(s)) = 0$ , onde  $F : R^3 -> R^2$  é dada por  $F = (\Im(\omega), \Re(\omega) - \omega_r)^T$ . As curvas são construídas utilizando-se um método de Continuação Predictor-Corretor descrito por E. Allgower, K. Georg (1991). Descrevemos sumariamente abaixo os principais passos do método:

1. Especifica-se a freqüência da perturbação e um ponto no espaço de parâmetros,  $\alpha, \beta, R$ , não necessariamente sobre a curva neutra procurada;
2. As coordenadas são corrigidas até que se chegue a um ponto sobre a curva. Utiliza-se um método iterativo inexato de Newton, dado por:

$$c_i^{n+1} = c_i^n - F'(c_i^0)^+ F(c_i^n) \quad (16.59)$$

onde  $F'(v_0)^+$  é o pseudo-inverso de Moore-Penrose do Jacobiano de  $F$ . O Jacobiano é computado numericamente, com o uso de aproximações de diferenças finitas;

3. Para se obter uma estimativa inicial do próximo ponto sobre a curva, executa-se uma etapa preditora, baseada no método de Euler de primeira ordem:

$$c_{i+1}^0 = c_i + h t(F'(c_i)),$$

onde  $h$  e  $t(F'(c_i))$  são o comprimento do passo executado e o vetor tangente à curva  $c(s)$ , respectivamente.

4. O valor de  $c_{i+1}^0$  é modificado em etapa corretora, usando a Eq. (16.59) de forma iterativa, até a obtenção da convergência.
5. A solução do problema generalizado de autofunções e autovetores, requerida para a determinação de  $F(c(s))$  é obtida numericamente, utilizando-se o método Inverso da Potência e rotinas que levam em conta a natureza esparsa das matrizes.

### 16.5.6 Resultados

O efeito de estratificação da viscosidade é analisado comparando-se as propriedades de estabilidade do campo de fluidos com viscosidade constante, com as das quatro configurações de fluidos com viscosidade variável apresentadas na Sec. (16.3). Os resultados são apresentados na forma de curvas de estabilidade neutra para valores especificados da freqüência  $\Re(\omega) = \omega_r$ , da taxa de crescimento em função de  $R$  de dois modos, do número de onda crítico e do ângulo da espiral,  $\varepsilon = \tan^{-1} \beta / \alpha$ , em função de  $\omega_r$ .

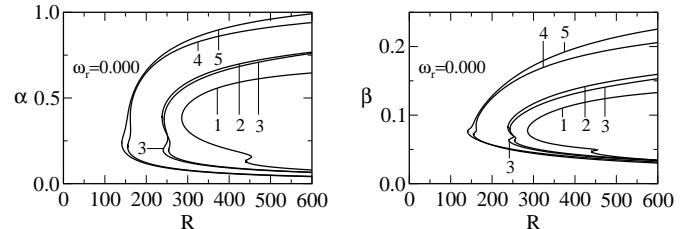


Figura 16.8: Curvas neutras nos planos  $R \times \alpha$  e  $R \times \beta$  de perturbações estacionárias ( $\omega_r = 0$ ). Curvas No. 1: fluidos com viscosidade constante; Curvas Nos. 2 - 5: os quatro casos de viscosidade estratificada.

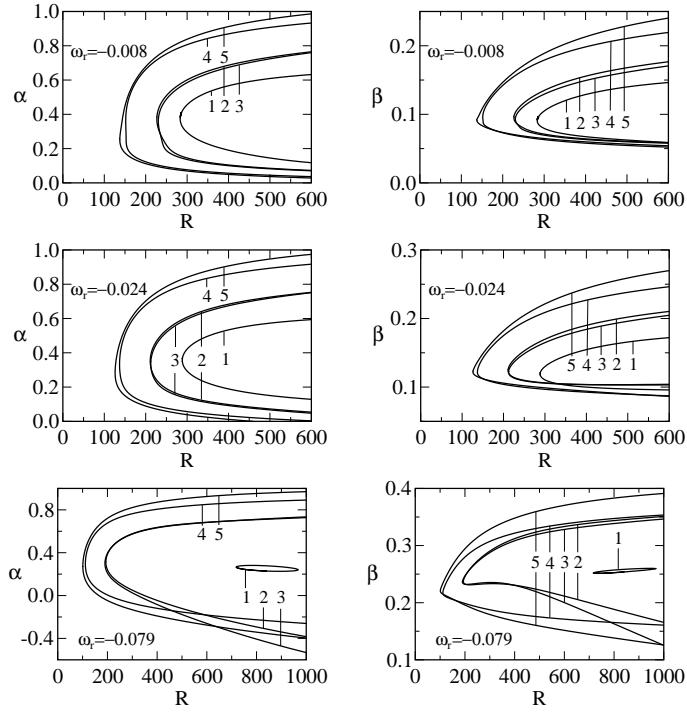


Figura 16.9: Curvas neutras nos planos  $R \times \alpha$  e  $R \times \beta$  de perturbações com ( $\omega_r < 0$ ). Curvas No. 1: fluidos com viscosidade constante; Curvas Nos. 2 - 5: os quatro casos de viscosidade estratificada.

de onda  $\alpha$  e  $\beta$ , cobertos pelo cálculo.

A estabilidade do modo mais estável diminui muito em presença da viscosidade estratificada. O modo mais estável é menos afetado pela estratificação da viscosidade e apresenta, de fato, um aumento de estabilidade na região crítica. Além disso, observa-se que as configurações de fluidos com viscosidade variável são instáveis em faixa de números de onda muito maior do que a de fluidos com viscosidade constante.

A maior parte das curvas apresenta dois mínimos, um localizado no ramo superior e outro no inferior. A posição relativa e o número de Reynolds crítico de cada ramo são afetados pela estratificação da viscosidade e pela frequência especificada para a estrutura que se superpõe ao campo estacionário. Em valores elevados da frequência ( $\omega_r = 0,080$ ) a estratifica-

Os cálculos foram feitos em domínios de comprimento  $z = 50$ , utilizando-se malhas de 1001 pontos, uniformemente espaçados. Os valores de  $\omega_r$  adotados foram -0,079, -0,024, -0,008, 0,000 (perturbações girando com a velocidade angular do eletrodo), 0,008, 0,024 e 0,080. As curvas indicadas com o número 1 nas Figs. (16.8 a 16.10) referem-se a fluidos com viscosidade constante. As de números 2 e 3, a fluidos com viscosidade estratificada,  $\nu(0)/\nu(\infty) = 6$  e 12, respectivamente, ambas com  $q = 2,00$ . As de números 4 e 5 referem-se a fluidos com  $\nu(0)/\nu(\infty) = 6$  e 12, respectivamente, ambas com  $q = 0,25$ .

As curvas neutras mostram uma estrutura de dois ramos, correspondentes a dois modos que se tornam instáveis em parte do domínio de números de Reynolds e números

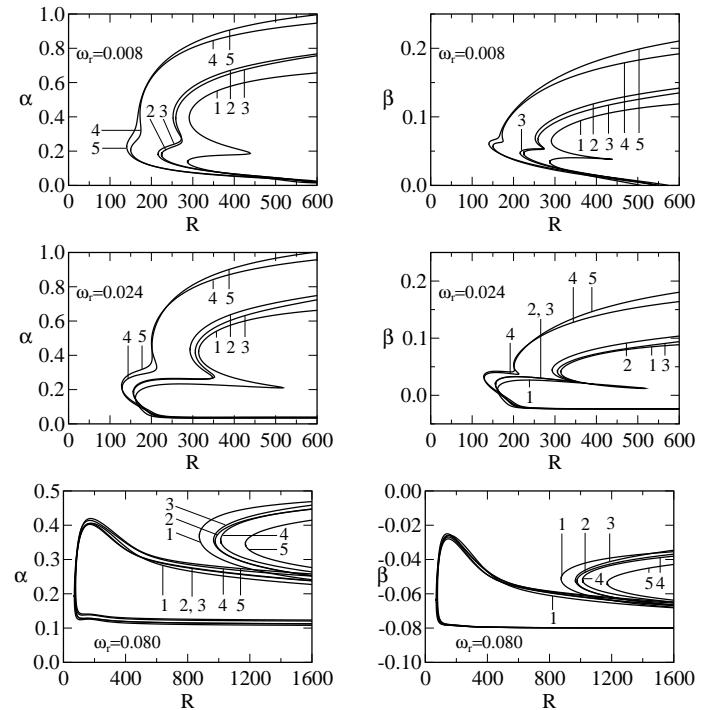


Figura 16.10: Curvas neutras nos planos  $R \times \alpha$  e  $R \times \beta$  de perturbações com ( $\omega_r > 0$ ). Curvas No. 1: fluidos com viscosidade constante; Curvas Nos. 2 - 5: os quatro casos de viscosidade estratificada.

ção da viscosidade torna o ramo superior das curvas neutras significativamente mais estável do que o da de fluidos com viscosidade constante, como se observa na Fig. (16.9). O ramo inferior é menos afetado, mas, ainda assim a estratificação da viscosidade torna o fluido mais estável do que o de viscosidade constante, como se observa da Fig. (16.11). À medida em que se diminui a freqüência da estrutura, a estratificação da viscosidade reduz progressivamente a estabilidade do campo e alarga a faixa de números de onda instáveis.

Para o caso de estruturas girando com a velocidade angular do eletrodo, ( $\omega_r = 0,000$ ) a redução do número de Reynolds crítico é da ordem de 50% (ver Fig. 16.8). A curva neutra de fluidos com viscosidade constante se fecha e delimita uma pequena região instável para ( $\omega_r = -0,079$ ), o que indica que perturbações com freqüência acima de um valor limite são sempre atenuadas.

As curvas de estabilidade neutra cruzam o valor  $\alpha = 0$  em freqüências  $\omega_r = -0,024$  e menores o que indica a possibilidade da existência de estruturas com periodicidade na direção azimuthal apenas, ou seja, estruturas radiais e de perturbações que se propagam em direção ao eixo do eletrodo, o que não ocorre no caso de fluidos com viscosidade constante.

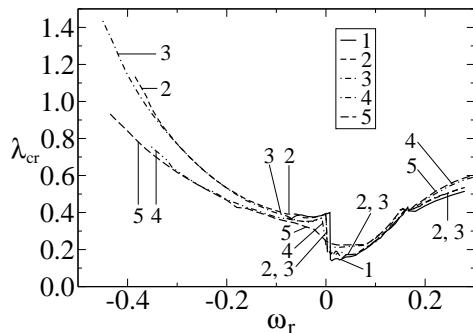


Figura 16.12: À esquerda: Número de onda critico,  $\lambda_{cr} = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ , em função da freqüência da perturbação,  $\omega_r$ . À direita: Ângulo da espiral,  $\varepsilon = \tan^{-1} \beta / \alpha$  (graus), em função da freqüência da perturbação,  $\omega_r$ . Curvas No. 1: fluidos com viscosidade constante; Curvas Nos. 2 - 5: os quatro casos de viscosidade variável.

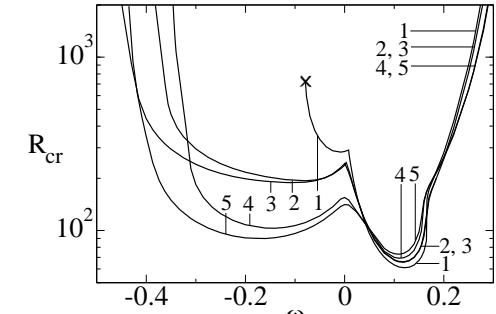
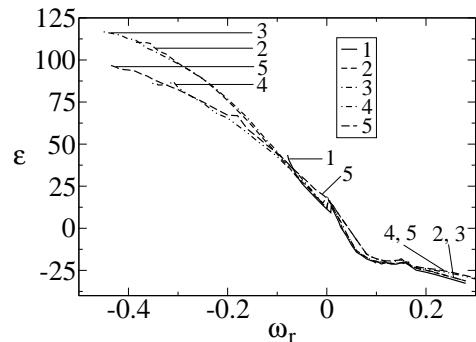


Figura 16.11: Mínimos absolutos,  $R_{cr}$ , em função da freqüência da estrutura,  $\omega_r$ . Curvas No. 1: fluidos com viscosidade constante; Curvas Nos. 2 - 5: os quatro casos de viscosidade variável. O ponto indicado por (x) na curva No. 1 identifica a freqüência limite abaixo da qual todas as perturbações em fluidos com viscosidade constante são amortecidas.



As Figs. (16.8) a (16.10) mostram também que as curvas neutras são mais afetadas pela espessura da camada em que a viscosidade varia, do que pela relação  $\nu(0)/\nu(\infty)$ . Como regra geral, quanto maior a espessura dessa camada, mais instável se torna ao campo hidrodinâmico.

A Fig. (16.12) mostra as curvas do número de onda crítico,  $\lambda_{cr} = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$  e do ângulo da espiral,  $\varepsilon = \tan^{-1} \beta / \alpha$  (graus), em função da freqüência da estrutura. A

estratificação da viscosidade resulta em uma faixa maior de números de onda instáveis, como já mencionado. Observa-se uma descontinuidade no número de onda o modo mais instável é substituído por outro, exceto em uma das configurações estudadas. A faixa de ângulos instáveis é maior no caso de viscosidade estratificada. A descontinuidade observada na curva  $\lambda_{cr} \times \omega_r$  existe também na curva  $\varepsilon \times \omega_r$ , embora em menor grau.

# Capítulo 17

## Estabilidade Hidrodinâmica em Células Eletroquímicas – Campos Hidrodinâmico e de Concentração Acoplados

### 17.1 Acoplamento da Hidrodinâmica ao Campo de uma Espécie Química

Esse capítulo generaliza o estudo de estabilidade apresentado no Cap. 16, ao considerar o acoplamento entre os campos de velocidade e de uma espécie química, proveniente da dissolução do eletrodo de ferro no ácido sulfúrico, conforme descrito nas Secs. 16.1 e 16.2. O acoplamento entre os dois campos se dá através da viscosidade do eletrólito, que depende da concentração da espécie química responsável pelo transporte de corrente na interface eletrodo/eletrolito. Esse capítulo discute os resultados já publicados pelos autores [103, 132]. Discute também possível efeito gravitacional sobre o campo estacionário e sobre a estabilidade do mesmo, devido à variação da massa específica do eletrólito que corre em virtude da dissolução do eletrodo de ferro.

A Sec. 17.2 discute a determinação dos perfis de velocidade e concentração estacionários, que constituem o estado base do problema. Discute ainda, as equações constitutivas da viscosidade e do coeficiente de difusão e o ajuste dos parâmetros dos perfis, aos resultados experimentais, o que é feito através de uma lei que relaciona a densidade de corrente na superfície do eletrodo, com o perfil de concentração da espécie química.

A Sec. 17.3 trata da análise de estabilidade linear do campo de velocidades e de concentração.

## 17.2 O Campo Estacionário

### 17.2.1 Equações básicas

O campo hidrodinâmico e de concentração da espécie química responsável pelo transporte da corrente é descrito pela solução estacionária das equações da continuidade, de Navier-Stokes e de transporte da espécie química. As equações, escritas no referencial giratório, fixo à superfície do eletrodo. Os efeitos gravitacionais são considerados pela adição de um termo do tipo Boussinesq, na equação da quantidade de movimento:

$$[1 + \gamma_g (\mathcal{C} - \mathcal{C}_\infty)] \mathbf{g},$$

onde  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}_\infty$  são as concentrações dimensionais em um ponto próximo ao eletrodo e no seio da solução e  $\gamma_g$  é o coeficiente de variação da massa específica do fluido pela adição de ferro ao eletrólito. A concentração da espécie química relevante no seio da solução é igual a zero, o que reduz o termo acima a:

$$(1 + \gamma_g \mathcal{C}) \mathbf{g} = (1 + \gamma_c \mathcal{C}_S C_T),$$

onde  $\mathcal{C}_S$  é a concentração da espécie química na interface e  $C_T$ , é uma função adimensional que a descreve nas três dimensões. Incorporando o fator  $\mathcal{C}_S$  ao coeficiente  $\gamma_c$ , definimos esse coeficiente pela relação:

$$\gamma_g = \frac{\mathcal{C}_S}{\rho_\infty} \frac{d\rho}{d\mathcal{C}}.$$

Adotando essa definição e as demais hipóteses acima, escrevemos as leis de conservação que regem o campo hidrodinâmico e o transporte da espécie química:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (17.1)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \frac{1}{\rho_\infty} \operatorname{grad} p + \frac{1}{\rho_\infty} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + (1 + \gamma_g C_T) \mathbf{g} \quad (17.2)$$

$$\frac{D\mathcal{C}}{Dt} = \operatorname{div}(\mathcal{D} \operatorname{grad} \mathcal{C}) \quad (17.3)$$

onde  $\boldsymbol{\Omega}$  é a velocidade angular do eletrodo. O tensor de tensões viscosas de um fluido Newtoniano com a viscosidade  $\mu$  variável é representado por  $\boldsymbol{\tau}$  e suas componentes são dadas por [141]:

$$\tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (17.4)$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \quad (17.5)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (17.6)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (17.7)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \quad (17.8)$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \quad (17.9)$$

Desenvolvemos o primeiro termo do membro direito da Eq. (17.2):

$$\begin{aligned} -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} &= -2\Omega \mathbf{e}_z \times (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) = 2\Omega v_\theta \mathbf{e}_r - 2\Omega v_r \mathbf{e}_\theta - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \\ &- \Omega \mathbf{e}_z \times (\Omega \mathbf{e}_z \times (r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z)) = \Omega^2 r \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

Admite-se que o campo estacionário independa da coordenada azimutal  $\theta$  e que  $\partial p / \partial r \equiv 0$ . Nessas condições, o campo obedece às equações da continuidade, da quantidade de movimento e de transporte da espécie química, que simplificam-se e tomam a forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (17.10)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = 2\Omega v_\theta + \Omega^2 r + \frac{1}{\rho_\infty} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) \quad (17.11)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -2\Omega v_r + \frac{1}{\rho_\infty} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right) \quad (17.12)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho_\infty} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) - (1 + \gamma_g C) |\mathbf{g}| \quad (17.13)$$

$$v_r \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r} + v_z \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mathcal{D} r \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mathcal{D} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \right) \quad (17.14)$$

Desenvolvemos os termos viscosos das Eqs. (17.11 a 17.13), substituindo nas mesmas, as expressões dos elementos do tensor de tensões. Nesse estágio, introduzimos as hipóteses de que a componente vertical da velocidade, o perfil de concentração e, portanto, o perfil de viscosidade só variam ao longo da direção axial. Obtemos, para o termo viscoso da Eq. (17.11):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_\infty} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) &= \frac{1}{\rho_\infty} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( 2\mu r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \right. \\ &\left. 2\mu \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right] \right) = \nu \left( \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{2v_r}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Para o termo viscoso da Eq. (17.12):

$$\frac{1}{\rho_\infty} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right] = \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)$$

Para o termo viscoso da Eq. (17.13):

$$\frac{1}{\rho_\infty} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) = \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + 2 \frac{\partial \nu}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Substituindo a expressão dos termos do tensor de tensão acima nas Eqs. (17.10 a 16.7) e desenvolvendo o segundo membro da Eqs. (17.14), obtém-se:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (17.15)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = 2\Omega v_\theta + \Omega^2 r + \nu \left( \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{2v_r}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \quad (17.16)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -2\Omega v_r + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \quad (17.17)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + 2 \frac{\partial \nu}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} - (1 + \gamma_g C) |\mathbf{g}| \quad (17.18)$$

$$v_z \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} + \mathcal{D} \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial z^2} \quad (17.19)$$

### 17.2.2 Equações constitutivas da viscosidade e do coeficiente de difusão

Nesse ponto, admitimos que a viscosidade do eletrólito depende da concentração da espécie química relevante e, consequentemente, da coordenada axial  $z$ . Admitimos também a validade da lei de Stokes-Einstein, que postula que o produto da viscosidade pelo coeficiente de difusão é constante:

$$D\nu = D_\infty \nu_\infty \quad (17.20)$$

Adicionalmente, consideramos que a viscosidade do eletrólito relaciona-se com a concentração da espécie química relevante, de acordo com a lei [61, 103]:

$$\nu = \nu_\infty \exp(mC) \quad (17.21)$$

onde  $m$  é uma constante adimensional, determinada a partir de dados experimentais e  $C$  é a função adimensional que descreve a variação da concentração da espécie química ao longo da direção axial.  $C$  varia de 0, fora da camada limite, a 1 na interface e depende da coordenada  $z$  adimensional. Essa última é obtida multiplicando-se a correspondente coordenada dimensional por  $(\Omega/\nu(\infty))^{1/2}$ , onde  $\nu(\infty)$  é a viscosidade no seio da solução. A lei dada pela Eq. 17.21 baseia-se em equação obtida por Esteves e colaboradores (2001) [60] com base em argumentos termodinâmicos e comprovada experimentalmente pelos autores.

Usando os valores da viscosidade e do coeficiente de difusão de fora da camada limite para adimensionalizar as Eqs. (17.20) e (17.21), obtemos

$$D\nu = 1 \quad \text{e} \quad \nu = \exp(mC) \quad (17.22)$$

A viscosidade adimensional é obtida dividindo-a pelo valor do seio do eletrólito. Definimos o número de Schmidt como:

$$Sc = \frac{\nu_\infty}{D_\infty}, \quad (17.23)$$

### 17.2.3 Equações dos perfis do campo estacionário

Procura-se uma solução para as Eqs. (17.15-17.19) na forma:

$$v_r = r \Omega F(z) \quad (17.24)$$

$$v_\theta = r \Omega G(z) \quad (17.25)$$

$$v_z = (\nu(\infty) \Omega)^{1/2} H(z) \quad (17.26)$$

$$p = \rho \nu(\infty) \Omega P(z) \quad (17.27)$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_\infty + (\mathcal{C}_S - \mathcal{C}_\infty) C(z) \quad (17.28)$$

As variáveis  $\mathcal{C}_S$  e  $\mathcal{C}_\infty$  são, respectivamente, a concentração na superfície e longe do eletrodo. Substitui-se a forma das componentes da velocidade, da pressão e da concentração da espécie química, dadas pelas Eqs. (17.24 a 17.28), nas Eqs. (17.15 a 17.19) e obtém-se o seguinte sistema de equações ordinárias não-lineares, para os perfis adimensionais  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $P$  e  $C$ .

$$\begin{aligned} 2F + H' &= 0 \\ F^2 - (G + 1)^2 + HF' &= \frac{d}{dz} (\nu F') \\ 2F(G + 1) + HG' &= \frac{d}{dz} (\nu G') \\ P' + HH' &= 2\nu' F' + 2\nu' H' + 2\nu H'' - |\mathbf{g}| \frac{1 + \gamma_g C}{\nu_\infty^{1/2} \Omega^{3/2}} \\ Sc HC' &= D'C' + DC'' \end{aligned}$$

Todas as variáveis no sistema de equações acima são adimensionais e função da variável adimensional  $z$ , com exceção do último termo da equação de  $v_z$ , que é a única onde a pressão aparece. Nesse termo, apenas  $C$  é adimensional. Pode-se extrair a equação da continuidade, na forma  $2F + H' = 0$ , da equação da componente axial, da quantidade de movimento. Utilizando a relação de Stokes-Einstein na forma adimensional (Eq. 17.22). Obtemos:

$$2F + H' = 0 \quad (17.29)$$

$$F^2 - (G + 1)^2 + HF' - \nu F'' - \nu' F' = 0 \quad (17.30)$$

$$2F(G + 1) + HG' - \nu G'' - \nu' G' = 0 \quad (17.31)$$

$$P' + HH' - \nu H'' - 2\nu' H' - |\mathbf{g}| \frac{1 + \gamma_g C}{\nu_\infty^{1/2} \Omega^{3/2}} \quad (17.32)$$

$$Sc HC' - \frac{C''}{\nu} + \frac{\nu'}{\nu^2} C' = 0 \quad (17.33)$$

onde  $\nu$  é dado pela Eq. (17.22) e

$$\nu' = m \exp(mC) C'$$

As condições de contorno para  $F$ ,  $G$  and  $H$  são  $F = H = P = G = 0$  junto à superfície do disco,  $z = 0$  e  $F = H' = 0$ ,  $G = -1$  quando  $z \rightarrow \infty$ .

Observa-se que a variação da massa específica do eletrólito devido à presença da espécie química proveniente da dissolução do eletrodo não afeta os perfis de velocidade, nem de concentração, mas apenas o de pressão.

### 17.2.4 Deteminação da viscosidade na interface eletrodo-eletrólito

As Eqs. (17.29 a 17.33) são resolvidas usando o método de Newton em uma malha de pontos uniformemente espaçados e com as derivadas espaciais representadas por fórmulas discretas com precisão espacial de segunda ordem. Para resolvê-las é necessário especificarmos dois parâmetros: o Número de Schmidt fora da camada limite, que tomamos como  $Sc = 2000$  e o parâmetro  $m$  (Eq. 17.21), que define o valor da viscosidade na interface eletrodo-eletrólito, onde a concentração adimensional da espécie química é  $C = 1$ .

O valor limite da densidade de corrente na interface é dado por:

$$i = n\mathcal{F} \frac{1}{Sc} \frac{1}{\nu_0/\nu_\infty} (\mathcal{C}_\infty - \mathcal{C}_s) \sqrt{\nu_\infty \Omega} \left. \frac{dC}{dz} \right|_{z=0} \quad (17.34)$$

onde  $i$  é expresso em  $A/cm^2$ ,  $n$  é o número de valência da espécie química ( $n = 2$ ),  $\mathcal{F} = 96500 C/mol$ , é a constante de Faraday,  $\mathcal{C}_s = 2.0 \times 10^{-3} mol/cm^3$  é a concentração dimensional de saturação da espécie química e  $\mathcal{C}_\infty = 0 mol/cm^3$ . O valor limite da densidade de corrente é obtido experimentalmente, sendo  $i = 0.8810 A/cm^2$  at  $900 rpm$ . As demais variáveis da Eq. (17.34),  $\nu_0/\nu_\infty$  e  $dC/dz|_{z=0}$ , a derivada da concentração adimensional na interface dependem do perfil de concentrações, que são obtidos por integração numérica das Eqs. (17.29 a 17.33). Arbitra-se um valor para  $\nu_0/\nu_\infty$ , resolve-se as equações dos perfis estacionários, de onde obtém-se o valor de  $dC/dz|_{z=0}$ . Refaz-se o cálculo iterativamente até que o valor do membro esquerdo da Eq. (17.34) convirja para o valor experimental da densidade de corrente. A convergência do membro direito da Eq. (17.34) para o valor experimental da densidade de corrente é obtida para  $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$ , que é o valor utilizado para o estudo da estabilidade descrito nas seções seguintes. O valor do coeficiente  $m$  (Eqs. 17.21 e 17.22) é  $m = 0,81315$ .

### 17.2.5 Perfis do campo estacionário

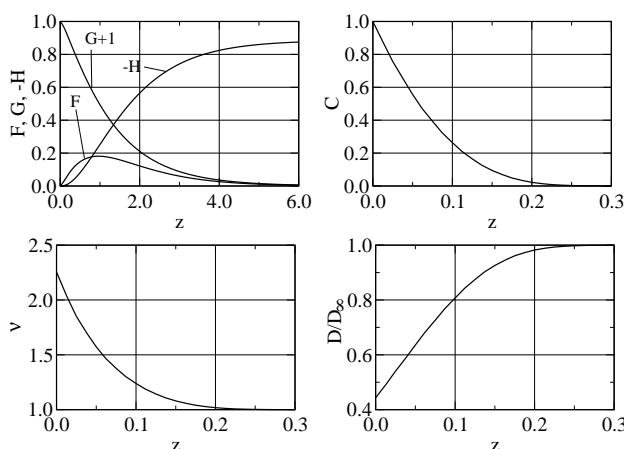


Figura 17.1: Perfis de velocidade adimensional, concentração, viscosidade e coeficiente de difusão para  $Sc = 2000$ ,  $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$ ,  $\nu = \nu_\infty \exp(mC)$ ,  $m = 0,81315$ , ( $0 \leq C \leq 1$ ).

O elevado número de Schmidt do problema ( $SC = 2000$ ) resulta em uma camada limite de concentração sensivelmente mais fina do que a hidrodinâmica. A relação entre a espessura das camadas hidrodinâmica,  $\delta_h$ , e de concentração,  $\delta_c$ , é dada, para o caso do escoamento próximo ao eixo de um disco rotatório, por Levich, (1962)[92]:

$$\frac{\delta_h}{\delta_c} \approx 2 Sc^{1/3} \quad (17.35)$$

A camada limite de concentração mais fina do que a hidrodinâmica resulta em perfis de velocidade próximos aos do caso de viscosidade constante, fora da camada limite de concentração, que se estende até  $z \approx 0.25$ . Em particular, obtemos  $H = -0.88559$

longe do disco, para o caso de viscosidade varável que consideremos, valor esse que se compara a  $H = -0.88447$ , do caso de fluido com viscosidade constante. Os perfis adimensionais  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $\nu$  and  $C$ , obtidos para  $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$  and  $Sc = 2000$  se encontram representados na Fig. (17.1). No entanto, as derivadas dos perfis de velocidade são muito afetadas pela camada limite de concentração, próximo à interface, como mostra a Fig. (17.2). Admitindo que a espessura da camada limite hidrodinâmica seja  $\delta_h = 6$  avaliamos a espessura da camada limite de concentração como sendo  $\delta_c = 0.24$ , com base na Eq. (17.35). A espessura obtida numericamente concorda com essa estimativa.

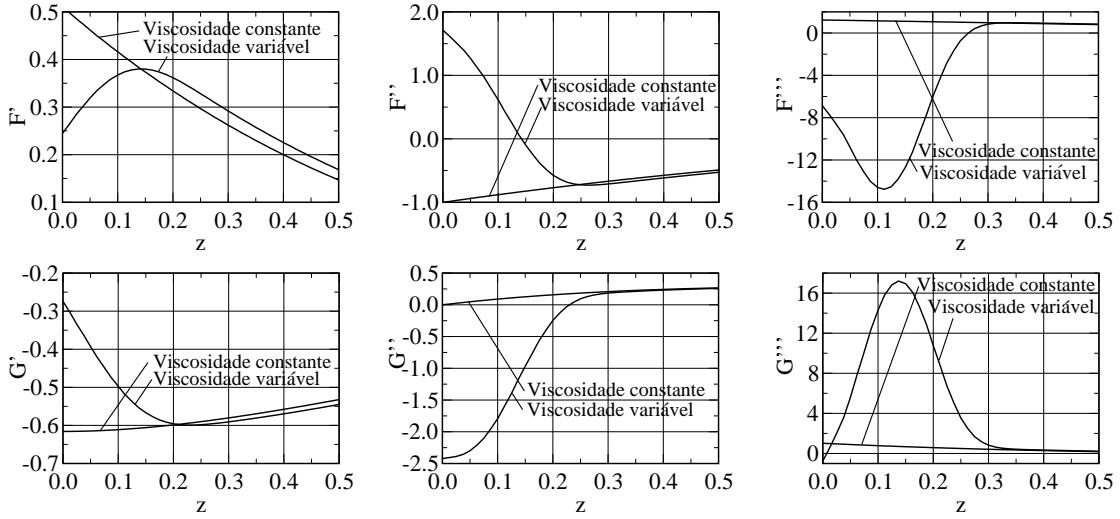


Figura 17.2: As três primeiras derivadas dos perfis adimensionais de velocidade,  $F$  e  $G$ , para os casos de fluido com viscosidade constante e de fluido com viscosidade variável, com  $Sc = 2000$ ,  $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$ ,  $\nu = \nu_\infty \exp(mC)$ ,  $m = 0,81315$ , ( $0 \leq C \leq 1$ ).

### 17.3 Estabilidade Hidrodinâmica: Perturbações Tri-dimensionais

Passamos ao estudo da estabilidade do campo estacionário acima determinado, seguindo o mesmo procedimento adotado no Cap. (16): lineariza-se as equações de evolução, levando em conta que o coeficiente de difusão e a viscosidade são variáveis sendo que os valores referentes ao estado base dependem somente da coordenada axial  $z$ . As equações linearizadas são a seguir, adimensionalizadas; Adiciona-se ao estado base uma perturbação tri-dimensional de pequena intensidade, que acarreta variações no coeficiente de difusão e na viscosidade, nas três direções. A variáveis do estado base, que intervém nas equações linearizadas e adimensionalizadas são substituídas pela forma correspondente. A seguir, substitui-se nas equações resultantes, a forma da perturbação. Elimina-se a pressão e a equação da continuidade e recai-se em um problema generalizado, de cálculo dos autovalores e autofunções de um operador complexo e não-simétrico, contendo três equações, uma das quais, com derivadas espaciais de quarta ordem e duas com derivadas de segunda ordem. As derivadas espaciais são representadas por formas discretas, o que reduz o problema original ao da determinação

dos autovalores de um operador algébrico complexo e não-simétrico. O problema é resolvido com o mesmo método utilizado no Cap. (16), Sec. (16.5.5).

### 17.3.1 Linearização das equações de evolução

O campo hidrodinâmico é escrito na forma da solução de Von Kármán mais uma perturbação. As variáveis da solução estacionária são identificadas com uma barra e as de perturbação, com um til. Obtém-se:

$$\begin{aligned} v_r &= \bar{v}_r + \tilde{v}_r & v_\theta &= \bar{v}_\theta + \tilde{v}_\theta & v_z &= \bar{v}_z + \tilde{v}_z \\ p &= \bar{p} + \tilde{p} & \mathcal{C}_T &= \bar{\mathcal{C}} + \tilde{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

As variáveis do campo perturbado são introduzidas nas equações da continuidade, Navier-Stokes e de transporte de uma especie química. Subtrai-se os termos contendo apenas o estado de base e omite-se e os termos não-lineares, contendo produtos das perturbações. As equações de evolução de pequenas perturbações tomam a forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{v}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (17.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} - 2 \frac{\bar{v}_\theta \tilde{v}_\theta}{r} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} &= 2\Omega v_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \\ \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{\tau}_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{\tau}_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{rz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (17.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}_r \tilde{v}_\theta + \tilde{v}_r \bar{v}_\theta}{r} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} &= -2\Omega v_r - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \\ \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tilde{\tau}_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{\theta z}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (17.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \\ \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{\tau}_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zz}}{\partial z} \right) - |\mathbf{g}| \gamma_g \tilde{c} \end{aligned} \quad (17.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathcal{C}}}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{\mathcal{C}}}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{\mathcal{C}}}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{\mathcal{C}}}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{d \tilde{\mathcal{C}}}{dz} &= \bar{\mathcal{D}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{\mathcal{C}}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\mathcal{C}}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{C}}}{\partial z^2} \right) + \\ \frac{d \bar{\mathcal{D}}}{dz} \frac{\partial \tilde{\mathcal{C}}}{\partial z} + \bar{\mathcal{D}} \frac{d^2 \tilde{\mathcal{C}}}{dz^2} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{D}}}{\partial z} \frac{d \tilde{\mathcal{C}}}{dz} \end{aligned} \quad (17.40)$$

Desenvolvemos a seguir os termos viscosos das componentes da Eq. de Navier-Stokes. Os termos do tensor de tensões são os dados pelas Eqs. (17.4 a 17.9). Extrai-se os termos contendo a equação da continuidade e obtém-se, iniciando pela Eq. (17.37):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{\tau}_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{\tau}_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{rz}}{\partial z} \right) &= \\ \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta \partial \tilde{v}_r}{r} \right) - \frac{2\bar{v}_r}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}_r}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} \right) + \\ \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{\tilde{v}_\theta \partial \bar{v}_r}{r} \right) - \frac{2\tilde{v}_r}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}_r}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo  $1/r \partial v_r / \partial r$  à expressão acima, substituindo:

$$\bar{\nu} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z \partial r} = \frac{\bar{\nu}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} \right) - \frac{\bar{\nu}}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z}$$

e rearranjando os termos obtemos:

$$\begin{aligned} & \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}_r}{r^2} \right) + 2 \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} \right) + \\ & \frac{d\bar{\nu}}{dz} \left( \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} \right) + \tilde{\nu} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\bar{v}_r}{r^2} \right) + 2 \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial r} + \\ & \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial z} \left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} \right) = \\ & \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}_r}{r^2} \right) + \frac{d\bar{\nu}}{dz} \left( \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} \right) + \\ & \tilde{\nu} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial z^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} - \frac{2\bar{v}_r}{r^2} \right) + 2 \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} \end{aligned}$$

Passamos ao desenvolvimento dos termos viscosos da Eq. (17.38)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tilde{\tau}_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{\theta z}}{\partial z} \right) = \frac{\bar{\nu}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} \frac{1}{r} + r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} \right) + \\ & \frac{\tilde{\nu}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} \frac{1}{r} + r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} \right) \\ & \frac{2\bar{\nu}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}_r}{r} \right) + \frac{2\tilde{\nu}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}_r}{r} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \tilde{v}_r \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} + \bar{v}_r \right) + \\ & \frac{d\bar{\nu}}{dz} \left( \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} \right) + \frac{d\tilde{\nu}}{dz} \left( \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \theta} \right) + \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z \partial \theta} \right) + \tilde{\nu} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z \partial \theta} \right) = \\ & \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}_\theta}{r^2} \right) + \\ & \tilde{\nu} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{v}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} - \frac{\bar{v}_\theta}{r^2} \right) + \\ & \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \tilde{v}_r \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} + \bar{v}_r \right) + \\ & \frac{d\bar{\nu}}{dz} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} \right) + \frac{d\tilde{\nu}}{dz} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} \right) = \\ & \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}_\theta}{r^2} \right) + \\ & \tilde{\nu} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} - \frac{\bar{v}_\theta}{r^2} \right) + \frac{2\bar{v}_r}{r^2} \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial \theta} + \frac{d\bar{\nu}}{dz} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} \end{aligned}$$

Desenvolvendo os termos viscosos da Eq. (17.39):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{\tau}_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zz}}{\partial z} \right) &= \bar{\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} \right) \right) + \tilde{\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} \right) \right) + \\ \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial r} \left( \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial r} \left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} \right) + \bar{\nu} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} \right) + \tilde{\nu} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \theta} \right) + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \theta} \right) + 2 \frac{d\bar{\nu}}{dz} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} + 2 \frac{d\tilde{\nu}}{dz} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} + 2\bar{\nu} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z^2} + 2\tilde{\nu} \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} = \\ \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} \right) + 2 \frac{d\bar{\nu}}{dz} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} + \\ \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} + \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial r} \left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \theta} \right) + 2 \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima, dos termos viscosos simplificados, nas Eqs. (17.37 a 17.39) obtemos as equações de evolução de pequenas perturbações do campo estacionário, na forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{v}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (17.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \bar{v}_\theta \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} - 2 \frac{\bar{v}_\theta \tilde{v}_\theta}{r} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} &= 2\Omega v_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \\ \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}_r}{r^2} \right) + \frac{d\bar{\nu}}{dz} \left( \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} \right) + \\ \tilde{\nu} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial z^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} - \frac{2 \bar{v}_r}{r^2} \right) + 2 \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} & \quad (17.42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \bar{v}_\theta \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}_r \tilde{v}_\theta + \tilde{v}_r \bar{v}_\theta}{r} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} &= -2\Omega v_r - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \\ \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}_\theta}{r^2} \right) + \frac{d\bar{\nu}}{dz} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} \right) + \\ \tilde{\nu} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} - \frac{\bar{v}_\theta}{r^2} \right) + \frac{2 \bar{v}_r}{r^2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} & \quad (17.43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \bar{v}_\theta \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \\ \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} \right) + 2 \frac{d\bar{\nu}}{dz} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} + \\ \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} + \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial r} \left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \theta} \right) + 2 \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} - |\mathbf{g}| \gamma_g \tilde{c} & \quad (17.44) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{C}}{\partial r} + \bar{v}_\theta \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{C}}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{d\bar{C}}{dz} = \bar{\mathcal{D}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{C}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{d\bar{\mathcal{D}}}{dz} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial z} + \tilde{\mathcal{D}} \frac{d^2 \bar{C}}{dz^2} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{D}}}{\partial z} \frac{d\bar{C}}{dz} \quad (17.45)$$

### 17.3.2 Adimensionalização das variáveis

As variáveis da hidrodinâmica são adimensionalizadas com os mesmos fatores utilizados na Sec. 16.5.2. Para a espécie química transportada e para o coeficiente de difusão da mesma, definimos a concentração e o coeficiente de difusão adimensionais,  $c_T^*$  e  $D^*$ , respectivamente, como:

$$c_T^* = \bar{c} + \tilde{c} = \frac{\mathcal{C}_T - \mathcal{C}_\infty}{\mathcal{C}_S - \mathcal{C}_\infty} = \frac{\bar{c} - \mathcal{C}_\infty}{\mathcal{C}_S - \mathcal{C}_\infty} + \frac{\tilde{c}}{\mathcal{C}_S - \mathcal{C}_\infty} \quad D^* = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}_\infty}$$

onde  $\mathcal{C}_S$  é a concentração da espécie química na interface e  $\mathcal{C}_\infty$  e  $\mathcal{D}_\infty$  são, respectivamente, a concentração e o coeficiente de difusão da mesma fora da camada limite. Introduzindo as definições acima na equação de transporte da espécie química e indicando as variáveis adimensionais com um asterisco, têm-se:

$$(\mathcal{C}_S - \mathcal{C}_\infty) \frac{r_e \Omega^{3/2}}{\nu(\infty)^{1/2}} \left( \frac{\partial c_T^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{grad} c_T^* \right) = (\mathcal{C}_S - \mathcal{C}_\infty) \mathcal{D}_\infty \frac{\Omega}{\nu(\infty)} \operatorname{div} (D^* \mathbf{grad} c_T^*)$$

onde os operadores vetoriais também são escritos em forma adimensional. Simplificando e voltando a escrever as variáveis adimensionais sem asterisco deste ponto para a frente, exceto onde indicado de outra forma, têm-se:

$$\frac{\partial c_T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} c_T = \frac{\mathcal{D}_\infty}{r_e \nu(\infty)^{1/2} \Omega^{1/2}} \operatorname{div} (D \mathbf{grad} c_T)$$

onde:

$$\frac{\mathcal{D}_\infty}{r_e \nu(\infty)^{1/2} \Omega^{1/2}} = \frac{1}{Pe} = \frac{\nu(\infty)^{1/2}}{r_e \Omega^{1/2}} \frac{\mathcal{D}_\infty}{\nu(\infty)} = \frac{1}{R Sc}$$

$Pe$  e  $Sc$  são, respectivamente, os números de Péclet e de Schmidt, calculados com base nas propriedades fora da camada limite. A equação de transporte da espécie química, escrita na forma adimensional, é portanto:

$$\frac{\partial c_T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} c_T = \frac{1}{R Sc} \operatorname{div} (D \mathbf{grad} c_T)$$

Dá-se preferência à forma acima, pois embora o número de Péclet varie de forma contínua, essa variação se deve ao Reynolds, pois o número de Schmidt é característico da espécie química transportada e do eletrólito.

O termo gravitacional que aparece na equação de  $v_z$  Eq. 17.44 e não foi considerado no Cap. 17. Discutimos a seguir a forma adimensional desse termo. Introduzindo as variáveis adimensionais na Eq. 17.44 obtemos:

$$\frac{r_e^{2.5/2}}{\Omega} \nu_\infty^{1/2} \frac{\partial v_z^*}{\partial t^*} + \dots = \dots - |\mathbf{g}| \gamma_g \tilde{c} = \dots - \sigma |\mathbf{g}| \gamma_g \tilde{c},$$

onde  $\sigma = \pm 1$ , se a face do eletrodo estiver voltada para baixo ou para cima, respectivamente e  $\sigma = 0$  se os efeitos gravitacionais forem desprezados. Reescrevendo a equação acima:

$$\frac{\partial v_z^*}{\partial t^*} + \dots = \dots - \sigma \left[ \frac{|\mathbf{g}| (\nu_\infty / \Omega^{1/2})}{r_e^2 \Omega^2} \right] \gamma_g \tilde{c}$$

A equação acima sugere que número de Froude possa ser definido por:

$$Fr = \frac{r_e \Omega}{[|g| (\nu_\infty / \Omega)^{1/2}]^{1/2}} = \frac{r_e \Omega}{(|g|\delta)^{1/2}},$$

mas essa definição tem o inconveniente de incluir a coordenada radial  $r_e$  no número de Froude. Como variações do número de Reynolds podem ser interpretadas como variações da coordenada  $r_e$ , o número de Froude não será constante ao variarmos o número de Reynolds na determinação das curvas de estabilidade neutra. É portanto conveniente extraímos a coordenada  $r_e$  da definição do número de Froude:

$$\frac{r_e \Omega}{(|g|\delta)^{1/2}} = \frac{\Omega \delta}{(|g|\delta)^{1/2}} \frac{r_e}{\delta} = \Omega \left( \frac{\delta}{|g|} \right)^{1/2} R = \frac{\Omega}{|g|} \left( \frac{\nu_\infty}{\Omega} \right)^{1/4} R = \frac{\Omega^{3/4} \nu_\infty^{1/4}}{|g|^{1/2}} R.$$

Definimos então o número de Froude por:

$$Fr = \frac{\Omega^{3/4} \nu_\infty^{1/4}}{|g|^{1/2}} \quad (17.46)$$

Introduzindo as definições acima nas Eqs. 17.41 a 17.45 obtém-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{v}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (17.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} - 2 \frac{\bar{v}_\theta \tilde{v}_\theta}{r} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} &= 2 \frac{\tilde{v}_\theta}{R} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \\ \frac{1}{R} \left[ \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}_r}{r^2} \right) + \frac{d\bar{\nu}}{dz} \left( \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. \tilde{\nu} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial z^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} - 2 \frac{\bar{v}_r}{r^2} \right) + 2 \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} \right] & \end{aligned} \quad (17.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}_r \tilde{v}_\theta + \tilde{v}_r \bar{v}_\theta}{r} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} &= -2 \frac{\tilde{v}_r}{R} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \\ \frac{1}{R} \left[ \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}_\theta}{r^2} \right) + \frac{d\bar{\nu}}{dz} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. \tilde{\nu} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} - \frac{\bar{v}_\theta}{r^2} \right) + \frac{2 \bar{v}_r}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} \right] & \end{aligned} \quad (17.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \\ \frac{1}{R} \left[ \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} \right) + 2 \frac{d\bar{\nu}}{dz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right. \\ \left. \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} \left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \theta} \right) + 2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right] - \sigma \frac{\gamma_g \tilde{c}}{Fr^2 R^2} & \end{aligned} \quad (17.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \tilde{c}}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial \tilde{c}}{\partial z} + \tilde{v}_z \frac{dc}{dz} &= \frac{1}{R Sc} \left[ \bar{D} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{c}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{c}}{\partial z^2} \right) + \right. \\ \left. \frac{d\bar{D}}{dz} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial z} + \tilde{D} \frac{d^2 \bar{c}}{dz^2} + \frac{\partial \tilde{D}}{\partial z} \frac{d\bar{c}}{dz} \right] & \end{aligned} \quad (17.51)$$

### 17.3.3 O campo perturbado

Definimos nesse ponto a perturbação à qual o estado base é submetido e seu efeito no coeficiente de difusão da espécie química e na viscosidade do eletrólito.

A perturbação aplicada ao estado base é semelhante à utilizada na Sec. 16.5.3 (ver Eq. 16.39). Especificamente:

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \\ p \\ \mathcal{C}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\Omega F \\ r\Omega G \\ (\nu(\infty)\Omega)^{1/2}H \\ \rho\nu(\infty)\Omega P \\ \mathcal{C}_\infty + (\mathcal{C}_s - \mathcal{C}_\infty)C \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} r_e\Omega f \\ r_e\Omega g \\ r_e\Omega h \\ \rho\nu(\infty)\Omega \pi \\ (\mathcal{C}_s - \mathcal{C}_\infty)c \end{pmatrix} \exp[i(\alpha r + \beta R\theta - \omega t)] + cc \quad (17.52)$$

onde  $\mathcal{C}_s$  é a concentração na interface,  $C$  e  $c$  são funções da coordenada  $z$  adimensional apenas.  $A$  é a amplitude da perturbação. Reescrevendo as variáveis da Eq. 17.52 na forma adimensional:

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \\ p \\ \mathcal{C}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rF/R \\ rG/R \\ H/R \\ p/R^2 \\ C \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \\ \pi \\ c \end{pmatrix} \exp[i(\alpha r + \beta R\theta - \omega t)] + cc \quad (17.53)$$

Estabelecemos agora, as relações entre a perturbação da concentração e viscosidade e entre essa e o coeficiente de difusão. Para o caso da viscosidade, admite-se que a perturbação da mesma seja proporcional à perturbação da concentração da espécie química transportada. Em forma adimensional:

$$\nu = \bar{\nu} + \tilde{\nu} = \bar{\nu} + \gamma \tilde{c}$$

onde  $\gamma$  é um coeficiente de proporcionalidade, que pode depender da concentração estacionária da espécie química, isto é, de forma geral  $\gamma = \gamma(\bar{c}(z))$ .

Da lei de Stokes-Einstein, têm-se que (em forma dimensional):

$$\mathcal{D}\nu = C^{te}$$

Em forma adimensional:

$$D\nu = 1$$

e, em particular:

$$\bar{D}\bar{\nu} = 1$$

onde:

$$\frac{d\bar{D}}{dz} = \frac{d}{dz} \frac{1}{\bar{\nu}} = -\frac{\bar{\nu}'}{\bar{\nu}^2}$$

Para o caso da viscosidade e, consequentemente, do coeficiente de difusão ligeiramente perturbados:

$$(\bar{D} + \tilde{D})(\bar{\nu} + \tilde{\nu}) = \bar{D}\bar{\nu} + \bar{D}\tilde{\nu} + \tilde{D}\bar{\nu} = 1$$

como  $\bar{D}\bar{\nu} = 1$ , têm-se que:

$$\bar{D}\tilde{\nu} + \tilde{D}\bar{\nu} = \bar{D}\gamma\tilde{c} + \tilde{D}\bar{\nu} = 0$$

onde conclui-se que:

$$\tilde{D} = -\frac{1}{\bar{\nu}^2}\gamma\tilde{c} \quad \text{e} \quad \frac{d\tilde{D}}{dz} = 2\frac{\bar{\nu}'}{\bar{\nu}^3}\gamma\tilde{c} - \frac{1}{\bar{\nu}^2}\gamma'\tilde{c} - \frac{1}{\bar{\nu}^2}\gamma\tilde{c}'$$

### 17.3.4 O problema de autovalores e autofunções

Substituindo o estado base, dado pelo primeiro termo do lado direito da Eq. (17.52) nas Eqs. 17.47 a 17.51 obtemos:

$$\frac{\tilde{v}_r}{r} + \frac{\partial\tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{v}_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\tilde{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (17.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{v}_r}{\partial t} + \frac{r}{R}F\frac{\partial\tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{G}{R}\frac{\partial\tilde{v}_r}{\partial\theta} + \frac{H}{R}\frac{\partial\tilde{v}_r}{\partial z} + \frac{F}{R}\tilde{v}_r - \frac{2}{R}(G+1)\tilde{v}_\theta + \frac{r}{R}F'\tilde{v}_z = -\frac{\partial\tilde{p}}{\partial r} + \\ \frac{\bar{\nu}}{R}\left(\frac{\partial^2\tilde{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{v}_r}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\tilde{v}_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{v}_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\tilde{v}_\theta}{\partial\theta} - \frac{\tilde{v}_r}{r^2}\right) + \frac{\bar{\nu}'}{R}\left(\frac{\partial\tilde{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial\tilde{v}_r}{\partial z}\right) + \\ \tilde{v}\frac{r}{R}F'' + 2\frac{F}{R}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial r} + \frac{r}{R}F'\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z} \end{aligned} \quad (17.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{v}_\theta}{\partial t} + \frac{r}{R}F\frac{\partial\tilde{v}_\theta}{\partial r} + \frac{G}{R}\frac{\partial\tilde{v}_\theta}{\partial\theta} + \frac{H}{R}\frac{\partial\tilde{v}_\theta}{\partial z} + \frac{F}{R}\tilde{v}_\theta + \frac{2}{R}(G+1)\tilde{v}_r + \frac{r}{R}G'\tilde{v}_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\theta} + \\ \frac{\bar{\nu}}{R}\left(\frac{\partial^2\tilde{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{v}_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\tilde{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{v}_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\tilde{v}_r}{\partial\theta} - \frac{\tilde{v}_\theta}{r^2}\right) + \frac{\bar{\nu}'}{R}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{v}_z}{\partial\theta} + \frac{\partial\tilde{v}_\theta}{\partial z}\right) + \\ \frac{r}{R}G''\tilde{v} + \frac{2F}{rR}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\theta} + \frac{r}{R}G'\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z} \end{aligned} \quad (17.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{v}_z}{\partial t} + \frac{r}{R}F\frac{\partial\tilde{v}_z}{\partial r} + \frac{G}{R}\frac{\partial\tilde{v}_z}{\partial\theta} + \frac{H}{R}\frac{\partial\tilde{v}_z}{\partial z} + \frac{H}{R}\tilde{v}_z = -\frac{\partial\tilde{p}}{\partial z} + \frac{\bar{\nu}}{R}\left(\frac{\partial^2\tilde{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{v}_z}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\tilde{v}_z}{\partial z^2} + \right. \\ \left.\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{v}_z}{\partial r}\right) + 2\frac{\bar{\nu}'}{R}\frac{\partial\tilde{v}_z}{\partial z} + \frac{H''}{R}\tilde{v} + \frac{r}{R}F'\frac{\partial\tilde{v}}{\partial r} + \frac{G'}{R}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\theta} + \frac{2}{R}H'\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z} - \sigma\frac{\gamma_g\tilde{c}}{Fr^2R^2} \end{aligned} \quad (17.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{c}}{\partial t} + \frac{r}{R}F\frac{\partial\tilde{c}}{\partial r} + \frac{G}{R}\frac{\partial\tilde{c}}{\partial\theta} + \frac{H}{R}\frac{\partial\tilde{c}}{\partial z} + \tilde{v}_z\frac{d\bar{c}}{dz} = \frac{1}{RSc}\left[\bar{D}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\tilde{c}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{c}}{\partial\theta}\right) + \right.\right. \\ \left.\left.\frac{\partial^2\tilde{c}}{\partial z^2}\right) + \frac{d\bar{D}}{dz}\frac{\partial\tilde{c}}{\partial z} + \tilde{D}\frac{d^2\bar{c}}{dz^2} + \frac{\partial\tilde{D}}{\partial z}\frac{d\bar{c}}{dz}\right] \end{aligned} \quad (17.58)$$

O passo seguinte consiste em introduzir a forma adimensional da perturbação, dados pela Eq. 17.53, nas Eqs. 17.54 a 17.58. A amplitude da perturbação, que aparece uma vez em

cada termo, pode ser cancelada das equações. Obtém-se:

$$i \left( \alpha - \frac{i}{r} \right) f + i \frac{R}{r} \beta g + h' = 0 \quad (17.59)$$

$$\begin{aligned} i \left( \frac{r}{R} \alpha F + \beta G - \omega \right) f + \frac{r}{R} F' h + i \alpha \pi - \frac{r}{R} (F' \gamma c' + F' \gamma' c + F'' \gamma c) &= \frac{1}{R} \left( \nu f'' - \right. \\ \nu \left( \alpha^2 + \frac{R^2}{r^2} \beta^2 \right) f - F f + 2(G+1)g - H f' + i \alpha \nu' h + \nu' f' + 2i \alpha F \gamma c \Big) + \\ \frac{1}{R^2} \left( i \frac{R}{r} \nu \alpha f - 2i \frac{R^2}{r^2} \nu \beta g \right) - \frac{\nu}{R r^2} f \end{aligned} \quad (17.60)$$

$$\begin{aligned} i \left( \frac{r}{R} \alpha F + \beta G - \omega \right) g + \frac{r}{R} G' h + i \frac{R}{r} \beta \pi - \frac{r}{R} (G'' \gamma c + G' \gamma' c + G' \gamma c') &= \frac{1}{R} (\nu g'' - \\ \nu \left( \alpha^2 + \frac{R^2}{r^2} \beta^2 \right) g - F g - 2(G+1)f - H g' + i \frac{R}{r} \beta \nu' h + \nu' g' + \frac{2R}{r} i \beta F \gamma c \Big) + \\ \frac{1}{R^2} \left( i \frac{R}{r} \nu \alpha g - 2i \frac{R^2}{r^2} \nu \beta f \right) - \frac{\nu}{R r^2} g \end{aligned} \quad (17.61)$$

$$\begin{aligned} i \left( \frac{r}{R} \alpha F + \beta G - \omega \right) h + \pi' - i \beta G' \gamma c - \frac{r}{R} i \alpha F' \gamma c &= \frac{1}{R} \left( \nu h'' - \nu \left( \alpha^2 + \frac{R^2}{r^2} \beta^2 \right) h - \right. \\ H h' - H' h + 2\nu' h' + H'' \gamma c + 2H' \gamma' c + 2H' \gamma c' \Big) + \frac{i}{R r} \nu \alpha h - \sigma \frac{\gamma_g c}{F r^2 R^2} \end{aligned} \quad (17.62)$$

$$\begin{aligned} i \left( \frac{r}{R} \alpha F + \beta G - \omega \right) c + C' h &= \frac{1}{R S c \bar{\nu}} \left( - \left( \alpha \bar{\alpha} + \frac{R^2}{r^2} \beta^2 \right) c + \right. \\ \frac{1}{\bar{\nu}} \left( \left( 2 \frac{\bar{\nu}'}{\bar{\nu}} \gamma - \gamma' \right) C' - \gamma C'' \right) c - \left( \frac{\bar{\nu}'}{\bar{\nu}} + \frac{1}{\bar{\nu}} C' \gamma + S c \bar{\nu} H \right) c' + c'' \Big) \end{aligned} \quad (17.63)$$

Substituindo  $r$  por  $R$  nas equações acima obtém-se:

$$i \left( \alpha - \frac{i}{R} \right) f + i \beta g + h' = 0 \quad (17.64)$$

$$\begin{aligned} i (\alpha F + \beta G - \omega) f + F' h + i \alpha \pi - (F' \gamma c' + F' \gamma' c + F'' \gamma c) &= \frac{1}{R} (\nu f'' - \nu \lambda^2 f - F f + \\ 2(G+1)g - H f' + i \alpha \nu' h + \nu' f' + 2i \alpha F \gamma c) + \frac{1}{R^2} (i \nu \alpha f - 2i \nu \beta g) - \frac{\nu}{R^3} f \end{aligned} \quad (17.65)$$

$$\begin{aligned} i (\alpha F + \beta G - \omega) g + G' h + i \beta \pi - (G'' \gamma c + G' \gamma' c + G' \gamma c') &= \frac{1}{R} (\nu g'' - \nu \lambda^2 g - F g - \\ 2(G+1)f - H g' + i \beta \nu' h + \nu' g' + 2i \beta F \gamma c) + \frac{1}{R^2} (i \nu \alpha g - 2i \nu \beta f) - \frac{\nu}{R^3} g \end{aligned} \quad (17.66)$$

$$\begin{aligned} i (\alpha F + \beta G - \omega) h + \pi' - i (\alpha F' + \beta G') \gamma c &= \frac{1}{R} (\nu h'' - \nu \lambda^2 h - H h' - H' h + \\ 2\nu' h' + H'' \gamma c + 2H' \gamma' c + 2H' \gamma c') + \frac{i}{R^2} \nu \alpha h - \sigma \frac{\gamma_g c}{F r^2 R^2} \end{aligned} \quad (17.67)$$

$$\begin{aligned} i (\alpha F + \beta G - \omega) c + h C' &= \frac{1}{R S c \bar{\nu}} \left( -\bar{\lambda}^2 c + \frac{1}{\bar{\nu}} \left( \left( 2 \frac{\bar{\nu}'}{\bar{\nu}} \gamma - \gamma' \right) C' - \gamma C'' \right) c - \right. \\ \left( \frac{\bar{\nu}'}{\bar{\nu}} + \frac{1}{\bar{\nu}} C' \gamma + S c \bar{\nu} H \right) c' + c'' \Big) \end{aligned} \quad (17.68)$$

Procede-se à redução a do número de equações do sistema acima, de forma análoga ao que foi feito com as Eqs. 16.49 a 16.52. Multiplica-se a Eq. 17.65 por  $\bar{\alpha} = \alpha - i/R$ , a Eq. 17.66 por  $\beta$ , soma-se as duas equações resultantes e despreza-se os termos de  $\mathcal{O}(R^{-2})$  e menores. Utiliza-se a equação da continuidade (Eq. 17.64) e as definições  $\bar{\lambda}^2 = \alpha\bar{\alpha} + \beta^2$  e  $\eta = \alpha g - \beta f$ . Obtém-se:

$$\begin{aligned} & -(\alpha F + \beta G - \omega) h' + (\bar{\alpha} F' + \beta G') h + i\bar{\lambda}^2 \pi - \\ & (\bar{\alpha} F' + \beta G') \gamma' c - (\bar{\alpha} F' + \beta G') \gamma c' - (\bar{\alpha} F'' + \beta G'') \gamma c = \\ & \frac{1}{R} (i\nu h''' - i\nu \lambda^2 h' - iFh' + 2(G+1)\eta - iHh'' + i\nu' \bar{\lambda}^2 h + i\nu' h'') + \frac{2}{R} i\bar{\lambda}^2 F \gamma c \end{aligned}$$

Derivando a equação acima em relação a  $z$  obtém-se:

$$\begin{aligned} & -(\alpha F' + \beta G') h' - (\alpha F' + \beta G' - \omega) h'' + (\bar{\alpha} F'' + \beta G'') h + (\bar{\alpha} F' + \beta G') h' + i\bar{\lambda}^2 \pi' - \\ & (\bar{\alpha} F'' + \beta G'') \gamma' c - (\bar{\alpha} F' + \beta G') \gamma'' c - (\bar{\alpha} F' + \beta G') \gamma' c' - \\ & (\bar{\alpha} F'' + \beta G'') \gamma c' - (\bar{\alpha} F' + \beta G') \gamma' c' - (\bar{\alpha} F' + \beta G') \gamma c'' - \\ & (\bar{\alpha} F''' + \beta G''') \gamma c - (\bar{\alpha} F'' + \beta G'') \gamma' c - (\bar{\alpha} F'' + \beta G'') \gamma c' = \\ & \frac{1}{R} (i\nu' h''' + i\nu h'''' - i\nu' \lambda^2 h' - i\nu \lambda^2 h'' - iF'h' - iFh'' + 2G''\eta + 2(G+1)\eta' - iH'h'' - \\ & iHh''' + i\nu'' \bar{\lambda}^2 h + i\nu' \bar{\lambda}^2 h' + i\nu'' h'' + i\nu' h''') + \frac{2}{R} i\bar{\lambda}^2 (F' \gamma c + F \gamma' c + F \gamma c') \quad (17.69) \end{aligned}$$

Da Eq. 17.67 obtém-se:

$$\begin{aligned} \pi' = & -i(\alpha F + \beta G - \omega) h + \frac{1}{R} (\nu h'' - \nu \lambda^2 h - Hh' - H'h + 2\nu' h') + \frac{i}{R^2} \nu \alpha h + \\ & i(\alpha F' + \beta G') \gamma c + \frac{1}{R} (H'' \gamma c + 2H' \gamma' c + 2H' \gamma c') - \sigma \frac{\gamma_g c}{Fr^2 R^2} \quad (17.70) \end{aligned}$$

O membro direito da equação acima contém dois termos de  $\mathcal{O}(R^{-2})$ :  $i\nu \alpha h / R^2$  e o termo gravitacional. Apesar de ser de  $\mathcal{O}(R^{-2})$  mantemos esse último e analisamos mais à frente seu valor frente aos demais. Substituindo a expressão de  $\pi'$ , dada pela Eq. 17.70, na Eq. 17.69, obtém-se:

$$\begin{aligned} & -(\alpha F' + \beta G' - \omega) h'' + (\bar{\alpha} F'' + \beta G'') h + \bar{\lambda}^2 (\alpha F + \beta G - \omega) h + \\ & (-\bar{\lambda}^2 (\alpha F' + \beta G') - (\bar{\alpha} F''' + \beta G''')) \gamma c - 2(\bar{\alpha} F'' + \beta G'') \gamma' c - 2(\bar{\alpha} F' + \beta G') \gamma' c' - \\ & 2(\bar{\alpha} F'' + \beta G'') \gamma c' - (\bar{\alpha} F' + \beta G') \gamma c'' - (\bar{\alpha} F' + \beta G') \gamma'' c - \sigma \frac{i\bar{\lambda}^2 \gamma_g}{Fr^2 R^2} c = \\ & -\frac{1}{R} (i\bar{\lambda}^2 \nu h'' - i\bar{\lambda}^2 \nu \lambda^2 h - i\bar{\lambda}^2 Hh' - i\bar{\lambda}^2 H'h + 2i\bar{\lambda}^2 \nu' h') + \frac{1}{R} (i\nu' h''' + i\nu h'''' - \\ & i\nu' \lambda^2 h' - i\nu \lambda^2 h'' - iFh'' + 2G''\eta + 2(G+1)\eta' - iH'h'' - iHh''' + i\nu'' \bar{\lambda}^2 h + \\ & i\nu' \bar{\lambda}^2 h' + i\nu'' h'' + i\nu' h''') + \frac{6}{R} i\bar{\lambda}^2 (F \gamma' c + F \gamma c') + \frac{4}{R} i\bar{\lambda}^2 F' \gamma c \end{aligned}$$

O último termo da equação acima foi obtido utilizando-se a Eq. (17.29). Multiplicando a equação acima por  $R$ , definindo  $D^n = d^n/dz^n$  e reagrupando os termos obtém-se:

$$\begin{aligned}
& (i\nu(D^2 - \lambda^2)(D^2 - \bar{\lambda}^2) + i\nu'D(2D^2 - \lambda^2 - \bar{\lambda}^2) + i\nu''(D^2 + \bar{\lambda}^2) + \\
& R(\alpha F + \beta G - \omega)(D^2 - \bar{\lambda}^2) - R(\bar{\alpha}F'' + \beta G'') - iHD(D^2 - \bar{\lambda}^2) - \\
& iH'(D^2 - \bar{\lambda}^2) - iFD^2)h + (2(G+1)D + 2G')\eta + (R(\bar{\alpha}F' + \beta G')\gamma D^2 + \\
& (2R(\bar{\alpha}F'' + \beta G'')\gamma + 6i\bar{\lambda}^2F\gamma + 2R(\bar{\alpha}F' + \beta G')\gamma')D + \\
& (R\bar{\lambda}^2(\alpha F' + \beta G') + R(\bar{\alpha}F''' + \beta G''') + 4i\bar{\lambda}^2F')\gamma + \\
& (2R(\bar{\alpha}F'' + \beta G'') + 6i\bar{\lambda}^2F)\gamma' + R(\bar{\alpha}F' + \beta G')\gamma'' + \sigma \frac{i\bar{\lambda}^2\gamma_g}{Fr^2R})c = 0
\end{aligned} \tag{17.71}$$

A segunda equação é obtida através de procedimento semelhante ao utilizado para a obtenção da Eq. (16.56): multiplica-se a Eq. 17.65 por  $-i\beta R$ , a Eq. 17.66 por  $i\alpha R$ , soma-se as duas equações e utiliza-se a Eq. 17.64:

$$(2(G+1)D - iR(\alpha G' - \beta F'))h + (i\nu(D^2 - \lambda^2) + i\nu'D + R(\alpha F + \beta G - \omega) - iHD - iF)\eta + (iR(\alpha G' - \beta F')\gamma D + iR(\alpha G'' - \beta F'')\gamma + iR(\alpha G' - \beta F')\gamma')c = 0 \tag{17.72}$$

O problema de estabilidade dos campos hidrodinâmico e de uma espécie química se reduz portanto à resolução das Eqs. 17.71, 17.72 e 17.68. Rearranjando e multiplicando a última equação por  $RSc$ , e reescrevendo as três, têm-se:

$$\begin{aligned}
& (i\nu(D^2 - \lambda^2)(D^2 - \bar{\lambda}^2) + i\nu'D(2D^2 - \lambda^2 - \bar{\lambda}^2) + i\nu''(D^2 + \bar{\lambda}^2) + \\
& R(\alpha F + \beta G - \omega)(D^2 - \bar{\lambda}^2) - R(\bar{\alpha}F'' + \beta G'') - iHD(D^2 - \bar{\lambda}^2) - \\
& iH'(D^2 - \bar{\lambda}^2) - iFD^2)h + (2(G+1)D + 2G')\eta + (R(\bar{\alpha}F' + \beta G')\gamma D^2 + \\
& (2R(\bar{\alpha}F'' + \beta G'')\gamma + 6i\bar{\lambda}^2F\gamma + 2R(\bar{\alpha}F' + \beta G')\gamma')D + \\
& (R\bar{\lambda}^2(\alpha F' + \beta G') + R(\bar{\alpha}F''' + \beta G''') + 4i\bar{\lambda}^2F')\gamma + \\
& (2R(\bar{\alpha}F'' + \beta G'') + 6i\bar{\lambda}^2F)\gamma' + R(\bar{\alpha}F' + \beta G')\gamma'' + \sigma \frac{i\bar{\lambda}^2\gamma_g}{Fr^2R})c = 0
\end{aligned} \tag{17.73}$$

$$\begin{aligned}
& (2(G+1)D - iR(\alpha G' - \beta F'))h + \\
& (i\nu(D^2 - \lambda^2) + i\nu'D + R(\alpha F + \beta G - \omega) - iHD - iF)\eta + \\
& (iR(\alpha G' - \beta F')\gamma D + iR(\alpha G'' - \beta F'')\gamma + iR(\alpha G' - \beta F')\gamma')c = 0
\end{aligned} \tag{17.74}$$

$$\begin{aligned}
& RSc(i(\alpha F + \beta G - \omega)c + RScC'h - \frac{1}{\bar{\nu}}\left(-\bar{\lambda}^2 + \frac{1}{\bar{\nu}}\left(\left(2\frac{\bar{\nu}'}{\bar{\nu}}\gamma - \gamma'\right)C' - \gamma C''\right)c - \right. \\
& \left.\left(\frac{\bar{\nu}'}{\bar{\nu}} + \frac{1}{\bar{\nu}}C'\gamma + Sc\bar{\nu}H\right)c' + c''\right) = 0
\end{aligned} \tag{17.75}$$

Recai-se em um problema generalizado de cálculo dos autovalores e autofunções de um operador diferencial complexo e assimétrico. As Eqs. 17.73 a 17.75 podem ser reescritas na forma  $A\mathbf{X} = \omega R B\mathbf{X}$ :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \eta \\ c \end{pmatrix} = \omega R \begin{pmatrix} B_{11} & & \\ & B_{22} & \\ & & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \eta \\ c \end{pmatrix} \tag{17.76}$$

onde os elementos omitidos nas matrizes acima são iguais a zero e os operadores  $A_{ij}$  e  $B_{ij}$  são dados por:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= a_{114}D^4 + a_{113}D^3 + a_{112}D^2 + a_{111}D + a_{110} \\
A_{12} &= a_{121}D + a_{120} \\
A_{13} &= a_{132}D^2 + a_{131}D + a_{130} \\
A_{21} &= a_{211}D + a_{210} \\
A_{22} &= a_{222}D^2 + a_{221}D + a_{220} \\
A_{23} &= a_{231}D + a_{230} \\
A_{31} &= a_{310} \\
A_{33} &= a_{332}D^2 + a_{331}D + a_{330}
\end{aligned}$$

$$B_{11} = D^2 - \bar{\lambda}^2 \quad B_{22} = 1 \quad B_{33} = iSc$$

com os coeficientes dados por:

$$\begin{aligned}
a_{114} &= i\nu \\
a_{113} &= i(2\nu' - H) \\
a_{112} &= i\nu'' - i\nu(\lambda^2 + \bar{\lambda}^2) + R(\alpha F + \beta G) - i(H' + F) \\
a_{111} &= -i\nu'(\lambda^2 + \bar{\lambda}^2) + iH\bar{\lambda}^2 \\
a_{110} &= i\bar{\lambda}^2(\nu'' + \nu\lambda^2) - R(\alpha F + \beta G)\bar{\lambda}^2 - R(\bar{\alpha}F'' + \beta G'') + iH'\bar{\lambda}^2 \\
a_{121} &= 2(G + 1) \\
a_{120} &= 2G' \\
a_{132} &= R(\bar{\alpha}F' + \beta G')\gamma \\
a_{131} &= [2R(\bar{\alpha}F'' + \beta G'') + 6i\bar{\lambda}^2F]\gamma + 2R(\bar{\alpha}F' + \beta G')\gamma' \\
a_{130} &= (R\bar{\lambda}^2(\alpha F' + \beta G') + R(\bar{\alpha}F''' + \beta G''') + 4i\bar{\lambda}^2F')\gamma + \\
&\quad (2R(\bar{\alpha}F'' + \beta G'') + 6i\bar{\lambda}^2F)\gamma' + R(\bar{\alpha}F' + \beta G')\gamma'' + \sigma \frac{i\bar{\lambda}^2\gamma_g}{Fr^2R} \\
a_{211} &= 2(G + 1) \\
a_{210} &= -iR(\alpha G' - \beta F') \\
a_{222} &= i\nu \\
a_{221} &= i(\nu' - H) \\
a_{220} &= -i\nu\lambda^2 + R(\alpha F + \beta G) - iF \\
a_{231} &= iR(\alpha G' - \beta F')\gamma \\
a_{230} &= iR((\alpha G'' - \beta F'')\gamma + (\alpha G' - \beta F')\gamma') \\
a_{310} &= RScC' \\
a_{332} &= -\frac{1}{\bar{\nu}} \\
a_{331} &= \frac{1}{\bar{\nu}} \left( \frac{\bar{\nu}'}{\bar{\nu}} + \frac{1}{\bar{\nu}} C'\gamma + Sc\bar{\nu}H \right) \\
a_{330} &= iRSc(\alpha F + \beta G) - \frac{1}{\bar{\nu}} \left( -\bar{\lambda}^2 + \frac{1}{\bar{\nu}} \left( \left( 2\frac{\bar{\nu}'}{\bar{\nu}}\gamma - \gamma' \right) C' - \gamma C'' \right) \right)
\end{aligned}$$

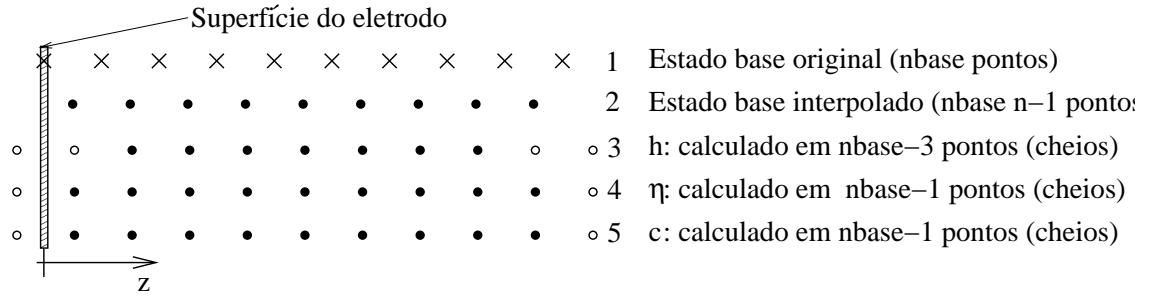


Figura 17.3: A malha numérica utilizada no cálculo dos autovalores do problema de estabilidade dos campos acoplados.

Têm-se um problema de oitava ordem, que requer oito condições de contorno. A condição de não escorregamento exige que a velocidade do fluido seja igual à do disco (nula) junto à superfície. Fora da camada limite, a componente  $v_r$  deve se anular,  $v_\theta \rightarrow -1$  e  $\partial v_z / \partial z \rightarrow 0$ . Essas condições já são satisfeitas pelo satisfeitas pelo estado de base, de modo que a perturbação não deve alterar o campo nem junto à superfície, nem longe do disco. Em consequência deve-se requerer que  $h = \eta = c = 0$  in  $z = 0$ . Além disso, conclui-se, com base na Eq. 16.45 que  $h' = 0$  na superfície do eletrodo. Fora da camada limite ( $z \rightarrow \infty$ ) impõe-se que  $h = h' = \eta = c = 0$ .

Figura 17.4: Estrutura dos operadores do problema de autovalores e autofunções, conforme Eq. 17.76, reescrito em forma discreta.  $h$ ,  $\eta$  e  $c$  são vetores contendo  $n_{\text{base}} - 3$ ,  $n_{\text{base}} - 1$  e  $n_{\text{base}} - 1$  pontos, respectivamente, onde  $n_{\text{base}}$  é o número de pontos dos perfis do estado base, lidos pelo código numérico.

### 17.3.5 Curvas neutras estacionárias

Os resultados da resolução do problema de estabilidade definido pela Eq. 17.76 são apresentados de forma semelhante à adotada na Sec. 16.5.6, isso é compara-se a estabilidade do campo hidrodinâmico e da espécie química acoplados através da viscosidade, com o hidrodinâmico a viscosidade constante. Tratamos apenas de perturbações que giram com a mesma

velocidade angular do eletrodo. Como utilizamos um referencial solidário ao eletrodo, essas perturbações têm velocidade angular  $\Omega = 0$  e as denominamos como perturbações estacionárias.

Os resultados são apresentados na forma de projeções da curva de estabilidade neutra nos planos  $R \times \alpha$ ,  $R \times \beta$  e  $\beta \times \alpha$ . As curvas de estabilidade neutra caracterizam-se por ser a taxa de crescimento da perturbação,  $\Im(\omega) = 0$ . Os cálculos foram feitos em domínios de comprimento  $z = 30$ , utilizando-se malhas de 2401 pontos, uniformemente espaçados.

Os resultados mostram importante redução da estabilidade do campo hidrodinâmico, resultante das modificações introduzidas pela presença de uma espécie química que afeta a viscosidade do eletrólito: De um lado, as duas equações da hidrodinâmica, que intervém na Eq. 17.76 são muito modificadas pela presença de termos de acoplamento à concentração da espécie química, o que resulta em um alargamento significativo da faixa de autovetores instáveis e em drástica redução na estabilidade do campo, com forte deslocamento da curva de estabilidade neutra para números de Reynolds mais baixos. De outro lado, a terceira equação do problema de estabilidade, referente à concentração da espécie química faz surgir uma nova região instável, em números de Reynolds muito inferiores aos de instabilidade dos modos hidrodinâmicos. O efeito do campo da espécie química é duplo portanto, reduzindo sensivelmente a estabilidade dos modos hidrodinâmicos e fazendo surgir uma nova família de modos instáveis, que se originam da dinâmica do transporte dessa espécie. A natureza distinta desses modos fica evidente ao se observar a projeção da curva de estabilidade neutra no plano  $\beta \times \alpha$ , onde vê-se que os modos químicos se encontram em uma superfície distinta da superfície dos modos instáveis hidrodinâmicos.

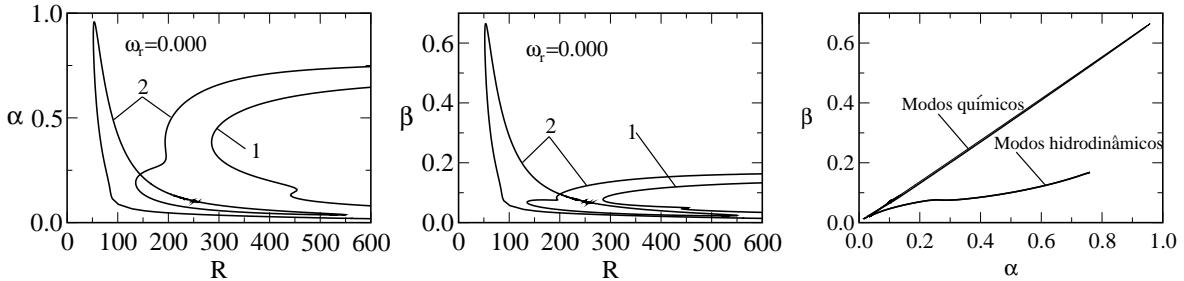


Figura 17.5: Projeções da curva de estabilidade neutra de perturbações estacionárias nos planos  $R \times \alpha$ ,  $R \times \beta$  e  $\beta \times \alpha$ . As curvas de No. 1 referem-se a fluido com viscosidade constante. As de No. 2 referem-se a fluido com viscosidade dependente da concentração de uma espécie química proveniente da dissolução do eletrodo de ferro no ácido sulfúrico.  $Sc = 2000$ ,  $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$ ,  $\nu = \nu_\infty \exp(mC)$ ,  $m = 0,81315$ ,  $(0 \leq C \leq 1)$ . O terceiro diagrama (plano  $\beta \times \alpha$ ) inclui as curvas de estabilidade neutra relativas ao complexo conjugado da perturbação.

Cabe ressaltar que os resultados do estudo de estabilidade apresentado na Sec. 16.5 sugerem que, possivelmente, os modos estacionários aqui analisados não são os mais instáveis. O estudo da estabilidade do campo hidrodinâmico acoplado ao de transporte de uma espécie química encontra-se em andamento. Cabe também observar que, da mesma forma como o campo de uma espécie química afeta significativamente a estabilidade global do problema, deve-se esperar que o campo seja de alguma forma afetado por variações da viscosidade com a temperatura. No entanto a temperatura deve agir sobre a estabilidade do campo segundo

mecanismo diferente do da concentração, pois, sendo o número de Prandtl dos líquidos da ordem de 10, a camada limite térmica é muito mais espessa do que a de concentração.

### 17.3.6 Efeito do desacoplamento entre hidrodinâmica e o transporte da espécie química

A existência de uma inflexão no perfil de velocidades do campo médio resulta na instabilidade do campo. Em escoamentos não viscosos, a inflexão é suficiente para a instabilidade do campo (Drazin and Reid[54], 1981). Embora a propriedade não exista nos escoamentos viscosos, a estabilidade desses escoamentos aumenta em geral, quanto mais longe o perfil de velocidades estiver, de apresentar pontos de inflexão. A Fig. 17.2 mostra que a segunda derivada dos perfis de base,  $F''$  e  $G''$ , mudam de sinal, indicando a existência de uma inflexão nos perfis de velocidades dos campos acoplados. Essa inflexão não existe no caso de fluido com viscosidade constante.

Mostramos, no Cap. 16, que a introdução de um perfil axial e estacionário de viscosidade alarga a faixa de vetores de onda instáveis sem alterar significativamente o número de Reynolds crítico absoluto do problema (ver Fig. 16.12). Para que o alargamento ocorra recorremos a uma camada limite onde a viscosidade varia, de espessuras que variam de 15 a 35% da espessura da camada limite hidrodinâmica. Esses valores são nitidamente maiores do que a espessura da camada limite de concentração usada nesse capítulo. Os valores da viscosidade interfacial utilizados no Cap. 16 são maiores do que os determinados base em dados experimentais (Sec. 17.2.4). Os resultados apresentados nessa seção complementam os do capítulo anterior, ao mostrar que a estabilidade linear do campo hidrodinâmico desacoplado do campo de transporte da espécie química, mas com o perfil de viscosidade

Desacopla-se os campos fazendo-se

$A_{13} = A_{23} = 0$  na Eq. 17.76. O resultado é mostrado na Fig. 17.6. A projeção no plano  $R \times \alpha$  da curva neutra obtida, juntamente com a curva neutra de fluidos com viscosidade mostra que as duas são praticamente iguais, o que mostra que o acoplamento e não a inflexão nos perfis de velocidade, é o responsável pela forte alteração nas propriedades de estabilidade do campo hidrodinâmico. Adicionalmente, a nova região instável, mostrada na Fig. 17.5 não existe no presente caso. As propriedades de estabilidade do campo são essencialmente as do campo de viscosidade constante. A instabilidade do modo de concentração é induzida

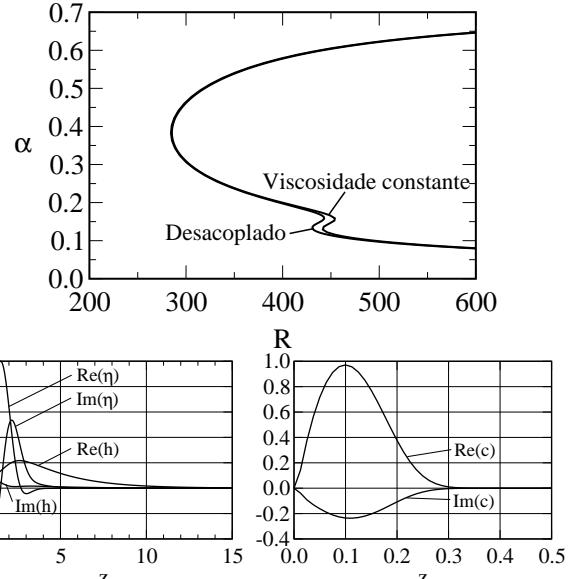


Figura 17.6: Efeito do desacoplamento da hidrodinâmica ao transporte da espécie química. A figura mostra a projeção das curvas neutras de fluidos com viscosidade constante e com o perfil estacionário determinado na Sec. 17.2.5, no plano  $R \times \alpha$  (primeira linha). A segunda linha mostra os perfis de um modo calculado no ponto  $R = 285.39$ ,  $\alpha = 03857$ ,  $\beta = 0.07774$ .

pela hidrodinâmica. A Fig. 17.6 mostra os perfis de um modo localizado aproximadamente no ponto de mínimo da curva neutra. Observa-se que o modo de oscilação da espécie química tem amplitude muito próxima à das componentes hidrodinâmicas, mas o modo químico se restringe a uma região próxima ao disco, de mesma espessura da camada limite de concentração do estado base. As variações do modo de concentração ocorrendo em comprimentos característicos de 4% da espessura da camada limite hidrodinâmica resulta em gradientes de concentração interfaciais elevados.

Mencionamos ainda que Chikkadi *et al.* (2005)[29] obteve resultados semelhantes, ao mostrar que a estabilidade de escoamentos em canais é pouco afetada pela estratificação da viscosidade.

### 17.3.7 Taxa de crescimento de perturbações instáveis

A região instável de modos hidrodinâmicos, ampliada pelo acoplamento com o transporte da espécie química, sugere que existam modos dentro da região com taxa de crescimento ( $\omega_i$ ) superiores às de modos instáveis de fluidos com viscosidade constante. De forma análoga, a estreita nova região de modos químicos sugere que as taxas de crescimento características da região possam ser inferiores às encontradas na região de modos hidrodinâmicos. Esse é o caso, como mostrado na Fig. 17.7. A figura compara as taxas de crescimento da região instável de fluidos com viscosidade constante, com a das regiões instáveis hidrodinâmica e química do problema acoplado.

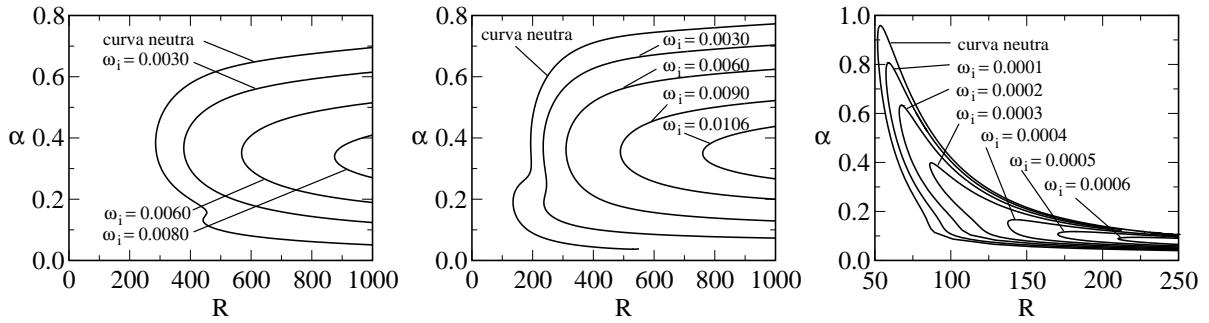


Figura 17.7: Curvas neutras e curvas de nível com taxas de crescimento ( $\omega_i$ ) especificadas, de fluidos com viscosidade constante (à esquerda) na região de modos hidrodinâmicos (no centro) e na região de modos químicos (à direita).

Observa-se na Fig. 17.7 um aumento da ordem de 30%, nas taxas de crescimento de modos da região hidrodinâmica, em virtude do acoplamento da hidrodinâmica ao transporte da espécie química. Mas mostra também que as taxas de crescimento dos modos da nova região instável são mais de uma ordem de grandeza menores do que as da região hidrodinâmica. Ademais, os modos com taxa de crescimento mais altas se encontram em faixas do número de Reynolds acima de 150, que são maiores do que os característicos dos experimentos em células eletroquímicas.

### 17.3.8 Modos marginalmente estáveis e reconstrução de linhas de corrente

Os resultados apresentados na Sec. 17.3.7 mostram que a região instável de modos químicos sendo mais estreita do que a de modos hidrodinâmicos tem modos com taxa de crescimento da ordem de 20 vezes menores do que a dos modos da região hidrodinâmica. Não obstante, os modos instáveis da nova região apresentam uma combinação de propriedades que conduzem a oscilações do gradiente interfacial de concentração, que nos parecem suficientemente fortes para produzir a instabilidade de corrente observada nos experimentos.

A Fig. 17.8 mostra os perfis das componentes hidrodinâmica  $h$  e  $\eta$  e de concentração  $c$  de três modos marginalmente estáveis, localizados sobre a curva neutra que delimita a região química instável. Os perfis mostram que os três modos são similares. As autofunções são dominadas pela componente química  $c$ , cuja amplitude atinge valores de cerca de 20 vezes maiores do que a amplitude das componentes hidrodinâmicas do modo,  $h$  e  $\eta$ .

Adicionalmente, a componente química  $c$  fica confinada em uma região vizinha à superfície do eletrodo, de espessura aproximadamente igual à da camada limite de concentração do estado base. O perfil de concentração dos modos instáveis variando em uma lâmina cuja espessura é de aproximadamente 4% da espessura da camada limite hidrodinâmica e sua elevada amplitude relativa resultam em gradientes de concentração que nos parecem suficientemente elevados para compensar com folga o baixo valor da taxa de crescimento dos mesmos e para dar origem às oscilações de corrente observadas nos experimentos.

Nota-se que a Fig. 17.8 mostra ainda um aumento progressivo do comprimento da componente  $h$  dos modos, à medida em que os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  aumentam. O efeito se explica por razões de continuidade: a redução de  $\alpha$  e  $\beta$  diminui o valor das derivadas em relação a essas duas variáveis na equação da continuidade, o que obriga à redução de  $h'$ .

A Fig. 17.9 mostra a reconstrução local das linhas de corrente das perturbações, com o vetor de componentes  $(v_r, v_z)$  e as curvas de nível de mesma concentração da espécie

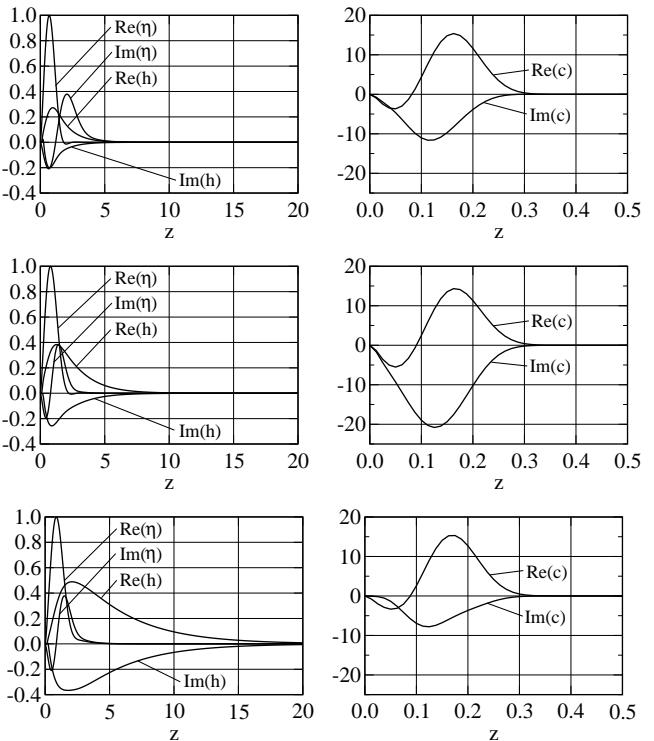


Figura 17.8: Partes real e imaginária de três modos sobre a curva neutra da região química. Os modos localizam-se nos pontos  $R = 64.369$ ,  $\alpha = 0.81250$ ,  $\beta = 0.56278$  (primeira linha),  $R = 60.394$ ,  $\alpha = 0.5000$ ,  $\beta = 0.33949$  (segunda linha) e  $R = 156.99$ ,  $\alpha = 0.20124$ ,  $\beta = 0.13767$  (terceira linha).

química responsável pelo transporte da corrente no plano  $R \times z$  (a) e do vetor  $(v_\theta, v_z)$  no plano  $\theta \times z$  (b).

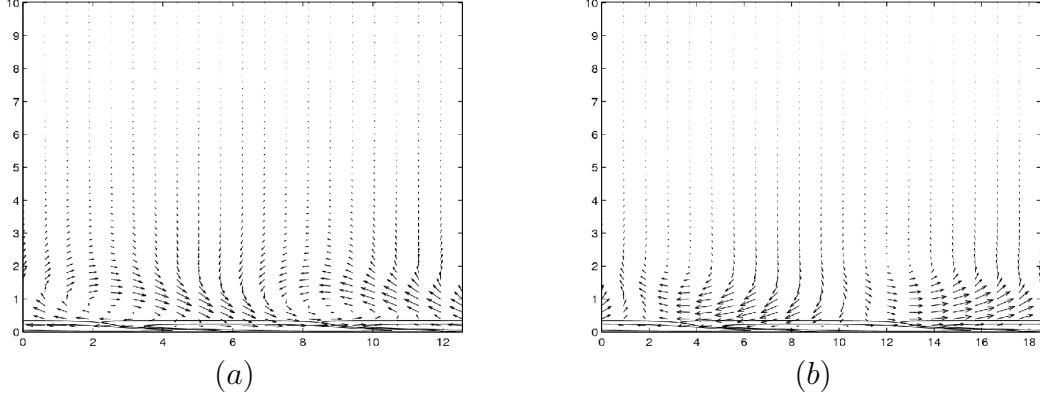


Figura 17.9: Reconstrução local das linhas de corrente no ponto  $R = 60.394$ ,  $\alpha = 0.5000$  e  $\beta = 0.33949$ , localizado sobre o ramo interno da curva neutra de modos químicos. A figura mostra os vetores  $(v_r, v_z)$  no plano  $R \times z$  (a) e os vetores  $(v_\theta, v_z)$  no plano  $\theta \times z$  (b). A figura mostra também duas curvas de nível da componente de concentração na parte inferior de (a) e (b).

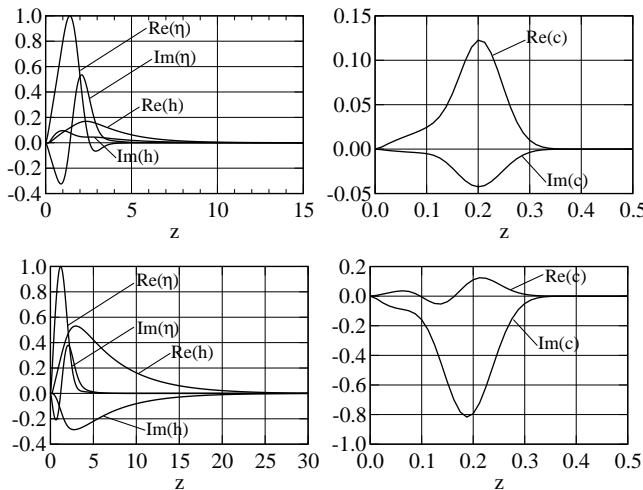


Figura 17.10: Partes real e imaginária de modos localizados aproximadamente nos dois mínimos da curva neutra hidrodinâmica. Primeira linha:  $R = 208.77$ ,  $\alpha = 0.50869$ ,  $\beta = 0.10206$ ; Segunda linha:  $R = 135.48$ ,  $\alpha = 0.18726$ ,  $\beta = 0.067182$ . Os perfis mostram que os dois modos são qualitativamente diferentes. Em ambos os casos a componente química  $c$  fica confinada à fina camada limite de concentração do estado base.

vas de nível de mesma concentração da espécie química responsável pela corrente.

A Fig. 17.10 mostra os perfis na direção axial, de modos marginalmente estáveis nos dois mínimos da curva neutra de modos hidrodinâmicos. A componente química do modo fica confinada, em ambos os casos, à fina camada limite de concentração do estado base, cuja espessura é  $\delta_c \approx 0.3$ . Os dois modos são qualitativamente diferentes; A amplitude da componente química é menor do que a das componentes hidrodinâmicas no modo localizado na parte superior da curva neutra e comparável a  $\eta$  no modo localizado na parte inferior da curva. Observa-se o aumento no alcance da componente  $h$  à medida em que  $\alpha$  e  $\beta$  diminuem.

A reconstrução local das linhas de corrente da perturbação, com os vetores  $(v_r, v_z)$  no plano  $R \times z$  (a) e os vetores  $(v_\theta, v_z)$  no plano  $\theta \times z$  plane (b) são mostradas na Fig. 17.11. Os dois gráficos mostram também cur-

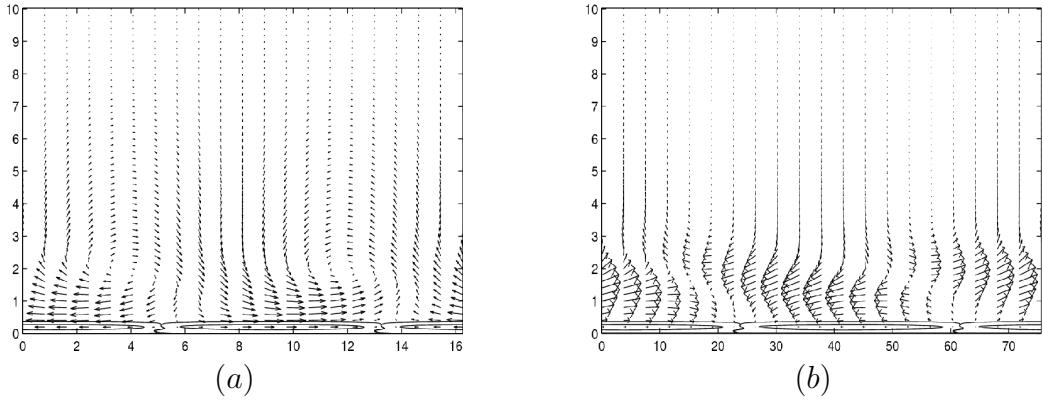


Figura 17.11: Reconstrução local das linhas de corrente no ponto mínimo da curva neutra de modos hidrodinâmicos ( $R = 208.77$ ,  $\alpha = 0.50869$ ,  $\beta = 0.10206$ ). A figura mostra os vetores  $(v_r, v_z)$  no plano  $R \times z$  (a) e os vetores  $(v_\theta, v_z)$  no plano  $\theta \times z$  (b). Mostra também duas curvas de nível da componente de concentração na parte inferior de (a) e (b).

### 17.3.9 Efeito de redução da viscosidade na interface eletrodo/eletrólio

Esta seção apresenta os resultados referentes ao efeito da redução de  $\nu_0/\nu_\infty$  sobre a curva de estabilidade neutra, uma situação que ocorre quando o potencial aplicado à célula é reduzido. Os resultados se encontram na Fig. 17.12. Os cálculos foram feitos admitindo-se um número de Schmidt  $Sc = 2000$ . Tiram-se várias conclusões das curvas mostradas na figura:

1. O caso em que  $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$  não é o mais instável. A região química de modos instáveis é maior nos casos em que  $\nu_0/\nu_\infty = 1.8$  e  $1.5$  do que no de  $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$ , estendendo-se a valores maiores de  $\alpha$  and  $\beta$  do que no último. O número de Reynolds crítico da região química não se altera significativamente;
2. À medida em que o valor de  $\nu_0/\nu_\infty$  se reduz a  $1.8$  e, posteriormente, a  $1.5$ , a nova região de modos químicos passa a apresentar um segundo número de Reynolds mínimo na parte inferior. Ao se atingir  $\nu_0/\nu_\infty = 1.1$ , a região do novo mínimo se destaca da região química e passa a fazer parte da região de modos hidrodinâmicos instáveis. O mínimo absoluto do número de Reynolds localiza-se então nessa última para  $\nu_0/\nu_\infty \leq 1.1$ ;
3. Reduções de  $\nu_0/\nu_\infty$  a valores abaixo de  $1.1$  levam a região de modos químicos a se deslocar para números de Reynolds maiores e a desaparecer à medida e que o fluido volta a ter viscosidade constante. A curva de estabilidade neutra dos modos hidrodinâmicos tende à de fluidos com viscosidade constante;
4. Observa-se que pequenas variações na viscosidade junto à interface já a alargam e a deslocam significativamente para números de Reynolds mais baixos, sugerindo que o acoplamento ao transporte da espécie química é importante fator de instabilidade dos campos;

5. As curvas neutras, calculadas para  $\nu_0/\nu_\infty \leq 1.10$  cruzam o eixo das abcissas ( $\alpha = 0$ ) no plano  $R \times \alpha$  a distância finita do eixo de rotação, com  $\beta \neq 0$ . As mesmas curvas cruzam o eixo das abcissas ( $\beta = 0$ ) no plano  $R \times \beta$  em valores finitos de  $R$  com  $\alpha \neq 0$ . O primeiro caso indica a existência de perturbações moduladas apenas na direção azimutal e o segundo, de perturbações moduladas na direção radial. Esse caso foi observado experimentalmente por Moisy (2004)[110] em configurações com dois discos girando em sentido contrário.
6. Como exemplo de modo marginalmente estável, modulado apenas na direção azimutal, citamos o caso em que  $\nu_0/\nu_\infty = 1.020$ , onde a curva neutra cruza o eixo das abcissas no plano  $\alpha \times R$  no ponto ( $\alpha = 0, \beta = -0.006, R = 623.7$ ). Como exemplo de perturbação modulada na direção radial há o ponto ( $\alpha = 0.006, \beta = 0, R = 695.6$ ), que cruza o eixo das abscissas no plano  $\beta \times R$ .

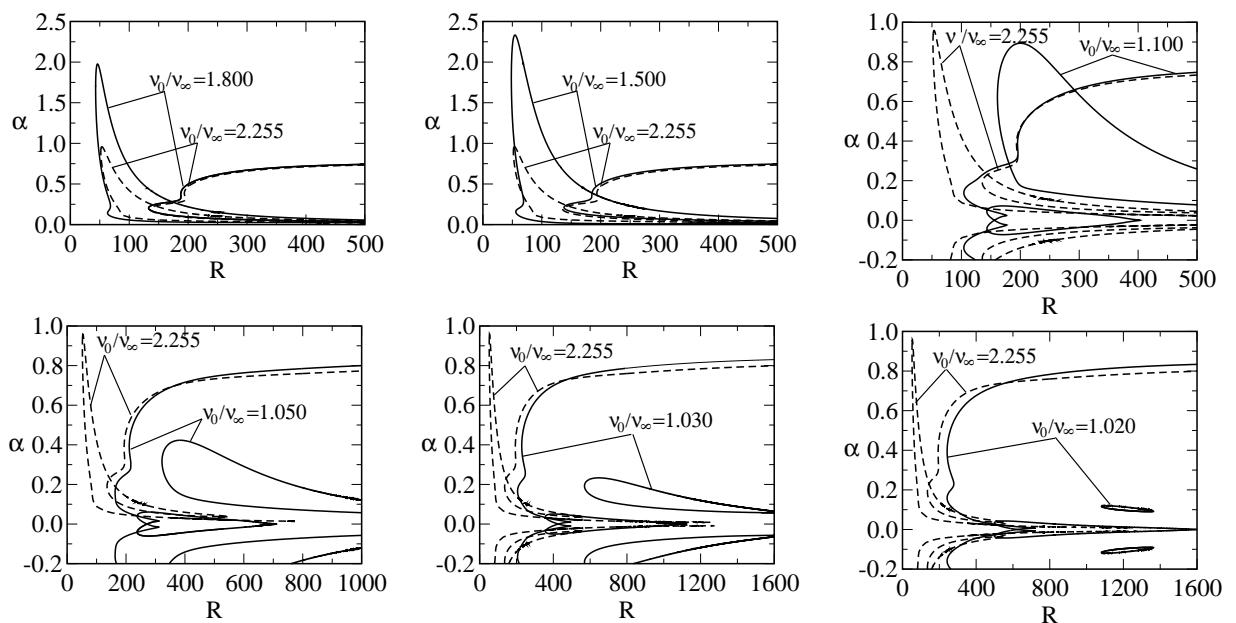


Figura 17.12: O colapso da região química instável quando  $\nu_0/\nu_\infty \rightarrow 1$ , no plano  $\alpha \times R$ . As curvas tracejadas referem-se a  $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$ . As linhas contínuas referem-se a curvas neutras associadas a  $\nu_0/\nu_\infty = 1.800$  no gráfico superior esquerdo a  $\nu_0/\nu_\infty = 1.020$  inferior direito. As curvas mostram que a nova região química desloca-se para números de Reynolds progressivamente mais altos até desaparecer, quando o campo de viscosidade se aproxima do uniforme. O caso mais instável não corresponde a  $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$ . As curvas plotadas no plano  $R \times \beta$  são qualitativamente similares.

### 17.3.10 Efeito do aumento da viscosidade na interface eletrodo/eletrolito

Os resultados apresentados na Sec. 17.3.9 mostram que o menor número de Reynolds crítico não se refere ao caso em que  $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$ , nem a região instável de modos químicos referente a esse caso é a menor de todas.

O resultado sugere que o aumento progressivo da viscosidade na interface e o elevado número de Schmidt levam à uma descontinuidade *de facto* da viscosidade do campo, com uma fina região mais viscosa e o restante do campo caracterizado por uma viscosidade constante, que fazem com que as propriedades de estabilidade do campo tenda, às encontradas em eletrólitos com viscosidade constante.

Mostramos nessa seção que o aumento progressivo da viscosidade na interface eletrodo/eletrólito leva ao rápido colapso da nova região instável e ao retorno da curva de modos hidrodinâmicos à de eletrólitos com viscosidade constante. Os resultados são apresentados na Fig. (17.13): a região de modos químicos reduz-se inicialmente e desaparece quando a relação  $\nu_0/\nu_\infty$  ultrapassa o valor 2.8. A curva de modos hidrodinâmicos pouco se altera até esse valor. Além disso, a curva se retrai e tende à de eletrólitos com viscosidade constante.

### 17.3.11 Efeito de variação da densidade devido à dissolução do eletrodo

O operador  $a_{130}$  do problema de autovalores e autofunções (ver Pág. 170) incluem um termo que quantifica os efeitos de variação da densidade do eletrólito devida à dissolução do eletrodo de ferro. A variação da densidade foi levada em conta nas equações de evolução, na forma de um efeito do tipo Boussinesq, em que apenas o termo gravitacional é afetado. Em princípio, esse termo é pelo menos uma ordem de grandeza menor do que os demais. Fazemos abaixo uma avaliação de seu valor. O termo ao qual nos referimos é:

$$\sigma \frac{i\bar{\lambda}^2 \gamma_g}{Fr^2 R},$$

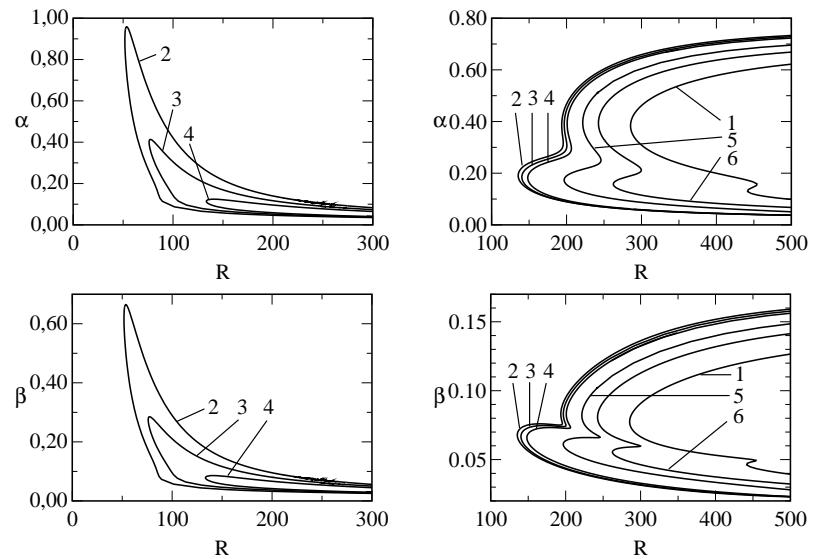


Figura 17.13: Retorno às propriedades de estabilidade de fluidos com  $\nu = C^{te}$  quando  $\nu_0/\nu_\infty \rightarrow \infty$ , no plano  $\alpha \times R$ . Os gráficos no lado esquerdo da figura mostram o colapso da região química instável por efeito do aumento da relação  $\nu_0/\nu_\infty$ . Os gráficos no lado direito mostram o retorno da curva neutra de modos hidrodinâmicos à de eletrólitos com viscosidade constante. As curvas No. 2 a 6 referem-se a  $\nu_0/\nu_\infty = 2.255, 2.5, 2.8, 5.0$  e  $10.0$ , respectivamente.

onde o número de Froude é definido pela Eq. 17.46. Adotando uma velocidade de rotação do eletrodo de  $10\text{ Hz}$  ( $600\text{ rpm}$ ) e utilizando os seguintes valores para as propriedades da transporte da solução  $1M$  de ácido sulfúrico :  $\nu_\infty = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  e  $\Omega = 2\pi \times 10$ , avaliamos

o número de Froude como segue:

$$Fr = \frac{\Omega^{3/4} \nu_{\infty}^{1/4}}{|\mathbf{g}|^{1/2}} = \frac{(2\pi \times 10)^{3/4} (10^{-6})^{1/4}}{9,81^{1/2}} = 0,40. \quad \text{e:} \quad \frac{\gamma_g}{Fr^2} = 0,30.$$

Avaliamos a seguir o coeficiente de variação da massa específica. A massa específica da solução, fora da camada limite é calculada pela adição de 1 mol de ácido sulfúrico (massa molecular igual a 98 g/mol) à água (massa específica igual a 1000 kg/m³). A massa específica da solução é portanto  $\rho_{\infty} = 1098 \text{ kg/m}^3$ . A concentração de saturação de ferro na solução é  $C_S = 2\text{M}$ . Sendo a massa molecular do ferro igual a 26 g/mol, têm-se que  $\Delta\rho \approx 26 \text{ kg/m}^3$  para  $\Delta C = 1\text{M}$ . Obtemos:

$$\gamma_g = \frac{C_S}{\rho_{\infty}} \frac{d\rho}{dC} = \frac{2}{1098} \frac{26}{1} = 0,0474.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{i\bar{\lambda}^2 \gamma_g}{Fr^2 R} a &= i\sigma \left[ \alpha \left( \alpha - \frac{i}{R} \right) + \beta^2 \right] \frac{\gamma_g}{Fr^2 R} = \sigma \frac{\alpha \gamma_g}{Fr^2 R^2} + i\sigma (\alpha^2 + \beta^2) \frac{\gamma_g}{Fr^2 R} \\ &0,30 \sigma \frac{\alpha}{R^2} + i 0,30 \sigma \frac{\alpha^2 + \beta^2}{R}. \end{aligned}$$

A parte real do termo gravitacional é portanto, duas ordens de grandeza em  $R$ , menor do que os coeficientes dos operadores do problema de autovalores e autofunções. A parte imaginária é uma ordem de grandeza menor. Os maiores valores desse último ocorrem na parte superior da região química instável, cujos números de Reynolds são os mais baixos e onde os valores de  $\alpha$  e de  $\beta$  são os maiores.

## 17.4 Conclusões

Os resultados apresentados nesse capítulo mostram que a região instável dos campos acoplados se alarga, em relação à de campos com viscosidade constante. O limite de estabilidade abaixo do qual as perturbações estacionárias são sempre amortecidas reduz-se à metade. Adicionalmente, observa-se o surgimento de nova região instável, que se inicia em números de Reynolds comparáveis aos dos experimentos em células eletroquímicas e que desaparece em números de Reynolds elevados. A região instável de modos químicos sendo mais estreita do que a de modos hidrodinâmicos tem modos com taxa de crescimento da ordem de 20 vezes menores do que a dos modos da região hidrodinâmica. Não obstante, os modos instáveis da nova região apresentam uma combinação de propriedades que conduzem a oscilações do gradiente interfacial de concentração, que nos parecem suficientemente fortes para produzir a instabilidade de corrente observada nos experimentos. Os modos instáveis da região química são dominados pela componente de concentração, que atinge amplitudes 20 vezes maior do que a amplitude das componentes hidrodinâmicas. Adicionalmente, a perturbação de concentração se confina a uma camada limite de espessura de cerca 4% da espessura da camada limite hidrodinâmica, o que resulta em variações espaciais de curto alcance e em oscilações de alta amplitude do gradiente interfacial de concentração da espécie química responsável pela corrente. O aumento progressivo da viscosidade do eletrólito junto

à interface resulta inicialmente, em uma perda de estabilidade do campo, mas, à medida em que a viscosidade interfacial aumenta, o efeito se inverte e o campo volta a apresentar as propriedades de estabilidade do caso de fluidos com viscosidade constante. O caso em que  $\nu_0/\nu_\infty = 2,255$  não é o mais instável. Um aumento inicial da viscosidade na interface de 2% já alarga significativamente a região hidrodinâmica instável, o que mostra a extrema sensibilidade da curva neutra ao acoplamento entre hidrodinâmica e transporte da espécie química. O aumento seguinte da viscosidade interfacial, até um valor 5% acima do de fora da camada limite, expande a região hidrodinâmica instável até praticamente sua área máxima.

A nova região química de modos instáveis é visível desde cedo, mas tem início em números de Reynolds acima de 1100, que são muito superiores à faixa de 20 a 40, dos experimentos eletroquímicos. À medida em que a viscosidade interfacial aumenta a nova região química se alarga e se desloca em direção ao eixo do eletrodo. A distância ao eixo da nova região se torna menor do que a da região hidrodinâmica quando a viscosidade na interface ultrapassa um valor pouco maior do que 10% do valor da mesma, fora da camada limite. A partir desse ponto a nova região continua a se expandir e seu limite inferior se localiza a distâncias do eixo comparáveis ao raio do eletrodo. Nessas condições o campo apresenta forte oscilação do gradiente interfacial de concentração da espécie química que transporta a corrente. A área da nova região instável atinge seu máximo para um valor de  $\nu_0/\nu_\infty$  próximo a 1,5. O aumento da viscosidade interfacial além desse valor resulta em um retorno às propriedades de estabilidade de fluidos com viscosidade constante. Um aumento até  $\nu_0/\nu_\infty = 2,8$ , já resulta praticamente no desaparecimento da nova região química, sem alterar muito a região de modos hidrodinâmicos. Aumentos posteriores, além de  $\nu_0/\nu_\infty = 2,8$ , reconduzem a região à curva neutra de fluidos com viscosidade constante. Esse resultado mostra que a elevação excessiva da viscosidade interfacial, acima de um valor próximo a  $\nu_0/\nu_\infty = 3,0$ , causada por um aumento da corrente, volta a estabilizar a hidrodinâmica. Mas, no presente estágio, não explica a supressão da instabilidade pelo aumento da tensão. Cabe observar que o acoplamento da hidrodinâmica ao transporte da espécie química e não a estratificação da viscosidade, é o responsável pela modificação das propriedades de estabilidade do campo. Pontes *et al.* (2004) [133] e Mangiavacchi *et al.* (2007) [103] constataram que, na ausência de acoplamento, os efeitos de estratificação só alteram a estabilidade do campo hidrodinâmico para valores de viscosidade interfacial e de espessura da camada limite de concentração muito maiores do que os obtidos com o campo de von Kármán utilizado no presente trabalho.

A análise linear identifica a distância ao eixo do eletrodo, abaixo da qual as perturbações do campo de von Kármán são amortecidas. Acima dessa distância, as perturbações cuja geometria se encontra dentro de uma faixa que se alarga apresentam taxa de crescimento positiva. A análise linear identifica essa faixa mas não dá informações sobre o modo selecionado pela estrutura que emerge da instabilidade do campo. A seleção se faz além do regime linear, quando as perturbações já atingem amplitude suficientemente alta para interagirem entre si. A interação não-linear conduz à seleção de um, ou dos poucos modos que caracterizam a primeira estrutura formada.

O estudo da seleção se faz através de métodos que permitem acompanhar a evolução e a interação de modos previamente escolhidos. Outra alternativa é a simulação numérica direta, que não se restringe à presença inicial de poucos modos e permite ir a maiores distâncias do raio onde ocorre a primeira instabilidade. As duas abordagens do problema são objeto de trabalhos em desenvolvimento pelos autores.



## Parte VI

# Tópicos Especiais em Fenômenos de Transferência



# Capítulo 18

## Instabilidades e Padrões de Turbulência no Universo

Reinaldo Roberto Rosa

*Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada*

*INPE – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais*

### 18.1 Introdução

Além de sua importância teórica e experimental em aplicações das engenharias, o estudo de transferência é também de fundamental importância para a compreensão de vários processos em ciências espaciais. São os processos de transferência de matéria e energia que explicam a formação e a evolução de objetos astrofísicos, desde escalas estelares (o Sol, por exemplo) até escalas que envolvem aglomerados de estrelas (as galáxias) e grandes estruturas do Universo<sup>1</sup> (aglomerados e superaglomerados de galáxias).

Em geral, a física espacial preocupa-se com a descrição de fenômenos lineares e não-lineares relacionados às ações de dois campos fundamentais que são o campo eletromagnético e o campo gravitacional. Em especial, destaca-se o estudo da transferência radiativa e processos de ionização em sistemas de grande massa (a massa solar é da ordem de  $10^{30} kg$ , cerca de 300 mil vezes maior do que a da Terra). O estado ionizado no qual a matéria cósmica se encontra é conhecido como *plasma* (termo introduzido pelo físico-químico Irving Langmuir em 1928). Determinados gases, principalmente no contexto astrofísico transitam para o *estado de plasma* quando sua temperatura atinge  $10^3 C$ . Plasmas são gases ionizados regidos principalmente pelo comportamento de campos magnéticos internos e externos ao volume que ocupa. Devido a suas propriedades peculiares – quando comparados com sólidos, líquidos e gases neutros – o plasma é considerado como o quarto estado da matéria.

Plasmas podem ser interpretados como sistemas que apresentam oscilações e comportamento ondulatório e por isso podem transferir matéria e energia de forma eficiente. Por isso, o estudo das ondas de plasmas deve levar em consideração a direção de propagação

---

<sup>1</sup>A unidade usual de distância e de comprimento para escalas de distâncias e tamanhos de aglomerados de galáxias é o *megaparsec*.  $1 Mpc = 3,09 \times 10^{22} m$ . Universo é entendido nesse texto como o objeto estudado pela cosmologia [116].

em relação às direções em que oscilam os campos elétricos e magnéticos envolvidos. Por exemplo, quando a oscilação de um plasma não sofre influência do campo magnético a onda gerada é do tipo *eletrostática* (ou de Langmuir). Quando o plasma está sob ação de um campo magnético as ondas de plasma podem se propagar em diferentes direções em relação a esse campo (paralelamente, perpendicularmente, ou obliquamente). Associando a direção de propagação com a frequência e a polarização da onda (que pode ser linear, circular, ou elíptica) é possível identificar diversos tipos de ondas de plasma (ondas magnetosônicas, ondas de Alfvén, ondas ciclotrônicas, etc.). Não detalharemos aqui os diferentes tipos de plasma, mas recomendamos o estudo dos mesmos em diversos livros que tratam da física de plasmas [49]. O processo que nos interessa discutir aqui é a transferência de energia que pode ocorrer entre as ondas e as partículas que compõem o plasma. Dessa forma, a energia das ondas pode ser transferida para as partículas do plasma e vice-versa. Como resultado, as oscilações podem ser amortecidas ou amplificadas gerando instabilidades no plasma.

## 18.2 Instabilidades e Regimes Turbulentos em Fluidos Neutros e Ionizados

As instabilidades podem ser estudadas tanto no regime linear (quando são descritas por pequenas perturbações) como nos regimes quase-linear e não-linear, (quando termos de segunda ordem são, em geral, considerados). Usualmente, os casos quase lineares e não lineares podem ser tratados de forma mais detalhada por meio de métodos numéricos e computacionais.

Dentre os vários tipos de instabilidades que podem ocorrer em sistemas astrofísicos, um dos mais importantes é o das instabilidades hidrodinâmicas que envolvem fluidos não-homogêneos em interação e/ou em movimentos de convecção que podem evoluir para regimes turbulentos.

Nos regimes turbulentos, os fluxos de matéria se misturam de forma não linear em oposição ao fluxo laminar que está relacionado a padrões de movimento lineares. Um fluxo de matéria definido em um determinado campo de forças é plenamente turbulento quando as escalas de mistura e de oscilações em frequências mais altas é importante no transporte de quantidade de movimento. Nesses casos, as distribuições de pressão, densidade, velocidade e, quando estiver presente, de radiação eletromagnética apresentam uma componente aleatória de grande variabilidade nos domínios do espaço e do tempo. Portanto, o grau de variabilidade aleatória do mecanismo de transporte turbulento dependerá diretamente de um *termo de instabilidade* que possa ser determinado a partir das propriedades básicas que descrevem o movimento do fluido.

Por razões puramente empíricas (aqueles provenientes de experimentos controlados) define-se um termo de instabilidade ( $I$ ) como sendo diretamente proporcional: (i) à velocidade média ( $v$ ) do transporte de quantidade de movimento e (ii) ao parâmetro de configuração de sua fluidez ( $\phi$ ), isto é:

$$I = v\phi. \quad (18.1)$$

O parâmetro de configuração da fluidez do sistema pode ser definido como a razão entre o comprimento característico médio do fluido ( $L$ ) (que irá depender das escalas características

com a qual interage) e a sua propriedade física fundamental de fluidez ( $p$ ). Portanto,  $\phi = L/p$ , que resulta:

$$I = v \left( \frac{L}{p} \right). \quad (18.2)$$

No caso de fluidos neutros há dois casos clássicos de instabilidade que podem ser medidos através do *número de Reynolds* – que é o termo de instabilidade quando a mesma é puramente hidrodinâmica, e o *número de Rayleigh* – que é o termo de instabilidade quando a mesma é de origem térmica sob ação da gravidade. Em ambos os casos a propriedade física fundamental de fluidez é a viscosidade cinemática ( $\nu$ ), medida em  $m^2/s$ . Portanto, no primeiro caso, temos o termo de instabilidade adimensional dado pelo número de Reynolds ( $Re$ ):

$$Re = \frac{vL}{\nu}, \quad (18.3)$$

e, no segundo caso, dado pelo número de Rayleigh ( $Ra$ ):

$$Ra = v_c \frac{L}{\nu}, \quad (18.4)$$

onde  $v_c$  é a velocidade convectiva média devida à instabilidade térmica. Considerando que  $v_c = g\beta\Delta TL^2/\alpha$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\beta$  é o coeficiente de expansão térmica,  $\alpha$  a difusividade térmica, e  $\Delta T$  a diferença de temperatura responsável pela instabilidade térmica que provoca o transporte convectivo. Obtém-se para o número de Rayleigh:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\alpha\nu}. \quad (18.5)$$

Quando há campos magnéticos envolvidos, como discutido anteriormente no caso de plasmas, a propriedade física fundamental de fluidez, que é a viscosidade cinemática nas Eqs. 18.3 e 18.5, deve ser substituída pela *difusividade magnética* ( $\eta$ ), que depende da permeabilidade e da condutividade elétrica envolvidas no mecanismo de transferência radiativa do plasma.

Os regimes turbulentos provenientes de instabilidades em fluidos apresentam baixa quantidade de movimento difusivo, em contraste com uma alta quantidade de movimento convectiva e variações rápidas de pressão e da velocidade no domínio espaço-temporal. Por isso os fluxos turbulentos são irregulares impondo um vasto espectro de escalas de variabilidade para a velocidade e concentração do fluido envolvendo misturas rápidas e transporte de massa e energia seguindo uma hierarquia de escalas. Esse aspecto torna a caracterização do regime turbulento um problema de natureza estatística.

A descrição estatística da turbulência procura descrever a distribuição de escalas espaço-temporais do sistema proveniente da ação combinada entre a difusividade turbulenta e *vorticidade* do fluido. A energia inicial do sistema é transferida, e assim distribuída, entre as diversas escalas (estruturas), configurando uma cascata de energia das maiores para as menores escalas. Além disso a energia cinética é rapidamente convertida em energia interna por mecanismos de cisalhamento viscoso. Esse mecanismo, em geral, envolve três categorias de escalas no espectro de energia turbulento: (i) as escalas integrais de baixa frequência (pequenos números de onda), que transferem energia do fluxo médio para produção de vórtices

menores e mais rápidos; (ii) as *escalas de Kolmogorov*, que formam uma camada viscosa dissipativa caracterizada por um mecanismo de transferência energética de alta frequência, que resulta em uma distribuição de quantidade de movimento quase isotrópica e homogênea; e (iii) as *escalas intermediárias de Taylor*, que transferem, de forma não dissipativa, quantidade de movimento das escalas integrais para as escalas de Kolmogorov. Essa última é a classe de escalas que predomina no espectro do regime turbulento, configurando o seu chamado *regime inercial*. Esse modelo, denominado Richardson-Kolmogorov, compõe a teoria estatística clássica da turbulência estudada a partir das equações de Navier-Stokes, introduzidas no Volume 1 desse trabalho.

Abordagens modernas da turbulência incluem uma descrição multifractal e não-homogênea para a distribuição de energia entre as escalas que compõe o espectro do sistema, que é matematicamente definida a partir da chamada *função de estrutura* do sistema, introduzida na próxima seção (Frisch, 1995[65]).

### 18.3 Caracterização Estatística de Padrões Turbulentos

Duas propriedades fundamentais de um sistema que se encontra em regime turbulento são: (i) a sua diversidade de escalas de energia de movimento (em geral, na forma de vórtices e turbilhões aleatórios) e (ii) seu alto contraste de densidade local (irregularidades interfaciais) devido, em geral, a movimentos de cisalhamento. Portanto, a presença dessas características estruturais regulares e aleatórias, quando presentes de forma homogênea na dinâmica de um sistema, sugerem que o mesmo encontra-se em um regime do tipo turbulento. Portanto, a assinatura do padrão turbulento encontra-se parcialmente, antes de qualquer outro tipo de análise, na função de estrutura do sistema. A função de estrutura generalizada  $S_p$  (isto é, de ordem  $p$ ) é usualmente definida sobre o campo de velocidades das estruturas. Esse campo, determinado pelo termo de instabilidade (Eq. 18.1) tem natureza probabilística e envolve as escalas de correlação do sistema, dada por uma escala característica  $L$  e seu incremento  $l$ :

$$S_p = \langle |v(L+l) - v(L)|^p \rangle. \quad (18.6)$$

Portanto, a Eq. 18.6 sugere que o espectro de energia do sistema siga uma lei de potência do tipo [65]:

$$E(\kappa) = C\kappa^{-\alpha} \quad (18.7)$$

onde  $\kappa$  é o número de onda relacionado a cada escala característica  $L$  uma vez que  $\kappa = L^{-1}$ . Experimentalmente, verifica-se que esse espectro é válido nos limites  $p < 3$  e  $1 < \alpha < 3$ . Portanto, um determinado padrão de regime turbulento pode ser caracterizado por um par de valores  $(p, \alpha)$  que em geral determinam uma *classe de universalidade* para o fenômeno de flutuação estatística estudado.

Um caso canônico são as flutuações relacionadas ao regime turbulento de fluidos incompressíveis submetidos tanto a instabilidades térmicas (convecção de Rayleigh-Bénard) e/ou puramente hidrodinâmicas (estruturas de Taylor-Couette). Considerando que a energia do sistema seja dissipada a uma taxa média  $\varepsilon$ , a teoria de Kolmogorov-Obukhov prevê a seguinte lei de potência:

$$E(\kappa) = C_\kappa \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}. \quad (18.8)$$

No regime turbulento plenamente desenvolvido (caso, por exemplo, de um volume de água fervendo dentro de uma vasilha) verifica-se que  $\lim C_\kappa \rightarrow \infty = 1,6$  quando  $Re \gg 10^3$ .

## 18.4 Padrões Turbulentos em Escalas Estelares

A dinâmica do plasma solar pode ser observada em vários comprimentos de onda. Entretanto, a maior riqueza de estruturas é vista na faixa de Raios-X moles e do Ultra-Violeta. Nessas faixas, os fenômenos de interação entre duas linhas de campo magnético que se distribuem desde a fotosfera até a coroa solar tornam-se visíveis graças às propriedades de confinamento de partículas e emissão de radiação do plasma. As Fig. 18.1 (a) e (b) foram obtidas em alta resolução, no comprimento de onda do ultravioleta extremo pelas Missões SOHO e TRACE, coordenadas pela NASA e ESA [148]. Em destaque, no retângulo a oeste, uma região ativa solar da qual, devido a instabilidades do plasma, surgem fulgurações de partículas confinadas em campos magnéticos (*flares*) que, ao atravessarem o plasma da vizinhança, emitem um fluxo de micro ondas medido em Unidade de Fluxo Solar.x, nesse caso, captado pelo Radiotelescópio de Ondrejov na República Tcheca. O padrão de variabilidade do fluxo observado em micro ondas traz informações sobre a dinâmica de dissipação de energia que ocorre na região ativa de onde ele foi gerado. Portanto, seu espectro de potências (ver Eq. 18.7), mostrado na Fig. 18.1 (d), caracteriza um padrão de variabilidade turbulenta presente na dinâmica do plasma que compõe a região ativa observada.

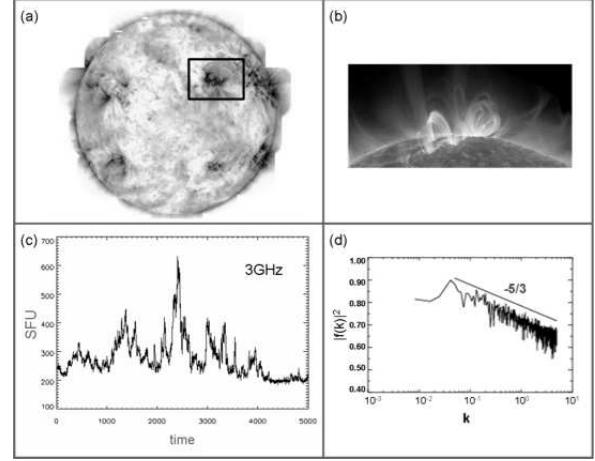


Figura 18.1: (a): Imagem do Sol captada em alta resolução, no comprimento de onda do ultravioleta extremo pela Missão SOHO. Em destaque, no retângulo a oeste, uma região ativa solar (Arquivo LAC-INPE). (b): Região ativa solar observada em alta resolução pela Missão TRACE (Arquivo LAC-INPE). (c): Unidade de Fluxo Solar proveniente da região ativa solar captada pelo Radiotelescópio de Ondrejov na República Tcheca e seu correspondente (d): espectro de potências caracterizando um ajuste para a lei de Kolmogorov que descreve o padrão de variabilidade turbulenta presente na região ativa (Arquivo LAC-INPE).

## 18.5 Padrões Turbulentos em Escalas Galácticas

A interação entre um sistema composto por várias galáxias pode ser simulada a partir da abordagem de N-corpos. No modelo mais simples de simulação, os corpos interagem entre si através de um campo gravitacional Newtoniano constituindo um *gás gravitacional* composto por N partículas com massas equivalentes às massas estelares. A condição inicial impõe a presença de aglomerados de estrelas distribuídos de forma aleatória na grade, que

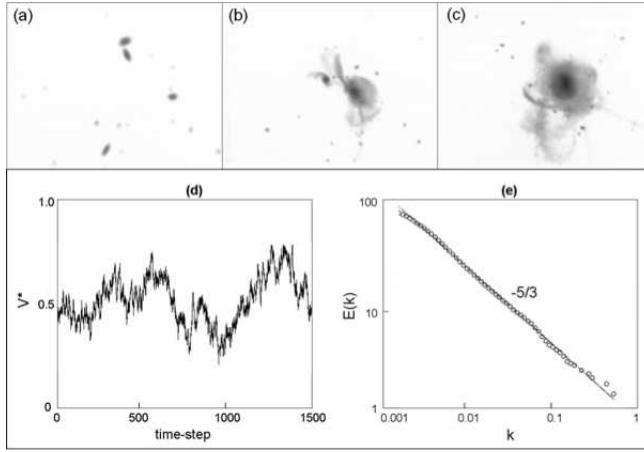


Figura 18.2: Três imagens em sequência geradas por simulação de N-corpos para reproduzir a dinâmica de interação gravitacional entre quatro galáxias elípticas gigantes e pequenos aglomerados de estrelas dispersos no campo (Arquivo LAC-INPE). (d) Curva de energia cinética de uma partícula rastreada em referencial Lagrangeano ao longo da simulação e seu respectivo (e) espectro de potências caracterizando a lei de Kolmogorov para o padrão de variabilidade turbulenta da velocidade (Arquivo LAC-INPE).

deve possuir dimensões compatíveis com a escala de grupo de galáxias. Embora o sistema não seja dissipativo, sua instabilidade gravitacional proveniente do campo de forças impõe comportamentos dinâmicos que apresentam padrões do tipo turbulento, indicando que esse regime é de fato universal. A Fig. 18.2 (a, b, c) apresenta três quadros do resultado de uma simulação da dinâmica de interação gravitacional entre quatro galáxias elípticas gigantes e pequenos aglomerados de estrelas dispersos no campo.

A Fig. 18.2 (d) mostra a curva de energia cinética de uma partícula rastreada em referencial Lagrangeano ao longo da simulação e seu respectivo (e) espectro de potências caracterizando a lei de Kolmogorov para o padrão de variabilidade turbulenta da velocidade de uma partícula (Arquivo LAC-INPE).

## 18.6 Padrões Turbulentos em Escalas Cosmológicas

A simulação de N-corpos também reproduz a formação de padrões ao longo da evolução do universo. Nesse caso, considerando coordenadas comóveis, o colapso gravitacional ao longo da evolução do universo pode ser observado para diferentes instantes da evolução medidos em *redshifts*<sup>2</sup>. A Fig. 18.3 mostra uma sequência de três imagens geradas por simulação de N-corpos para reproduzir a dinâmica do colapso gravitacional entre partículas galácticas de matéria escura durante a evolução do Universo. As imagens representam a formação de estruturas em grandes escalas para três instantes de evolução medidos em *redshifts* (a):

<sup>2</sup>Aumento do comprimento de onda da luz emitida por um corpo que se afasta do observador, conforme sentido por esse. Para o observador, há um deslocamento do comprimento de onda emitido pela fonte em direção ao vermelho, o que dá origem à denominação *redshift*. Em sentido contrário, quando um corpo emissor de luz se aproxima do observador, há uma redução aparente do comprimento de onda da luz que lhe chega no sentido do azul. Tem-se nesse caso um fenômeno denominado de *blueshift*.

$z = 20$ , (b):  $z = 10$ : e (c):  $z = 0, 1$ ). Na Fig. 18.3 são mostrados os respectivos espectros de potências caracterizando a lei de Kolmogorov (ver Eq. 18.7) para a distribuição de densidade de matéria escura [20].

## 18.7 Conclusão

Neste capítulo, exemplos de processos não lineares em escalas astrofísicas e cosmológicas foram descritos a partir do termo de instabilidade da Eq. 18.1. Nos três exemplos abordados o índice espectral obtido sugere que a transferência de energia entre as escalas que compõe cada sistema pode ser descrita de acordo com a teoria dos processos físicos turbulentos. Portanto, os mesmos fenômenos observados em experimentos que envolvem escoamento turbulento em fluidos em laboratórios de física e engenharias também são observados em sistemas mais complexos investigados pela astrofísica através de observações e experimentos numéricos.

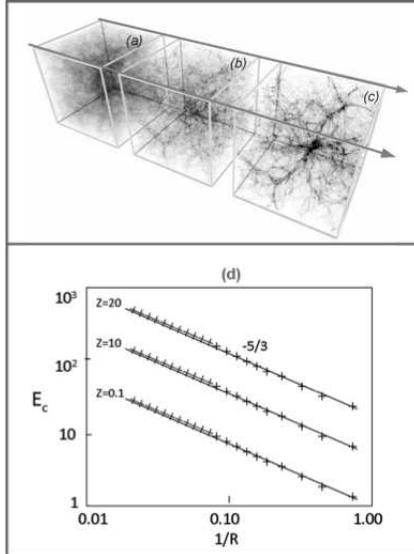


Figura 18.3: (a, b, e c) Três imagens em sequência geradas por simulação de N-corpos para reproduzir a dinâmica do colapso gravitacional entre partículas galácticas de matéria escura durante a evolução do Universo. As imagens representam a formação de estruturas em grandes escalas para três instantes da evolução medidos em *redshifts* ((a):  $z = 20$ , (b):  $z = 10$  e (c):  $z = 0, 1$ ). (d): Os respectivos espectros de potências caracterizando a lei de Kolmogorov para a distribuição de densidade de matéria escura (Arquivo LAC-INPE).



# Capítulo 19

## Introdução aos Escoamentos Bifásicos

Gustavo Anjos

*Nuclear Science and Engineering*

*MIT – Massachusetts Institute of Technology*

A proposta deste capítulo é dar ao leitor uma visão geral dos métodos mais importantes encontrados na literatura de escoamentos bifásicos. Uma revisão bibliográfica é também incluída para ajudar o leitor a encontrar as principais referências e nomes de autores que desenvolveram metodologias para a investigação deste importante fenômeno.

### 19.1 Introdução

Os escoamentos bifásicos são encontrados abundantemente na natureza. A presença de fluidos que não se misturam pode ser notada em todo tipo de aplicação, desde o contato do oceano com a atmosfera, até centrais de produção e extração de petróleo, onde o óleo escoa em codinções de alta pressão e temperatura, formando bolhas de gás. O conceito de fase, através dos princípios de termodinâmica clássica, é descrito como o estado macroscópico da matéria no qual sua estrutura física e sua composição química são homogêneas. Na presença de duas ou mais fases, origina-se o que chamamos de escoamentos multifásicos, onde o termo bifásico se refere à presença de apenas 2 fases (Ex. bolha de gás carbônico em um copo de água gaseificada).

A Fig. (19.1) exemplifica em forma esquemática, algumas situações decorrentes da riqueza e complexidade do fenômeno bifásico e que muitas vezes nos passa desapercebida. No primeiro exemplo da Fig. (19.1a) podemos observar a presença de uma força capaz de equilibrar a esfera sobre a coluna de líquido. Para o caso representado, onde o somatório das forças é nulo, a grandeza responsável pela sustentação da esfera se chama tensão superficial. Este efeito físico aparece na camada superficial do líquido e age como uma membrana elástica. A tensão superficial depende do sistema bifásico e pode variar conforme as propriedades físicas dos fluidos, a temperatura, ou ainda, com a contaminação dos fluidos. O segundo exemplo da Fig. (19.1b) representa o fenômeno de capilaridade ou ação capilar, que é a capacidade do fluido de vencer os efeitos gravitacionais e subir sobre as paredes dos tubos. Um exemplo pode ser facilmente notado em um copo de água onde se verifica

um abaumento do líquido junto à parede do copo. No terceiro exemplo da Fig. (19.1c) e no quarto exemplo da Fig. (19.1d) são ilustradas duas gotas em repouso. Na figura pode-se observar que o contato do líquido com uma superfície sólida pode variar a forma da gota. Esta diferença de forma é atribuída ao tipo de superfície em contato com o fluido. As superfícies hidrofílicas tendem a permitir um espalhamento do líquido enquanto que as superfícies hidrofóbicas fazem com que a gota se mantenha concentrada na superfície. Num caso extremo, conhecido como superfícies super hidrofóbicas, a área da gota em contato com a superfície é mínima, mantendo a gota em sua forma esférica.

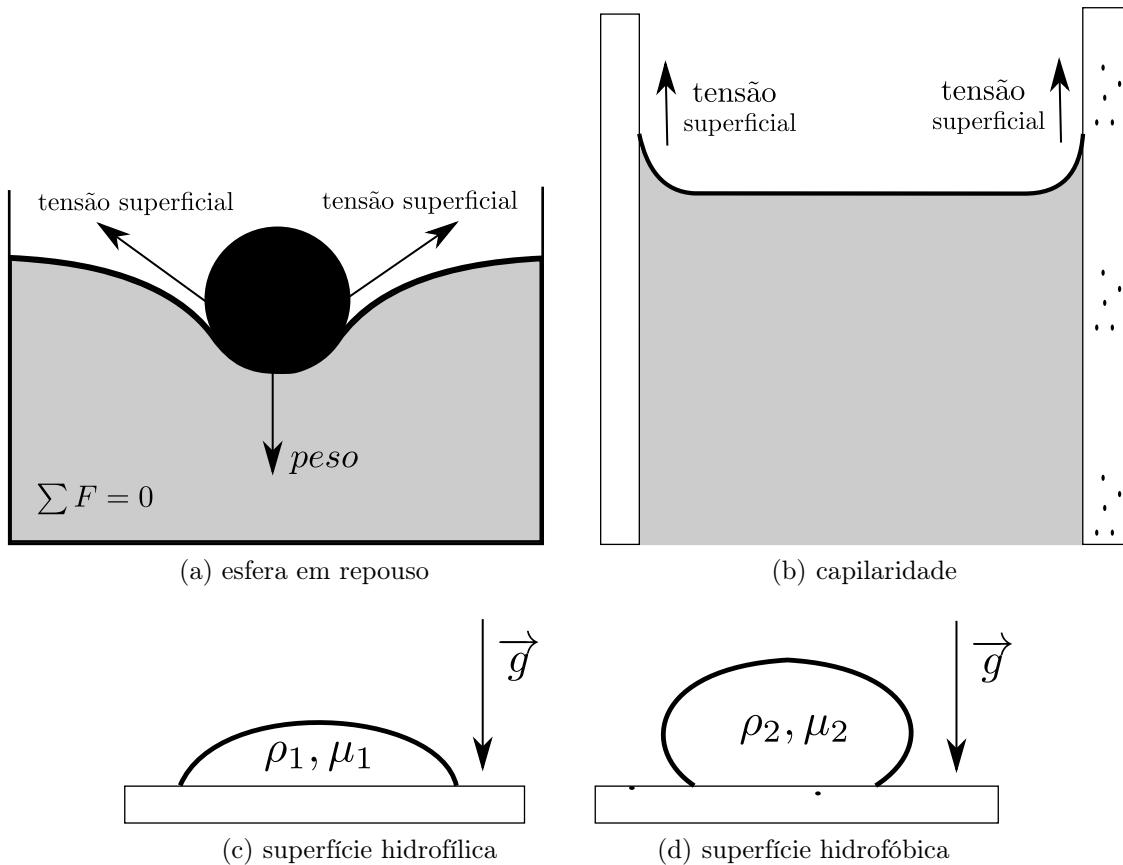


Figura 19.1: Exemplos de sistemas bifásicos encontrados na natureza. (a) Esfera em repouso. Neste sistema a resultante das forças é zero pois o peso da esfera é correspondido pelo efeito da tensão superficial do líquido. (b) Efeitos de capilaridade fazem o líquido subir sobre as paredes do tubo. (c) Em uma superfície hidrofílica, a gota tende a se espalhar, enquanto em uma (d) superfície hidrofóbica, a gota tende a ficar concentrada em uma área de contato menor.

Como pôde ser visto, os escoamentos bifásicos são facilmente encontrados na natureza. Com isso, uma boa compreensão dos fenômenos físicos é necessária em diversos campos da ciência. Trabalhos que datam de antes dos anos 1960 são ainda muito utilizados na indústria, o que mostra que a ciência ainda tem muito a evoluir. Entretanto, muitos autores vem intensificando os investimentos na área de escoamentos bifásicos, levando a um melhor entendimento e caracterização do problema. As seguintes seções descrevem as principais técnicas utilizadas por estes pesquisadores para compreender este fascinante fenômeno, com

ênfase em uma revisão bibliográfica de simulações numéricas e experimentais.

## 19.2 Equações de Governo

Na literatura são encontrados dois tipos de modelos matemáticos para escoamentos bifásicos: um fluido e dois fluidos. No modelo de dois fluidos, cada fluido é descrito através de um conjunto de equações de governo. Em geral, cada fluido tem seus próprios campos de velocidade e pressão e uma relação matemática é estabelecida para o acoplamento das fases. Para o modelo de um fluido, as equações que modelam o fenômeno físico são as mesmas que modelam escoamentos monofásico, porém o termo de tensão superficial é acrescentado ao lado direito da equação de conservação de quantidade de movimento (Cap. 3, Volume 1). Este capítulo focará sua introdução no modelo de um fluido. Uma vez que a dedução das equações de conservação para escoamentos monofásicos se encontra no Vol. (1) deste livro, tomamos a liberdade de apresentar estas equações, aplicadas a escoamentos bifásicos, em sua forma euleriana vetorial, para o modelo de um fluido. Considere a seguinte equação:

$$\rho \left[ \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right] = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (19.1)$$

Desde que  $\rho \neq 0$  em todas as fases, a equação de conservação de massa é apresentada como:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (19.2)$$

aqui,  $\mathbf{v}$  representa o vetor de velocidades que para o caso bidimensional contém as componentes  $x$  e  $y$  e no caso tridimensional  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Como mencionado anteriormente, a equação de conservação de quantidade de momento é modificada com a adição do termo de tensão superficial  $\mathbf{f}_s$ , resultando em:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] + \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}_s \quad (19.3)$$

Na equação acima,  $\rho$  e  $\mu$  representam densidade e viscosidade respectivamente. No entanto, no modelo de um fluido, estes valores permanecem constantes em cada fase, porém não são necessariamente constantes em todo o espaço.  $t$  representa a variável temporal,  $p$  o campo de pressão e  $\mathbf{g}$  o campo gravitacional.

Esta equação pode ser reescrita em sua forma *lagrangiana*, tomando como base a movimentação do referencial de acordo com a movimentação do fluido.

$$\rho \frac{D \mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] + \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}_s \quad (19.4)$$

Neste caso, a notação do lado esquerdo da Eq. (19.3) é compactado através do operador derivada substantiva  $D/Dt$ . A diferença dos referenciais *euleriano* e *lagrangiano* é que no primeiro o referencial se encontra fixo no espaço, enquanto que no segundo o referencial se movimenta com a velocidade do fluido. Estes dois referenciais ainda podem ser descritos em uma forma única e generalizada, conhecida como referencial *euleriano-lagrangiano* arbitrário onde este pode não estar nem fixo, nem em movimento e sim em com uma velocidade arbitrária. A definição detalhada deste referencial não se encontra no escopo do presente capítulo. Para o leitor interessado, recomenda-se: [82] e [52].

### 19.2.1 Adimensionalização das Equações de Governo

Esta seção descreve a adimensionalização das equações de conservação de massa e quantidade de movimento. Tal procedimento melhora o entendimento e a análise da influência de cada termo na equação. Duas equações distintas serão apresentadas: a primeira é comumente usada quando a velocidade e a dimensão são parâmetros conhecidos do problema. A segunda é geralmente empregada para o caso de escoamentos regidos pelo campo gravitacional, sem condição de entrada de fluido. Neste caso a gravidade deve ser considerada como parâmetro conhecido, com isso a velocidade é um resultado e não uma condição preestabelecida.

As equações de conservação de massa e quantidade de movimento são adimensionalizadas pela definição dos seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_\infty \rho^* & x &= Lx^* & \mathbf{g} &= g_\infty \mathbf{g}^* & \sigma &= \sigma_0 \sigma^* \\ \mu &= \mu_\infty \mu^* & \mathbf{v} &= U \mathbf{v}^* & t &= \frac{L}{U} t^* & \kappa &= \frac{1}{L} \kappa^* \\ p &= \rho_\infty U^2 p^* & \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t^*} & \nabla &= \frac{1}{L} \nabla^* \end{aligned}$$

onde o sobrescrito \* representa as variáveis adimensionais. Seguindo o procedimento apresentado pelos Caps. (2) e (3) do Vol. (1) deste livro, o processo de adimensionalização das equações de governo para escoamento multifásico incompressível chega a:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{19.5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} + \frac{1}{We} \mathbf{f}_s \tag{19.6}$$

Reynolds ( $Re$ ) representa a razão das forças inercial e viscosa, o número de *Froude* ( $Fr$ ) representa a razão das forças

inercial e gravitacional e, finalmente, o número de *Weber* ( $We$ ) representa a razão das forças inercial e de tensão superficial.

A adimensionalização das equações de governo apresentadas consideram que a velocidade do escoamento é um parâmetro conhecido. Entretanto, em alguns casos onde a velocidade é consequência de uma condição e não é imposta diretamente no sistema, um parâmetro de adimensionalização diferente deve ser usado no lugar. Como exemplo pode se citar o caso de uma bolha de gás em ascensão em uma coluna de líquido imóvel. Neste sistema, o campo de velocidades é o resultado, com isso não pode ser usado como referencial. Então, a velocidade  $\mathbf{v}$  é comumente adimensionalizada por  $\sqrt{gD}$  e o comprimento característico  $L$  pelo diâmetro da bolha  $D$ . Substituindo estes parâmetros na Eq. (19.4), a equação final de conservação de quantidade de movimento se escreve como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{N^2} \nabla \cdot [\mu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] + \mathbf{g} + \frac{1}{Eo} \mathbf{f}_s \quad (19.7)$$

onde o número de *Archimedes* ( $N$ ) representa a razão das forças inercial e gravitacional, enquanto que o número de *Eötvös* ( $Eo$ ) representa a razão das forças de gravidade e tensão superficial.

### 19.3 Abordagem Numérica

Em escoamentos bifásicos, a modelagem discreta da interface é o parâmetro mais importante para se obter precisão nos cálculos. Encontram-se na literatura duas abordagens clássicas para representação da interface entre dois fluidos: *euleriana* e *lagrangiana*. Estas duas abordagens estão fortemente ligadas à representação do escoamento. Figura (19.2) representa um esquema bidimensional das descrições de interface nos dois modos acima citados.

Na descrição *euleriana*, a interface não é representada explicitamente, ao contrário ela é definida através de uma função de identificação de fases e movimentada através de uma equação hiperbólica. Devido a sua discretização, tal equação é uma fonte de difusão numérica e deve ser tratada com atenção. Neste tipo de representação de interface, mudanças topológicas na interface, como coalescência e ruptura, são facilmente modeladas. No entanto, a descrição de todas as escalas presentes no problema físico requer um número de pontos computacionais mais elevado.

Na descrição *lagrangiana*, a interface que separa as duas fases é representada através de um conjunto de objetos computacionais, tais como: nós, segmentos e elementos. Figura (19.2b) ilustra um caso bidimensional onde a interface está representada por tais objetos como parte do domínio numérico. Como pode ser visto, a interface não divide nenhum elemento. Adicionalmente à esta abordagem, a interface é representada sem qualquer difusão, ou seja, esta é definida com espessura zero. O movimento da interface é feito através do próprio campo de velocidade, sem o auxílio de qualquer equação adicional.

Entre as descrições *euleriana* e *lagrangiana*, diferentes técnicas estão disponíveis para a modelagem de escoamentos bifásicos. Cada metodologia particular garante um conjunto de

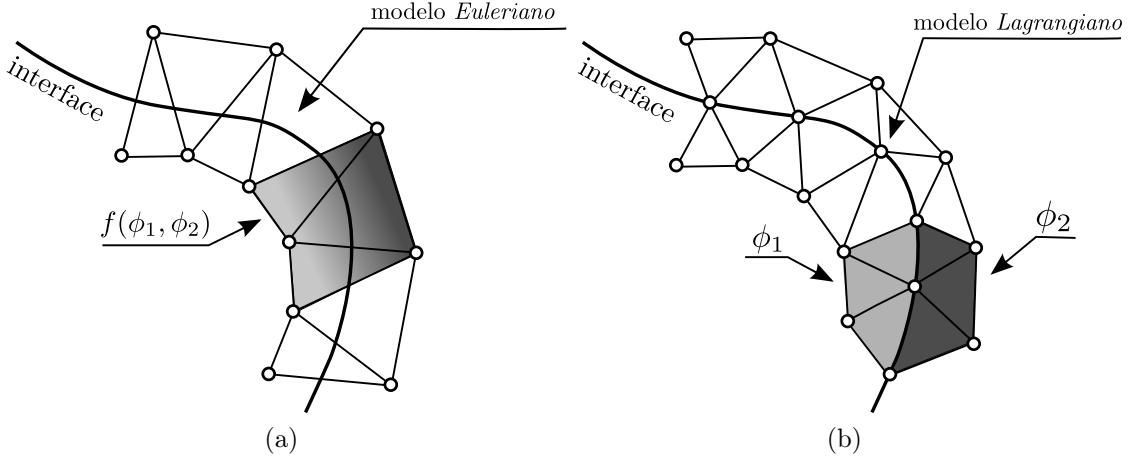


Figura 19.2: Representação da interface em escoamentos bifásicos. (a) Na descrição *euleriana*, a interface entre os fluidos é definida em uma posição arbitrária em relação aos elementos. Diferentemente, (b) o descrição *lagrangiana* representa a interface através de pontos pertencentes à malha computacional através da definição de objectos, tais quais nós, segmentos e elementos, obtendo assim uma representação precisa da interface.

características com diferentes níveis de programação. Abaixo serão apresentados os métodos mais comumente encontrados na literatura de escoamentos bifásicos.

Em 1980, o método volume de fluido, ou VOF, foi proposto por [81], no qual consiste na descrição de cada fase através do volume de fluido ocupado em cada elemento computacional. Os inteiros “0” e “1” são atribuídos para definir a região ocupada na totalidade por cada fluido e valores intermediários são atribuídos nos elementos onde a interface é definida. Devido à descontinuidade proveniente desta metodologia, uma alta precisão não pode ser garantida no cálculo da curvatura e dos vetores normais à interface. Figura (19.3) mostra um esquema bidimensional do método *VOF* em uma malha retangular estruturada.

Um modelo bidimensional foi desenvolvido por [157] e depois extendido a escoamentos tridimensionais [156]. O código tridimensional incluiu uma nova metodologia baseada no método de rastreamento de partículas, na qual os efeitos de cada fase são considerados na outra fase e vice-versa. Testes foram realizados para investigação de bolha em ascenção em um fluido parado. Uma grande faixa de números adimensionais *Eötvös* e *Morton* foi testadas e comparada a resultados experimentais, com isso provando a capacidade do código em capturar os efeitos observados em fluidos com diferentes propriedades.

Em [27], um modelo de escoamento bifásico baseado no método *VOF* foi desenvolvido para simular escoamentos com grande diferença na relação de densidades. O modelo de força de superfície contínua (CSF) foi usado para obter-se os efeitos da tensão superficial nas equações que descrevem o movimento do fluido. A coalescência de bolhas e a bolha em ascenção foram investigadas para validação do código numérico com dados de literatura disponíveis. O método proposto apresentou boa concordância com dados experimentais.

Um modelo de escoamento bifásico bidimensional foi apresentado em [67] com utilização do método *VOF* e um método de elementos finitos escalonado. Esta metodologia foi baseada em uma classe de elementos facilmente encontrada no método de elementos finitos, chamada *Crouzeix-Raviart*. Adicionalmente, um refinamento de malha adaptativo foi

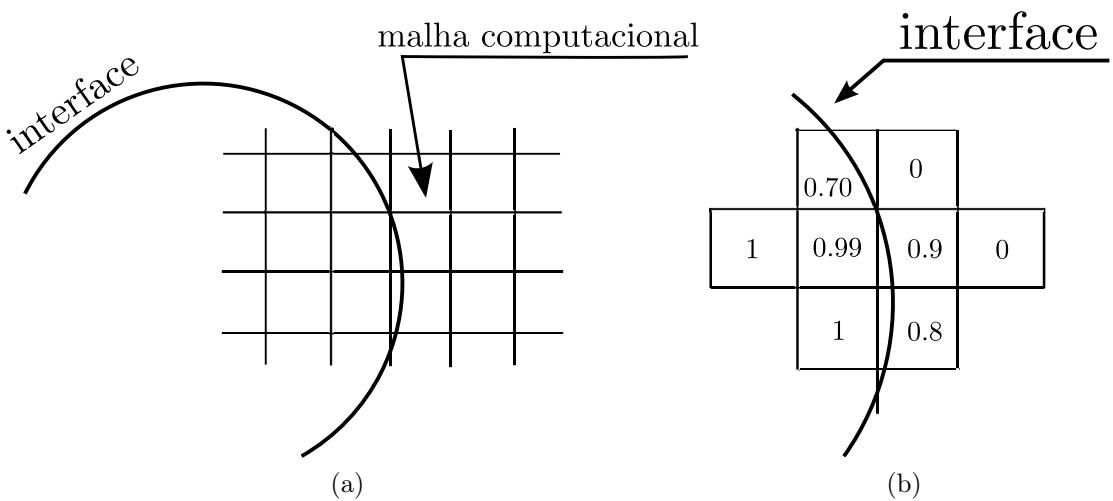


Figura 19.3: Representação da interface no método *VOF*. (a) A interface entre os fluidos é definida implicitamente e localizada em algum lugar entre elementos computacionais. (b) A função *VOF* é construída considerando-se o volume ocupado por cada fluido em cada elemento computacional.

utilizado para obter-se uniformidade nos elementos de malha próximo à interface. Foram executados testes estáticos e dinâmicos, como a bolha em ascensão, encontrando-se boas comparações a resultados experimentais.

Em [171] foi desenvolvido um modelo bidimensional e axisimétrico utilizando os método de elementos finitos para simulação de escoamentos bifásicos através do método *VOF*. Um modelo modificado da força de superfície contínua (*CSF*) foi proposto para tratar o termo de tensão superficial nas equações de Navier-Stokes. Tal modelo contorna as dificuldades na aproximação da curvatura da interface e, com isso, facilita seu cálculo. Resultados foram comparados com sucesso a diferentes casos como rompimento de barragem, gota oscilante e bolhas estacionárias.

O método de Level-Set (LS) na dinâmica de fluidos foi primeiramente apresentado por [125] e se tornou uma importante ferramenta para modelagem de escoamentos bifásicos. Neste método, a interface é representada por uma função distância de nível zero que é movimentada pelo campo de velocidades. A curvatura e os vetores normais à interface são convenientemente calculados com a ajuda da mesma função distância, com isso uma modelagem direta da tensão superficial é realizada com sucesso. Apesar de sua recente aparição nos modelos de escoamento bifásico, o método de Level-Set provou-se ser um dos mais importantes modelos de dinâmicas interfaciais. Figura (19.4) mostra a representação das funções distância e Level-Set em um caso bidimensional com domínio em forma de quadrado. A função distância é calculada através da norma 2 do espaço Euclidiano em cada nó da malha e sua respectiva menor distância à interface separando os fluidos, matematicamente  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_I$ , onde  $\mathbf{x}$  é o nó da malha e  $\mathbf{x}_I$ , o nó mais próximo da interface. A mesma função distância é usada para o cálculo da função de Level-Set, que não é nada mais que uma versão com sinais positivo e negativo, representando o que está em uma fase e em outra. As duas funções representam a interface quando o valor coincide com zero.

O método de Level-Set em escoamentos bifásicos foi primeiramente desenvolvido por

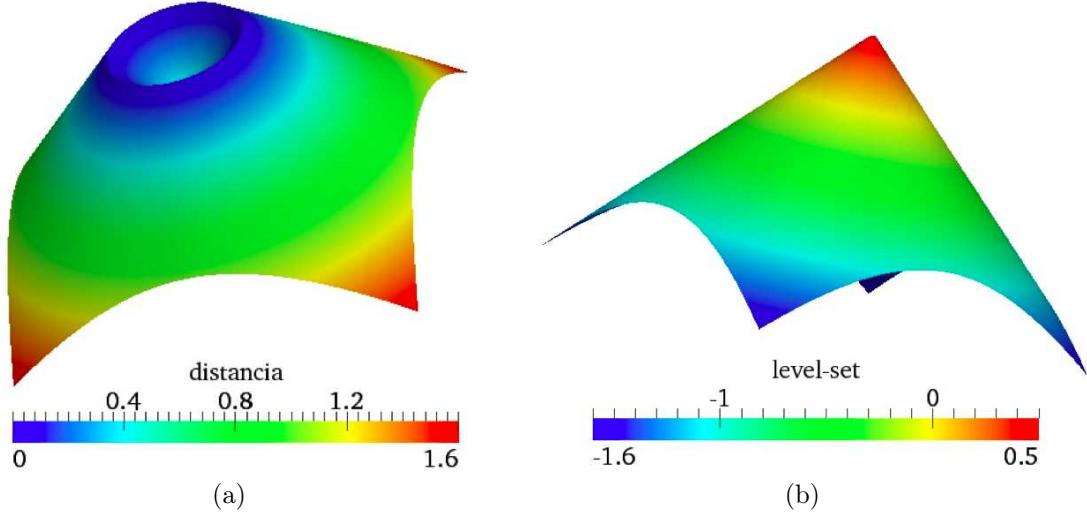


Figura 19.4: Representação das funções distância e Level-Set. A interface entre os fluidos é localizada no meio do domínio computacional. (a) A função distância é criada através do cálculo da distância de cada nó da malha  $\mathbf{x}$  para seu correspondente nó da interface mais próximo  $\mathbf{x}_I$ . (b) A função de Level-Set é representada como sendo a função distância com sinais positivo e negativo correspondentes à localização do fluido.

[152] e seguido por muitos outros autores. Eles propuseram um esquema de segunda ordem baseado em um esquema do tipo *upwind*/projeção para o cálculo da solução das equações de Navier-Stokes para fluidos imiscíveis. Foi mostrado que a conservação de massa é apenas garantida se a função de Level-Set é reinicializada preferencialmente em todo passo de tempo. Eles realizaram significativos testes com bolhas e gotas para validação desta nova metodologia. Adicionalmente, [151] apresentam sua versão extendida para o caso tridimensional de superfície livre. Novamente, vários testes foram realizados com sucesso para validação desta nova extensão através de importantes casos, tais quais gota estática e gota oscilante em gravidade zero.

O acoplamento dos métodos de Level-Set e de elementos finitos foi apresentado por [137], no qual as equações de escoamento de fluido foram discretizadas em uma malha triangular. Foi proposto um método de passo de tempo fracionário no qual foi usado para estabilizar pressão e velocidade, por consequência permitindo o uso do mesmo elemento finito para discretização de ambas as grandezas físicas. Grandes diferenças em densidade foram testadas com sucesso e comparados a outros testes clássicos na literatura.

Uma formulação de elementos finitos estabilizada e acoplada ao método de Level-Set foi desenvolvida para o cálculo da dinâmica de bolhas em [115]. Um método tipo Petrov-Galerkin foi também utilizado para discretizar as equações de conservação de quantidade de movimento. Coalescência e ascensão de bolhas foram estudadas e comparadas com a metodologia proposta.

Um método numérico foi proposto em [105] para a simulação tridimensional incomprimível de escoamentos bifásicos. O método de Level-Set foi utilizado com sucesso junto ao método de elementos finitos estabilizado para a solução das equações de Navier-Stokes. Os resultados foram então comparados com muitos exemplos numéricos comumente encontrados na literatura, tais quais escoamento de *Poiseuille*, instabilidade de Rayleigh-Taylor

e ruptura de barragem. Todos os testes apresentaram boa concordância com a literatura.

Apesar da grande utilização do método de Level-Set, resultados mostraram que a implementação direta deste método ocasiona excessiva difusão numérica, com isso a reinitialização da função de Level-Set se faz obrigatória em todo o passo tempo. Uma outra alternativa, adotada por muitos autores, é o acoplamento do método de Level-Set com o método VOF, formando CLSVOF. Esta nova metodologia (ver [15], [150] and [120]) utiliza as principais características de cada método separado, com isso a curvatura e os vetores normais são calculados através da função de Level-Set enquanto que a interface é capturada a partir da função VOF. Consequentemente, os erros de conservação de massa presentes no método de Level-Set e o pobre cálculo de curvatura proveniente do método VOF são eliminados.

Ao contrário dos métodos *eulerianos* Level-Set e VOF, os métodos *lagrangianos volume-tracking* e *front-tracking* são os que mais se destacam na literatura. O primeiro utiliza partículas marcadoras para reconstrução da interface, combinando precisão e rigor com relativamente baixo custo de investimento ([72],[5]). O segundo, primeiramente implementado por [69], representa a interface através de um conjunto de nós interconectados que se movem de acordo com o escoamento calculado no referencial *euleriano*. Tal descrição fornece uma representação definida da interface com alta precisão, entretanto sua desvantagem está na necessidade de um tratamento explícito quando a interface apresenta mudanças topológicas, como no caso de coalescência e ruptura de interface.

Em [161], uma nova metodologia para simulação de escoamentos multifásicos foi descrita. As equações foram discretizadas através do método de diferenças finitas em uma malha estacionária, com a interface definida explicitamente por um conjunto de objetos geométricos tais como triângulos, segmentos e pontos. Apesar da malha computacional de fundo ser estática (descrição *euleriana*), a malha de interface se move com a velocidade proveniente do escoamento. Os vetores normais à interface foram calculados a partir de funções trigonométricas em cada elemento da superfície e a curvatura foi calculada através de uma aproximação da indicatrix *Dupin* na superfície. Por apresentar uma descrição explícita da interface, tal metodologia definiu com precisão a superfície que separa os fluidos, entretanto as propriedades dos fluidos não foram precisamente definidas, necessitando então de um tratamento numérico especial.

Um modelo Level-Set *lagrangiano* foi proposto por [145] para simulação de escoamentos incompressíveis bifásicos. As equações de governo foram discretizadas através do método de *Galerkin* e elementos finitos, enquanto que o sistema linear resultante foi tratado através do método da projeção, visando desacoplar velocidade e pressão. A interface entre fluidos era representada pela própria malha do domínio e então movida pelo campo de velocidade. Tal modelo dispensa o uso de uma equação hiperbólica adicional, uma vez que a interface é descrita por pontos e segmentos da própria malha computacional bidimensional. O controle de malha foi feito através de procedimentos padrões tais quais inversão, adição e remoção de arestas e nós. Pela definição da função de Level-Set  $\phi$ , foi possível calcular diretamente a curvatura e os vetores normais à interface através das expressões:  $\kappa = \nabla \cdot (\nabla\phi/|\nabla\phi|)$  e  $\mathbf{n} = \nabla\phi/|\nabla\phi|$ , respectivamente. Com isso, para satisfazer o balanço de força discreto entre pressão e tensão superficial, o gradiente da função de Heaviside  $\nabla H$  foi usado como substituto da função Delta de Dirac  $\delta$ , encontrado no modelo de força de superfície contínuo (CSF). Tal abordagem é comumente encontrada em modelos *eulerianos*, porém mostrou-se

adequado para métodos do tipo *Interface-tracking*, uma vez que o salto de pressão através da interface foi precisamente calculado.

O grupo da Universidade de Massachussets sugeriu um modelo completo de malha dinâmica para simulação de escoamentos tipo superfície livre e bifásicos ([129],[136]), no qual difere da abordagem de malha fixa. Neste caso, a discretização das equações de governo foi feita sobre uma malha não estruturada com o auxílio de um método de passo fracionário exato. Tal técnica melhora a definição da interface, uma vez que o salto de propriedades físicas é mantido definido. A validação da metodologia foi realizada com sucesso através de vários testes numéricos comparativos, mostrando que a técnica pode ser utilizada para modelagem de escoamentos bifásicos com precisão.

Um novo método de malha que se move junto ao campo de velocidades é proposto por [6]. Neste, as equações de governo são discretizadas através do método de elementos finitos, usando a descrição generalizada arbitrária *euleriana-lagrangiana*. Este método também permite uma representação precisa da interface, uma vez que esta é definida através de elementos computacionais e pertencentes a malha do domínio. Vários testes e validações foram apresentados, mostrando que a metodologia descreve com precisão escoamentos bifásicos.

## 19.4 Abordagem Empírica ou Experimental

Para iniciarmos a introdução às técnicas experimentais, passamos pela definição de importantes parâmetros utilizados na caracterização do escoamentos bifáscos. A seguir, serão identificados padrões encontrados frequentemente em escoamentos multifásicos em canais verticais e horizontais. É importante notar que a literatura disponível em escoamentos com mais de uma fase é extenso e não se limita aos exemplos introdutórios apresentados neste capítulo. Ao leitor que deseja aprofundar tais conceitos, sugerimos [35], [168] e [22].

### 19.4.1 Título de vapor

O título de vapor ( $x$ ) é definido pela razão da vazão mássica de vapor ( $\dot{M}_G$ ) dividida pela vazão mássica total ( $\dot{M}_G + \dot{M}_L$ ):

$$x = \frac{\dot{M}_G}{\dot{M}_G + \dot{M}_L} \quad (19.8)$$

Quando o escoamento é adiabático, ou seja não há transferência de calor, se torna necessário a medida de vazão mássica para cada fase, com isso o título de vapor é determinada para todo o tubo. Se o tubo é aquecido e fluxos de massa são notados no sistema, o título de vapor aumentará na direção do escoamento. No entanto, para o caso de resfriamento do tubo e, consequentemente, a condensação do vapor, o título de vapor diminuirá na direção do escoamento.

#### 19.4.2 Velocidades

Em escoamentos multifásicos existem um grande número de velocidades que podem ser definidas experimentalmente. Ainda, como os fluidos estão em fases distintas, diferentes velocidades podem ser encontradas, sugerindo também o uso de velocidade relativa como base para caracterização da velocidade do escoamento. A seguir são definidas algumas importantes velocidades encontradas na literatura.

- Velocidade média verdadeira: é a velocidade em que cada fase se movimenta no escoamento.
- Velocidade superficial: também conhecida como fluxo volumétrico, é definida como a razão do fluxo de velocidade da fase considerada pela área transversal total do escoamento multifásico.
- Velocidade de deriva: razão da velocidade verdadeira média pela velocidade superficial total.

#### 19.4.3 Fluxo de massa

O fluxo de massa ( $G$ ) é definido como a vazão mássica total ( $\dot{M}$ ) dividida pela área transversal do escoamento:

$$G = \frac{\dot{M}}{A} \quad (19.9)$$

onde a expressão acima representa a relação entre a velocidade média do escoamento multiplicada pela densidade média. A unidade usual de fluxo de massa é [ $kg/m^2s$ ].

#### 19.4.4 Fração de vazios

A fração de vazios  $\epsilon$  é um dos parâmetros mais importantes para caracterização de escoamentos multifásicos. Este também é de grande importância para a determinação de outros parâmetros, tais como viscosidade e densidade em escoamentos multifásicos, obtenção de velocidade média relativa e, também, como ferramenta fundamental em modelos de previsão de transição de padrões de escoamentos.

Na literatura existem várias definições para especificação de fração de volume (veja [154]). Aqui serão apresentadas as principais definições de fração de vazios: local, cordal, transversal e volumétrica.

$$\epsilon_{local}(r, t) = \frac{1}{t} \int_t P_k(r, t) dt \quad (19.10)$$

A fração de vazios local  $\epsilon_{local}$  é tipicamente medida através de um feixe radioativo brilhante que atravessa o tubo onde o escoamento multifásico está localizado. Através da

absorção de luz deste feixe no outro lado do tubo, é possível medir o comprimento da fase gasosa. A vazão de vazios local é então determinada por:

$$\epsilon_{chordal} = \frac{L_G}{L_G + L_L} \quad (19.11)$$

onde  $L_G$  é o comprimento de linha na fase gasosa e  $L_L$  na fase líquida.

A fração de vazios transversal  $\epsilon_{trans}$ , é medida a partir de meios óticos ou através de medidas indiretas, tal como a capacidade elétrica de uma fase líquida condutora. Esta fração é definida como:

$$\epsilon_{trans} = \frac{A_G}{A_G + A_L} \quad (19.12)$$

onde  $A_G$  é a área ocupada da fase gasosa e  $A_L$  da fase líquida.

A fração de vazios volumétrica  $\epsilon_{vol}$  é medida geralmente através de mecanismos de armadilha para os fluidos, onde por um instante breve a amostra fica armazenada, possibilitando a medida da quantidade de gás e líquido diretamente. Esta fração é então definida como:

$$\epsilon_{vol} = \frac{V_G}{V_G + V_L} \quad (19.13)$$

onde  $V_G$  é o volume ocupado da fase gasosa e  $V_L$  da fase líquida.

#### 19.4.5 Escoamentos verticais

Os padões de escoamentos para cima em tubos verticais é apresentado esquematicamente na Fig. (19.5). As diferenças básicas observadas experimentalmente são descritas a seguir. É importante notar que a utilização de cada padrão de escoamento depende da sua aplicação.

- Bolhas dispersas: no escoamento em bolhas, o gás ou a fase vapor está distribuída na fase contínua líquida como um aglomerado de bolhas. Em uma situação extrema, estas bolhas podem apresentar formato esférico e de pequeno diâmetro ou apresentar formato de corpo alongado com a uma das extremidades arredondadas. Neste último estado, mesmo não apresentando tamanhos comparáveis ao diâmetro do tubo, o padrão das bolhas pode trazer alguma semelhança ao escoamento em golfadas.
- Golfadas: neste tipo de escoamento, as bolhas apresentam aproximadamente o mesmo diâmetro do tubo, com isso os efeitos de parede são mais evidentes. O nariz da bolha tem um formato característico arredondado devido à pressão e ao escoamento, enquanto que as laterais são separadas por um filme líquido que vai suavemente diminuindo até chegar à parte de trás da bolha. O termo golfadas representa o líquido que separa sucessivas bolhas de gás ou vapor. Dependendo do escoamento, pequenas bolhas podem ou não estar presentes entre as bolhas principais.

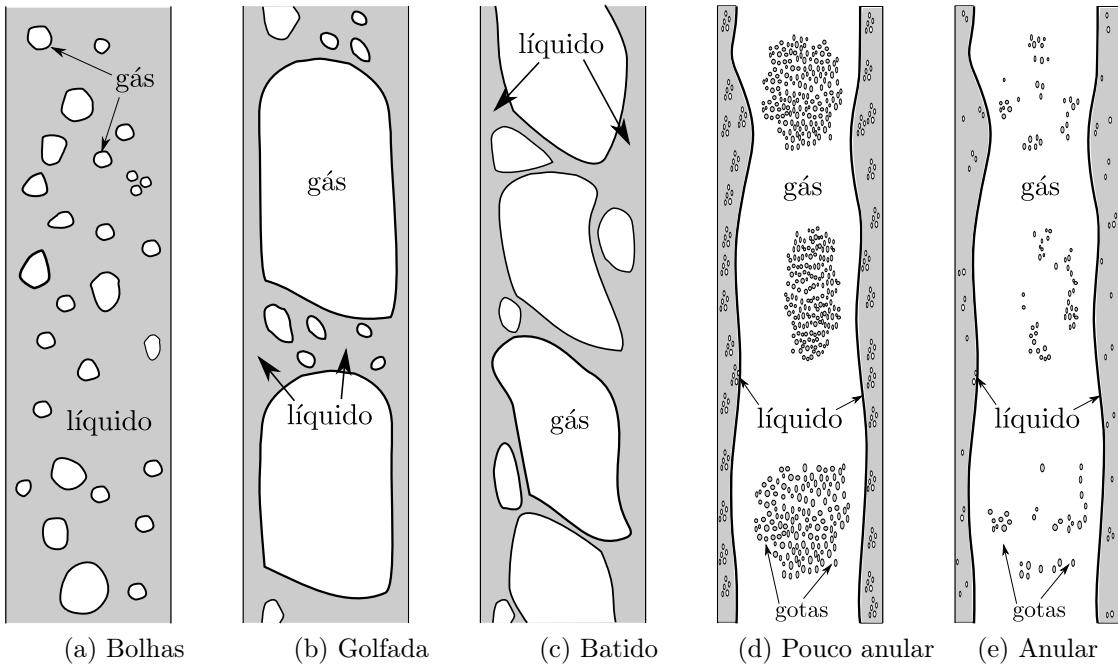


Figura 19.5: Escoamentos bifásicos em tubos verticais. Em todos os casos o escoamento se faz de baixo para a cima. Os efeitos gravitacionais são uniformes ao longo do eixo horizontal, fazendo com que o escoamento apresente alguma estrutura simétrica.

- Batido: a interface de largas bolhas de gás ou vapor se quebra, formando o escoamento do tipo golfadas em uma distribuição caótica. Nele, a fase líquida é empurrada em direção às paredes do canal. Este escoamento também é conhecido como semi-anular ou golfada-anular, devido ao caráter transitório deste padrão.
- Pouco anular: o filme líquido apresenta grande espessura nas paredes do tubo com uma considerável quantidade de líquido arrastada para dentro do núcleo de gás ou vapor. Este tipo de padrão de escoamento foi primeiramente identificado pelo trabalho de [74]. Em um padrão geral, muitas bolhas são encontradas no filme líquido próximo às parades do tubo, enquanto que grandes gotas são arrastadas dentro do núcleo de gás ou vapor. Este padrão de escoamento é encontrado em grandes vazões mássicas e, devido à grande quantidade de bolhas no filme líquido, este escoamento pode ser confundido com o escoamento em bolhas.
- anular: um filme líquido é formado próximo às paredes do tubo devido ao aparecimento de um núcleo contínuo de gás ou vapor no meio do tubo. O aparecimento de ondas pode ser notado na superfície do filme. Devido a sucessiva quebra destas ondas, pode haver a formação de gotas no núcleo de gás ou vapor. Diferentemente do escoamento do tipo pouco anular, as gotas estão separadas ao invés de aglomeradas.

#### 19.4.6 Escoamentos horizontais

Os padrões de escoamento comumente encontrados em tubulações horizontais e inclinados são complexos devido à sua natureza não simétrica causada pelo influência do campo gravitacional. Entretanto são bem considerados até hoje os padrões multifásicos sugeridos por [3] e apresentados de forma esquemática na Fig. (19.6).

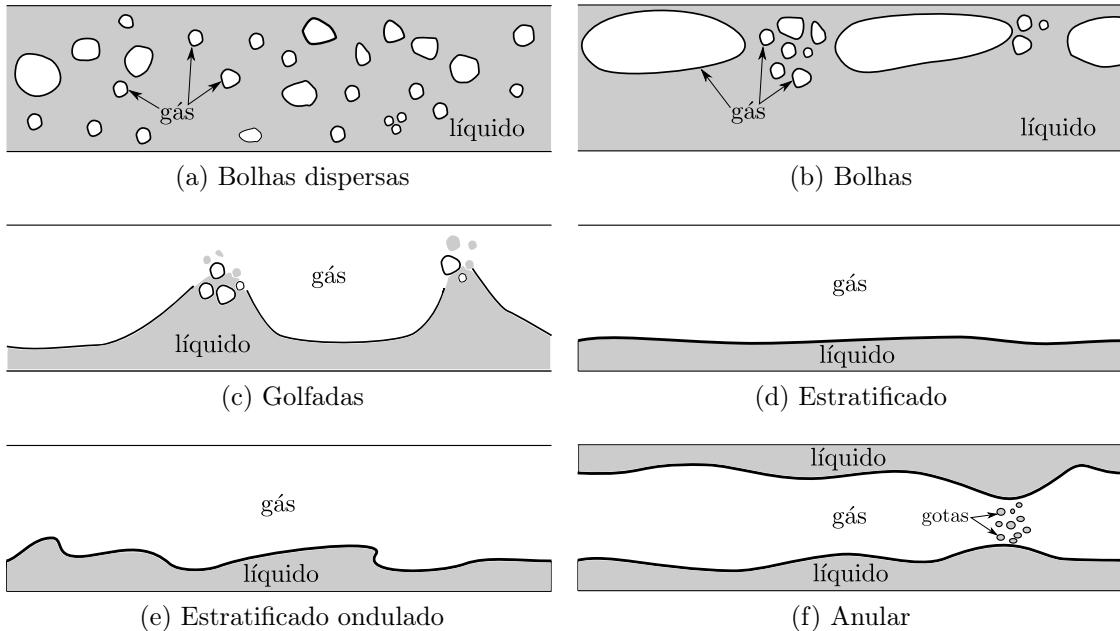


Figura 19.6: Escoamentos bifásicos em tubos horizontais. Em todos os casos o escoamento se faz da esquerda para a direita. Dependendo da velocidade de entrada das fases, um padrão pode ser identificado. Como pode ser verificado pela posição das bolhas, a gravidade exerce uma influência imediata nas fases, uma vez que o fluido menos denso tende a se movimentar na parte de cima do tubo.

- **Bolhas dispersas:** este escoamento é similar ao apresentado anteriormente para escoamento vertical, com a diferença que as bolhas de gás ou vapor tendem a se movimentar na metade superior do tubo. Fato justificado pela menor densidade da bolha comparada ao líquido. Em uma velocidade moderada de ambas as fases presente no escoamento, a distribuição de bolhas é uniforme ao longo do tubo, enquanto que para velocidades mais elevadas o padrão de escoamento se assemelha ao pouco anular.
- **Bolhas:** escoamento similar ao do tipo golfadas em tubos verticais. Como no caso de bolhas dispersas, a bolhas de gás ou vapor tendem a atravessar o tubo na metade superior, devido ao campo gravitacional.
- **Estratificado:** escoamento separado por uma interface suave, onde geralmente é encontrado em baixas velocidades das fases líquida e gasosa.
- **Estratificado ondulado:** as ondas são formadas quando a velocidade na fase gasosa é aumentada. Estas ondas se movimentam na direção do escoamento.

- Golfada: com o aumento da velocidade da fase de vapor, a amplitude das ondas também aumenta, se aproximando da parede do tubo. A parte superior do tubo atrás da onda é molhada por um filme líquido que é drenado para o meio da fase líquido.
- Anular: a vazão da fase gasosa é tão alta que é capaz de sustentar a fase líquida próxima à parede do tubo, originando um núcleo de gás ou vapor. Em sua seção transversal, o líquido pode não ser contínuo ao redor de toda a circunferência, porém será mais espesso na base do tubo.

#### 19.4.7 Mapa de padrões de escoamentos

Os mapas de padrões de escoamento são utilizados para a identificação do tipo de escoamento (golfadas, anular, estratificado etc.) através de parâmetros conhecidos como vazão mássica, fração de vazios, qualidade de vapor etc. Estes mapas existem para diferentes tipos de fluidos, dimensão de tubos, graus de mistura e muitos outros. Basicamente, eles podem ser divididos em duas classes: adiabáticos e diabáticos. O primeiro é usualmente utilizado para escoamentos do tipo ar/água, enquanto o segundo pode ser encontrado em refrigerantes em evaporação.

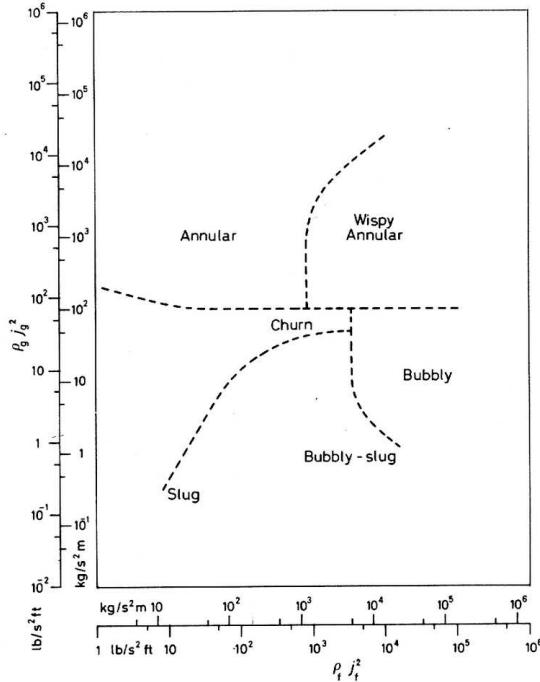
Os mapas de padrões são representados como áreas em gráficos, em função das velocidades superficiais ou qualquer outro parâmetro geral que contenha tal definição. É importante notar que o padrão de escoamento é também influenciado por outros tipos de parâmetros, porém sua descrição é feita através de gráficos bi-dimensionais. Na literatura, muitos mapas podem ser encontrados para diferentes fluidos e em diferentes condições. O leitor interessado poderá consultar algumas referências clássicas como ([35], [168] e [154]).

A Fig. (19.7a) representa um mapa de padrões de escoamento para ar/água, em condições de pressão atmosférica, para canais verticais ([75]). Neste mapa pode-se observar que cada padrão de escoamento ocupa uma área no gráfico e as linhas tracejadas delimitam a transição. Como pode-se observar também, estas mesmas linhas não ocupam todo o limite do gráfico, o que sugere a falta de dados experimentais para descrever as transições em toda a escala. É importante notar que estes mapas devem ser observados não mais do que um guia grosso de padrões de escoamentos, pois os fluxos de quantidade de movimento por si só não são capazes de representar com exatidão a influência das propriedades físicas do fluido nem o diâmetro do tubo.

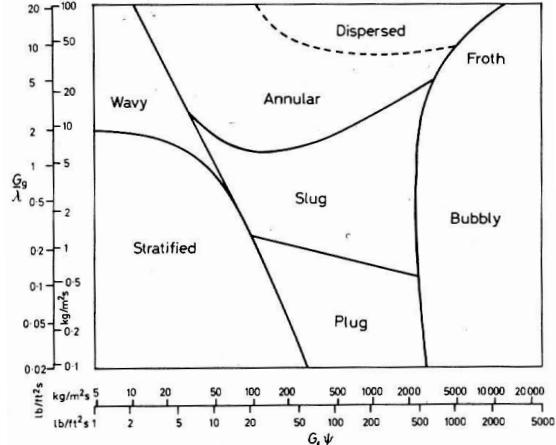
A Fig. (19.7b) descreve um outro mapa de padrões, porém para escoamento horizontal ([8]). Este mapa é largamente utilizado na indústria petroquímica. No mapa pode-se identificar os padrões de escoamento em diferentes velocidades mássicas superficiais ( $G_f$  e  $G_g$ ).

### 19.5 Problemas

- 1) Descreva a diferença entre referencial *euleriano* e *lagrangiano*.
- 2) Mostre as diferenças entre escoamentos em bolhas e golfadas para tubos verticais.
- 3) Por que em escoamentos horizontais do tipo bolhas dispersas, as bolhas tendem a



(a)



(b)

Figura 19.7: Mapas de padrões de escoamento bifásico. As linhas contínuas e tracejadas representam a transição dos padrões de escoamento. (a) Escoamento vertical para ar/água ([75]). (b) Escoamento horizontal para ar/água ([8]).

se locomover na metade superior do tubo? Qual o parâmetro adimensional que caracteriza este fenômeno?

- 4) Para que servem os mapas de padrões de escoamento e como são classificados?

# Capítulo 20

## Escoamento de Fluidos Viscosos em Moldes

Kémelli C. Estacio-Hiroms

*The Institute for Computational Engineering and Sciences*

*The University of Texas at Austin*

*Austin - TX, Estados Unidos da América*

### 20.1 Introdução

Moldagem por injeção é uma técnica que consiste em forçar a entrada de polímero fundido (fluído) para o interior da cavidade de um molde. Trata-se de um processo cíclico e descontínuo que consiste inicialmente na fusão do polímero através de aquecimento e subsequente injeção em um molde. O polímero é então pressurizado na cavidade para garantir preenchimento dos detalhes, compensando a contração da peça moldada durante o seu resfriamento, e evitando assim a ocorrência de defeitos. A solidificação do material para estabilizar a forma é atingida através de resfriamento ou de reação química, dependendo do tipo do material e finalmente, a peça é extraída do molde, normalmente sem necessidade de operações posteriores de acabamento [123]. Exemplos de produtos fabricados por meio de moldagem por injeção são: teclados, baldes, para-choques de automóveis, dentre outros.

Por ser bastante complexo, o processo de moldagem por injeção tem sido assistido por meio de modelagem matemática e simulações numéricas. Por se tratar de um problema de escoamento de fluidos, o modelo matemático completo envolve conservação de massa, quantidade de movimento e energia, combinadas com uma equação constitutiva para fluidos não newtonianos. Contudo, devido à complexidade de tais equações em sua forma original, diversos modelos mais simples foram propostos [14, 77, 84, 86, 139].

O modelo de Hele–Shaw tem sido especialmente empregado neste contexto devido a duas razões principais: simplicidade das equações e qualidade das soluções fornecidas. Este modelo é obtido por meio de manipulações nas equações de conservação, impondo-se convenientemente suposições a respeito do fluido e da geometria onde o escoamento é

desenvolvido, e utilizando-se teoria da lubrificação<sup>1</sup>. Neste caso a equação da quantidade de movimento é bidimensional, não linear e elíptica, cuja solução fornece a distribuição de pressão na região do molde que encontra-se preenchida de fluido (equação de Hele-Shaw). O problema de transferência de calor é também simplificado, mas continua tridimensional (uma formulação bidimensional para a equação da temperatura pode ser encontrada considerando valores médios das variáveis do escoamento). A distribuição de velocidade é obtida como um pós-processamento do campo de pressão e a posição da superfície livre pode, em seguida, ser encontrada. Devido à característica bidimensional do campo de pressão e tridimensional do campo de temperatura, esta formulação é também conhecida como modelo  $2\frac{1}{2}D$ .

## 20.2 As Equações do Escoamento de Fluidos Durante o Preenchimento de Moldes

Durante a fase de preenchimento de um processo de moldagem por injeção, um polímero fundido é injetado adentro a cavidade de um molde até que a cavidade esteja completamente preenchida. Por este motivo, tal etapa do processo é um caso particular de escoamento de fluidos com superfície livre. O modelo matemático completo que descreve tal escoamento envolve as equações de conservação tridimensionais combinadas com uma relação constitutiva não newtoniana para modelar a viscosidade do polímero. Exemplos de relações constitutivas são apresentados na Seção 20.4; as equações de conservação são listadas a seguir.

Conservação de massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (20.1)$$

Conservação de quantidade de movimento:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \mathbf{g}. \quad (20.2)$$

Conservação de energia em termos de temperatura:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v} + \sigma : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \operatorname{div}(\kappa \mathbf{grad} T). \quad (20.3)$$

Nas equações acima,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $t$  é o tempo,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  é a velocidade,  $\mathbf{g}$  é a aceleração da gravidade e  $\underline{\sigma}$  é o tensor tensão;  $C_p$  é o calor específico,  $\beta$  é o coeficiente de expansividade térmica,  $\kappa$  é a condutividade térmica do fluido,  $T$  é a temperatura e  $p$  é a pressão. O símbolo  $[:]$  indica produto tensorial, e  $D/Dt$  indica derivada material.

Devido a diversas características intrínsecas ao processo de preenchimento, as equações de conservação em três dimensões podem ser simplificadas, originando a aproximação de Hele-Shaw [14, 59, 73, 77, 86, 149, 172]. Por exemplo, o fato da geometria da cavidade

---

<sup>1</sup>Teoria da Lubrificação é um ramo da Dinâmica de Fluidos usada para descrever escoamentos desenvolvidos em geometrias que apresentam uma dimensão significativamente menor do que as outras [10, 128]. No caso de moldagem por injeção, tal dimensão é a espessura do molde.

ser estreita permite análise dimensional das equações, resultando em um escoamento bidimensional; além disso, o fato do aquecimento viscoso desempenhar um papel importante no equilíbrio global de energia em moldes finos, enquanto elasticidade tem pouca influência sobre injeção de fluido tanto por pressão quanto por vazão prescritas, torna convenientes os modelos de viscosidade generalizados, como, por exemplo, o modelo de Cross [42].

Estas e outras características do problema fornecem várias simplificações aplicáveis ao processo multifísico acoplado 3D que conduzem a um modelo menos complexo, descrito nas seções seguintes.

### 20.2.1 Suposições sobre o fluido

As primeiras suposições simplificadoras referem-se ao fluido. O fluido é considerado como sendo incompressível, newtoniano generalizado (a viscosidade depende apenas da taxa de cisalhamento) e de condutividade térmica constante.

**Fluido incompressível:** a densidade do fluido é constante. Desta forma, tem-se da Eq. (20.1) que:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (20.4)$$

A Eq. (20.4) permite simplificações no termo envolvendo o produto  $\mathbf{v}\mathbf{v}$  na equação da quantidade de movimento (20.2). Tem-se que (veja exercício 1):

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) = \rho (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}).$$

**Fluido newtoniano generalizado:** a viscosidade  $\eta$  depende somente da taxa de cisalhamento  $\dot{\gamma}$ , ou seja  $\eta = \eta(\dot{\gamma})$ . Em outras palavras, o fluido é puramente viscoso e os efeitos elásticos são ignorados. Desta forma, o tensor extra tensão  $\underline{\tau}$  e o tensor tensão total  $\underline{\sigma}$  podem ser escritos como:

$$\underline{\tau} = \eta(\dot{\gamma})\underline{\dot{\gamma}} \quad \text{e} \quad \underline{\sigma} = -p\underline{I} + \eta(\dot{\gamma})\underline{\dot{\gamma}},$$

onde  $\underline{I}$  é o tensor identidade e  $\underline{\dot{\gamma}} = \operatorname{grad} \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{v})^\dagger$  é o tensor taxa de deformação, com  $\dagger$  indicando a transposta.

Essa suposição altera as expressões  $\operatorname{div} \underline{\sigma}$  e  $\underline{\sigma} : (\operatorname{grad} \mathbf{v})$  nas Eqs. (20.2) e (20.3), respectivamente:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\sigma} &= -\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \eta \underline{\dot{\gamma}} \\ \underline{\sigma} : \operatorname{grad} \mathbf{v} &= \eta \dot{\gamma}^2, \end{aligned} \quad (20.5)$$

onde a taxa de cisalhamento  $\dot{\gamma}$  é definida pela equação  $\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\dot{\gamma}} : \underline{\dot{\gamma}}}.$

**Constante condutividade térmica:** embora a condutividade térmica do fluido,  $\kappa$ , seja dependente da temperatura, ela é assumida constante por causa da dificuldade na obtenção de dados materiais. O termo envolvendo  $\kappa$  na Eq. (20.3) pode então ser escrito como:

$$\operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T) = \kappa \nabla^2 T. \quad (20.6)$$

## Equações resultantes

Impondo as suposições anteriores (20.4)–(20.6), as equações de conservação (20.1)–(20.3) são simplificadas, respectivamente, a:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (20.7)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \rho \mathbf{g} - \mathbf{grad} p + \operatorname{div} (\eta \dot{\gamma}) - \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}), \quad (20.8)$$

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt} + \eta \dot{\gamma}^2 + \kappa \nabla^2 T. \quad (20.9)$$

### 20.2.2 Suposições sobre o meio

Como as peças produzidas por moldagem por injeção são finas, o escoamento na cavidade é semelhante ao escoamento em um canal bidimensional estreito, e essa característica permite simplificações adicionais nas equações de conservação (20.7) a (20.9).

A Figura 20.1 mostra a geometria de uma cavidade simples. Por conveniência, um sistema de coordenadas cartesianas é adotado para descrever a cavidade. Os eixos são organizados de tal forma que em qualquer ponto na cavidade o plano  $xy$  coincide com o plano médio da parte a ser moldada, e os pontos do eixo- $z$  se encontram na direção da espessura.

Para simplificar as equações utiliza-se, análise dimensional com o objetivo de obter estimativas da ordem de magnitude de cada termo nas equações governantes para então desprezar os termos de ordem mais baixa.

Na prática, valores característicos são associados a cada uma das variáveis envolvidas no escoamento. Usando esses valores típicos, as variáveis relevantes nas equações podem ser definidas em termos de variáveis adimensionais, que são substituídas nas equações. Em seguida, faz-se análise dimensional da ordem de magnitude de cada termo presente nas equações e, termos de ordem suficientemente baixa são desconsiderados por terem pequena influência quando comparados com os demais.

Os valores característicos das variáveis envolvidas são listados na Tabela 20.1, e as variáveis relevantes nas equações definidas em termos de variáveis adimensionais são apresentadas na Tabela 20.2 [14].

As quantidades marcadas com o asterisco (\*) na Tabela 20.2 são adimensionais e de ordem um. A aproximação envolve, portanto, a substituição de variáveis adimensionais em cada equação, para, então, estimar a ordem de magnitude de cada termo.

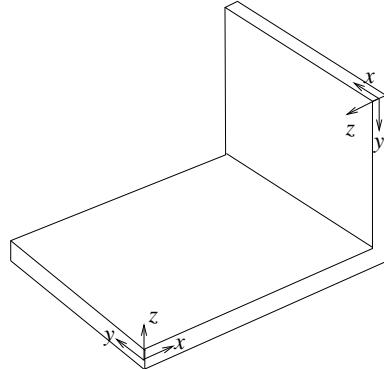


Figura 20.1: Sistema de coordenadas para a cavidade de um molde.

Tabela 20.1: Valores característicos das variáveis.

Variável	Valores característicos
Espessura da cavidade	$H = 10^{-3} \text{ m}$
Comprimento da cavidade	$L = H/\delta \text{ m}$ onde $\delta = H/L \ll 1$
Velocidade do fluido	$v_0 = 10^{-1} \text{ m/s}$
Pressão na cavidade	$p_0 = 10^7 \text{ N/m}^2 (\text{Pa})$
Viscosidade do fluido	$\eta_0 = 10^4 \text{ Ns/m}^2 (\text{Pa s})$
Coeficiente de expansão térmica	$\beta = 10^{-3} \text{ 1/K}$
Condutividade térmica do fluido	$\kappa = 10^{-1} \text{ W/mK}$
Densidade do fluido	$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$
Diferença de temperatura entre o molde e o fluido	$T_0 = 10^2 \text{ K}$

Tabela 20.2: Uso de variáveis adimensionais para reescrever as variáveis do escoamento.

Variável	Adimensionalização
Coordenada- $x$	$x = Lx^* = H/\delta x^*$
Coordenada- $y$	$y = Ly^* = H/\delta y^*$
Coordenada- $z$	$z = Hz^*$
Tempo	$t = [L/v_0]t^* = [H/\delta v_0]t^*$
Componente $x$ da velocidade	$v_x = [L/T]v_x^* = v_0 v_x^*$
Componente $y$ da velocidade	$v_y = [L/T]v_y^* = v_0 v_y^*$
Componente $z$ da velocidade	$v_z = [H/T]v_z^* = \delta v_0 v_z^*$
Pressão	$p = pop^*$
Viscosidade	$\eta = \eta_0 \eta^*$
Diferença de temperatura	$\Delta T = T_0 \Delta T^*$

### Análise dimensional da equação da continuidade

A equação da continuidade (20.7) para um fluido não newtoniano generalizado incompressível pode ser escrita em coordenadas cartesianas, como segue:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (20.10)$$

Para a primeira derivada na Eq. (20.10),

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_0 v_x^*}{\partial L x^*} = \frac{v_0}{L} \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*}$$

Como as variáveis adimensionais são de ordem um, a ordem de magnitude de  $\frac{\partial v_x}{\partial x}$  é igual à ordem de magnitude de  $\frac{v_0}{L}$ . Usando os valores característicos dados por  $v_0$  e  $L$  tem-se:

$$O\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}\right] = O\left[\frac{v_0}{L}\right] = O\left[\frac{\delta v_0}{H}\right] = O\left[\frac{10^{-1}\delta}{10^{-3}}\right] = O[10^2\delta],$$

onde por  $O[\cdot]$ , lê-se ordem de magnitude.

Usando os valores característicos e as variáveis descritos nas Tabelas 20.1 e 20.2 para estimar a ordem de magnitude dos demais termos da equação da continuidade, observa-se que todos os termos têm a mesma ordem de magnitude:

$$O\left[\frac{\partial v_y}{\partial y}\right] = O\left[\frac{\partial v_z}{\partial z}\right] = O[10^2\delta],$$

e portanto nenhum termo pode ser negligenciado e não é possível simplificar mais a equação, que continua em sua forma original.

### Análise dimensional da equação da quantidade de movimento

As três componentes da equação da quantidade de movimento (20.8) escritas em coordenadas cartesianas são apresentadas a seguir com as respectivas ordens de magnitude de cada termo.

Componente- $x$ :

$$\begin{aligned} \underbrace{\rho \frac{\partial v_x}{\partial t}}_{10^4\delta} &= \underbrace{\rho f_x}_{10^4} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{10^{10}\delta} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)}_{10^9\delta^2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)}_{10^9\delta^2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)}_{10^9\delta^2} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)}_{10^9} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)}_{10^9\delta^2} - \underbrace{\rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)}_{10^4\delta} - \underbrace{\rho \left( v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)}_{10^4\delta} - \underbrace{\rho \left( v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)}_{10^4\delta}. \end{aligned}$$

Componente- $y$ :

$$\begin{aligned} \underbrace{\rho \frac{\partial v_y}{\partial t}}_{10^4\delta} &= \underbrace{\rho f_y}_{10^4} \underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}_{10^{10}\delta} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)}_{10^9\delta^2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)}_{10^9\delta^2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( 2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)}_{10^9\delta^2} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)}_{10^9\delta^2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)}_{10^9} - \underbrace{\rho \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)}_{10^4\delta} - \underbrace{\rho \left( v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)}_{10^4\delta} - \underbrace{\rho \left( v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)}_{10^4\delta}. \end{aligned}$$

Componente- $z$ :

$$\begin{aligned} \underbrace{\rho \frac{\partial v_z}{\partial t}}_{10^4\delta} &= \underbrace{\rho f_z}_{10^4} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial z}}_{10^{10}\delta} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)}_{10^9\delta^2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)}_{10^9\delta^2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)}_{10^9\delta^2} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)}_{10^9\delta^2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)}_{10^9\delta^2} - \underbrace{\rho \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)}_{10^4\delta} - \underbrace{\rho \left( v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)}_{10^4\delta} - \underbrace{\rho \left( v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)}_{10^4\delta}. \end{aligned}$$

Como a maioria das peças moldadas por injeção são finas, espera-se  $\delta \ll 1$  (veja Tabela 20.1). De acordo com [86],  $\delta$  assume valores no intervalo  $0,001 < \delta < 0,1$ . Conhecendo

os prováveis valores de  $\delta$ , observa-se que os termos mais dominantes na equações da quantidade de movimento são o gradiente de pressão e as forças viscosas resultantes das derivadas na direção- $z$ . Por exemplo, para  $\delta = 0, 1$ , forças gravitacionais e iniciais são, respectivamente, cinco e seis ordens de magnitude menores dos que os termos de ordens mais altas. Desta forma, todos os termos menores ou iguais a  $10^9\delta$  podem ser ignorados, e então as equações para as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  da equação quantidade de movimento são reduzidas, respectivamente, a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{20.11}$$

### Análise dimensional da equação da temperatura

A equação da temperatura (20.9) escrita em coordenadas cartesianas e as respectivas ordens de magnitude de cada termo são dadas por:

$$\begin{aligned}&\underbrace{\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{(10^{10}\delta)} + \underbrace{\rho C_p v_x \frac{\partial T}{\partial x}}_{(10^{10}\delta)} + \underbrace{\rho C_p v_y \frac{\partial T}{\partial y}}_{(10^{10}\delta)} + \underbrace{\rho C_p v_z \frac{\partial T}{\partial z}}_{(10^{10}\delta)} = \\ &= \underbrace{\beta T \frac{\partial p}{\partial t}}_{(10^8\delta)} + \underbrace{\beta T v_x \frac{\partial p}{\partial x}}_{(10^8\delta)} + \underbrace{\beta T v_y \frac{\partial p}{\partial y}}_{(10^8\delta)} + \underbrace{\beta T v_z \frac{\partial p}{\partial z}}_{(10^8\delta)} + \underbrace{\eta \dot{\gamma}^2}_{(10^8)} + \underbrace{\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}_{(10^7\delta^2)} + \underbrace{\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}_{(10^7\delta^2)} + \underbrace{\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}_{(10^7)}.\end{aligned}$$

Pode-se observar que os termos envolvendo variação de temperatura devido à compressão e/ou à expansão e à condução nas direções  $x$  e  $y$  são de ordem de magnitude significativamente menor, o que permite que eles sejam desprezados.

Apesar do efeito resultante da convecção na direção- $z$  fazer o fluido dividir-se e comportar-se como um chafariz na vizinhança da superfície livre (*fountain flow*), esse efeito ocorre em uma região de dimensão da ordem da espessura da cavidade, que é bastante pequena. Por este motivo o termo convectivo na direção- $z$ ,  $v_z \frac{\partial T}{\partial z}$ , também pode ser desprezado [86].

A equação de energia em termos de temperatura fica:

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \eta \dot{\gamma}^2 + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},\tag{20.12}$$

onde a taxa de cisalhamento é definida por  $\dot{\gamma} = \sqrt{\left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2}$ .

Detalhes da análise dimensional podem ser encontrados em [57, 58, 86].

### 20.2.3 Simplificação por análise matemática

Durante a fase de preenchimento do processo de moldagem por injeção, o polímero injetado se encontra em dois estados físicos distintos: sólido e líquido. Embora o polímero tenha sido fundido do início do processo, ele resfria por estar em contato com as paredes frias do molde causando ocorrência de re-solidificação e de formação de uma camada solidificada (*frozen layer*)<sup>2</sup>.

Por motivos bastante claros, não é possível aplicar as equações governantes do escoamento de fluidos – tanto em sua formulação original quanto em sua versão simplificada para fluidos puramente viscosos em moldes – à camada solidificada. Desta forma, estabelece-se um conceito de temperatura *no-flow* (do inglês ‘sem escoamento’) para distinguir entre as fases sólida e líquida do polímero. A temperatura *no-flow* é definida como a temperatura na qual o polímero passa ser considerado sólido.

**Camada solidificada:** durante a fase de preenchimento, existe uma região chamada camada solidificada (*frozen layer*), na qual as velocidades  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$  são nulas. Além disso, a camada solidificada é definida como sendo o material que está abaixo da temperatura *no-flow*.

Até agora, foram usadas as propriedades do material e a geometria da cavidade para simplificar as equações para a fase de preenchimento. Contudo, é possível simplificá-las ainda mais por meio da integração das equações da continuidade e da quantidade de movimento, na região da cavidade em que o polímero se encontra no estado líquido.

A Figura 20.2 define a notação que será utilizada nas seções seguintes. A linha central da cavidade está em  $z = 0$ , a localização da interface entre a camada solidificada e o fluido no ponto  $(x, y)$  está em  $z = h^+(x, y)$  e  $z = h^-(x, y)$ . A espessura da cavidade é  $2H$  e a espessura da região em que o polímero se encontra na fase líquida em qualquer ponto  $(x, y)$  é  $h^+ - h^-$ . Note que não há requerimento de a espessura da camada solidificada ser simétrica com relação à linha central da cavidade, o que implica que é possível que  $|h^+| \neq |h^-|$ .

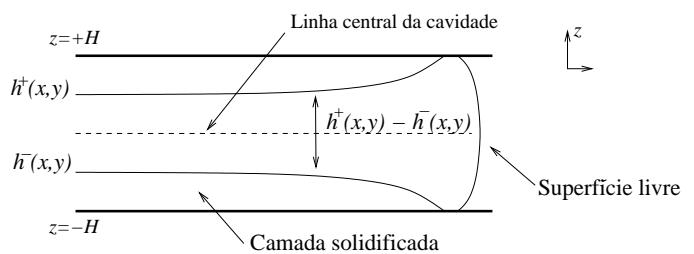


Figura 20.2: Escoamento na cavidade do molde.

### Integração das equações da quantidade de movimento

Das últimas equações da quantidade de movimento (20.11) tem-se que a pressão é uma função somente de  $x$  e de  $y$ . Por essa razão, é conveniente integrar as equações da quantidade

<sup>2</sup>A espessura final da camada solidificada é um dos fatores determinantes da qualidade da peça fabricada por moldagem por injeção. Por esse motivo, diversos estudos tem sido condizidos de modo a compreender – e controlar – esse fenômeno [26, 135]. Sabe-se, por exemplo, que a espessura da camada solidificada é independente da pressão de injeção, mas dependente da temperatura; e que a rigor, ela aumenta continuamente durante o preenchimento do molde, apresentando o formato semelhante ao de uma parábola.

de movimento ao longo da espessura com o propósito de obter expressões para as velocidades  $v_x$  e  $v_y$ .

Para começar, integra-se a primeira componente da Eq. (20.11) com relação a  $z$  de  $h^-$  a  $z$  e obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{h^-}^z \frac{\partial p}{\partial x} dz' &= \int_{h^-}^z \frac{\partial}{\partial z'} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial z'} \right) dz' \\ \frac{\partial p}{\partial x} z &= \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} - \left[ \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \right]_{z=h^-} + \left[ \frac{\partial p}{\partial x} z \right]_{z=h^-} \\ &= \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} - A(x, y), \end{aligned} \quad (20.13)$$

onde  $A(x, y) = [\eta \partial v_x / \partial z]_{z=h^-} - [z \partial p / \partial x]_{z=h^-}$  é constante para  $(x, y)$  dados.

Dividindo ambos os lados da Eq. (20.13) por  $\eta$  e integrando de  $h^-$  a  $z$ , obtém-se:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \int_{h^-}^z \frac{z'}{\eta} dz' = v_x(z) - v_x(h^-) - A(x, y) \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta}. \quad (20.14)$$

Na interface entre o fluido e a camada solidificada, onde  $z = h^-$  ou  $z = h^+$ , tem-se  $v_x = 0$ . Esta condição é chamada não escorregamento (*no-slip*). Aplicando a condição de não escorregamento na Eq. (20.14) e rearranjando-a, obtém-se:

$$v_x(z) = \frac{\partial p}{\partial x} \int_{h^-}^z \frac{z'}{\eta} dz' + A(x, y) \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta}. \quad (20.15)$$

Analogamente, uma expressão semelhante para a componente  $y$  da velocidade é obtida utilizando as operações acima na segunda componente da Eq. (20.11):

$$v_y(z) = \frac{\partial p}{\partial y} \int_{h^-}^z \frac{z'}{\eta} dz' + B(x, y) \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta}, \quad (20.16)$$

onde  $B(x, y) = [\eta \partial v_y / \partial z]_{z=h^-} - [z \partial p / \partial y]_{z=h^-}$  é constante para  $(x, y)$  dados.

Fazendo  $z = h^+$  e aplicando a condição de não escorregamento na Eq. (20.15) tem-se:

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x} \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' + A(x, y) \int_{h^-}^{h^+} \frac{dz'}{\eta},$$

e então

$$A(x, y) = -\frac{\partial p}{\partial x} \left\{ \frac{\int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz'}{\int_{h^-}^{h^+} \frac{dz'}{\eta}} \right\} = -\frac{\partial p}{\partial x} C(x, y),$$

onde a constante  $C$  é definida por:  $C(x, y) = \left[ \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' \right] / \left[ \int_{h^-}^{h^+} \frac{dz'}{\eta} \right]$ .

Do mesmo modo, tomando  $z = h^+$  na Eq. (20.16), obtém-se:

$$B(x, y) = -\frac{\partial p}{\partial y} \left\{ \frac{\int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz'}{\int_{h^-}^{h^+} \frac{dz'}{\eta}} \right\} = -\frac{\partial p}{\partial y} C(x, y).$$

Usando esses resultados, as Eqs. (20.15) e (20.16) podem ser escritas, respectivamente, como:

$$v_x = \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ \int_{h^-}^z \frac{z'}{\eta} dz' - C(x, y) \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} \right\}, \quad (20.17)$$

e

$$v_y = \frac{\partial p}{\partial y} \left\{ \int_{h^-}^z \frac{z'}{\eta} dz' - C(x, y) \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} \right\}. \quad (20.18)$$

A partir das Eqs. (20.17) e (20.18) estabelece-se uma das condições de contorno para a pressão. Nas paredes laterais do molde e inserções (buracos) impõe-se que a velocidade na direção  $\mathbf{n}$ , normal a essas faces e restrita ao plano  $xy$ , é nula, ou seja,  $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0$ .

Em seguida as velocidades médias  $\bar{v}_x$  e  $\bar{v}_y$  são definidas como:

$$\bar{v}_x = \frac{1}{h^+ - h^-} \int_{h^-}^{h^+} v_x(z) dz, \quad (20.19)$$

e

$$\bar{v}_y = \frac{1}{h^+ - h^-} \int_{h^-}^{h^+} v_y(z) dz. \quad (20.20)$$

Substituindo a Eq. (20.17) em (20.19) tem-se:

$$\bar{v}_x = \frac{1}{h^+ - h^-} \frac{\partial p}{\partial x} \left[ \int_{h^-}^{h^+} \int_{h^-}^z \frac{z'}{\eta} dz' dz - C(x, y) \int_{h^-}^{h^+} \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} dz \right]. \quad (20.21)$$

Essa integral pode ser avaliada usando integração por partes (veja exercício 3), resultando em:

$$\bar{v}_x = \frac{-2S_2}{h^+ - h^-} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (20.22)$$

onde

$$S_2 = \frac{1}{2} \left\{ \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'^2}{\eta} dz' - \frac{\left( \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' \right)^2}{\int_{h^-}^{h^+} \frac{dz'}{\eta}} \right\}. \quad (20.23)$$

A quantidade  $S_2$  é chamada fluidez. Usa-se o subscrito para indicar que está associada com o fluxo num canal que é essencialmente bidimensional.

A componente- $y$  da velocidade média pode ser encontrada de maneira análoga substituindo a Eq. (20.18) na Eq. (20.20). Desta forma,

$$\bar{v}_y = \frac{-2S_2}{h^+ - h^-} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (20.24)$$

## Integração da equação da continuidade

Durante a fase de preenchimento a equação da continuidade é:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (20.25)$$

Integrando a Eq. (20.25) com relação a  $z$ , entre  $z = -H$  e  $z = +H$  tem-se:

$$0 = \int_{-H}^{+H} \frac{\partial v_x}{\partial x} dz + \int_{-H}^{+H} \frac{\partial v_y}{\partial y} dz + \int_{-H}^{+H} \frac{\partial v_z}{\partial z} dz.$$

Como  $v_x = v_y = v_z = 0$  na camada solidificada, o lado direito da equação acima pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial v_x}{\partial x} dz + \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial v_y}{\partial y} dz + [v_z]_{z=-H}^{z=+H} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{h^-}^{h^+} v_x dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{h^-}^{h^+} v_y dz \\ &= \frac{\partial}{\partial x} ((h^+ - h^-) \bar{v}_x) + \frac{\partial}{\partial y} ((h^+ - h^-) \bar{v}_y) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( 2S_2 \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( 2S_2 \frac{\partial p}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

onde, nas duas últimas expressões, foram usadas as definições e valores das velocidades médias dadas nas Eqs. (20.19), (20.20), (20.22) e (20.24).

Segue imediatamente da equação acima que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( S_2 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( S_2 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0. \quad (20.26)$$

Essa equação é uma equação simplificada para a pressão que combina as equações da continuidade e quantidade de movimento e é conhecida como equação de Hele-Shaw.

A Eq. (20.26) pode ser simplificada ainda mais se for assumido que o campo de fluido é simétrico com relação à linha central da cavidade do molde, isto é  $|h^+| = |h^-|$ . Escoamento assimétrico ocorre geralmente nas proximidades de cantos e felizmente é um efeito local, assim, apenas um pequeno erro é introduzido por essa suposição.

**Escoamento simétrico:** o campo de fluido é assumido ser simétrico com relação à linha central da cavidade.

Como resultado dessa suposição, tem-se:

- $|h^+| = |h^-| = h$ .
- O perfil da velocidade ao longo da cavidade é simétrico sobre a linha central da cavidade, então  $\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0$  em  $z = 0$ .

- O campo de temperatura é simétrico com relação a linha central da cavidade, então  $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$  em  $z = 0$ .
- O campo de viscosidade é simétrico com relação a linha central da cavidade  $z = 0$ . Isto significa que (veja exercício 4),

$$\int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' = \int_{-h}^h \frac{z'}{\eta} dz' = 0. \quad (20.27)$$

Por (20.23) tem-se:

$$S_2 = \frac{1}{2} \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'^2}{\eta} dz' = \frac{1}{2} \int_{-h}^h \frac{z'^2}{\eta} dz' = \int_0^h \frac{z'^2}{\eta} dz'. \quad (20.28)$$

Por outro lado, substituindo a expressão (20.27) na Equação (20.22) da constante  $C(x, y)$ , obtém-se que as componentes  $v_x$  e  $v_y$  da velocidade, definidas pelas Eqs. (20.17) e (20.18), também são simplificadas, resultando em:

$$v_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \left( \int_0^z \frac{z'}{\eta} dz' - \int_0^h \frac{z'}{\eta} dz' \right), \quad (20.29)$$

e

$$v_y = -\frac{\partial p}{\partial y} \left( \int_0^z \frac{z'}{\eta} dz' - \int_0^h \frac{z'}{\eta} dz' \right). \quad (20.30)$$

#### 20.2.4 Equação da temperatura média

Analisando a Eq. (20.12) pode-se observar que o campo de distribuição de temperatura é tridimensional, uma vez que os termos de dissipação viscosa e de condução dependem de  $z$ . Nesta seção, um modelo simplificado bidimensional para temperatura é formulado utilizando valores médios de velocidade e da própria temperatura. Esses valores médios são calculados usando a seguinte definição:

**Definição 1** *O valor médio de uma variável  $\varphi$ , em um molde simétrico, é definido por:*

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{h} \int_0^h \varphi dz$$

onde  $h$  é o valor da espessura do molde.

Aplicando a Definição 1 na Eq. (20.12), obtém-se:

$$\overline{\frac{\partial T}{\partial t}} + \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} T} = \frac{1}{\rho C_p} \left[ \overline{\eta \dot{\gamma}^2} + \kappa \overline{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}} \right]. \quad (20.31)$$

que é uma expressão para a equação da temperatura envolvendo médias da derivada temporal, do termo convectivo, do termo condutivo e da dissipação viscosa. Nas seções seguintes tais médias são distribuídas às variáveis<sup>3</sup>, de modo a fornecer a expressão bidimensional para a temperatura média (em termos de valores médios das variáveis envolvidas no escoamento).

---

<sup>3</sup>O objetivo aqui é encontrar, por exemplo, a derivada temporal da temperatura média  $\partial \bar{T} / \partial t$  ao invés da média da derivada temporal  $\overline{\partial T / \partial t}$ .

## Estabelecimento de perfis parabólicos para as variáveis

De modo a obter o modelo bidimensional médio para a equação da temperatura, são realizadas diversas simplificações levando-se em conta perfis parabólicos para a velocidade, a temperatura e a viscosidade do fluido, dados por:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\max} f(z), \quad (20.32)$$

$$\eta = (\eta_c - \eta_w) f(z) + \eta_w, \quad (20.33)$$

$$T = (T_{\max} - T_w) f(z) + T_w, \quad (20.34)$$

onde

$$f(z) = -\frac{(z-h)(z+h)}{h^2},$$

$h$  é a espessura do molde,  $\mathbf{v}_{\max}$ ,  $\eta_c$  e  $T_{\max}$  são os valores da velocidade, da viscosidade e da temperatura na linha central da cavidade do molde ( $z = 0$ ), e  $\eta_w$  e  $T_w$  são, respectivamente, a viscosidade e a temperatura do fluido na camada solidificada e/ou parede da cavidade do molde ( $z = h$ ). Note que, neste último caso, como há condição de não escorregamento, a velocidade do fluido na camada solidificada e/ou parede da cavidade do molde é assumida  $\mathbf{v} = 0$ .

Considerando a espessura do molde constante e aplicando a Definição 1 nas Eqs. (20.32) e (20.34), tem-se:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{h} \int_0^h \mathbf{v}_{\max} f(z) dz = \frac{2}{3} \mathbf{v}_{\max},$$

$$\bar{T} = \frac{1}{h} \int_0^h (T_{\max} - T_w) f(z) dz = \frac{2}{3} T_{\max} + \frac{1}{3} T_w.$$

Substituindo essas duas expressões nas Eqs. (20.32) e (20.34), tem-se que os perfis parabólicos para a velocidade e temperatura, escritos em termos de valores médios destas variáveis, são dados por:

$$\mathbf{v} = \frac{3}{2} \bar{\mathbf{v}} f(z), \quad (20.35)$$

$$T = \frac{3}{2} (\bar{T} - T_w) f(z) + T_w. \quad (20.36)$$

## Derivada temporal média

Considerando o perfil parabólico para a temperatura (20.36), tem-se que o valor médio da derivada temporal é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} &= \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial T}{\partial t} dz = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{3}{2} (\bar{T} - T_w) f(z) + T_w \right] dz = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \frac{3}{2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} f(z) dz = \frac{3}{2h} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \int_0^h f(z) dz = \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (20.37)$$

## Convecção média

Analogamente, o termo convectivo médio é obtido considerando-se os perfis parabólicos para a velocidade (20.35) e a temperatura (20.36). Tem-se

$$\begin{aligned}
 \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} T} &= \frac{1}{h} \int_0^h \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} T \, dz \\
 &= \frac{1}{h} \int_0^h \left[ \frac{3}{2} \bar{\mathbf{v}} f(z) \right] \cdot \mathbf{grad} \left[ \frac{3}{2} (\bar{T} - T_w) f(z) + T_w \right] \, dz \\
 &= \frac{1}{h} \int_0^h \left[ \frac{3}{2} \bar{\mathbf{v}} f(z) \right] \cdot \left[ \frac{3}{2} f(z) \mathbf{grad} \bar{T} \right] \, dz \\
 &= \frac{9}{4h} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{grad} \bar{T}) \int_0^h f^2(z) \, dz = \frac{6}{5} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{grad} \bar{T}). \tag{20.38}
 \end{aligned}$$

## Dissipação viscosa média

Aplicando a Definição 1 ao termo que representa a dissipação viscosa na equação da temperatura, tem-se:

$$\overline{\eta \dot{\gamma}} = \frac{1}{h} \int_0^h \eta \dot{\gamma} \, dz = \frac{1}{h} \int_0^h \eta \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right] \, dz. \tag{20.39}$$

Os valores das derivadas parciais da velocidade com relação a  $z$  podem ser calculados utilizando o perfil de velocidade definido na Eq. (20.32):

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{3z}{h^2} \bar{v}_x \quad \text{e} \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{3z}{h^2} \bar{v}_y.$$

Agora, utilizando essas duas expressões juntamente com o perfil parabólico para a viscosidade (20.33) na Eq. (20.39), tem-se que a dissipação viscosa média é dada por:

$$\begin{aligned}
 \overline{\eta \dot{\gamma}} &= \frac{1}{h} \int_0^h \eta \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right] \, dz \\
 &= \frac{1}{h} \int_0^h [(\eta_c - \eta_w) f(z) + \eta_w] \left( \frac{9z^2}{h^4} \bar{v}_x^2 + \frac{9z^2}{h^4} \bar{v}_y^2 \right) \, dz \\
 &= \frac{3}{5h^2} (\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2)(2\eta_c + 3\eta_w). \tag{20.40}
 \end{aligned}$$

## Condução média

Analogamente aos casos anteriores, tem-se que a condução média é dada por:

$$\overline{\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}} = \frac{1}{h} \int_0^h \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \, dz = \frac{\kappa}{h} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_h - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_0 \right) \tag{20.41}$$

Assim, para o cálculo da condução média são necessários os cálculos das derivadas parciais de  $T$  com relação a  $z$  em  $z = 0$  e em  $z = h$ . Para isso, assume-se o perfil parabólico para a temperatura (20.36), a calcula-se a derivada parcial em questão, dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{3z}{h^2}(\bar{T} - T_w). \quad (20.42)$$

Note que esta última derivada indica que o perfil assumido para a temperatura está de acordo com as condições de contorno do escoamento, que afirmam que a derivada de  $T$  com relação a  $z$  na linha central da cavidade, isto é, quando  $z = 0$ , é nula.

Substituindo a expressão (20.42) na Eq. (20.41), tem-se que a condução média pode ser escrita em termos de valores médios da temperatura:

$$\overline{\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}} = -\frac{3\kappa}{h^2}(\bar{T} - T_w). \quad (20.43)$$

### O modelo 2D resultante

Finalmente, a expressão para a distribuição média bidimensional de temperatura é obtida substituindo as expressões (20.37), (20.38), (20.40) e (20.43) na Eq. (20.31):

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = -\frac{6}{5}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{grad} \bar{T}) + \frac{1}{\rho C_p} \left( \frac{3}{5h^2} \|\bar{\mathbf{v}}\|^2 (2\eta_c + 3\eta_w) - \frac{3\kappa}{h^2}(\bar{T} - T_w) \right), \quad (20.44)$$

onde a barra denota valores médios para as variáveis,  $\eta_c$  é a viscosidade na linha central da cavidade do molde,  $\eta_w$  e  $T_w$  são os valores da viscosidade e da temperatura na parede do molde, respectivamente.

## 20.3 Condições de Contorno

Para o problema de moldagem por injeção, condições de contorno relacionam a solução da pressão e distribuições térmicas na cavidade. Na verdade, a equação da pressão, resultante do acoplamento das equações da continuidade e da quantidade de movimento, é acoplada à equação da energia porque a viscosidade do material, que afeta a pressão, é determinada pela taxa de cisalhamento e, em alguns modelos reológicos, também pela temperatura.

### Condições de Contorno para a Pressão:

- O gradiente de pressão na direção normal a qualquer fronteira impermeável é zero. As fronteiras impermeáveis são as faces laterais, as paredes e quaisquer inserções (buracos) na cavidade do molde. Portanto,  $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0$  no contorno rígido. Fisicamente isso quer dizer que o material não pode escoar através do contorno rígido, o que está de acordo com a Seção 20.2.3.
- A vazão  $q$  do fluido, ou a pressão  $p$ , é especificada na superfície na qual o fluido adentra na cavidade, ou seja,  $q = q_{\text{inj}}$  ou  $p = p_{\text{inj}}$ .
- A pressão na superfície livre é zero.

### Condições de Contorno para a Temperatura:

- Uma função da temperatura ao longo da espessura da cavidade  $T_{\text{inj}} = T_{\text{inj}}(z)$  ou um valor uniforme da temperatura  $T_{\text{inj}}$  é prescrito na região de injeção de fluido.
- A temperatura  $T$  é prescrita sobre todo o contorno rígido. Temperaturas diferentes podem ser prescritas em cada fronteira.

## 20.4 Modelos de Viscosidade

Os fluidos nos quais a tensão de cisalhamento não é diretamente proporcional à taxa de deformação são chamados de fluidos não newtonianos. Numerosas equações empíricas têm sido propostas para definir o modelo matemático das relações observadas entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação no caso de fluidos não newtonianos.

Dentre os modelos newtonianos generalizados de viscosidade (viscosidade não linearmente dependente da taxa de cisalhamento), as leis de Carreau e a de Cross exibem excelente conformidade com o comportamento observado por certos polímeros de interesse industrial [162]. Ambos modelos apresentam o platô newtoniano a baixas taxas de cisalhamento e a assíntota *power-law* a altas taxas de cisalhamento, quando utilizado um gráfico em escala logarítmica. Estes dois modelos, juntamente com os modelos de Ellis e *Power-law* são definidos como [28, 114]:

**Carreau:** o modelo de Carreau é comumente escrito em termos de quatro parâmetros:

$$\eta = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) [1 + \lambda^2 \dot{\gamma}^2]^{\frac{n-1}{2}},$$

onde  $\eta_\infty$  e  $\eta_0$  são as viscosidades limitantes a baixas e altas taxas de cisalhamento. A alta taxa de cisalhamento  $\eta_\infty$  é frequentemente tomada como zero [23, 114].

**Cross:** O modelo proposto por Cross é dado por:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\eta_0}{1 + \left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau^*}\right)^{1-n}},$$

onde  $n$  é o índice da lei de potência,  $\eta_0$  é viscosidade para taxa de cisalhamento nula,  $\tau^*$  é o parâmetro que descreve a região de transição entre a taxa de cisalhamento nula, também conhecida como platô newtoniano, e a região da lei de potência da curva da viscosidade [42].

**Ellis:** O modelo de Ellis é escrito em termos da tensão de cisalhamento  $\tau$ :

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\eta_0} \left( 1 + \left| \frac{\tau}{\tau_{1/2}} \right|^{n-1} \right),$$

onde  $\eta_0$  é a viscosidade a taxa de cisalhamento nula,  $\tau_{1/2}$  é a tensão de cisalhamento na qual a viscosidade é  $\eta_0/2$  e  $(n-1)$  é a inclinação da curva  $\log[(\eta_0/\eta) - 1] \times \log(\tau/\tau_{1/2})$  [138].

**Power-law (lei de potência):** O modelo de *Power-law* descreve a viscosidade por:

$$\eta = K\dot{\gamma}^{n-1},$$

onde  $\dot{\gamma}$  é a taxa de cisalhamento. Este modelo não é capaz de prever o platô newtoniano e portanto não é considerado apropriado para fluidos com tal comportamento a baixas taxas de cisalhamento [159].

Normalmente, os parâmetros de um determinado modelo para um fluido específico são determinados experimentalmente. A Tabela 20.3 fornece os parâmetros que caracterizam o comportamento de poliestireno para cada um dos modelos descritos [28, 114], que são ilustrados em seguida na Figura 20.3.

Tabela 20.3: Parâmetros de modelos de viscosidade generalizados ajustados para representar poliestireno.

Modelo	$\eta_0$	$n$	$\lambda$	$\tau_{1/2}$	$\tau^*$	K
Carreau	$4 \times 10^6$	0,4	46,4			
Cross	$4 \times 10^6$	0,2838			$1,791 \times 10^5$	
Ellis	$4 \times 10^6$	3,2		$1,26 \times 10^5$		
<i>Power-law</i>		0,39				$3,5 \times 10^5$

Na Figura 20.3 a viscosidade  $\eta(\dot{\gamma})$  é plotada contra a taxa de cisalhamento  $\dot{\gamma}$  para os quatro diferentes modelos de viscosidade generalizada para poliestireno. Pode-se observar que, com exceção de modelo *Power-law*, os demais modelos incluem o comportamento newtoniano  $\eta(\dot{\gamma}) = \eta_0$  no caso de baixas taxas de cisalhamento.

Outros modelos de viscosidade, bem como seus diferentes parâmetros ajustados para outros materiais podem ser encontrados nos trabalhos de Hieber e Chiang [76] (poliestireno), Zhou e Turing [173] (polipropileno) e Carey e Chow [21].

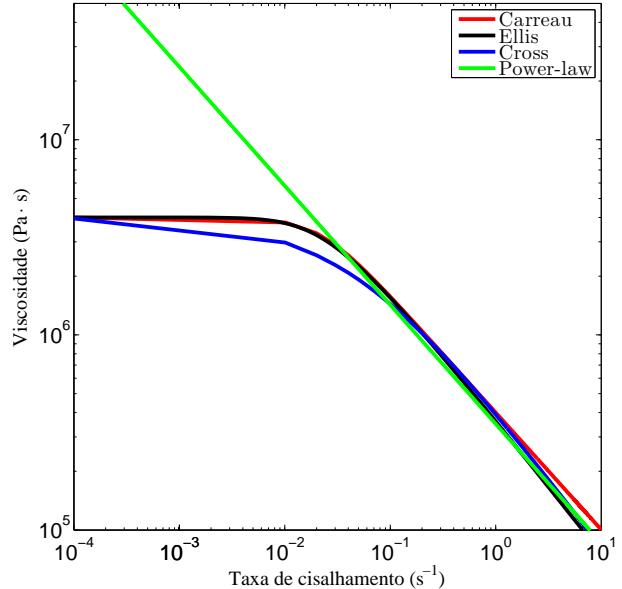


Figura 20.3: Modelos de viscosidade generalizados.

## 20.5 Problemas

1. Mostre que:  $\operatorname{div} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} = \rho (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v})$ .
2. Mostre que:  $\underline{\sigma} : \operatorname{grad} \mathbf{v} = \eta \dot{\gamma}^2$ .

3. Use integração por partes, calcule as integrais na Eq. (20.21) e mostre que:

$$\bar{v}_x = \frac{-2S_2}{h^+ - h^-} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

4. Calcule as integrais nas expressões (20.27) e (20.28) e mostre que:

$$\int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' = 0 \quad \text{e} \quad S_2 = \int_0^h \frac{z'^2}{\eta} dz'.$$

5. Calcule as integrais  $\int_0^h f(z) dz$  e  $\int_0^h f^2(z) dz$  onde  $f(z) = -(z - h)(z + h)/h^2$ .

6. Considerando o fluido como sendo newtoniano, reescreva as expressões para a fluidez  $S_2$ , e as componentes da velocidade  $v_x$  e  $v_y$  (Eqs. (20.28), (20.29), (20.30)).

7. Obtenha uma solução analítica para a pressão, considerando a equação de Hele-Shaw, com a fluidez  $S_2$  constante, definida em um domínio  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ , sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} p(-1, y) &= p(1, y) = 1 - y^2, \quad -1 \leq y \leq 1, \\ p(x, -1) &= p(x, 1) = x^2 - 1, \quad -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

8. (Exercício dirigido) Em algumas situações especiais de escoamento, é possível construir uma expressão para a solução analítica para a distribuição bidimensional de temperatura (Eq. 20.44) utilizando uma formulação euleriana. Por exemplo, uma solução analítica pode ser obtida considerando um molde retangular sendo preenchido por um fluido newtoniano de viscosidade  $\eta_0$  utilizando velocidade de injeção  $v_{\text{inj}}$  e temperatura de injeção  $T_{\text{inj}}$  prescritas. A temperatura do molde  $T_w$  é considerada como sendo constante. Desta forma, a temperatura  $\bar{T}(\mathbf{x}, t)$ , onde  $\mathbf{x} = (x, y)$  na Eq. (20.44) pode ser escrita como  $\bar{T}(\xi, t)$ , com  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$ . O vetor posição  $\mathbf{x}(\xi)$  é dado por:

$$\mathbf{x}(\xi) = \xi + v_{\text{inj}} t,$$

onde  $v_{\text{inj}}$  é a velocidade de injeção do fluido e  $t$  é o tempo. Em seguida, a Eq. (20.44) pode ser reescrita considerando  $\xi$  e viscosidade constantes como:

$$\left. \frac{d\bar{T}}{dt} \right|_{\xi \text{ constante}} = \frac{1}{\rho C_p} \left( \frac{3\eta_0}{h^2} \|\bar{\mathbf{v}}\|^2 + \frac{3\kappa}{h^2} (\bar{T} - T_w) \right). \quad (20.45)$$

Considerando que a componente da velocidade na direção- $y$  seja nula, é possível reescrever a Eq. (20.45) e obter:

$$\left. \frac{d\bar{T}}{dt} \right|_{\xi \text{ constante}} = c_0 + c_1 \bar{T}. \quad (20.46)$$

A Eq. (20.46) é uma equação diferencial ordinária. Encontre a solução analítica desta equação explicitando as expressões para as constantes  $c_0$  e  $c_1$ .

# Capítulo 21

## Transferência de Massa e Estruturas de Turing

### 21.1 Introdução

Este capítulo trata de algumas questões referentes ao problema da transferência de massa. Esclarecemos inicialmente o significado da expressão *Transferência de Massa*: utilizaremos esta expressão para designar o transporte de espécies químicas que se movem em um meio contínuo, quer sejam levadas pelo fluxo de um fluido em movimento, ou por difusão, em meios que se encontram em repouso. Como exemplo do primeiro caso podemos citar o transporte de umidade pelos ventos, de regiões costeiras para o interior de continentes, e a dispersão de poluentes na atmosfera. Como exemplo do segundo caso citamos a difusão de gases em metais e a difusão de substâncias diversas em tecidos de seres vivos. É neste sentido que empregaremos a expressão *Transferência de Massa* neste capítulo.

Inicia-se pelo equacionando o princípio de conservação de espécies químicas que reagem entre si e se difundem em virtude da existência de gradientes de concentração. Esta formulação leva a equações do tipo *reação-difusão*. Discute-se a seguir o problema do surgimento espontâneo de uma heterogeneidade na distribuição espacial de duas espécies químicas em um sistema reação-difusão. Este problema tem aplicações no estudo da formação de padrões espaciais em várias áreas como a química, a biologia teórica e a ciência de materiais.

### 21.2 Equações Reação-Difusão

O equacionamento do princípio de conservação de espécies que reagem entre si e se difundem é feito seguindo-se procedimento semelhante ao utilizado na obtenção da equação da energia: considera-se um volume de controle fixo no espaço e procura-se uma equação para a taxa de variação do número de moles da espécie química  $\mathcal{A}$  dentro deste volume. Consideraremos que não haja nenhum transporte por correntes convectivas, isto é, que  $\mathbf{v} \equiv 0$ .

Pode-se então enunciar o princípio de conservação de uma espécie química da seguinte forma:

A taxa de acumulação da espécie  $\mathcal{A}$  no volume de controle deve ser igual ao fluxo  $\mathbf{J}_{\mathcal{A}}$  da espécie para dentro do volume, acrescido da taxa de produção ou consumo da espécie, em virtude de reações químicas que ocorrem no volume.

Desta forma podemos escrever:

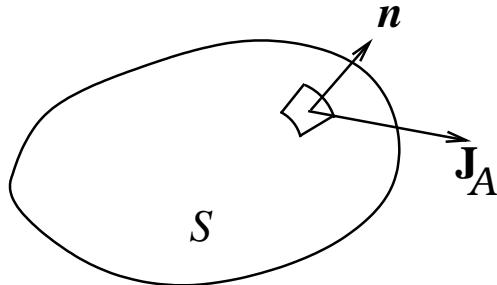


Figura 21.1: Volume de controle ao qual se aplica o princípio de conservação das espécies químicas.

onde  $c_{\mathcal{A}}$  é a concentração da espécie  $\mathcal{A}$  em moles por unidade de volume,  $\mathbf{J}_{\mathcal{A}}$  é fluxo de  $\mathcal{A}$  em moles por unidade de tempo e de área e  $f(\mathbf{C})$  representa a cinética de formação e consumo da espécie.  $\mathbf{C}$  é o vetor que contém a concentração de cada uma das espécies envolvidas na cinética da reação.  $\mathbf{n}$  é o vetor de comprimento unitário normal à superfície de controle e orientado para fora.

Aplicando o teorema de Gauss transformamos a integral de superfície em uma integral de volume e obtemos a forma diferencial do princípio de conservação da espécie química  $\mathcal{A}$ :

$$\frac{\partial c_{\mathcal{A}}}{\partial t} = - \operatorname{div} \mathbf{J}_{\mathcal{A}} + f(\mathbf{C})$$

O fluxo da espécie  $\mathcal{A}$  pode ser substituído pela expressão dada pela primeira lei de Fick, ( $\mathbf{J}_{\mathcal{A}} = -D_{AB} \operatorname{grad} c_{\mathcal{A}}$ ). Obtemos uma equação do tipo *reação-difusão*, que se escreve:

$$\frac{\partial c_{\mathcal{A}}}{\partial t} = D_{AB} \nabla^2 c_{\mathcal{A}} + f(\mathbf{C})$$

onde  $D_{AB}$  é a difusividade da espécie  $\mathcal{A}$  no meio  $\mathcal{B}$ . No caso de não haver reação, a equação acima reduz-se à *Segunda Lei de Fick*:

$$\frac{\partial c_{\mathcal{A}}}{\partial t} = D_{AB} \nabla^2 c_{\mathcal{A}}$$

No caso de um sistema químico contendo duas espécies cujas concentrações molares são respectivamente,  $u$  e  $v$  obtemos um sistema de duas equações a duas incógnitas da forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D_1 \nabla^2 u + f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_2 \nabla^2 v + g(u, v) \end{aligned}$$

onde  $f(u, v)$  e  $g(u, v)$  são as cinéticas de produção e consumo de  $u$  e  $v$  respectivamente e  $D_1$  e  $D_2$ , os coeficientes de difusão de cada espécie.

## 21.3 Estruturas de Turing

Esta seção trata do problema do surgimento espontâneo de uma distribuição espacial periódica de duas espécies químicas que reagem entre si (Murray, 1988 [112], 1989 [113], Meinhardt, 1982 [108]). O mecanismo que leva à formação destas estruturas espaciais foi proposto em 1952 por A. M. Turing, o inventor da máquina de Turing e da moderna ciência da computação e comprovado experimentalmente por De Kepper e colaboradores (1991) [47], do Instituto Paul Pascal de Bordeaux, França e por Swinney e colaboradores (1991), da Universidade do Texas (Austin) [127]. Essas heterogeneidades denominam-se estruturas de Turing.

O mecanismo proposto por Turing considera um sistema reação-difusão com duas espécies químicas cujas concentrações são  $u$  e  $v$ , que possui um estado estacionário uniforme no espaço, no qual as concentrações são  $u_0$  e  $v_0$ . Este estado é *estável* por hipótese a perturbações independentes da posição dentro do reator e instável a pequenas perturbações periódicas no espaço, se os coeficientes de difusão satisfizerem certas condições que deduziremos nesta seção. Turing identificou portanto uma condição em que a difusão *instabiliza* o comportamento de um sistema, contrariando a idéia de que a mesma seja sempre fator de estabilidade.

O mecanismo pressupõe que o transporte das espécies químicas se faça exclusivamente por *difusão* e baseia-se na interação entre um inibidor que se difunde rapidamente e um ativador que se difunde de forma lenta pelo espaço. Estes requisitos não são facilmente preenchidos nos experimentos de laboratório. Por isso as estruturas de Turing só foram observadas em 1990 com os trabalhos de De Kepper e colaboradores, a respeito da reação química entre íons cloreto, iodeto e ácido malônico (reação CIMA). De Kepper e colaboradores utilizaram um reator contendo um gel que impedia a formação de correntes convectivas e empregaram um indicador que formava longa cadeia molecular com o iodeto, reduzindo a mobilidade daquela espécie química.

Antes de prosseguirmos com a formulação do problema convém descrevermos as etapas do método de abordagem que adotaremos e definirmos alguns termos:

As estruturas de Turing resultam da instabilidade do estado estacionário homogêneo  $u_0$  e  $v_0$ , com relação a pequenas perturbações periódicas no espaço. Isto significa que o estado homogêneo é solução das equações de evolução do sistema, porém não é observado pois pequenas perturbações, que estão sempre presentes em qualquer sistema físico, são amplificadas e o afastam do estado inicial. A abordagem do problema procura portanto identificar as condições para que estas pequenas perturbações sejam amplificadas. Quando isto ocorre tem-se uma condição suficiente para a instabilidade do sistema. O procedimento envolve então as seguintes etapas (ver também Apêndice D e Caps. 12, 16 e 17):

- Superposição de uma pequena perturbação à solução estacionária uniforme e determinação das condições que a cinética deve satisfazer para que esta perturbação decresça ao longo do tempo. Supõe-se que a cinética satisfaça a estas condições;
- Superposição de uma perturbação periódica no espaço e identificação das condições em que a mesma se torna instável, isto é, que cresça ao longo do tempo;
- Em ambos os casos determina-se evolução da perturbação através de equações linearizadas;

zadas, pois sendo a mesma pequena desprezamos termos contendo produtos da mesma. O procedimento denomina-se *análise de estabilidade linear* do estado estacionário homogêneo.

A instabilidade surge quando os coeficientes de difusão das espécies são suficientemente diferentes entre si. O valor da relação entre os coeficientes em que ocorre a instabilidade define um *ponto de bifurcação* no espaço dos valores possíveis daquela relação. O comprimento de onda dos modos que se tornam instáveis no ponto de bifurcação denomina-se *comprimento de onda crítico*. Modos críticos crescem exponencialmente nos primeiros instantes de evolução da instabilidade. Quando a amplitude dos mesmos atinge um valor finito os mecanismos não-lineares da cinética passam a atuar e modificam a evolução do sistema de duas formas: gerando novos modos e saturando o crescimento exponencial dos primeiros instantes. Neste trabalho trataremos apenas da identificação do ponto de bifurcação e do comprimento de onda crítico.

Seja um sistema reação-difusão com duas espécies químicas, cujas concentrações denominamos  $u$  e  $v$ , respectivamente. A evolução temporal deste sistema é regida pelo seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + D_1 \nabla^2 u \quad (21.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) + D_2 \nabla^2 v \quad (21.2)$$

onde  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ . As funções  $f(u, v)$  e  $g(u, v)$  representam a cinética das reações químicas que ocorrem no sistema. Estados uniformes no espaço são caracterizados por derivadas espaciais nulas e evoluem obedecendo o sistema:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f(u, v) \\ \frac{dv}{dt} &= g(u, v) \end{aligned}$$

O plano formado pelos valores de  $(u, v)$  definem o *espaço de fases* do sistema. Os pontos em que  $u$  e  $v$  não variam com o tempo são definidos pelas curvas  $f(u, v) = 0$  e  $g(u, v) = 0$ . Pontos de interseção destas duas curvas definem estados estacionários homogêneos no espaço. Consideraremos aqui a cinética proposta por Schnackenberg (1979):

$$f(u, v) = a - u + u^2v \quad (21.3)$$

$$g(u, v) = b - u^2v \quad (21.4)$$

onde  $a$  e  $b$  são duas constantes. Estados uniformes de sistemas que obedecem à cinética de Schnackenberg evoluem portanto de acordo com as equações:

$$\frac{du}{dt} = a - u + u^2v$$

$$\frac{dv}{dt} = b - u^2v$$

o comportamento descrito por esta cinética pode ser descrito da seguinte forma: inicialmente, quando as concentrações de  $u$  e  $v$  são muito pequenas, ambas as aumentam de forma constante no tempo, com taxas iguais a  $a$  e a  $b$ , que são os termos dominantes nas Eqs. (21.3) e (21.4). Na etapa seguinte as concentrações de  $u$  e  $v$  ainda são pequenas de modo que os efeitos do termo  $u^2v$  ainda não se fazem sentir. A concentração baixa de  $u$  inibe seu próprio crescimento e a de  $v$  segue aumentando. Quando a concentração de  $v$  atinge um nível suficientemente elevado passa a favorecer o crescimento de  $u$ , através do termo não-linear  $u^2v$ . Esta etapa se caracteriza por um efeito *auto-catalítico*, em que a presença de  $u$  favorece seu próprio crescimento. Finalmente, concentrações elevadas de  $u$  atuam no sentido de reduzir a de  $v$ , o que limita a ação do mecanismo auto-catalítico e a concentração de  $u$  diminui.

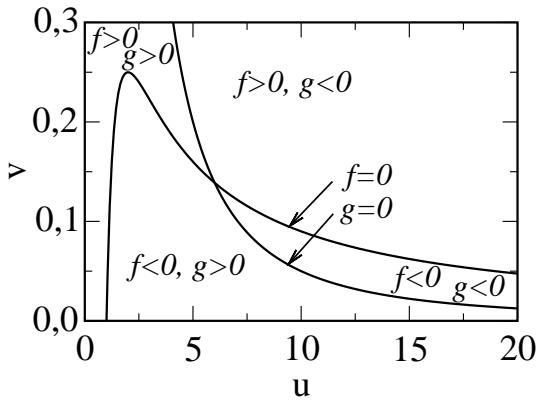


Figura 21.2: Curvas de  $f(u, v) = 0$  e  $g(u, v) = 0$  da cinética de Schnackenberg.

Quando as concentrações de  $u$  e  $v$  não variam nem no tempo nem no espaço tem-se  $f(u, v) = a - u^2 + u^2v = 0$  e  $g(u, v) = b - u^2v = 0$ . As curvas  $f(u, v) = 0$  e  $g(u, v) = 0$  da cinética de Schnackenberg estão representadas de forma esquemática na Fig.(21.2) e se cruzam no ponto  $(u_0, v_0)$ , que define o estado estacionário e uniforme no espaço.

Determinamos inicialmente as condições para a estabilidade linear do estado estacionário com relação a pequenas perturbações uniformes no espaço. Para isto superponemos uma perturbação da forma abaixo e seguimos sua evolução.

$$\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

Admitimos que  $\Re(\lambda) < 0$  para este tipo de perturbação. Sendo  $\Delta u$  e  $\Delta v$  pequenos o estado perturbado evolui no tempo obedecendo ao seguinte sistema de equações linearizadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u_0 + u_p) &= f(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial u}u_p + \frac{\partial f}{\partial v}v_p + D_1\nabla^2(u_0 + u_p) \\ \frac{\partial}{\partial t}(v_0 + v_p) &= g(u_0, v_0) + \frac{\partial g}{\partial u}u_p + \frac{\partial g}{\partial v}v_p + D_2\nabla^2(v_0 + v_p) \end{aligned}$$

onde as derivadas  $\partial f / \partial u$ ,  $\partial f / \partial v$ ,  $\partial g / \partial u$  e  $\partial g / \partial v$  são calculadas no ponto  $(u_0, v_0)$ . Como  $\partial u_0 / \partial t = \partial v_0 / \partial t = 0$ ,  $f(u_0, v_0) = g(u_0, v_0) = 0$  e a perturbação não varia no espaço as equações de evolução do estado perturbado tomam a forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(e^{\lambda t}\Delta u) &= \frac{\partial f}{\partial u}e^{\lambda t}\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}e^{\lambda t}\Delta v \\ \frac{\partial}{\partial t}(e^{\lambda t}\Delta v) &= \frac{\partial g}{\partial u}e^{\lambda t}\Delta u + \frac{\partial g}{\partial v}e^{\lambda t}\Delta v \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned}\lambda(e^{\lambda t} \Delta u) &= \frac{\partial f}{\partial u} e^{\lambda t} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial v} e^{\lambda t} \Delta v \\ \lambda(e^{\lambda t} \Delta v) &= \frac{\partial g}{\partial u} e^{\lambda t} \Delta u + \frac{\partial g}{\partial v} e^{\lambda t} \Delta v\end{aligned}$$

simplificando o fator  $e^{\lambda t}$  e reescrevendo o sistema resultante em forma matricial temos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \quad (21.5)$$

A eq. (21.5) caracteriza um problema de auto-valores e auto-vetores que pode ser reescrito como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} - \lambda & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Denominamos  $L$  a matriz do membro esquerdo da eq. (21.5). Para que  $\Delta u$  e  $\Delta v$  admitam solução diferente da trivial é necessário que  $\det(L - \lambda \mathbf{I}) = 0$ , isto é, que:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} - \lambda & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

A imposição desta condição resulta na seguinte equação característica:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial u} - \lambda \right) \left( \frac{\partial g}{\partial v} - \lambda \right) - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

Rearranjando os termos:

$$\lambda^2 - \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) \lambda + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

O coeficiente do termo que multiplica  $\lambda$  é o traço da matriz  $L$ , que representamos por  $\text{tr}(L)$  enquanto o termo independente de  $\lambda$  é o determinante de  $L$ . A equação característica pode ser reescrita então como:

$$\lambda^2 - \text{tr}(L)\lambda + \det(L) = 0$$

O estado uniforme é *estável* se as duas raízes da equação característica forem negativas, pois neste caso a perturbação decrescerá exponencialmente no tempo. Esta condição é satisfeita se a soma das raízes for negativa e se o produto das mesmas for positivo, isto é, se:

$$\text{tr}(L) = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} < 0 \quad (21.6)$$

$$\det(L) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} > 0 \quad (21.7)$$

O mecanismo de Turing pressupõe que estas duas condições sejam satisfeitas.

Determinaremos agora as condições para que uma perturbação periódica nas direções  $x$  e  $y$  seja *instável*, sendo válidas as condições dadas pelas Eqs. (21.6) e (21.7).

Consideremos uma perturbação da forma:

$$\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} e^{\lambda t} e^{i(\kappa_x x + \kappa_y y)} + c.c. = \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + c.c.$$

onde  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \kappa_x x + \kappa_y y$ .  $\kappa_x, \kappa_y$  são as componentes do vetor de onda  $\mathbf{k}$  e *c.c.* indica o complexo conjugado do termo precedente. A soma da função complexa acima com seu complexo conjugado resulta em uma perturbação *real* e periódica no espaço, pois contém o seno e o cosseno de  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ . Sendo a perturbação pequena, evolui obedecendo a um sistema de equações lineares. Nestas condições podemos estudar a evolução de cada parcela isoladamente. O comportamento da perturbação é dado pela soma dos comportamentos de cada uma das parcelas. Superpondo uma parcela da perturbação ao estado  $(u_0, v_0)$  e substituindo o resultado nas Eqs. (21.1) e (21.2) linearizadas obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u_0 + u_p) &= f(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial u}u_p + \frac{\partial f}{\partial v}v_p + D_1 \nabla^2(u_0 + u_p) \\ \frac{\partial}{\partial t}(v_0 + v_p) &= g(u_0, v_0) + \frac{\partial g}{\partial u}u_p + \frac{\partial g}{\partial v}v_p + D_2 \nabla^2(v_0 + v_p) \end{aligned}$$

Como  $\partial u_0 / \partial t = \partial v_0 / \partial t = 0$ ,  $f(u_0, v_0) = g(u_0, v_0) = 0$ ,  $\nabla^2 u_0 = 0$  e  $\nabla^2 v_0 = 0$  as equações de evolução do estado perturbado tomam a forma:

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta u &= \frac{\partial f}{\partial u} e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial v} e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta v - D_1(\kappa_x^2 + \kappa_y^2) e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta u \\ \lambda e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta v &= \frac{\partial g}{\partial u} e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta u + \frac{\partial g}{\partial v} e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta v - D_2(\kappa_x^2 + \kappa_y^2) e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta v \end{aligned}$$

Dividindo ambas as equações por  $e^{\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  e notando que  $\kappa_x^2 + \kappa_y^2 = \kappa^2$  é o *módulo* do vetor de onda da perturbação, obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda \Delta u &= \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v - D_1 \kappa^2 \Delta u \\ \lambda \Delta v &= \frac{\partial g}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial g}{\partial v} \Delta v - D_2 \kappa^2 \Delta v \end{aligned}$$

Reescrevendo o sistema em forma matricial temos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} - D_1 \kappa^2 & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} - D_2 \kappa^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \quad (21.8)$$

A eq. (21.8) caracteriza um problema de auto-valores e auto-vetores que pode ser reescrito como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} - D_1 \kappa^2 - \lambda & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} - D_2 \kappa^2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para que  $\Delta u$  e  $\Delta v$  admitam solução diferente da trivial é necessário que:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} - D_1 \kappa^2 - \lambda & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} - D_2 \kappa^2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Impondo esta condição chegamos à seguinte equação característica:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial u} - D_1 \kappa^2 - \lambda \right) \left( \frac{\partial g}{\partial v} - D_2 \kappa^2 - \lambda \right) - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

Desenvolvendo os termos da equação obtemos:

$$\lambda^2 + \left[ \kappa^2(D_1 + D_2) - \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) \right] \lambda + h(\kappa^2) = 0$$

onde:

$$h(\kappa^2) = \kappa^4 D_1 D_2 - \kappa^2 \left( D_1 \frac{\partial g}{\partial v} + D_2 \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u}$$

Um caso de instabilidade ocorre se a soma das raízes da equação característica for positiva, isto é, se:

$$\kappa^2(D_1 + D_2) - \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) < 0$$

Esta condição não é satisfeita pois  $\kappa^2(D_1 + D_2)$  e  $-(\partial f/\partial u + \partial g/\partial v) > 0$ , conforme Eqs. (21.6). A instabilidade de um modo só pode ocorrer portanto se o produto das raízes,  $h(\kappa^2)$ , isto é, se:

$$\kappa^4 D_1 D_2 - \kappa^2 \left( D_1 \frac{\partial g}{\partial v} + D_2 \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \det(L) < 0$$

Como  $\kappa^4 D_1 D_2$  e, pela eq. (21.7)  $\det(L) > 0$  é necessário porém não suficiente que:

$$D_1 \frac{\partial g}{\partial v} + D_2 \frac{\partial f}{\partial u} > 0$$

ou:

$$\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{D_2}{D_1} \frac{\partial f}{\partial u} > 0$$

No entanto, de acordo com a eq. (21.7)  $\partial f/\partial u + \partial g/\partial v < 0$ . O diagrama da Fig. (21.2) mostra que no ponto  $u_0, v_0$   $\partial f/\partial u > 0$  e que  $\partial g/\partial v < 0$ . Para que a relação acima seja satisfeita é necessário portanto que  $D_2/D_1 > 1$ . Tal condição é necessária mas não suficiente para a instabilidade de Turing. Para que a mesma ocorra é necessário também que o valor mínimo de  $h(\kappa^2) < 0$ . No ponto de mínimo:

$$\frac{\partial h}{\partial \kappa^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad 2\kappa^2 D_1 D_2 - \left( D_1 \frac{\partial g}{\partial v} + D_2 \frac{\partial f}{\partial u} \right) = 0$$

o valor de  $\kappa^2$  que minimiza a função  $h(\kappa^2)$  é dado por:

$$\kappa_{min}^2 = \frac{1}{2D_2} \left( \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{D_2}{D_1} \frac{\partial f}{\partial u} \right)$$

O valor mínimo de  $h(\kappa^2)$  é então:

$$h_{min} = \frac{D_1 D_2}{4 D_2^2} \left( \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{D_2}{D_1} \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 - \frac{1}{2 D_2} \left( \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{D_2}{D_1} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \left( D_1 \frac{\partial g}{\partial v} + D_2 \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \det(L)$$

ou, remanejando os termos:

$$h_{min} = -\frac{1}{4d} \left( \frac{\partial g}{\partial v} + d \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \det(L)$$

onde  $d = D_2/D_1$ . A condição de  $h_{min} < 0$  é portanto:

$$\det(L) < \frac{1}{4d} \left( \frac{\partial g}{\partial v} + d \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2$$

No ponto de bifurcação:

$$4d_c \det(L) = \left( \frac{\partial g}{\partial v} + d_c \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 \quad (21.9)$$

onde  $d_c$  é o valor crítico da relação  $D_2/D_1$ . Desenvolvendo os termos de  $\det(L)$  encontramos:

$$-4d_c \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} \right) + \left( \frac{\partial g}{\partial v} + d_c \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 = 0$$

ou ainda:

$$\frac{\partial f}{\partial u} d_c^2 + 2 \left( 2 \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} \right) + \left( \frac{\partial g}{\partial v} \right)^2 = 0$$

O valor crítico da relação entre os coeficientes de difusão,  $d_c$ , é dado pela raiz positiva da equação acima, enquanto que o número de onda crítico é igual a:

$$\kappa_c^2 = \frac{1}{2D_2} \left( \frac{\partial g}{\partial v} + d_c \frac{\partial f}{\partial u} \right)$$

Da eq. (21.9) obtemos:

$$\left( \frac{\partial g}{\partial v} + d_c \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 = 2(d_c \det(L))^{1/2}$$

O número de onda crítico pode portanto ser expresso como:

$$\kappa_c^2 = \frac{2(d_c \det(L))^{1/2}}{2D_2} \quad \longrightarrow \quad \kappa_c^2 = \left( \frac{\det(L)}{D_1 D_2} \right)^{1/2}$$

Deve-se notar que o comprimento de onda crítico só depende da cinética do sistema, através do  $\det(L)$  e dos coeficientes de difusão. Os limites da faixa de números de onda instáveis,  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  são dados pelas raízes da equação:

$$h(\kappa^2) = \kappa^4 D_1 D_2 - \kappa^2 \left( D_1 \frac{\partial g}{\partial v} + D_2 \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \det(L) = 0$$

ou ainda:

$$D_1 d\kappa^4 - \kappa^2 \left( \frac{\partial g}{\partial v} + d \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\det(L)}{D_1} = 0$$

Ou seja a faixa de números de onda instáveis está compreendida entre  $\kappa_1 \leq \kappa \leq \kappa_2$ , onde:

$$\kappa_{1,2} = \frac{1}{2d} \left\{ \left( \frac{\partial g}{\partial v} + d \frac{\partial f}{\partial u} \right) \pm \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial v} + d \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 - 4d \frac{\det(L)}{D_1} \right] \right\}$$

O estudo apresentado acima consistiu de uma *análise de estabilidade linear* do estado homogêneo no espaço  $(u_0, v_0)$ , em que determinamos os seguintes parâmetros:

- O ponto de bifurcação, isto é, o ponto do espaço de parâmetros além do qual pequenas perturbações periódicas deixam de ser amortecidas e passam a crescer exponencialmente no tempo;
- Em segundo lugar vimos que a perturbação instável tem forma senoidal e determinamos o comprimento de onda *crítico* da mais instável.

Em resumo as condições para a formação de uma estrutura de Turing são:

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} < 0 \quad \text{tr}(L) < 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} > 0 \quad \det(L) > 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} + d \frac{\partial f}{\partial u} > 0 \quad \text{Condição necessária para que o produto das raízes seja negativo}$$

$$\left( \frac{\partial g}{\partial v} + d \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 - 4d \det(L) > 0 \quad \text{Mínimo do produto das raízes negativo}$$

Esta análise determina uma condição *suficiente* para a instabilidade, pois pequenas perturbações estão sempre presentes em qualquer sistema físico. Cabe ressaltar que esta análise identifica o comprimento de onda crítico mas não sua orientação espacial. De fato, a análise de estabilidade linear determina uma infinidade de modos pois todas as orientações são igualmente prováveis a priori. Várias perguntas podem ser feitas neste ponto: O quê ocorre além do ponto de bifurcação? O crescimento do modo instável se satura? O comportamento do sistema além do ponto de bifurcação é de fato caracterizado pelos modos críticos? Qual a orientação da estrutura espacial que se forma além do ponto de bifurcação? A estrutura pode conter mais de um modo em cada ponto do espaço?

Nem todas as questões acima podem ser respondidas de forma geral. No entanto a experiência mostra que o comportamento de uma importante classe de sistemas se caracteriza pelos modos mais instáveis e as estruturas de Turing se encontram nesta classe. Tais sistemas denominam-se *fracamente não-lineares*. Outros exemplos de sistemas fracamente não-lineares são painéis metálicos que *flambam* sob efeito de carregamento, padrões morfológicos encontrados em sistemas biológicos, em ciência de materiais, etc. Para estes sistemas faz sentido que se procure determinar como evoluí no tempo e como se satura a *amplitude* dos modos críticos. Esse estudo é objeto de intensa atividade de pesquisa na física contemporânea.



# Capítulo 22

## Computação Simbólica na Análise de Estabilidade Linear

Leonardo S. de B. Alves  
*Laboratório de Mecânica Teórica e Aplicada*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*  
*Universidade Federal Fluminense*

Sílvia C. Hirata  
*Laboratoire de Mécanique de Lille*  
*Université Lille 1*

### 22.1 Introdução

A análise de estabilidade possui mais de cem anos de idade na história da ciência. Seus princípios fundamentais foram introduzidos por Jules Henri Poincaré no final do século XIX, sendo logo depois consolidados por Aleksandr Mikhaïlovich Lyapunov na área de sistemas dinâmicos. Sua utilidade na dinâmica dos fluidos foi percebida na mesma época com os estudos experimentais realizados por Osborne Reynolds, um dos pioneiros na descoberta do comportamento caótico. A área de fenômenos de transporte, em geral, lida com sistemas praticamente infinitos, tornando extremamente complicada a sua análise. Isto levou ao desenvolvimento e estudo dos sistemas de baixa dimensão. Estes são versões simplificadas do sistema original, que conservam suas características principais, porém possuem um número reduzido de graus de liberdade. Um dos pioneiros do estudo de tais sistemas foi Edward Norton Lorenz, que na metade do século XX introduziu o conceito de caos determinístico.

Já na segunda metade do século XX, diversos problemas canônicos em fenômenos de transporte foram estudados sob a ótica da análise de estabilidade linear, e podem ser encontrados em livros hoje considerados clássicos sobre o assunto [25, 53]. Com a virada do século, problemas ainda mais complexos começaram a ser abordados e ferramentas ainda mais poderosas foram desenvolvidas para análise de estabilidade destes escoamentos [142, 38]. Um dos principais exemplos, criado pelo aumento incessante de complexidade dos problemas científicos relevantes nesta área, foi o inevitável uso de sistemas avançados para computação

simbólica, como o software *Mathematica* [169]. Um dos primeiros trabalhos a utilizar esta ferramenta neste contexto simulou a convecção natural de fluidos Newtonianos em meios porosos [43]. Ele foi usado ainda na análise de estabilidade linear deste problema [44], que estendeu o sistema original de Lorenz para incluir mais graus de liberdade. O presente capítulo, pretende ilustrar os potenciais benefícios que podem ser obtidos ao utilizarmos computação simbólica [146, 36] na análise de estabilidade térmica e/ou hidrodinâmica em fenômenos de transporte.

## 22.2 Convecção Mista de Fluidos Viscoelásticos em Meios Porosos

Para atingir este objetivo, iremos considerar a convecção mista de fluidos viscoelásticos em meios porosos. Ela pode ser encontrada em diversos campos da engenharia, como por exemplo no processo de extração do petróleo, uma área de enorme interesse nacional. Neste problema, os gradientes geotérmicos têm papel fundamental. A eficácia do processo de extração depende da natureza física do petróleo bruto presente no reservatório. Caso este seja leve, contendo alcanos, seu comportamento é essencialmente Newtoniano. Já o petróleo pesado contém uma quantidade significativa de hidrocarbonetos aromáticos, o que o torna um fluido não-Newtoniano. Em reservatórios pouco profundos, o óleo está impregnado de parafina, que por sua vez apresenta um comportamento viscoelástico.

### 22.2.1 Fluido Viscoelástico

Fluidos viscoelásticos apresentam propriedades elásticas, porém associadas a um caráter viscoso. Vários exemplos de fluidos viscoelásticos podem ser encontrados na vida cotidiana. Entre eles, podemos citar: o sangue, os produtos leiteiros, cosméticos e farmacêuticos, as soluções poliméricas, entre outros. O modelo conhecido como Oldroyd-B apresenta a mais simples equação constitutiva capaz de descrever o comportamento de fluidos viscoelásticos, e é definido como

$$\tau + \lambda_1 \frac{\mathcal{D}\tau}{\mathcal{D}t} = \mu \left( \dot{\gamma} + \lambda_2 \frac{\mathcal{D}\dot{\gamma}}{\mathcal{D}t} \right) , \quad (22.1)$$

onde  $\tau$  representa o tensor de tensões,  $\dot{\gamma}$  o tensor de deformações,  $\mu$  a viscosidade dinâmica do fluido,  $\lambda_1$  o tempo de relaxação e  $\lambda_2$  o tempo de retardaçāo do fluido viscoelástico. O operador  $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$  representa a derivada material superior. Esta, quando aplicada a um campo tensorial arbitrário  $\mathcal{A}$ , toma a forma

$$\frac{\mathcal{D}\mathcal{A}}{\mathcal{D}t} = \frac{D\mathcal{A}}{Dt} - (\mathbf{grad} \mathbf{v})^T \cdot \mathcal{A} - \mathcal{A} \cdot (\mathbf{grad} \mathbf{v}) , \quad (22.2)$$

onde  $D/Dt$  é a derivada material e  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade. Vale notar que o modelo de Oldroyd-B se reduz à equação constitutiva de um fluido Newtoniano se  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

### 22.2.2 Convecção em Meios Porosos

O sistema em questão é composto por um meio poroso homogêneo, de extensão horizontal infinita e altura  $H$ , saturado por um fluido viscoelástico do tipo Oldroyd-B. As paredes inferior e superior são mantidas respectivamente à temperaturas constantes  $T_0^*$  e  $T_1^* < T_0^*$ . Além disso, impõe-se a este sistema um escoamento horizontal com velocidade uniforme  $V^*$ . Supondo que esta velocidade é baixa, os termos de inércia e difusão viscosa podem ser desprezados. Desta forma, assumindo que a hipótese de Boussinesq é satisfeita, temos o seguinte modelo matemático que governa o problema resultante: conservação de massa na forma da equação da continuidade, conservação de movimento linear na forma da lei de Darcy adaptada à fluidos viscoelásticos, e a conservação da energia na forma não-conservativa para temperatura. Elas podem ser escritas na forma adimensional usando as seguintes grandezas características:  $H$  para comprimento,  $H^2(\rho c)_{sf}/\lambda_{sf}$  para tempo,  $T_0^* - T_1^*$  para temperatura,  $\lambda_{sf}/(H(\rho c)_f)$  para velocidade e  $\lambda_{sf}\mu_f/(K(\rho c)_f)$  para a pressão. Assim, quatro parâmetros adimensionais se destacam: os números de Rayleigh  $Ra = K\alpha_fgH(T_0^* - T_1^*)(\rho c)_f/(\lambda_{sf}\nu)$  e Péclet  $Pe = V^*(\rho c)_f/\lambda_{sf}$ , além dos tempos de relaxação  $\lambda_1 = \lambda_1^*\lambda_{sf}/H^2(\rho c)_{sf}$  e retardação  $\lambda_2 = \lambda_2^*\lambda_{sf}/H^2(\rho c)_{sf}$ . Nestas expressões,  $\lambda_{sf}$  representa a condutividade térmica equivalente do meio poroso,  $(\rho c)_{sf}$  e  $(\rho c)_f$  as respectivas capacidades caloríficas por unidade de volume do meio poroso e do fluido,  $K$  a permeabilidade do meio poroso e  $\alpha_f$  o coeficiente de expansão térmica do fluido. Maiores detalhes estão disponíveis na literatura caso necessário [78, 79].

## 22.3 Computação Simbólica

Tendo provido maiores detalhes sobre o problema exemplo que iremos utilizar, podemos nos voltar novamente para o foco principal deste capítulo. Nas próximas seções, computação simbólica será usada na obtenção da relação de dispersão do escoamento discutido acima, partindo de suas equações de governo. O software *Mathematica* será utilizado para este fim, e supõe-se que o leitor esteja familiarizado com seus comandos básicos [146]. A escolha dos autores foi baseada na experiência adquirida no uso do *Mathematica* em trabalhos precedentes, apesar de outras alternativas para a computação simbólica existirem.

O primeiro passo envolve a modificação de algumas das funções internas essenciais. Isto é feito apenas para facilitar certas etapas deste processo de álgebra computacional simbólica que virão a seguir.

■ Removendo a proteção imposta a funções internas específicas:

```
In[1]:= Unprotect[Plus, Coefficient, Times];
```

■ Acrescentando soma e subtração entre equações:

```
In[2]:= Plus[Equal[a_, b_], Equal[c_, d_]] := Equal[Plus[a, c], Plus[b, d]]
Plus[Equal[a_, b_], Times[-1, Equal[c_, d_]]] := Equal[Subtract[a, c], Subtract[b, d]]
```

■ Acrescentando multiplicação de um escalar arbitrário por uma equação:

```
In[4]:= Times[a_, Equal[b_, c_]] := Equal[Times[a, b], Times[a, c]]
```

Extraindo coeficientes em evidência de equações:

```
In[5]:= Coefficient[Equal[a_, b_], c_] := Equal[Coefficient[a, c], Coefficient[b, c]]
Coefficient[Equal[a_, b_], c_, d_] := Equal[Coefficient[a, c, d], Coefficient[b, c, d]]
```

Retornando a proteção imposta as funções internas modificadas:

```
In[7]:= Protect[Plus, Coefficient, Times];
```

### 22.3.1 Equações de Governo

Além de simplificar a manipulação de equações algébricas e/ou diferenciais quase sempre complexas, a computação simbólica praticamente elimina erro humano quando utilizada de maneira apropriada. Sinais trocados ou termos esquecidos de uma linha para outra numa derivação tradicional com papel e caneta são problemas comuns que podem ser evitados. Isso nos leva a um dos princípios fundamentais que devem guiar o uso deste tipo de ferramenta. O usuário deve evitar, sempre que possível, a introdução de informações que poderiam ser obtidas pela própria ferramenta. No exemplo em questão deste capítulo, é preciso iniciar a derivação digitando as equações de governo

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad , \quad (22.3)$$

$$(1 + \lambda_2 \partial_t) \mathbf{u} + (1 + \lambda_1 \partial_t) (\operatorname{grad} P - Ra T \mathbf{e}_z) = 0 \quad \text{e} \quad (22.4)$$

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} T - \nabla^2 T = 0 \quad , \quad (22.5)$$

para conservação de massa, movimento linear e energia, respectivamente. Este passo, que é inevitável, é feito abaixo.

Equação da continuidade:

```
In[8]:= a0 = D[u[x, y, z, t], x] + D[v[x, y, z, t], y] + D[w[x, y, z, t], z] == 0
```

```
Out[8]= w^(0,0,1,0)(x, y, z, t) + v^(0,1,0,0)(x, y, z, t) + u^(1,0,0,0)(x, y, z, t) == 0
```

Equação de Darcy para fluidos viscoelásticos:

```
In[9]:= a1 = {u[x, y, z, t] + λ2 * D[u[x, y, z, t], t] + D[P[x, y, z, t], x] + λ1 * D[P[x, y, z, t], x, t]
          == 0, v[x, y, z, t] + λ2 * D[v[x, y, z, t], t] + D[P[x, y, z, t], y] + λ1 * D[P[x, y, z, t], y, t]
          == 0, w[x, y, z, t] + λ2 * D[w[x, y, z, t], t] + D[P[x, y, z, t], z] + λ1 * D[P[x, y, z, t], z, t]
          - λ1 * Ra * D[T[x, y, z, t], t] == Ra * T[x, y, z, t]}
```

```
Out[9]= {u(x, y, z, t) + λ2 u^(0,0,0,1)(x, y, z, t) + P^(1,0,0,0)(x, y, z, t) + λ1 P^(1,0,0,1)(x, y, z, t) == 0,
```

$$\begin{aligned} v(x, y, z, t) + \lambda_2 v^{(0,0,0,1)}(x, y, z, t) + p^{(0,1,0,0)}(x, y, z, t) + \lambda_1 p^{(0,1,0,1)}(x, y, z, t) = 0, \\ w(x, y, z, t) - Ra \lambda_1 T^{(0,0,0,1)}(x, y, z, t) + \lambda_2 w^{(0,0,0,1)}(x, y, z, t) + p^{(0,0,1,0)}(x, y, z, t) + \lambda_1 \\ p^{(0,0,1,1)}(x, y, z, t) = Ra T(x, y, z, t) \end{aligned}$$

Equação da energia:

$$\begin{aligned} \text{In[10]:= } a2 &= D[T[x, y, z, t], t] + u[x, y, z, t] * D[T[x, y, z, t], x] + v[x, y, z, t] * D[T[x, y, z, t], y] + \\ &w[x, y, z, t] * D[T[x, y, z, t], z] == D[D[T[x, y, z, t], x], x] + D[D[T[x, y, z, t], y], y] + \\ &D[D[T[x, y, z, t], z], z] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Out[10]= } T^{(0,0,0,1)}(x, y, z, t) + w(x, y, z, t) T^{(0,0,1,0)}(x, y, z, t) + v(x, y, z, t) T^{(0,1,0,0)}(x, y, z, t) + u(x, y, z, t) \\ T^{(1,0,0,0)}(x, y, z, t) = T^{(0,0,2,0)}(x, y, z, t) + T^{(0,2,0,0)}(x, y, z, t) + T^{(2,0,0,0)}(x, y, z, t) \end{aligned}$$

## Escoamento Base

As equações de governo do escoamento base também são necessárias. Contudo, seguindo o princípio fundamental mencionado acima, elas não devem ser digitadas novamente. Para obtê-las, podemos simplesmente impor que os potenciais destas equações não dependem mais do tempo. Fazemos isso abaixo, lembrando de mudar seus nomes, uma vez que agora estes potenciais representam o escoamento base.

Regra para eliminar dependência temporal dos potenciais originais:

$$\begin{aligned} \text{In[11]:= } \text{regra01} &= \{u \rightarrow (ub[\#1, \#2, \#3]\&), v \rightarrow (vb[\#1, \#2, \#3]\&), w \rightarrow (wb[\#1, \#2, \#3]\&), \\ &P \rightarrow (Pb[\#1, \#2, \#3]\&), T \rightarrow (Tb[\#1, \#2, \#3]\&)\}; \end{aligned}$$

Equação da continuidade para o escoamento base:

$$\text{In[12]:= } b0 = \text{Expand}[a0/.\text{regra01}]$$

$$\text{Out[12]= } wb^{(0,0,1,0)}(x, y, z) + vb^{(0,1,0,0)}(x, y, z) + ub^{(1,0,0,0)}(x, y, z) = 0$$

Equação de Darcy para fluidos viscoelásticos para o escoamento base:

$$\text{In[13]:= } b1 = \text{Expand}[a1/.regra01]$$

$$\begin{aligned} \text{Out[13]= } \{ub(x, y, z) + Pb^{(1,0,0)}(x, y, z) = 0, vb(x, y, z) + Pb^{(0,1,0)}(x, y, z) = 0, \\ wb(x, y, z) + Pb^{(0,0,1)}(x, y, z) = Ra Tb(x, y, z)\} \end{aligned}$$

Equação da energia para o escoamento base:

$$\text{In[14]:= } b2 = \text{Expand}[a2/.regra01]$$

$$\begin{aligned} \text{Out[14]= } wb(x, y, z) Tb^{(0,0,1)}(x, y, z) + vb(x, y, z) Tb^{(0,1,0)}(x, y, z) + ub(x, y, z) Tb^{(1,0,0)}(x, y, z) = \\ Tb^{(0,0,2)}(x, y, z) + Tb^{(0,2,0)}(x, y, z) + Tb^{(2,0,0)}(x, y, z) \end{aligned}$$

Estas equações são importantes na derivação do sistema que governa o comportamento das perturbações, mostrada mais a frente. Contudo, elas ainda podem ser úteis na avaliação do escoamento base em si. Definimos o escoamento base escolhido como

$$\mathbf{u}_b = Pe \cdot \mathbf{e}_x, \quad T_b = 1 - z, \quad P_b = Ra(z - z^2/2) - Pe x + \text{cte} , \quad (22.6)$$

que representa um regime de condução estacionário, com um perfil de velocidade uniforme imposto na entrada, cuja estabilidade linear será analisada posteriormente. Verificamos agora se esta escolha satisfaz as equações acima.

■ Regra que define o escoamento base:

```
In[15]:= regra02 = {ub → (Pe &), vb → (0 &), wb → (0 &), Tb → (1 - #3 &),
Pb → (Ra * (#3 - #3^2/2) - Pe * #1 + cte &)};
```

■ Verificação da equação da continuidade:

```
In[16]:= b0/.regra02
```

```
Out[16]= True
```

■ Verificação da equação de Darcy para fluidos viscoelásticos:

```
In[17]:= b1/.regra02
```

```
Out[17]= {True, True, True}
```

■ Verificação da equação da energia:

```
In[18]:= b2/.regra02
```

```
Out[18]= True
```

## Perturbação

Podemos agora derivar as equações para as perturbações, como recomendado, ao invés de simplesmente digitá-las. O caso genérico para um escoamento base arbitrário em regime permanente será considerado. Esta escolha facilita o uso dos passos apresentados aqui com computação simbólica para outros problemas. Simplificações para o escoamento base definido na **regra02** serão feitas posteriormente. Começamos separando base e perturbação, para então subtrair as equações do escoamento base do resultado.

■ Regra para separar escoamento base de perturbação:

```
In[19]:= regra03 = {u → (ub[#1, #2, #3] + ε * up[#1, #2, #3, #4]&), v → (vb[#1, #2, #3] +
ε * vp[#1, #2, #3, #4]&), w → (wb[#1, #2, #3] + ε * wp[#1, #2, #3, #4]&),
```

$P \rightarrow (Pb[\#1, \#2, \#3] + \epsilon * Pp[\#1, \#2, \#3, \#4] \&), T \rightarrow (Tb[\#1, \#2, \#3] + \epsilon * Tp[\#1, \#2, \#3, \#4] \&);$

Equação da continuidade para a perturbação:

In[20]:=  $c0 = \text{Collect}[\text{Subtract}[\text{Expand}[a0/.regra03], b0], \epsilon]$

Out[20]=  $\epsilon (wp^{(0,0,1,0)}(x, y, z, t) + vp^{(0,1,0,0)}(x, y, z, t) + up^{(1,0,0,0)}(x, y, z, t)) = 0$

Equação de Darcy para fluidos viscoelásticos para a perturbação:

In[21]:=  $c1 = \text{Collect}[\text{Subtract}[\text{Expand}[a1/.regra03], b1], \epsilon]$

Out[21]=  $\{\epsilon (up(x, y, z, t) + \lambda2 up^{(0,0,0,1)}(x, y, z, t) + Pp^{(1,0,0,0)}(x, y, z, t) + \lambda1 Pp^{(1,0,0,1)}(x, y, z, t)) = 0,$   
 $\epsilon (vp(x, y, z, t) + \lambda2 vp^{(0,0,0,1)}(x, y, z, t) + Pp^{(0,1,0,0)}(x, y, z, t) + \lambda1 Pp^{(0,1,0,1)}(x, y, z, t)) = 0,$   
 $\epsilon (wp(x, y, z, t) - Ra \lambda1 Tp^{(0,0,0,1)}(x, y, z, t) + \lambda2 wp^{(0,0,0,1)}(x, y, z, t) + Pp^{(0,0,1,0)}(x, y, z, t) +$   
 $\lambda1 Pp^{(0,0,1,1)}(x, y, z, t)) = Ra \epsilon Tp(x, y, z, t)\}$

Equação da energia para a perturbação:

In[22]:=  $c2 = \text{Collect}[\text{Subtract}[\text{Expand}[a2/.regra03], b2], \epsilon]$

Out[22]=  $(wp(x, y, z, t) Tp^{(0,0,1,0)}(x, y, z, t) + vp(x, y, z, t) Tp^{(0,1,0,0)}(x, y, z, t) + up(x, y, z, t)$   
 $Tp^{(1,0,0,0)}(x, y, z, t))\epsilon^2 + (wp(x, y, z, t) Tb^{(0,0,1)}(x, y, z) + vp(x, y, z, t) Tb^{(0,1,0)}(x, y, z) +$   
 $up(x, y, z, t) Tb^{(1,0,0)}(x, y, z) + Tp^{(0,0,0,1)}(x, y, z, t) + wb(x, y, z) Tp^{(0,0,1,0)}(x, y, z, t) + vb(x, y, z)$   
 $Tp^{(0,1,0,0)}(x, y, z, t) + ub(x, y, z) Tp^{(1,0,0,0)}(x, y, z, t))\epsilon = \epsilon (Tp^{(0,0,2,0)}(x, y, z, t) +$   
 $Tp^{(0,2,0,0)}(x, y, z, t) + Tp^{(2,0,0,0)}(x, y, z, t))$

### 22.3.2 Análise de Estabilidade

Primeiro, definimos na **regra02** o escoamento base a ser estudado. Depois, passamos as equações de conservação de massa **c0**, movimento linear **c1** e energia **c2** que controlam o comportamento de uma perturbação com magnitude de  $O(\epsilon)$  imposta a este escoamento base. Podemos, agora, iniciar a análise de estabilidade deste.

## Linearização

O parâmetro  $\epsilon$ , que representa a (pequena) amplitude da perturbação, foi introduzido na **regra03** ao separarmos escoamento base de perturbação nos potenciais originais. Isto foi feito apenas para auxiliar a distinção entre os termos lineares, que possuem  $O(\epsilon)$ , dos não-lineares, que possuem  $O(\epsilon^2)$  e/ou maior, das equações resultantes. Isto é feito logo abaixo, onde retemos apenas os termos com  $O(\epsilon)$ , efetivamente linearizando estas equações.

Equação da continuidade linearizada para a perturbação:

In[23]:= d0 = Coefficient[c0,  $\epsilon$ ]

Out[23]=  $wp^{(0,0,1,0)}(x, y, z, t) + vp^{(0,1,0,0)}(x, y, z, t) + up^{(1,0,0,0)}(x, y, z, t) = 0$

Equação de Darcy linearizada para fluidos viscoelásticos para a perturbação:

In[24]:= d1 = Coefficient[c1,  $\epsilon$ ]

Out[24]=  $\{up(x, y, z, t) + \lambda_2 up^{(0,0,0,1)}(x, y, z, t) + pp^{(1,0,0,0)}(x, y, z, t) + \lambda_1 pp^{(1,0,0,1)}(x, y, z, t) = 0,$   
 $vp(x, y, z, t) + \lambda_2 vp^{(0,0,0,1)}(x, y, z, t) + pp^{(0,1,0,0)}(x, y, z, t) + \lambda_1 pp^{(0,1,0,1)}(x, y, z, t) = 0,$   
 $wp(x, y, z, t) - Ra \lambda_1 tp^{(0,0,0,1)}(x, y, z, t) + \lambda_2 wp^{(0,0,0,1)}(x, y, z, t) + pp^{(0,0,1,0)}(x, y, z, t) + \lambda_1$   
 $pp^{(0,0,1,1)}(x, y, z, t) = Ra tp(x, y, z, t)\}$

Equação da energia linearizada para a perturbação:

In[25]:= d2 = Coefficient[c2,  $\epsilon$ ]

Out[25]=  $wp(x, y, z, t) Tb^{(0,0,1)}(x, y, z) + vp(x, y, z, t) Tb^{(0,1,0)}(x, y, z) + up(x, y, z, t) Tb^{(1,0,0)}(x, y, z) +$   
 $Tp^{(0,0,0,1)}(x, y, z, t) + wb(x, y, z) Tp^{(0,0,1,0)}(x, y, z, t) + vb(x, y, z) Tp^{(0,1,0,0)}(x, y, z, t) + ub(x, y, z)$   
 $Tp^{(1,0,0,0)}(x, y, z, t) = Tp^{(0,0,2,0)}(x, y, z, t) + Tp^{(0,2,0,0)}(x, y, z, t) + Tp^{(2,0,0,0)}(x, y, z, t)$

## Modo Normal

Outra simplificação bastante comum neste tipo de análise assume que a perturbação linear se comporta como um modo de Fourier desacoplado, i.e., normal ou ortogonal a outros modos. Como o problema possui periodicidade em duas direções espaciais, podemos dizer que a amplitude deste modo depende apenas da única direção não-homogênea. Assim sendo, assume-se que a solução é da forma

$$(u_p, v_p, w_p, P_p, T_p) = (u_n(z), v_n(z), w_n(z), P_n(z), T_n(z)) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}, \quad (22.7)$$

onde  $k_x$  e  $k_y$  representam respectivamente os números de onda nas direções  $x$  e  $y$ ,  $Re[\omega]$  representa a frequência da perturbação e  $Im[\omega]$  representa a sua taxa de crescimento temporal. Estas hipóteses nos levam às equações simplificadas abaixo.

Regra para criar modo normal:

```
In[26]:= regra04 = {up → (un[#3] * exp[I * (kx * #1 + ky * #2 - ω * #4)]&), vp → (vn[#3]*exp[I * (kx * #1 + ky * #2 - ω * #4)]&), wp → (wn[#3] * exp[I * (kx * #1+ky * #2 - ω * #4)]&), Pp → (Pn[#3] * exp[I * (kx * #1 + ky * #2 - ω * #4)]&), Tp → (Tn[#3] * exp[I * (kx * #1 + ky * #2 - ω * #4)]&)};
```

Equação da continuidade para a amplitude do modo normal:

```
In[27]:= e0 = ExpandAll[Times[exp[-I * (kx * x + ky * y - ω * t)], d0/.regra04]]
Out[27]= i kx un(z) + i ky vn(z) + wn'(z) = 0
```

Equação de Darcy para fluidos viscoelásticos para a amplitude do modo normal:

```
In[28]:= e1 = ExpandAll[Times[exp[-I * (kx * x + ky * y - ω * t)], d1/.regra04]]
Out[28]= {i kx Pn(z) + kx λ1 ω Pn(z) - i λ2 ω un(z) + un(z) = 0,
          i ky Pn(z) + ky λ1 ω Pn(z) - i λ2 ω vn(z) + vn(z) = 0,
          i Ra λ1 ω Tn(z) - i λ2 ω wn(z) + wn(z) - i λ1 ω Pn'(z) + Pn'(z) = Ra Tn(z)}
```

Equação da energia para a amplitude do modo normal:

```
In[29]:= e2 = ExpandAll[Times[exp[-I * (kx * x + ky * y - ω * t)], d2/.regra04]]
Out[29]= -i ω Tn(z) + i kx ub(x, y, z) Tn(z) + i ky vb(x, y, z) Tn(z) + wb(x, y, z) Tn'(z)
          + wn(z) Tb(0,0,1)(x, y, z) + vn(z) Tb(0,1,0)(x, y, z) + un(z) Tb(1,0,0)(x, y, z) =
          -kx2 Tn(z) - ky2 Tn(z) + Tn''(z)
```

## Prescrevendo Amplitude

Os problemas de estabilidade do tipo Rayleigh-Bénard possuem soluções hoje consideradas clássicas. Elas são construídas na forma de expansões em séries, que utilizam funções base ortogonais que satisfazem as condições de contorno. Desta forma, podemos impor uma solução aproximada para a dependência das amplitudes com a direção não-homogênea, simplificando ainda mais o problema a ser resolvido. Esta aproximação leva em consideração apenas o primeiro termo da expansão para cada potencial. Isto é feito a seguir.

Regra para prescrever a amplitude da perturbação linear e normal:

```
In[30]:= regra05 = {un → (u1 * cos[π #]&), vn → (v1 * sin[π #]&), wn → (w1 * sin[π #]&),
Pn → (P1 * cos[π #]&), Tn → (T1 * sin[π #]&)}
```

Equação da continuidade para a amplitude prescrita:

```
In[31]:= f0 = e0/.regra05
```

```
Out[31]= i kx u1 cos(π z) + π w1 cos(π z) + i ky v1 sin(π z) = 0
```

Equação de Darcy para fluidos viscoelásticos para a amplitude prescrita:

```
In[32]:= f1 = e1/.regra05
```

```
Out[32]= {i kx P1 cos(π z) + u1 cos(π z) + kx P1 λ1 ω cos(π z) - i u1 λ2 ω cos(π z) = 0, i ky P1 cos(π z) +
ky P1 λ1 ω cos(π z) + v1 sin(π z) - i v1 λ2 ω sin(π z) = 0, w1 sin(π z) + i Ra T1 λ1 ω sin(π z) +
i P1 π λ1 ω sin(π z) - i w1 λ2 ω sin(π z) - P1 π sin(π z) = Ra T1 sin(π z)}
```

Equação da energia para a amplitude prescrita:

```
In[33]:= f2 = e2/.regra05
```

```
Out[33]= -i T1 ω sin(π z) + i kx T1 ub(x, y, z) sin(π z) + i ky T1 vb(x, y, z) sin(π z) + w1 Tb^(0,0,1)(x, y, z)
sin(π z) + v1 Tb^(0,1,0)(x, y, z) sin(π z) + π T1 cos(π z) wb(x, y, z) + u1 cos(π z) Tb^(1,0,0)(x, y, z) =
-kx^2 T1 sin(π z) - ky^2 T1 sin(π z) - π^2 T1 sin(π z)
```

## Relação de Dispersão

Caso o comportamento prescrito na **regra05** esteja correto, devemos ser capazes de eliminar a dependência com relação a direção não-homogênea das equação de conservação de massa **f0**, movimento linear **f1** e energia **f2** para as amplitudes prescritas. Isto é verificado abaixo, onde as amplitudes das perturbações para cada velocidade são eliminadas com as equações da conservação de movimento linear e a amplitude da perturbação na pressão é eliminada com a equação da conservação de massa. Estes resultados são então usados para gerar uma equação para a amplitude da perturbação na temperatura, em conjunto com **regra02** que define o escoamento base.

Construindo regra para eliminar amplitudes das perturbações para as velocidades:

```
In[34]:= g0 = Simplify[Flatten[Solve[f1, u1, v1, w1]]]
```

```
Out[34]= {u1 → kx P1 (1 - i λ1 ω) / (i + λ2 ω), v1 → ky P1 (1 - i λ1 ω) cot(π z) / (i + λ2 ω), w1 → (π P1 + Ra T1) (i + λ1 ω) / (i + λ2 ω)}
```

Construindo regra para eliminar amplitude da perturbação para a pressão:

```
In[35]:= g1 = Flatten[Solve[f0/.g0, P1]]
```

```
Out[35]= {P1 → -π Ra T1 / (kx^2 + ky^2 + π^2)}
```

Modificando conservação de energia com escoamento base:

```
In[36]:= g2 = FullSimplify[Equal[Apply[Subtract, f2/.regra02], 0]]
```

```
Out[36]= (T1 (kx2 + i Pe kx + ky2 - i ω + π2) - w1) sin(π z) = 0
```

Eliminando outras amplitudes desta equação:

```
In[37]:= g3 = Simplify[g2//.Join[g0,g1]]
```

```
Out[37]= T1 (kx2 + i Pe kx + ky2 - i ω - (kx2 + ky2) Ra (i + λ1 ω) / (kx2 + ky2 + π2) (i + λ2 ω) + π2) sin(π z) = 0
```

Para evitar uma solução trivial, a amplitude da perturbação na temperatura não pode ser nula. Como, de maneira geral, o seno também não é nulo, obtemos o problema de autovalor resultante ao impor que o termo entre parênteses na expressão **g3** seja nulo. Para concluir a derivação por computação simbólica desta análise de estabilidade, definimos o número de onda modificado e o número de Péclet modificado pela transformação de Squire. Nos interessaremos ao caso onde  $k_x \neq 0$  e  $k_y \neq 0$ . Para maiores detalhes o leitor deve consultar a referência [78]. Chegamos assim, na relação de dispersão a seguir.

Regra para o número de onda e Péclet modificados:

```
In[38]:= regra06 = {kx2 + ky2 → k2, Pe → k/kx * PeM};
```

Relação de Dispersão:

```
In[39]:= g4 = Coefficient[g3, T1 * sin[π * z]]//.regra06
```

```
Out[39]= k2 + i k PeM - i ω + π2 - Ra (i + λ1 ω) k2 / (k2 + π2) (i + λ2 ω) = 0
```

### 22.3.3 Resultados

#### Análise da Estabilidade Marginal

Esta subseção irá considerar a estabilidade marginal da relação de dispersão **g4**, impondo que a taxa de crescimento temporal da perturbação é nula, i.e.  $\omega I = Im[\omega] = 0$ . Sob estas circunstâncias, esta equação pode ser dividida em duas, suas partes real e imaginária. Elas formam um sistema acoplado de equações para as duas incógnitas restantes,  $\omega R = Re[\omega]$  e  $Ra$ . Este sistema pode ser combinado na formação de uma única equação cúbica para  $\omega R$ . Logo, três modos distintos são encontrados neste problema para  $Pe \neq 0$ . Eles colapsam num único modo quando  $Pe = 0$  e os dois modos mais estáveis se misturam em dois novos modos quando  $P \simeq 1.32$  (para  $\lambda_1 = 1/2$  e  $\lambda_2 = 1/4$ ), como mostrado a seguir.

Regra impõe estabilidade marginal:

```
In[40]:= regra7 = {ω → ωR + I * ωI, ωI → 0};
```

■ Expandindo a relação de dispersão:

In[41]:=  $h0 = \text{Together}[\text{Denominator}[\text{Part}[g4, 1, -1]] * g4 // .\text{regra7}]$

Out[41]=  $\lambda_2 \omega R k^4 + i k^4 - PeM k^3 + i PeM \lambda_2 \omega R k^3 - i \lambda_2 \omega R^2 k^2 - i Ra k^2 - Ra \lambda_1 \omega R k^2 + 2 \pi^2 \lambda_2 \omega R k^2 + \omega R k^2 + 2 i \pi^2 k^2 + i PeM \pi^2 \lambda_2 \omega R k - PeM \pi^2 k - i \pi^2 \lambda_2 \omega R^2 + \pi^4 \lambda_2 \omega R + \pi^2 \omega R + i \pi^4 = 0$

■ Obtendo parte real da relação de dispersão expandida:

In[42]:=  $h1 = \text{Simplify}[\text{Map}[\text{Re}, h0], \text{Assumptions} \rightarrow \{\text{PeM} \in \text{Reals}, \text{Ra} \in \text{Reals}, k \in \text{Reals}, \omega R \in \text{Reals}, \lambda_1 \in \text{Reals}, \lambda_2 \in \text{Reals}\}]$

Out[42]=  $(\lambda_2 k^4 + (1 - Ra \lambda_1 + 2 \pi^2 \lambda_2) k^2 + \pi^4 \lambda_2 + \pi^2) \omega R = k PeM (k^2 + \pi^2)$

■ Obtendo parte imaginaria da relação de dispersão expandida:

In[43]:=  $h2 = \text{Simplify}[\text{Map}[\text{Im}, h0], \text{Assumptions} \rightarrow \{\text{PeM} \in \text{Reals}, \text{Ra} \in \text{Reals}, k \in \text{Reals}, \omega R \in \text{Reals}, \lambda_1 \in \text{Reals}, \lambda_2 \in \text{Reals}\}]$

Out[43]=  $k^4 + \pi^4 + PeM \lambda_2 \omega R k^3 + (-\lambda_2 \omega R^2 - Ra + 2 \pi^2) k^2 + PeM \pi^2 \lambda_2 \omega R k = \pi^2 \lambda_2 \omega R^2$

■ Construindo equação cúbica:

In[44]:=  $h3 = \text{Simplify}[\text{Flatten}[\text{Solve}[h1, Ra]]]$

Out[44]=  $\left\{ Ra \rightarrow \frac{(k^2 + \pi^2)(\lambda_2 \omega R k^2 - PeM k + \pi^2 \lambda_2 \omega R + \omega R)}{k^2 \lambda_1 \omega R} \right\}$

In[45]:=  $h4 = \text{FullSimplify}[h2/.h3, \text{Assumptions} \rightarrow \{\lambda_1 \neq 0, \omega R \neq 0, k > 0\}]$

Out[45]=  $k PeM \lambda_1 \lambda_2 \omega R^2 + (k^2 + \pi^2) (\lambda_1 - \lambda_2) \omega R + k PeM = \lambda_1 \lambda_2 \omega R^3 + \omega R$

■ Freqüência de oscilação dos três modos:

In[46]:=  $h5 = \text{Flatten}[\text{Solve}[h4, \omega R]];$

■ Número de Rayleigh dos três modos:

In[47]:=  $h6 = \text{Flatten}[h3/.h4/@h5];$

As soluções analíticas tanto do número de Rayleigh e quanto da respectiva freqüência de oscilação para cada modo não são mostradas acima por serem expressões extremamente longas e complicadas. De qualquer forma, mostramos abaixo seus comportamentos em função do número de Péclet, para  $\lambda_1 = 1/2$  e  $\lambda_2 = 1/4$ . Outros valores dos tempos de relaxação e retardação não mudam de maneira significativa o comportamento qualitativo das curvas.

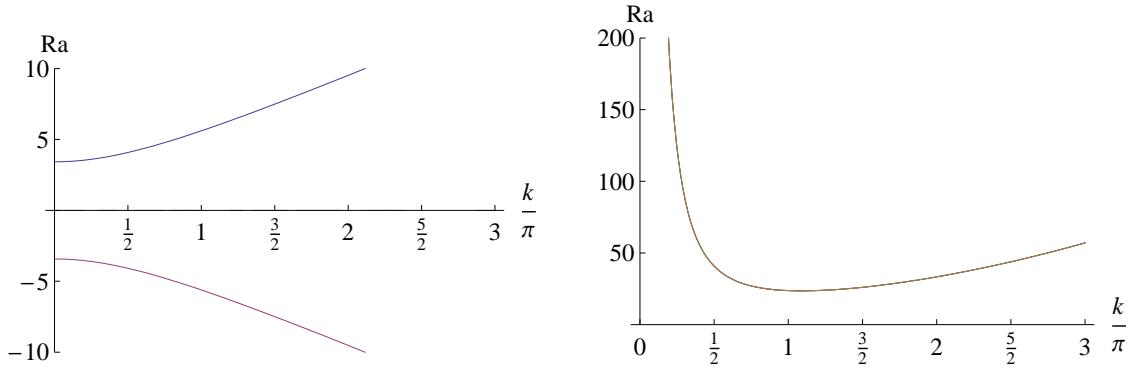


Figura 22.1: Freqüência real e número de Rayleigh como funções do número de onda real para  $\text{PeM} = 0$ ,  $\lambda_1 = 1/2$  e  $\lambda_2 = 1/4$ .

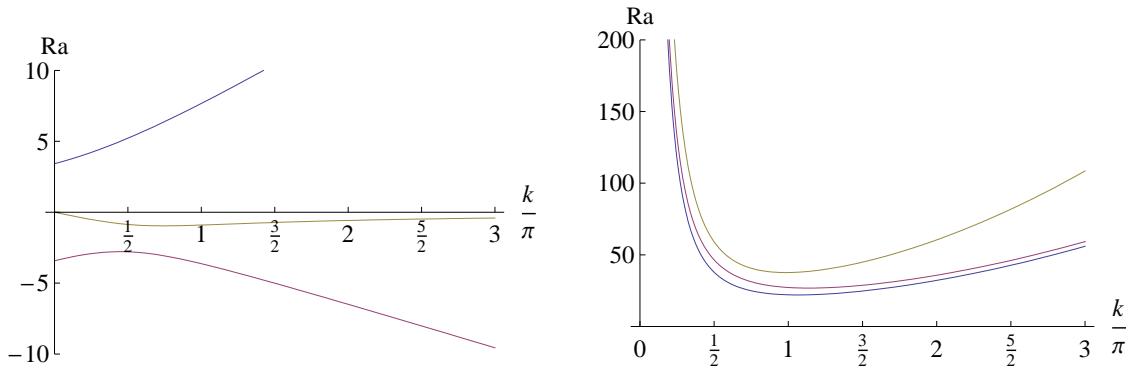


Figura 22.2: Freqüência real e número de Rayleigh como funções do número de onda real para  $\text{PeM} = 1$ ,  $\lambda_1 = 1/2$  e  $\lambda_2 = 1/4$ .

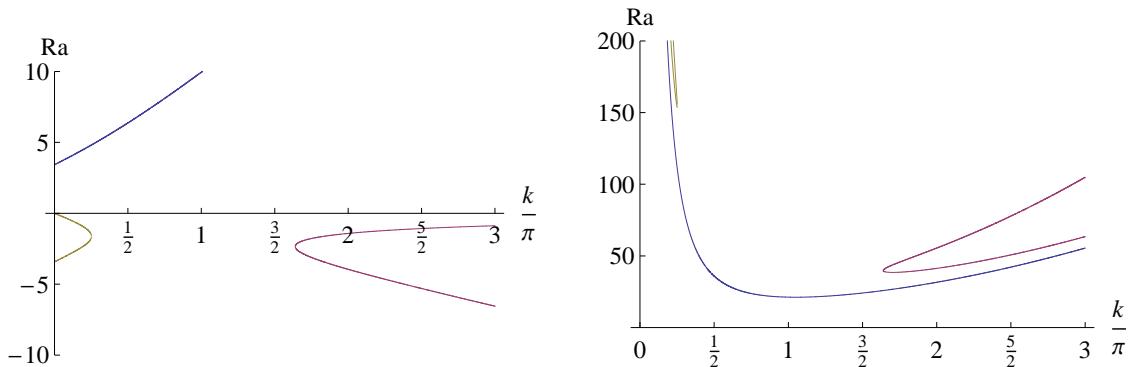


Figura 22.3: Freqüência real e número de Rayleigh como funções do número de onda real para  $\text{PeM} = 2$ ,  $\lambda_1 = 1/2$  e  $\lambda_2 = 1/4$ .

Comando usado para gerar os gráficos do número de Rayleigh nas Figuras 22.1, 22.2 e 22.3. O mesmo comando é usado para os gráficos da freqüência real, porém trocando **h6** por **h5** e mudando os valores usados na opção **PlotRange**:

```
In[48]:= Plot[Evaluate[(#[[2]]&/@h6)//.{PeM→2,λ1→1/2,λ2→1/4}],{k,0,3*Pi},  
AxesLabel→{k/Pi,Ra},PlotRange→{0,200},Ticks→{Table[{i*Pi,i},  
{i,0,5,1/2}],Automatic},BaseStyle→{FontFamily→Times,FontSize→14}]
```

As Figuras 22.1, 22.2 e 22.3 mostram o comportamento de  $\omega R$  e  $Ra$  para  $Pe = 0$ , 1 e 2, respectivamente. Nos dois primeiros casos, três modos podem ser identificados. Eles são chamados aqui de modos  $\omega^+$  (curva azul),  $\omega^0$  (curva amarela) e  $\omega^-$  (curva roxa), e representam estruturas convectivas em forma de rolos cujos eixos são transversais ao escoamento principal imposto na entrada [78]. A curva amarela mostra que a estrutura convectiva, que na ausência do escoamento principal era estacionária (i.e.  $\omega = 0$  para  $Pe = 0$ ), se transforma em uma onda oscilatória de frequencia negativa, cujo valor absoluto cresce com  $Pe$ . As curvas azul e roxa representam rolos oscilantes que se deslocam no sentido do escoamento principal (modo  $\omega^+$ ) e no sentido contrário ao mesmo (modo  $\omega^-$ ). O escoamento base deixa de ser estável com relação à cada um destes modos quando número de Rayleigh, imposto num experimento por exemplo, é maior do que o valor mínimo de cada curva. Este mínimo é chamado de Rayleigh crítico. Para valores de Rayleigh maiores que o crítico, a perturbação crescerá e as estruturas convectivas aparecerão. No terceiro e último caso mostrado, quando  $Pe = 2$ , as curvas de estabilidade dos modos  $\omega^0$  e  $\omega^-$  mudaram de comportamento. No entanto, o modo mais instável (de menor Rayleigh crítico) continua sendo o modo  $\omega^+$ .

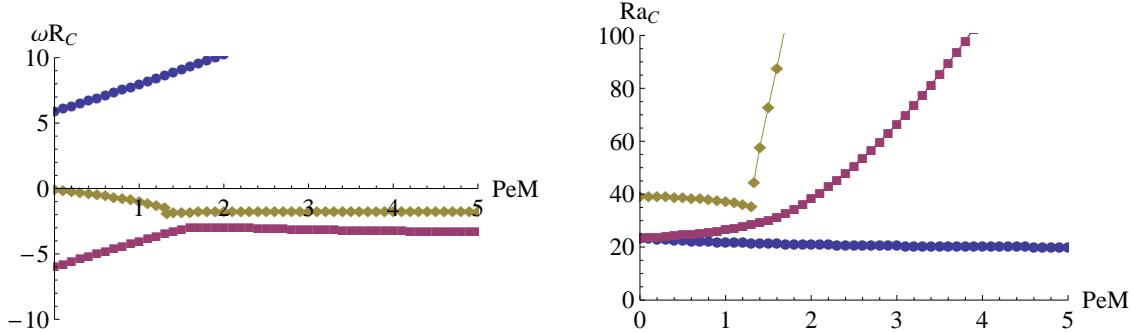


Figura 22.4: Freqüência e Rayleigh críticos versus Péclet para  $\lambda_1 = 1/2$  e  $\lambda_2 = 1/4$ .

Os números de Rayleigh  $Ra_C$  e freqüência  $\omega R_C$  críticos correspondentes são mostrados na Figura 22.4, para  $0 < Pe < 5$ . Assim como nas figuras anteriores, as curvas azuis, amarela e roxa correspondem aos modos  $\omega^+$ ,  $\omega^0$  e  $\omega^-$ . Podemos notar que, para todos os valores de  $Pe$ , o modo  $\omega^+$  é o mais instável. Assim, concluímos que na presença de um escoamento principal, as estruturas observadas terão forma de rolos transversais oscilantes que se propagam no sentido do escoamento.

Finalmente, encerramos este capítulo provendo mais detalhes sobre a mudança de comportamento mencionada acima. A Figura 22.5 mostra o que ocorre com os três modos imediatamente após a mudança, quando  $Pe = 1.322$ . Três pontos de mínimo existem para o modo  $\omega^-$  (curva roxa), porém apenas o mínimo global deste modo representa seu ponto crítico. Já o mínimo do modo  $\omega^0$  muda descontinuamente de valor, como indicado nas duas curvas amarelas da Figura 22.4. A causa deste salto fica clara na Figura 22.5.

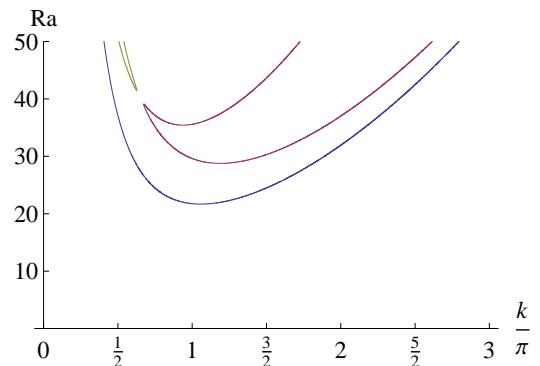


Figura 22.5: Rayleigh como função do número de onda real para  $PeM = 1.322$ ,  $\lambda_1 = 1/2$  e  $\lambda_2 = 1/4$ .

## 22.4 Problemas

1. Modifique o programa de computação simbólica feito no *Mathematica* e apresentado neste capítulo para deduzir a equação de despersão do escoamento de Rayleigh-Bénard-Poiseuille para um fluido Newtoniano, satisfazendo as seguintes equações:

$$\nabla \cdot V = 0$$

$$V + \nabla P - Ra T \mathbf{e}_z = 0$$

$$\partial_t T + V \cdot \nabla T - \nabla^2 T = 0$$

2. Refaça o problema anterior (1), porém agora para o escoamento de Rayleigh-Bénard-Poiseuille para um fluido binário Newtoniano, ou seja, incluindo o efeito Soret, que satisfaz as seguintes equações:

$$\nabla \cdot V = 0$$

$$V + \nabla P - Ra (T + \psi C) \mathbf{e}_z = 0$$

$$\partial_t T + V \cdot \nabla T - \nabla^2 T = 0$$

$$\varepsilon^* \partial_t C + V \cdot \nabla C - Le \nabla^2 (C - T) = 0$$

3. Refaça o problema anterior (1), porém agora considerando o escoamento de um fluido Oldroyd-B, que satisfaz as seguintes equações:

$$\nabla \cdot V = 0$$

$$(1 + \lambda_2 \partial_t) V + (1 + \lambda_1 \partial_t) (\nabla P - Ra (T + \psi C) \mathbf{e}_z) = 0$$

$$\partial_t T + V \cdot \nabla T - \nabla^2 T = 0$$

$$\varepsilon^* \partial_t C + V \cdot \nabla C - Le \nabla^2 (C - T) = 0$$

considerando  $\varepsilon^* = \varepsilon(\rho c)_f / (\rho c)_{sf}$  a porosidade normalizada,  $\psi = -\beta_C D_T C (1 - C) / \beta_T D$  o coeficiente de separação e  $Le = D / \alpha$  o numero de Lewis, onde  $\varepsilon$ ,  $D_T$ ,  $D$ ,  $C$  representam respectivamente a porosidade, coeficiente de difusão termica, coefficiente de difusão massica, fração massica inicial do componente mais denso.



## Parte VII

### Apêndice



# Apêndice D

## Álgebra Linear, Sistemas Dinâmicos e Equações Diferenciais Ordinárias

### D.1 Álgebra Linear e Espaços Vetoriais de Dimensão Finita

#### D.1.1 Vetores e bases

**Definição:** Espaços vetoriais são conjuntos com as seguintes propriedades [93, 80]:

1. A soma de elementos do conjunto e a multiplicação dos mesmos por um número escalar (real ou complexo) é definida;
2. Existe o elemento neutro da soma,  $\mathbf{Z}$ , tal que  $\mathbf{X} + \mathbf{Z} = \mathbf{X}$ ;
3. Existe o elemento oposto,  $\mathbf{Y}$ , de qualquer elemento  $\mathbf{X}$ , tal que  $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{Z}$ .

Os elementos de um espaço vetorial denominam-se *vetores*. A soma de vetores tem as seguintes propriedades:

1.  $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_1$  (Comutatividade);
2.  $\mathbf{X}_1 + (\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3) = (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) + \mathbf{X}_3$  (Associatividade);

A multiplicação de vetores por escalares tem as seguintes propriedades:

1.  $1\mathbf{X} = \mathbf{X}$ ;
2.  $\alpha(\beta\mathbf{X}) = (\alpha\beta)\mathbf{X}$ ;
3.  $\alpha(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) = (\alpha\mathbf{X}_1 + \alpha\mathbf{X}_2)$ ,

onde  $\alpha$  e  $\beta \in C$  ( $C$  é o corpo dos números complexos)

**Definição:** Os vetores  $\mathbf{X}_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ , onde  $n$  é um número finito, são linearmente independentes se a equação:

$$\alpha_1 \mathbf{X}_1 + \alpha_2 \mathbf{X}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{X}_n = \mathbf{Z} \quad (\text{D.1})$$

só se verificar se  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

**Definição:** O número máximo  $n$ , de vetores linearmente independentes de um espaço vetorial denomina-se *dimensão do espaço vetorial*.

**Definição:** Todo conjunto de  $n$  vetores linearmente independentes de um espaço vetorial de dimensão  $n$  denomina-se de *base do espaço vetorial*.

Sejam  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ , um conjunto de vetores linearmente independentes de um espaço vetorial. Se a esse conjunto acrescentarmos um vetor  $\mathbf{Y} \neq \mathbf{Z}$  a equação:

$$\beta \mathbf{Y} + \alpha_1 \mathbf{X}_1 + \alpha_2 \mathbf{X}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{X}_n = \mathbf{Z}$$

tem pelo menos uma solução em que  $\beta$  e ao menos um dos coeficientes  $\alpha_i \neq 0$ . Como  $\beta \neq 0$  reescrevemos a equação acima na forma:

$$\mathbf{Y} = -\frac{\alpha_1}{\beta} \mathbf{X}_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} \mathbf{X}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta} \mathbf{X}_n$$

**Definição:** Os números  $a_i = -\alpha_i/\beta$  denominam-se *coordenadas do vetor  $\mathbf{Y}$  na base  $\mathbf{X}_i$* .

**Teorema:** As coordenadas de um vetor  $\mathbf{Y}$  qualquer, em uma base  $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n\}$  são únicas.

Admitimos que o vetor  $\mathbf{Y}$  possa ser obtido através de duas combinações lineares distintas:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= a_1 \mathbf{X}_1 + a_2 \mathbf{X}_2 + \dots + a_n \mathbf{X}_n \\ \mathbf{Y} &= b_1 \mathbf{X}_1 + b_2 \mathbf{X}_2 + \dots + b_n \mathbf{X}_n. \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira obtemos:

$$(a_1 - b_1) \mathbf{X}_1 + (a_2 - b_2) \mathbf{X}_2 + \dots + (a_n - b_n) \mathbf{X}_n = \mathbf{Z}.$$

Como os vetores  $\mathbf{x}_i$  são linearmente independentes os números  $(a_i - b_i)$  são todos iguais a zero, o que implica em que  $a_i = b_i$  e demonstra o teorema.

## D.1.2 Operadores lineares

**Definição:** Operadores lineares são funções  $f : C^n \rightarrow C^n$  tais que:

1.  $f(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = f(\mathbf{X}) + f(\mathbf{Y})$ ;
2.  $f(\alpha \mathbf{X}) = \alpha f(\mathbf{X})$ .

Como exemplo de operadores lineares citamos o gradiente, o divergente, o rotacional e o laplaciano. A integral de uma função é também um operador linear. Uma matriz cujos elementos  $a_{ij}$  são números é um operador algébrico linear. O operador Derivada Substancial, é não linear.

### D.1.3 Dimensão, imagem e núcleo de um operador algébrico linear

Seja um operador algébrico linear, representado por uma matriz  $A$  com  $n$  linhas e  $m$  colunas, quando aplicado a um vetor  $\mathbf{X} \in \mathcal{R}^m$ , produz como resultado, um vetor  $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^n$ .

**Definição:** O subespaço de todos os vetores  $\mathbf{X} \neq \mathbf{Z}$ , que resultam da aplicação do operador  $A$  sobre vetores  $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^n$  se constitui na *Imagen* de  $A$ , representada por  $\text{Im}(A)$  [80, 96].

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

O vetor  $\mathbf{B}$  pode ser interpretado como resultante de uma combinação linear dos vetores que compõe as colunas da matriz  $A$ , em que cada uma é multiplicada por um elemento de  $\mathbf{X}$ . A dimensão  $r$  da  $\text{Im}(A)$  é igual ao número de colunas linearmente independentes de  $A$ . O número máximo de colunas linearmente independentes é  $n$ .

**Definição:** O *Núcleo* ou *Espaço Nulo* de  $A$ , representado por  $\text{Nu}(A)$ , é o subespaço de vetores  $\mathbf{X} \in \mathcal{R}^m$ , tal que  $A\mathbf{X} = \mathbf{Z}$ .

Vejamos a dimensão do  $\text{Nu}(A)$ . Consideramos o operador representado pela matriz  $A$  da Eq. D.2 e admitimos que as  $r$  primeiras colunas da mesma sejam linearmente independentes e as  $m - r$  restantes possam ser obtidas por combinação linear das primeiras. Sejam  $\mathbf{A}_i$  os vetores representados pelas colunas de  $A$ . A coluna  $\mathbf{A}_{r+1}$  é obtida pela combinação linear:

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \dots + x_r\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_{r+1}.$$

Essa combinação linear é única. A equação acima pode ser reescrita como:

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \dots + x_r\mathbf{A}_r - \mathbf{A}_{r+1} = \mathbf{Z}.$$

Consequentemente, a aplicação da matriz  $A$  sobre o vetor  $\mathbf{X}_{r+1} = (x_1, x_2, \dots, x_r, -1, 0, \dots, 0)$  resulta no vetor  $\mathbf{Z}$ . A operação pode ser repetida para a obtenção da coluna  $\mathbf{A}_{r+2}$ . Obtém-se um vetor  $\mathbf{X}_{r+2} = (x_1, x_2, \dots, x_r, 0, -1, 0, \dots, 0)$ . Os vetores  $\mathbf{X}_{r+1}$  e  $\mathbf{X}_{r+2}$  são linearmente independentes. Da mesma forma que o primeiro,  $\mathbf{X}_{r+2} \in \text{Nu}(A)$ . Repetindo-se a operação  $m - r$  vezes encontra-se  $m - r$  vetores linearmente independentes que pertencem ao Núcleo de  $A$ . Qualquer combinação linear dos mesmos resulta em um vetor que pertence ao Núcleo de  $A$ . O Núcleo de  $A$  se constitui de um espaço de dimensão  $m - r$ . Enunciamos portanto o seguinte:

**Teorema:**  $\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Nu}(A) = m$ ,

onde  $m$  é o número de colunas de  $A$ . No caso de um operador algébrico linear, representado pela matriz  $A$  de dimensões  $n \times n$  no qual as  $n$  colunas que o formam forem linearmente independentes  $\dim \text{Nu}(A) = 0$ . O núcleo se constitui de um único ponto do espaço vetorial, que é o vetor nulo  $\mathbf{Z}$ .

Deve-se ressaltar que a interseção  $\text{Im}(A) \cap \dim \text{Nu}(A)$  não é necessariamente vazia, o que possibilita que um vetor pertença ao espaço nulo de um operador e, ao mesmo tempo, seja gerado pelo operador (ver Sec. D.7.2 - pág. 304).

Se as colunas de  $n$  elementos de um operador algébrico linear não forem linearmente independentes e só descreverem um espaço de dimensão  $r < n$ , essas colunas são ortogonais a um subespaço de dimensão  $n - r$ . O produto escalar dessas colunas pelos vetores que formam uma base desse último subespaço é igual a zero. Podemos representar esse produto escalar fazendo:

$$A^T \mathbf{X} = \mathbf{Z},$$

onde  $A^T$  é a matriz transposta de  $A$ . A dimensão do espaço nulo de  $A^T$  é  $n - r$ . Como  $\dim \text{Im}(A^T) + \dim \text{Nu}(A^T) = n$  concluímos que  $\dim \text{Im}(A^T) = r$ . Enunciamos então o seguinte:

**Teorema:** A dimensão  $r$  da imagem de um operador algébrico linear  $A$  é igual à dimensão da imagem do operador transposto  $A^T$ .

Cabe ressaltar que a dimensão do Espaço Nulo de  $A$  é  $m - r$  e a de  $A^T$  é  $n - r$ .

Consideremos o caso de uma matriz quadrada de dimensões  $n \times n$ , cuja imagem tem dimensão  $r \leq n$ . Se  $r = n$  as colunas são linearmente independentes e varrem o espaço todo. A matriz transposta também varre o espaço todo, isso é, se as colunas forem linearmente independentes, as linhas também o são. Se as colunas varrerem um espaço de dimensão  $r < n$  as linhas varrerão um espaço de mesma dimensão, em virtude do teorema acima. Em particular, se as colunas não forem linearmente independentes, as linhas também não o são.

A mesma propriedade pode ser demonstrada de outra forma: se as colunas de uma matriz quadrada forem linearmente independentes o único vetor cuja imagem é vetor nulo, é o próprio vetor nulo. Pode-se interpretar o vetor  $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$  como composto de elementos que resultam do produto escalar de cada linha da matriz pelo vetor  $\mathbf{X}$ . Se  $\mathbf{Y}$  for o vetor nulo, o vetor único vetor ortogonal a todas as linhas da matriz é o vetor nulo. E isso só ocorre se as linhas varrerem o espaço inteiro, isso é, se as linhas forem linearmente independentes.

Em sentido contrário, se as linhas forem linearmente independentes o único vetor ortogonal a todas é o vetor nulo e, consequentemente, a única combinação linear das colunas que resulta no vetor é obtida multiplicando cada coluna por zero e as colunas são linearmente independentes. Enunciamos o seguinte:

**Teorema:** A condição necessária e suficiente para que as linhas de uma matriz quadrada sejam linearmente independentes é que as colunas também o sejam (ver também pág. 269).

#### D.1.4 Operadores biunívocos

**Definição:** Operadores lineares biunívocos são tais que cada ponto da imagem provém de um único ponto.

A imagem do ponto  $\mathbf{Z}$ , obtida pela aplicação de um operador algébrico linear sobre o mesmo é o ponto  $\mathbf{Z}$ . Se o Núcleo do operador for o ponto  $\mathbf{Z}$ , o operador é biunívoco. Mostremos essa propriedade. Se o operador não for biunívoco:

$$A\mathbf{X}_1 = \mathbf{Y} \quad \text{e:} \quad A\mathbf{X}_2 = \mathbf{Y}.$$

Fazendo:

$$A\mathbf{X}_1 - A\mathbf{X}_2 = \mathbf{Y} - \mathbf{Y} = A(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) = \mathbf{Z}.$$

Como o Núcleo de  $A$  é o ponto  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$ . Enunciamos o seguinte:

**Teorema:** A condição necessária e suficiente para que um operador algébrico linear seja biunívoco é que seu Núcleo seja o vetor  $\mathbf{Z}$ .

As afirmações de que um operador é biunívoco e de que seu Núcleo é o vetor  $\mathbf{Z}$  são portanto, equivalentes. Operadores biunívocos admitem um operador inverso. O inverso  $A^{-1}$  de um operador algébrico linear é tal que:

$$A^{-1}(AX) = \mathbf{X}.$$

### D.1.5 Mudança de base

Um vetor qualquer  $\mathbf{X} \in \mathcal{R}^n$  pode ser expresso por uma combinação linear dos vetores (elementos) de uma base  $\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n$ . Usando a convenção de soma dos tensores cartesianos escrevemos:

$$\mathbf{X} = x_i \mathbf{e}_i.$$

O mesmo vetor pode ser expresso por uma combinação linear dos elementos de outra base  $\mathbf{f}_j, j = 1, \dots, n$ :

$$\mathbf{X} = x_i \mathbf{e}_i = y_j \mathbf{f}_j. \quad (\text{D.3})$$

Cada vetor da nova base  $\mathbf{f}_j$  é dado por uma combinação linear dos elementos da base  $\mathbf{e}_i$ :

$$\mathbf{f}_j = a_{ji} \mathbf{e}_i \quad (\text{D.4})$$

Substituindo a expressão de  $\mathbf{f}_j$ , dada pela Eq. D.4 em D.3 encontra-se:

$$\mathbf{X} = x_i \mathbf{e}_i = y_j a_{ji} \mathbf{e}_i,$$

onde conclui-se que:

$$x_i = y_j a_{ji}. \quad (\text{D.5})$$

Se os vetores  $\{\mathbf{e}_i\}$  e  $\{\mathbf{f}_j\}$  forem linearmente independentes as linhas da matriz  $A$ , de elementos  $a_{ji}$ , também o são. Admitindo ao contrário, que a primeira linha possa ser obtida por combinação linear das demais, têm-se:

$$a_{1i} = \sum_{k=2}^n \alpha_k a_{ki} \quad \mathbf{f}_1 = \sum_i^n a_{1i} \mathbf{e}_i.$$

Então:

$$\mathbf{f}_1 = \sum_{i=1}^n a_{1i} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^n \alpha_k a_{ki} \mathbf{e}_i = \sum_{k=2}^n \alpha_k \left( \sum_{i=1}^n a_{ki} \mathbf{e}_i \right) = \sum_{k=2}^n \alpha_k \mathbf{f}_k,$$

isso é, o vetor  $\mathbf{f}_1$  poderia ser obtido através de uma combinação linear dos demais, o que contradiz a hipótese de que os vetores  $\mathbf{f}_j$  são linearmente independentes.

A Eq. D.5 mostra que o vetor de coordenadas  $x_i$  é dado pela multiplicação do vetor de uma linha e  $n$  colunas, cujos elementos são as coordenadas de  $\mathbf{X}$  na nova base, por uma matriz  $A$ , cujas linhas são formadas pelas coordenadas dos vetores da nova base, na base antiga. Essa equação pode ser reescrita sob a forma:

$$x_i = a_{ij}y_j.$$

Nesse caso as colunas da matriz que multiplica o vetor de elementos  $y_j$  são formadas pelas coordenadas dos vetores da nova base, na base antiga.

As colunas da matriz  $A$ , de elementos  $a_{ij}$  são linearmente independentes, Nessas condições,  $A$  é inversível. Denominamos:  $Q^{-1} = A$ . Podemos determinar as coordenadas de um vetor na nova base pela relação:

$$\mathbf{Y} = Q\mathbf{X},$$

onde  $Q = A^{-1}$ .

Uma matriz  $A$  aplicada a um vetor  $\mathbf{X}_1$  tem como imagem um vetor  $\mathbf{X}_2$ . Designemos por  $\mathbf{Y}_1$  e  $\mathbf{Y}_2$  a representação dos vetores  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  na nova base, isso é:

$$\mathbf{Y}_1 = Q\mathbf{X}_1 \quad \text{e:} \quad \mathbf{Y}_2 = Q\mathbf{X}_2$$

A matriz que, aplicada ao vetor  $\mathbf{Y}_1$  tem como imagem o vetor  $\mathbf{Y}_2$  produz o mesmo efeito que a matriz  $A$ , mas é diferente da mesma. Seja  $B$  essa nova matriz. Dizemos que  $A$  e  $B$  são matrizes similares, ou que  $A$  e  $B$  são representações em bases diferentes de um mesmo operador algébrico linear  $T$ . Procuremos a forma da matriz  $B$ . Temos que:

$$A\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 \quad \rightarrow \quad QAX_1 = Q\mathbf{X}_2 = \mathbf{Y}_2.$$

Como  $\mathbf{X} = Q^{-1}\mathbf{Y}$ , escrevemos:

$$QAQ^{-1}\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2.$$

A matriz que representa o operador  $T$  na nova base é dada por:

$$B = QAQ^{-1}.$$

### D.1.6 Interpretação vetorial de um sistema de equações algébricas lineares

Um sistema de equações algébricas lineares da forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

pode ser reescrito na forma matricial dada pela Eq. D.2. Duas situações são possíveis [93]: ou o vetor  $B$  pertence ao subespaço varrido pelas colunas  $\mathbf{A}_i$  do operador que multiplica o vetor de incógnitas  $\mathbf{X}$  e o sistema tem solução, ou  $B$  não pertence a esse subespaço e o sistema não admite solução.

Resolver um sistema de equações algébricas lineares significa portanto, encontrar todas as possíveis combinações lineares das colunas do operador, que resultem no vetor  $B$ . Enunciamos o seguinte:

**Teorema:** A solução de um sistema de equações algébricas lineares, quando existe, é dada por uma solução particular, que se constitui de qualquer combinação linear das colunas de  $A$  que resultem no vetor  $B$ , mais o Núcleo do operador, que é formado por um espaço de dimensão  $m - r$ , onde  $r$  é o número de vetores coluna linearmente independentes de  $A$  [93].

A solução particular é obtida atribuindo-se um valor arbitrário a cada uma das  $m - r$  incógnitas que multiplicam as colunas que podem ser obtidas por combinação linear das demais; Multiplica-se as colunas pelas incógnitas às quais se atribuiu valor e subtrai-se os vetores resultantes, do vetor  $B$ . Como os vetores que restam no lado esquerdo da equação resultante são linearmente independentes, a combinação linear:

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \dots + x_r\mathbf{A}_r = \mathbf{B} - x_{r+1}\mathbf{A}_{r+1} - x_{r+2}\mathbf{A}_{r+2} - \dots - x_m\mathbf{A}_m$$

tem solução única. Essa combinação linear completa a solução particular procurada. Cabe notar que existem  $m - r$  soluções particulares linearmente independentes e não triviais, do sistema de equações algébricas lineares. Alguns casos particulares importantes são tratados abaixo.

**Definição:** Um sistema de equações algébricas lineares é homogêneo se o vetor formado pelos elementos  $b_i$  do membro direito das equações for o vetor  $\mathbf{z}$ .

**Definição:** Um sistema de equações algébricas lineares é regular se os vetores que formam as colunas da matriz de coeficientes que multiplicam as incógnitas forem linearmente independentes.

Dois casos importantes são abordados pelos teoremas abaixo:

**Teorema:** Um sistema homogêneo de equações algébricas lineares sempre admite solução. Se o sistema for regular a solução é o vetor  $\mathbf{Z}$ . Se os vetores que formam  $m - r$  colunas da matriz de coeficientes puderem ser obtidas a partir das  $r$  restantes, o sistema admite como solução um espaço de dimensão  $m - r$ .

**Teorema:** Um sistema regular de equações algébricas lineares sempre admite solução e a solução é única.

**Definição:** Seja um sistema de equações algébricas lineares dado por  $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$ , onde  $A$  é uma matriz de elementos  $a_{ij}$ . O sistema  $A^T\mathbf{Y} = \mathbf{Z}$ , onde  $A^T$  é a matriz de elementos  $a_{ji}$  (transposta de  $A$ ) denomina-se sistema homogêneo transposto associado a  $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$ .

## D.1.7 Determinantes

Discutimos nessa seção os princípios sobre determinantes. O determinante pode ser definido como uma função escalar de um sistema de vetores. Em particular, esses vetores podem ser

as colunas da matriz. Essa função mede a área do paralelogramo cujos lados não paralelos são os vetores coluna de uma matriz de dimensões  $2 \times 2$ . Em três dimensões, o determinante mede o volume do paralelepípedo cujos lados os três vetores em consideração. Em particular, os três vetores podem ser as colunas de uma matriz  $3 \times 3$ . A noção é generalizada para o caso de matrizes de maiores dimensões. Se os vetores que formam as duas colunas de uma matriz  $2 \times 2$  forem paralelos, a área do paralelogramo (determinante) é igual a zero. De forma geral, se um dos vetores que formam as colunas de uma matriz for uma combinação linear das demais colunas, o determinante do sistema de vetores será igual a zero. Desenvolvemos essas idéias:

A área algébrica do paralelogramo cujos lados não paralelos são os vetores coluna  $A$  e  $B$  de uma matriz  $2 \times 2$  é dada por (ver Fig. D.1):

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi &= \operatorname{sen} (\varphi_B - \varphi_A) = \operatorname{sen} \varphi_B \cos \varphi_A - \operatorname{sen} \varphi_A \cos \varphi_B = \frac{b_y}{|\mathbf{B}|} \frac{a_x}{|\mathbf{A}|} - \frac{a_y}{|\mathbf{A}|} \frac{b_x}{|\mathbf{B}|}.\end{aligned}$$

Substituindo-se a última expressão de  $\operatorname{sen} \varphi$  na de cálculo da área do paralelogramo encontra-se:

$$\text{Área} = a_x b_y - a_y b_x.$$

Definimos como sendo o determinante dos dois vetores  $A$  e  $B$ , nessa ordem, a área do paralelogramo acima calculadas.

$$\det M = a_x b_y - a_y b_x \quad \text{onde:} \quad M = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix}.$$

Os argumentos acima apresentados são base para a seguinte:

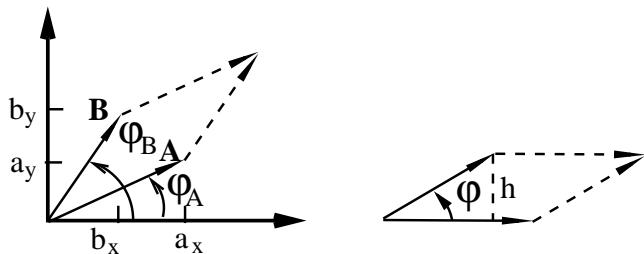


Figura D.1: Área algébrica de dois vetores.

vetores por  $\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$ .

É claro que  $\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = 0$ , se os dois vetores forem colineares. O determinante de dois vetores satisfaz às seguintes propriedades:

1.  $\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = -\det(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1);$
2. Se  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B} + \mathbf{C}$  então  $\det(\mathbf{B} + \mathbf{C}, \mathbf{A}_2) = \det(\mathbf{B}, \mathbf{A}_2) + \det(\mathbf{C}, \mathbf{A}_2);$

**Definição:** Denomina-se determinante de dois vetores  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  ao escalar que representa a área do paralelogramo cujos lados são formados pelos dois vetores acima e por dois outros paralelos aos primeiros, com origem na extremidade dos mesmos. A área tem sinal positivo se os dois vetores estiverem na ordem de  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  e negativo caso contrário. Representamos o determinante dos dois

3.  $\det(\alpha \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \alpha \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$ , onde  $\alpha \in \mathcal{R}$  ou  $\mathcal{C}$ ;
4.  $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$ , onde  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  são os vetores de base unitários de um referencial ortonormal.

A noção de determinante pode ser estendida para o caso de um sistema de três vetores. Nesse caso o determinante representa o volume do paralelogramo que tem os três vetores por aresta. Sejam  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  e  $\mathbf{A}_3$ , três vetores de coordenadas  $(a_{11}, a_{21}, a_{31}), (a_{12}, a_{22}, a_{32})$  e  $(a_{13}, a_{23}, a_{13})$ , respectivamente. O volume do paralelepípedo que tem  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  e  $\mathbf{A}_3$  por arestas é dado por:

$$V = (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot (a_{13}, a_{23}, a_{13}) \\ (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})a_{13} + (a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32})a_{23} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})a_{33} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$$

O determinante de três vetores satisfaz a propriedades semelhantes às satisfeitas pelo determinante de dois vetores:

1.  $\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) = -\det(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3)$ ;
2. Se  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B} + \mathbf{C}$  então  $D(\mathbf{B} + \mathbf{C}, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) = \det(\mathbf{B}, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) + \det(\mathbf{C}, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$ ;
3.  $\det(\alpha \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) = \alpha \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$ , onde  $\alpha \in \mathcal{R}$  ou  $\mathcal{C}$ ;
4.  $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$ , onde  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_2$  são os vetores de base unitários de um referencial ortonormal.

Definimos o determinante de um sistema de vetores de forma a generalizar a noção de área algébrica de dois vetores e o volume de três vetores, acima exposta. Seja  $E_n$  um espaço vetorial relativo ao corpo de números reais ou complexos e seja  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ , um referencial ortogonal, definido nesse espaço.

**Definição:** Dados  $n$  vetores  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$  nessa ordem de  $E_n$  definimos determinante de ordem  $n$  relativo a esses vetores e o representamos por  $\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$  a toda função escalar desses  $n$  vetores satisfazendo às seguintes condições [93]:

1.  $\det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_i, \dots, \mathbf{A}_k, \dots, \mathbf{A}_n) = -\det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k, \dots, \mathbf{A}_i, \dots, \mathbf{A}_n)$ ;
  2. Se  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B} + \mathbf{C}$  então:
- $$\det(\mathbf{B} + \mathbf{C}, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) = \det(\mathbf{B}, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) + \det(\mathbf{C}, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n);$$
3.  $\det(\alpha \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) = \alpha \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$ , onde  $\alpha \in \mathcal{R}$  ou  $\mathcal{C}$ ;
  4.  $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$ .

Pode-se mostrar que existe uma única função que satisfaz às quatro condições da definição acima (teoremas da existência e da unicidade, abaixo demonstrados). Antes de proceder à demonstração do teorema da existência e unicidade enunciamos alguns teoremas a respeito de determinantes de um sistema de vetores

**Teorema 1:** Se em  $\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$  um dos vetores for o vetor nulo, então:  $\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) = 0$ .

**Teorema 2:** Se em  $\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$  dois vetores forem idênticos então:  $\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) = 0$ .

**Teorema 3:** O valor de  $\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$  não se altera quando a um dos vetores se soma uma combinação linear dos demais.

**Teorema 4:**  $\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) = 0$  se os vetores não forem linearmente independentes.

**Teorema 5:** A condição necessária e suficiente para que um sistema de vetores seja linearmente independente é que seu determinante seja diferente de zero.

A demonstração desses teoremas é deixada a cargo do leitor. Demonstramos a seguir que a função escalar determinante de um sistema de vetores, satisfazendo às quatro condições especificadas na definição dada à pág. 265, existe e é única [93].

Mostramos inicialmente que apenas uma função escalar pode satisfazer às condições exigidas pela definição de determinante. O determinante de um sistema de vetores  $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$ , definidos no  $\mathcal{R}^n$  é dado por:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) &= \det[(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{1n}\mathbf{e}_n), \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n] = \\ &\det(a_{11}\mathbf{e}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) + \det(a_{12}\mathbf{e}_2, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) + \dots + \det(a_{1n}\mathbf{e}_n, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n).\end{aligned}\quad (\text{D.6})$$

Por sua vez, o termo  $\det(a_{11}\mathbf{e}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$  pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}\det(a_{11}\mathbf{e}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) &= a_{11} \det[\mathbf{e}_1, (a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{2n}\mathbf{e}_n), \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_n] = \\ &a_{11}a_{21} \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_n) + a_{11}a_{22} \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_n) + \dots + \\ &a_{11}a_{2n} \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_n).\end{aligned}$$

O termo  $a_{11}a_{21} \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_n)$  é igual a zero mesmo que  $a_{11}a_{21}$  não o sejam, pois contém o vetor  $\mathbf{e}_1$  pelo menos duas vezes. Portanto:

$$\begin{aligned}\det(a_{11}\mathbf{e}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) &= a_{11}a_{22} \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_n) + \\ &a_{11}a_{23} \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_n) + \dots + a_{11}a_{2n} \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_n).\end{aligned}\quad (\text{D.7})$$

Vê-se que a soma dada pelo membro esquerdo da Eq. D.7 contém um número de termos igual ao número de permutações de  $n - 1!$  elementos (alguns dos quais podem ser nulos). E, consequentemente, a soma dada pela Eq. D.6 contém no máximo  $n!$  termos não nulos. O determinante de um sistema de vetores se compõe de uma soma de  $n!$  termos, alguns dos

quais podendo ser nulos. Reescrevemos:

$$\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) = \det \left( \sum_{j_1=1}^n a_{j_1} \mathbf{e}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n a_{j_2} \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^n a_{j_n} \mathbf{e}_{j_n} \right)$$

$$\sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_n} \det(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_n}).$$

Dizemos que dois termos quaisquer da sequência  $j_1, j_2, \dots, j_n$  apresentam uma inversão se o maior estiver à esquerda do menor e denominamos número total de inversões da sequência, ao número de inversões de cada termo tomado sucessivamente, com os que o seguem. Se o número de inversões de uma sequência for nulo a mesma está ordenada na ordem natural  $1, 2, \dots, n$ .

Para contar o número de transposições necessárias para trazer uma sequência à ordem natural partimos de  $j_1$  e o comutamos com o primeiro à sua direita que apresentar uma inversão. A seguir, o comutamos com o segundo que apresentar uma inversão e assim procedemos sucessivamente, até que o índice não apresente mais nenhuma inversão. Recomeçamos o procedimento com o termo agora ocupando a primeira posição ou, se esse termo não apresentar nenhuma inversão, com o segundo e assim prosseguimos até reordenar a sequência na ordem natural. A cada operação, o número de inversões diminui de uma unidade. Seja  $I$  o número de transposições feitas até que a sequência esteja reordenada na ordem natural. Façamos agora corresponder a cada transposição de índices a transposição dos dois vetores de base correspondentes. Em consequência da condição 1 enunciada na definição de determinante dada à pág. 265, cada transposição muda o determinante em seu oposto. Portanto:

$$\det(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_n}) = (-1)^{I(j_1, j_2, \dots, j_n)} \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n).$$

Sendo  $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$ , têm-se que:

$$\det(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_n}) = (-1)^{I(j_1, j_2, \dots, j_n)}$$

e, em consequência:

$$\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} (-1)^{I(j_1, j_2, \dots, j_n)}.$$

Enunciamos então o seguinte:

**Teorema 6 (Unicidade do determinante):** A única função escalar capaz de satisfazer às quatro condições prescritas na definição dada à pág. 265 é [93]:

$$\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} (-1)^{I(j_1, j_2, \dots, j_n)}, \quad (\text{D.8})$$

onde  $I(j_1, j_2, \dots, j_n)$  representa o número de inversões da sequência  $j_1, j_2, \dots, j_n$ .

Denominamos termo de um determinante a cada um dos termos da soma dada pela Eq. D.8.

Para nos assegurarmos da existência da função determinante, mostramos que a função dada pela Eq. D.8 satisfaz efetivamente às quatro condições da definição dada à pág. 265.

Notamos inicialmente que a transposição de dois vetores consecutivos resulta na troca de sinal do determinante da sequência. De fato:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_j, \mathbf{A}_{j+1}, \dots, \mathbf{A}_n) &= \\ \det(\mathbf{A}_1, \dots, \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n, \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \dots + \beta_n\mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{A}_n) & \\ \alpha_1\beta_2 \det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{A}_n) + \alpha_2\beta_1 \det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{A}_n) + \dots + \\ \alpha_{n-1}\beta_n \det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{A}_n) + \alpha_n\beta_{n-1} \det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n-1}, \dots, \mathbf{A}_n) &= \\ -\alpha_1\beta_2 \det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{A}_n) - \alpha_2\beta_1 \det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{A}_n) - \dots - \\ \alpha_{n-1}\beta_n \det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n-1}, \dots, \mathbf{A}_n) - \alpha_n\beta_{n-1} \det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{A}_n) &= \\ -\det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{j+1}, \mathbf{A}_j, \dots, \mathbf{A}_n). \end{aligned}$$

A transposição de dois vetores consecutivos implica em uma transposição dos vetores de base  $\mathbf{e}_j$  de cada termo do determinante. O determinante do sistema de vetores troca de sinal.

A transposição de dois vetores  $\mathbf{A}_j$  e  $\mathbf{A}_{j+2}$  é feita da seguinte forma: troca-se inicialmente a posição de  $\mathbf{A}_j$  e  $\mathbf{A}_{j+1}$ . O determinante da sequência troca de sinal. Troca-se a seguir a posição dos vetores vizinhos  $\mathbf{A}_j$  e  $\mathbf{A}_{j+2}$ , o que resulta em nova troca do sinal do determinante da sequência. Finalmente, troca-se a posição dos vetores vizinhos  $\mathbf{A}_{j+1}$  e  $\mathbf{A}_{j+2}$ , o que resulta na terceira troca do sinal do determinante da sequência. Ao fim da operação, os vetores  $\mathbf{A}_j$  e  $\mathbf{A}_{j+2}$  trocaram de posição. A transposição dos vetores localizados nas posições  $j$  e  $j+2$  resulta portanto em 3 inversões e, consequentemente, na inversão do sinal do determinante da sequência de vetores. Estendendo o raciocínio, vê-se que a troca de posição de dois vetores quaisquer  $\mathbf{A}_j$  e  $\mathbf{A}_k$  com  $k > j$  resulta em um número de transposições  $I = [2(k - j - 1) + 1]$ , sempre ímpar. Portanto, a transposição de dois vetores  $\mathbf{A}_j$  e  $\mathbf{A}_k$  resulta sempre na troca do sinal do determinante da sequência de vetores.

Mostremos que a função dada pela Eq. D.8 satisfaz à segunda condição da definição dada à pág. 265. Somando ao vetor  $\mathbf{A}_1$  uma combinação linear  $\alpha_2\mathbf{A}_2 + \alpha_3\mathbf{A}_3 + \dots + \alpha_n\mathbf{A}_n$  temos:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + \alpha_3\mathbf{A}_3 + \dots + \alpha_n\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) &= \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) + \\ \alpha_2 \det(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) + \dots + \alpha_n \det(\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) &= \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n), \end{aligned}$$

pois  $\det(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) = \dots = \det(\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) = 0$ , o que demonstra a proposição.

No que se refere à condição 3 da definição, temos:

$$\begin{aligned} \det(\alpha\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) &= \det[\alpha(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{1n}\mathbf{e}_n), \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n] = \\ \alpha [\det(a_{11}\mathbf{e}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) + \det(a_{12}\mathbf{e}_2, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) + \dots + \det(a_{1n}\mathbf{e}_n, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)]. \end{aligned}$$

A expressão do determinante, dada pela Eq. D.1.7 satisfaz à quarta condição de definição, pois não há inversões na sequência de vetores  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  e  $a_{1j_1} = a_{2j_2} = \dots = a_{nj_n} = 1$ .

Face ao acima exposto, enunciamos:

**Teorema 7 (Existência do determinante):** A função escalar dos  $n$  vetores  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$  dada pela Eq. D.8 satisfaz efetivamente às quatro condições da definição de determinante [93].

Os teoremas e definições seguintes tratam de matrizes e determinantes de matrizes:

Notamos inicialmente, que as três afirmações abaixo são equivalentes:

1. O operador  $T$  é biunívoco;
2. O espaço nulo de  $T$  é o vetor  $\mathbf{Z}$ ;
3.  $\det T \neq 0$ .

**Definição:** Uma matriz  $A$  é regular se  $\det A \neq 0$ . Caso contrário, a matriz é singular.

**Teorema 8:** Se  $C = A + B$  então  $\det C = \det A + \det B$ .

**Teorema 9:** Se  $C = AB$  então  $\det C = \det A \det B$ .

Em virtude desse teorema têm-se que:

$$\det Q \det Q^{-1} = \det I = 1 \quad \longrightarrow \quad \det Q^{-1} = \frac{1}{\det Q}.$$

$I$  é a matriz identidade. Seu determinante é igual a 1. Uma consequência dessa propriedade é que os determinantes de duas matrizes similares são iguais:

$$\det B = \det Q \det A \det Q^{-1} = \det Q \det A \frac{1}{\det Q} = \det A.$$

O determinante é um *invariante* do operador, que independe da matriz que o representa. Outros dois invariantes de um operador algébrico linear são o traço e o número  $(a_{ij}a_{ij} - a_{ii}a_{jj})/2$ . A demonstração dessas duas propriedades é deixada como exercício.

**Teorema 10:** Se a matriz  $A$  for regular, a igualdade  $AB = 0$  implica em que  $B = 0$ .

Demonstremos esse teorema. A matriz  $AB$  sendo nula, têm-se que  $AB\mathbf{X} = \mathbf{Z}$ . Como a matriz  $A$  é regular, admite uma inversa e podemos escrever  $A^{-1}AB\mathbf{X} = B\mathbf{X} = \mathbf{Z}$ , para todo vetor  $\mathbf{X}$ . A matriz que leva qualquer vetor para  $\mathbf{Z}$  é a matriz nula.

**Teorema 11:** Para que uma matriz  $A$  comute com uma matriz arbitrária é necessário e suficiente que os elementos de  $A$  sejam nulos, com exceção dos da diagonal principal, que devem ser iguais.

**Teorema 12:** O determinante de uma matriz  $A$  é igual ao determinante de sua transposta  $A^T$ .

A prova do teorema é feita por indução: mostramos que, se o teorema se verificar para uma matriz de dimensões  $n \times n$ , isso é, que se o determinante de uma matriz  $n \times n$  for igual ao de sua transposta, o de uma matriz  $(n+1) \times (n+1)$  e o de sua transposta são iguais.

Para os casos de matrizes de dimensões  $2 \times 2$ , verifica-se sem dificuldade que o teorema

se aplica. Seja uma matriz de dimensões  $n \times n$ , conforme abaixo:

$$A = \left( \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & \boxed{a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1}} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \\ a_{n+1,n} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{array} \right).$$

Denominamos por  $A_1$  a matriz obtida pela eliminação da primeira linha e da primeira coluna da matriz  $A$  (acima demarcada pelo quadro). Denominamos por  $A_2$  a matriz obtida pela eliminação da primeira linha e da segunda coluna e procedemos sucessivamente:  $A_m$  é a matriz obtida eliminando-se a primeira linha e a coluna  $m$ .

O determinante da matriz  $A$  é dado por:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_1 - a_{12} \det A_2 + \dots + (-1)^{1+n+1} a_{1n+1} \det A_{n+1} \\ &= \sum_{j=1}^{1+j+1} (-1)^n a_{ij} \det A_j. \end{aligned}$$

Calculemos agora o determinante da matriz  $B = A^T$ :

$$\det B = \det A^T = \det \left( \begin{array}{ccccc} a_{11} & & & & a_{n+1,1} \\ a_{12} & \dots & a_{n1} & & a_{n+1,2} \\ a_{13} & \dots & a_{n2} & \dots & a_{n+1,3} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} & \dots & a_{n+1,n} \\ a_{1n+1} & \dots & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{array} \right).$$

As matrizes  $B_j$ , obtidas pela eliminação da primeira coluna e da  $j$ -ésima linha da matriz  $B$  são iguais, respectivamente, às matrizes  $A_1^T, A_2^T, \dots, A_j^T, \dots, A_n^T$ . O determinante da matriz  $B$  é dado por:

$$\begin{aligned} \det B = \det A^T &= a_{11} \det A_1^T - a_{12} \det A_2^T + \dots + (-1)^{1+n+1} a_{1n+1} \det A_{n+1}^T \\ &= \sum_{j=1}^{1+j+1} (-1)^n a_{ij} \det A_j. \end{aligned}$$

Como por hipótese  $\det A_j = \det A_j^T$  o determinante da matriz  $B$  é igual ao da matriz  $A$ , o que prova o teorema.

Em consequência desse teorema, o determinante do sistema de vetores formado pelas colunas de uma matriz é igual ao determinante do sistema de vetores formado pelas linhas da mesma. A afirmação de que os vetores coluna de uma matriz são linearmente independentes é equivalente à de que as linhas o são.

### D.1.8 Autovalores e autovetores de um operador algébrico linear

**Definição:** Um vetor  $\mathbf{X} \neq Z$  é autovetor de um operador algébrico linear  $T$  se  $T\mathbf{X}$  for colinear com  $\mathbf{X}$ , isso é, se  $T\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$ . O número  $\lambda$  denomina-se autovalor de  $T$ , associado ao autovetor  $\mathbf{X}$ .

O autovalor  $\lambda$  associado ao autovetor  $\mathbf{X}$  é calculado pela equação:

$$(T - \lambda I) \mathbf{X} = \mathbf{Z}. \quad (\text{D.9})$$

Como procura-se um autovetor  $\mathbf{X}$  não trivial é necessário que o núcleo de  $(T - \lambda I)$  não seja trivial, ou, de forma equivalente, que:

$$\det(T - \lambda I) = 0.$$

Os autovalores de um operador  $T$  de dimensões  $n \times n$  são as raízes de uma equação polinomial de grau  $n$  em  $\lambda$ :

$$\prod_{i=1}^{n-\sum m_i} (\lambda - \lambda_i)^{m_i} = 0, \quad (\text{D.10})$$

onde  $m_i$  é a multiplicidade do autovalor  $\lambda_i$ . Essa equação característica tem  $n$  raízes reais ou complexas. Se a matriz for real, os coeficientes da equação polinomial são reais. Raízes complexas, caso existam, ocorrem em pares complexos conjugados. Um operador de dimensões  $n \times n$  tem portanto  $n$  autovalores.

Os autovetores associados a um autovalor  $\lambda$  são determinados após o cálculo desse último. Se  $\mathbf{X}$  for um autovetor de  $T$ ,  $\alpha\mathbf{X}$  também o é. Um autovetor é portanto, identificado por sua direção, sua magnitude podendo ser qualquer. Da Eq. D.9 depreende-se que, se um autovalor for complexo, os autovetores correspondentes também o são. Mostramos a seguir o seguinte teorema:

**Teorema:** Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Sejam  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$  os autovetores, associado aos autovalores distintos,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , respectivamente. Os autovetores são linearmente independentes quando a equação:

$$\alpha_1 \mathbf{X}_1 + \alpha_2 \mathbf{X}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{X}_n = \mathbf{Z} \quad (\text{D.11})$$

só se verifica para  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ . Vejamos se esse caso ocorre. Aplica-se o operador:

$$(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_{n-1} I)$$

aos dois membros da Eq. D.11. Os binômios que compõe o produto acima são comutáveis entre si. Como  $(T - \lambda_r I)\mathbf{X}_r = \mathbf{Z}$  obtém-se:

$$\alpha_n (T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_{n-1} I) \mathbf{X}_n = \mathbf{Z}.$$

Como:

$$(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_{n-1} I) \mathbf{X}_n \neq \mathbf{Z}$$

é necessário que  $\alpha_n = 0$ . Consequentemente, a Eq. D.11 torna-se:

$$\alpha_1 \mathbf{X}_1 + \alpha_2 \mathbf{X}_2 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{Z}. \quad (\text{D.12})$$

Aplica-se o operador:

$$(T - \lambda_1 I) (T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_{n-2} I)$$



$$\alpha_{n-1} (T - \lambda_1 I) (T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_{n-2} I) \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{Z}.$$

A igualdade só se verifica se  $\alpha_{n-1} = 0$ . A Eq. D.12 torna-se:

$$\alpha_1 \mathbf{X}_1 + \alpha_2 \mathbf{X}_2 + \dots + \alpha_{n-2} \mathbf{X}_{n-2} = \mathbf{Z}. \quad (\text{D.13})$$

Repetindo sucessivamente o procedimento conclui-se que todos os coeficientes  $\alpha_j$  devem ser iguais a zero o que demonstra o teorema.

Como autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes um operador de dimensões  $n \times n$  com autovalores distintos tem  $n$  autovetores linearmente independentes. Nesse caso, a cada autovalor corresponde apenas um autovetor e os autovetores formam uma base do espaço  $E_n$ , em que  $T$  é definido.

Um caso especial ocorre se o operador  $T$  tiver autovalores repetidos. A cada autovalor de multiplicidade  $m$  podem corresponder de 1 a  $m$  autovetores. Se o número de autovetores correspondentes a um autovalor for menor do que sua multiplicidade os autovetores não formam mais uma base de  $E_n$ . Como exemplo, as matrizes [64]:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e:} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

têm a mesma equação característica  $(\lambda - 4)^2(\lambda - 2) = 0$ . A primeira tem dois autovetores linearmente independentes associados a  $\lambda = 4$  e a segunda, apenas um. Situação semelhante ocorre com as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e:} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Definição:** Denomina-se *subespaço próprio* associado ao autovalor real  $\lambda$  o subespaço variado pelos autovetores associados àquele autovalor.

Quando os autovetores de um operador  $T$  formam uma base, a matriz que o representa tem uma forma particularmente simples. Nesse caso pode-se atribuir aos autovetores as coordenadas  $(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)$ , respectivamente, na base dos autovetores. Como  $T\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$  a matriz que representa o operador nessa base é diagonal, com os autovalores dispostos ao longo da diagonal principal. Todos os demais elementos são iguais a zero. Enunciamos o seguinte:

**Teorema:** Se os autovalores de um operador algébrico linear forem reais e distintos a matriz que o representa é diagonalizável. A diagonal principal é formada pelos autovalores de  $T$ .

As propriedades acima podem ser usadas para a resolução de sistemas de equações algébricas lineares, em que os autovalores do operador do membro esquerdo formam uma base. Pode ser usada também na resolução de equações diferenciais lineares ordinárias homogêneas, com coeficientes constantes.

Os casos de autovalores complexos e de autovalores repetidos, reais ou complexos, são tratados nas Secs. D.6 e D.7.

Concluindo, definimos o espectro de um operador algébrico linear:

**Definição:** Ao conjunto de autovalores, finitos ou infinitos de um operador  $T$ , denomina-se de espectro do operador.

### D.1.9 Matrizes ligadas a uma matriz dada

Seja  $A$  uma matriz definida sobre o corpo de números complexos, da qual designamos o elemento geral por  $a_{ik}$ .

**Definição:** Denominamos por matriz transposta de  $A$  e a designamos por  $A'$ , à matriz cujos elementos são:  $a'_{ik} = a_{ki}$ .

**Definição:** Denominamos por matriz conjugada de  $A$  e a designamos por  $\bar{A}$ , à matriz cujos elementos são o conjugado dos elementos de  $A$ :  $\bar{a}_{ik} = \overline{(a_{ik})}$ .

**Definição:** Denominamos por matriz associada ou adjunta de  $A$  e a designamos por  $A^*$ , à matriz cujos elementos são:  $a^*_{ik} = \bar{a}_{ki}$ .

**Definição:** Uma matriz é regular quando seu determinante é diferente de zero.

**Definição:** Uma matriz é singular quando seu determinante é igual de zero.

**Definição:** Uma matriz é simétrica quando coincide com sua transposta.

**Definição:** Uma matriz é real quando coincide com sua conjugada.

**Definição:** Uma matriz é hermítica, ou auto-adjunta, quando coincide com sua adjunta.

Aplicando sucessivamente cada uma dessas operações ao produto de duas matrizes, têm-se que  $(AB)^T = B^T A^T$ ,  $\bar{A}\bar{B} = \bar{A}\bar{B}$  e  $(AB)^* = B^* A^*$ .

As quatro matrizes  $A$ ,  $A^T$ ,  $\bar{A}$  e  $A^*$  são simultaneamente regulares, ou simultaneamente singulares.

Matrizes simétricas reais e matrizes hermíticas têm importante papel na física matemática. Uma das principais razões decorre dos dois teoremas seguintes:

**Teorema:** O espectro de uma matriz hermítica é necessariamente real.

Seja  $\mathbf{X}$  um autovetor de uma matriz hermítica  $H$ . Fazemos o produto  $\mathbf{X}^* H \mathbf{X}$ , onde  $\mathbf{X}^*$  representa o vetor complexo conjugado de  $\mathbf{X}^T$ . O produto pode ser representado por  $x_i^* h_{ij} x_j$ , onde  $h_{ij}$  é o elemento geral da matriz hermitiana  $H$ . Determinemos o complexo conjugado desse produto. Notando que  $h_{ji}^* = h_{ij}$  e que o complexo conjugado de um produto é igual ao produto do complexo conjugado dos fatores temos:

$$(x_i^* h_{ij} x_j)^* = x_i h_{ji}^* x_j^* = x_i h_{ij} x_j^* = x_j^* h_{ji} x_i = x_i^* h_{ij} x_j,$$

isso é, o conjugado do produto  $x_i^* h_{ij} x_j = \mathbf{X}^* H \mathbf{X}$  coincide com o próprio produto, sendo

portanto, real. Observando que:

$$\mathbf{X}^* H \mathbf{X} = x_i^* h_{ij} x_j = x_i^* \mu x_i = \mu x_i^* x_i$$

e que  $\mathbf{X}^* H \mathbf{X}$  e  $x_i^* x_i$  são reais, conclui-se que o autovalor  $\mu$  também o é.

**Teorema:** Os autovetores de uma matriz auto adjunta são ortogonais entre si.

Sejam  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ , dois autovetores de  $H$ , aos quais se associam os autovalores distintos  $a$  e  $b$ , respectivamente. Em consequência  $h_{ij}x_j = ax_i$  e  $h_{ij}y_j = by_i$ . Por ser  $H$  uma matriz hermitiana  $x_i^* h_{ij} = ax_j^*$ . Temos então:

$$x_i^* h_{ij} y_j = x_i^* b y_i = b(x_i^* y_i) \quad \text{e:} \quad x_i^* h_{ij} y_j = a x_j^* y_j = a(x_j^* y_j).$$

Como  $b(x_i^* y_i) = a(x_j^* y_j)$  e os autovalores  $a$  e  $b$  são distintos é necessário que  $x_j^* y_j = 0$ , isso é, que os autovetores de  $H$  sejam ortogonais.

O teorema se verifica se a matriz auto adjunta  $H$  for real e simétrica. Os autovetores de uma matriz real e simétrica são portanto, ortogonais.

**Teorema:** Seja  $\lambda$  um autovalor de um operador algébrico linear, então:

1. Se  $T^* = T^{-1} \implies |\lambda| = 1$ ;
2. Se  $T^* = T \implies \lambda \in \mathbb{R}$ ;
3. Se  $T^* = -T \implies \lambda$  é imaginário puro;
4. Se  $T = S^* S$ , sendo  $S$  não singular, então  $\lambda$  é real e positivo.

### D.1.10 Operadores ortogonais

**Definição (operadores ortogonais):** Um operador algébrico linear  $T : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  é ortogonal se a cada  $\mathbf{X} \in \mathcal{R}^n$ ,  $\|\mathbf{X}\| = \|T\mathbf{X}\|$ .

Exemplo de operador ortogonal é o de mudança entre duas bases ortonormais. Duas importantes propriedades de operadores ortogonais são:

**Teorema:** Se um operador for ortogonal, então  $|\det T| = 1$ .

Sendo a matriz ortogonal e o módulo de qualquer vetor  $\mathbf{X}_1$ , igual ao módulo de sua imagem,  $A\mathbf{X}_1$ , o único vetor que tem por imagem o vetor nulo  $Z$  através da transformação  $A\mathbf{X}_1$  é o vetor nulo.  $A$  representa portanto um operador biunívoco e admite um operador inverso representado pela matriz  $A^{-1}$ . Sendo  $A$  ortogonal, têm-se que:

$$\mathbf{X}_1^A \cdot \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2^A \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1^A (A^T A) \mathbf{X}_1.$$

Da relação acima conclui-se que  $A^T A = I$  e que, portanto,  $A^T = A^{-1}$ . Como  $\det A^T = \det A$  têm-se que  $\det A^T = \det A = \det A^{-1}$ . Consequentemente  $\det A = 1$ .

As seguintes proposições são equivalentes:

1.  $A$  é uma matriz ortogonal;

2. As linhas de  $A$  formam um conjunto de vetores ortonormal;
3. As colunas de  $A$  formam um conjunto ortonormal.

**Teorema:** A condição necessária e suficiente para que um operador seja ortogonal é que  $T^T = T^{-1}$ .

### D.1.11 Operadores positivos

**Definição (operadores positivos definidos):** Um operador algébrico linear, representado por uma matriz  $A$ , é positivo definido se  $\mathbf{X} \cdot A\mathbf{X} > 0$ . Denotamos um operador positivo como  $A > \mathbf{O}$ .

A importância dos operadores positivos é ressaltada por suas propriedades, algumas das quais decorrentes dos seguintes teoremas [90]:

**Teorema:** Os autovalores de um operador positivo definido são todos positivos [90].

De fato, se algum autovalor  $\lambda$  de  $A$  fosse negativo, o vetor  $\lambda\mathbf{X}$ , onde  $\mathbf{X}$  é o autovetor associado a  $\lambda$ , teria sentido contrário a  $\mathbf{X}$  e  $(\lambda\mathbf{X}) \cdot \mathbf{X} < 0$ , o que contraria a hipótese de que  $A$  é positiva.

**Teorema:** Se os autovalores de um operador  $H$  auto-adjunto forem todos positivos, o operador é positivo definido.

Seja  $\mathbf{X}$  um vetor qualquer. Esse vetor, descrito na base dos autovetores  $\mathbf{X}_j$  de  $H$ , são da forma  $\mathbf{X} = \sum \mathbf{X}_j$ . Sendo  $\mathbf{X}_j$  um autovetor de  $H$  têm-se que  $H\mathbf{X}_j = \lambda_j \mathbf{X}_j$ . Nessas condições:

$$\mathbf{X} \cdot H\mathbf{X} = \sum \mathbf{X}_j \cdot \lambda \mathbf{X}_j.$$

Como os autovetores de um operador auto-adjunto são ortogonais entre si:

$$\sum \mathbf{X}_j \cdot \lambda \mathbf{X}_j = \sum \lambda_j |\mathbf{X}_j|^2.$$

Sendo os autovetores de  $H$  positivos o membro direito da equação acima é positivo, o que demonstra que  $H > \mathbf{O}$ .

**Teorema:** O determinante de um operador positivo definido é positivo [93, 90].

Sendo o determinante de um operador dado pelo produto de seus autovalores a veracidade do teorema decorre do fato de serem todos os autovalores positivos.

**Teorema:** Todo operador positivo é inversível [93, 90].

Este teorema é consequência do fato do determinante do operador ser positivo.

**Teorema:** As matrizes  $AA'$ ,  $A'A$ ,  $AA^*$  e  $A^*A$  são positivas, exceto quando forem singulares [93].

No caso em que a matriz  $A$  é real, temos:

$$\mathbf{X}^T A^T = \mathbf{Y}_1^T \quad \text{e:} \quad A\mathbf{X} = \mathbf{Y}_2.$$

Como  $A$  é simétrica  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}$  e  $\mathbf{X}^T (A^T A) \mathbf{X} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y} > 0$ , o que demonstra o teorema para o caso em que  $A$  é real. Se  $A$  for singular, existem vetores  $\mathbf{X} \neq \mathbf{Z}$  tais que  $A\mathbf{X} = \mathbf{Z}$ . Nesse caso, a matriz  $A$  não é estritamente positiva.

Sendo a matriz  $A$  complexa:

$$\mathbf{X}^T A^* = \mathbf{Y}_1^* \quad \text{e:} \quad A\mathbf{X} = \mathbf{Y}_2,$$

onde  $\mathbf{Y}_1^*$  denota o vetor transposto e complexo conjugado de  $\mathbf{Y}_1$ . Como  $A$  é hermítica  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}$  e  $\mathbf{X}^T (A^* A) \mathbf{X} = \mathbf{Y}_1^* \mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y} > 0$ , o que demonstra o teorema para o caso em que  $A$  é complexa. Se  $A$  for singular, existem vetores  $\mathbf{X} \neq \mathbf{Z}$  tais que  $A\mathbf{X} = \mathbf{Z}$ . Como no caso real, a matriz  $A$  não é estritamente positiva.

Os teoremas seguintes fornecem uma estimativa do determinante de matrizes positivas.

**Teorema:** O determinante de uma matriz positiva não excede o produto dos termos de sua diagonal principal [90].

Sendo  $A$  positiva, os elementos de sua diagonal principal são todos positivos. De fato, fazendo o produto  $H\mathbf{e}_1$  extraí-se a primeira coluna da matriz. O produto  $\mathbf{e}_1^* H \mathbf{e}_1$  é da forma:

$$\mathbf{e}_1^* H \mathbf{e}_1 = 1 \times h_{11} \times 1 = a_{11}.$$

Como  $H$  é positiva definida têm-se necessariamente, que  $a_{11} > 0$ . Repetindo o procedimento com os demais vetores  $\mathbf{e}_j$ ,  $1 < j \leq n$ , conclui-se que todos os elementos da diagonal principal são positivos.

Sejam  $h_{ij}$  com  $i = j \leq n$ , os elementos da diagonal principal de  $A$ . Definimos  $d_i = 1/\sqrt{h_{ii}}$ . Seja  $D$  uma matriz diagonal de elementos  $d_i$ . Definimos:

$$B = DAD.$$

A matriz  $B$  é simétrica e positiva e os elementos de sua diagonal principal são todos iguais a 1. Sejam  $b_i$  os autovalores dessa matriz, todos positivos. Mostremos inicialmente que:

$$\prod b_i \leq \left( \sum \frac{b_i}{n} \right)^n.$$

Quando os autovalores forem todos iguais entre si ( $b_i = b$ ) o membro direito da igualdade acima torna-se:

$$\left( \sum \frac{b_i}{n} \right)^n = \left( \sum \frac{nb}{n} \right)^n = b^n = \prod b_i.$$

Quando os autovalores não forem todos iguais entre si ( $\sum b_i/n$ ) conterá o produto dos mesmos e mais outros termos, todos positivos, o que demonstra a propriedade. Em virtude da mesma:

$$\det B \leq \left( \frac{\operatorname{tr} B}{n} \right)^n.$$

Como os elementos da diagonal de  $B$  são todos iguais a 1  $\operatorname{tr} B = n$  e  $\det B \leq 1$ . Usando a propriedade multiplicativa do determinante de um produto de matrizes temos:

$$\det B = \det A (\det D)^2 = \frac{\det A}{\prod h_{ij}} < 1 \quad \rightarrow \quad \det H < \prod h_{ij} \quad (i = j),$$

o que mostra que o determinante de uma matriz hermítica é menor ou igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

**Teorema:** O módulo do determinante de uma matriz  $T$  qualquer é menor ou igual ao produto do comprimento dos vetores que formam as colunas da matriz [90].

Definimos a matriz  $H = T^*T$ , hermítica. Os elementos da diagonal de  $H$  são dados por  $\|c_{ij}\|^2 = t_{ik}^*T_{kj}$ , com  $i = j$ . Esses elementos são todos positivos. Pelo teorema anterior:

$$\det H \leq \|c_{ij}\|^2.$$

Mas:

$$\det H = \det T^* \det T = \overline{\det T} \det T = |\det T|^2$$

Portanto:

$$\det H = |\det T|^2 \leq \|c_{ij}\|^2 \quad \rightarrow \quad |\det T| \leq \|c_{ij}\|.$$

Sendo  $\det H$  menor do que o produto dos módulos dos elementos da diagonal principal de  $H$ , será menor do que o produto dos módulos de cada coluna.

Este teorema reflete o fato de que, se os lados de um paralelepípedo forem ortogonais entre si, o volume do sólido é dado pelo produto do comprimento das arestas não paralelas entre si.

Algumas propriedades adicionais e aplicações são discutidas nos exercícios 6 e 7 desse apêndice.

### D.1.12 A Alternativa de Fredholm

O caso em que o operador linear  $\mathcal{L}$  de um sistema não homogêneo de equações algébricas lineares é singular só admite solução quando o vetor  $\mathbf{B}$ , do membro direito pertence ao subespaço varrido pelos vetores formados pelas colunas da matriz que representa o operador.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (\text{D.14})$$

Essa condição de solvabilidade se expressa pela exigência de  $\mathbf{B}$  seja ortogonal ao vetor  $\mathbf{u}^+$ , que, é ortogonal a todos aos vetores formados pelas colunas de  $\mathcal{L}$ , conforme ilustrado na Fig. (D.2). Escrevemos:

$$\langle \mathbf{u}^+, \mathbf{B} \rangle = 0$$

o que se expressa como:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \dots & a_{n1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \dots & a_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \dots & a_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \\ \vdots \\ u_n^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

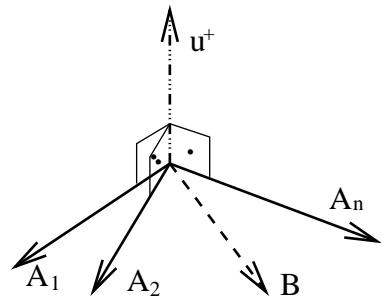


Figura D.2: A alternativa de Fredholm.

onde o asterisco indica o complexo conjugado. Dito de outra forma, o vetor  $\mathbf{B}$  deve ser ortogonal a  $\mathbf{u}^+$ , que forma a base do núcleo do operador transposto,  $\mathcal{L}^T$  [93]. No caso da análise funcional, em que os elementos da matriz do lado esquerdo são operadores diferenciais, as variáveis  $x_i$  e os elementos  $b_i$  do vetor do lado direito são funções complexas, têm-se uma situação semelhante. A condição de solvabilidade da Eq. D.14 se expressa pela imposição de que o vetor de funções do lado direito seja ortogonal ao vetor que gera o espaço nulo do operador adjunto de  $\mathcal{L}$ , que denominamos como  $\mathcal{L}^+$ . Essa condição é conhecida como Alternativa de Fredholm [121, 83].

## D.2 Sistemas Dinâmicos

### D.2.1 Definições

**Definição:** Um sistema cujo estado é definido por um vetor de variáveis  $\mathbf{X}$  e cuja evolução obedece a um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem da forma:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\{\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\gamma}, t\}) \quad (\text{D.15})$$

denomina-se um *Sistema Dinâmico*. Na equação acima,  $\boldsymbol{\gamma}$  é um vetor de parâmetros.

Exemplos de sistemas dinâmicos são o Brusselador, proposto por Prigogine & Lefever em 1968 [68, 122]):

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= A - (B + 1)X + X^2Y \\ \frac{dY}{dt} &= BX - X^2Y \end{aligned}$$

e o modelo de interação entre populações conhecido com Lotka-Volterra:

$$\frac{du}{dt} = u - uv = f_1(u; v) \quad (\text{D.16})$$

$$\frac{dv}{dt} = -v + uv = f_2(u; v). \quad (\text{D.17})$$

O membro direito das equações de evolução não depende explicitamente do tempo.

**Definição:** Sistemas dos quais o membro direito das equações de evolução não contém o tempo explicitamente, denominam-se *Sistemas Autônomos*.

Sistemas cuja evolução é regida por uma equação da qual o membro direito contém o tempo explicitamente, são não autônomos. A equação de Van der Pool forçada é um exemplo de sistema não autônomo:

$$\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = A \cos \omega t.$$

Em geral, sistemas regidos por equações de evolução de segunda ordem, ou de ordem mais alta, podem ser reescritos na forma da Eq. D.15. Como exemplo, a equação de Van

der Pool pode ser reescrita na forma de um sistema de duas equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - (x^2 - 1)y + A \cos \omega t.\end{aligned}$$

**Definição:** Variáveis independentes do problema são aquelas às quais se pode atribuir valor em um certo instante de tempo.

Se as variáveis independentes do sistema forem as que definem a posição do mesmo o vetor  $\mathbf{F}$  é a velocidade com que o sistema se desloca no espaço e as componentes  $F_i$  de  $\mathbf{F}$  são as componentes  $\dot{\mathbf{X}}$  da velocidade.

O número de variáveis independentes (ou de graus de liberdade) de um sistema dinâmico autônomo é igual ao número de equações de primeira ordem que o descrevem.

O estado de um Sistema Dinâmico pode ser representado no espaço de variáveis independentes do sistema.

**Definição:** O espaço de variáveis independentes de um Sistema Dinâmico denomina-se *Espaço de Fases* do sistema.

Um ponto do espaço de fases define um estado do sistema. Se o sistema se mantiver indefidamente nesse ponto, o ponto é denominado *Ponto Fixo* do espaço de Fases. Quando o sistema se encontra em um Ponto Fixo, está em um estado estacionário.

**Definição:** Pontos do Espaço de Fases em que  $d\mathbf{X}/dt = \mathbf{Z}$  denominam-se Pontos Fixos.

Sistemas não autônomos não têm, em geral, pontos fixos, embora esses possam existir, como no caso da Eq. de Mathieu:

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos t)x = 0.$$

Se o estado do sistema se alterar com o tempo o ponto que representa seu estado se desloca e descreve uma trajetória no Espaço de Fases. O objetivo da teoria de Sistemas Dinâmicos é determinar o conjunto de todas as trajetórias no Espaço de Fases.

## D.2.2 Unicidade das trajetórias no espaço de fases

**Teorema (Cauchy-Kovaleska):** Seja um sistema dinâmico cuja evolução obedece a uma equação determinística da forma [121]:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (D.18)$$

Se  $\mathbf{F}$  for contínua e diferenciável, isso é, se:

$$|\mathbf{F}(\mathbf{X}(t + \Delta t)) - \mathbf{F}(\mathbf{X}(t))| \leq K |\mathbf{X}(t + \Delta t) - \mathbf{X}(t)|,$$

o comprimento de um pequeno trecho da trajetória próximo ao ponto  $\mathbf{X}$  do espaço de fases de dimensão finita é dado por:

$$\begin{aligned}ds &= (dX_1^2 + dX_2^2 + \dots + dX_n^2)^{1/2} \\ &= [(F_1 dt)^2 + (F_2 dt)^2 + \dots + (F_n dt)^2]^{1/2} = dt \left( \sum F_i^2 \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

O vetor tangente à trajetória é dado por:

$$\frac{ds}{dX_j} = \frac{dt (\sum F_i^2)^{1/2}}{F_j dt} = \frac{(\sum F_i^2)^{1/2}}{F_j} = \left(1 + \sum_i^{i \neq j} \frac{F_i^2}{F_j^2}\right)^{1/2}.$$

A tangente é bem definida, exceto nos pontos fixos, onde  $\mathbf{F} = \mathbf{Z}$ , isso é, em pontos onde  $d\mathbf{X}/dt = \mathbf{Z}$ , ou pontos fixos, que são pontos singulares do espaço de fases. Consequentemente, as trajetórias não podem se cruzar, exceto nos pontos fixos. Essa restrição topológica impõe severas restrições à evolução de sistemas com apenas um ou dois graus de liberdade e os impede de apresentar comportamento caótico.

O regime caótico é caracterizado por comportamento aperiódico, movimento com grande número de frequências e sensibilidade à condição inicial, no sentido de que trajetórias inicialmente próximas se afastam exponencialmente, nos instantes iniciais da evolução.

### D.2.3 Sistemas conservativos e dissipativos

Consideremos um pequeno volume no Espaço de Fases  $dV = \prod dX_i$  e fixemos um número de estados dentro desse volume.  $dV$  é suficientemente grande para não conter apenas um estado. Como as trajetórias não se cruzam no Espaço de Fases o número de trajetórias geradas pela mudança dos estados iniciais se conserva. Podemos definir uma densidade de estados  $\rho$  e procuramos determinar como a mesma varia quando o hipercubo que contém os estados iniciais se desloca acompanhando a evolução dos mesmos e os contendo. Escrevemos:

$$\rho = \rho(t, X_i(t)).$$

A taxa de variação da densidade é dada por:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \dot{X}_i \frac{\partial \rho}{\partial X_i}.$$

Consideramos um volume fixo no Espaço de Fases. Em virtude da conservação do número de trajetórias, o fluxo líquido de estados que saem do volume é igual ao negativo da taxa de acumulação do número de estados dentro do volume. A conservação do número de estados se expressa por:

$$\oint_S \rho \dot{X}_i n_i dA = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Usando-se o teorema de Gauss transforma-se a integral de superfície em integral de volume:

$$\int \frac{\partial}{\partial X_i} \rho \dot{X}_i dV = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

e obtém-se uma equação de continuidade para a densidade de estados:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X_i} \rho \dot{X}_i = 0,$$

ou ainda:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = - \operatorname{div} \dot{\mathbf{X}}.$$

Se  $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = 0$  a densidade permanece constante e se  $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} < 0$ , a densidade aumenta. Definimos:

**Exemplo:** O movimento de um corpo celeste que se move sob a força de atração de outro corpo evolui segundo a lei:

$$m\ddot{x} = G \frac{Mm}{x^2},$$

ou, na forma de duas equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v = f_1(x; v) \\ \dot{v} &= G \frac{Mm}{x^2} = f_2(x; v).\end{aligned}$$

Calculamos:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v} = 0.$$

**Exemplo:** equação de Van der Pool:

$$\ddot{x} + (x^2 - 1) \dot{x} + x = 0.$$

Na forma de um sistema de equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v = f_1(x; v) \\ \dot{v} &= -x^2 - (x^2 - 1)v = f_2(x; v).\end{aligned}$$

Calculamos:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v} = -(x^2 - 1).$$

Vê-se que  $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} > 0$  quando o coeficiente de viscosidade  $(x^2 - 1)$  é negativo, isso é, quando  $x^2 < 1$  e  $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} < 0$  quando o coeficiente de viscosidade é positivo. Os exemplos acima justificam a seguinte

**Definição:** Se  $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = 0$  o sistema denomina-se conservativo. Sistemas dissipativos caracterizam-se por  $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} < 0$ .

Se o sistema for dissipativo o volume que contém um certo número de estados em um instante inicial se contrai à medida que o tempo passa. Isso não significa que as trajetórias contidas no volume considerado inicialmente se aproximem, pois uma das dimensões do volume pode aumentar

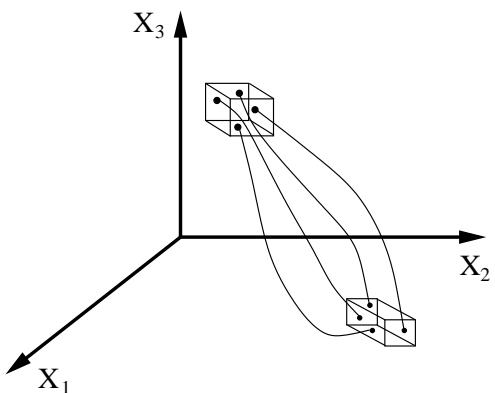


Figura D.3: Evolução de estados no espaço de fases.

e as demais diminuírem, de forma que o volume se contrai.

**Exemplo:** As equações de evolução de um sistema químico da forma:



são [143]:

$$\begin{aligned}\dot{c}_A &= -\kappa_1 c_A c_B + \kappa_2 c_C - r [c_A - c_A(0)] \\ \dot{c}_B &= -\kappa_1 c_A c_B + \kappa_2 c_C - r [c_B - c_B(0)] \\ \dot{c}_C &= \kappa_1 c_A c_B - \kappa_2 c_C - r\end{aligned}$$

Calculamos  $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}}$ :

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = -\kappa_1 (c_A + c_B) - 2r - \kappa_2.$$

Como  $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} < 0$ , elementos de volume que contém estados iniciais se contraem.

Os sistemas físicos podem ser classificados, segundo o valor tomado por  $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} < 0$  em:

1. Conservativos e Hamiltonianos em particular, quando  $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = 0$ ;
2. Dissipativos, ou com injeção de energia, quando  $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} \neq 0$ ;

Sistemas Hamiltonianos evoluem obedecendo a um a lei do tipo:

$$m\ddot{x} = f(x).$$

Liouville [121] mostrou, no século XIX, que sistemas Hamiltonianos são integráveis, desde que, para cada par  $(\mathbf{x}; \dot{\mathbf{x}})$  de variáveis independentes exista uma constante do movimento. No caso de um sistema massa-mola:

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0,$$

essa constante é a energia do sistema. No caso de um sistema de dois corpos que se movem sob ação de um campo gravitacional, há dois pares  $(\mathbf{x}_1; \dot{\mathbf{x}}_1)$  e  $(\mathbf{x}_2; \dot{\mathbf{x}}_2)$  e duas constantes, a saber a quantidade de movimento e a energia do sistema, que se conservam.

O teorema de Liouville diz mais: se o sistema for integrável, é possível determinar uma frequência  $\omega_i$  do movimento, associada a cada par  $(\mathbf{x}_i; \dot{\mathbf{x}}_i)$ . Se a relação entre as frequências for um número racional, isso é, se:

$$\frac{\omega_i}{\omega_j} = N,$$

com  $N$  racional, o movimento é periódico. Por exemplo, se  $\omega_1 = 2,25 \text{ Hz}$  e  $\omega_2 = 5 \text{ Hz}$ , ao fim de  $100 \text{ s}$ , o modo associado a  $\omega_1$  terá completado 225 ciclos e o associado a  $\omega_2$  terá completado 500 ciclos. Se a relação de frequências for um número irracional, o movimento será quase-periódico.

No caso de sistemas não integráveis, a periodicidade, ou quase-periodicidade não é assegurada, permitindo a existência de movimentos aperiódicos e, em particular, o surgimento de caos Hamiltoniano.

Sistemas dissipativos não são, em geral, integráveis.

## D.2.4 Atratores

Nos casos de sistemas dissipativos,  $\text{div } \dot{\mathbf{X}} < 0$  e a densidade de trajetórias aumenta com o tempo. Se  $\text{div } \dot{\mathbf{X}}$  for uma constante, o aumento é exponencial e o volume inicial cai a zero rapidamente. Em consequência o sistema evolui para um subespaço de dimensão menor do que a do espaço de fases. Esse subespaço denomina-se *atrator* [12, 121, 126, 143].

**Definição:** Atratores são subespaços compactos do espaço de fase para os quais todas as trajetórias que se encontram em certa vizinhança do atrator tendem para o subespaço..

Subespaços compactos podem ser postos em correspondência biunívoca com conjuntos limitados. Uma trajetória em forma de espiral, que tem início em um ponto do espaço de fases, mas se curva indefinidamente para dentro não é um conjunto compacto, pois pode ser posto em correspondência biunívoca com uma semi-reta.

Atratores de sistemas com duas dimensões são os pontos fixos, as trajetórias fechadas, as trajetórias homoclínicas e as trajetórias heteroclínicas. Trajetórias fechadas que não contém pontos fixos são características de movimentos periódicos.

**Definição:** Trajetórias homoclínicas são as que partem e retornam ao mesmo ponto fixo.

**Definição:** Trajetórias heteroclínicas são as que ligam pontos fixos distintos.

Sistemas com três ou mais dimensões podem ter os mesmos atratores encontrados em sistemas com duas dimensões e ainda mais alguns. Subespaços na forma de superfícies cilíndricas, de cones e pirâmides são excluídos, pois não são conjuntos compactos. Uma esfera, superfícies de um elipsóide de revolução e assemelhados também não são pois seus pontos, com exceção de um dos polos, podem ser postos em correspondência biunívoca com um plano, conforme mostrado na Fig. D.4.

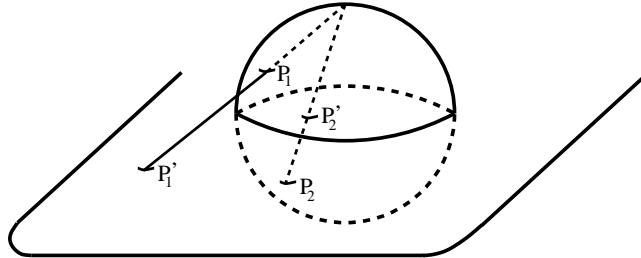


Figura D.4: A esfera não é um conjunto compacto, pois suas pontas, com exceção de um dos polos, podem ser postos em correspondência biunívoca com os pontos de um plano.

Tóróides se constituem em conjuntos compactos. Trajetórias sobre toróides representam movimentos periódicos, ou quase-periódicos. Se a relação entre as duas frequências presentes for um número racional, as trajetórias são curvas fechadas e o movimento é periódico. É o caso do movimento mostrado na Fig. D.5(a). Cortando o toróide na direção radial e o abrindo, têm-se uma superfície cilíndrica. Cortando a superfície ao longo de uma linha reta paralela ao eixo do cilindro têm-se um retângulo como o mostrado na Fig. D.5(d) e (e). Sendo o movimento periódico, as trajetórias mostradas no retângulo obtido segundo o procedimento acima apresentam a forma mostrada em (d), com os pontos *A* e *B* coincidentes. Se a relação de frequências for um número irracional, em nenhum caso, quando uma das frequências completa um ciclo, as demais também o fazem. Os pontos *A* e *B* não coincidem mais e não coincidirão nunca. A linha tracejada na Fig. D.5(e) representa a continuação do

movimento. A superfície toroidal vai sendo toda ocupada sem que as trajetórias se cruzem ou se fechem. O movimento é quase-periódico.

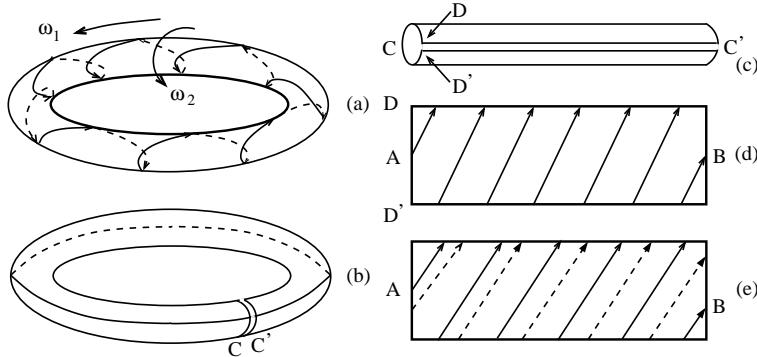


Figura D.5: Movimento sobre um toróide. (c), (d) e (e) mostram o toróide aberto. As seções  $C$  e  $C'$  mostradas em (b) e (c) e os pontos  $D$  e  $D'$  mostrados em (c) e (d) coincidem. Se a relação entre as duas frequências presentes for um número racional, as trajetórias são curvas fechadas e o movimento é periódico. É o caso do movimento mostrado em (a) e (d). Se a relação de frequências for um número irracional, em nenhum caso, quando uma das frequências completa um ciclo, as demais também o fazem. Os pontos  $A$  e  $B$  não coincidem mais e não coincidirão nunca. A linha tracejada na Fig. D.5(e) representa a continuação do movimento. A superfície toroidal vai sendo toda ocupada sem que as trajetórias se cruzem ou se fechem. O movimento é quase-periódico.

que um volume contendo certo número de condições iniciais se contraia e tenda rapidamente a zero. O fato do sistema ter características dissipativas não o impede de apresentar comportamento caótico, algumas de suas dimensões podem aumentar e outras diminuir, de modo que o volume do hipercubo tenda a zero. O modelo de Lorenz evolui para um atrator de dimensão maior do que dois, podendo por isso apresentar comportamento caótico. Vejamos como caracterizar a dimensão de um conjunto fractal.

### D.2.5 Dimensão de um atrator fractal (Dimensão de Hausdorff)

A dimensão de um conjunto fractal caracteriza o nível de ocupação do espaço. Pode-se associar uma dimensão menor do que três ao sistema de canalizações e a rede elétrica de uma cidade, pois não ocupam o espaço todo. Pelo fato de não ocupar todo o espaço em que se encontra, sistemas com dimensão fractal podem compartilhar o espaço com outros. O aparelho circulatório, os canais do aparelho respiratório e o sistema nervoso de um animal também ocupam parte do espaço em que se encontram e o compartilham com outros sistemas e a eles se pode associar uma dimensão fractal.

Um cubo que contenha um conjunto de estados iniciais contidos do espaço de fase se contrai à medida em que o tempo passa e seu volume cai a zero. O sistema evolui para um atrator. Os atratores podem ser pontos fixos e curvas abertas ou fechadas que se localizam sobre atratores cuja topologia é a de superfícies de dimensão menor do que o número de dimensões do espaço de fases. A dimensão dessas superfícies embora menor do que a do espaço de fases é, no entanto, inteira. Mas os atratores podem não ser topologicamente equivalentes a conjuntos compactos de dimensão inteira, isso é, não podem ser postos em correspondência biunívoca com conjuntos compactos de dimensão inteira. Nesse casos, o atrator tem um dimensão *fractal*. Exemplo de atrator com essa característica é o do modelo de Lorenz (ver Cap. 15). O espaço de fases tem dimensão três e a dinâmica é dissipativa, o que faz com

Pode-se imaginar uma esfera de raio  $R$ , inteiramente preenchida por algum material. Para recobrir todo o material existente dentro da esfera com pequenas esferas de raio  $\varepsilon$ , com  $\varepsilon \rightarrow 0$ , são necessárias  $N$  esferas, tal que:

$$V = N \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{para:} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Dessa igualdade conclui-se que:

$$N \varepsilon^3 = R^3 \quad N = \left( \frac{R}{\varepsilon} \right)^3 \quad N \propto \varepsilon^{-3}.$$

Se a esfera for preenchida por esferas de raio  $r < R$  o número de pequenas esferas de raio  $\varepsilon$  não será mais proporcional a  $\varepsilon^3$ . Nesse caso teremos:

$$N = \left( \frac{R}{\varepsilon} \right)^D \quad \text{para:} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Generalizando as idéias acima, consideramos um conjunto de pontos em um espaço de dimensão  $d$  e seja  $N$  o número de hiperesferas de raio  $\varepsilon$  necessárias para recobrir o conjunto de pontos. O número de esferas é tal que:

$$N(\varepsilon) \propto \left( \frac{R}{\varepsilon} \right)^D \quad \text{para:} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

$R$  é o raio mínimo de uma esfera que recobre todo o conjunto de pontos. Definimos a dimensão de Hausdorff do conjunto de pontos pela relação [143]:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln R/\varepsilon}. \quad (\text{D.19})$$

Alternativamente, a dimensão de Hausdorff pode ser definida como o número o limite  $N$  do número de hipercubos de aresta  $\varepsilon$ , necessários para recobrir um conjunto de pontos [12]:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln l/\varepsilon}. \quad (\text{D.20})$$

Como exemplo, determinamos a dimensão de Hausdorff de um segmento de reta, de um quadrado, do conjunto de Cantor em uma dimensão e do floco de neve (curva de Koch). No caso de um segmento de reta de comprimento  $l$ , o número de segmentos (hiperesferas) de raio  $\varepsilon$  necessário para recobri-lo é  $N = l/2\varepsilon$ , donde conclui-se que  $\varepsilon = l/2N$  e têm-se para a dimensão de Hausdorff:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\ln l/2\varepsilon}{\ln l/2\varepsilon} = 1.$$

Determinamos a dimensão fractal de um quadrado de lado  $l$ , usando a Eq. D.19. Nesse caso, o raio do menor círculo (hiperesfera) que o recobre é:  $R = l\sqrt{2}/2$ . O número de círculos de raio  $\varepsilon$  que recobre o quadrado é (ver Fig. D.6):

$$N = \left( \frac{l}{2\varepsilon \cos 45^\circ} \right)^2 = \left( \frac{l}{\varepsilon\sqrt{2}} \right)^2.$$

A dimensão de Hausdorff do quadrado é portanto:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln (l/\sqrt{2}\varepsilon)^2}{\ln l/\sqrt{2}\varepsilon} = 2.$$

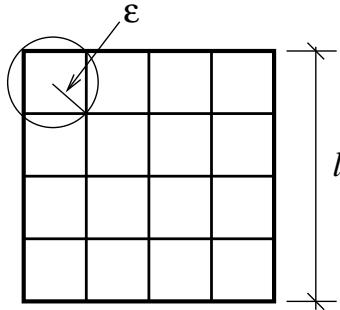


Figura D.6: Determinação da dimensão de Hausdorff de um quadrado.

A dimensão de Hausdorff de conjuntos de dimensão inteira coincide portanto com a dimensão do conjunto.

O conjunto de Cantor consiste dos pontos que restam de um segmento de reta de comprimento  $l$  do qual se retira inicialmente o terço central. Dos dois segmentos de comprimento  $l/3$  retira-se o terço central e repete-se o processo indefinidamente (ver Fig. D.7).

A dimensão do conjunto de Cantor em uma dimensão é calculada como:

$$\begin{aligned} D &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^m}{\ln l/(l/3^m)} \\ &= \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,63 \end{aligned}$$

O conjunto de Cantor em duas dimensões é obtido de forma semelhante, considerando-se um quadrado de lado  $l$ . Divide-se cada aresta por três e retira-se os quatro quadrados que têm como uma das arestas o segmento central das arestas do quadrado original. O processo é repetido indefinidamente (ver Fig. D.7). A dimensão do conjunto de Cantor em duas dimensões é calculada como:

$$\begin{aligned} D &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^{2m}}{\ln l/(R/3^m)} \\ &= 2 \frac{\ln 2}{\ln 3} = 1,28 \end{aligned}$$

O floco de neve (curva de Koch) é obtido a partir de um triângulo do qual substitui-se o terço central de cada aresta por duas, cada uma de comprimento  $l/3$ , delimitando um novo triângulo que é incorporado à figura.

$l$	$\varepsilon$	$N$
— — —	$l/3^0$	1
— — —	$l/3^1$	2
• • •	$l/3^2$	4
• • •	$l/3^3$	8
• • •	$l/3^4$	16
• • •	$l/3^5$	32
• • •	$l/3^6$	64
• • •	$l/3^7$	128
• • •	$l/3^8$	256

O conjunto de Cantor em uma dimensão

$l$	$\varepsilon$	$N$
— — —	$l/3^0$	$2^0$
□ □ □	$l/3^1$	$2^2$
□ □ □	$l/3^2$	$2^4$
□ □ □	$l/3^3$	$2^8$
□ □ □	$l/3^4$	$2^{16}$
□ □ □	$l/3^5$	$2^{32}$
□ □ □	$l/3^6$	$2^{64}$
□ □ □	$l/3^7$	$2^{128}$
□ □ □	$l/3^8$	$2^{256}$

O conjunto de Cantor em duas dimensões

$\varepsilon$	$N$
$l/3^0$	$4^0$
$l/3^1$	$4^1$
$l/3^2$	$4^2$
$l/3^3$	$4^4$
$l/3^4$	$4^8$
$l/3^5$	$4^{16}$
$l/3^6$	$4^{32}$
$l/3^7$	$4^{64}$
$l/3^8$	$4^{128}$

O floco de neve (curva de Koch)

Figura D.7: Conjunto de Cantor em uma e em duas dimensões e floco de neve (curva de Koch) – Cálculo da dimensão de Hausdorff.

Repete-se o processo indefinidamente (ver Fig. D.7). A dimensão do floco de neve é calculada abaixo:

$$D = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^m}{\ln l / (l/3^m)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,26$$

### D.2.6 Estabilidade linear de pontos fixos do espaço de fases

A evolução de sistemas Dinâmicos autônomos, nas proximidades de Pontos Fixos  $\bar{\mathbf{X}}$ , é regida por equações da forma:

$$\frac{d(\tilde{x}_i + \tilde{x}_j)}{dt} = f_i(\bar{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{x}}) = f_i(\bar{\mathbf{X}}) + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{\mathbf{X}}} \tilde{x}_j,$$

onde  $\tilde{x}_i$  é a componente geral de um pequeno desvio do estado do sistema, em relação ao estado de repouso  $\bar{\mathbf{X}}$ . Como  $\bar{\mathbf{X}}$  é um Ponto Fixo e não varia no tempo e  $f_i(\bar{\mathbf{X}}) = \mathbf{Z}$  e a equação acima se reduz a um sistema de equações diferenciais ordinárias, lineares, homogêneas, com coeficientes constantes, dada por:

$$\frac{d(\tilde{x}_i)}{dt} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{\mathbf{X}}} \tilde{x}_j,$$

ou, de forma completa, escrevendo as variáveis de perturbação  $\tilde{x}_j$  sem o asterisco:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (\text{D.21})$$

onde:

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{\mathbf{X}}}.$$

As próximas seções se ocupam da resolução do sistema D.21. Se a perturbação for amplificada, o Ponto Fixo  $\bar{\mathbf{X}}$  é *linearmente instável*. Se a perturbação desaparecer para tempos longos, o Ponto Fixo é *linearmente estável*. O estudo de equações diferenciais lineares, ordinárias, homogêneas, com coeficientes constantes, tem portanto, aplicação na análise de estabilidade linear de Pontos Fixos de sistemas Dinâmicos.

## D.3 Equações Diferenciais Ordinárias com Autovalores Reais e Distintos

Uma equação diferencial ordinária, linear, homogênea, da forma

$$\dot{x} = ax \quad \text{com:} \quad x(t=0) = x_0, \quad (\text{D.22})$$

tem como solução:

$$x = x_0 e^{at}. \quad (\text{D.23})$$

Se  $a > 0$  a solução diverge para tempos longos. Se  $a < 0$  a solução tende a zero. O ponto  $a = 0$  marca o limite entre soluções que divergem e soluções que tendem a zero.  $a = 0$  é um ponto de *bifurcação*. A solução da Eq. D.22 é única. De fato, se  $y(t)$  for outra solução, então  $\dot{y} = ay$ . Desenvolvemos:

$$\frac{d}{dt}y e^{-at} = \dot{y} e^{-at} - ay^{-at} = ay e^{-at} - ay^{-at} = 0.$$

Consequentemente  $y e^{-at}$  é uma constante. Seja  $x_0$  essa constante.

$$y e^{-at} = x_0 \quad \rightarrow \quad y = x_0 e^{at}.$$

A nova solução é idêntica à original, ou seja a Eq. D.22 admite uma única solução.

Duas equações ordinárias e lineares podem ser agrupadas na forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.24})$$

Os elementos faltantes no operador da Eq. D.24 são iguais a zero. Enquanto a solução da Eq. D.22  $\in \mathcal{R}$ , a solução de D.24  $\in \mathcal{R}^2$ . O espaço  $\mathcal{R}^2$  é obtido pela composição de dois espaços unidimensionais. Denotamos:

$$\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \oplus \mathcal{R}.$$

Os coeficientes  $a_{11}$  e  $a_{22}$  podem ser considerados como operadores que agem sobre as variáveis  $x_1$  e  $x_2$ . A matriz  $A$  é obtida pela composição dos operadores elementares  $a_{11}$  e  $a_{22}$ . De forma geral, pode-se compor espaços de dimensões diferentes:

$$\mathcal{R}^{r_1+r_2+\dots+r_n} = \mathcal{R}^{r_1} \oplus \mathcal{R}^{r_2} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^{r_n},$$

onde  $r_j$  é a dimensão do subespaço  $\mathcal{R}^j$ . O operador  $T$ , resultante da composição dos operadores  $T_j$  é obtido composto dispondendo-se os operadores individuais, sucessivamente, ao longo da diagonal principal de  $T$ . Representa-se:

$$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n.$$

Um sistema de equações diferenciais ordinárias, lineares homogêneo, com coeficientes constantes, da pela Eq. D.21, com a condição inicial:

$$\begin{pmatrix} x_1(t=0) \\ x_2(t=0) \\ \vdots \\ x_n(t=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$$

pode ser resolvido usando as ideias acima desenvolvidas. As coordenadas  $x_i$  referem-se a uma base ortonormal  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ . O sistema pode ser reescrito de forma abreviada, como:

$$\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X} \quad \text{com:} \quad \dot{\mathbf{X}}(t=0) = \mathbf{X}_0. \quad (\text{D.25})$$

Se o operador representado pela matriz  $A$  tiver todos os autovalores  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  reais e distintos a matriz que o representa nessa base é diagonal. As equações estão desacopladas nessa base e a solução de cada uma é dada pela Eq. D.23. A estratégia de resolução do sistema consiste portanto em diagonalizar a matriz, resolver cada equação e retornar à base original. O sistema D.21 se escreve sob a forma abaixo, na base dos autovetores:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (\text{D.26})$$

onde  $y_i$  são as coordenadas de um ponto no espaço de fases, na base dos autovetores  $\{\mathbf{f}_j\}$ . A solução na nova base é:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{01}e^{\lambda_1 t} \\ y_{02}e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ y_{0n}e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Como a condição inicial é dada na base  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  usa-se a matriz de mudança de base para a determinação daquelas condições, na nova base:

$$\mathbf{Y}_0 = Q\mathbf{X}_0.$$

O retorno à base original se faz utilizando-se a matriz  $Q^{-1}$ :

$$\mathbf{X} = Q^{-1}\mathbf{Y}.$$

As colunas de  $Q^{-1}$  são formadas com as coordenadas dos vetores  $\mathbf{f}_j$ , na nova base. Como as coordenadas de um vetor são únicas, a solução do sistema D.21 é única. Enunciamos o seguinte:

**Teorema:** A solução de um sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias, lineares, homogêneas, com coeficientes constantes, condições iniciais especificadas e cujo operador algébrico tem autovalores reais e distintos,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , é única e da forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}e^{\lambda_1} + \alpha_{12}e^{\lambda_2} + \dots + \alpha_{1n}e^{\lambda_n} \\ x_2 &= \alpha_{21}e^{\lambda_1} + \alpha_{22}e^{\lambda_2} + \dots + \alpha_{2n}e^{\lambda_n} \\ &\vdots \quad \vdots \\ x_n &= \alpha_{n1}e^{\lambda_1} + \alpha_{n2}e^{\lambda_2} + \dots + \alpha_{nn}e^{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Os números  $\alpha_{ij}$  podem ser interpretados como sendo a projeção do autovetor  $\mathbf{f}_j$  na direção do vetor  $\mathbf{e}_i$ . Os autovetores são a condição inicial do problema na base  $\{\mathbf{f}_j\}$ .

A Eq. D.26 permite interpretar a estratégia de diagonalização da matriz original, como um processo de decomposição do espaço  $\mathcal{R}^n$  em espaços elementares unidimensionais, definidos pelos autovetores do operador. Cabe observar que se parte dos autovalores de  $T$  for negativo o valor da variável ao longo de cada uma dessas direções tende a zero para

tempos suficientemente longos. O oposto ocorre ao longo das direções cujos autovalores são positivos: as variáveis divergem. Como, em muitos casos, quando o valor de uma variável aumenta muito surgem efeitos não lineares que limitam esse crescimento, essas variáveis nem sempre divergem. Nessa situação, o sistema evolui para um subespaço ativo, de dimensão menor do que a do espaço em que o problema é definido. O que se procura muitas vezes é, portanto, reduzir a dimensionalidade do problema proposto e identificar os subespaços ativos.

## D.4 Equações Diferenciais Ordinárias com Autovalores Complexos e Distintos

Se um operador algébrico linear tiver um autovalor complexo, o autovetor correspondente também será complexo. Sendo o operador real, os autovalores complexos ocorrem em pares conjugados. O autovetor associado ao conjugado de autovalor complexo é o conjugado do autovetor. Representando o complexo conjugado por um asterisco e lembrando que o complexo do produto de dois números complexos é o produto do complexo conjugado dos dois números têm-se:

$$(T\varphi)^* = (\mu\varphi)^* \quad \longrightarrow \quad T\varphi^* = \mu^*\varphi^*.$$

Consideremos uma equação da forma:

$$\frac{d}{dt}(x + iy) = (a + ib)(x + iy), \quad (\text{D.27})$$

ou:

$$\frac{dz}{dt} = \mu z. \quad (\text{D.28})$$

onde  $z = x + iy$  e  $\mu = a + ib$ . Separando as partes real e imaginária dessa equação chega-se a:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - by \\ \dot{y} &= bx + ay. \end{aligned}$$

Esse sistema também pode ser escrito na forma matricial, como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (\text{D.29})$$

Portanto, as Eq. D.28 e D.29 são equivalentes. A solução da Eq. D.29 é:

$$z = z_0 e^{\mu t} \quad (\text{D.30})$$

isso é:

$$x + iy = (\kappa_1 + i\kappa_2) e^{(a+ib)t} = (\kappa_1 + i\kappa_2) e^{at} (\cos bt + i \operatorname{sen} bt).$$

Separando as partes real e complexa obtém-se:

$$x = e^{at} (\kappa_1 \cos bt - \kappa_2 \sin bt) \quad (D.31)$$

$$y = e^{at} (\kappa_2 \cos bt + \kappa_1 \sin bt). \quad (D.32)$$

A trajetória correspondente à solução é uma espiral descrita no sentido anti horário no Espaço de Fases se  $a = 0$ . Se  $a = 0$  a trajetória é uma circunferência. Cabe observar que a solução ao longo da direção  $x$  não é independente da solução ao longo da direção  $y$ . Em um sistema de duas equações com autovalores reais consegue-se decompor o espaço em dois subespaços uni dimensionais, com soluções independentes, no sentido de que a solução ao longo de uma das direções pode ser trivial, se a componente da condição inicial ao longo de uma delas for igual a zero. Essa situação não ocorre no caso da Eq. D.29.

A solução dada pela Eq. D.28 é única. A demonstração segue os mesmos passos da feita para o caso de uma única equação com autovalor real (ver pág. 288).

Há casos de sistemas de duas equações com um par de autovalores complexos conjugados, em que o operador  $T$  não está na forma dada na Eq. D.29. É, por exemplo o caso em que o operador  $T$  é dado por:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores desse operador são  $\mu = 1 \pm i$ . Mostramos a seguir, que um sistema com um operador como o acima pode ser resolvido através de mudança para uma base na qual a matriz que representa o operador é da forma da encontrada na Eq. D.29. Mostramos inicialmente que os autovetores  $\varphi$  e  $\varphi^*$  são linearmente independentes. Supondo que:

$$\varphi^* = \alpha_2 \varphi,$$

têm-se que:

$$(T - \mu^*) \varphi^* = \alpha_2 (T - \mu^*) \varphi = \alpha_2 (T\varphi - \mu^* \varphi) = (\mu - \mu^*) \varphi = \mathbf{Z},$$

o que é uma conclusão falsa pois  $\mu - \mu^* \neq \mathbf{Z}$ . A conclusão decorre da hipótese de que os autovetores são linearmente dependentes, que é portanto, falsa.

Mostramos a seguir que as partes real e imaginária do autovetor complexo:

$$\varphi = \mathbf{U} + i\mathbf{V}$$

são linearmente independentes.  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  são dois vetores reais. As parte real e imaginária de  $\varphi$  podem ser escritas como:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^*)$$

$$\mathbf{V} = \frac{i}{2}(-\varphi + \varphi^*).$$

Vejamos em que condições:

$$\alpha_1 \mathbf{U} + \alpha_2 \mathbf{V} = \mathbf{Z}.$$

Substituindo  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  pelas expressões acima encontramos:

$$\alpha_1(\varphi + \varphi^*) + i\alpha_2(-\varphi + \varphi^*) = \mathbf{Z}.$$

Reagrupoando os termos:

$$(\alpha_1 - i\alpha_2)\varphi + (\alpha_1 + i\alpha_2)\varphi^* = \mathbf{Z}.$$

Como  $\varphi$  e  $\varphi^*$  são linearmente independentes é necessário que:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - i\alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 &= 0,\end{aligned}$$

o que só se consegue com  $\alpha_1 = \alpha_2 = z$ , onde  $z$  é o número complexo zero. As partes real e imaginária do autovetor  $\varphi$  são linearmente independentes. A base na qual o operador toma a forma de um número complexo, conforme Eq. D.29 é formada pelos vetores  $(\mathbf{V}; \mathbf{U})$ , nessa ordem. Mostramos essa propriedade:

$$T(\mathbf{U} + i\mathbf{V}) = (a + ib)(\mathbf{U} + i\mathbf{V}).$$

Separando as partes real e imaginária:

$$\begin{aligned}T\mathbf{U} &= a\mathbf{U} - b\mathbf{V} \\ T\mathbf{V} &= b\mathbf{U} + a\mathbf{V}.\end{aligned}$$

Na base  $(\mathbf{V}; \mathbf{U})$ ,  $\mathbf{V} = (1; 0)$  e  $\mathbf{U} = (0; 1)$ . Inserindo as coordenadas dos vetores na equação acima obtemos:

$$\begin{aligned}T\mathbf{U} &= T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \\ T\mathbf{V} &= T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Reagrupoando os termos:

$$T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

A matriz que representa o operador  $T$  é portanto:

$$B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Enunciamos os seguintes teoremas:

**Teorema:** Se o operador  $T : E_n \rightarrow E_n$  tiver todos os autovalores distintos, reais e complexos,  $E_n$  e  $T$  têm uma decomposição  $E_n = E_R \oplus E_C$  e  $T = T_R \oplus T_C$ , tal que  $T_R : E_R \rightarrow E_R$  e  $T_C : E_C \rightarrow E_C$ , em que  $T_R$  tem autovalores reais e distintos e  $T_C$  tem autovalores em pares complexos conjugados distintos.

**Teorema:** Seja  $T_C : E_C \rightarrow E_C$  um operador real com autovalores complexos conjugados  $\mu$  e  $\mu^*$ .  $E_C$  e  $T$  têm uma decomposição  $E_C = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$  e  $T = T + 1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n$  onde  $E_j$  são subespaços bidimensionais e  $T_j$  tem autovalores  $\mu_j$  e  $\mu_j^*$ .

**Teorema:** Seja  $T_C : E_C \rightarrow E_C$  um operador real definido em um espaço bidimensional, com autovalores complexos conjugados  $\mu$  e  $\mu^*$ . Existe uma base em que a matriz que representa o operador é da forma:

$$B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Completamos essa seção com a definição de subespaço próprio associado a um autovalor complexo:

**Definição:** Denomina-se *subespaço próprio* associado ao autovalor complexo  $\mu = a + ib$  o subespaço varrido pelas partes complexa e real dos autovetores associados àquele autovalor.

## D.5 Exemplos – Sistemas com Duas Variáveis

**Exemplo:** Examinemos alguns sistemas com duas variáveis. Os autovalores de um operador da forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

a são as raízes equação:

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

Os autovalores dependem apenas do traço e do determinante do operador, que são dois invariantes do mesmo e não dependem da matriz que o representa:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{onde:} \quad \Delta = \text{tr}^2(A) - 4\det(A).$$

A solução do problema  $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$  pode ser classificada nos seguintes casos, qualitativamente diferentes, segundo o tipo de raízes do polinômio característico:

1.  $\Delta > 0$  e  $\det(A) < 0$ . O polinômio tem duas raízes reais de sinais contrários. A origem denomina-se um *ponto de sela* (“sadle node”);
2.  $\det(A) > 0$  e  $\text{tr}(A) > 0$ . O polinômio tem duas raízes reais positivas. A origem é um *nó instável*;
3.  $\det(A) > 0$  e  $\text{tr}(A) < 0$ . As duas raízes são reais e negativas. A origem é um *nó estável*;
4.  $\Delta < 0$  e  $\text{tr}(A) < 0$ . O polinômio tem duas raízes complexas com parte real negativa. A origem é um *foco estável*;

5.  $\Delta < 0$  e  $\text{tr}(A) < 0$ . O polinômio tem duas raízes complexas com parte real positiva. A origem é um *foco instável*;
6.  $\Delta < 0$  e  $\text{tr}(A) = 0$ . O polinômio tem duas raízes complexas com parte real nula. A origem é um *centro*;

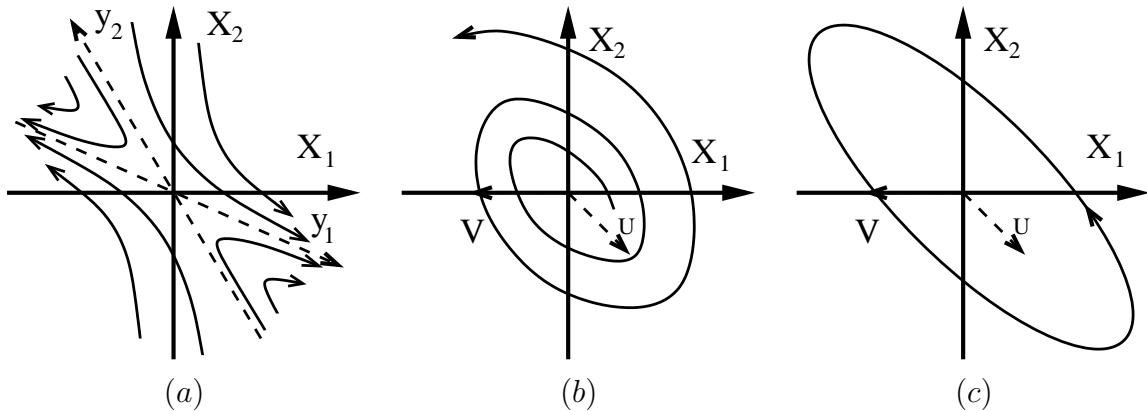


Figura D.8: A solução de um sistema linear de três equações com um autovalor real e positivo e um par de autovalores complexos conjugados: (a) Ponto de sela; (b) foco instável e (c) centro.

**Exemplo:** Equações de segunda ordem podem ser transformadas em um sistema de duas equações de primeira ordem. Um sistema massa-mola-amortecedor da forma:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

pode ser reescrito na forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\omega_n^2 x - 2\xi\omega_n v.\end{aligned}$$

Em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}.$$

Os autovetores do operador são dados por:

$$\lambda_{1,2} = \omega_n \left[ \xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right].$$

Vê-se que a condição para que os autovalores sejam iguais não é facilmente preenchida pois requer  $\xi = 1$ . A existência de sistemas lineares com autovalores repetidos não é, em geral, comum.

**Exemplo:** Resolver a equação  $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$ , onde:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{com a condição inicial: } \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores do operador são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = -1$ . A origem é um ponto de sela. Os autovetores  $\mathbf{f}_1$  e  $\mathbf{f}_2$  são uma solução não trivial dos sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e:} \quad \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Uma solução possível é  $\mathbf{f}_1 = (1; -1)$  e  $\mathbf{f}_2 = (-1; 2)$ . As matrizes  $Q^{-1}$  e  $Q$  são dadas, respectivamente, por:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e:} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A solução do sistema é dada, na nova base, por:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{01}e^{2t} \\ y_2 &= y_{02}e^{-t}. \end{aligned}$$

A condição inicial na nova base,  $\mathbf{Y}_0$ , é dada por  $\mathbf{Y}_0 = Q\mathbf{X}_0 = (5; 3)$ . A solução do sistema é dada por  $\mathbf{X} = Q^{-1}\mathbf{Y}$ . Obtém-se:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5e^{2t} - 3e^{-t} \\ x_2 &= -5e^{2t} + 6e^{-t}. \end{aligned}$$

**Exemplo:** Resolver a equação  $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$ , onde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{com a condição inicial:} \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores do operador são  $\mu_{1,2} = 1 \pm i$ . A origem é um foco instável. O autovetor complexo  $\varphi$  é uma solução não trivial da equação:

$$\begin{pmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Uma solução possível é  $w_1 = 1 - i$  e  $w_2 = -1$ , isso é:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U} + i\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A primeira coluna da matriz  $Q^{-1}$  é formada pelo vetor  $\mathbf{V}$  e a segunda, pelo vetor  $\mathbf{U}$ . Obtém-se para as matrizes  $Q^{-1}$  e  $Q$ :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e:} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A solução do problema na base  $(\mathbf{V}, \mathbf{U})$  é:

$$z = Ce^{\mu t} = y_1 + iy_2 = (C_1 + iC_2) e^t (\cos t + i \sin t),$$

ou:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^t (C_1 \cos t - C_2 \sin t) \\ y_2 &= e^t (C_1 \sin t + C_2 \cos t). \end{aligned}$$

A condição inicial na nova base,  $\mathbf{Y}_0$ , é dada por  $\mathbf{Y}_0 = Q\mathbf{X}_0 = (-3; -1)$ . Obtém-se:

$$\begin{aligned} y_1 &= -e^t (3 \cos t - \sin t) \\ y_2 &= -e^t (3 \sin t + \cos t). \end{aligned}$$

A solução do sistema é dada por  $\mathbf{X} = Q^{-1}\mathbf{Y}$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= 4e^t (\cos t - \sin t) \\ x_2 &= e^t (3 \sin t + \cos t). \end{aligned}$$

**Exemplo:** Resolver a equação  $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$ , onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{com a condição inicial:} \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de  $A$  são  $\lambda = 1$  e  $\mu = 2 \pm 3i$ . Uma solução para o autovetor associado ao autovalor real é  $\mathbf{f} = (-10; 3; 1)$ . Calculamos o autovetor complexo  $\varphi$ , associado a  $\mu = 2 + 3i$ . Esse autovetor é dado por uma solução de:

$$(A - \mu I)\varphi = \begin{pmatrix} -1 - 3i & 0 & 0 \\ 0 & -3i & -3 \\ 1 & 3 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtém-se  $z_1 = 0$ , enquanto uma solução para as duas outras componentes do autovetor é  $z_2 = i$  e  $z_3 = 1$ . O autovetor é portanto:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

As matrizes  $Q^{-1}$  e  $Q$  são:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e:} \quad Q = \begin{pmatrix} -1/10 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz  $A_0$  do operador na base do autovetor real e das partes complexa e real do autovetor complexo, é dada por:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A solução na nova base é da forma:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{01} e^t \\ e^{at} (\kappa_1 \cos bt - \kappa_2 \sin bt) \\ e^{at} (\kappa_2 \cos bt + \kappa_1 \sin bt) \end{pmatrix}.$$

A solução na base original é dada por  $\mathbf{X} = Q^{-1}\mathbf{Y}$ .

Obtém-se:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} y_{01} e^t \\ 3y_{01} e^t + e^{at} (\kappa_1 \cos bt - \kappa_2 \sin bt) \\ y_{01} e^t + e^{at} (\kappa_2 \cos bt + \kappa_1 \sin bt) \end{pmatrix}.$$

Resta determinar as constantes  $y_{01}$ ,  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ . No tempo  $t = 0$ :

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{01} \\ 3y_{01} + \kappa_1 \\ y_{01} + \kappa_2 \end{pmatrix}$$

Donde obtém-se  $y_{01} = 1$ ,  $\kappa_1 = -1$ ,  $\kappa_2 = 2$ . A solução é portanto:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e^t \\ 3e^t - e^{at} (\cos bt + 2 \sin bt) \\ e^t + e^{at} (2 \cos bt - \sin bt) \end{pmatrix}.$$

A solução é uma espiral de raio crescente que se desloca com velocidade que cresce exponencialmente na direção do autovetor  $\mathbf{f}$ .

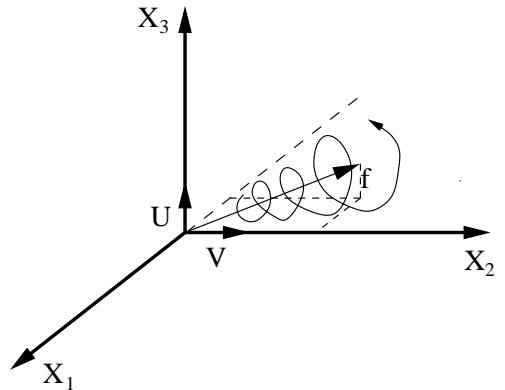


Figura D.9: A solução de um sistema linear de três equações com um autovalor real e positivo e um par de autovalores complexos conjugados.

## D.6 Exponencial de Operadores

Define-se a exponencial de um operador  $T$  pela relação [80]:

$$\exp(T) = \sum_{\kappa=0}^{\kappa=\infty} \frac{T^\kappa}{\kappa!}. \quad (\text{D.33})$$

onde  $T^0 \stackrel{\text{def}}{=} I$ . Pode-se mostrar que a série de termos de  $\exp(T)$  é absolutamente convergente, isso é, que a série:

$$\sum_{\kappa=0}^{\kappa=\infty} N \left( \frac{T^\kappa}{\kappa!} \right)$$

converge. Na expressão acima  $N(T^\kappa/\kappa!)$  é uma norma do  $\kappa$ -ésimo termo da série. Pode-se verificar que se:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{então:} \quad \exp(T) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Demonstramos a seguir a seguinte

**Proposição:** Sejam  $Q$ ,  $S$ ,  $T$  e  $B$ , operadores no  $\mathcal{R}^n$ . Então:

1. Se  $B = QTQ^{-1}$  então:  $\exp(B) = Q \exp(T) Q^{-1}$ ;
2. Se  $TS = ST$  então:  $\exp(T + S) = \exp(T) \exp(S)$ :
3.  $\exp(-T) = [\exp(T)]^{-1}$ ;
4. Se

$$T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{então:} \quad \exp(T) = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix};$$

$$5. \frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

A demonstração da primeira propriedade é feita pela aplicação da definição de exponencial de um operador:

$$\begin{aligned} \exp(B) &= I + QTQ^{-1} + \frac{QTQ^{-1}QTQ^{-1}}{2!} + \dots = QIQ^{-1} + QTQ^{-1} + \frac{QT^2Q^{-1}}{2!} + \dots \\ &Q \left( I + T + \frac{T^2}{2!} + \dots \right) Q^{-1} = Q \exp(T) Q^{-1}. \end{aligned}$$

Para demonstrar a segunda propriedade usamos a definição de binômio de Newton:

$$(S + T)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{S^j}{j!} \frac{T^k}{k!}.$$

A utilização do binômio de Newton pressupõe que a multiplicação dos dois termos é comutável. De fato, fazendo o quadrado da soma de dois números  $a$  e  $b$ , têm-se:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2.$$

o que mostra a necessidade de que a multiplicação seja comutável, para que se obtenha o resultado  $a^2 + 2ab + b^2$ . Aplicando o binômio de Newton no cálculo da exponencial a  $S + T$  obtemos:

$$\begin{aligned} \exp(S + T) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S + T)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{1}{n!} \sum_{j+k=n} \frac{S^j}{j!} \frac{T^k}{k!} = \left[ \frac{S^0}{0!} \frac{T^0}{0!} \right] + \\ &\left[ \frac{S^0}{0!} \frac{T^1}{1!} + \frac{S^1}{1!} \frac{T^0}{0!} \right] + \left[ \frac{S^1}{1!} \frac{T^1}{1!} + \frac{S^0}{0!} \frac{T^2}{2!} + \frac{S^2}{2!} \frac{T^0}{0!} \right] + \left[ \frac{S^0}{0!} \frac{T^3}{3!} + \frac{S^1}{1!} \frac{T^2}{2!} + \frac{S^2}{2!} \frac{T^1}{1!} + \frac{S^3}{3!} \frac{T^0}{0!} \right] + \dots \\ &= I + T + S + \frac{S^2}{2!} + ST + \frac{T^2}{2!} + \frac{T^3}{3!} + S \frac{T^2}{2!} + \frac{S^2}{2!} T + \frac{S^3}{3!} + \dots \\ &= \left[ I + T + \frac{T^2}{2!} + \frac{T^3}{3!} + \dots \right] \left[ I + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \dots \right] = e^S e^T. \end{aligned}$$

A demonstração da terceira propriedade faz uso da acima provada. Como  $S$  e  $-S$  comutam, têm-se que:

$$\exp(S - S) = \exp(0) = I = \exp(S) \exp(-S),$$

o que mostra que  $\exp(-T) = [\exp(T)]^{-1}$  e demonstra a terceira propriedade. Decorre dessa propriedade que mesmo no caso em que  $T$  não seja inversível,  $\exp(T)$  o é. Trata-se de situação semelhante à que se tem no cálculo da exponencial de números reais: embora zero não seja inversível  $e^0$  o é.

Para demonstrar a quarta propriedade, notamos inicialmente que:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = A + B = aI + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O produto das matrizes  $AB$  é comutável, com o que

$$e^{A+B} = e^a IB = e^a B.$$

Resta portanto determinar  $e^B$ . Denominando:

$$ib = b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

têm-se que:

$$\begin{aligned} (ib)^2 &= -b^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & (ib)^3 &= -b^3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (ib)^4 &= b^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & (ib)^5 &= b^5 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (ib)^6 &= -b^6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & (ib)^7 &= -b^7 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} e^B = e^{ib} &= \sum_{\kappa=0}^{\kappa=\infty} \frac{(ib)^\kappa}{\kappa!} = \left[ 1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \dots \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ &\quad \left[ b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \frac{b^7}{7!} + \dots \right] \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A demonstração da quinta propriedade se faz usando a definição de derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{tA} e^{hA} - e^{tA}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{tA} \left[ \frac{e^{hA} - I}{h} \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{tA} \frac{1}{h} \left[ I + hA + \frac{h^2 A^2}{2!} + \dots - I \right] = \lim_{h \rightarrow 0} e^{tA} \left[ A + \frac{hA^2}{2!} + \frac{h^2 A^3}{3!} + \dots \right] = \\ &= e^{tA} A = A e^{tA}. \end{aligned}$$

Decorre dessa propriedade que, se:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A\mathbf{X} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{X} = e^{tA} \mathbf{X}_0,$$

pois:

$$\frac{d}{dt} e^{tA} \mathbf{X}_0 = Ae^{tA} \mathbf{X}_0 = A\mathbf{X}.$$

A solução da Eq.  $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$  é única. De fato, admitindo que exista outra solução  $\mathbf{Y}$ , essa nova solução obedece à equação  $\dot{\mathbf{Y}} = A\mathbf{Y}$ . Fazendo  $e^{-tA}\mathbf{Y}$  e calculando a derivada em relação ao tempo desse termo obtém-se:

$$\frac{d}{dt} e^{-tA} \mathbf{Y} = -e^{-tA} A\mathbf{Y} + e^{-tA} \dot{\mathbf{Y}} = -e^{-tA} A\mathbf{Y} + e^{-tA} A\mathbf{Y} = 0.$$

Portanto  $e^{-tA}\mathbf{Y}$  é uma constante. Seja  $\mathbf{X}_0$  essa constante. Conclui-se que  $\mathbf{Y} = e^{-tA}\mathbf{X}_0$ , ou seja, a nova solução é igual à primeira, desde que a condição inicial das duas soluções sejam iguais. Enunciamos o seguinte:

**Teorema:** Seja  $A$  um operador definido no  $\mathcal{R}^n$ . A equação  $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$ , com a condição inicial  $\mathbf{X}(t=0) = \mathbf{X}_0$  admite como única solução  $\mathbf{X} = e^{tA}\mathbf{X}_0$ .

O procedimento de resolução de um sistema da forma  $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$ , definido nas Sec. D.3 e D.4 é equivalente a calcular a exponencial do operador  $A$  na base dos autovetores e em retornar à base original. Mostramos abaixo um exemplo, que mostra que, quando o operador não tem os autovetores suficientes para formar uma base, pode-se obter a solução pelo cálculo da exponencial do mesmo.

**Exemplo:** resolução do sistema  $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$ , com a condição inicial  $\mathbf{X}_0 = (x_{01}; x_{02})$ , onde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A matriz tem um único autovalor,  $\lambda = 2$  e apenas um autovetor. Podemos escrever:

$$A = S + N \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

As matrizes  $S$  e  $N$  comutam, o que permite calcular:

$$e^t A = e^{tS} e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} e^{tN} = e^{2t} e^{tN}.$$

Resta calcular a  $\exp(tN)$ . Aplicando a definição de exponencial de operador:

$$e^{tN} = I + tN + \frac{t^2 N^2}{2} + \dots$$

Pode-se verificar que  $N^2 = 0$  o que limita os termos da série acima aos dois primeiros. Obtém-se portanto:

$$e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$\mathbf{X} = e^{tA} \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01}e^{2t} \\ x_{01}te^{2t} + x_{02}e^{2t} \end{pmatrix}.$$

O cálculo da exponencial foi facilitado pela decomposição do operador  $A$  na soma de um diagonal e outro, que elevado a uma potência finita tem como resultado a matriz zero. Definimos:

**Definição:** Matrizes tais que  $N^p = 0$  para algum  $p$  inteiro e positivo denominam-se nilpotentes.

Veremos a seguir que, quando os autovetores do operador não formam uma base completa, pode-se decompô-lo em uma matriz diagonal e uma nilpotente. As duas matrizes são comutáveis.

## D.7 Autovalores Repetidos e Forma Canônica de Jordan

Um dos exemplos apresentados na Sec. D.5 mostra que a ocorrência de operadores com autovalores repetidos requer que os parâmetros do problema guardem entre si uma relação que normalmente existe. Autovalores repetidos ocorrem por exemplo, quando se varia algum parâmetro e ao longo da trajetória percorrida pelo mesmo, os requisitos para a repetição são atendidos. Essa seção apresenta o procedimento de resolução de equações diferenciais, que se adota quando o operador que multiplica o vetor de incógnitas apresenta autovalores repetidos [80, 64, 51].

Consideremos inicialmente, o caso em que os autovalores repetidos são reais. O espaço em que o problema é definido pode ser decomposto em dois, o primeiro,  $E_1$  varrido pelos autovetores associados a autovalores reais não repetidos e pela parte real e imaginária de autovetores complexos, associados a autovalores complexos, não repetidos. O segundo subespaço,  $E$ , é o parcialmente varrido pelo(s) autovetor(es) associado(s) a um único autovalor  $\lambda$ , de multiplicidade  $r$ . Têm-se portanto:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= E_1 \oplus E \\ \bar{T} &= T_1 \oplus T.\end{aligned}$$

Ocupamo-nos do subespaço  $E$  e da estrutura do operador  $T$ . Suponhamos que  $T$  tem  $r$  autovetores. A base de autovetores deve ser completada com  $m - r$  vetores linearmente independentes.

**Definição:** O subespaço  $E$  denomina-se subespaço próprio generalizado, associado ao autovalor  $\lambda$ .

Esta seção trata da decomposição de operadores algébricos lineares com apenas um autovalor real na soma de uma matriz diagonal com outra nilpotente. A subseção D.7.1 trata de propriedades de matrizes nilpotentes, a subseção D.7 define e aborda propriedades de blocos de Jordan e a subseção D.7.2 estuda a decomposição do operador nas duas parcelas acima mencionadas.

### D.7.1 Matrizes e blocos nilpotentes elementares

O determinante de uma matriz nilpotente é igual a zero, pois se  $N^m = 0 \rightarrow \det N^m = (\det N)^m = 0 \rightarrow \det N = 0$ . Um exemplo de matriz nilpotente é dado por:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.34})$$

em que todos os elementos são iguais a zero, exceto os da segunda subdiagonal, que são iguais a 1. Elevando essa matriz ao quadrado obtém-se outra, cujos elementos são todos iguais a zero, com exceção dos pertencentes à segunda subdiagonal, que são iguais a 1:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sucessivamente:

$$N^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e: } N^m = 0.$$

É claro que a matriz:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.35})$$

também é nilpotente. Nesse caso  $N^{m-1} = 0$ . A matriz dada pela Eq. D.35 atende ao requisito de ter seu determinante igual a zero e é portanto candidata a descrever a parte não diagonalizável do operador  $T$ .

**Definição:** Blocos nilpotentes elementares são matrizes em que todos os elementos são nulos, com exceção dos pertencentes à primeira subdiagonal, que são iguais a 1.

Um exemplo de bloco nilpotente elementar é dado pela matriz D.34. Dois outros exemplos são mostrados abaixo:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{e:} \quad N = (0).$$

Uma matriz nilpotente pode ser formada por blocos dispostos ao longo da diagonal principal, como o exemplo mostrado abaixo:

$$N = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{0} \end{pmatrix} \quad (\text{D.36})$$

Um bloco nilpotente elementar, de dimensões  $n \times n$ , tem a propriedade de que  $J^n = 0$ . Outra propriedade consiste no resultado da aplicação de um bloco de Jordan sobre os elementos de base:

$$N f_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f_2.$$

Sejam  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , os elementos de base. Vê-se que:

$$\begin{cases} N f_j = f_{j+1} & (j < n) \\ N^p f_j = f_{j+p} & (j + p < n) \\ N f_n = Z. \end{cases} \quad (\text{D.37})$$

Uma terceira propriedade importante dos blocos de Jordan refere-se à ao fato de que a dimensão do espaço nulo dos mesmos é igual a 1. A dimensão do espaço nulo de matrizes formadas por  $n$  é  $n$ . Por exemplo, sendo a matriz D.36 composta por 5 blocos de Jordan, a dimensão de seu espaço nulo é igual a 5.

## D.7.2 A decomposição S-N

Consideremos um operador  $T$  de dimensões  $m \times m$  com apenas um autovalor real  $\lambda$ . Se  $T$  tiver  $m$  autovetores linearmente independentes pode ser diagonalizado:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I.$$

Cabe observar que as matrizes que representam  $T$  tem a forma acima em qualquer base, pois  $QIQ^{-1} = I$ . Se  $T$  não tiver  $m$  autovetores linearmente independentes, não pode ser diagonalizado. No entanto, o operador pode ser desmembrado na soma de uma matriz diagonal,  $S$ , cujos termos são todos nulos com exceção dos situados ao longo da diagonal principal que são iguais ao único autovalor de  $T$ , acrescido de outra matriz,  $N$ , que contém a parte não diagonalizável do operador:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} + N. \quad (\text{D.38})$$

Como  $\det T = \lambda^m$ , têm-se que  $\det N = 0$ . Procuremos a estrutura da matriz  $N$ . Consideramos a sequência de vetores  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_p\}$ , tais que:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (T - \lambda I)^{p-1} \mathbf{f}_1 & = & N^{p-1} \mathbf{f}_1 \neq 0 & \text{e: } (T - \lambda I)^p \mathbf{f}_1 = N^p \mathbf{f}_1 = 0 \\ (T - \lambda I)^{p-2} \mathbf{f}_2 & = & N^{p-2} \mathbf{f}_1 \neq 0 & \text{e: } (T - \lambda I)^{p-1} \mathbf{f}_2 = N^{p-1} \mathbf{f}_1 = 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (T - \lambda I) \mathbf{f}_{p-1} & = & N \mathbf{f}_{p-1} \neq 0 & \text{e: } (T - \lambda I)^2 \mathbf{f}_{p-1} = N^2 \mathbf{f}_1 = 0 \\ (T - \lambda I) \mathbf{f}_p & = & N \mathbf{f}_p = 0 \end{array} \right. \quad (\text{D.39})$$

com  $p \leq m$ . Demonstramos que essa sequência de vetores, se existir e atender aos requisitos acima, é linearmente independente. Para isso procuramos as condições para que:

$$\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{f}_p = \mathbf{Z}. \quad (\text{D.40})$$

Aplicando o operador  $N^{m-1}$  aos dois membros da Eq. D.40 obtemos:

$$\alpha_1 \mathbf{f}_1 = \mathbf{Z},$$

o que implica em que  $\alpha_1 = 0$ . Levando em conta essa condição vê-se que a Eq. D.40 se reduz a:

$$\alpha_2 \mathbf{f}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{f}_m = \mathbf{Z}. \quad (\text{D.41})$$

Aplicando o operador  $N^{m-2}$  aos dois membros da Eq. D.41 conclui-se que  $\alpha_2 = 0$ . Prosseguindo com o procedimento verifica-se que todos os coeficientes  $\alpha_j$  da Eq. D.40 devem ser iguais a zero para que a mesma seja satisfeita. Consequentemente, a sequência de vetores é linearmente independentes. Como o espaço considerado tem no máximo  $m$  vetores linearmente independentes deve-se ter  $p \leq m - r$ , onde  $r$  é o numero de autovetores de  $T$ . Se o operador tiver dois autovetores linearmente independentes  $p = m - 2$ . E se o operador tiver  $m$  autovetores linearmente independentes  $p = 1$ . Se o operador tiver  $m$  autovalores distintos a sequência de vetores acima tem apenas um, pois o operador já tem  $m$  autovetores linearmente independentes.

Mostremos que a sequência de vetores acima existe, pois cada um dos vetores  $\mathbf{f}_2 \dots \mathbf{f}_p$  pertence à imagem de  $T - \lambda I$ .

**Definição:** Os  $m - r$  vetores que completam a base incompleta de  $r$  autovetores de um operador  $T$ , de dimensões  $m \times m$  denominam-se autovetores generalizados, associados a seu único autovalor  $\lambda$ .

O operador  $N^p$  é nilpotente, pois leva qualquer vetor da base para  $\mathbf{Z}$ . Consequentemente, leva qualquer vetor do espaço para  $\mathbf{Z}$ . Um operador que leva qualquer vetor para  $\mathbf{Z}$  é o operador zero. Portanto,  $N$  é nilpotente. Enunciamos então o seguinte:

**Teorema:** Seja um operador  $T : E_n \rightarrow E_n$  com um único autovalor  $\lambda$ , de multiplicidade  $n$ .  $T$  tem uma decomposição em uma parcela diagonalizável (semi-simples) e outra nilpotente:

$$T = S + N.$$

Vejamos o exemplo de um operador  $T$  que tem apenas um autovetor:

$$T\mathbf{f}_1 = \lambda\mathbf{f}_1 + N\mathbf{f}_1.$$

Rearranjando os termos e levando em conta que  $N\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2$ , temos sucessivamente:

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)\mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}_2 \\ (T - \lambda I)^2\mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}_3 \\ &\vdots & \vdots & \vdots \\ (T - \lambda I)^{n-1}\mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}_n \\ (T - \lambda I)^n\mathbf{f}_1 &= \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

A decomposição de um operador  $T$  qualquer, tendo apenas um autovalor  $\lambda$  e um único autovetor é portanto, possível. A parte não diagonalizável  $N$  do operador tem a forma do bloco de Jordan D.34 na base formada pelo autovetor e pelos autovetores generalizados. Lembramos que esses últimos são vetores quaisquer, linearmente independentes.

Denominamos como  $N_0$  a parcela nilpotente da decomposição do operador. Como a parte diagonal do operador é igual a  $\lambda I$  em qualquer base, a matriz  $N$  pode ser obtida fazendo-se:

$$N = T - \lambda I.$$

Essa matriz é nilpotente de modo que  $N^m = N_0^m = 0$ , embora  $N$  não tenha a forma do bloco de Jordan D.34. Os exemplos abaixo ilustram o procedimento de cálculo da exponencial de uma matriz com autovalores repetidos.

**Exemplo:** Calcular  $e^{tA}$ , onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz tem três autovalores iguais a 1. Pode-se determinar a matriz  $N$ , subtraindo-se  $S = 1I$  de  $A$ . Obtém-se:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N^3 = 0.$$

Calcula-se a seguir  $e^{tA}$ :

$$e^{tA} = e^{t(1I+N)} = e^t \left[ I + tN + \frac{t^2 n^2}{2!} \right] = e^t \begin{pmatrix} 1 & t & 2t + 3t^2/2 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exemplo:** Calcular  $e^{tA}$ , onde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz tem um autovalor  $\lambda_1 = -1$ , de multiplicidade 2 e outro,  $\lambda_3 = 1$ . Como os autovalores não são todos iguais não se pode subtrair a parcela diagonal, diretamente da matriz  $A$ . O autovetor associado a  $\lambda_1 = -1$  é proporcional a  $\mathbf{f}_2 = (1; 0; 0)$ . Como há apenas um autovetor associado a  $\lambda_1 = -1$  é necessário completar a base. Escolhemos o vetor  $\mathbf{f}_1 = (0; 1; 0)$ . Deve-se observar que os autovetores generalizados são ordenados à frente do autovetor associado ao autovalor repetido, O autovetor associado a  $\lambda_3 = 1$  é proporcional a  $\mathbf{f}_3 = (0; 2; 1)$ . As matrizes  $Q$  e  $Q^{-1}$  são dadas por:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para calcularmos  $e^{tA}$  determinamos a matriz  $A_0$ , que representa o operador na base dos autovetores e autovetor generalizado. Subtrai-se dessa matriz a parcela diagonal, obtendo-se a parte nilpotente  $N_0$ . De posse de  $S_0$  e  $N_0$  calcula-se  $\exp(S_0 + N_0)$  retorna-se à base original:

$$A_0 = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos a seguir a matriz  $N_0$ :

$$N_0 = A_0 - S_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que a matriz  $N_0$  não está na forma de um bloco nilpotente elementar pelo fato dos autovalores de  $A$  não serem todos iguais. Calculamos a seguir  $e^{tA_0} = e^{S_0}e^{N_0}$ , notando que  $N_0^2 = 0$ :

$$e^{tA_0} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Concluindo a seção, mostramos o seguinte:

**Teorema:** Seja um operador algébrico linear,  $T$ , de dimensões  $n \times n$ , cujo polinômio característico é:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} = 0,$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  são os autovalores de  $T$  e  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , a multiplicidade de cada autovalor, respectivamente, com  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = m$ . Todo operador  $T$ , conforme acima, satisfaz seu polinômio característico, isso é:

$$p(A) = (A - \lambda_1 I)^{m_1}(A - \lambda_2 I)^{m_2} \dots (A - \lambda_k I)^{m_k} = 0,$$

onde  $I$  é a matriz identidade e  $0$ , a matriz nula (Teorema de Cayley-Hamilton).

Seja  $\mathbf{f}$  um autovetor ou autovetor generalizado, associado ao autovalor  $\lambda_j$ , de multiplicidade  $m_j$ . Então:

$$(T - \lambda_j)^{m_j} \mathbf{f} = \mathbf{Z}.$$

O procedimento dá o mesmo resultado com todos os binômios do polinômio característico, isso é com todos os autovetores e autovetores generalizados de  $T$ , que formam uma base de  $E_m$ . Como os binômios são comutáveis, concluímos que o polinômio característico aplicado a qualquer vetor de base de  $E_m$  e portanto, a qualquer vetor de  $E - m$ , dá como resultado o vetor  $\mathbf{Z}$ . O operador que leva qualquer vetor de  $E_m$  para o vetor  $\mathbf{Z}$  é o operador zero, o que prova o teorema.

### D.7.3 Forma canônica real de Jordan

Vimos que um operador com um único autovalor  $\lambda$  pode ser decomposto na soma de uma matriz diagonal com uma nilpotente. Resta a questão a responder sobre a forma dessa matriz nilpotente, pois, tanto ela pode conter apenas um bloco de Jordan e ter a forma da matriz D.34, quanto se composta por vários blocos nilpotentes elementares, conforme a matriz D.36. Examinemos a estrutura da matriz de dimensões  $10 \times 10$  abaixo, já escrita em forma canônica:

$$N = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & \\ 1 & 0 \\ & 1 & 0 \end{matrix}} & & & & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & & & & & \\ & & & \boxed{0} & & & & & & \\ & & & & \boxed{0} & & & & & \\ & & & & & \boxed{0} & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

Por ser formada por 6 blocos de Jordan, o espaço nulo dessa matriz é igual a 6 (ver pág. 303). Uma primeira regra se deduz imediatamente desse fato: a dimensão  $\delta_1$  do espaço nulo de  $N$  é dada por:

$$\delta_1 = \dim \text{Nu}(N).$$

Elevando a matriz  $N$  ao quadrado obtemos:

$$N^2 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & & & & & \\ & \begin{matrix} 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & & & & \\ & & \begin{matrix} 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & & & \\ & & & \mathbb{0} & & \\ & & & & \mathbb{0} & \\ & & & & & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Cada bloco de dimensões  $1 \times 1$  contribui com uma dimensão para a dimensão do espaço nulo de  $N^2$  e blocos de dimensões iguais ou superior a  $1 \times 1$  contribuem com duas dimensões. Elevando a matriz ao cubo, obtemos:

$$N^3 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & & & & & \\ & \begin{matrix} 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & & & & \\ & & \begin{matrix} 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & & & \\ & & & \mathbb{0} & & \\ & & & & \mathbb{0} & \\ & & & & & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

O espaço nulo de  $N^3$  tem a mesma dimensão  $n$  da matriz. O maior bloco de Jordan tem dimensão 3. Seja  $\nu_k$  o número de blocos de dimensões  $k \times k$  e  $\delta_j$ , a dimensão do espaço nulo de  $N^j$ . Temos então:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \\ \delta_2 &= \nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3 \\ \delta_3 &= \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3. \end{aligned}$$

A solução desse sistema fornece  $\nu_1 = 3$ ,  $\nu_2 = 2$  e  $\nu_3 = 1$ . De forma geral, o número de blocos de Jordan é determinado pela solução do sistema:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n \\ \delta_2 &= \nu_1 + 2(\nu_2 + \dots + \nu_n) \\ \vdots &\quad \vdots \\ \delta_{n-1} &= \nu_1 + 2\nu_2 + \dots + (n-2)\nu_{n-2} + (n-1)(\nu_{n-1} + \nu_n) \\ \delta_n &= \nu_1 + 2\nu_2 + \dots + n\nu_n, \end{aligned}$$

onde  $n$  é o menor expoente ao qual a matriz  $N$  deve ser elevada, que dá como resultado a matriz 0.

Uma operador cuja parte nilpotente está escrita na forma de blocos elementares encontra-se na *forma canônica de Jordan*. Um exemplo de matriz nessa forma é dado abaixo:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \ddots$$

#### D.7.4 Forma canônica complexa de Jordan

O caso de operadores com autovalores complexos repetidos é tratado de forma semelhante ao real. Um exemplo de matriz complexa na forma canônica de Jordan complexo é dado pelo exemplo abaixo:

$$J = \begin{pmatrix} D & & & & \\ I & D & & & \\ & I & D & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & I & D \\ & & & & I & D \end{pmatrix}, \quad \text{onde:} \quad D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (D.42)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos apenas que, no caso de operadores com um único par de autovalores complexos  $a \pm ib$  a subtração  $N = T - S$  deve ser feita obrigatoriamente na base dos autovetores e autovetores generalizados, ao contrário do que se faz no caso de operadores com um único autovalor real, porque a matriz contendo apenas blocos  $D$  (Eq. D.42) ao longo da diagonal principal não é a mesma em todas as bases.

## D.8 Problemas

- Sejam  $A$  e  $Q$  duas matrizes quadradas de dimensões  $n \times n$ , com  $Q$  inversível. O traço de uma matriz é definido como a soma dos elementos da diagonal principal:

$$\text{tr}(A) = \delta_{ij}a_{ij},$$

onde  $a_{ij}$  é o elemento geral de  $A$ . Seja  $B = QAQ^{-1}$ .  $B$  e  $A$  são duas matrizes similares que representam o mesmo operador algébrico linear  $T$ , em bases diferentes. As colunas de  $Q^{-1}$  são formadas pelas coordenadas de cada um dos vetores da nova base, na qual a matriz  $B$  representa o operador  $T$ . Mostrar que:

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(QAQ^{-1}) = \text{tr}(B) = \text{tr}(T),$$

isso é, que o traço, assim como o determinante, é um invariante do operador  $T$  e independe da matriz que o representa.

2. Mostrar que se  $A$  e  $B$  forem duas matrizes quadradas arbitrárias, de dimensões  $n \times n$ , então  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .
3. Mostrar que  $(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj})/2$  é um invariante de um tensor de segunda ordem  $\boldsymbol{\sigma}$ .
4. Sejam  $\lambda \in R$  e  $A, B$  e  $Q$ , três matrizes com  $Q$  inversível, tais que  $AQ = QB$ . Mostre que:
  - (a)  $(\lambda I - A)Q = Q(\lambda I - B)$ ;
  - (b)  $\lambda$  é autovalor de  $A$  se e somente se  $\lambda$  for autovalor de  $B$ ;
  - (c)  $\mathbf{X}$  é autovetor de  $B$ , associado a  $\lambda$  se  $Q\mathbf{X}$  for autovetor de  $A$ , associado a  $\lambda$ .
5. Seja  $A(t)$  uma matriz cujos elementos dependem de um parâmetro  $t$  e  $A(t_2)A(t_1) = A(t_1)A(t_2)$ , para quaisquer valores de  $t_1$  e  $t_2$ . Seja  $f(A)$  uma função da matriz  $A$  e definimos:

$$\frac{df(A)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A(t+h)) - f(A(t))}{h}.$$

Mostrar que:

$$\frac{dA^n}{dt} = nA^{n-1} \frac{dA}{dt}, \quad \frac{de^A}{dt} = \frac{dA}{dt} e^A.$$

Sugestão: usar a fórmula do binômio de Newton:

$$(X + Y)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{X^j Y^k}{j! k!},$$

onde aplicável.

6. Mostrar que se  $\lambda \neq 0$  for um autovalor associado ao autovetor  $\mathbf{X}$  de um operador algébrico linear inversível  $A$ , então:

$$A^{-1}\mathbf{X} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{X}.$$

7. O cálculo dos autovalores de um operador através da resolução da Eq. D.10 é difícil para matrizes de grandes dimensões. Um método alternativo consiste em se aplicar a matriz em um valor qualquer  $\mathbf{Y}$  e repetir a operação, aplicando-a sucessivamente aos vetores resultantes. Como um vetor qualquer pode ser considerado como soma de autovetores de comprimento convenientemente escolhido ( $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \dots + \mathbf{X}_n$ ) têm-se:

$$\begin{aligned} A\mathbf{X} &= A(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \dots + \mathbf{X}_n) & = & \lambda_1\mathbf{X}_1 + \lambda_2\mathbf{X}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{X}_n \\ A(A\mathbf{X}) &= \lambda_1^2\mathbf{X}_1 + \lambda_2^2\mathbf{X}_2 + \dots + \lambda_n^2\mathbf{X}_n \\ &\vdots && \vdots \\ A^p\mathbf{X} &= \lambda_1^p\mathbf{X}_1 + \lambda_2^p\mathbf{X}_2 + \dots + \lambda_n^p\mathbf{X}_n. \end{aligned}$$

A cada aplicação da matriz  $A$ , a componente relativa ao maior autovalor fica maior em relação às demais. Normalizando as componentes do vetor resultante a cada aplicação

pelo módulo do novo vetor obtém-se um vetor  $\mathbf{X}^n$ , tal que  $|\mathbf{X}^n| = 1$  ( $n$  é o número da iteração). Esse vetor alinha-se rapidamente ao autovetor de maior módulo. Uma vez determinado o autovetor associado ao autovalor de maior módulo pode-se calcular o autovalor sem dificuldades. Para cálculo do segundo autovalor e do segundo autovetor subtrai-se do vetor  $\mathbf{Y}$ , a componente na direção de  $\mathbf{X}_1$  e repete-se o procedimento.

No caso de matrizes muito grandes, muitas vezes procura-se determinar taxas de crescimento e frequências naturais próximas a alguma frequência especificada. Uma forma de se calcular um autovetor correspondente a um autovalor especificado  $\lambda$  consiste em seguir o seguinte procedimento:

- (a) Calcula-se a matriz  $B = A - \lambda I$ . Essa matriz passa a ter um autovalor  $\lambda' = 0$ . Sua inversa tem um autovalor que diverge;
- (b) Inverte-se a matriz e calcula-se o autovetor correspondente a seu maior autovalor.

Os autovalores da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

são  $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$  e  $6$ . Calcular os autovetores da matriz, começando pelo associado ao maior autovalor. Repetir o cálculo subtraindo  $1, 2\lambda I$  da matriz  $A$ . Quantas iterações são necessárias até a convergência, isso é, até que:

$$\frac{|\mathbf{X}^n - \mathbf{X}^{n-1}|}{|\mathbf{X}^n|} < 10^{-8} ?$$

8. Mostrar que, se  $\lambda$  for um autovalor associado ao autovetor  $\mathbf{X}$  de um operador algébrico linear  $A$ , então:

$$\exp(A)\mathbf{X} = \exp(\lambda)\mathbf{X}.$$

9. Suponha que  $\mu$  não seja um autovalor da matriz  $A \in M(n)$ . Mostrar que a equação  $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X} + e^{\mu t}\mathbf{Y}$ , com  $\mathbf{Y}$  especificado, tem uma solução da forma  $\mathbf{X} = e^{\mu t}\mathbf{V}$ , com  $\mathbf{V} \in \mathcal{R}^n$ .

10. Calcular a exponencial das matrizes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

11. Resolver o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x \\ \dot{y} &= x - 2y \\ \dot{z} &= y - 2z \end{aligned}$$

com a condição inicial  $(x_0; y_0; z_0) = (1; 2; 3)$ .

12. Determinar os pontos de equilíbrio, a estabilidade linear dos mesmos e construir as trajetórias no espaço de fases (retrato de fases) do sistema cuja evolução obedece à equação de Duffing:

$$\ddot{x} + x^2 \dot{x} - x + x^3 = 0$$

13. Determinar os pontos de equilíbrio, a estabilidade linear dos mesmos e esboçar as trajetórias no espaço de fases do sistema cuja evolução obedece à equação de Van der Pool:

$$\ddot{x} + (x^2 - 1) \dot{x} + x = 0.$$

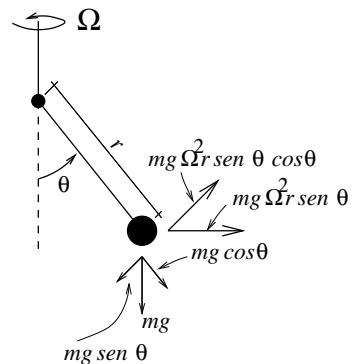
14. A figura ao lado mostra o esquema de um pêndulo giratório. Pede-se:

- (a) Mostrar que a equação de evolução do pêndulo é:

$$mr\ddot{\theta} + mg \operatorname{sen} \theta - mr\Omega^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0$$

ou:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r} \operatorname{sen} \theta - \Omega^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0;$$



- (b) Reescrever a equação do movimento sob a forma de duas equações de primeira ordem e mostrar que os pontos fixos da dinâmica são:

$$\begin{aligned}\theta &= \pm n\pi \\ \theta &= \cos^{-1}(1/\lambda) \quad (\lambda \geq 1),\end{aligned}$$

onde  $\lambda = \Omega^2 r / g$ . Nos dois casos,  $\dot{\theta} = 0$ .

- (c) Estudar a estabilidade linear dos pontos fixos e construir o retrato de fases do sistema.

15. Em 1968, os profs. I. Prigogine e R. Lefever, da Universidade Livre de Bruxelas, propuseram um modelo para descrever as oscilações em sistemas químicos observadas por Belousov e Zhabotinsky, cerca de quinze anos antes. Graças a esse modelo, Prigogine foi agraciado com o prêmio Nobel de química em 1977. O modelo recebeu o nome de “Brusselador” e é dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -(b+1)x + a + x^2y \\ \frac{dy}{dt} &= bx - x^2y,\end{aligned}$$

onde  $x$  e  $y$  são as concentrações de compostos químicos intermediários e  $a$  e  $b$ , as concentrações de reagentes, mantidas constantes. Determinar os pontos de equilíbrio dessa cinética. Que relações devem existir entre os parâmetros desse modelo, para que o sistema seja estável e em que condições ocorrem oscilações que são amplificadas (bifurcação de Hopf)?

16. Qual é a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor obtido removendo-se seções centrais de comprimento  $l/2$  em cada etapa de construção do conjunto, ao invés de  $l/3$ ?

17. Determinar uma base para o espaço nulo da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

sabendo que as colunas 2, 4 e 5 (contadas a partir da esquerda) podem ser obtidas por combinação linear da 1<sup>a</sup> e da 3<sup>a</sup> colunas.

18. Mostrar que  $(\lambda - 4)^2(\lambda - 2) = 0$  é o polinômio característico das matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e:} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que  $A^2 - 6A + 8I = (A - 4I)(A - 2I) = 0$ , mas  $B^2 - 6B + 8I \neq 0$ . Mostrar que  $(B - 4I)^2(B - 2I) = 0$ .

19. Mostrar que a matriz  $A$  do problema 18 tem dois autovalores linearmente independentes, associados a  $\lambda = 4$  e a matriz  $B$ , apenas um e um autovetor generalizado de ordem dois. Essa é a razão pela qual  $A$  satisfaz uma equação polinomial de grau mais baixo do que  $B$ .

20. Determinar a forma canônica de Jordan das matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \\ 8 & -10 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e:} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

A matriz  $A$  tem um único autovalor  $\lambda = -1$ , de multiplicidade 4.

21. Dada a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

cujos polinômios característicos são:

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)^2$$

reescrever a matriz na base de seus autovetores e autovetores generalizados (forma canônica de Jordan).



# **Lista de Tabelas**

13.1 Coeficientes dos termos da Eq. de amplitude de hexágonos. . . . .	99
20.1 Valores característicos das variáveis. . . . .	213
20.2 Uso de variáveis adimensionais para reescrever as variáveis do escoamento. .	213
20.3 Parâmetros de modelos de viscosidade generalizados ajustados para representar poliestireno. . . . .	225



# Listas de Figuras

11.1 Sistema de coordenadas cilíndricas usado para jatos . . . . .	3
11.2 Mapa da estabilidade linear de modos normais num escoamento base local . . . . .	8
11.3 Funções de Bessel que são soluções da equação (11.27) com $\alpha_0 = 1$ e $m = 0$ , 1 e 2 . . . . .	10
11.4 Dependência da taxa de crescimento espacial $-Im[\alpha_0]$ com a freqüência $\omega_0$ para $m = 0, 1$ e $2$ . . . . .	11
11.5 Comportamento das taxas de crescimento espaciais, para $m = 0$ e $x_0 = 1$ , com a freqüência: a) Correção de segunda ordem e b) taxa de crescimento total . . . . .	21
11.6 Comportamento das taxas de crescimento espaciais, para $m = 1$ e $x_0 = 1$ , com a freqüência: a) Correção de segunda ordem e b) taxa de crescimento total . . . . .	21
11.7 Comportamento das taxas de crescimento espaciais, para $m = 2$ e $x_0 = 1$ , com a freqüência: a) Correção de segunda ordem e b) taxa de crescimento total . . . . .	22
11.8 Perfil de velocidade $\bar{u}_0(r)$ do jato livre. Comparação entre modelos teóricos e dados experimentais [106]. . . . .	26
11.9 Comparação entre taxas de crescimento espacial do primeiro modo helicoidal obtidas com escoamentos base descontínuo e contínuo, do modelo da tangente hiperbólica. . . . .	31
11.10 Perfil de velocidade do jato transversal de acordo com os modelos descontínuo e da tangente hiperbólica para $\theta_0 = 1/10, 1/15$ e $1/20$ . . . . .	34
11.11 Velocidades similares de acordo com o modelo da camada limite com $O(\lambda)$ e $O(\lambda \delta)$ para o jato transversal contínuo. . . . .	39
11.12 Componentes radial $\bar{v}_1$ e tangencial $\bar{w}_1$ da solução assintótica uniformemente válida de $O(\lambda)$ para o jato transversal com $Re = 1000$ e $x = 1$ . . . . .	41
11.13 Segunda derivada com respeito a $r$ dos resultados mostrados da Figura ??.. .	41
11.14 Taxa de crescimento para o modo com simetria axial obtidos com o modelo da tangente hiperbólica usando $\omega_2 = 0$ : a) Correção de segunda ordem b) taxa total . . . . .	48

11.15	Correção para taxa de crescimento dos modos sem simetria axial obtida com o modelo da tangente hiperbólica usando $\omega_2 = 0$ : a) $m = 1$ e b) $m = 2$ .	48
11.16	Taxa de crescimento total dos modos sem simetria axial obtida com o modelo da tangente hiperbólica usando $\omega_2 = 0$ : a) $m = 1$ e b) $m = 2$ .	49
11.17	Modo com simetria axial obtido com o modelo da tangente hiperbólica usando $\omega_2 = 0$ : a) Taxa de crescimento total máxima e b) sua freqüência normalizada. Pontos representam dados experimentais [107].	49
11.18	Taxa de crescimento para o modo com simetria axial obtidos com o modelo da camada limite usando $\omega_2 = 0$ e $x_0 = 1$ : a) Correção de segunda ordem b) taxa total.	50
11.19	Taxa de crescimento total do modo $m = 2$ obtida com o modelo da camada limite usando $\omega_2 = 0$ .	51
12.1	O problema e a estrutura celular de Rayleigh Bénard.	55
12.2	Número de Rayleigh crítico.	65
12.3	Convecção de Rayleigh-Bénard: curvas da taxa de crescimento.	66
13.1	Modos e interação entre modos de uma estrutura hexagonal de Bénard.	100
13.2	Instabilidades de Eckhaus e Zig-Zag.	108
14.1	Estruturas de Rayleigh Bénard – sistemas com forçagem uniforme.	112
14.2	Estruturas de Rayleigh Bénard – retângulos com forçagem uniforme.	113
14.3	Estruturas de Rayleigh Bénard – sistemas forçados com rampa espacial de $\varepsilon$ .	114
14.4	O efeito subcrítico em sistemas forçados com rampa espacial de $\varepsilon$ .	115
14.5	Instabilidade de um foco em uma estrutura de convecção de Rayleigh-Bénard.	116
14.6	Estrutura de Rayleigh-Bénard formada com distribuição gaussiana de $\varepsilon$ .	117
14.7	Classificação de estruturas de Bénard quanto à densidade de defeitos.	118
14.8	Conteúdo espectral de uma estrutura de Rayleigh-Bénard.	119
15.1	Um sistema confinado de Rayleigh Bénard.	121
15.2	O atrator de Lorenz.	125
16.1	Célula eletroquímica – arranjo físico rotatório.	131
16.2	Célula eletroquímica arranjo esquemático.	132
16.3	Curvas de instabilidade em uma célula eletroquímica.	133
16.4	Disco rotatório: campo hidrodinâmico com viscosidade variável.	136
16.5	Espectro de autovalores dos modos normais em células eletroquímicas.	137
16.6	Modos normais em células eletroquímicas – perturbações unidimensionais.	139

16.7 Padrões de perturbação próximo ao eixo de um disco rotatório. . . . .	144
16.8 Curvas neutras de perturbações estacionárias sobre disco rotatório. . . . .	149
16.9 Curvas neutras de perturbações com $\omega_r < 0$ sobre disco rotatório. . . . .	150
16.10 Curvas neutras de perturbações com $\omega_r > 0$ sobre disco rotatório. . . . .	150
16.11 Número de Reynolds crítico em função da velocidade angular da estrutura. .	151
16.12 Número de onda e ângulo críticos da espiral em função da freqüência. . . . .	151
17.1 Perfis hidrodinâmico e de concentração sobre disco rotatório. . . . .	158
17.2 Derivadas dos perfis de velocidade e concentração – disco rotatório. . . . .	159
17.3 A malha numérica em um eletrodo de disco rotatório. . . . .	171
17.4 Estrutura dos operadores - estabilidade hidrodinâmica em disco rotatório. .	171
17.5 Curvas neutras dos campos acoplados – disco rotatório. . . . .	172
17.6 Efeito do desacoplamento da hidrodinâmica ao transporte. . . . .	173
17.7 Taxas de crescimento de perturbações instáveis. . . . .	174
17.8 Partes real e imaginária de modos sobre a curva neutra da região química. .	175
17.9 Linhas de corrente de um modo sobre a curva neutra química. . . . .	176
17.10 Partes real e imaginária de um modo sobre a curva neutra hidrodinâmica. .	176
17.11 Linhas de corrente de um modo sobre a curva neutra química. . . . .	177
17.12 O colapso da região química instável quando $\nu_0/\nu_\infty \rightarrow 1$ . . . . .	178
17.13 Retorno à estabilidade de fluidos com $\nu = C^{te}$ quando $\nu_0/\nu_\infty \rightarrow \infty$ . . . . .	179
18.1 Imagens de alta resolução do sol . . . . .	189
18.2 Simulação de N-corpos da interação entre galáxias . . . . .	190
18.3 Simulação de N-corpos do colapso de matéria escura galáctica . . . . .	191
19.1 Exemplos de sistemas bifásicos . . . . .	194
19.2 Representação da interface em escoamentos bifásicos. . . . .	198
19.3 Representação da interface no método <i>VOF</i> . . . . .	199
19.4 Representação das funções distância e Level-Set. . . . .	200
19.5 Escoamentos bifásicos em tubos verticais. . . . .	205
19.6 Escoamentos bifásicos em tubos horizontais. . . . .	206
19.7 Mapas de padrões de escoamento bifásico. . . . .	208
20.1 Sistema de coordenadas para a cavidade de um molde. . . . .	212
20.2 Escoamento em uma célula de Hele-Shaw. . . . .	216
20.3 Modelos de viscosidade generalizados. . . . .	225

21.1	Volume de controle ao qual se aplica a conservação das espécies químicas.	228
21.2	Curvas de $f(u, v) = 0$ e $g(u, v) = 0$ da cinética de Schnackenberg.	231
22.1	Freqüência real e número de Rayleigh como funções do número de onda real para $\text{PeM} = 0$ , $\lambda_1 = 1/2$ e $\lambda_2 = 1/4$ .	251
22.2	Freqüência real e número de Rayleigh como funções do número de onda real para $\text{PeM} = 1$ , $\lambda_1 = 1/2$ e $\lambda_2 = 1/4$ .	251
22.3	Freqüência real e número de Rayleigh como funções do número de onda real para $\text{PeM} = 2$ , $\lambda_1 = 1/2$ e $\lambda_2 = 1/4$ .	251
22.4	Freqüência e Rayleigh críticos versus Péclet para $\lambda_1 = 1/2$ e $\lambda_2 = 1/4$ .	252
22.5	Rayleigh como função do número de onda real para $\text{PeM} = 1.322$ , $\lambda_1 = 1/2$ e $\lambda_2 = 1/4$ .	252
D.1	Área algébrica de dois vetores.	264
D.2	A alternativa de Fredholm.	277
D.3	Evolução de estados no espaço de fases.	281
D.4	Esfera, como exemplo de conjunto não compacto.	283
D.5	Movimento periódico e quase periódico sobre um toróide.	284
D.6	Determinação da dimensão de Hausdorff de um quadrado.	286
D.7	Conjunto de Cantor e floco de neve (curva de Koch).	286
D.8	Ponto de sela, foco instável e centro.	294
D.9	Sistema de três equações diferenciais ordinárias.	297

# Referências Bibliográficas

- [1] E. Åkervik, L. Brandt, D. S. Henningson, J. Hoepffner, O. Marxen, and P. Schlatter. Steady solutions of the Navier-Stokes equations by selective frequency damping. *Physics of Fluids*, 18(6):068102, 2006.
- [2] T. M. Alston and I. M. Cohen. Decay of a laminar shear layer. *Physics of Fluids*, 4(12):2690–2699, 1992.
- [3] G.E. Alves. Co-current liquid-gas flow in a pipeline contactor. *Chemical Process and Engineering*, 50(9):449–456, 1954.
- [4] L. S. B. Alves. *Transverse Jet Shear-Layer Instabilities: Linear Stability Analysis and Numerical Simulations*. PhD thesis, University of California at Los Angeles, Los Angeles, USA, March 2006.
- [5] A. Amsden and F H. Harlow. The smac method: A numerical technique for calculating incompressible fluid flows. Technical report, Los Alamos, 1970.
- [6] G.R. Anjos. *A 3D ALE Finite Element Method for Two-Phase Flows with Phase Change*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédéral de Lausanne - EPFL, July 2012.
- [7] S. Bagheri, P. Schlatter, P. J. Schmid, and D. S. Henningson. Global stability of a jet in crossflow. *Journal of Fluid Mechanics*, 624:33–44, 2009.
- [8] O. Baker. Design of pipe lines for simultaneous flow of oil and gas, July 1954.
- [9] O. E. Barcia, O. R. Mattos, and B. Tribollet. Anodic dissolution of iron in acid sulfate under mass transport control. *J. Electrochem. Soc.*, 139:446–453, 1992.
- [10] G. K. Batchelor. *Introduction to fluid dynamics*. Cambridge: University Press, Cambridge, 1967.
- [11] G. K. Batchelor and A. E. Gill. Analysis of the stability of axisymmetric jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 14:529–551, 1962.
- [12] P. Bergé, Y. Pomeau, and C. Vidal. *Order Within Chaos*. Wiley, Paris, 1984.
- [13] P. N. Blossey and P. J. Schmid. Global stability analysis of a jet in cross flow. In *Bulletin of the Americal Physical Society*, number EN003 in 55th D.F.D Meeting., Texas, 2002.

- [14] A. H. M. Boshouwers and J. J. (Johan) van der Werf. *Inject-3, a simulation code for the filling stage of the injection moulding process of thermoplastics*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 1988.
- [15] A. Bourlioux. Refined level set grid method for tracking interfaces. In *Proceedings of the 6th International Symposium on Computational Physics*, 1995. Lake Tahoe CA.
- [16] William E. Boyce and Richard C. DiPrima. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 7th edition, 2001.
- [17] J. Bragard, J. Pontes, and M. G. Velarde. Patterns, defects and evolution of Bénard-Marangoni cells. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 6(9):1665–1671, 1996. DOI: 10.1142/S0218127496001016.
- [18] J. Bragard and M. G. Velarde. Marangoni-Marangoni convection: planform and related theoretical predictions. *J. Fluid Mech.*, 368:165–194, 1998.
- [19] S. N. Brown and K. Stewartson. On thermal convection in a large box. *SIAM*, 57:187–204, 1977.
- [20] C.A. Caretta, R. R. Rosa, H. F. C. Velho, F. M. Ramos, and M. Makler. Evidence of turbulence-like universality in the formation of galaxy-sized dark matter haloes. *Annu. Rev Astron. Astrophys*, 487:445–451, 2008.
- [21] G. F. Carey and S. S. Chow. Numerical approximation of generalized Newtonian fluids using Powell-Sabin-Heindl elements: I. theoretical estimates. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 41:1085–1118, 2003.
- [22] V.P. Carey. *Liquid Vapor Phase Change Phenomena*. Taylor & Francis, 2007.
- [23] P. J. Carreau. Rheological equations from molecular network theories. *Trans. Soc. Rheology*, 16(1):99–127, 1972.
- [24] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover, New York, 1961.
- [25] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford University Press, New York, United States, 1961.
- [26] K.-C. Chang, Y. Hioe, M. G. Villarreal, and J. M. Castro. Minimum “Safe Cycle Time”: Selecting the Frozen Layer Thickness. *Polymer Engineering and Science*, 49(12):2320–2328, 2009.
- [27] L. Chen and Y. Li. A numerical method for two phase flows with an interface. *Environmental Modeling and Software*, 13:247–255, 1998.
- [28] S. C. Chen, Y. C. Chen, and N. T. Cheng. Simulation of injection-compression mold-filling process. *Int. Comm. Heat Mass Transfer.*, 25(7):907–917, 1998.
- [29] V. Chikkadi, A. Sameen, and R. Govindarajan. Preventing transition to turbulence: a viscosity stratification does not always help. *PRL*, 95:264504, 2005.

- [30] D. T. Chin and M. Litt. An electrochemical study of flow instability on a rotating disk. *J. Fluid Mech.*, 54:613–625, 1972.
- [31] C. I. Christov, J. Pontes, D. Walgraef, and M. G. Velarde. Implicit time splitting for fourth-order parabolic equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 148:209–224, 1997. DOI: 10.1016/S0045-7825(96)01176-0.
- [32] S. L. V. Coelho. *The Dynamics of the Near Field of Entraining Jets in Cross Flows*. PhD thesis, University of Cambridge, 1988.
- [33] S. L. V. Coelho and J. C. R. Hunt. The dynamics of the near field of strong jets in cross flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 200:95–120, 1989.
- [34] J. D. Cole. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, 1968.
- [35] J.G. Collier and J.R. Thome. *Convective Boiling and Condensation*. Oxford University Press, 1987.
- [36] R. M. Cotta, L. S. de B. Alves, and M. D. Mikhailov. *Applied Numerical Analysis with Mathematica*. MATHEMATICA<sup>©</sup> Technical Center, COPPE/UFRJ. E-papers Serviços Editoriais, Rio de Janeiro, Brazil, 2001.
- [37] D. G. Crighton and M. Gaster. Stability of slowly diverging jet flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 77:397–413, 1976.
- [38] W. O. Criminale, T. L. Jackson, and R. D. Joslin. *Theory and Computation of Hydrodynamic Stability*. Cambridge Monographs on Mechanics. Cambridge University Press, 2003.
- [39] M. C. Cross. Boundary conditions on the envelope functions of convective rolls close to the onset. *Phys. Fluids*, 25:936–941, 1982.
- [40] M. C. Cross. Ingredients of a theory of convective textures close to onset. *Phys. Rev. A*, 25:1065–1076, 1982.
- [41] M. C. Cross and P. C Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, 65:851–1112, 1993.
- [42] M. M. Cross. Kinetic interpretation of non-Newtonian flow. *Journal of Colloid and Interface Science*, 33:30–35, 1970.
- [43] L. S. de B. Alves and R. M. Cotta. Transient natural convection inside porous cavities:- hybrid numerical- analytical solution and mixed symbolic-numerical computation. *Numerical Heat Transfer, Part A - Applications*, 38(1):89–110, 2000.
- [44] L. S. de B. Alves, R. M. Cotta, and J. Pontes. Stability analysis of natural convection in porous cavities through integral transforms. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(6):1185–1195, 2002.
- [45] L. S. de B. Alves, R. E. Kelly, and A. R. Karagozian. Local stability analysis of an inviscid transverse jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 581:401–418, 2007.

- [46] L. S. de B. Alves, R. E. Kelly, and A. R. Karagozian. Transverse jet shear layer instabilities. part ii: Linear analysis for large jet-to-crossflow velocity ratios. *Journal of Fluid Mechanics*, 602:383–401, 2008.
- [47] P. De Kepper, V. Castets, J. Dulos, and J. Boissonade. Turing type chemical patterns in the chlorite-iodide-malonic acid reaction. *Physica D*, 49:161, 1991.
- [48] A. De Wit. *Brisure de symétrie spatiale et dynamique spatio-temporale dans les systèmes réaction-diffusion*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, Brussels, 1993.
- [49] R.O. Dendy. *Plasma Dynamics*, page 179. Clarendon Press, Usa, 1990.
- [50] G. Dewel and P. Borckmans. Effects of slow spatial variations on dissipative structures. *Phys. Lett. A*, 138:189–192, 1989.
- [51] C. I. Doering and A. O. Lopes. *Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 2005.
- [52] J. Donea, S. Giuliani, and J.P. Halleux. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 33(5):689–723, 1982.
- [53] P. G. Drazin and W. H. Reid, editors. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1981.
- [54] P. G. Drazin and W. H. Reid. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge, London, 1981.
- [55] M. V. Dyke. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Academic Press Inc., New York, United States, 1964.
- [56] I. Epelboin, G. Gabrielli, M. Keddam, J. C. Lestrach, and H. Takenouti. Passivation of iron in sulfuric acid medium. *J. Electrochem. Soc.*, 126:1632–1637, 1979.
- [57] K. C. Estacio. Simulação do processo de moldagem por injeção 2D usando malhas não estruturadas. Master's thesis, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, São Carlos, Março 2004.
- [58] K. C. Estacio. *Simulação de escoamento de fluidos em superfícies definidas por pontos não organizados*. PhD thesis, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, São Carlos, Outubro 2008.
- [59] K. C. Estacio and N. Mangiavacchi. Simplified model for mold filling simulations using CVFEM and unstructured meshes. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 23:345–361, 2007.
- [60] M. J. C. Esteves, M. J. E. M. Cardoso, and E. Barcia. A Debye-Hückel model for calculating the viscosity of binary strong electrolyte solutions,. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 40:5021–5028, 2001.
- [61] Manoel J. C. Esteves, Márcio J. E. de M. Cardoso, and Oswaldo E. Barcia. A Debeye-Hückel model for calculating the viscosity of binary strong electrolyte solutions. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 40:5021–5028, 2001.

- [62] A. J. Faller. Instability and transition of the disturbed flow over a rotating disk. *J. Fluid Mech.*, 230:245–269, 1991.
- [63] J. R. R. M. Ferreira, O. E. Barcia, and B. Tribollet. Iron dissolution under mass transport control: the effect of viscosity on the current oscillation. *Eletrochim. Acta*, 39:933–938, 1994.
- [64] B. Friedman. *Principles and Techniques of Applied Mathematics*. Dover, New York, NY, 1990.
- [65] U. Frisch. *Turbulence*, page 312. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [66] A. B. Geraldo, O. E. Barcia, O. R. Mattos, F. Huet, and B. Tribollet. New results concerning the oscillations observed for the system iron-sulphuric acid. *Eletrochim. Acta*, 44:455–465, 1998.
- [67] I. Ginzburg and G. Wittum. Two-phase flows on interface refined grids modeled with vof, staggered finite volumes, and spline interpolants. *Journal of Computational Physics*, 166:302–335, 2000.
- [68] P. Glansdorff and I. Prigogine. *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*. Interscience, New York, 1971.
- [69] J. Glimm, J. Grove, W.B. Lindquist, O. McBryan, and G. Tryggvadson. The bifurcation of tracked scalar waves. *SIAM Journal of Computations*, 9(1):61–79, 1988.
- [70] H. S. Greenside and W. M. Coughram Jr. Non-linear pattern formation near the onset of Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. A*, 30:398–428, 1984.
- [71] N. Gregory, J. T. Stuart, and W. S. Walker. On the stability of three-dimensional boundary layers with application to the flow due to a rotating disk. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A-248:155–199, 1955.
- [72] F H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *The Physic of Fluids*, 8(1):2182–2189, 1965.
- [73] H. S. Hele-Shaw. On the motion of a viscous fluid between two parallel plates. *Trans. Royal Inst. Nav. Archit.*, 40:218, 1898.
- [74] G.F. Hewitt and N.S. Hall-Taylor. *Annular Two-Phase Flow*. Pergamon Press, Oxford, 1970.
- [75] G.F. Hewitt and D.N. Roberts. Studies of two-phase flow patterns by simultaneous x-ray and flash photography. Technical report, AERE-M 2159, 1969.
- [76] C. A. Hieber and H. H. Chiang. Some correlations involving the shear viscosity of polystyrene melts. *Rheologica Acta*, 28:321–332, 1989.
- [77] C. A. Hieber and S. F. Shen. A finite-element/finite-difference simulation of the injection-molding filling process. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 7:1–32, 1980.

- [78] S. C. Hirata and M. N. Ouarzazi. Influence of horizontal through-flow on the linear properties of viscoelastic fluids convection in porous media. *Academie des Sciences. Comptes Rendus. Mecanique*, 338(9):538–544, 2010.
- [79] S. C. Hirata and M. N. Ouarzazi. Three-dimensional absolute and convective instabilities in mixed convection of a viscoelastic fluid through a porous medium. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 374(26):2661–2666, 2010.
- [80] M. W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, San Diego, California, 1974.
- [81] C.W. Hirt and B.D. Nichols. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39:201–225, 1981.
- [82] T.J.R. Hughes. Lagrangian-eulerian finite element formulatin for incompressible viscous flows. *Computational Methdos Applied to Mechancal Engineering*, 29:329–349, 1981.
- [83] G. Ioos and D. D. Joseph. *Elementary Stability and Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [84] M. R. Kamal, Y Kuo, and P. H. Doan. Injection molding behavior of thermoplastics in thin rectangular cavities. *Polymer Engineering and Science*, 15(12):863–868, 1975.
- [85] R. E. Kelly and L. S. de B. Alves. A uniformly valid asymptotic solution for the transverse jet and its linear stability analysis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 366:2729–2744, 2008.
- [86] P. Kennedy. *Flow Analysis of Injection Molds*. Hanser Publishers, New York, 1995.
- [87] K. R. Kirchartz, J. A. Srulijes, and H. Oertel Jr. Steady and time-dependent Rayleigh-Bénard convection under influence of shear flows. *Adv. Space Res.*, 3(5):19–22, 1983.
- [88] J. B. Klemp and A. Acrivos. A note on the laminar mixing of two uniform parallel semi-infinite streams. *Journal of Fluid Mechanics*, 55:25–30, 1972.
- [89] P. K. Kundu and I. M. Cohen. *Fluid Mechanics*. Elsevier Academic Press, San Diego, CA, 3rd edition, edition, 2004.
- [90] Peter D. Lax. *Linear Lagebra*. Wiley, New York, 1997.
- [91] M. Lessen. On the stability of the laminar free boundary layer between parallel streams. Technical Report 979, NASA, 1950.
- [92] V. G. Levich. *Physicochemical Hydrodynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.
- [93] A. Lichnerowicz. *Algèbre et Analyse Linéaires*. Masson et Cie., 1947.
- [94] R. J. Lingwood. Absolute instability of the boundary layer on a rotating disk. *J. Fluid Mech.*, 299:17–33, 1995.

- [95] R. J. Lingwood. An experimental study of absolute instability of the rotating-disk boundary layer flow. *J. Fluid Mech.*, 314:373, 1996.
- [96] S. Lipschutz. *Álgebra Linear*. McGraw-Hill, São Paulo, 1972.
- [97] R. C. Lock. The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 4:42–63, 1951.
- [98] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atm. Sci.*, 20:130, 1963.
- [99] M. R. Malik. The neutral curve for stationary disturbances in rotating-disk flow. *J. Fluid Mech.*, 164:275–287, 1986.
- [100] M. R. Malik and S. Wilkinson. Stability experiments in the flow over a rotating disk. *J. Fluid Mech.*, 54:613, 1972.
- [101] M. R. Malik, S. Wilkinson, and S. A. Orzag. Instability and transition in a rotating disk. *AIAA J.*, 19-9:1131–1138, 1981.
- [102] B. A. Malomed and A. A. Nepomnyashchy. Two-dimensional stability of convection rolls in the presence of a ramp. *Europhys. Lett.*, 21(2):195–200, 1993.
- [103] N. Mangiavacchi, J. Pontes, O. E. Barcia, O. E. Mattos, and B. Tribollet. Rotating disk flow stability in electrochemical cells: Effect of the transport of a chemical species. *Phys. Fluids*, 19:114109, 2007. DOI: 10.1063/1.2805844.
- [104] P. Manneville. *Dissipative Structures and Weak Turbulence*. Academic Press, San Diego, 1990.
- [105] E. Marchandise and J-F. Remacle. A numerical method for the simulation of three-dimensional incompressible two-phase flows is presented. *Journal of Computational Physics*, 219:780–800, 2006.
- [106] S. Megerian. *Transverse Jet Shear Layer Instabilities: Experimental Investigation*. PhD thesis, University of California, Los Angeles, 2006. to appear.
- [107] S. Megerian, J. Davitian, L. S. de B. Alves, and A. R. Karagozian. Transverse jet shear layer instabilities. part i: Experimental studies. *Journal of Fluid Mechanics*, 593:93–129, 2007.
- [108] H. Meinhardt. *Models of Biological Pattern Formation*. Academic Press, New York, 1982.
- [109] A. Michalke. Instabilität eines kompressiblen runden freistrahls unter berücksichtigung des einflusses der strahlgrenzschichtdicke. *Zeitschrift für Flugwissenschaften*, 19(8-9):319–328, 1971. In English: NASA TM 75190 (1977).
- [110] F. Moisy, O. Doaré, T. Passuto, O. Daube, and M. Rabaud. Experimental and numerical study of the shear layer instability between two counter-rotating disks. *J. Fluid Mech.*, 507:175–202, 2004.
- [111] P. J. Morris. The spatial viscous instability of axisymmetric jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 77:511–529, 1976.

- [112] J. D. Murray. How the leopard gets its spots. *Sci. Amer.*, 258(3):80–87, 1988.
- [113] J. D. Murray. *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [114] T. G. Myers. Application of non-Newtonian models to thin film flow. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 72 (6 Pt 2):066302–1 – 066302–11, 2005.
- [115] S. Nagrath, K.E. Jansen, and R.T. Lahey. Computation of incompressible bubble dynamics with a stabilized finite element level set method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:4565–4587, 2005.
- [116] J.V. Narlikar. *An Introduction to Cosmology*, page 560. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [117] A. C. Newell, T. Passot, and J. Lega. Order parameter equations for patterns. *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, 25:399–453, 1993.
- [118] A. C. Newell and J. A. Whitehead. Finite bandwidth, finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.*, 38:279–303, 1969.
- [119] J. S. Newman. *Electrochemical Systems*. Prentice Hall, New Jersey, 2nd edition, 1991.
- [120] B.A. Nichita, I Zun, and J.R. Thome. A level set method coupled with a volume of fluid method for modeling of gas-liquid interface in bubbly flow. *Journal of Fluids Engineering*, 132(8):081302, 2010.
- [121] G. Nicolis. *Introduction to Nonlinear Science*. Cambridge, Cambridge, 1995.
- [122] G. Nicolis and I. Prigogine. *Self Organization in Nonequilibrium Systems*. Wiley, New York, 1977.
- [123] A. R. Nishimoto. Simulação numérica da injeção de termoplásticos em moldes - estudo comparativo de alguns modelos computacionais. Master's thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.
- [124] C. Normand, Y. Pomeau, and M. G. Velarde. Convective instability: A physicist's approach. *Rev. Mod. Phys.*, 49:581–624, 1977.
- [125] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988.
- [126] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge, 1993, 1993.
- [127] Q Ouyang, V. Castets, J. C. Boissonade, J. andRoux, P. De Kepper, and H. L. Swinney. Sustained patternsin chlorite-iodide reactions in a one-dimensional reactor. *J. Chem. Phys.*, 95:351, 1991.
- [128] R. L. Panton. *Incompressible flow*. Wiley Interscience, New York, 2nd. edition, 1996.

- [129] B. Perot and R. Nallapati. A moving unstructured staggered mesh method for the simulation of incompressible free-surface flows. *Journal of Computational Physics*, 184(1):192–214, 2003.
- [130] J. Pontes. *Pattern Formation in Spatially Ramped Rayleigh-Bénard Systems*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, Brussels, 1994.
- [131] J. Pontes, C. I. Christov, and M. G. Velarde. Numerical study of patterns and their evolution in finite geometries. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 6(10):1883–1890, 1996. DOI: 10.1142/S0218127496001211.
- [132] J. Pontes, N. Mangiavacchi, and G. R. Anjos. Estabilidade hidrodinâmica em células eletroquímicas. In F. Moura Neto, G. Platt, I. N. Bastos, M. Rocha, and N. Henderson, editors, *Modelagem Computacional em Materiais*, volume 1, chapter 1, pages 27–46. Editora Ciência Moderna, 2010. ISBN 9788573939576.
- [133] J. Pontes, N. Mangiavacchi, A. R. Conceição, O. E. Barcia, O. E. Mattos, and B. Tribollet. Rotating disk flow stability in electrochemical cells: Effect of viscosity stratification. *Phys. Fluids*, 16(3):707–716, 2004. DOI: 10.1063/1.1644147.
- [134] J. Pontes, D. Walgraef, and C. I. Christov. Pattern formation in spatially ramped Rayleigh-Bénard systems. *Journal of Computational Interdisciplinary Sciences*, 1(1):11–32, 2008. DOI: 10.6062/jcis.2008.01.01.0002.
- [135] G. Pötsch and W. Michaeli. *Injection Molding: An Introduction*. Hanser-Gardner, 2 edition, 2008.
- [136] S. Quan and D.P. Schmidt. A moving mesh interface tracking method for 3d incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 221:761–780, 2006.
- [137] M. Quecedo and M. Pastor. Application of the level set method to the finite element solution of two phase flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:645–663, 2001.
- [138] M. Reiner. *Deformation, strain and flow: an elementary introduction to rheology*. H. K. Lewis, London, 3 edition, 1969.
- [139] S. Richardson. Hele-Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel. *Journal of Fluid Mechanics*, 56:609–618, 1972.
- [140] P. Russel and J. Newman. Current oscillations observed within the limiting current plateau for iron in sulfuric acid. *J. Electrochem. Soc.*, 133:2093–2097, 1986.
- [141] H. Schlichting and K. Gersten. *Boundary Layer Theory*. Springer, Berlin, 1999.
- [142] P. J. Schmid and D. S. Henningson. *Stability and Transition in Shear-Flows*. Applied Mathematical Sciences. Springer & Verlag, New York, 2001.
- [143] H. G. Schuster. *Deterministic Chaos*. VCH, Weinheim, 1995.
- [144] N. Smith. Exploratory investigation of laminar boundary layer oscillations on a rotating disk. Technical Report TN-1227, NACA, Dec. 1946.

- [145] F.S Souza and N. Mangiavacchi. A lagrangian level-set approach for the simulation of incompressible two-fluid flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 47:1393–1401, 2004.
- [146] L. A. Spahier. *Introdução ao Mathematica*. MATHEMATICA<sup>©</sup> Technical Center, COPPE/UFRJ. E-papers Serviços Editoriais, Rio de Janeiro, Brazil, 2001.
- [147] J. A. Sruljes. *Zellularkonvektion in Behältern mit Horizontalen Temperaturgradienten*. PhD thesis, Fakultät für Maschinenbau, Univ. Karlsruhe, Karlsruhe, 1979.
- [148] K.T. Strong, M. Bruner, T. Tarbell, A. Title, and C. J. Wolfson. Trace - the transition region and coronal explorer. *Space Sci. Rev.*, 70:119–112, 2010.
- [149] S. Subbiah, D. L. Trafford, and S. I. Güceri. Non-isothermal flow of polymers into two-dimensional, thin cavity molds: a numerical grid generation approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 32(3):415–434, 1989.
- [150] M. Sussman and E. Puckett. A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3d and axisymmetric incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 162:301–337, 2000.
- [151] M. Sussman and P. Smereka. Axisymmetric free boundary problems. *Journal of Fluid Mechanics*, 341:269–294, 1997.
- [152] M. Sussman, P. Smereka, and S. Osher. A level-set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114:146–159, 1994.
- [153] J. Swift and P. C. Hohenberg. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. *Phys. Rev. A*, 15:319–328, 1977.
- [154] J.R. Thome. *Engineering Data Book III*. Wolverine Tube, Inc., Heat and Mass Transfer Laboratory - EPFL, 2008. [www.wlv.com/products/databook/db3/DataBookIII.pdf](http://www.wlv.com/products/databook/db3/DataBookIII.pdf).
- [155] L. Ting. On the mixing of two parallel streams. *Journal of Mathematical Physics*, 38:153–165, 1959.
- [156] A. Tomiyama, I. Zun, H. Higaki, Y. Makino, and T. Sakaguchi. A three-dimensional particle tracking method for bubbly flow simulation. *Nuclear Engineering and Design*, 175:77–86, 1997.
- [157] A. Tomiyama, I. Zun, A. Sou, and T. Sakaguchi. Numerical analysis of bubble motion with the vof method. *Nuclear Engineering and Design*, 141:69–82, 1993.
- [158] B. Tribollet and J. Newman. The modulated flow at a rotating disk electrode. *J. Electrochem. Soc.*, 130:2016–2026, 1983.
- [159] C. L. Tucker III. *Computer Modeling for Polymer Processing - Fundamental*. Computed Aided Engineering for Polymer Processing. Hanser Publishers, Munich, 1989.
- [160] M. Turkyilmazoglu, J. W. Cole, and J. S. B. Gajjar. Absolute and convective instabilities in the compressible boundary layer on a rotating disk. CLSCM Report CLSCM-1998-001, University of Manchester, Manchester, 1998.

- [161] S.O. Unverdi and G. Tryggvason. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *Journal of Computational Physics*, 100:25–37, 1992.
- [162] O. Verhoyen and F. Dupret. A simplified method for introducing the Cross viscosity law in the numerical simulation of Hele-Shaw flow. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 74:25–46, 1998.
- [163] Th. von Kármán and Z. Angew. Über laminare und turbulente reibung. *Math. Mec.*, 1:233–252, 1921.
- [164] D. Walgraef. *Spatio-Temporal Pattern Formation*. Springer, New York, 1997.
- [165] I. C. Walton. On the onset of Rayleigh-Bénard convection in a fluid layer of slowly increasing depth. *Stud. Appl. Maths.*, 67:199–216, 1982.
- [166] I. C. Walton. The onset of cellular convection in a shallow two-dimensional container of fluid heated non-uniformly from below. *J. Fluid Mech.*, 131:455–470, 1983.
- [167] J. Wesfreid, Y. Pomeau, M. Dubois, C. Normand, and P. Bergé. Critical effects in Rayleigh-Bénard convection. *J. Phys. Lett.*, 39 (7):725–731, 1978.
- [168] P.B. Whalley. *Boiling, Condensation, and Gas-Liquid Flow*. Oxford University Press, 1987.
- [169] S. Wolfram. *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*. Addison – Wesley, Redwood City, CA, 1991.
- [170] S. Wolfram. *The Mathematica Book*. Wolfram Media, Cambridge, 4th edition, 1999.
- [171] J. Wu, ST. Yu, and BN Jiang. Simulation of two-fluid flows by the least-squares finite element method using a continuum surface tension model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42:583–600, 1998.
- [172] H. Zhou and D. Li. A numerical simulation of the filling stage in injection molding based on a surface model. *Advances in Polymer Technology*, 20(2):125–131, 2001.
- [173] J. Zhou and L-S Turing. Three-dimensional numerical simulation of injection molding filling with a finite-volume method and parallel computing. *Advances in Polymer Technology*, 25(4):247–258, 2006.