ICC2 - Prova 01.
Aluno: Gustavo Siqueira Barbosa, nºUSP 10728122

Questão 1: separei cada for externo em um bloco. A contagem direta de cada uma das operações está representada em comentários no código.

```
//BLOCO 1
for (i=0; i<m; i++)
    for (j=0; j<m; j++)
        vetor[k++] = matriz[i][j];   //(m)^2 * a
//Total bloco 1: (m)^2 * a

//BLOCO 2
for(i = 0; i < m*m-1; i++){
    for(j = 0; j < m*m-1; j++){
        if (vetor[j] > vetor[j+1]){  //(m*m-1)^2 * (a+c)
            int aux = vetor[j];
            vetor[j] = vetor[j+1];   //(m*m-1)^2 * a
            vetor[j+1] = aux;        //(m*m-1)^2 * a
        }
    }
}
//Total bloco 2: (m*m-1)^2 * (3a+c)

k = 0;
//BLOCO 3
for (i=0; i<m; i++){
    for (j=0; j<m; j++){
        matriz[i][j] = vetor[k++]; //m^2 * a
//Total bloco 3: (m)^2 * a
```

$$f(n) = m^2 a + (m^2-1)^2 (3a+c) + m^2 a$$

$$= 2m^2 a + (m^4 + 1 - 2m^2)(3a+c)$$

$$= 2m^2 a + 3a m^4 + 3a - 6m^2 a + m^4 c + c + 2m^2 c$$

como $m^2 = n$

$$f(n) = 2na + 3an^2 + 3a - 6an + n^2 c + c +$$

$$+ 2nc$$

$$= n^2(3a+c) + n(2a - 6a + 2c) + 3a + c$$

$$\boxed{f(n) = n^2(3a+c) + n(2c-4a) + 3a+c}$$

Questão 2. Transformei minha função de insertion_sort em uma função recursiva (chamada func1) para a contagem de operações via recorrência. Como as alterações foram feitas apenas para contagem, ignorei alguns aspectos de sintaxe de implementação, apenas mantendo a integridade da quantidade de operações do código original.

```
func1(V, size, start, line, j){

    if (j >= size) return V; //comparação não contada por ser pertencente ao for

    //Como dentro deste for há uma comparação além da utilizada para manter o
    // laço, decidi contar uma comparação nesta linha
    for (int i = j-1; i >=start && V[line][i] > key; i--) //c
        V[line][i+1] = V[line][i];  // (i-start+1)*a = (j-start)*a

    V[line][i+1] = key; // a

    return func1(V, size, start, line, j+1);

}
```

$size \equiv T \qquad start \equiv S$

Esta função depende do parâmetro start, que será considerado constante durante sua execução. O laço dentro da função é executado T vezes, sendo T o parâmetro de controle das repetições, pois começa em size e vai até size - start.

Caso Base: $f(S) = 0$ (não conta a operação deste caso)

$$f(T) = T(c+a) + f(T-1)$$

$$f(T) = T(c+a) + (T-1)(c+a) + f(T-2)$$

$$\vdots$$

$$f(T) = \sum_{i=0}^{K-1} (T-i)(c+a) + f(T-K)$$

$$f(T) = (c+a) \sum_{i=0}^{K-1} (T-i) + f(T-K)$$

$$f(T) = (c+a) \frac{K(T+T-K+1)}{2} + f(T-K)$$

para o caso base, $K = T - S$

$$f(T) = (c+a) \frac{1}{2} (T-S)(2T - T + S + 1) + \cancel{f(S)} \to 0$$

$$f(T) = (c+a) \frac{1}{2} (T-S)(T+S+1)$$

$$= (c+a) \frac{1}{2} \left[T^2 + \cancel{TS} + T - \overset{2}{\cancel{TS}} - S - S \right]$$

$$\boxed{f(T) = (c+a) \frac{1}{2} (T^2 - S^2 + T - S)}$$

```
//Como apenas metade do vetor é analisada, a operação foi reduzida para (m^2)/2
for (i=0; i<m; i++)
    for (j=i; j<m; j++)
        matriz = insertion_sort(matriz, m, j, i); //(m^2 / 2) chamadas de insertion_sort
```

A função de insertion_sort é chamada (m^2)/2 vezes. Portanto, para estes dois laços, basta multiplicar a função fechada do insertion_sort por este valor, considerando as alterações da entrada enviada para o parâmetro start.

$$f(m) = \frac{m^2}{2}(c+a)(T^2 - S^2 + T - S)$$

Percebe-se que o parâmetro start sempre é alterado na sequência (m), (m-1), (m-2), ..., (1). Portanto, podemos substituir o valor de S pela soma de:

$$\sum_{i=0}^{m-1} m - i = \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m^2+m}{2}$$

Além disso, o tamanho do vetor (chamado de T) é sempre equivalente a m. Substituindo:

$$f(m) = \frac{m^2}{2}(c+a)\left(m^2 - \left(\frac{m^2+m}{2}\right)^2 + m^2 - \left(\frac{m^2+m}{2}\right)\right)$$

Substituindo m^2 por n:

$$f(n) = \frac{m^2}{2}(c+a)\left(m^2 - \left(\frac{m^4+m^2+2m^3}{2}\right) + m^2\left(\frac{m^2+m}{2}\right)\right)$$

$$\boxed{f(n) = \frac{n}{2}(c+a)\left(\frac{n^2+n+2n\sqrt{n}}{2}\right) + n\left(\frac{n+\sqrt{n}}{2}\right)}$$