

O Problema do Carteiro Chinês

Tópicos Especiais em Economia Matemática

Monitor: Gustavo de Oliveira
Orientador: Diogo Bravo Mmarinho Braga

Universidade Federal Fluminense - Faculdade de Economia

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de
Dijkstra

A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão

Sumário

Introdução

Identificação do Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de Dijkstra

A Matriz de Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira
Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de
Dijkstra

A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão

Introdução

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira

Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

No que consiste o problema?

O problema do carteiro chinês é um problema de otimização em grafos que consiste em encontrar o caminho de menor custo iniciado em um vértice i , passando por *todas* as arestas e retornando ao mesmo vértice, dado que as arestas tem pesos e o grafo é conexo .

As aplicações desse problema estão dentre as mais variadas, podendo estar presentes desde implicações em coletas de lixo as, até mesmo, linhas aéreas.

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de
Dijkstra

A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão

Identificação do Problema

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira

Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

Como indentificar o problema?

Dado um grafo conexo G , são duas as coisas Intrínsecas a esse problema que podem acontecer:

- ▶ O grafo ser Euleriano ($\delta(v_i) = \text{par}$) - de tal forma que já haveria uma solução ótima para o problema.
- ▶ O grafo não ser Euleriano, sendo o caso em que trabalharíamos com o problema do carteiro chinês.

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de
Dijkstra

A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão

O Algoritmo

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira

Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

A Solução

A solução para o problema do carteiro chinês - com arestas de pesos positivos e não direcionadas - consiste num algoritmo que transforme o grafo não-Euleriano num Grafo Euleriano, por meio de um acréscimo de arestas “artificiais”, entre os vértices de grau ímpar do grafo. A partir daí, passa-se a ter uma solução ótima, tal qual para qualquer grafo euleriano.

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de
Dijkstra

A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão

O Algoritmo

O algoritmo se dá da seguinte forma:

1. Determinar os vértices de grau ímpar.
2. Por meio do algoritmo de *Dijkstra* construir uma matriz de distância D para os vértices de grau ímpar.
3. Determinar, por meio da matriz D , os vértices v_i e v_j ímpares de menor caminho.
4. Acrescentar arestas artificiais de v_i para v_j com o *custo* obtido pela matriz D .
5. Eliminar da matriz D as colunas e linhas correspondentes a v_i e v_j .
6. Se ainda assim houver vértices ímpares, retornar ao passo 3.
7. O custo total percorrido será igual ao custo inicial do grafo G somado com o custo das arestas acrescentadas.

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira
Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de
Dijkstra

A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

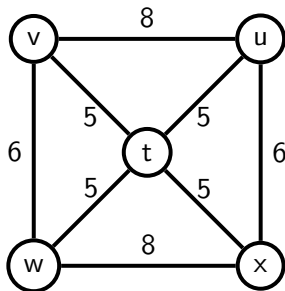
Conclusão

Exemplo

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira
Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

Dado o Grafo G abaixo, determinaremos o menor custo possível,



1. A primeira coisa a ser feita é determinar os vértices de grau ímpares para, então, criarmos uma matriz D de distância. Os vértices ímpares são: $V_{\text{ímpar}} = \{v, u, w, x\}$

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de
Dijkstra

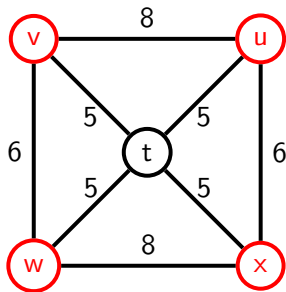
A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão

Selecionamos os vértices ímpares do grafo G.



2 Nosso objetivo
agora é construir uma matriz
de distância D, para os vértices
selecionados, utilizando, para
tal, o algoritmo de “Dijkstra”.

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de
Dijkstra

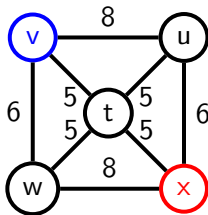
A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão

O Algoritmo de Dijkstra



Matriz de Distância de $v - x$

vértice	peso1	peso2	peso3	peso4	peso5
v					
u					
w					
x					
t					

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira
Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de
Dijkstra

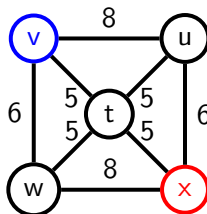
A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão

O Algoritmo de Dijkstra



Matriz de Distância de $v - x$

vértice	peso1	peso2	peso3	peso4	peso5
v	(0,v)				
u					
w					
x					
t					

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira
Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

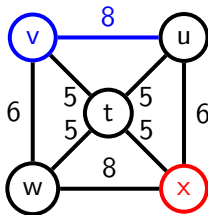
O Algoritmo de
Dijkstra

A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão



Matriz de Distância de $v - x$

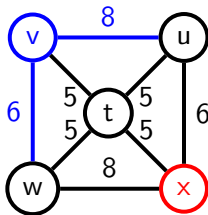
vértice	peso1	peso2	peso3	peso4	peso5
v	(0,v)				
u	(8,v)				
w					
x					
t					

O Algoritmo de Dijkstra

A Matriz de Distância

Aplicações Práticas

O Algoritmo de Dijkstra



Matriz de Distância de $v - x$

vértice	peso1	peso2	peso3	peso4	peso5
v	(0,v)				
u	(8,v)				
w	(6,v)				
x					
t					

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira
Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

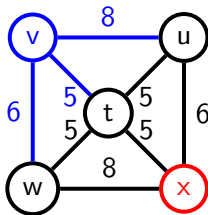
O Algoritmo de
Dijkstra

A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão



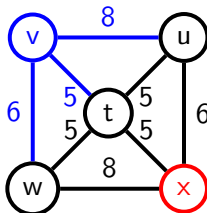
Matriz de Distância de $v - x$

vértice	peso1	peso2	peso3	peso4	peso5
v	(0,v)				
u	(8,v)				
w	(6,v)				
x					
t	(5,v)				

O Algoritmo de Dijkstra

A Matriz de Distância

Aplicações Práticas



Matriz de Distância de $v - x$

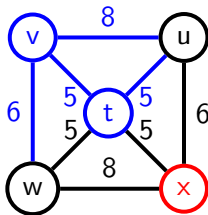
vértice	peso1	peso2	peso3	peso4	peso5
v	(0,v)				
u	(8,v)				
w	(6,v)				
x					
t	(5,v)	(5,v)			

O Algoritmo de Dijkstra

A Matriz de Distância

Aplicações Práticas

O Algoritmo de Dijkstra



Matriz de Distância de $v - x$

vértice	peso1	peso2	peso3	peso4	peso5
v	(0,v)				
u	(8,v)	(10,v)			
w	(6,v)				
x					
t	(5,v)	(5,v)			

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira
Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de
Dijkstra

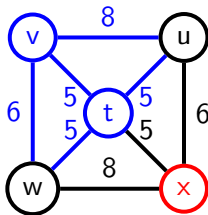
A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão

O Algoritmo de Dijkstra



Matriz de Distância de $v - x$

vértice	peso1	peso2	peso3	peso4	peso5
v	(0,v)				
u	(8,v)	(10,v)			
w	(6,v)	(10,v)			
x					
t	(5,v)	(5,v)			

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira
Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

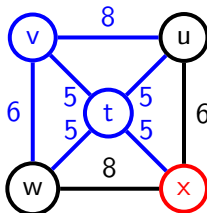
O Algoritmo de
Dijkstra

A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão



Matriz de Distância de $v - x$

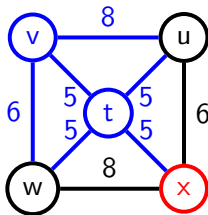
vértice	peso1	peso2	peso3	peso4	peso5
v	(0,v)				
u	(8,v)	(10,v)			
w	(6,v)	(10,v)			
x		(10,v)			
t	(5,v)	(5,v)			

O Algoritmo de Dijkstra

A Matriz de Distância

Aplicações Práticas

O Algoritmo de Dijkstra



Matriz de Distância de $v - x$

vértice	peso1	peso2	peso3	peso4	peso5
v	(0,v)				
u	(8,v)	(10,v)			
w	(6,v)	(10,v)			
x		(10,v)	(10,v)		
t	(5,v)	(5,v)			

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira
Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de
Dijkstra

A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão

O Algoritmo de Dijkstra

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira

Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

Achamos o Caminho!!

A partir daí, é obvio perceber que qualquer outro caminho que tomemos terá uma distância maior que dez, visto que, já que chegamos ao nosso destino (único), qualquer outro caminho que tomássemos teria que ter uma aresta de peso maior que zero!! Resta, agora, repetirmos o procedimento para construirmos uma matriz D para todos os vértices ímpares $v_i - v_j$.

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de
Dijkstra

A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão

A Matriz de Distância

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira
Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

A Matriz de Distância

	v	u	w	x
v	0	8	6	10
u	8	0	10	6
w	6	10	0	8
x	10	6	8	0

3 A partir da matriz D, fazemos uma análise combinatória simples entre as distancias dos vértices ímpares, para determinarmos o menor caminho entre eles e adicionarmos as arestas “artificiais”:

- ▶ $v-u + w-x = 8 + 8 = 16$
- ▶ $v-x + u-w = 10 + 10 = 20$
- ▶ $v-w + u-x = 6 + 6 = 12$

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de
Dijkstra

A Matriz de
Distância

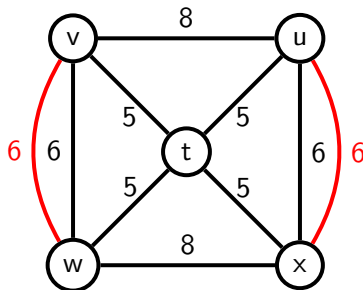
A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão

Criando as Arestas Artificiais

4 Criamos, então, as arestas artificiais com seus respectivos pesos, já acrescidos:



De tal forma que o grafo agora se torna euleriano, tendo, então, uma solução optimal.

A Solução

- 5 Eliminar da matriz D as colunas e linhas correspondentes a v_i e v_j .
- 6 Se ainda assim houver vértices ímpares, retornar ao passo 3.
- 7 O custo total percorrido será igual ao custo inicial do grafo G somado com o custo das arestas acrescentadas.

A partir do momento que tornamos o grafo não euleriano num grafo euleriano, a solução do problema se torna o custo da soma de todas as arestas originais do grafo acrescida do custo das arestas “artificiais” criadas. Assim, o custo total desse grafo é 60.

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira
Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de
Dijkstra

A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão

Aplicações Práticas

Várias são as aplicações do problema do carteiro chinês - como já dito anteriormente. Podemos, aqui, exemplificar algumas delas:

- ▶ Dado um bairro B, um entregador de jornais entrega de bicicleta jornais pelas casas da vizinhança. Sendo as ruas as arestas e as casas os vértices, como esse entregador pode maximizar seu tempo de entrega, levando em consideração o “comprimento” das ruas como os pesos?
- ▶ Dado uma cidade C, uma empresa de coleta de lixo precisa passar por determinados pontos P de coleta, passando por determinadas ruas. Cada rua tem um comprimento diferente e são **direcionadas**. Como essa empresa montará uma rota de coleta minimizando os custos?

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira
Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de
Dijkstra

A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão

Conclusão

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira
Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de
Dijkstra

A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão

Considerando todos esses exemplos grafos conexos e não-Eulerianos, embora somente o primeiro tenha solução da forma como apresentada aqui, o outros é, também, variante do problema do carteiro chinês. Um paper de mestrado da Universidade de Amsterdam do estudante Jozefien Karskens, orientado pelo professor Dr. R. Bekker apresenta o mesmo problema (um exemplo real) e suas variantes, e o soluciona.¹

¹https://beta.vu.nl/nl/Images/researchpaper-karskens_tcm235-363659.pdf

Conclusão

Aqui foi mostrado o algoritmo da solução do problema do carteiro chinês para um grafo não direcionado e com pesos **positivos** nas arestas. Esse problema possui outras várias variantes e as aplicações no “*mundo real*” são extremamente distintas, como já dito anteriormente. As referências bibliográficas desse trabalho foram majoritariamente oriundas de videos e artigos. O pacote utilizado para a confecção dos grafos foi o *TIKZ*.

O Problema do
Carteiro Chinês

Monitor: Gustavo
de Oliveira
Orientador: Diogo
Bravo Mmarinho
Braga

Introdução

Identificação do
Problema

O Algoritmo

Exemplo

O Algoritmo de
Dijkstra

A Matriz de
Distância

A Solução

Aplicações Práticas

Conclusão