Splines Cúbicas

Gustavo Henrique Silva Sarturi
UFPR - CM103 - 2018s2
gustavo.sarturi@ufpr.br

PALAVRAS CHAVE. Interpolação Polinomial, Splines Cúbicas

1. Introdução

Dados $n + 1$ pontos no plano, temos como objetivo interpolar tais pontos. Algumas técnicas de interpolações podem resolver esse tipo de problema, o que será apresentado aqui, é a Interpolação por Splines Cúbicas. Muitas vezes, interpolar pontos através de uma interpolação polinomial comum (como a de Vandermont, por exemplo) gera um polinômio de grau muito alto e que às vezes gera uma variação discrepante em suas concavidades.

A solução então, é utilizar polinômios de grau menor por partes interpolando cada ponto, tais pontos chamaremos de nós. Esse método, é chamado por vezes de "Método de aproximação por Polinômios Seccionados". O mais simples deste método, é utilizar polinômios de $\partial(1)$. Porém, há um problema de diferenciabilidade entre os pontos interpolados, seria então uma boa ideia utilizar polinômios de $\partial(2)$? Talvez, mas, leve em consideração que a diferenciabilidade nos nós poderá continuar a ficar comprometida. Sendo assim, uma solução para esse problema de diferenciabilidade é utilizar polinômios de $\partial(3)$, veremos mais adiante que as propriedades fazem com que a interpolação seja boa e eficiente o suficiente para solucionar nosso problema. Nesse caso, definimos que esse método de interpolação é chamado de "Spline Cúbico".

Existem algumas vantagens de se utilizar polinômios de ordem cúbica, entre elas, a garantia da diferenciabilidade e continuidade da função até a segunda ordem, porém, uma das poucas desvantagens é que as derivadas de uma determinada spline não coincidirá com as demais, ainda bem que sabemos derivar facilmente polinômios.

Definição 1. Dada $f \in [a, b]$ e um conjunto de pontos (nós) $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, uma spline cúbica S para f é uma função que satisfaz as seguintes condições:

1. $S(x)$ é um Polinômio Cúbico, denotado por $S_j(x)$ em um sub-intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para cada $j = 0, 1, \cdots, n-1$;
2. $S_j(x_j) = f(x_j)$ e $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \cdots, n-1$;
3. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_j)$ para cada $j = 0, 1, \cdots, n-2$;
4. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \cdots, n-2$;
5. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \cdots, n-2$;
6. Uma das seguintes condições de contorno são satisfeitas:
   (a) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (Spline Natural ou de Contorno livre);
   (b) $S'(x_0) = f'(x_0)$ e $S'(x_n) = f'(x_n)$ (Spline Restrita);

Uma curiosidade acerca do nome, Splines são hastes de madeiras flexíveis que são curvadas por pesos (nós) muito utilizadas por exemplo, na produção de instrumentos musicais, maquetes e também para modelar curvas suáveis em desenhos. Além disso, uma observação a se destacar, é que Splines Restritas dão aproximações melhores que as Naturais pois exigem mais informações acerca da função para ser implementada.

2. Construção de uma Spline Cúbica

Uma Spline definida em um intervalo será dividida em n subintervalos que irá requerir a determinação de $4n$ constantes. Para construir uma Spline Cúbica interpoladora para uma dada função f, as condições da definição deverão ser aplicadas aos polinômios cúbicos da forma:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

para cada $j = 0, 1, \cdots, n - 1$.

Nessa subseção iremos nos dedicar a como encontrar esses coeficientes.Desde que $S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$, a condição 3 pode ser aplicada para obtermos a_{j+1}:

$$a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3$$

para cada $j = 0, 1, \cdots, n - 2$. Por questões de praticidade, defina $h_j = x_{j+1} - x_j$ para cada $j = 0, 1, \cdots, n - 1$. Assim, se ainda definirmos que $a_n = f(x_n)$, então:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \qquad j = 0, 1, \cdots, n - 1 \qquad (1)$$

De maneira similiar, definindo $b_n = S'(x_n)$ observe que:

$$S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$$

implica que $S'_j(x_j) = b_j$ para cada $j = 0, 1, \cdots, n - 1$. Aplicando a condição 4, temos então que:

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^3 \qquad j = 0, 1, \cdots, n - 1 \qquad (2)$$

Seguindo um raciocínio análogo, uma outra relação entre os coeficientes de S_j é obtida utilizando da condição 5. Sendo assim, definindo $c_n = S''(x_n)/2$, teremos:

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j \qquad j = 0, 1, \cdots, n - 1 \qquad (3)$$

Resolvendo para d_j na equação (3) e substituindo seu valor nas equações (1) e (2), para cada $j = 0, 1, \cdots, n - 1$ teremos novas equações:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}) \qquad (4)$$

$$b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}) \qquad (5)$$

Assim, a última relação envolvendo os coeficientes é obtido resolvendo a equação apropriada na forma da equação (4). Primeiramente, para b_j.

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) \qquad (6)$$

Se reduzirmos o índice das equações, para $b_{j=1}$ temos:

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j=1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j)$$

Cuidadosamente e com atenção, substituindo esses valores na equação derivada de (5), com um índice reduzido, teremos o seguinte sistema linear:

$$(h_{j-1})c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + (h_j)c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \qquad (7)$$

para cada $j = 1, 2, \cdots, n - 1$. Esse sistema linear envole encontrar apenas os coeficientes $\{c_j\}_{j=0}^{n}$, pois os valores de $\{h_j\}_{j=0}^{n-1}$ e $\{a_j\}_{j=0}^{n}$ são dados, respectivamente, pelos espaçamentos dos nós $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ e pelos valores de f aplicados em cada nó. Assim, uma vez que determinamos os valores de $\{c_j\}_{j=0}^{n}$, será mais simples de determinar as demais constantes $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$ pela equação (6) e os $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$ pela equação (3). Dessa forma, após encontrarmos todos os coeficientes, podemos construir os polinômios Cúbicos $\{S_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$.

3. Splines Cúbicas Naturais

Por Definição, uma Spline Natural é uma Spline cuja a derivada de segunda ordem no ponto inicial e final de interpolação é nula. Vamos ilustrar o processo de construção de uma Spline Cúbica natural através de um exemplo, neste exemplo será mostrado a construção de uma Spline Cúbica Natural que passa pelos pontos $(1, 2)$, $(2, 3)$ e $(3, 5)$. Sabemos que para interpolar esses três pontos, a nossa Spline consistirá de duas cúbicas. Sendo assim, para o primeiro e segundo intervalo, respectivamente, cada spline terão a forma das seguintes equações

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3 \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3 \end{cases}$$

Note que há 8 constantes a serem determinadas, o que irá nos requerir 8 condições para que haja uma solução única. Quatro condições advém do fato de que as Splines devem ser compatíveis com seus dados nos nós, ou seja. Sabemos que:

$$a_0 = f(1) = 2 \qquad\qquad a_1 = f(2) = 3$$

$$a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = f(2) = 3 \qquad\qquad a_1 + b_2 + c_1 + d_1 = f(3) = 5$$

Mais duas outras equações surgem do fato de que $S_0'(2) = S_1'(2)$ e $S_0''(2) = S_1''(2)$:

$$S_0'(2) = S_1'(2): \quad b_1 = b_0 + 2c_0 + 3d_0 \qquad\qquad S_0''(2) = S_1''(2): \quad 2c_1 = 2c_0 + 6d_0$$

E as duas últimas advém das condições de contorno, como trata-se de uma Spline Cúbica Natural, sabemos que:

$$S_0''(1) = 0: \quad 2c_0 = 0 \qquad\qquad S_1''(3) = 0: \quad 2c_1 + 6d_1 = 0$$

Resolvendo o sistema de equações, temos que a nossa Spline Cúbica é dada por:

$$S(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^3, \forall x \in [1, 2] \\ 3 + \frac{3}{2}(x-2) + \frac{3}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{4}(x-2)^3, \forall x \in [2, 3] \end{cases}$$

Abaixo temos uma ilustração que representa o resultado desta interpolação.

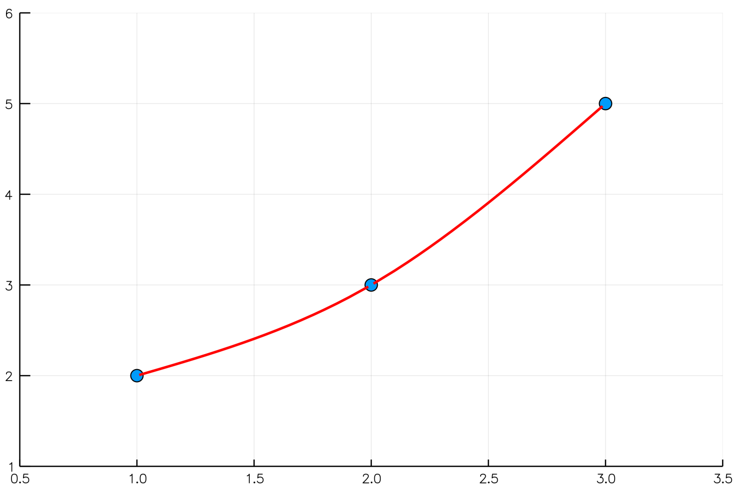

Figura 1: Exemplo de Spline Cúbica Natural

Sendo assim, uma das nossas preocupações, é saber se essas equações são únicas. O Teorema à seguir nos garante a unicidade das equações.

Teorema 1. Se f é uma função definida num intervalo onde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, então f possui uma única Spline Natural interpoladora S sobre os nós $x_0, x_1, \cdots, x_n$. Isto é, a Spline Interpoladora que satisfaz as condições de contorno iniciais $S''(a) = 0$ e $S''(b) = 0$.

Demonstração. Neste caso, pelas condições de contorno inicial, temos que $c_n = S''(n)/2 = 0$ e que

$$S''(x_0) = 2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0) = 0$$

Sendo assim, c_0 deve ser 0. As duas equações, $c_0 = 0$ e $c_n = 0$ juntas com as equações (7) produzem um sistema linear descrito pela equação vetorial $Ax = b$, onde A é uma Matriz quadrada $n + 1$.

$$A_{(n\times 1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$

Lembrando que $h_j = x_{j+1} - x_j$. A matriz é tridiagonal e esparsa, e é estritamente dominante. Lembrando que, uma matriz é dita ser estritamente diagonal dominante se, para todas as linhas da matriz, o módulo do valor da matriz na diagonal é maior que a soma dos módulos de todos os demais valores (não-diagonais) daquela linha. Ou seja:

$$\|a_{ij}\| > \sum_{j\neq i} \|a_{ij}\| \quad \forall\ i$$

Uma das coisas que ganhamos com isso é que, quando a matriz é diagonal dominante, ela é invertível. Temos ainda, por teorema, cujo não será demonstrado aqui, que, se uma A é uma Matriz Diagonal Dominante, ela é uma matriz não-singular. Neste caso, a eliminação Gaussiana pode ser aplicada de forma a produzir sobre o sistema linear da forma $Ax = b$ uma única solução sem que haja trocas de linhas ou colunas. (Teorema 6.2.1. Burden). $\square$

Uma aplicação bem útil também das Splines Cúbicas é em aproximar funções. Sabemos que integrar polinômios é algo relativamente fácil, sendo assim, para calcular a integral de algumas funções, podemos fazer uma aproximação por Splines tomando alguns pontos da função. Neste caso, vamos interpolar a função $f(x) = e^x$ no intervalo de $x \in [0, 3]$. Vamos interpolar de forma que fique igualmente espaçada os pontos $(0, 1),\ (1, e),\ (2, e^2)\ (3, e^3)$.

Temos que então, basicamente, que resolver o seguinte sistema $Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 8.85748 \\ 24.0771 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Que estão relacionados à forma matricial que encontramos. Assim, temos que a nossa Spline será descrita por partes por:

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 1.46600x + 0.25228x^3 & \forall x \in [0,1] \\ 2.71828 + 2.22285(x-1) + 0.75685(x-1)^2 + 1.69107(x-1)^3 & \forall x \in [1,2] \\ 7.38906 + 8.80977(x-2) + 5.83007(x-2)^2 - 1.94336(x-2)^3 & \forall x \in [2,3] \end{cases}$$

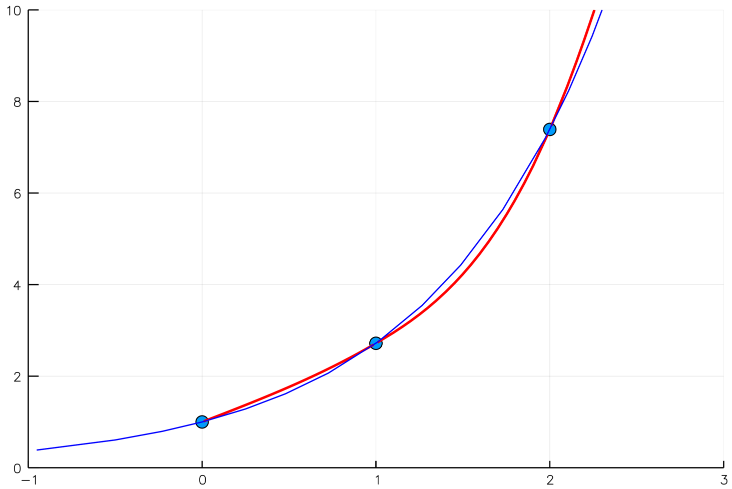

Figura 2: Aproximação por Spline Cúbica Natural da função $f(x) = exp(x)$

Assim, se quisermos agora aproximar a integral no intervalo $[0,3]$ da função $f(x)$, podemos simplesmente integral cada pedaço da Spline, ou seja:

$$\int_0^3 S(x)dx = \int_0^1 S_0(x)dx + \int_1^2 S_1(x)dx + \int_2^3 S_2(x)dx \approx 19.55229$$

Se integrassemos simplesmente a função e^x neste intervalo, obtemos 19.086 como resultado. Assim, comparando os valores, obtemos um erro de 0.46629.

4. Splines Cúbicas Restritas

Ilustramos no exemplo inicial, uma solução para o problema de interpolar pontos dados por uma Spline Cúbica Natural. O que difere é que, na restrira, exige-se apenas que a primeira derivada nos pontos iniciais e finais de interpolação sejam correspondentes às primeiras derivadas aprlicadas nestes pontos. Ou seja, $S'(x_0) = f'(x_0)$ e $S'(x_n) = f'(x_n)$. Para termos uma noção de como são modeladas esses tipos de Splines, iremos retomar ao exemplo dado anteriormente, mas desta vez, construir uma Spline Cúbica Restrita que passa pelos pontos $(1,2)$, $(2,3)$ e $(3,5)$, e considerar que $s'(1) = 2$ e $s'(3) = 1$.

Aproveitando do exemplo anterior, temos então, novamente, que encontrar os coeficientes das equações abaixo, que irão modelar a nossa Spline. Novamente, uma Spline que passa pelos pontos dados, tem a forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3 \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3 \end{cases}$$

Novamente, temos o trabalho de determinar 8 constantes. As primeiras equações se relacionam da mesma forma como apresentado no exemplo anterior.

$$a_0 = f(1) = 2 \qquad\qquad a_1 = f(2) = 3$$

$$a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = f(2) = 3 \qquad\qquad a_1 + b_2 + c_1 + d_1 = f(3) = 5$$

Além disso:

$$S_0'(2) = S_1'(2) \ : \quad b_1 = b_0 + 2c_0 + 3d_0 \qquad\qquad S_0''(2) = S_1''(2) \ : \quad 2c_0 + 6d_0 = 2c_1$$

Porém ,agora, para relacionar as últimas equações, aplicamos as condições de contorno, das quais satisfazem as seguintes:

$$S_0'(1) = 2 \ : \quad b_0 = 2 \qquad\qquad S_1'(3) = 1 \ : \quad b_1 + 2c_1 + 3d_1 = 1$$

Resolvendo esse sistema linear, chegamos a conclusão que as Splines são dadas pelas equações:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 2 + 2(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2}(x-1)^3 \ \ \forall \ x \in [1,2] \\ S_1(x) = 3 + \frac{3}{2}(x-2) + 2(x-2)^2 - \frac{3}{2}(x-2)^3 \ \ \forall \ x \in [2,3] \end{cases}$$

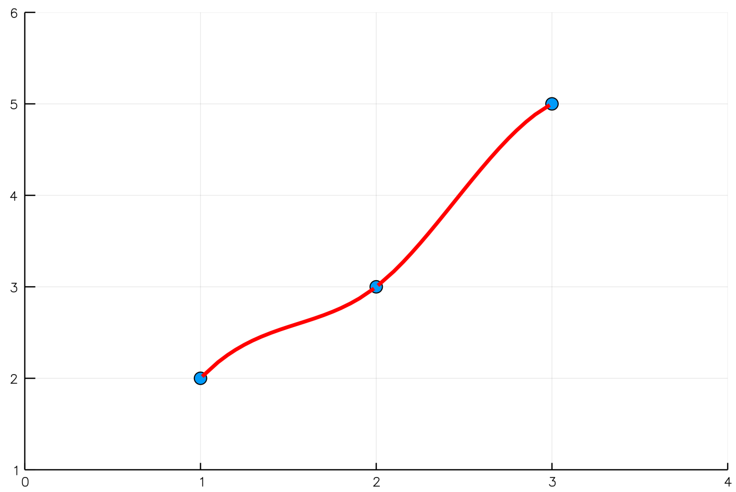

Figura 3: Spline Cúbica Restrita

Com isso, vale a mesma preocupação que tivemos quando construímos da Spline Natural, será que a Spline Restrita é única? Veremos pelo teorema à seguir que de fato, ela é.

Teorema 2. Se f é definida em $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ e é diferenciável em a e b, então, f possui uma única Spline Restrita interpoladora nos nós $x_0, x_1, \cdots, x_n$.

Demonstração. Uma Spline Restrita satisfaz as seguintes condições: $S'(a) = f'(a)$ e $S'(b) = f'(b)$. Analogamente, desde de que $f'(a) = S'(a) = S'(x_0) = b_0$, temos que:

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})$$

A construção da relação acima foi mostrada quando construímos uma forma geral da construção de uma Spline Cúbica (ver 6). Assim, com $j = 0$, implica que:

$$f'(a) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$$

Consequentemente:

$$3h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a)$$

E similiarmente, temos:

$$f'(b) = b_n = b_{n-1} + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n)$$

Agora, se observarmos o que acontece quando $j = n - 1$ na eq (6), temos as seguintes implicações:

$$f'(b) = \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n) = \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{h_{n-1}}{3}(c_{n-1} + 2c_n)$$

Juntando essas informações com a equação (7), obtemos:

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a)$$

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$$

Assim, teremos o trabalho apenas de resolver o seguinte sistema linear $Ax = b$:

$$A_{(n\times 1)} = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$

$\square$

Novamente, temos que essa matriz A_{n+1} é ta,bém diagonalmente dominante, logo, também satisfaz do Teorema já citado anteriormente quando foi demontrado a unicidade das Splines Naturais. Logo, esse sistema linear possui solução única para $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n$.

Voltando ao exemplo da função $f(x) = e^x$. Vamos novamente interpolar no intervalo $x \in [0, 3]$ igualmente espaçada pelo método da Spline Cúbica Restrita. Temos então que $f'(0) = 1$ e que $f'(3) = e^3$. Assim, cabe a nós resolver o seguinte sistema $Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.15485 \\ 8.85748 \\ 24.0771 \\ 22.1672 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, encontramos as seguintes equações:

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x + 0.44468x^2 + 0.27360x^3 & \forall x \in [0, 1] \\ 2.71828 + 2.71016(x-1) + 1.26548(x-1)^2 + 0.69513(x-1)^3 & \forall x \in [1, 2] \\ 7.38906 + 7.32652(x-2) + 3.35087(x-2)^2 + 2.01909(x-2)^3 & \forall x \in [2, 3] \end{cases}$$

Novamente, a integração por esse método com Splines, torna-se mais fácil computacionalmente falando, pois, trata-se de polinômios. Calculando a integral no intervalo $[0, 3]$ temos:

$$\int_0^3 S(x)dx = \int_0^1 S_0(x)dx + \int_1^2 S_1(x)dx + \int_2^3 S_2(x)dx \approx 19.05965$$

Ou seja, comparando os erros, temos que, a Spline Natural causou um erro de aproximação de 0.46675 enquanto que, a Spline Restrita, o erro é de apenas 0.02589. Neste caso, temos que a Spline Restrita se aproximou melhor, como previsto. Na realidade, isso sempre acontece por causa da sua condição de contorno. De fato, se observarmos o gráfico de $f(x)$ e $S(x)$, o erro é tão mínimo que é quase inperceptível visualizar o erro.

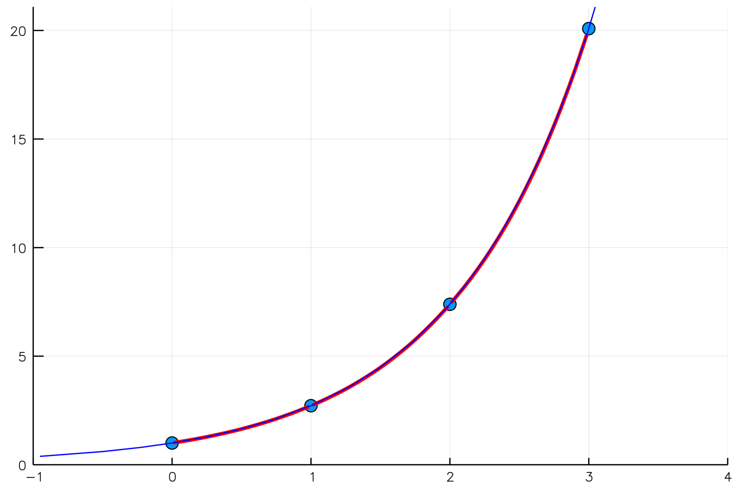

Figura 4: Aproximação por Spline Cúbica Restrita da função $f(x) = exp(x)$

5. Aplicação

Vamos agora fazer uma aplicação das Splines Cúbicas. Podemos utilizar suas curvas para descrever desenhos implementados em CAD, em especial, um caso particular, são as chamadas Curvas de Bézier, das quais não serão explanadas por aqui, no momento, porém, podemos citar uma diferença geométrica em relação à elas. As Splines são curvas cujos os pontos de controle (nós) estão contidos na curva, e além disso, ela interpola todos os pontos, já as curvas de Bézier, interpolam apenas o primeiro e o último ponto definido enquanto que os demais pontos de controles ficam externos à curva, possibilitando uma liberdade total na manipulação de curvas. No exemplo a seguir, iremos modelar uma Spline Cúbica Restrita para desenhar parte do Cachorro abaixo.

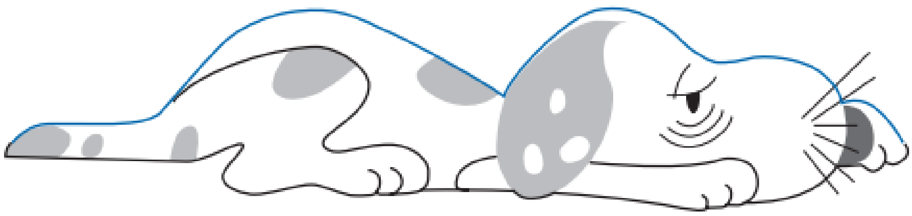

Figura 5: Snoopy! Você por aqui?

Os dados das coordenadas de pontos de interpolação são fornecidos por R. L Burden[1] e foi implementado em Julia Lang, o código encontra-se disponível no seguinte repositório do Github: *bit.ly/cubic_splines*.

Referências

[1] R. L. Burden e J. D. Faires, Numerical Analysis, 9a ed. Cengage Learning, 2010.