

Notas de Aula

Gustavo Henrique Silva Sarturi
Matemática B - Em Ação
gustavo.sarturi@ufpr.br

1 Matrizes

Definição 1.1. Uma matriz $A_{m \times n}$ é um arranjo retangular de $m \cdot n$ números reais (ou complexos) organizados em m linhas e n colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A i -ésima linha de A é:

$$[a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}]_{1 \times n} \quad i \in \mathbb{Z} \mid (1 \leq i \leq m)$$

A j -ésima coluna de A é

$$\begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jm} \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

Dizemos que A é m por n , e denotamos por $m \times n$. Se $m = n$ dizemos que A é uma **Matriz Quadrada de ordem** n e que $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formam a diagonal principal de A . Denotaremos por a_{ij} o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna de uma matriz. Frequentemente, denotaremos uma matriz A por:

$$A = [a_{ij}] = (a_{ij})$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

temos que $a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 0$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 1$, $a_{31} = 3$, $a_{32} = -1$, $a_{33} = 2$. Os elementos a_{11}, a_{22} e a_{33} formam o conjunto da diagonal principal da matriz.

Definição 1.2. A diagonal principal de uma matriz quadrada é o conjunto dos elementos a_{ij} tais que $i = j$.

Definição 1.3. A diagonal secundária de uma matriz quadrada é o conjunto dos elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$

Em nosso exemplo, a_{13} , a_{22} a_{31} são os elementos do conjunto da diagonal secundária.

Definição 1.4. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ em que todos os elementos fora da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ é denominada **matriz diagonal**. Em particular, se todos os elementos da diagonal forem 1, i.e., $a_{ij} = 1$ para $i = j$, denominamos **matriz identidade**.

Definição 1.5. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ em que todos os elementos da diagonal principal são iguais, isto é, $a_{ij} = c$, $c \in \mathbb{R}$ para $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ é denominada **matriz escalar**.

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2019 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad B = I_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

No exemplo acima, A é uma matriz diagonal e B é uma matriz diagonal identidade, ou simplesmente, identidade. Pela relevância da matriz identidade, geralmente denotamos ela por I_d para indicar matriz identidade. As matrizes B e C são exemplos de matrizes escalares.

Definição 1.6. Uma matriz $A = [a_{ij}]$ é dita **Matriz Nula** se todos os seus elementos são nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ para todo i e todo j .

Definição 1.7. Uma matriz $B = [b_{ij}]$, de dimensão $m \times n$ é dita ser simétrica de uma matriz $A = [a_{ij}]$ também $m \times n$ se $a_{ij} = -(b_{ij})$ para todo $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$

Definição 1.8. Duas matrizes $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, do tipo $m \times n$ são igual se $a_{ij} = b_{ij}$ para $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Isto é, se todos os elementos correspondentes são iguais.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad B = I_d = \begin{bmatrix} 1 & 2 & w \\ 2 & x & 4 \\ y & -4 & z \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

são iguais se $w = -1, x = -3, y = 0$ e $z = 5$

1.1 Adição de Matrizes

Definição 1.9. Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são matrizes $m \times n$, a soma de A e B gera uma matriz $C = [c_{ij}]$ definida por:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

Em outras palavras, bem no estilo matemática de bar, C é obtida somando-se os elementos correspondentes de A e de B.

Teorema 1.1. Seja $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$ de mesma dimensão, ou seja, todas do tipo $m \times n$. A soma de matrizes satisfazem as seguintes operações:

1. Associativa: $A + B = B + A$
2. Comutativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. Existe um elemento neutro, no caso, a matriz nula. $A + [0] = A$, onde $[0]$ é a matriz nula de mesma dimensão de A.
4. Existe um elemento simétrico, no caso, denominamos **matriz simétrica** à matriz A' tal que $A + A' = 0$.

A demonstração fica à cargo do leitor. Quaisquer dúvidas, consultar o autor das notas de aula, que no caso, sou eu.

1.2 Exercícios

1.2.1 Exercícios normais

1. Indicar explicitamente os elementos da matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $a_{ij} = i - j$.
2. Construir as seguintes matrizes:
 - (a) $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $a_{ij} = 1$ se $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.
 - (b) $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $b_{ij} = 1$ se $i + j = 4$ e $b_{ij} = 0$ se $i + j \neq 4$
3. Determinar x e y de modo que se tenha:

$$\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 2y \\ 3 & y+4 \end{bmatrix}$$

4. Determinar x, y, z e t de modo que se tenha:

$$\begin{bmatrix} x^2 & 2x & y \\ 4 & 5 & t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & 3 \\ z & 5t & t^2 \end{bmatrix}$$

5. Dadas as matrizes A, B, C abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 11 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

calcule:

- (a) $A + B + C$
- (b) $A - B + C$
- (c) $-A + B - C$

1.2.2 Exercícios Teóricos

1. Mostre que a soma e a diferença de duas matrizes diagonais são uma matriz diagonal.
2. Mostre que a soma e a diferença de duas matrizes escalares são uma matriz escalar.

Referências