Universidade de São Paulo
Instituto de Ciências Matemáticas e Computação
Aluno: Gustavo Siqueira Barbosa
Nº Usp: 10728122

Semestre 1, 2022
Lista 01

SCC0250: Computação Gráfica
Lista 01

Para as seguintes questões, $M = 6$, $D = 15$.

1 Questão 01

Apresente a matriz que representa uma transformação consistindo de uma translação seguida de uma rotação.

Nesta questão, trabalharemos com um sistema de 3 dimensões.

Matriz de translação:

$$M_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rotação em torno do eixo z:

$$M_r = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo T as coordenadas iniciais, temos:

$$T' = (M_r \cdot M_t)T$$

A matriz de transformação final M é

$$M = M_r \cdot M_t$$

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz final é:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & t_x\cos\theta - t_y\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & t_x\sin\theta + t_y\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 Questão 02

Apresente a matriz que representa uma transformação consistindo de uma translação $tx = M$ e $ty = D$ seguida de uma escala uniforme $s = 2$.

Nesta questão, trabalharemos com um sistema de duas dimensões.

Matriz de translação no eixo x:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & M \\ 0 & 1 & D \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformação de escala uniforme $s = 2$:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz transformação final T seria, portanto:

$$T_f = S \cdot T$$

$$T_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \cdot 6 \\ 0 & 2 & 2 \cdot 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 30 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 Questão 3

Verifique se $R(M+D)$ irá obter a mesma matriz de transformação que $R(M) \cdot R(D)$.

Nesta questão, trabalharemos com um sistema de duas dimensões.

Assumindo a matriz R como uma matriz de rotação padrão para um ângulo θ. Sendo $R_1 = R(M) + R(D)$ e $R_2 = R(M+D)$:

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos 6 & -\sin 6 & 0 \\ \sin 6 & \cos 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 15 & -\sin 15 & 0 \\ \sin 15 & \cos 15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos 6 \cos 15 - \sin 6 \sin 15 & -\cos 6 \sin 15 - \cos 15 \sin 6 & 0 \\ \sin 6 \cos 15 + \cos 6 \sin 15 & \cos 6 \cos 15 - \sin 6 \sin 15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pelas propriedades de identidade trigonométrica:

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos(6+15) & -\sin(6+15) & 0 \\ \sin(6+15) & \cos(6+15) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos(21) & -\sin(21) & 0 \\ \sin(21) & \cos(21) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $M + D = 15 + 6 = 21$:

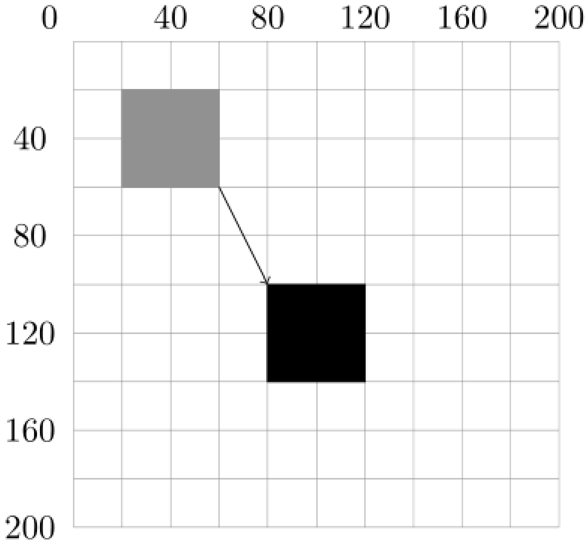
$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos(21) & -\sin(21) & 0 \\ \sin(21) & \cos(21) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore R_1 = R_2$$

Nota-se que as matrizes são iguais.

4 Questão 4

Forneçaa a matriz de transformação que realiza a transformação abaixo (a seta indica o objeto inicial e o final após a transformação). Em seguida, apresente as coordenadas do objeto para uma escala uniforme $s = M$.



A figura mostrada na imagem sofre uma translação. Sendo o vetor P referente à sua posição inicial e P' à sua posição final, temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pela figura, vemos que o deslocamento $t_x = 80 - 20 = 60$ e $t_y = 100 - 20 = 80$. Portanto, a matriz de translação é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 80 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a a matriz de escala, temos:

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 80 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $s = M = 6$.

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 60 \cdot 6 \\ 0 & 6 & 80 \cdot 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 360 \\ 0 & 6 & 480 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 360 \\ 0 & 6 & 480 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 360 \\ 0 & 6 & 480 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6x + 360 \\ 6y + 480 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sendo $(x, y) = (20, 20)$ sua posição inicial. Portanto, a posição final é $(480, 600)$.

5 Questão 5

Abaixo é apresentada a matriz resultante de quatro transformações. Aplique esta transformação em triângulo ABC (A = (0, 0), B = (1, 0), C = (0, 1)) e mostre o resultado (novos vértices e o desenho). Em seguida, faça uma translação $t_x = \frac{M}{10}$ e $t_y = \frac{M}{10}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -1 & 3 \\ 1.6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a transformação acima a cada um dos pontos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -1 & 3 \\ 1.6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Vértice A:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -1 & 3 \\ 1.6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Vértice B:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -1 & 3 \\ 1.6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

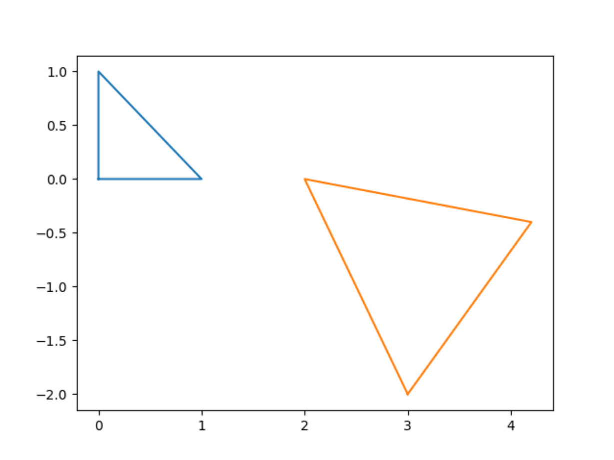
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.2 \\ -0.4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Vértice C:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -1 & 3 \\ 1.6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

As coordenadas nos vértices do triângulo após as transformações são, portanto, $A = (3, -2), B = (4.2, -0.4)$ e $C = (2, 0)$. Representando graficamente, temos:



sendo o triângulo azul o original e o laranja após as transformações.

Aplicando a translação $t_x = \frac{6}{10}$ e $t_y = \frac{6}{10}$ aos novos vértices:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{10} \\ 0 & 1 & \frac{6}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Vértice A:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{10} \\ 0 & 1 & \frac{6}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6 \\ -1.4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Vértice B:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{10} \\ 0 & 1 & \frac{6}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.2 \\ -0.4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

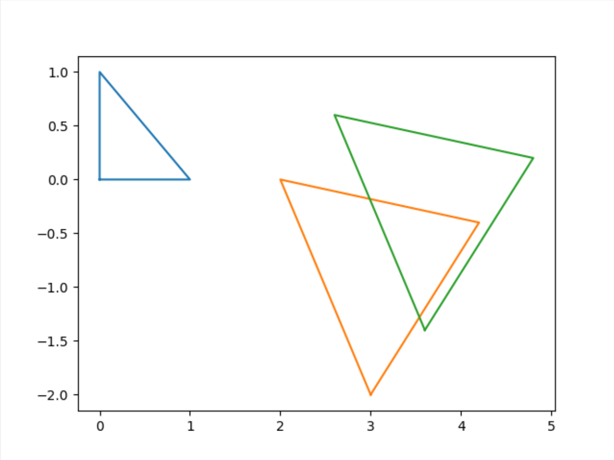
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.8 \\ 0.2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Vértice C:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{10} \\ 0 & 1 & \frac{6}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6 \\ 0.6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

As coordenadas finais dos vértices do triângulo são: $A = (3.6, -1.4), B = (4.8, 0.2)$ e $C = (2.6, 0.6)$.



sendo o triângulo verde o resultado da translação.

6 Questão 6

Mostre que a ordem das transformações pode modificar a matriz de transformação resultante (problema da comutatividade). Obs.: É suficiente fornecer um exemplo.

Para $T_1 = A \cdot B$:

$$T_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} x_1y_1 + x_2y_3 & x_1y_2 + x_2y_4 \\ x_3y_1 + x_4y_3 & x_3y_2 + x_4y_4 \end{bmatrix}$$

Para $T_2 = B \cdot A$:

$$T_2 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} y_1x_1 + y_2x_3 & y_1x_2 + y_3x_4 \\ y_3x_1 + y_4x_3 & y_3x_2 + y_4x_4 \end{bmatrix}$$

$$T_1 \neq T_2$$

As matrizes são diferentes, portanto a comutatividade não se aplica necessariamente.

- Exemplo: translação e rotação:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x\cos\theta - t_y\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & t_x\sin\theta + t_y\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 \neq M_2$$

7 Questão 7

As transformações de rotação e escala são comutativas entre si?

Verifiquemos para T_1:

$$T_1 = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & 0 \\ s\sin\theta & s\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para T_2:

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & 0 \\ s\sin\theta & s\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = T_2$$

Apesar da operação de multiplicação de matrizes não ser comutativa, entre as matrizes de rotação e escala, o resultado final **não** muda.

8 Questão 08

As transformações de translação e escala são comutativas entre si? E entre translação e rotação?

Sejam T a matriz de translação, R a matriz de rotação e S a matriz de escala.

- Translação e escala:

$$M_1 = T \cdot S$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} s & 0 & t_x \\ 0 & s & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = S \cdot T$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} s & 0 & s \cdot t_x \\ 0 & s & s \cdot t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 \neq M_2$$

- Translação e rotação:

$$M_3 = T \cdot R$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = R \cdot T$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

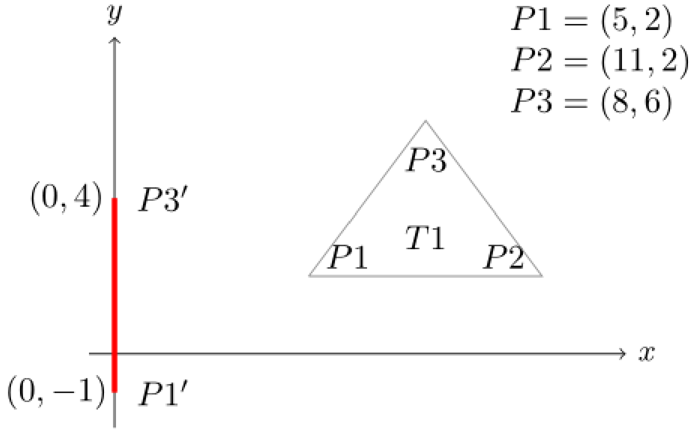
$$M_4 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x\cos\theta - t_y\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & t_x\sin\theta + t_y\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_3 \neq M_4$$

Portanto, nenhuma das apresentadas transformações é comutativa.

9 Questão 09

Forneça a sequência de transformações que leva os pontos $P1$ e $P3$ do triângulo $T1$ às posições descritas em $P1'$ e $P3'$, dê a matriz resultante e as coordenadas do triângulo $T2$.



Para realizar a transformação desejada, podemos:

1. Transladar o triângulo de maneira que $P3$ se situe na origem $(0,0)$
2. Rotacionar a figura pela metade do ângulo em $P1P3P2$
3. Transladar o triângulo de maneira que $P3$ se situe em $(0,4)$

Translação até a origem do vértice $P3$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & t_x\\0 & 1 & t_y\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\6\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 8+t_x\\0 & 1 & 6+t_y\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Temos, então, que $t_x = -8$ e $t_y = -6$. Aplicando esta transformação aos pontos $P1$ e $P2$, obtemos que as coordenadas de tais pontos após a transformação passam a ser $P1_2 = (-3,-4)$ e $P2_2 = (3,-4)$.

Pelo valor dos lados do triângulo, concluímos que o ângulo do triângulo no ponto $P3$ equivale a $\theta = 73.74^{\text{o}}$. Aplicando a rotação de $\frac{\theta}{2}$ nos pontos $P1_2$ e $P2_2$:

- $P1_2$

$$\begin{bmatrix}\cos 36.87 & -\sin 36.87 & 0\\\sin 36.87 & \cos 36.87 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\-4\\1\end{bmatrix}$$

Isto resulta em $P1_3 = (0,-5)$

- $P2_2$

$$\begin{bmatrix} \cos 36.87 & -\sin 36.87 & 0 \\ \sin 36.87 & \cos 36.87 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

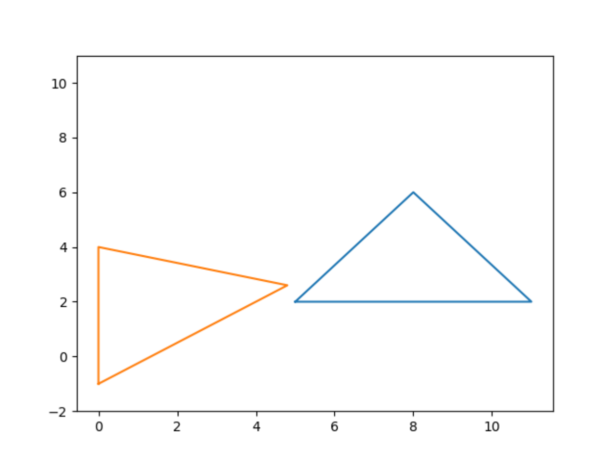
Isto resulta em $P2_3 = (4.8, -1.4)$

Por fim, basta trasladar o triângulo de maneira que $P3_2$ seja posicionado em $P3'$. A matriz de translação necessária é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A aplicando aos outros pontos, temos:

- $P1' = (0, -1)$
- $P2' = (4.8, 2.6)$
- $P3' = (0, 4)$



10 Questão 10

Seja um quadrado de lado $L = 5$, inicialmente posicionado em $x = M$ e $y = D$. Calcule e apresente a matriz de transformação que faça o quadrado rotacionar 45º em relação ao seu próprio centro. Apresente os vértices iniciais e finais do quadrado.

Pela descrição, temos que a origem do quadrado se encontra em $P1 = (6, 15)$. Desta forma, podemos assumir que os outros pontos deste quadrado são: $P2 = (6, 20), P3 = (11, 20), P4 = (11, 15)$.

A matriz de rotação R trata-se da matriz de rotação 2D apresentada em questões anteriores, com $\theta = 45$. Como a rotação requisitada é ao redor do centro do quadrado, devemos primeiro realizar uma translação do objeto, de maneira que seu centro se situe na origem, para então aplicar a rotação e retorná-lo à sua posição original. Como a posição inicial do quadrado é $P = (M, D) = (6, 15)$ e seu lado é $L = 5$, devemos transladá-lo de forma que sua posição de rotação seja $(6 - \frac{L}{2}, 15 - \frac{L}{2})$. Desta forma, a matriz de tranformação final T é:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 + 2.5 \\ 0 & 1 & 15 + 2.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(6 + 2.5) \\ 0 & 1 & -(15 + 2.5) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8.5 \\ 0 & 1 & 17.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8.5 \\ 0 & 1 & -17.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 8.5 - 8.5\cos 45 + 17.5\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 & 17.5 - 17.5\cos 45 - 8.5\sin 45 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 8.5(1 - \cos 45) + 17.5\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 & 17.5(1 - \cos 45) - 8.5\sin 45 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a matriz T em P, sendo P a posição inicial do quadrado, temos:

$$P' = T \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 8.5(1 - \cos 45) + 17.5\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 & 17.5(1 - \cos 45) - 8.5\sin 45 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos 45 - y\sin 45 + 8.5(1 - \cos 45) + 17.5\sin 45 \\ x\sin 45 + y\cos 45 + 17.5(1 - \cos 45) - 8.5\sin 45 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando no ponto $P1 = (6, 15)$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\cos 45 - 15\sin 45 + 8.5(1 - \cos 45) + 17.5\sin 45 \\ 6\sin 45 + 15\cos 45 + 17.5(1 - \cos 45) - 8.5\sin 45 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\frac{\sqrt{2}}{2} - 15\frac{\sqrt{2}}{2} + 8.5(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + 17.5\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 6\frac{\sqrt{2}}{2} + 15\frac{\sqrt{2}}{2} + 17.5(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) - 8.5\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(6 - 15 - 8.5 + 17.5) + 8.5 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(6 + 15 - 17.5 - 8.5) + 17.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.5 \\ -5\frac{\sqrt{2}}{2} + 17.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

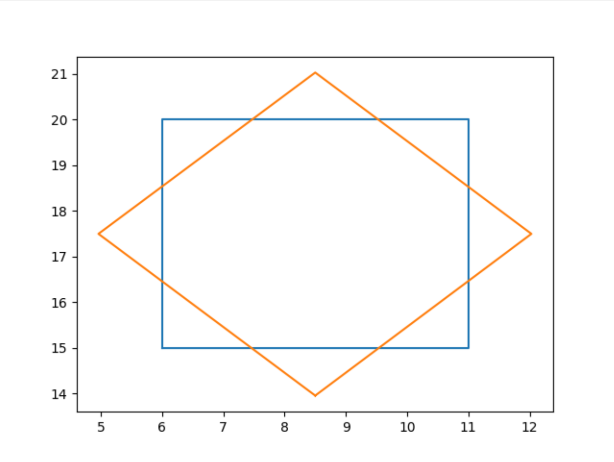
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 13.96 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a posição final é $P1' = (8.5, 13.96)$.

Analogamente, podemos calcular para os outros pontos, resultando em:

- $P1' = (8.5, 13.96)$
- $P2' = (4.96, 17.5)$
- $P3' = (8.5, 21.03)$
- $P4' = (12.03, 17.5)$

Representando graficamente, temos:



sendo o quadrado azul o original e o laranja o rotacionado.

11 Questão 11

Dado um vértice/ponto posicionado em $x = D$ e $y = M$, apresente as matrizes de transformação e o resultado das operações para:

a) espelhar este vértice em relação ao eixo X

b) espelhar este vértice em relação ao eixo Y

a) eixo X

Seja E_x a matriz de reflexão no eixo X. Temos:

$$E_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D \\ M \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ -M \\ 1 \end{bmatrix}$$

Substituindo $M = 6$ e $D = 15$, temos:

$$(x', y') = (15, -6)$$

b) eixo Y

Seja E_y a matriz de reflexão no eixo Y. Temos:

$$E_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto:

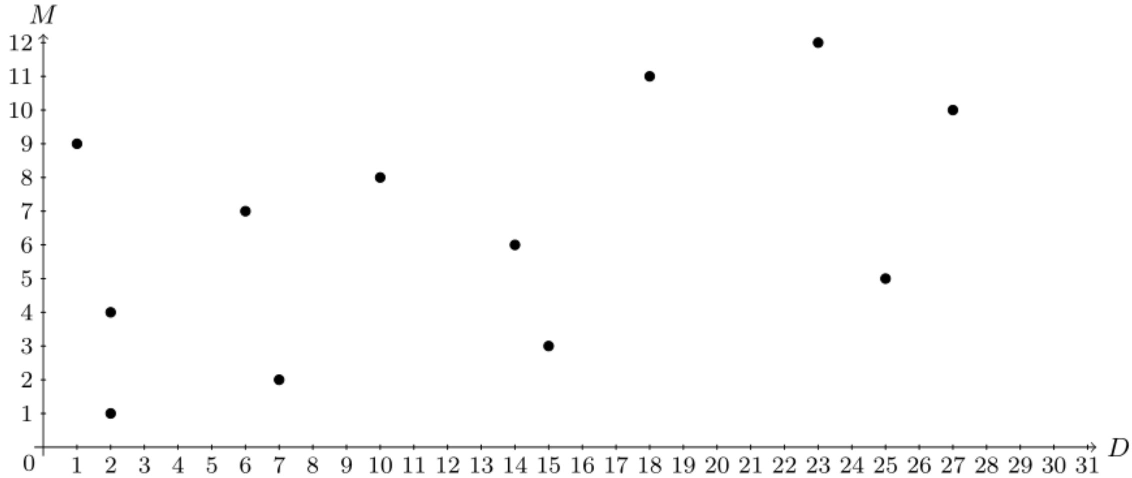
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D \\ M \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D \\ M \\ 1 \end{bmatrix}$$

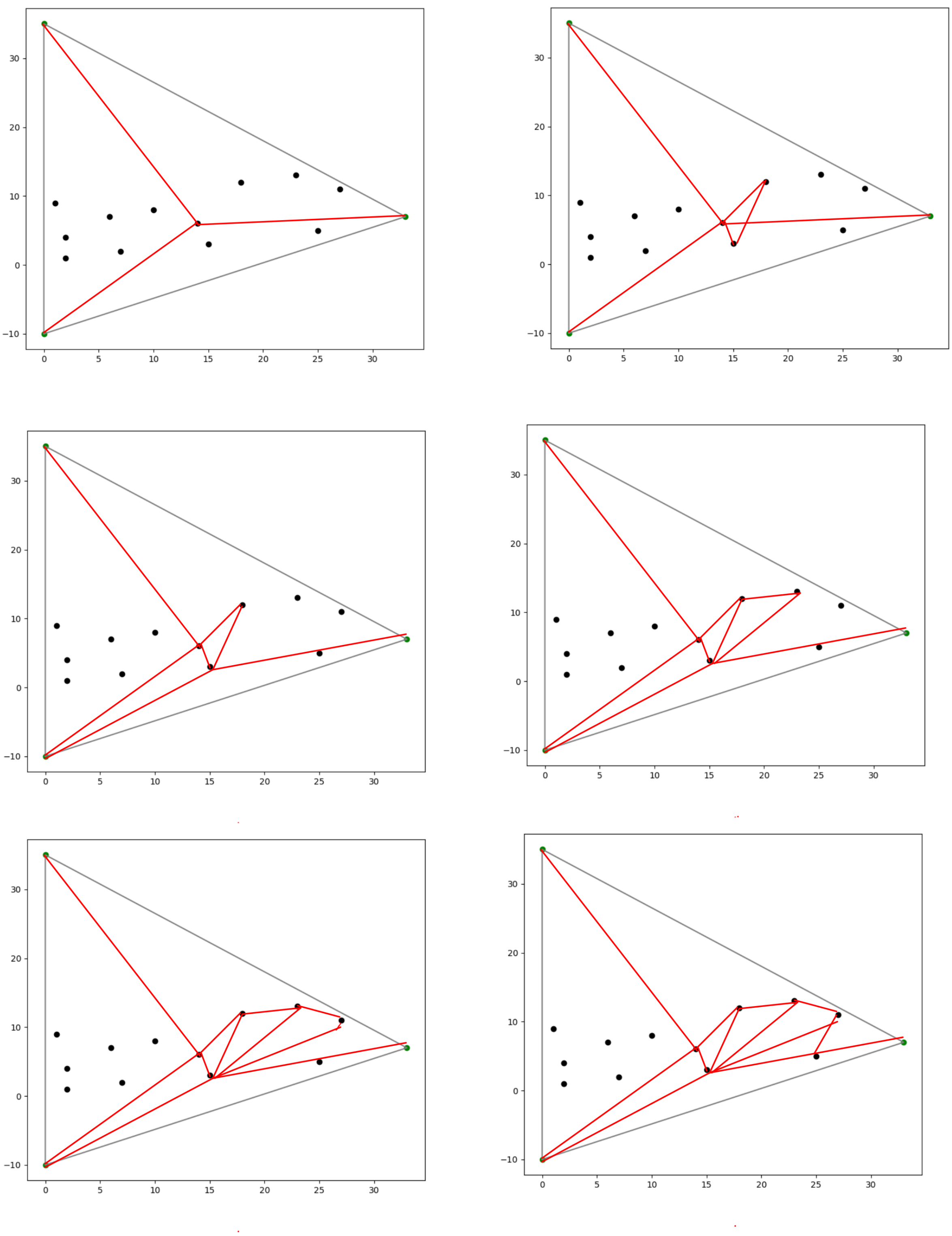
$$(x', y') = (-15, 6)$$

12 Questão 12

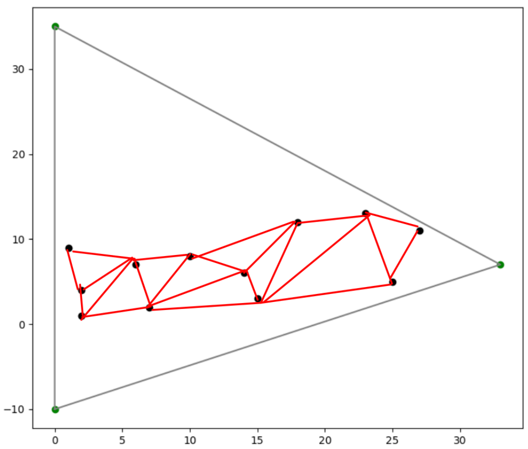
Na Figura abaixo são apresentados 12 pontos/vértices. O eixo x indica a variável D e o eixo y indica a variável M. Aplique a triangulação de Delaunay (algoritmo incremental). O primeiro ponto/vértice escolhido deve ser o mais próximo de seus valores D e M. Apresente os principais passos da triangulação. Não é necessário apresentar os testes para legalizar as arestas.

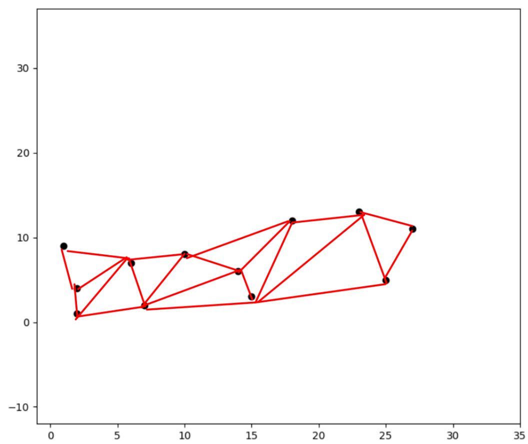


O ponto mais próximo de $(15, 6)$ é o ponto $(14, 6)$. Portanto:



30
20
10
0
−10
0 5 10 15 20 25 30


30
20
10
0
−10
0 5 10 15 20 25 30


30
20
10
0
−10
0 5 10 15 20 25 30 35