Notas de Aula

Gustavo Henrique Silva Sarturi
Matemática B - Em Ação
gustavo.sarturi@ufpr.br

1 Matrizes

Definição 1.1. *Uma matriz $A_{m \times n}$ é um arranjo retangular de $m \cdot n$ números reais (ou complexos) organizados em m linhas e n colunas.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A i-ésima linha de A é:

$$[a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \cdots \;\; a_{in}]_{1 \times n} \qquad i \in \mathbb{Z} \mid (1 \leq i \leq m)$$

A j-ésima coluna de A é

$$\begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jm} \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

Dizemos qur A é m por n, e denotamos por $m \times n$. Se $m = n$ dizemos que A é uma **Matriz Quadrada de ordem** n e que a_{11},a_{22},$\cdots$,a_{nn} formam a diagonal principal de A. Denotaremos por a_{ij} o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna de uma matriz. Frequentemente, denotaremos uma matriz A por:

$$A = [a_{ij}] = (a_{ij})$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

temos que $a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 0$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 1$, $a_{31} = 3$, $a_{32} = -1$, $a_{33} = 2$. Os elementos a_{11},a_{22} e a_{33} formam o conjunto da diagonal principal da matriz.

Definição 1.2. *A diagonal principal de uma matriz quadrada é o conjunto dos elementos a_{ij} tais que $i = j$.*

Definição 1.3. *A diagonal secundária de uma matriz quadrada é o conjunto dos elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$*

Em nosso exemplo, a_{13}, a_{22} a_{31} são os elementos do conjunto da diagonal secundária.

Definição 1.4. *Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ em que todos os elementos fora da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ é denominada **matriz diagonal**. Em particular, se todos os elementos da diagonal forem 1, i.e., $a_{ij} = 1$ para $i = j$, denominamos **matriz identidade**.*

Definição 1.5. *Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ em que todos os elementos da diagonal principal são iguais, isto é, $a_{ij} = c$, $c \in \mathbb{R}$ para $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ é denominada **matriz escalar**.*

Exemplo 1.1.

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2019 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad B = I_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

No exemplo acima, A é uma matriz diagonal e B é uma matriz diagonal identidade, ou simplesmente, identidade. Pela relevância da matriz identidade, geralmente denotamos ela por I_d para indicar matriz identidade. As matrizes B e C são exemplos de matrizes escalares.

Definição 1.6. *Uma matriz $A = [a_{ij}]$ é dita **Matriz Nula** se todos os seus elementos são nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ para todo i e todo j.*

Definição 1.7. *Uma matriz $B = [b_{ij}]$, de dimensão $m \times n$ é dita ser **oposta** de uma matriz $A = [a_{ij}]_m \times n$ se $b_{ij} = -a_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$*

Definição 1.8. *Uma matriz $A = [a_{ij}]$ de dimensão $m \times n$ é dita ser **simétrica** se $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.*

Definição 1.9. *Uma matriz $A = [a_{ij}]$ de dimensão $m \times n$ é dita ser **anti-simétrica** se $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.*

Exemplo 1.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & -5 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3} \tag{1}$$

*A é uma matriz **simétrica** e B é uma matriz **anti-simétrica**.*

Definição 1.10. *Duas matrizes $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, do tipo $m \times n$ são iguais se $a_{ij} = b_{ij}$ para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Isto é, se todos os elementos correspondentes são iguais.*

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad B = I_d = \begin{bmatrix} 1 & 2 & w \\ 2 & x & 4 \\ y & -4 & z \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

são iguais se $w = -1$,$x = -3$,$y = 0$ e $z = 5$

1.1 Adição de Matrizes

Definição 1.11. *Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são matrizes $m \times n$, a soma de A e B gera uma matriz $C = [c_{ij}]$ definida por:*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$$

Em outras palavras, bem no estilo matemática de bar, C é obtida somando-se os elementos correspondentes de A e de B.

Teorema 1.1. *Seja $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$ de mesma dimensão, ou seja, todas do tipo $m \times n$.*

A soma de matrizes satisfazem as seguintes operações:

1. *Associativa:* $A + B = B + A$
2. *Comutativa:* $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. *Existe um elemento neutro, no caso, a matriz nula.* $A + [0] = A$, *onde* $[0]$ *é a matriz nula de mesma dimensão de* A.
4. *Existe um elemento simétrico, no caso, a* ***matriz oposta*** *à matriz* A' *que é tal que* $A + A' = 0$.

A demonstração fica à cargo do leitor. Quaisquer dúvidas, consultar o autor das notas de aula, que no caso, sou eu.

Exemplo 1.3.

$$\begin{bmatrix} 20 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 47 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 20+7 & 0+0 & 1+2 \\ 0+0 & 5+2 & 3+4 \\ 3+4 & 2+1 & 50+47 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 27 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 7 & 3 & 97 \end{bmatrix}$$

Definição 1.12. *Se* A *e* B *são matrizes de mesma dimensão* $(m \times n)$, *escrevemos* $A + (-B)$ *como* $A - B$, *chamamos essa operação de* ***diferença*** *(ou subtração) de duas matrizes.*

Em essência, a definição acima nos diz que subtrair uma matriz com a outra é somar uma matriz com a oposta da outra.

1.2 Produto de escalar por Matriz

Definição 1.13. *Se* $A = [a_{ij}]$ *é uma matriz* $m \times n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(lambda é um número Real), então, o produto escalar por Matriz* A *(ou múltiplo escalar de* A *por* λ*) é uma matriz* $B = [b_{ij}]$ *tal que*

$$b_{ij} = \lambda a_{ij} \qquad 1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq n$$

Exemplo 1.4. *Se:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

e $\lambda = 3$, *temos então que:*

$$3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 6 & 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -6 & 9 \\ 6 & 15 & 0 \\ 9 & 18 & -6 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.2. *Dados* α,β *números reais,* A, *e* B *matrizes de mesma dimensão* $(m \times n)$, *o produto de escalar por matrizes satisfaz as seguintes operações:*

1. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$
2. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$
3. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$
4. $1 \cdot A = A$

1.3 Produto Matricial

Definição 1.14. *Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ definimos **Produto Matricial** de A por B, e denotamos por AB como sendo uma matriz $C = [c_{ik}]_{m\times p}$ tal que:*

$$c_{ij} = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}bjk = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

Observações:

1. A definição garante a existência do produto AB somente se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, , pois, A é do tipo $m \times n$ e B é do tipo $n \times p$.
2. A definição ainda nos afirma que o produto AB gera uma matriz que possui o número de linhas de A e o número de colunas de B.

Para ficar mais prático, vamos exemplificar como se realiza o produto de duas matrizes. Geralmente, à primeira vista, o produto de matrizes parece ser confuso, por essa razão, vamos omitir formalidades, pelo menos, por hora:

Exemplo 1.5. *Dadas as matrizes abaixo, calcular o produto AB:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2019 \end{bmatrix}$$

Primeiramente, deixamos as matrizes uma do lado da outra como de costume:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2019 \end{bmatrix}$$

Note que A é uma matriz 2×2 e B é uma matriz 2×2, logo, o produto vai gerar uma matriz 2×2. A pergunta é, como obter os elementos c_{11},c_{12},c_{21},c_{22}?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2019 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Como visto na definição, o elemento $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$, ou seja, elemento a elemento, primeira linha de A por primeira coluna de B, no caso:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 5 + 14 = 19$$

Repetimos o processo agora para determinar o elemento c_{12}, ou seja, elemento a elemento, primeira linha de A por segunda coluna de B, no caso:

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2019 = 6 + 4038 = 4044$$

Novamente para c_{21} e c_{22}, onde calcularemos, respectivamente, elemento a elemento, segunda linha de A por primeira coluna de B e, segunda linha de A por segunda coluna de B:

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 15 + 28 = 43$$
$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 2019 = 18 + 8076 = 8094$$

Logo, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2019 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2019 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 2019 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 4044 \\ 43 & 8094 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.3. *O produto matricial (ou multiplicação de matrizes) satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *É associativa, ou seja:* $(AB)C = A(BC)$
   quaisquer que sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ *e* $C = [c_{kl}]_{p\times r}$
2. *É distribuitiva à direita em relação à Adição, ou seja:* $(A + B)C = AC + BC$
   quaisquer que sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$,$B = [b_{ij}]_{m\times n}$ *e* $C = [c_{jk}]_{n\times p}$
3. *É distribuitiva à esquerda em relação à Adição, ou seja:* $C(A + B) = CA + CB$
   quaisquer que sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$,$B = [b_{ij}]_{m\times n}$ *e* $C = [c_{ki}]_{p\times m}$
4. $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$
   quaisquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$ *(em particular para qualquer* $\lambda \in \mathbb{C}$*) e as matrizes* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times p}$

A demonstração fica à cargo dos curiosos.

Observações importantes! É muito, mas muito importante lembrar que o produto matricial não é comutativo, ou seja, nem sempre $AB = BA$.

1. Há casos em que existem AB mas não existem BA. Isto ocorre quando A é do tipo $m \times n$ e B é $n \times p$, com $m \neq p$:
$$A_{m\times n}B_{n\times p} = (AB)_{m\times p} \qquad B_{n\times p}A_{m\times n} \Rightarrow \nexists BA$$
2. Há casos em que existem AB e BA, porém, são matrizes de tipos diferentes, logo, $AB \neq BA$. Isto ocorre quando A é uma matriz do tipo $m \times n$ e B do tipo $n \times m$ com $m \neq n$:
$$A_{m\times n}B_{n\times m} = (AB)_{m\times m} \qquad B_{n\times m}A_{m\times n} \Rightarrow \exists (BA)_{n\times n}$$
3. Mesmos nos casos em que AB e BA são do mesmo tipo (o que ocorre quando A e B são quadradas e de mesma ordem), temos na maioria das vezes que $AB \neq BA$.
4. É importante observar também que $AB = 0$ **NÃO** implica **necessariamente** que $A = 0$ ou $B = 0$, isto é, é possível encontrar duas matrizes não nulas cujo o produto é a matriz nula. Exemplo:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
5. Quando A e B são tais que $AB = BA$, dizemos que A e B comutam.

2 Matriz Transposta

Definição 2.1. *Se* $A = (a_{ij})_{m\times n}$, *a matriz* ***transposta*** *de* A, *denotada por* A^T *é uma matriz* $n \times m$ *tal que* $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$.

Note que a dimensão das matrizes, em geral, exceto no caso em que $m = n$, são diferentes!

Exemplo 2.1.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

É como se você "deitasse" a matriz.

Teorema 2.1. *Se* $A = (a_{ij})_{m\times n}$*,* $B = (b_{ij})_{m\times n}$ *ou seja,* A *e* B *são uma matrizes de dimensão* $m \times n$*, e* $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$*, a matriz transposta de* A*. A transposição de matrizes satisfaz as seguintes propriedades*

1. $(A^T)^T = A$

2. $(A + B)^T = A^T + B^T$

3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

4. $|A^T| = |A|$*, ou seja,* $det(A^T) = det(A)$

Observações: Apesar de não termos enunciado ainda o que é a função determinante ($det(A)$ ou $|A|$), optei por destacar essa propriedade no momento e darei mais ênfase mais tarde.

Faça exemplos numéricos para verificar que é verdade, se você tiver mais prática, prove formalmente.

A propriedade 3 do Teorema 2.1. é muito utilizada, lembre-se muito bem dela!

Estas notas de aulas ainda estão sendo construídas