Derivação de um Modelo Novo Keynesiano Simples

Gustavo Vital

1 de agosto de 2020

Conteúdo

1 Famílias

A primeira premissa do modelo se da em relação as famílias. Assumimos que as famílias são consideradas infinitas e supomos que possuem preferências idênticas tal que $j \in (0, 1)$. Ainda, assumimos que que a utilidade das famílias são relacionadas com dois bens consumo e trabalho, tal que:

$$\mathcal{U}(C_{j,t}, L_{j,t}) = \frac{(C_{j,t} - hC_{j,t-1})^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \chi\frac{L_{j,t}^{1+\gamma}}{1+\gamma} \tag{1}$$

onde C_{jt} é o consumo no tempo t, h é o parâmetro relacionado a formação de hábito de consumo, σ é o parâmetro de utilidade marginal do consumo, γ é o parâmetro de desutilidade marginal do trabalho, L_{jt} é o trabalho. O objetivo dos agentes é maximizar sua utilidade em função da sua restrição intertemporal:

$$\max_{C_j, L_j, K_j} \mathbb{E}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\xi_t^c\mathcal{U}(C_{j,t}, L_t) \tag{2}$$

Onde $\mathbb{E}$ denota o operador de expectativas, τ representa o tempo num período de tempo infinito, β^t representa o fator de desconto intertemporal – o quanto o agente abre mão de consumir no presente para consumir no futuro – ξ_t^c representa um choque de preferências do consumidor.

A restrição orçamentária intertemporal – por sua vez – pode ser escrita da seguinte forma:

$$P_t(C_{j,t} + I_{j,t}) \leq W_tL_{j,t} + R_tK_{j,t} + \Pi_t$$

onde P_t representa o preço no período t, I_t representa o investimento da família no período t, W_t representa o salário real, R_t o rendimento do capital, K_t o capital no período t e Π_t os dividendos das firmas. Ainda, é necessário apresentar a equação que represente a acumulação de capital ao longo do tempo, conhecida como lei de movimento do capital, esta é dada por:

$$K_{j,t+1} = (1-\delta)K_{j,t} + I_{j,t} \tag{3}$$

onde δ representa a taxa de depreciação do capital físico. Fazemos uso do lagrangiano (dinâmico) para a resolução do primeiro problema de otimização das famílias em respeito a utilidade. Temos, então:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \mathbb{E}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\xi_t^c\Bigg\{&\frac{(C_{j,t} - hC_{j,t-1})^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \chi\frac{L_{j,t}^{1+\gamma}}{1+\gamma} - \lambda_{j,t}[P_tC_{j,t} + P_tK_{j,t+1}\dots \\ &-P_t(1-\delta)K_{j,t} - W_tL_{j,t} - R_tK_{j,t} - \Pi_t]\Bigg\}\end{aligned}$$

de forma que as derivadas parciais com respeito a $C_{j,t}$ e $K_{j,t+1}$ são calculadas, e igualadas a zero, nos dando as condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_{j,t}} = \xi_t^c(C_{j,t} - hC_{j,t-1})^{-\sigma} - \lambda_{j,t}P_t = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial K_{j,t+1}} = -\xi_t^c\lambda_{j,t}P_t + \beta\mathbb{E}\{\xi_{t+1}^c\lambda_{j,t+1}[P_{t+1}(1-\delta) + R_{t+1}]\} = 0 \tag{5}$$

de acordo com a equação 4, podemos representar $\lambda_{j,t} = (C_{j,t} - hC_{j,t-1})^{-\sigma}/P_t$. substituindo na equação 5 podemos obter a chamada *equação de euler*, que expressa a preferência de consumo intertemporal do período t contra o período $t+1$. Temos, então:

$$\xi_t^c(C_{j,t} - hC_{j,t-1})^{-\sigma} = \beta\mathbb{E}\left\{\xi_{t+1}^c(C_{j,t+1} - hC_{j,t})^{-\sigma}\left[(1-\delta) + \frac{R_{t+1}}{P_{t+1}}\right]\right\} \tag{6}$$

1.1 A definição dos Salários

As famílias definem o salário partindo da hipótese que a oferta de trabalho no mercado parte de uma estrutura monopolista. Isso é, o serviço é vendido às firmas de forma que as firmas representativas agregam diferentes tipos de trabalho num único (L).

De forma que a hipótese anterior seja satisfeita, a agregação do trabalho se da de acordo com a seguinte função de tecnologia:

$$L_t = \left(\int_0^1 L_{j,t}^{\frac{\omega-1}{\omega}} dj\right)^{\frac{\omega}{\omega-1}} \tag{7}$$

onde ω é a elasticidade de substituição entre diferentes tipos de trabalhos; e $L_{j,t}$ é a quantidade de trabalho ofertada por cada família no tempo t. O problema de otimização do sindicado é maximizar a oferta de trabalho para as firmas em termo dos salários. Assim:

$$\max_{L_{j,t}} W_t\left(\int_0^1 L_{j,t}^{\frac{\omega-1}{\omega}} dj\right)^{\frac{\omega}{\omega-1}} - W_{j,t}\int_0^1 L_{j,t}dj$$

o que nos dá a seguinte condição de primeira ordem:

$$W_t\left(\frac{\omega}{\omega-1}\right)\left[\int_0^1 L_{j,t}^{\frac{\omega-1}{\omega}} dj\right]^{\frac{\omega}{\omega-1}-1}\left(\frac{\omega-1}{\omega}\right)L_{j,t}^{\frac{\omega-1}{\omega}-1} - W_{j,t} = 0$$

de onde segue que:

$$L_t^{\frac{1}{\omega}} = \left(\int_0^1 L_{j,t}^{\frac{\omega-1}{\omega}} dj\right)^{\frac{1}{\omega-1}} \tag{8}$$

de onde podemos deduzir que

$$W_t L_t^{\frac{1}{\omega}} L_t^{-\frac{1}{\omega}} - W_{j,t} = 0$$

temos, então, a equação de demanda por trabalho:

$$L_{j,t} = L_t\left(\frac{W_t}{W_{j,t}}\right)^{\omega} \tag{9}$$

substituindo 9 em 7 temos:

$$L_t = \left\{\int_0^1 \left[L_t\left(\frac{W_t}{W_{j,t}}\right)^{\omega}\right]^{\frac{\omega-1}{\omega}} dj\right\}^{\frac{\omega}{\omega-1}}$$

$$L_t = L_t W_t^{\omega}\left\{\int_0^1 \left[\left(\frac{1}{W_{j,t}}\right)^{\omega}\right]^{\frac{\omega-1}{\omega}} dj\right\}^{\frac{\omega}{\omega-1}}$$

$$W_t^{\omega} = \left[\int_0^1 (W_{j,t}^{\omega-1})dj\right]^{\frac{\omega}{\omega-1}}$$

de forma que o salário agregado é dado por:

$$W_t = \left(\int_0^1 W_{j,t}^{1-\omega} dj\right)^{\frac{1}{1-\omega}} \tag{10}$$