Notas de Aula

Gustavo Henrique Silva Sarturi
Matemática B - Em Ação
gustavo.sarturi@ufpr.br

1 Matrizes

Definição 1.1. *Uma matriz $A_{m\times n}$ é um arranjo retangular de $m \cdot n$ números reais (ou complexos) organizados em m linhas e n colunas.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A i-ésima linha de A é:

$$[a_{i1} \ \ a_{i2} \ \ \cdots \ \ a_{in}]_{1\times n} \qquad i \in \mathbb{Z} \mid (1 \leq i \leq m)$$

A j-ésima coluna de A é

$$\begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jm} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

Dizemos qur A é m por n, e denotamos por $m \times n$. Se $m = n$ dizemos que A é uma **Matriz Quadrada de ordem** n e que a_{11},a_{22},$\cdots$,a_{nn} formam a diagonal principal de A. Denotaremos por a_{ij} o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna de uma matriz. Frequentemente, denotaremos uma matriz A por:

$$A = [a_{ij}] = (a_{ij})$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

temos que $a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 0$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 1$, $a_{31} = 3$, $a_{32} = -1$, $a_{33} = 2$. Os elementos a_{11},a_{22} e a_{33} formam o conjunto da diagonal principal da matriz.

Definição 1.2. *A diagonal principal de uma matriz quadrada é o conjunto dos elementos a_{ij} tais que $i = j$.*

Definição 1.3. *A diagonal secundária de uma matriz quadrada é o conjunto dos elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$*

Em nosso exemplo, a_{13}, a_{22} a_{31} são os elementos do conjunto da diagonal secundária.

Definição 1.4. *Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ em que todos os elementos fora da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ é denominada* ***matriz diagonal****. Em particular, se todos os elementos da diagonal forem 1, i.e., $a_{ij} = 1$ para $i = j$, denominamos* ***matriz identidade****.*

Definição 1.5. *Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ em que todos os elementos da diagonal principal são iguais, isto é, $a_{ij} = c$, $c \in \mathbb{R}$ para $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ é denominada* ***matriz escalar****.*

Exemplo 1.1.

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2019 \end{bmatrix}_{3\times3} \qquad B = I_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

No exemplo acima, A é uma matriz diagonal e B é uma matriz diagonal identidade, ou simplesmente, identidade. Pela relevância da matriz identidade, geralmente denotamos ela por I_d para indicar matriz identidade. As matrizes B e C são exemplos de matrizes escalares.

Definição 1.6. *Uma matriz $A = [a_{ij}]$ é dita* ***Matriz Nula*** *se todos os seus elementos são nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ para todo i e todo j.*

Definição 1.7. *Uma matriz $B = [b_{ij}]$, de dimensão $m \times n$ é dita ser* ***oposta*** *de uma matriz $A = [a_{ij}]_m \times n$ se $b_{ij} = -a_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$*

Definição 1.8. *Uma matriz $A = [a_{ij}]$ de dimensão $m \times n$ é dita ser* ***simétrica*** *se $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.*

Definição 1.9. *Uma matriz $A = [a_{ij}]$ de dimensão $m \times n$ é dita ser* ***anti-simétrica*** *se $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.*

Exemplo 1.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & -5 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3} \tag{1}$$

A é uma matriz ***simétrica*** *e B é uma matriz* ***anti-simétrica****.*

Definição 1.10. *Duas matrizes $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, do tipo $m \times n$ são iguais se $a_{ij} = b_{ij}$ para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Isto é, se todos os elementos correspondentes são iguais.*

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3} \qquad B = I_d = \begin{bmatrix} 1 & 2 & w \\ 2 & x & 4 \\ y & -4 & z \end{bmatrix}_{3\times3}$$

são iguais se $w = -1$,$x = -3$,$y = 0$ e $z = 5$

1.1 Adição de Matrizes

Definição 1.11. *Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são matrizes $m \times n$, a soma de A e B gera uma matriz $C = [c_{ij}]$ definida por:*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$$

Em outras palavras, bem no estilo matemática de bar, C é obtida somando-se os elementos correspondentes de A e de B.

Teorema 1.1. *Seja $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$ de mesma dimensão, ou seja, todas do tipo $m \times n$.*

A soma de matrizes satisfazem as seguintes operações:

1. *Associativa:* $A + B = B + A$
2. *Comutativa:* $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. *Existe um elemento neutro, no caso, a matriz nula.* $A + [0] = A$, *onde* $[0]$ *é a matriz nula de mesma dimensão de* A.
4. *Existe um elemento simétrico, no caso, a* ***matriz oposta*** *à matriz* A' *que é tal que* $A + A' = 0$.

A demonstração fica à cargo do leitor. Quaisquer dúvidas, consultar o autor das notas de aula, que no caso, sou eu.

Exemplo 1.3.

$$\begin{bmatrix} 20 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 47 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 20+7 & 0+0 & 1+2 \\ 0+0 & 5+2 & 3+4 \\ 3+4 & 2+1 & 50+47 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 27 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 7 & 3 & 97 \end{bmatrix}$$

Definição 1.12. *Se* A *e* B *são matrizes de mesma dimensão* $(m \times n)$*, escrevemos* $A + (-B)$ *como* $A - B$*, chamamos essa operação de* ***diferença*** *(ou subtração) de duas matrizes.*

Em essência, a definição acima nos diz que subtrair uma matriz com a outra é somar uma matriz com a oposta da outra.

1.2 Produto de escalar por Matriz

Definição 1.13. *Se* $A = [a_{ij}]$ *é uma matriz* $m \times n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(lambda é um número Real), então, o produto escalar por Matriz* A *(ou múltiplo escalar de* A *por* λ*) é uma matriz* $B = [b_{ij}]$ *tal que*

$$b_{ij} = \lambda a_{ij} \qquad\qquad 1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq n$$

Exemplo 1.4. *Se:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

e $\lambda = 3$*, temos então que:*

$$3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 4 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 5 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 6 & 3\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -6 & 9 \\ 6 & 15 & 0 \\ 9 & 18 & -6 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.2. *Dados* α,β *números reais,* A, *e* B *matrizes de mesma dimensão* $(m \times n)$*, o produto de escalar por matrizes satisfaz as seguintes operações:*

1. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$
2. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$
3. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$
4. $1 \cdot A = A$