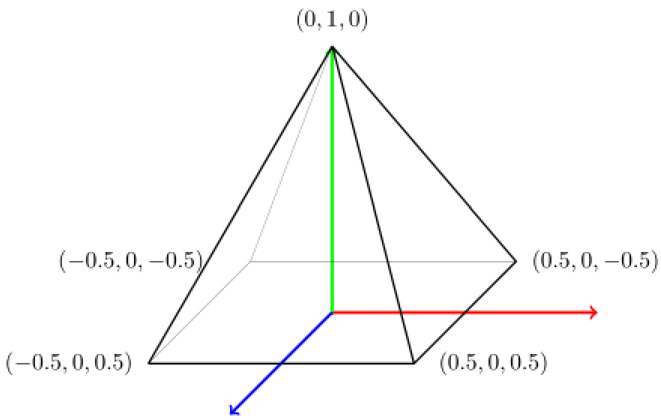
Universidade de São Paulo
Instituto de Ciências Matemáticas e Computação
Aluno: Gustavo Siqueira Barbosa
Nº Usp: 10728122

Semestre 1, 2022
Lista 02

SCC0250: Computação Gráfica
Lista 02

Para as seguintes questões, $M = 6, D = 15.$

Para a resolução dos exercícios seguintes, considere a seguinte pirâmide:



1 Questão 01

Multiplique o tamanho dos lados da base da pirâmide por M e sua altura por D, e posicione-a totalmente no 1º octante, isto é, com $\forall x, y, z \geq 0$. Calcule as coordenadas da pirâmide no espaço de *Mundo*.

Seja P_0 as coordenadas do ponto inicial. Para multiplicar os lados por M e a altura por D, precisamos utilizar a seguinte transformação de escala:

$$P' = M_E \cdot P_0$$

$$P' = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} 6t_x \\ 15t_y \\ 6t_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para que todos os pontos estejam no 1º octante, é necessário que executemos uma operação de translação nos pontos nas coordenadas x e z que são menores que 0. Chamemos o ponto $P_1 = (-3, 0, -3)$ (considerando que já foram aplicadas as operações de escala de acordo com a matriz anterior).

$$P_1' = T_1 \cdot P_1$$

$$P_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para que o ponto 1 seja transferido para o 1º quadrante, é necessário que x e z sejam deslocados em 3:

$$P_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como o ponto P_1 é o ponto mais distante da origem, podemos, de maneira similar, aplicar a transformação acima em todos os pontos da pirâmide. De forma similar, podemos realizar a escala para o ponto do topo, aumentando a altura em 15.

Desta forma, obtemos as seguintes coordenadas para os pontos:

$$P_{final} = \{(0,0,0), (0,0,6), (6,0,0), (6,0,6), (3,15,3)\}$$

2 Questão 02

Mostre a matriz *Model* que realiza as transformações do exercício anterior.

No exercício anterior, realizamos uma escala e uma translação. Portanto:, utilizando $M_{model} = M_T \cdot M_S$:

$$M_{model} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

3 Questão 3

Tome o Ponto de Visão $P_0 = (0, 0, M)$, o *Target* na origem e o vetor view-up $V = (0, 1, 0)$. Exiba a matriz *View* obtida com estes parâmetros.

Sabemos que a matriz View segue o seguinte modelo:

$$M_{view} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_y & -\hat{u} \cdot P_0 \\ v_x & v_y & u_y & -\hat{v} \cdot P_0 \\ n_x & n_y & u_z & -\hat{n} \cdot P_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O ponto de visão é $P_0 = (0, 0, 6)$ e seja T o ponto de Target. Para o cálculo de $\hat{u}, \hat{v}, \hat{n}$:

- $\hat{n}$

$$\hat{n} = \frac{P_0 - T}{||P_0 - T||} = \frac{(0, 0, 6) - (0, 0, 0)}{||(0, 0, 6) - (0, 0, 0)||} = \frac{(0, 0, 6)}{||6||} = \boxed{\hat{n} = (0, 0, 1)}$$

- $\hat{u}$

$$\hat{u} = \frac{V \times \hat{n}}{||V \times \hat{n}||} = \frac{(0, 1, 0) - (0, 0, 1)}{||(0, 1, 0) - (0, 0, 1)||} = \frac{(1, 0, 0)}{||1||} = \boxed{\hat{u} = (1, 0, 0)}$$

- $\hat{v}$

$$\hat{v} = \hat{n} \cdot \hat{u} = (0, 0, 1) \times (1, 0, 0) = \boxed{\hat{v} = (0, 1, 0)}$$

Desta forma, matriz view é:

$$M_{view} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 Questão 4

Utilize a matriz View do exercício anterior para converter as coordenadas da pirâmide do exercício 1 para o espaçoo de Visão.

Para fazer a transformação, precisamos aplicar a matriz view anterior nos pontos da pirâmide:

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a operação acima a cada um dos pontos, nós temos:

$$P_{final} = \{(0, 0, -6), (0, 0, 0), (6, 0, -6), (6, 0, 0), (3, 15, -3)\}$$

5 Questão 5

Considere o plano de projeção próximo posicionado em $z_{near} = \frac{D}{100}$ e o distante em $z_{far} = 10D$. Apresente uma matriz de Projeção Perspectiva Normalizada (Projection), construída usando estes parâmetros, com o ângulo e aspecto da projeção a sua escolha.

Sabemos que a matriz de projeção persectiva normalizada é:

$$M_{pers} = \begin{bmatrix} \frac{cot(\frac{\theta}{2})}{aspect} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cot\frac{\theta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{z_{far}+z_{near}}{z_{far}-z_{near}} & -\frac{2z_{far} \cdot z_{near}}{z_{far}-z_{near}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo $z_{near} = \frac{15}{100} = 0.15$ e $z_{far} = 10 \cdot 15 = 150$. Definindo $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $aspect = \frac{1}{3}$, temos:

$$M_{pers} = \begin{bmatrix} 3cot(\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cot\frac{\pi}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{150.15}{149.75} & -\frac{2 \cdot 1.5}{149.75} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{pers} = \begin{bmatrix} 3cot(\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cot\frac{\pi}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{pers} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6 Questão 6

Apresente uma matriz de Projeção Ortogonal Normalizada (Projection) usando os valores dos planos de projeção definidos no exercício anterior, com as dimensões da janela de recorte definidas como desejar.

Sabemos que a matriz de projeção ortogonal normalizada é:

$$M_{orth} = \begin{bmatrix} \frac{2}{XW_{max}-XW_{min}} & 0 & 0 & -\frac{XW_{max}+XW_{min}}{XW_{max}-XW_{min}} \\ 0 & \frac{2}{YW_{max}-YW_{min}} & 0 & -\frac{YW_{max}+YW_{min}}{YW_{max}-YW_{min}} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{z_{near}-z_{far}} & \frac{z_{near}+z_{far}}{z_{near}-z_{far}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definindo $XW_{max} = 20, XW_{min} = 10, YW_{max} = 40, YW_{min} = 20$ e utilizando o os valores de z_{near} e z_{far} do exercício anterior, temos:

$$M_{orth} = \begin{bmatrix} \frac{2}{20-10} & 0 & 0 & -\frac{20+10}{20-10} \\ 0 & \frac{2}{40-40} & 0 & -\frac{40+40}{40-20} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{0.15-150} & \frac{0.15+150}{0.15-150} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{orth} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & -40 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{149.75} & -\frac{150.15}{149.75} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{orth} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0.1 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & -0.013 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7 Questão 7

Transforme as coordenadas da pirâmide obtidas no exercício 4 para o espaço de Clip usando:

- A matriz Projection do exercício 5.
- A matriz Projection do exercício 6.

Os pontos obtidos no exercício 4 são:

$$P = \{(0,0,-6),(0,0,0),(6,0,-6),(6,0,0),(3,15,-3)\}$$

- A matriz Projection do exercício 5. Para isso, primeiro precisamos aplicar a tranformação de M_{pers} para cada uma das coordenadas dos pontos. Usando $P_h = M_{pers} \cdot P$:

$$P_h = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_h = \begin{bmatrix} 3x \\ y \\ z - 0.02 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Realizando a operação para cada um dos pontos da pirâmide acima, obtemos:

$$P_{hfinal} = \{(0,0,-6.02),(0,0,-0.02),(18,0,-6.02),(18,0,0),(9,15,-3.02)\}$$

Porém, ainda precisamos realizar a divisão $P' = \frac{P_h}{h}$ para todos os pontos. A altura e a largura devem manter a relação $aspect = \frac{width}{heigth} = \frac{1}{3}$ para ser coerente com a questão 5, então vamos definir $width = 300$ e $height = h = 900$.

- A matriz Projection do exercício 6. Para isso, precisamos aplicar a tranformação de M_{ortho} para cada uma das coordenadas dos pontos. Usando $P' = M_{ortho} \cdot P$:

$$P' = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0.1 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & -0.013 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} 0.2x - 3 \\ 0.1y - 40 \\ 0.013z - 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Realizando a operação para cada um dos pontos da pirâmide acima, obtemos:

$$P'_{final} = \{(-3,-40,-1.078),(-3,-40,-1),(-1.80,-40,-1.078),$$
$$(-1.80,-40,-1),(-2.4,-38.5,-1.039)\}$$

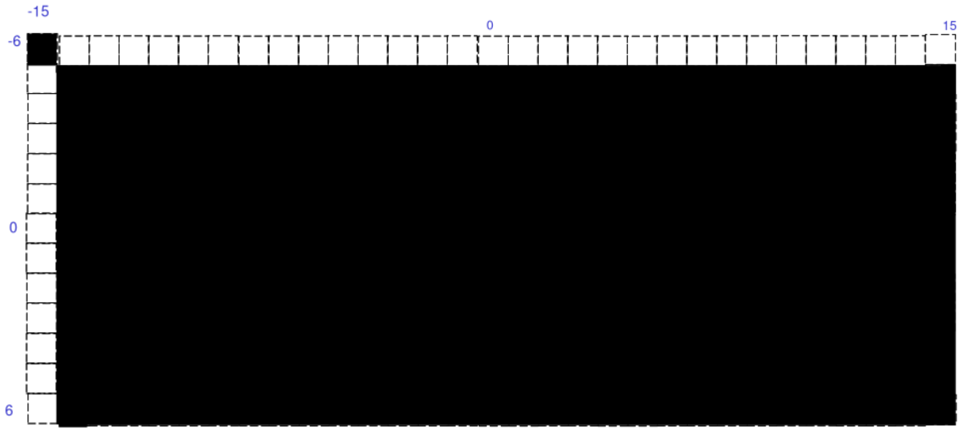
Para os exercícios a seguir, considere uma textura quadrada de dimensã 2×2 (pixeis), apresentada abaixo (xadrez), um retângulo com coordenadas $[(-D,-M),(D,M),(-D,M),(D,-M)]$ e que a textura pode ser mapeada diretamente no retângulo.

---

8 Questão 08

Apresente a textura no retângulo com o parâmetro CLAMP (apenas a ideia via um desenho).

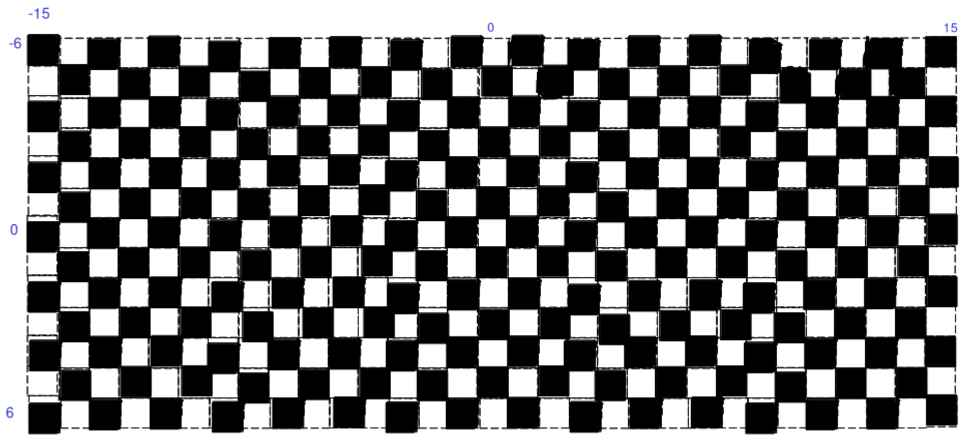
> Os traços pontilhados na imagem abaixo servem de referência para as coordenadas. Foi considerado que a textura foi aplicada inicialmente no canto superior esquerdo.



9 Questão 09

Apresente a textura no retângulo com o parâmetro REPEAT (apenas a ideia via um desenho).

> Os traços pontilhados na imagem abaixo servem de referência para as coordenadas. Foi considerado que a textura foi aplicada inicialmente no canto superior esquerdo.



10 Questão 10

Considere um coeficiente de reflexão ambiente $k_a = \frac{D}{40}$ e uma intensidade de luz ambiente $I_a = 0.8$. Calcule a intensidade da luz ambiente na cena.

Sabemos que a intensidade da luz ambiente se dá por:

$$I_{amb} = k_a I_a = \frac{15}{40} \cdot 0.8$$

$$\boxed{I_{amb} = 0.3}$$

11 Questão 11

Complemente o modelo de iluminação do exercício anterior utilizando o coeficiente de reflexão difusa. $I_d = \frac{M}{15}$, a intensidade da luz puntual $I_l = 0.75$ e um ângulo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ a seu critério. Determine a intensidade da luz ambiente somada à reflexão difusa.

Sabemos que:

$$I_{diff} = I_{amb} + k_d I_d \cos\theta$$

Definindo $\theta = \frac{\pi}{3}$:

$$I_{diff} = 0.3 + 0.75 \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\boxed{I_{diff} = 0.45}$$

12 Questão 12

Adeque o exercício anterior ao modelo de Blinn-Phong tomando o coeficiente de reflexão especular $k_s = \frac{M}{D+20}$, o expoente de reflexão especular $n_s = M \cdot D$ e um ângulo $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ à vontade. Obtenha o valor da intensidade total entre iluminação ambiente, reflexão difusa e reflexão especular

Sabemos que o valor da intensidade do modelo de Blinn-Phong é:

$$I_{bp} = I_{diff} + k_s \cdot \cos^{n_s}\theta$$

Definindo $k_s = \frac{6}{15+20} = 0.17$, $n_s = 6 \cdot 15 = 90$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$, temos:

$$I_{bp} = I_{diff} + 0.17 \cdot \cos^{90}\frac{\pi}{3}$$

$$I_{bp} = I_{diff} + 4 \cdot 10^{-7}$$

Como o termo é muito baixo, pode ser desconsiderado.

$$\boxed{I_{bp} = I_{diff} = 0.45}$$