Computação Gráfica

Triangulação

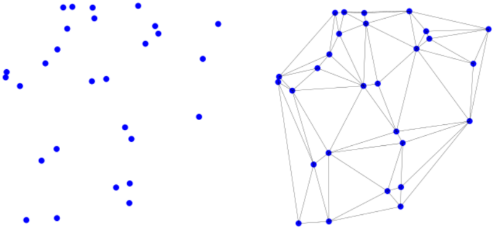
Prof. Alaor Cervati Neto

2022/1

Triangulação

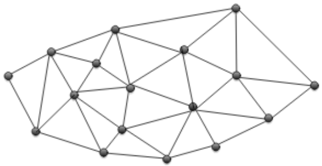
Dado um conjunto de pontos S, determinar uma partição de triângulos:

- Vértices: pontos do conjunto S.
- Arestas: segmento de reta que conecta dois pontos de S.



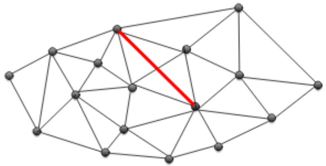
Triangulação Planar

Uma triangulação de um conjunto planar de pontos S é uma subdivisão do plano determinada por um conjunto maximal de arestas que não se intersectam e cujos vértices estão em S.



Triangulação Planar

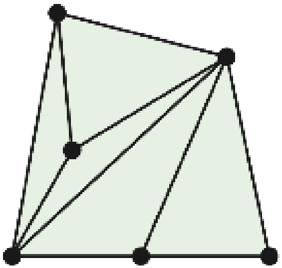
Uma triangulação de um conjunto planar de pontos *S* é uma subdivisão do plano determinada por um conjunto maximal de arestas que não se intersectam e cujos vértices estão em *S*.



Conjunto maximal de arestas: qualquer aresta que não está na triangulação intersectará alguma aresta da triangulação.

Triangulação

Existem diferentes triangulações para um conjunto de pontos, dependendo do algoritmo utilizado:



Algoritmo Incremental

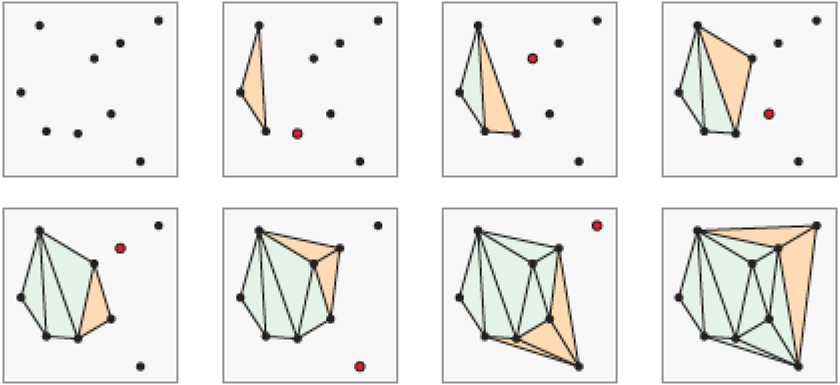
Algoritmo: TriangulaçãoIncremental(S**)**

Input: Um conjunto de pontos S no plano.

Output: Triangulação de S.

1. Ordenar os pontos de S de acordo com a coordenada x
2. Construir o primeiro triângulo com base nos três primeiros pontos
3. Para cada ponto p_i, $3 < i < |S|$ faça:
   3.1 Conecte p_i com o conjunto de pontos já processados visíveis a partir de p_i

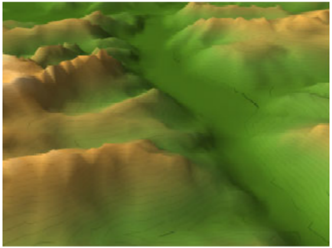
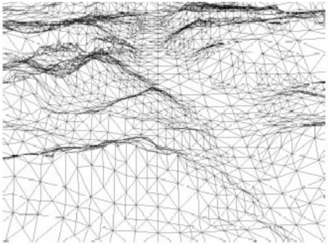
Algoritmo Incremental



Exemplo: Modelagem de Terrenos

Cada ponto de S é representado por uma tripla (x, y, z):

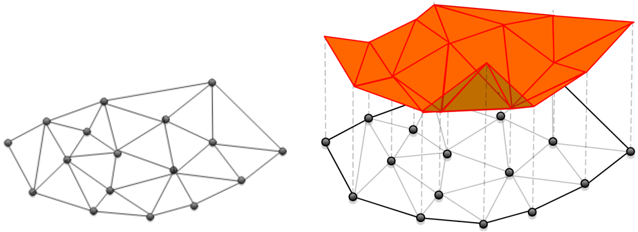
- x, y codificam a posição geográfica.
- z é a altura de uma região da superfície da terra.

Exemplo: Modelagem de Terrenos

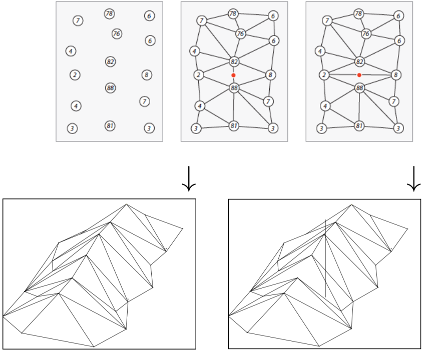
Cada ponto de S é representado por uma tripla (x, y, z):

- Triangular S descartando a coordenada z.
- Subir a triangulação acrescentando a coordenada z em cada vértice.



Exemplo: Modelagem de Terrenos

A triangulação pode omitir ou realçar vales, planícies, picos, etc.



Qualidade da Triangulação

Triângulos "finos" não são desejáveis em muitas aplicações.

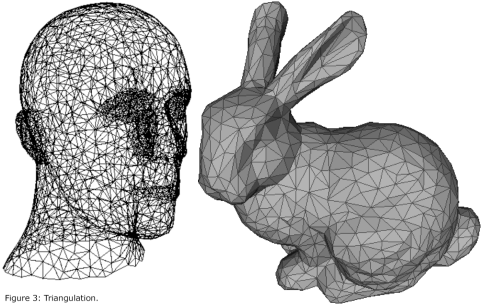


Figure 3: Triangulation.

É preciso maximizar o menor ângulo de cada triângulo.

Triangulação de Delaunay

Triangulação de Delaunay

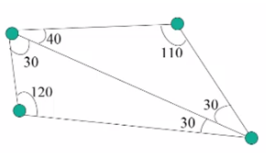
Pode-se criar uma regra para triangulação:

- Regra da Ordem Lexicográfica Crescente.
- Lista dos ângulos da triangulação em ordem crescente.

Triangulação de Delaunay

Pode-se criar uma regra para triangulação:

- Regra da Ordem Lexicográfica Crescente.
- Lista dos ângulos da triangulação em ordem crescente.

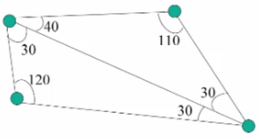


$$T1 = (30, 30, 30, 40, 110, 120)$$

Triangulação de Delaunay

Pode-se criar uma regra para triangulação:

- Regra da Ordem Lexicográfica Crescente.
- Lista dos ângulos da triangulação em ordem crescente.



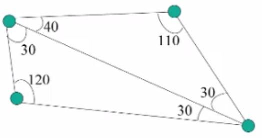
$\xrightarrow{\hspace{3cm}}$
FLIP na aresta compartilhada

$T1 = (30, 30, 30, 40, 110, 120)$

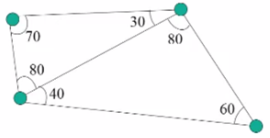
Triangulação de Delaunay

Pode-se criar uma regra para triangulação:

- Regra da Ordem Lexicográfica Crescente.
- Lista dos ângulos da triangulação em ordem crescente.



$\xrightarrow{\hspace{3cm}}$ FLIP na aresta compartilhada



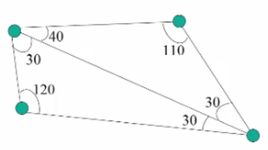
$T1 = (30, 30, 30, 40, 110, 120)$

$T2 = (30, 40, 60, 70, 80, 80)$

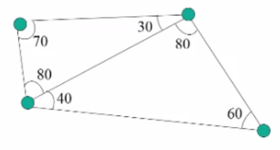
Triangulação de Delaunay

Pode-se criar uma regra para triangulação:

- Regra da Ordem Lexicográfica Crescente.
- Lista dos ângulos da triangulação em ordem crescente.



$\xrightarrow{\hspace{3cm}}$
FLIP na aresta compartilhada



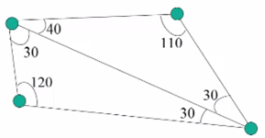
$T1 = (30, 30, 30, 40, 110, 120)$ $T2 = (30, 40, 60, 70, 80, 80)$

$$\begin{array}{lcccccccc} T1 = (& 30, & 30, & 30, & 40, & 110, & 120 &) \\ T2 = (& 30, & 40, & 60, & 70, & 80, & 80 &) \end{array}$$

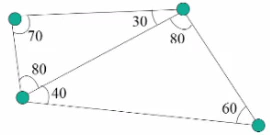
Triangulação de Delaunay

Pode-se criar uma regra para triangulação:

- Regra da Ordem Lexicográfica Crescente.
- Lista dos ângulos da triangulação em ordem crescente.



$\longrightarrow$ FLIP na aresta compartilhada



$T1 = (30, 30, 30, 40, 110, 120)$

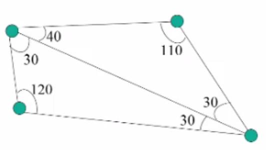
$T2 = (30, 40, 60, 70, 80, 80)$

$$\begin{array}{l|c|cccccc}
T1 = (& 30, & 30, & 30, & 40, & 110, & 120 &) \\
T2 = (& 30, & 40, & 60, & 70, & 80, & 80 &)
\end{array}$$

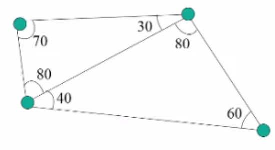
Triangulação de Delaunay

Pode-se criar uma regra para triangulação:

- Regra da Ordem Lexicográfica Crescente.
- Lista dos ângulos da triangulação em ordem crescente.



$\xrightarrow{\hspace{3cm}}$
FLIP na aresta compartilhada



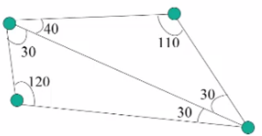
$T1 = (30, 30, 30, 40, 110, 120)$ $\quad$ $T2 = (30, 40, 60, 70, 80, 80)$

$$\begin{array}{lc|c|cccc}
T1 = (& 30, & 30, & 30, & 40, & 110, & 120 \;) \\
T2 = (& 30, & 40, & 60, & 70, & 80, & 80 \;)
\end{array} \nearrow$$

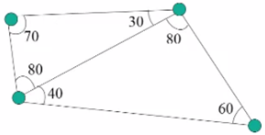
Triangulação de Delaunay

`FLIP` na aresta:

- Uma aresta é *ilegal* se, quando "flipada" dentro de um quadrilátero, melhora a triangulação. Caso contrário, a aresta é *legal*.



$\xrightarrow{}$
`FLIP` na aresta compartilhada



$$T1 = (30, 30, 30, 40, 110, 120)$$

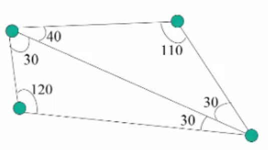
$$T2 = (30, 40, 60, 70, 80, 80)$$

$$\begin{array}{lc|c|ccccc}
T1 = (& 30, & 30, & 30, & 40, & 110, & 120 &) \\
T2 = (& 30, & 40, & 60, & 70, & 80, & 80 &)
\end{array} \nearrow$$

Triangulação de Delaunay

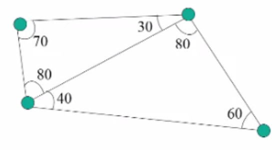
`FLIP` na aresta:

- Uma aresta é *ilegal* se, quando "flipada" dentro de um quadrilátero, melhora a triangulação. Caso contrário, a aresta é *legal*.



$\xrightarrow{\hspace{3cm}}$

`FLIP` na aresta compartilhada



$T1 = (30, 30, 30, 40, 110, 120)$ $T2 = (30, 40, 60, 70, 80, 80)$

Seja S um conjunto de pontos no plano. Uma triangulação de S que possui *apenas arestas legais* é denominada uma Triangulação de Delaunay.

Algoritmo Flip

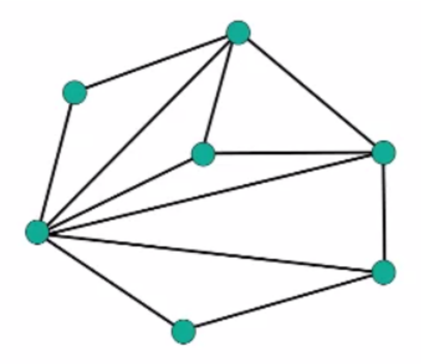
Algoritmo: DelaunayFlip(S**)**

Input: Um conjunto de pontos S no plano.

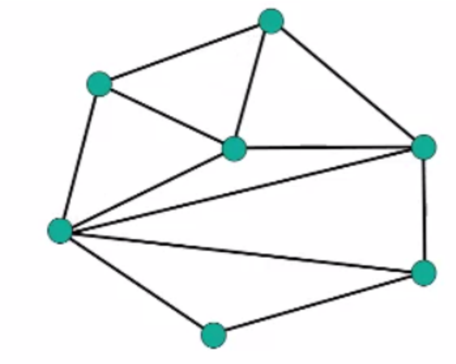
Output: Triangulação de S.

1. Obter uma triangulação T qualquer de S
2. Flipar arestas até remover todas arestas ilegais

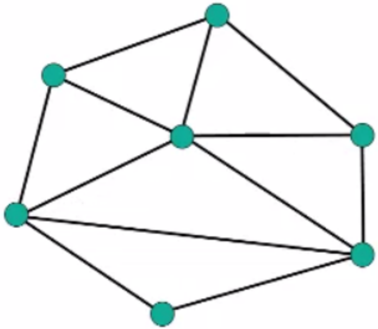
Algoritmo Flip



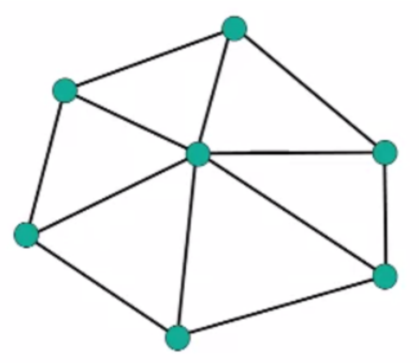
Algoritmo Flip



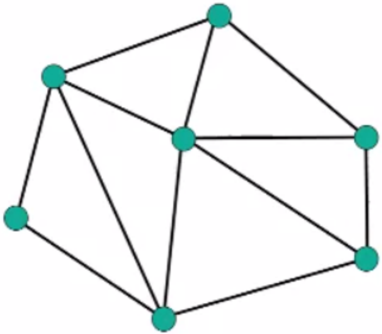
Algoritmo Flip



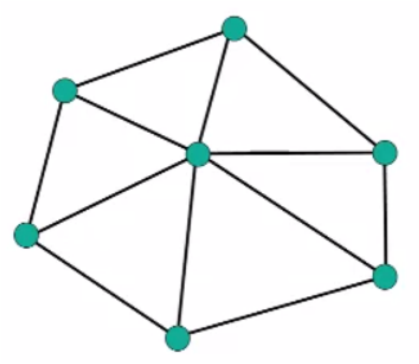
Algoritmo Flip



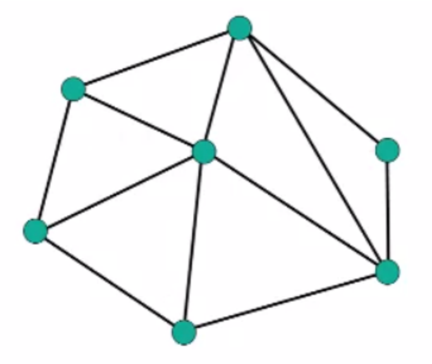
Algoritmo Flip



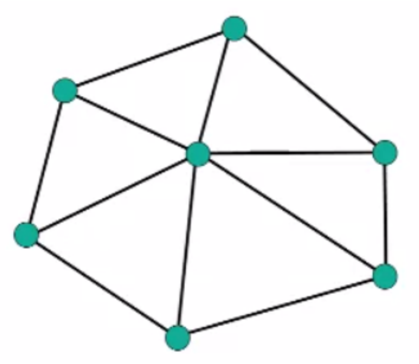
Algoritmo Flip



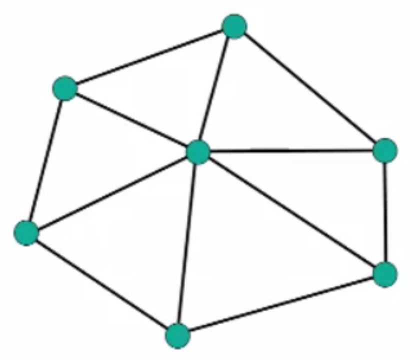
Algoritmo Flip



Algoritmo Flip

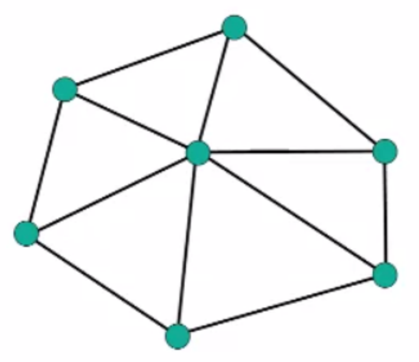


Algoritmo Flip



Triangulação de Delaunay.

Algoritmo Flip

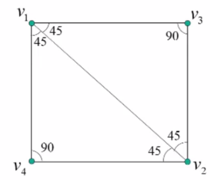


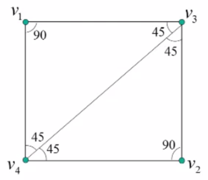
Não é um algoritmo eficiente. Complexidade $O\left(n^2\right)$ com n vértices.

Triangulação de Delaunay

Só existe uma Triangulação de Delaunay?

- Não. Diferentes combinações de arestas podem formar uma Triangulação de Delaunay.
- Exemplo:





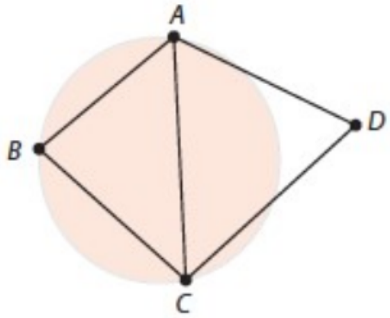
$T1 = (45, 45, 45, 45, 90, 90)$ $T1 = (45, 45, 45, 45, 90, 90)$

Triangulação de Delaunay

- Regra da Ordem Lexicográfica também é ineficiente (ordenação).
- Alternativa: Teste do Círculo:
  - Seja e uma aresta de uma triangulação, onde $e = AC$ pertence a dois triângulos ABC e ACD.
  - A aresta e é legal se D está fora do circuncirculo de ABC e é ilegal se D está dentro.

Triangulação de Delaunay

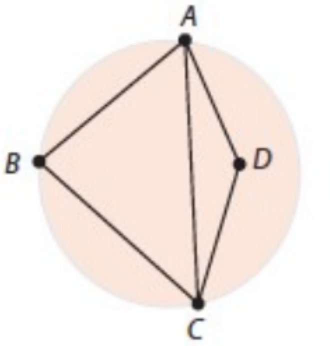
Exemplo: $e = AC$



Aresta e é *legal*.

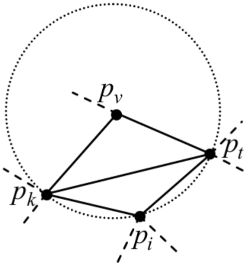
Triangulação de Delaunay

Exemplo: $e = AC$

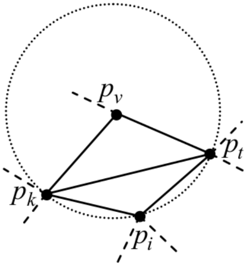


Aresta e é *ilegal*.

Flip usando Teste do Círculo

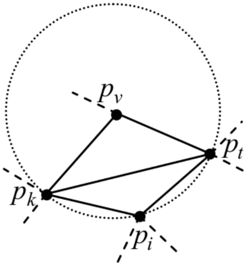


Flip usando Teste do Círculo

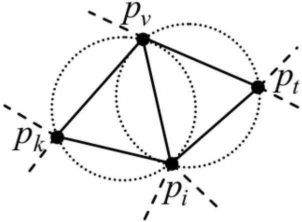


$\xrightarrow{\textit{Flipar} \text{ aresta } p_k p_t \text{ por } p_i p_v}$

Flip usando Teste do Círculo



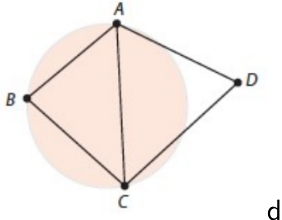
$\xrightarrow{\textit{Flipar} \text{ aresta } p_k p_t \text{ por } p_i p_v}$



Flip usando Teste do Círculo

O determinante é positivo se, e somente se, D está dentro do circuncirculo.

Obs: A, B, C devem ser ordenados em sentido anti-horário.



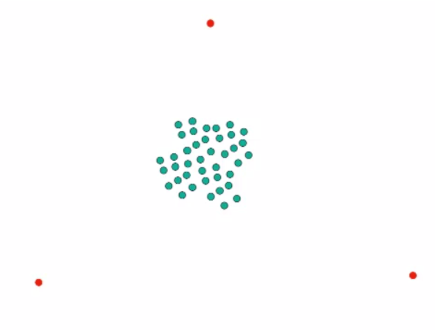
$$\det(A, B, C, D) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_x^2 + A_y^2 & 1 \\ B_x & B_y & B_x^2 + B_y^2 & 1 \\ C_x & C_y & C_x^2 + C_y^2 & 1 \\ D_x & D_y & D_x^2 + D_y^2 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Algoritmo Incremental

Seja S o conjunto de pontos.

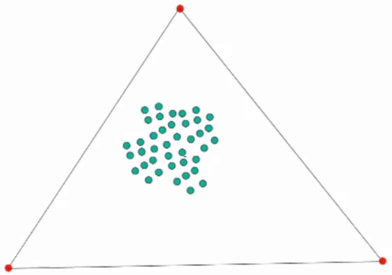
Algoritmo Incremental

Acrescentar três novos pontos para englobar todo o conjunto original.



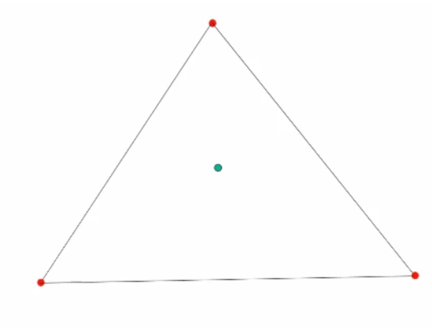
Algoritmo Incremental

Os três novos pontos formam um triângulo.



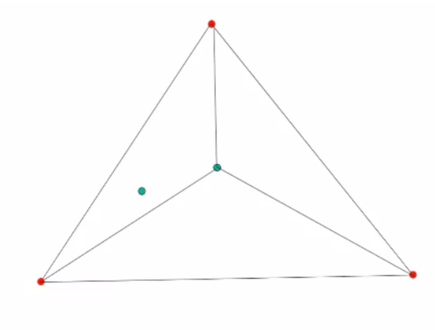
Algoritmo Incremental

Escolher aleatoriamente um ponto de S e adicionar.



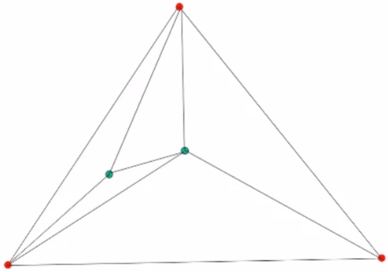
Algoritmo Incremental

Repetir o processo escolhendo aleatoriamente outro ponto do conjunto original.



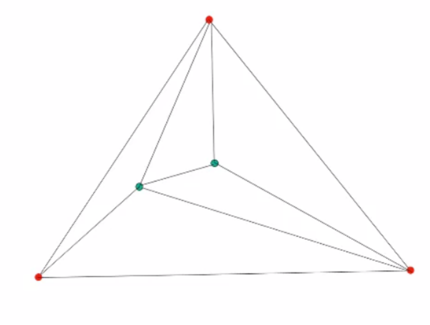
Algoritmo Incremental

Criar novos triângulos a partir do novo ponto. Agora, cada nova inserção exige verificar arestas ilegais.



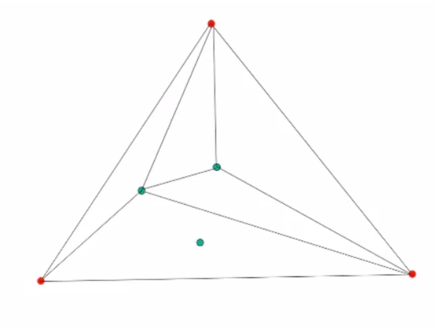
Algoritmo Incremental

Flipar a aresta.



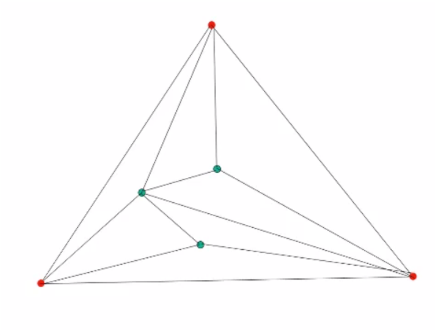
Algoritmo Incremental

Escolhendo outro ponto aleatório.



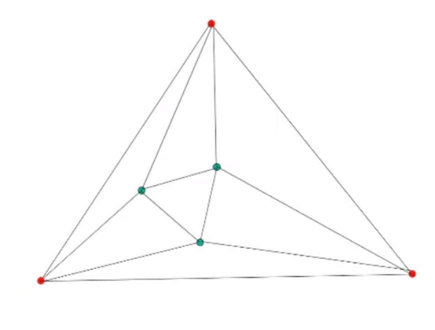
Algoritmo Incremental

Adicionando arestas.



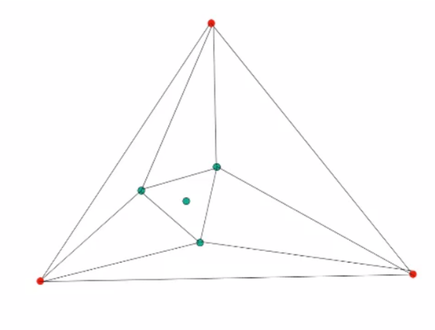
Algoritmo Incremental

Testar arestas ilegais e realizar o *flip*.



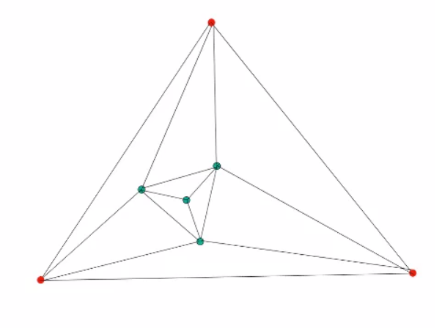
Algoritmo Incremental

Escolhendo aleatoriamente outro ponto.



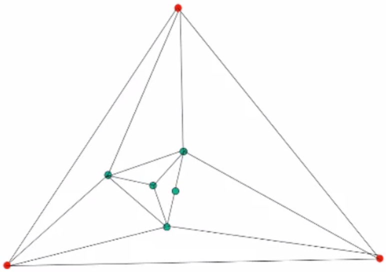
Algoritmo Incremental

Criando arestas e verificando arestas ilegais.



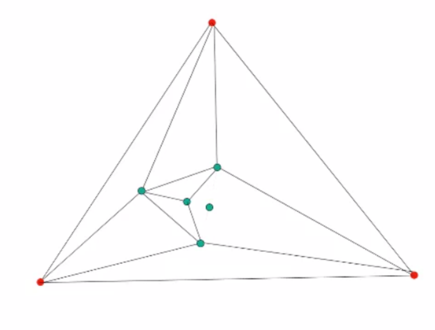
Algoritmo Incremental

E se um novo ponto “cair” em uma aresta?



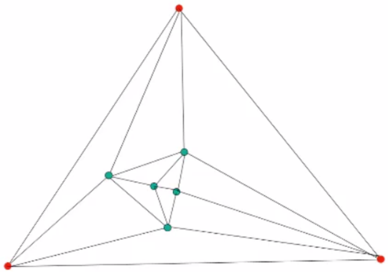
Algoritmo Incremental

Primeiro, remover a aresta na qual o novo ponto caiu.



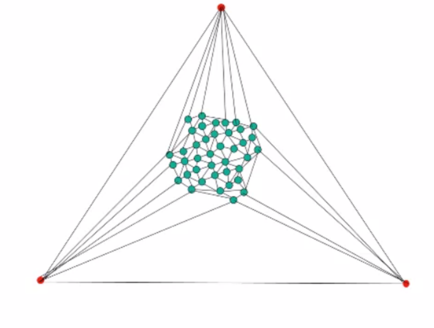
Algoritmo Incremental

Em seguida, adicionar novas arestas para criar quatro novos triângulos. Testar se há arestas ilegais.



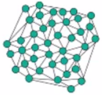
Algoritmo Incremental

Repetir todo o processo até incluir todos os pontos de S.



Algoritmo Incremental

Enfim, remover os vértices e arestas relacionados ao triângulo maior



Algoritmo Incremental I

Algoritmo: TriangulacaoDelaunay(S)

Input: Conjunto S de n pontos.

Output: Triangulação de Delaunay de S.

- Escolha três pontos a, b, c para formar um triângulo contendo S
- Inicialize T com o triângulo a, b, c
- Repetir:
  - Selecionar aleatoriamente um ponto p de S
  - Encontre um triangulo d, e, f que contém p
  - Se p está no interior do triangulo d, e, f, então:

Algoritmo Incremental II

    - Adicionar arestas a partir de p para criar três triângulos
    - Legalizar as arestas criadas
  - Senão:
    - Remover a aresta em que p caiu
    - Criar quatro novos triângulos a partir de p
    - Legalizar as arestas criadas
- Até selecionar todos os pontos
- Remover a, b, c e as arestas relacionadas.

Algoritmo Incremental

- O pior caso do algoritmo é $O\left(n^2\right)$.
- O caso médio é $O(n \log n)$.
- Na prática é muito utilizado.

Visão Geral dos Algoritmos

Algoritmo Flip:

- Complexidade: $O\left(n^2\right)$.
- Vantagem: Fácil de implementar.
- Desvantagem: Ineficiente para grandes conjuntos.

Algoritmo Incremental:

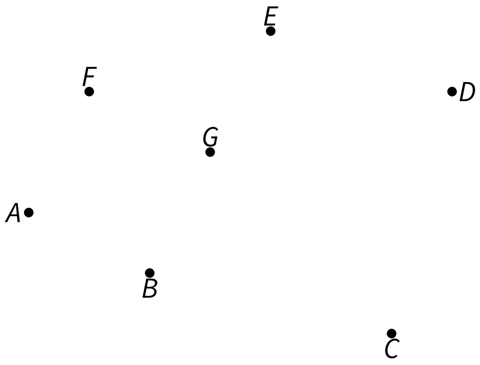
- Complexidade: $O\left(n^2\right)$, porém $O\left(n \log n\right)$ no caso médio.
- Vantagem: Fácil de implementar e eficiente na prática.
- Desvantagem: Difícil paralelização.

Material de base para a aula

- M. Berg, O. Cheong, M. Kreveld, M. Overmars. Computational Geometry: Algorithms and Applications. 3rd Edition. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997. Capítulo 9: Delaunay Triangulation.
- P. C. P. Carvalho e L. H. de Figueiredo, Introdução à Geometria Computacional, 18° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1991. Capítulo 4 – Triangulação.
- Computação Gráfica: Aula 05. Slides de Ricardo M. Marcacini. Disciplina SCC0250/0650, ICMC/USP, 2021.

Exercício complementar

Encontre uma Triangulação de Delaunay para o conjunto de pontos:



$$A = (0, 2)$$
$$B = (2, 1)$$
$$C = (6, 0)$$
$$D = (7, 4)$$
$$E = (4, 5)$$
$$F = (1, 4)$$
$$G = (3, 3)$$