UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO – BACHARELADO

GERAÇÃO DE REDES COMPLEXAS COM COMUNIDADES SOBREPOSTAS E COMUNIDADES HIERÁRQUICAS

GUSTAVO HENRIQUE SPIESS

BLUMENAU
2022

GUSTAVO HENRIQUE SPIESS

GERAÇÃO DE REDES COMPLEXAS COM COMUNIDADES SOBREPOSTAS E COMUNIDADES HIERÁRQUICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de graduação em Ciências da Computação no Centro de de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Regional de Blumenau como requisito parcial para a obtenção de grau de Bacharel em Ciências da Computação.

Professor Aurelio Faustino Hoppe, Mestre - Orientador

BLUMENAU
2022

FOLHA DE ASSINATURAS

Dedico esse trabalho a minha noiva, cuja paciência em me ouvir falar desse trabalho tornou-o possível.

AGRADECIMENTOS

A meu padrinho, Maiko Rafael Spiess, pelo sempre presente incentivo ao estudo.

Ao meu orientador, Aurélio Faustino Hoppe, por acreditar na conclusão desse trabalho.

A minha família, por todos os anos de apoio que foram necessários para chegar até aqui.

Aos amigos que fiz no percurso do bacharelado, pelo apoio recebido.

Aos professores do Departamento de Sistemas e Computação da Universidade Regional de Blumenau por suas contribuições durante os semestres letivos.

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.”

Isaac Newton

RESUMO

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Palavras-chave: Redes complexas. Geração de redes complexas. Comunidades. Comunidades sobrepostas. Comunidades hierárquicas.

ABSTRACT

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Keywords: Complex networks. Complex networks generation. Communities. Overlapping communities. Hierarchical communities

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de grafo 16
Figura 2 – Exemplo de grafo com comunidades hierárquicas 21
Figura 3 – Demonstração dos resultados de diferentes algoritmos de detecção em um grafo com comunidades hierárquicas e com sobreposição 22
Figura 4 – Exemplo 24

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Função de modularidade Q 18
Quadro 2 – Função de modularidade estendida EQ 19
Quadro 3 – Coeficiente de clusterização C 20
Quadro 4 – Exemplo 24

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Exemplo 24

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IE – Internet Explorer

QE – Qternet Explorer

SUMÁRIO

1 Introdução **14**

1.1 Objetivos 15

1.2 Estrutura 15

2 Fundamentação teórica **16**

2.1 Redes complexas e comunidades 16

2.2 Outras propriedades de redes complexas 19

2.2.1 Mundo pequeno, Anexação preferencial e Liberdade de escala . . . 19

2.2.2 Cluster e comunidades 20

2.2.3 Homofilia e Homogeneidade de comunidades 21

2.2.4 Agrupamentos hierárquicos e sobreposições 22

3 Considerações finais **25**

Referências **26**

1 INTRODUÇÃO

Redes complexas, como definido por Metz et al. (2007), são grafos com uma topologia não trivial. Isso é, são grafos onde parte ou toda a informação de interesse está contida não nos vértices e arestas individualmente, mas em propriedades do conjunto de vértices e arestas.

Como apontado por Girvan e Newman (2002), um dos sistemas do mundo real que se pode modelar em uma rede complexa é o conjunto de relações sociais. Uma modelagem simplista desse sistema apresenta é a representação de cada indivíduo como um vértice, e vértices adjacentes sendo pares de indivíduos que se conhecem. Nesse tipo de sistema um sub grafo completo, denominado clique (FORTUNATO, 2010), pode ser interpretada como uma propriedade relevante a indicação de que desse conjunto de indivíduos onde todos conhecem todos.

Girvan e Newman (2002) também aponta que outros sistemas, como cadeias alimentares, cadeias de metabolização, redes de transmissão elétrica e redes de computadores podem ser representadas como redes complexas. Muitas vezes propriedades que se observam em redes complexas de um domínio estão presentes também nas redes complexas de outros domínios, mas com interpretações distintas sobre o objeto modelado. O trabalho de Fortunato (2010) indica isso na discussão de múltiplas interpretações do que constitui uma comunidade em uma rede complexa, dividindo-se principalmente em características estruturais, e por semelhança de vértice.

No exemplo do trabalho desenvolvido por Largeron et al. (2015), as duas interpretações se encontram presentes, como é característica da literatura a despeito da geração de redes complexas. Largeron et al. (2015) descreve o que é chamado na literatura de um modelo de geração algorítmica de redes complexas onde os vértices do grafo estão dispostos em uma nuvem de ponto e a distribuição deles em diferentes comunidades leva em conta sua posição espacial, e as arestas são construídas em função desse pertencimento a uma comunidade. Akoglu e Faloutsos (2009) descreve um modelo mais primitivo, que não realiza a atribuição explicita de comunidades, mas que gera um grafo com essas comunidades ainda assim.

Indica-se, observando o trabalho de Fortunato (2010) de que ha uma vasta literatura a respeito dos processos de detecção dessas comunidades. Oberando-se a literatura da qual os trabalhos de Largeron et al. (2015), Akoglu e Faloutsos (2009) e Slota et al. (2019), é indicada a existência dos modelos necessários para a geração de redes complexas com comunidades. No entanto propriedades adjacentes a presença de comunidades para os quais existe literatura a respeito da detecção, como comunidades hierárquicas e comunidades sobrepostas, parecem estar pouco presentes em modelos de geradores de redes complexas.

1.1 OBJETIVOS

Dado esse contexto, o objetivo do trabalho é a adaptação dos modelos presentes na literatura de geração de redes complexas para a incorporação de comunidades sobrepostas e comunidades hierárquicas.

Os objetivos específicos são:

a) A construção de um modelo algorítmico de geração de redes complexas que inclua a propriedade de comunidades.
b) A especificação, dentro desse modelo, de uma *ground truth* de quais vértices pertencem a quais comunidades.
c) A possibilidade, dentro desse modelo, de comunidades hierárquicas.
d) A possibilidade, dentro desse modelo, de comunidades sobrepostas.
e) A representação, dentro desse modelo, dos vértices como uma nuvem de pontos, para a definição de semelhança de vértices por distância.

1.2 ESTRUTURA

Esse trabalho se estrutura em quatro capítulos sendo o primeiro uma introdução aos temas abordados, bem como a apresentação dos objetivos do trabalho.

O segundo capítulo apresenta a fundamentação teórica da pesquisa, descrevendo o estado da arte do objeto de estudo.

O terceiro capítulo discute o desenvolvimento do modelo algorítmico proposto, incluindo ferramentas e técnicas utilizadas. Também são apresentados os blocos de pseudo código do modelo.

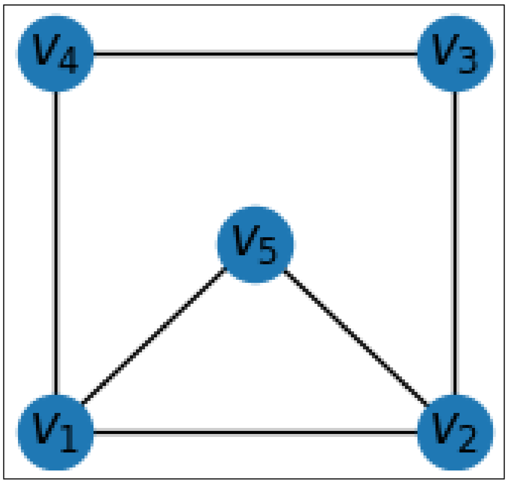
O quarto capítulo compõe os dados obtidos na avaliação dos resultados, bem como quaisquer discussões de implementações futuras ou outras formas de continuação.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 REDES COMPLEXAS E COMUNIDADES

Grafos podem trivialmente ser definidos como $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ onde $\mathcal{V}$ é um conjunto dos vértices de $\mathcal{G}$ e $\mathcal{E}$ é um conjunto de pares não ordenados de vértices ajacentes em $\mathcal{G}$, i.e. as arestas.

Figura 1 – Exemplo de grafo



Fonte: elaborado pelo autor

No exemplo da Figura 1, pode se representar o mesmo grafo com $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $\mathcal{E} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_5\}\}$. Dentro desse grafo, o subgrafo formato pelos vértices v_1, v_2 e v_5 é também um grafo completo. A esse conjunto de vértices que forma um subgrafo completo dá-se o nome de clique (FORTUNATO, 2010). Essa descrição de clique é utilizada como uma definição inicial do conceito de comunidade, partindo de uma perspectiva local (FORTUNATO, 2010). Dentro desse conceito de comunidade, nomeia-se as arestas cujos dois vértices estão contidos em uma comunidade como sendo interna á comunidade.

É facilmente observável, no entanto, que essa é uma definição muito limitante de comunidade, é raro que comunidades de pessoas apresentem tanta homogeneidade a ponto de todos os membros conhecerem todos os outros membros. De fato, Fortunato (2010) indica que a definição precisa do que é uma comunidade varia de acordo também com o contexto de estudo, mas que algumas características são universais. Uma comunidade, dentro de qualquer definição, deve ser um sub grafo conexo, por exemplo (FORTUNATO, 2010).

Algumas das definições alternativas de o que é uma comunidade podem ser expressas.

Largeron et al. (2015) define comunidade como uma classe de estrutura topológica comum a redes complexas, essas comunidades são categorizadas por terem uma densidade de vértices elevada. O trabalho de Shen et al. (2009) implica que comunidades sejam estruturas que contenham múltiplos cliques dentro de si, e que essas comunidades se dispões em uma estrutura recursiva. Akoglu e Faloutsos (2009) descreve comunidades como estruturas modulares, onde nodos de um vértice formam grupos distintos entre si por que os membros do grupo tem maior chance de estarem conectados entre si do que estarem conectar com membros de outros grupos. Girvan e Newman (2002) define "Cluster" e comunidade como duas propriedades distintas, o primeiro sendo a probabilidade de dois nodos ambos adjacentes a um terceiro serem também ajacentes entre si, e a segunda como sendo condutos de vértices densamente conectados entre si, e esparsamente conectados para além de si.

Todas essas definições apresentam características específicas relevantes para a aplicação em que foram utilizadas. As definições são agrupadas em três classes distintas por Fortunato (2010):

- Definição local
- Definição global
- Definição por similaridade de vértice

Essas definições não são mutuamente exclusivas, mas também não são ortogonais uma a outra. Segundo Fortunato (2010), a definição local parte das características topológicas internas á comunidade. Nominalmente, isso significa a existência de um conjunto considerável de arestas internas a comunidade e um conjunto limitado de arestas para além da comunidade.

A definição global de comunidades é aplicada aos casos onde a presença de clusters é uma característica inerente ao grafo que se está estudando Fortunato (2010). Essa propriedade inerente ao grafo pode ser definida como alguma propriedade dos vértices do objeto em questão e que partindo disso se atribui pertencimento á comunidades, ou ainda por comparação com um exemplo nulo Fortunato (2010). No caso de comparação com um exemplo nulo, define-se uma comunidade pela característica de uma não ser presente dentro de o que é chamado de "grafo aleatório" (FORTUNATO, 2010). Essa definição de um modelo nulo é crucial para o trabalho de Girvan e Newman (2002), o modelo nulo considerado é um onde o grafo original é alterado de forma aos graus de todos os vértices se manterem, mas a probabilidade de dois vértices estarem ligados é constante independente de quais os vértices.

A definição de comunidade por similaridade de vértice se baseia na tendencia de que em muitas aplicações, membros de comunidades são mais similares entre si do que seria esperado de um conjunto do mesmo tamanho escolhido aleatoriamente (FORTUNATO, 2010). Essa definição se faz visível no trabalhos de Akoglu e Faloutsos (2009) e de Largeron et al. (2015). Na observação desses dois trabalhos também é interessante o questionamento de como se define semelhança, Akoglu e Faloutsos (2009) representa os vértices como sequencias de caracteres de tamanhos variáveis em que a probabilidade de dois vértices estarem ligados é maior conforme mais caracteres eles compartilham; e Largeron et al. (2015) representa os vértices como pontos em um espaço n-dimensional e define que vértices são mais semelhantes quando a distância euclideana deles é menor.

Também independente de qual definição de comunidade que se esteja utilizando, existem os conceitos de partição e cobertura. Segundo Fortunato (2010), uma partição é uma divisão dos vértices de um grafo tal que cada vértice pertença a um e exatamente um cluster. O caso de um vértice “livre”, não pertencendo a nenhuma comunidade, é trivialmente resolvido incluindo ele á comunidade com a qual ele mais tem jacências. Mas o caso de vértices que pertençam a mais de uma comunidade, i.e. comunidade que se sobreponham, é mais interessante. Fortunato (2010) define uma cobertura como uma divisão dos vértices em clusters onde cada vértice pertence a um ou mais clusters. Fortunato (2010) também descreve o conceito de comunidades hierárquicas, como sendo comunidades cuja estrutura interna também se organiza em clusters de escala menor do que o original.

Fortunato (2010) oferece também o conceito de “função de qualidade”, sendo uma função que mapeia uma partição para um espaço de comparação, usualmente em números reais, onde partições que mapeiem para valores maiores são consideradas melhores. Segundo Fortunato (2010) função de qualidade mais comumente utilizada é a modularidade Q de Girvan e Newman (2002).

Quadro 1 – Função de modularidade Q

$$\boxed{Q = \frac{1}{2m} \sum_{ij} \left(A_{ij} - \frac{K_i K_j}{2m} \right) \delta(C_i, C_j)}$$

Fonte: Girvan e Newman (2002)

Essa função no entanto não se aplica adequadamente ao caso de comunidades sobrepostas ou comunidades hierárquicas, para tanto, é necessário utilizar a função de modularidade estendida, conforme desenvolvido por Shen et al. (2009).

Quadro 2 – Função de modularidade estendida EQ

$$EQ = \frac{1}{2m} \sum_{i} \sum_{v \in C_i, w \in C_i} \frac{1}{O_v O_w} \left[A_{vw} - \frac{K_v K_w}{2m} \right]$$

Fonte: Shen et al. (2009)

Tanto no caso da formula descrita no Quadro 1 quanto na do Quadro 2 a função definida é uma somatórias em que alguns termos se repetem. Primeiramente, é preciso descrever que a função $\delta(C_i C_j)$ retorna um se C_i for igual a C_j, e zero noutro caso (FORTUNATO, 2010). Considerando isso, no caso de uma partição (sem comunidades hierárquicas, e sem comunidades sobrepostas), as duas somatórias iteram sobre os mesmos valores, a primeira com os vértices i e j e a segunda com os vértices v e w.

Essa iteração olha para todos os pares de vértices que compartilham alguma comunidade, e soma o valor de A_{ij}, sendo A a tabela de adjacência do grafo em questão. Então é subtraído um valor ${}^{K_i K_j}/_{2m}$, onde K_i é o grau do vértice i e m é a quantidade de arestas no grafo ($2m$ portanto é a soma dos graus de todos os vértices). Esse valor é o a probabilidade de uma aresta entre os vértices i e j no modelo nulo de Girvan e Newman (2002), considerando que os graus se mantém mas que a probabilidade da presença de uma aresta é uniforme.

A formula EQ de Shen et al. (2009) no entanto contém também o termo escalar ${}^{1}/_{O_v O_w}$, nesse caso o valor O_i é a quantidade de comunidades a qual pertence o vértice i. Isso permite a aplicação da modularidade estendida para os casos de grafos com comunidades sobrepostas. Vértices que estejam em duas comunidades contribuirão para a modularidade a partir das duas, mas tendo a magnitude da sua contribuição escalada à metade.

2.2 OUTRAS PROPRIEDADES DE REDES COMPLEXAS

Para além da presença de estruturas topológicas que podem ser denominas comunidades, redes complexas tem algumas propriedades topológicas bastante comuns e relevantes. São algumas delas:

2.2.1 Mundo pequeno, Anexação preferencial e Liberdade de escala

Largeron et al. (2015) descreve a propriedade de mundo pequeno como a característica de um sistema de ter um diâmetro loga ritmicamente proporcional a quantidade de vértices em um grafo. Isso é, a distancia entre os dois vértices que estão a mais arestas de distância, denominada diâmetro, cresce logaritmicamente conforme observamos exemplos maiores de grafos do sistema. Essa propriedade implica que em sistemas bastante grandes, é preciso uma quantidade relativamente pequena de saltos de nodo a nodo para se atingir qualquer membro do grafo.

Largeron et al. (2015) define a anexação preferencial como uma propriedade de um sistema em que vértices tendem a se ligar com outros vértices que sejam parecidos e que tenham grau elevado. Essa propriedade encontra-se presente também no trabalho Slota et al. (2019). Em ambos os casos, a implicação é que dado um sistema onde se vai adicionar um vértice, a maior parte das arestas desse novo vértice devem ligá-lo a outro com grau igual ou maior do que o próprio.

Para atingir essa distribuição característica o modelo de Slota et al. (2019) faz com que os vértices se dividam em diferentes escalas, de forma que os vértices de uma escala se liguem apenas entre si e com os membros das escalas imediatamente vizinhas. De grafos com essa distribuição onde o grau relativo de dois vértices adjacentes tende a não apresentar saltos demasiadamente grandes, se diz que são livres de escala (LARGERON et al., 2015).

Essas e uma série de outras proporcionalidades são comumente encontradas em redes complexas. Outros exemplos de proporcionalidades conhecidas na literatura envolvem os pesos das arestas de um vértice, a proporção de vértices e arestas do grafo e a já citada distribuição dos graus, todas são leis de potência (AKOGLU; FALOUTSOS, 2009).

2.2.2 Cluster e comunidades

Girvan e Newman (2002) diferencia explicitamente entre a definição de clusters e de comunidades. No trabalho seminal os autores apontam um cluster como sendo um triângulo, um em outras palavras um subgrafo completo com três vértices. Essa definição aparentemente arbitrária é relevante no entendimento do coeficiente de clusterização:

Quadro 3 – Coeficiente de clusterização C

$$\boxed{C = \frac{3 \times (\text{número de triângulos do grafo})}{(\text{número de triplas conexas do grafo})}}$$

Fonte: Girvan e Newman (2002)

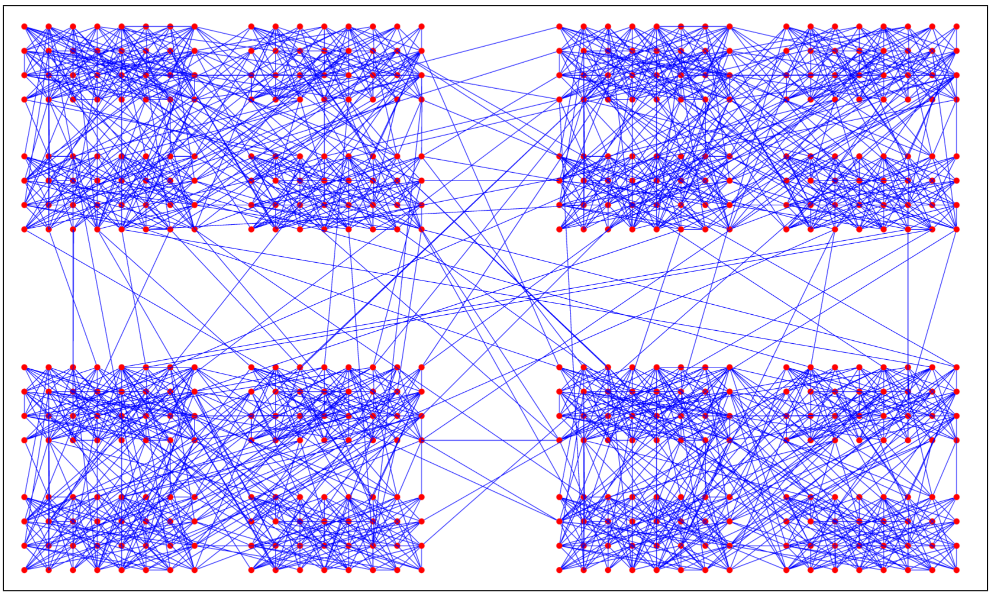
A conceitualização de um cluster é relevante dentro do estudo de redes complexas na medida em que a implicação é de dois vértices serem ligados por compartilharem uma relação com um terceiro. O coeficiente C sendo igual a 1 implica que o grafo é um grafo completo (GIRVAN; NEWMAN, 2002). Mais que isso, esse coeficiente, dado um vértice, é a probabilidade de quaisquer dois vértices adjacentes a ele serem adjacentes entre si.

2.2.3 Homofilia e Homogeneidade de comunidades

Conforme foi discutida quanto a definição de comunidades por semelhança de vértices, é de se esperar que vértices adjacentes compartilhem características. A essa preferência se dá o nome de homofilia (SLOTA et al., 2019). Essa definição de semelhança é deliberadamente vaga, pois dentro de sistemas distintos é trivial imaginar funções de compatibilidade distintas. Independentemente disso, observa-se que em grafos obtidos observando sistemas do mundo real, não raro as arestas tornam ajacentes vértices que otimizam alguma função de proximidade, (LARGERON et al., 2015).

Homofilia como propriedade é intimamente ligada a uma outra característica que se observa de grafos do mundo real, em diferentes aplicações as comunidades tendem a ser mais homogêneas do que o grafo ao qual pertencem (LARGERON et al., 2015). Pode-se afirmar que um grafo onde isso ocorra tem a propriedade de "comunidades homogêneas".

Figura 2 – Exemplo de grafo com comunidades hierárquicas



Fonte: Fortunato (2010)

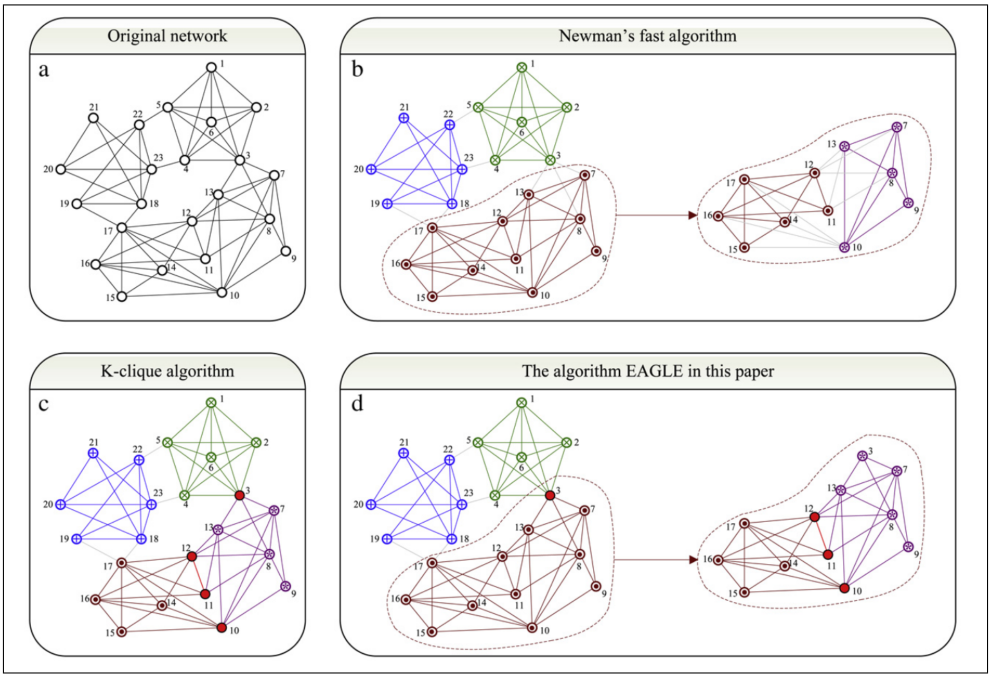
O exemplo da Figura 2 demonstra como a homofilia as vezes pode ter a presença visualmente verificada. Se considerarmos que a posição dos vértices na imagem corresponde a duas características ortogonais, a distância entre os vértices pode ser interpretada como uma função de similaridade de dois vértices. Nesse caso é intuitivamente entendido que vértices mais parecidos de conectam mais do que vértices mais dissemelhantes.

2.2.4 Agrupamentos hierárquicos e sobreposições

No exemplo de grafo da Figura 2 é possível demonstrar um entendimento intuitivo de como comunidades se organizam. A estrutura topológica de grupos densamente conectados fica visualmente identificável, onde cada quadrante contém uma comunidade coesa. Também visualmente acessível, cada comunidade desse exemplo tem uma estrutura interna auto semelhante.

Essa construção de estruturas topológicas recursivas é denominada por Girvan e Newman (2002) como "meta grupo", onde as propriedade topológicas relativas a agrupamentos podem ser encontradas se repetindo em em escalas menores dentro das componentes de escalas maiores. Comunidades podem funcionalmente ser compostas por comunidades menores. Esse mesmo conceito recebe uma outra nomenclatura nos trabalhos de Largeron et al. (2015), Shen et al. (2009) e Fortunato (2010), onde são descritas como comunidades hierárquicas.

Figura 3 – Demonstração dos resultados de diferentes algoritmos de detecção em um grafo com comunidades hierárquicas e com sobreposição



Fonte: Shen et al. (2009)

Essas estruturas seguem uma característica recursiva, como demonstrado pelo processo de detecção proposto por Shen et al. (2009), podendo ser concebidos exemplos de sistemas com qualquer sorte de diferentes níveis. E a elas também se aplica a compreensão de partição ou cobertura, na Figura 2 as comunidades de primeiro e de segundo nível caracteristicamente não compartilham vértices. No caso do que demonstra Shen et al. (2009) não só é possível que um vértice pertença a duas comunidades, é possível que ele pertença a duas comunidades de níveis distintos. Na Figura 3, os resultados de Shen et al. (2009) são demonstrados no quadro a respeito do algoritmo EAGLE, o vértice denotado como 3 é compartilhado entre duas comunidades de primeira ordem, mas em uma delas o vértice 3 encontra-se como membro de uma comunidade de segunda ordem.

Ressaltando que a exata definição de comunidade é altamente dependente do contexto (FORTUNATO, 2010), parece ser consenso na literatura que quando se consideram comunidades hierárquicas, todos os membros de uma comunidade de primeiro nível, devem fazer parte de uma das comunidades que compõe a primeira, como observado nos trabalhos de Fortunato (2010) e Shen et al. (2009). I.e.: nenhum vértice pertence exclusivamente a uma comunidade sem pertencer a alguma das sub comunidades. Alternativamente claro, o exemplo da Figura 3 mostra que a implementação de Girvan e Newman (2002) (quadrante superior direito) é capaz de produzir partições recursivas (note-se a distinção entre uma cobertura e uma partição).

Essa distinção entre cobertura e grafo implica também na definição de comunidades sobrepostas. Em sistemas do mundo real que produzem redes complexas, é bastante natural que comunidades compartilhem vértices, pois não raro alguma parte de um sistema é componente em dois grupos estruturalmente significantes (SHEN et al., 2009). Diz-se de duas comunidades que compartilham vértices que elas são comunidades sobrepostas sobrepostas.

O método de detecção de comunidades por K-cliques oferece alguma inspiração no entendimento das propriedades de comunidades sobrepostas. Fortunato (2010) descreve que a forma como esse método trabalha é pivotando subgrafos completos do grafo. Isso é, dado que um K-clique é um subgrafo completo de k vértices, de dois k-cliques compartilham $k-1$ vértices, eles devem de fazer parte da mesma comunidade. Armado desse conhecimento, é possível desenhar que uma cobertura ideal deveria priorizar comunidades com grandes subgrafos completos internamente, mas de que os vértices da intersecção de duas comunidades deveriam de participar de k-cliques distintos, preferencialmente não estando anexos. A ideia por de trás disso é que se a intersecção de duas comunidades deveria ser parte da periferia das respectivas comunidades (FORTUNATO, 2010). Se a intersecção fosse tão densamente conexa quando o centro das duas comunidades, esses vértices não seriam mais valore intersectados entre duas comunidades distintas, e as comunidades seriam uma apenas.

Figura 4 – Exemplo

Lorem

Quadro 4 – Exemplo

Lorem

Tabela 1 – Exemplo

Lorem

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

> Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

REFERÊNCIAS

AKOGLU, L.; FALOUTSOS, C. Rtg: A recursive realistic graph generator using random typing. In: SPRINGER. *Joint European Conference on Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases*. [S.l.], 2009. p. 13–28. Citado 4 vezes nas páginas 14, 17, 18 e 20.

FORTUNATO, S. Community detection in graphs. *Physics reports*, Elsevier, v. 486, n. 3-5, p. 75–174, 2010. Citado 8 vezes nas páginas 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22 e 23.

GIRVAN, M.; NEWMAN, M. E. Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the national academy of sciences*, National Acad Sciences, v. 99, n. 12, p. 7821–7826, 2002. Citado 8 vezes nas páginas 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22 e 23.

LARGERON, C. et al. Generating attributed networks with communities. *PloS one*, Public Library of Science, v. 10, n. 4, p. e0122777, 2015. Citado 7 vezes nas páginas 14, 17, 18, 19, 20, 21 e 22.

METZ, J. et al. Redes complexas: conceitos e aplicações. São Carlos, SP, Brasil., 2007. Citado na página 14.

SHEN, H. et al. Detect overlapping and hierarchical community structure in networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 388, n. 8, p. 1706–1712, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 17, 19, 22 e 23.

SLOTA, G. M. et al. Scalable generation of graphs for benchmarking hpc community-detection algorithms. In: *Proceedings of the International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*. [S.l.: s.n.], 2019. p. 1–14. Citado 3 vezes nas páginas 14, 20 e 21.