

# Relatório Final

Gustavo Torres

Mateus Nakajo

10 de abril de 2016

## 1 Introdução

Muitos dos fenômenos do Universo podem ser modelados matematicamente por equações diferenciais, o problema da curva de perseguição é um exemplo de tal fenômeno. Ele é um modelo que se baseia em uma partícula que descreve uma trajetória bem definida, o perseguido, e uma outra partícula, o perseguidor, que sempre se move em direção à primeira, descrevendo uma perseguição.

Esta curva foi proposta pelo matemático Pierre Bouguer em 1732 e foi, em 1859, melhor estudada pelo matemático George Boole, que a batizou como “curva de perseguição”. A ideia por trás dos conceitos do sistema é de grande interesse para aplicações reais e pode ser utilizada para modelar sistemas mais concretos e complexos.

A motivação para o estudo deste tipo de curvas é uma análise prévia da trajetória de elementos que sabemos que descreverão uma perseguição, e.g., um foguete cujo destino é um satélite em órbita, para alcançá-lo, ele deverá “perseguir” o satélite. Portanto, a modelagem matemática pode ser utilizada e adaptada para um modelo mais complexo de perseguição, e assim calcular o caminho que o foguete deve percorrer. Na área de computação, o modelo também aparece, como por exemplo em jogos eletrônicos, nos quais o jogador deve fugir dos vilões que o perseguem.

Nas seguintes seções iremos apresentar o modelo matemático que descreve a trajetória do perseguidor e a dedução deste modelo, a discretização para três trajetórias diferentes do perseguido, e os resultados e conclusões obtidos a partir da resolução numérica dos modelos discretizados.

## 2 Modelagem matemática

O modelo da curva de perseguição é descrita a partir de duas restrições[2]: (I) *o perseguidor sempre se move em direção ao perseguido*, e (II) *a velocidade do perseguidor é proporcional à velocidade do perseguido*.

Para obtermos a equação diferencial que rege o sistema, utilizaremos a seguinte notação:

- $\mathbb{U}(t) = (u_x(t), u_y(t)) = (x(t), y(t))$  é o vetor posição do **perseguidor** no instante de tempo  $t$ , com componentes  $u_x(t)$  e  $u_y(t)$  nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.
- $\mathbb{V}(t) = (v_x(t), v_y(t))$  é o vetor posição do **perseguido** no instante de tempo  $t$ , com componentes  $v_x(t)$  e  $v_y(t)$  nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.
- $\hat{s}(t)$  é o vetor unitário paralelo ao vetor  $\mathbb{S}(t)$ .
- $\mathbb{S}'(t) = (s'_x(t), s'_y(t))$ , onde  $s'_x$  e  $s'_y$  são as derivadas em relação ao tempo das componentes de  $\mathbb{S}$ .
- $\|\mathbb{S}\| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$  é o módulo do vetor  $\mathbb{S}$ .

A ordem da equação resultante depende da dimensão do vetor  $\mathbb{U}$ . Neste relatório utilizaremos apenas duas dimensões, o que produz uma EDO de segunda ordem.

A restrição (I) pode ser descrita matematicamente por:

$$\hat{u}(t) = \frac{\mathbb{V}(t) - \mathbb{U}(t)}{\|\mathbb{V}(t) - \mathbb{U}(t)\|} \quad (1)$$

$$\frac{\mathbb{U}(t)}{\|\mathbb{U}(t)\|} = \frac{\mathbb{V}(t) - \mathbb{U}(t)}{\|\mathbb{V}(t) - \mathbb{U}(t)\|} \quad (2)$$

A restrição (II), por sua vez, é descrita por:

$$\|\mathbb{U}'(t)\| \propto \|\mathbb{V}'(t)\| \quad (3)$$

$$\|\mathbb{U}'(t)\| = k\|\mathbb{V}'(t)\|, \quad k \in \mathbb{R}_+ \quad (4)$$

Onde  $k$  é a constante de proporcionalidade entre as velocidades do perseguidor e do perseguido.

Substituindo-se  $\|\mathbb{U}'(t)\|$  da equação 4 na equação 2, obtemos a forma normal da equação vetorial.

$$\frac{\mathbb{U}'(t)}{k\|\mathbb{V}'(t)\|} = \frac{\mathbb{V}(t) - \mathbb{U}(t)}{\|\mathbb{V}(t) - \mathbb{U}(t)\|} \quad (5)$$

$$\mathbb{U}'(t) = k\|\mathbb{V}'(t)\| \frac{\mathbb{V}(t) - \mathbb{U}(t)}{\|\mathbb{V}(t) - \mathbb{U}(t)\|} \quad (6)$$

$$\mathbb{U}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2} \frac{v_x - x}{\sqrt{(v_x - x)^2 + (v_y - y)^2}} \\ k\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \frac{v_y - y}{\sqrt{(v_x - x)^2 + (v_y - y)^2}} \end{pmatrix} \quad (7)$$

### 3 Metodologia numérica

A solução numérica será calculada a partir do método de Adams-Moulton de segunda ordem, ou *método dos trapézios*, que é um método implícito de integração de EDOs, de dois passos e de segunda ordem. O método é descrito pela equação:

$$\mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, \mathbb{U}_{n+1}) + f(t_n, \mathbb{U}_n)) \quad (8)$$

Onde  $h = \frac{t_f - t_0}{n}$ ,  $t_n = t_{n-1} + h$  e  $f(t_n, \mathbb{U})$  é um vetor dado por:

$$f(t_n, \mathbb{U}_n) = \begin{pmatrix} k\sqrt{(v'_x(t_n))^2 + (v'_y(t_n))^2} \frac{v_x(t_n) - x_n}{\sqrt{(v_x(t_n) - x_n)^2 + (v_y(t_n) - y_n)^2}} \\ k\sqrt{(v'_x(t_n))^2 + (v'_y(t_n))^2} \frac{v_y(t_n) - y_n}{\sqrt{(v_x(t_n) - x_n)^2 + (v_y(t_n) - y_n)^2}} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Isso resulta em um sistema de equações com  $x_{n+1}$  e  $y_{n+1}$  como incógnitas. Para obtermos a solução, utilizaremos o método de Newton no formato

$$\mathbb{U}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbb{U}_{n+1}^{(k)} - [J(\mathbb{U}_{n+1}^{(k)})]^{-1}g(\mathbb{U}_{n+1}^{(k)}) \quad (10)$$

Com

$$g(\mathbb{U}_{n+1}^{(k)}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbb{U}_{n+1}^{(k)}) \\ g_2(\mathbb{U}_{n+1}^{(k)}) \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$g_1(\mathbb{U}) = x_n - x_{n+1}^{(k)} + \frac{hk}{2} \left( \frac{\|\mathbb{V}'(t_{n+1})\|(v_x(t_{n+1}) - x_{n+1}^{(k)})}{\sqrt{(v_x(t_{n+1}) - x_{n+1}^{(k)})^2 + (v_y(t_{n+1}) - y_{n+1}^{(k)})^2}} + \right. \\ \left. + \frac{\|\mathbb{V}'(t_n)\|(v_x(t_n) - x_n)}{\sqrt{(v_x(t_n) - x_n)^2 + (v_y(t_n) - y_n)^2}} \right) \quad (12)$$

$$g_2(\mathbb{U}) = y_n - y_{n+1}^{(k)} + \frac{h}{2} \left( \frac{\|\mathbb{V}'(t_{n+1})\|(v_y(t_{n+1}) - y_{n+1}^{(k)})}{\sqrt{(v_x(t_{n+1}) - x_{n+1}^{(k)})^2 + (v_y(t_{n+1}) - y_{n+1}^{(k)})^2}} + \right. \\ \left. + \frac{\|\mathbb{V}'(t_n)\|(v_y(t_n) - y_n)}{\sqrt{(v_x(t_n) - x_n)^2 + (v_y(t_n) - y_n)^2}} \right) \quad (13)$$

E  $J^{-1}$  o inverso da matriz jacobiana

$$J(\mathbb{U}_n^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{dg_1(\mathbb{U}_{n+1}^{(k)})}{dx_{n+1}^{(k)}} & \frac{dg_1(\mathbb{U}_{n+1}^{(k)})}{dy_{n+1}^{(k)}} \\ \frac{dg_2(\mathbb{U}_{n+1}^{(k)})}{dx_{n+1}^{(k)}} & \frac{dg_2(\mathbb{U}_{n+1}^{(k)})}{dy_{n+1}^{(k)}} \end{pmatrix}$$

Calculando os valores necessários:

$$\frac{dg_1(\mathbb{U}_{n+1})}{dx} = -1 + \frac{hk\|\mathbb{V}'(t_{n+1})\|}{2} \left[ \frac{(v_x(t_{n+1}) - x_{n+1})^2 - \|\mathbb{V}(t_{n+1}) - \mathbb{U}_{n+1}\|^2}{\|\mathbb{V}(t_{n+1}) - \mathbb{U}_{n+1}\|^3} \right] \quad (14)$$

$$\frac{dg_1(\mathbb{U}_{n+1})}{dy} = \frac{hk\|\mathbb{V}'(t_{n+1})\|}{2} \frac{(v_x(t_{n+1}) - x_{n+1})(v_y(t_{n+1}) - y_{n+1})}{\|\mathbb{V}(t_{n+1}) - \mathbb{U}_{n+1}\|} \quad (15)$$

$$\frac{dg_2(\mathbb{U}_{n+1})}{dx} = \frac{hk\|\mathbb{V}'(t_{n+1})\|}{2} \frac{(v_x(t_{n+1}) - x_{n+1})(v_y(t_{n+1}) - y_{n+1})}{\|\mathbb{V}(t_{n+1}) - \mathbb{U}_{n+1}\|} \quad (16)$$

$$\frac{dg_2(\mathbb{U}_{n+1})}{dy} = -1 + \frac{hk\|\mathbb{V}'(t_{n+1})\|}{2} \left[ \frac{(v_y(t_{n+1}) - y_{n+1})^2 - \|\mathbb{V}(t_{n+1}) - \mathbb{U}_{n+1}\|^2}{\|\mathbb{V}(t_{n+1}) - \mathbb{U}_{n+1}\|^3} \right] \quad (17)$$

$$\det J^{-1}(\mathbb{U}_{n+1}) = 1 + \frac{hk\|\mathbb{V}'(t_{n+1})\|}{2} + \frac{(hk\|\mathbb{V}'(t_{n+1})\|)^2}{4} \cdot \left( \frac{1}{\|\mathbb{V}(t_{n+1}) - \mathbb{U}_{n+1}\|^2} - \frac{1}{\|\mathbb{V}(t_{n+1}) - \mathbb{U}_{n+1}\|} \right) \quad (18)$$

Os valores de  $x_{n+1}^{(k+1)}$  e  $y_{n+1}^{(k+1)}$  são, portanto:

$$x_{n+1}^{(k+1)} = x_{n+1}^{(k)} - \frac{\frac{dg_2(\mathbb{U}_{n+1})}{dy} g_1(\mathbb{U}_{n+1}) - \frac{dg_1(\mathbb{U}_{n+1})}{dy} g_2(\mathbb{U}_{n+1})}{\det J^{-1}(\mathbb{U}_{n+1})} \quad (19)$$

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_{n+1}^{(k)} - \frac{-\frac{dg_2(\mathbb{U}_{n+1})}{dx} g_1(\mathbb{U}_{n+1}) + \frac{dg_1(\mathbb{U}_{n+1})}{dx} g_2(\mathbb{U}_{n+1})}{\det J^{-1}(\mathbb{U}_{n+1})} \quad (20)$$

Concluimos assim a discretização genérica para o modelo. Para os sistemas que iremos estudar, basta substituímos os parâmetros por seus respectivos valores.

Este método será utilizado para resolver 3 equações diferentes, uma para testar o funcionamento e a velocidade de convergência do método, e mais duas para se obter a curva do perseguidor para curvas que não podem ser obtidas analiticamente ou que a solução seria muito trabalhosa.

O primeiro sistema, para verificar a validade do método, no modelo de resolução por solução manufaturada, é o caso em que o perseguido descreve uma linha reta. Os parâmetros do modelo são:  $\mathbb{V}(t) = (0, t)$ ,  $\mathbb{V}'(t) = (0, 1)$ ,  $k = 1$  e  $\mathbb{U}(0) = (10, 0)$ , i.e., o perseguido descreve uma trajetória paralela ao eixo  $y$ , com início na origem do plano cartesiano e com velocidade contante de valor 1. O perseguidor está a uma distância 10 de sua presa e se move com a mesma velocidade.

A solução deste problema é bem conhecido na literatura[1] e podemos expressá-la pelas equações

$$x(t) = 10\sqrt{W(e^{1-4t/10})} \quad (21)$$

$$y(t) = \frac{5}{2}(W(e^{1-4t/10}) - \log(W(e^{1-4t/10})) - 1) \quad (22)$$

Onde  $W(x)$  é a função  $W$  de Lambert.

O segundo sistema que iremos resolver é quando o perseguido descreve uma trajetória elíptica. Os parâmetros, para este caso, são:  $\mathbb{V}(t) = (\alpha \cos(t), \beta \sin(t))$ ,  $\mathbb{V}'(t) = (-\alpha \sin(t), \beta \cos(t))$ , usando  $k = 0.5$ ,  $k = 1$  e  $k = 2$ , para analisarmos se o perseguidor consegue alcançar sua presa, e variando sua posição inicial para pontos dentro e fora da elipse.

O último sistema estudado descreve um perseguido fugindo de seu perseguidor descrevendo uma trajetória em *zigue-zague*. Esta trajetória é parametrizada por:

$$\mathbb{V}(t) = (t, \frac{2}{\pi} \arcsin(\sin(\pi x))) \quad (23)$$

Da equação 23 obtemos que  $||\nabla'(t)|| = 1$ . Neste modelo utilizaremos  $k = 1$  e também iremos variar a posição inicial do perseguidor. Neste último modelo também será utilizado o método de *spline* polinomial de terceiro grau, para interpolar os pontos obtidos para a trajetória do perseguidor.

Na interpolação por *spline* cúbico, o intervalo no qual a função é aproximada é dividido em subintervalos e em cada um deles a função é aproximada por um polinômio de terceiro grau. Como existem quatro graus de liberdade na construção de uma função cúbica, é possível construí-las de modo que o *spline* resultante tenha tanto primeira como segunda derivada contínua. Seja  $f$  uma função definida em  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  e seja  $S$  o *spline* cúbico que interpola  $f$ . As seguintes condições devem ser satisfeitas:

1.  $S_j(x)$  é um polinômio cúbico, no subintervalo  $[x_j, x_{j+1}]$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n-1$
2.  $S_j(x_j) = f(x_j)$  e  $S_{j+1}(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n-1$
3.  $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n-1$
4.  $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n-1$
5.  $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n-1$
6.  $S'(x_0) = f'(x_0)$  e  $S'(x_n) = f'(x_n)$

Para construir um *spline* cúbico, devem satisfazer as condições as funções cúbicas

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \quad (24)$$

para cada  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Seja  $h_j = x_{j+1} - x_j$ . É possível provar [4] que os coeficientes  $a_j, b_j, c_j$  e  $d_j$  satisfazem as seguintes relações:

$$a_j = f(x_j) \quad (25)$$

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j - c_{j+1}) \quad (26)$$

$$d_j = \frac{1}{3h_j}(c_{j+1} - c_j) \quad (27)$$

Para achar o valor dos  $c_j$ , é necessário resolver o sistema  $Ax = b$ , onde:

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$b = \begin{pmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3f'(x_n) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$x = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (30)$$

Para resolver esse sistema, usaremos o Método iterativo de Gauss-Seidel [3].

$$\begin{aligned}
c_0^{k+1} &= \frac{\frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0) - h_0 c_1^k}{2h_0} \\
c_1^{[k+1]} &= \frac{\frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - h_0 c_0^{k+1} - h_1 c_2^k}{2(h_0 + h_1)} \\
c_2^{[k+1]} &= \frac{\frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - h_1 c_1^{k+1} - h_2 c_3^k}{2(h_1 + h_2)} \\
&\vdots \\
c_n^{[k+1]} &= \frac{3f'(x_n) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - h_{n-1} c_{n-1}^{k+1}}{2h_{n-1}}
\end{aligned} \tag{31}$$

O Método iterativo de Gauss-Seidel tem convergência garantida pelo critério das linhas, pois  $|A_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |A_{ij}|$ .

## 4 Resultados

O método de resolução de problema discretizado pelo método dos trapézios, segundo a equação 20, foi testado para o modelo clássico de solução exata conhecida e, a partir da saída gerada pelo programa implementado, foi montada a tabela 1, que, como na Tarefa 2, exibe o comportamento da convergência do método.

O princípio da tabela é verificar a variação do erro absoluto para valores diferentes de  $\Delta t = h$ . Foram utilizados 11 valores diferentes para  $h$ , dados por  $h = (t_f - t_0) * 2^{-i}$ , onde  $t_f$  é o instante de tempo final do intervalo, onde será calculado o erro absoluto, que é dado pela soma euclidiana da diferença do valor obtido numericamente com o valor exato, i.e.,  $|e| = \sqrt{(x(t_f) - x_n)^2 + (y(t_f) - y_n)^2}$ . Os parâmetros e as condições de contorno para este problema manufaturado foram especificados na seção anterior.

A tabela possui 4 colunas, uma indicando o valor de  $i$ , uma com o erro absoluto  $|e_i|$ , outra com a razão entre o erro anterior com o erro atual e, finalmente, uma coluna indicando o logaritmo na base 2 desta razão. Pela teoria, este valor deve convergir para um número  $N$ , que será a ordem do método (para o método dos trapézios,  $N = 2$ ). Se esta última coluna convergir, o erro tende a 0 e, portanto, o método implementado computacionalmente estará correto.

i	$ e_i $	$m_i = \frac{ e_{i-1} }{ e_i }$	$\log_2 m_i$
1	4.8149E+00	—	—
2	1.0312E+00	4.6694	2.2232
3	2.6014E-01	3.9639	1.9869
4	6.5154E-02	3.9927	1.9974
5	1.6280E-02	4.0021	2.0007
6	4.0693E-03	4.0007	2.0003
7	1.0173E-03	4.0002	2.0001
8	2.5432E-04	4.0000	2.0000
9	6.3579E-05	4.0000	2.0000
10	1.5895E-05	4.0000	2.0000
11	3.9737E-06	4.0000	2.0000

Tabela 1: Tabela de velocidade de convergência do método implementado.

Como pode ser visto pela tabela 1, o método que implementamos está correto e, para  $8 \leq i \leq 11$ , sua ordem de convergência é praticamente igual ao valor teórico. Mesmo com o uso do método de Newton, que é um método iterativo e nem sempre retorna o valor exato da função. Neste modelo, como a função  $g$  que se deve calcular a raiz não é linear, o valor retornado não é exato, mas é um número próximo. Os critérios de parada utilizados foram um número máximo de 100 iterações ou uma variação relativa de 0.001 entre o valor de duas iterações consecutivas. Estes valores foram escolhidos após realizados testes com números

maiores e verificado que estes valores resultam em um erro absoluto baixo para o cálculo de  $\mathbb{U}$  e eles não consomem muito tempo computacional.

Com a execução deste programa também foi gerado um gráfico da imagem do curva do perseguido, da curva exata do perseguidor e de mais 3 curvas com diferentes valores de  $h$ . Este gráfico é apresentado na figura 1. Nesta figura fica claro a convergência numérica, já que os gráficos para  $i \geq 7$  estão praticamente sobrepostos. Também podemos perceber o interessante fato de que se ambos os elementos se movem à mesma velocidade, o perseguidor nunca alcançará seu alvo, ele conseguirá apenas reduzir sua distância à metade do valor inicial.

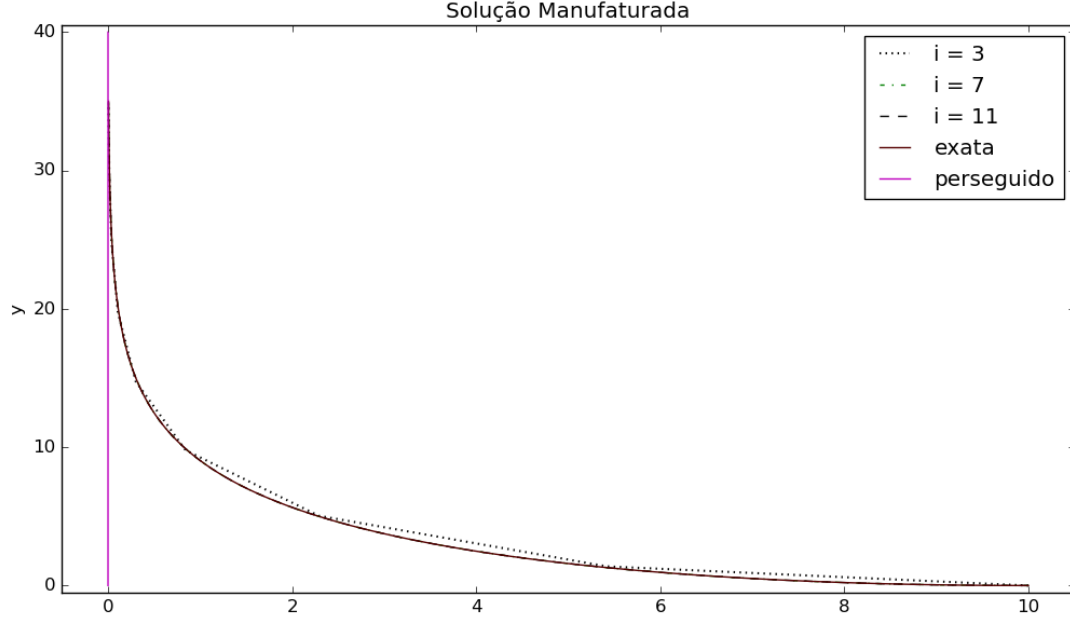


Figura 1: Curvas do perseguido e do perseguidor para o problema teste.

Com o método devidamente implementado, podemos analisar a curva descrita pelo perseguidor para os dois casos propostos anteriormente.

O primeiro modelo é quando o alvo percorre uma trajetória elíptica, descrita na seção 3. Neste caso utilizamos os valores para os parâmetros  $\alpha = 2$  e  $\beta = 1$ . Este problema foi resolvido numericamente para o intervalo  $[0; 10]$ , com  $i = 10$ . Em um primeiro caso, foi estudado para  $\mathbb{U}_0 = (0, 0)$ , ou seja, o perseguidor está inicialmente no centro da elipse. A constante  $k$  teve seu valor variado entre 0.5, 1 e 2. A figura 2 apresenta o gráfico de  $x(t)$  e de  $y(t)$  e a imagem da curva para este modelo.

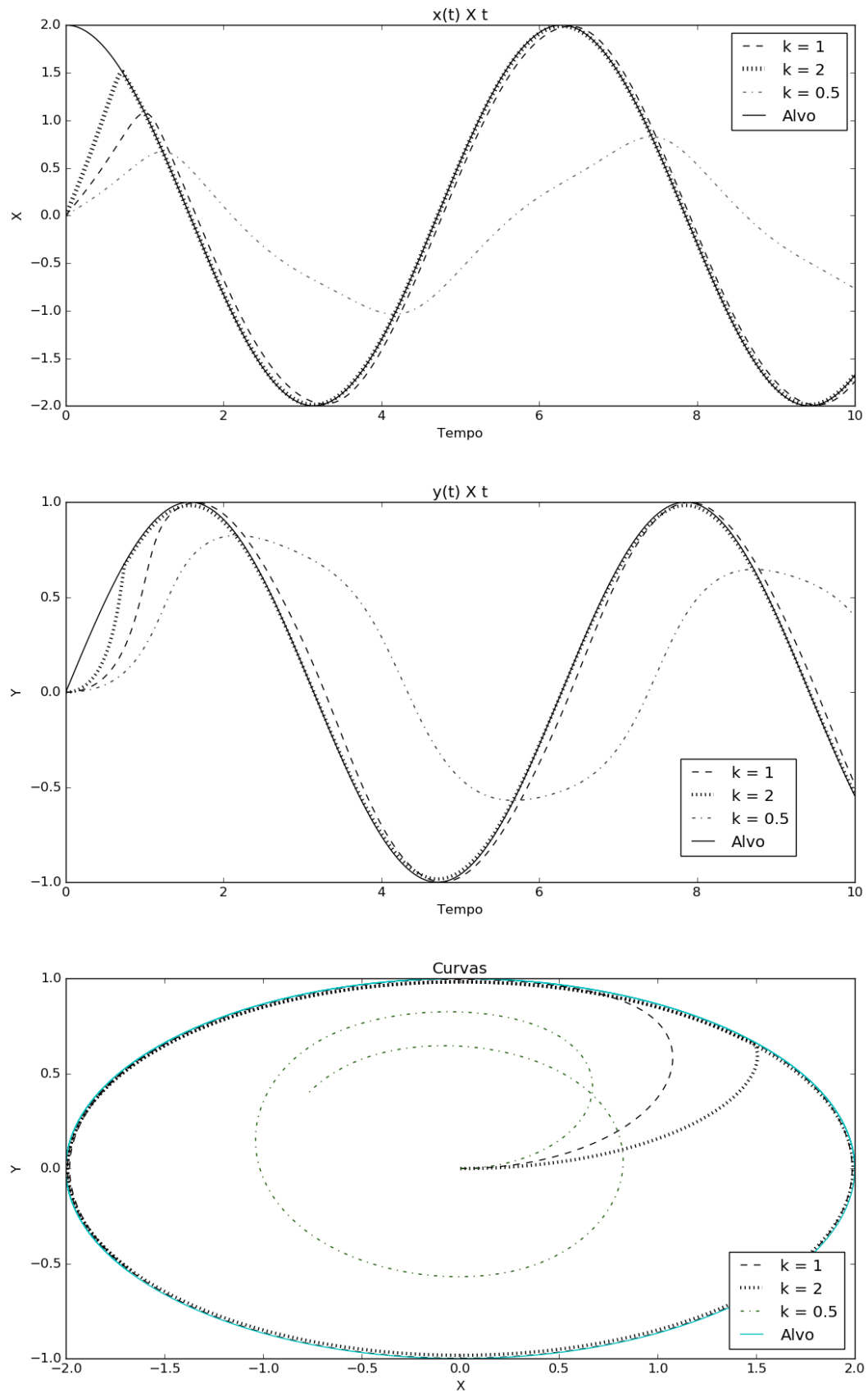
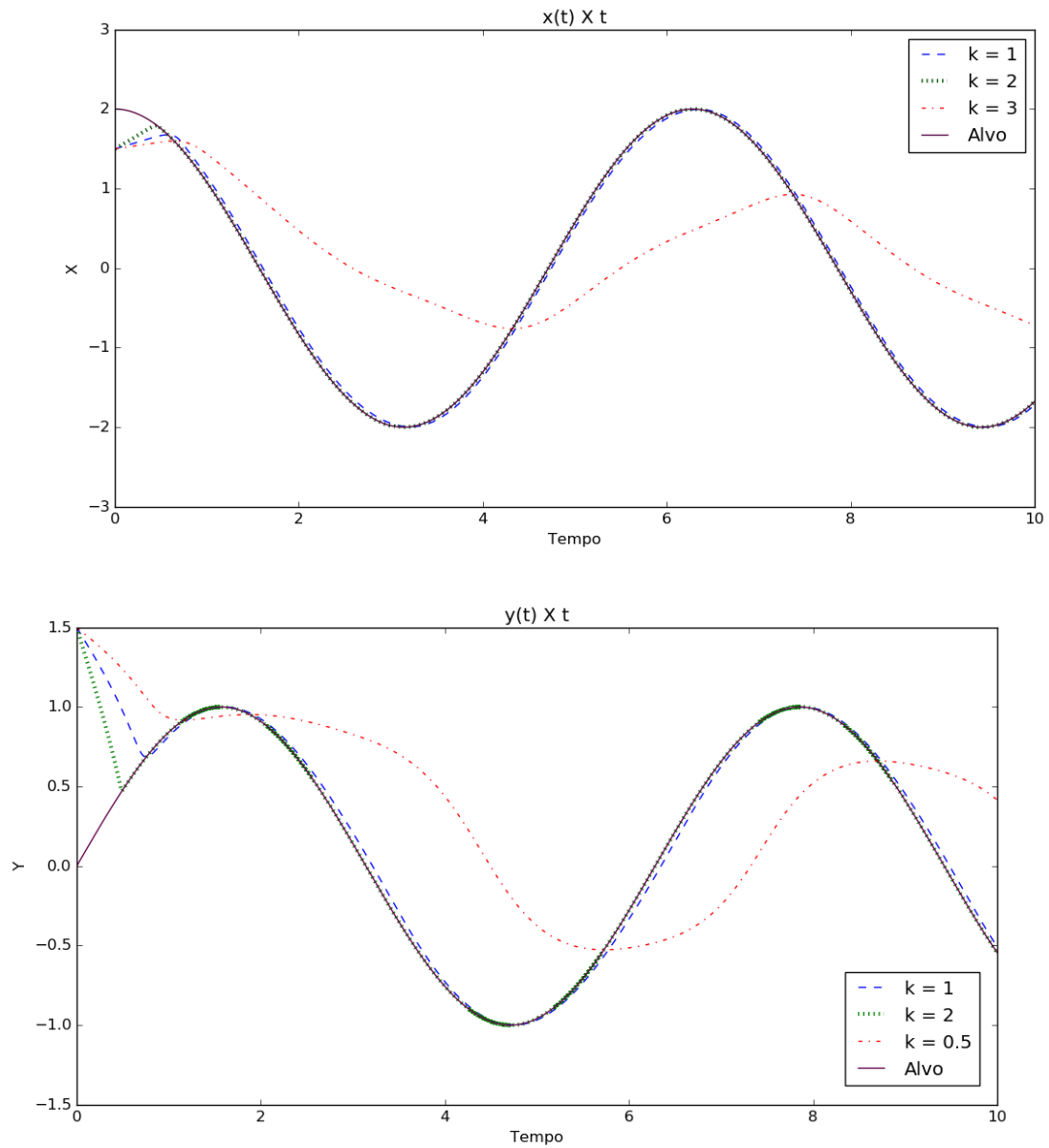


Figura 2: Curvas de perseguição de um modelo elíptico.

A partir do gráfico, podemos observar que quando ambos os elementos estão à mesma velocidade, o

perseguidor fica muito próximo de sua presa, entretanto, não consegue alcançá-lo. Não obstante, quando ele está com uma velocidade maior, ele consegue capturar a presa. Para a velocidade sendo a metade da velocidade do perseguido, por sua vez, a trajetória descrita pelo perseguidor é parecida com uma elipse, mas com um comprimento menor, i.e., ela é interna à curva descrita pelo alvo.

Para um perseguidor que está inicialmente fora da elipse, o comportamento tende ao mesmo do caso anterior, sendo diferente apenas no início. O gráfico para este problema é apresentado na figura 3.





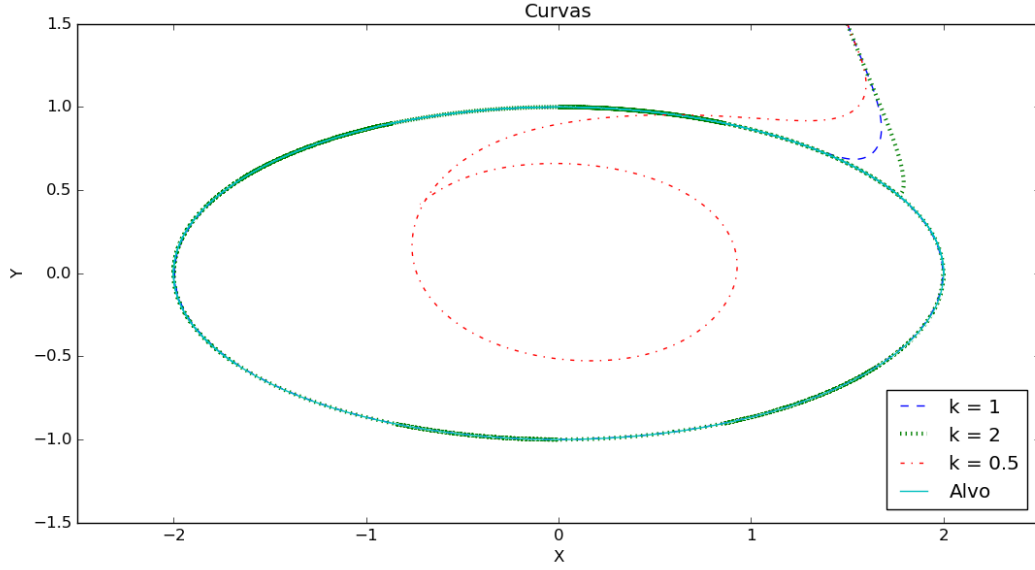


Figura 3: Curvas de perseguição de um modelo elíptico.

O último modelo a ser estudado é a curva de perseguição para um perseguido que descreve uma trajetória em *zigue-zague*. Neste modelo utilizamos um spline cúbico para interpolar os pontos resultantes da integração e, assim, estudar a curva de maneira contínua. A partir da curva resultante é possível observar que o perseguidor descreve uma trajetória semelhante a uma senóide.

O spline utilizado neste problema realiza a interpolação dos pontos obtidos para a coordenada  $y_k$ , como função das coordenadas  $x_k$ . Para a condição de contorno do spline vinculado, foi necessária a obtenção de  $\frac{dy(0)}{dx}$  e  $\frac{dy(t_n)}{dx}$ . Apesar da função  $f$  do problema de Cauchy nos retornar os valores de  $x'(t)$  e  $y'(t)$ , podemos facilmente descobrir o desejado pela regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} \quad (32)$$

O resultado da solução numérica, juntamente com a interpolação, pode ser vista na figura 4.

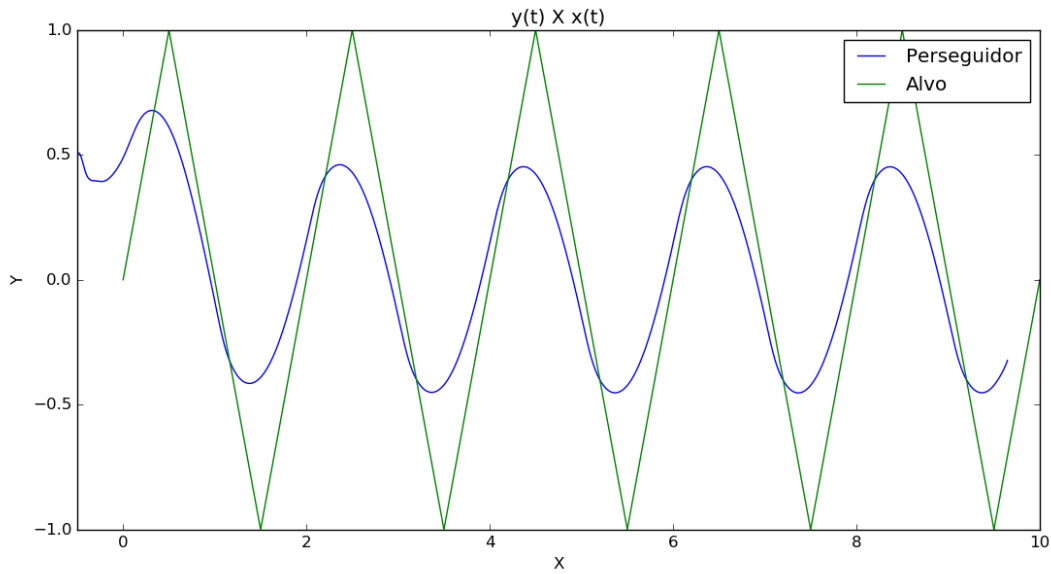


Figura 4: Modelo *ziguezague* com uso da técnica de spline cúbico.

Para essas curvas apresentadas, podemos realizar também uma interpolação pelo método do spline

cúbico. O algoritmo desse método foi desenvolvido na linguagem Python e foi baseado no algoritmo 3.5 do Numerical Analysis [4]. Os passos 4, 5, 6 e parte do 7 são responsáveis por resolver o sistema tridiagonal 28.

```
def spline(X, A, fpo, fpn):
    n = len(X)-1
    H = np.empty((n + 1))
    Alfa = np.empty((n + 1))
    L = np.empty((n + 1))
    mi = np.empty((n + 1))
    z = np.empty((n + 1))
    C = [0] * (n + 1)
    B = [0] * (n + 1)
    D = [0] * (n + 1)

    ##### Passo 1 #####

    for i in range(n):
        H[i] = X[i+1] - X[i]

    ##### Passo 2 #####

    Alfa[0] = 3 * (A[1] - A[0])/H[0] - 3 * fpo
    Alfa[n] = 3 * fpn - 3 * (A[n] - A[n-1])/H[n-1]

    ##### Passo 3 #####

    for j in range(n - 1):
        i = j + 1
        Alfa[i] = (3/H[i]) * (A[i+1] - A[i]) - (3/H[i-1]) * (A[i] - A[i-1])

    ##### Passo 4 #####

    L[0] = 2 * H[0]
    mi[0] = 0.5
    z[0] = Alfa[0] / L[0]

    ##### Passo 5 #####

    for j in range(n - 1):
        i = j + 1
        L[i] = 2 * (X[i+1] - X[i-1]) - H[i-1]*mi[i-1]
        mi[i] = H[i]/L[i]
        z[i] = (Alfa[i] - H[i-1] * z[i-1]) / L[i]

    ##### Passo 6 #####

    L[n] = H[n-1] * (2 - mi[n-1])
    z[n] = (Alfa[n] - H[n-1] * z[n-1]) / L[n]
    C[n] = z[n]

    ##### Passo 7 #####

    for i in reversed(range(n)):
        C[i] = z[i] - mi[i] * C[i+1]
        B[i] = (A[i+1] - A[i]) / H[i] - H[i] * (C[i+1] + 2 * C[i]) / 3
        D[i] = (C[i+1] - C[i]) / (3 * H[i])

    A = A[0:len(A)-1]
    B = B[0:len(B)-1]
```

$\begin{aligned}C &= C[0:\text{len}(C)-1] \\ D &= D[0:\text{len}(D)-1]\end{aligned}$
--

## 5 Conclusão

O presente trabalho nos permitiu desenvolver o processo de obtenção da solução numérica de um problema modelado por um sistema linear de equações diferenciais, mais especificamente, utilizando o método implícito dos trapézios, que também nos permitiu desenvolver a técnica da utilização do método de Newton para a obtenção da raiz de uma função bidimensional.

A partir da verificação do método pela técnica da Solução Manufaturada, foi possível validar o método utilizado, que ainda pode ser utilizado para problemas futuros. Com isso também foi possível verificarmos experimentalmente que o método dos trapézios converge proporcionalmente ao quadrado do passo  $h$ .

O algoritmo de splines cúbicos implementados também foi validado comparando os coeficientes obtidos com um polinômio de terceiro grau. Seu uso para o problema solucionado numericamente permitiu a obtenção de uma curva contínua através da técnica de interpolação e isso nos proporciona um estudo melhor, caso seja necessário a utilização de um par de pontos que não tenha sido calculado pela integração.

Finalmente, também observou-se neste trabalho as diferentes formas de curvas descrita para um caso de perseguição, mostrando-nos que a perseguição é bem sucedida apenas quando o perseguidor possui uma velocidade maior que seu objetivo. Esta análise de curvas pode ser muito importante para problemas reais, como mencionado na seção 1.

## 6 Referências bibliográficas

### Referências

- [1] WEISSTEIN, Eric W., *Pursuit Curve*, MathWorld—A Wolfram Web Resource, Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/PursuitCurve.html>, Acessado 25/03/2016.
- [2] LLOYD, Michael, Ph.D., *Pursuit Curves*, Academic Forum 24, 2006.
- [3] HUMES, Ana et al. *Noções de Cálculo Numérico*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1984.
- [4] BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. *Numerical Analysis*. Boston: Brooks Cole, 2010.

## 7 Apêndice

### A Rosas são vermelhas

Como citado anteriormente, as curvas de perseguições também geram grande interesse devido aos seus aspectos estéticos, resultando em curvas muitas vezes inusitadas e visualmente agradáveis. Motivados por isso, decidimos verificar a curva para uma presa que descreve uma trajetória na forme de rosácea de 9 pétalas e com  $k = 0.85$ . A figura 5 apresenta o resultado desta curva. O perseguidor, para este caso, descreve uma rosácea de menor comprimento. Realizando o cálculo para diversos valores de  $k$  obtemos uma combinação muito interessante de rosáceas.

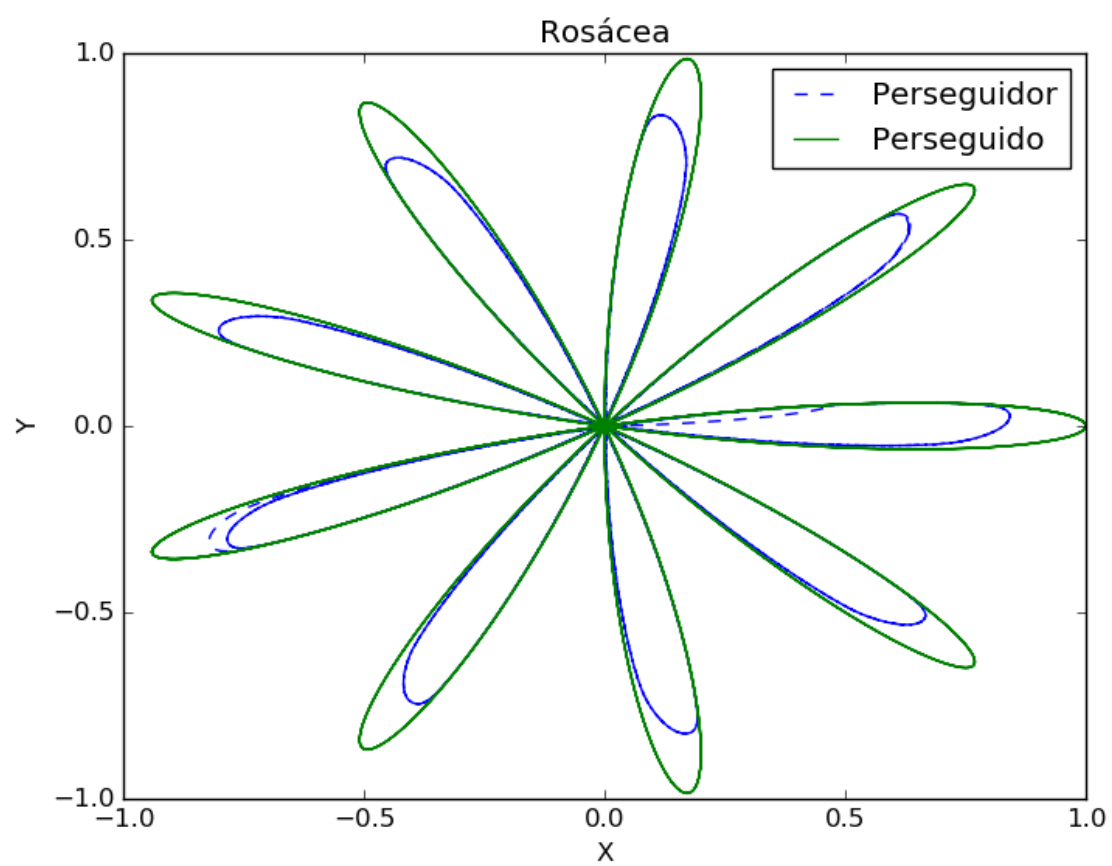


Figura 5: Modelo das rosáceas.