Modelo Ramsey/Cass/Koopmans

(material de apoio, em elaboração)

D. Romer

Advanced Macroeconomics

4th edition

Cap.2 - com adendos do Cap.1

Modelo de Crescimento Econômico Mainstream

- Considerando as medidas de bem-estar, existem enormes diferenças no padrão de vida através do tempo e das nações.
- Analisando as rendas médias reais de vários países (Penn World Table - https://pwt.sas.upenn.edu), ao longo do tempo, podemos identificar **milagres** (tigres asiáticos, ...) e **desastres** (Argentina, ...) de crescimento. Também identificamos **estagnação** a níveis de subsistência (Chad, Gana, ...).
- O objetivo maior da pesquisa em crescimento é determinar se há possibilidades para aumentar o crescimento global ou trazer padrões de vida em países pobres para mais próximo do nível dos líderes mundiais.
- O primeiro modelo de crescimento *mainstream* é o Modelo de Solow (também conhecido por Modelo de Sollow-Swan) desenvolvido por Robert Solow (Prêmio Nobel) e T. W. Swan em 1956.

- O que pode sustentar o crescimento? A resposta de Solow foi: qualquer coisa que permita aumentar a produção agregada sem necessariamente adicionar mais trabalho e mais capital. Solow chamou esta fonte de riqueza de "**progresso tecnológico**". Para Solow, progresso tecnológico é exógeno.

Modelos de Crescimento Econômico – Exógeno *vs* Endógeno

- Até os anos 80, o crescimento econômico foi explicado pelo aumento de progresso tecnológico como **exógeno.**
- Paul Romer (1990), de Stanford, no artigo "*endogenous technological change*", estabelece a teoria de crescimento econômico **endógeno**. Para Romer, progresso tecnológico não é um presente dos céus, mas é produzido dentro das organizações. Conhecimento é um bem econômico cuja produção é cara, mas que traz progresso e gera novos produtos. Assim, crescimento pode ser promovido através de ações como educar pessoas, subsidiar pesquisas, importar idéias de outros países e promover políticas de proteção à propriedade intelectual. Romer estabeleceu a importância do capital humano e da economia do conhecimento.

- O modelo de Solow considera a taxa de poupança exógena e constante.
- Uma evolução em relação ao Modelo de Solow é primeiro considerar que a dinâmica dos agregados econômicos são determinados por decisões no nível microeconômico. Segundo, é derivar a evolução do estoque de capital a partir da interação de famílias e firmas que querem maximizar suas expectativas em mercados competitivos. Como resultado, a taxa de poupança deixar de ser exógena e não precisa ser constante.
- As vantagens desta evolução são: [1] mostrar que crescimento não depende da hipótese de uma taxa fixa de poupança; [2] poder considerar questões de bem-estar, posto que os modelos são construídos a partir do comportamento de indivíduos; [3] estes modelos são úteis em outras questões na economia, além daquelas do crescimento econômico.

Ver breve resenha de 2006 do The Economist sobre o livro "Knowledge and the Wealth of Nations" (do jornalista David Warsh) com a história dos modelos de crescimento: http://www.economist.com/node/6943519

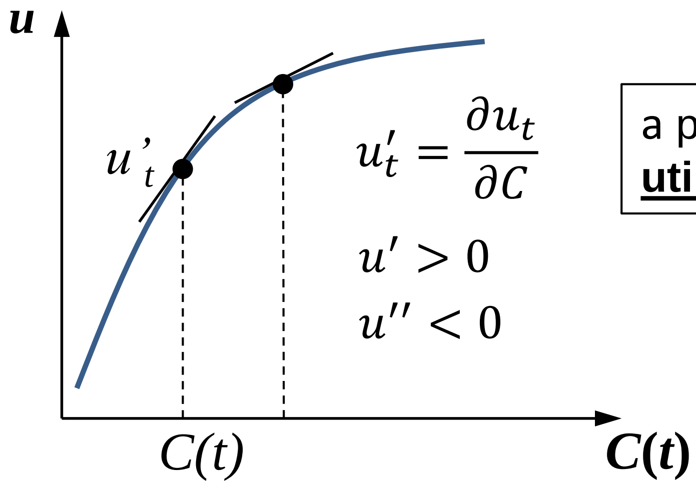
Modelos de Crescimento Econômico Exógenos – Ramsey *vs* Diamond

- Dois modelos principais: Ramsey(1928)/Cass(1965)/Koopmans(1965) e Diamond(1965)
- A diferença entre eles é que o primeiro considera famílias com vida infinita e o segundo considera a superposição de gerações de família com horizontes finitos (*i.e.* novos indivíduos estão continuamente nascendo e indivíduos idosos estão continuamente morrendo).
- Pelas razões acima, Ramsey–Cass–Koopmans é um **Modelo de Horizonte Infinito** (*Infinite-Horizon Model*) e Diamond é um **Modelo de Gerações Sobrepostas** (*Overlapping-Generations Model*). Peter Diamond ganhou Prêmio Nobel em 2010 (por outro trabalho).
- O modelo Ramsey–Cass–Koopmans é baseado no trabalho de Frank Ramsey (A Mathematical Theory of Saving, Economic Journal, 1928) com extensões de David Cass e Tjalling Koopmans em 1965.

- A importância do modelo Ramsey–Cass–Koopmans é porque fornece uma elegante solução matemática para explicar o processo de decisão dos agentes- famílias e firmas, baseado em comportamento otimizador. Este modelo é referência importante para demais modelos atuais, como a teoria de *Real-Business-Cycle.*

Função Utilidade: vários tipos

- Admitimos que a quantidade de satisfação, felicidade, utilidade, de um membro de família depende do consumo. Definimos, então, a função **<u>utilidade</u>** u:, ou mais precisamente a **<u>função utilidade instantânea</u>** (*i.e.* a utilidade em uma data dada) $u(C(t))$:



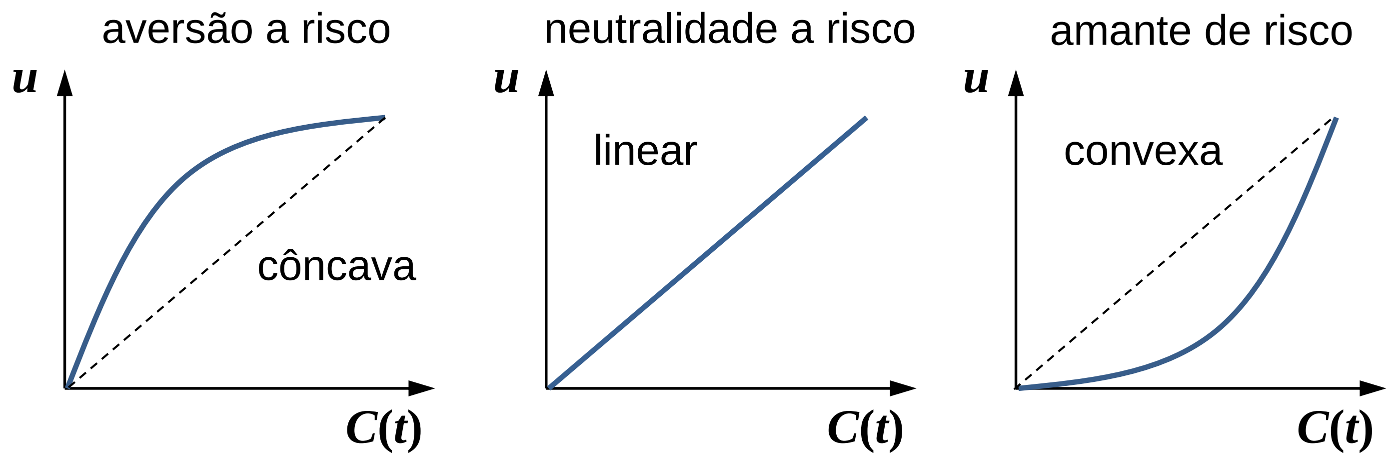
a primeira derivada é chamada de **<u>utilidade marginal</u>**

- Na função acima, a <u>primeira derivada</u> (*i.e.* a utilidade marginal) é positiva, isto é: mais é melhor! Já a <u>segunda derivada</u> é negativa, isto é, $u(C(t))$ cresce a uma taxa descrescente (... a primeira unidade de uma fruta que uma pessoa come aumenta a utilidade, a satisfação, mais do que a segunda unidade da mesma fruta).
- **Tipos de função utilidade** (com $u' > 0$ e $u'' < 0$):
  - Log: $u(C) = \ln C$
  - Exponencial: $u(C) = 1 - e^{-\theta C}$
  - Linear: $u(C) = C$
  - CRRA: $u(C) = \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta}$

$\theta = 0$: se torna tipo linear
$\theta = 1$: tipo Log (a demonstração usa $\lim_{\theta \to 1} u(C)$)

Função Utilidade e Comportamento de Risco

- O tipo de função (ou, mais especificamente, a **<u>curvatura</u>** da função utilidade) determina a **<u>atitude de risco</u>** de um indivíduo:



"Actually, the job calls for someone who is convex."

- Para mostrar que a curva côncava representa um indivíduo com **<u>aversão a risco</u>** devemos usar probabilidades e expectativas ($P(C)$ e $E(C)$). Quanto maior a curvatura de $u(C(t))$, maior é a aversão ao risco.

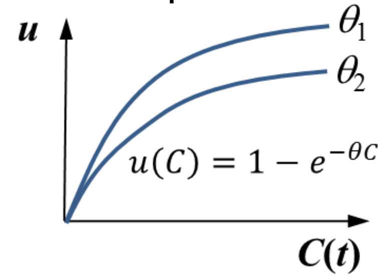
Função Utilidade e Comportamento de Risco

- O que é curvatura?
  - Uma semi-esfera tem uma certa forma, ou seja: tem uma certa curvatura. <u>Todas as funções que têm uma mesma forma básica são ditas terem a mesma propriedade de curvatura.</u> A rigor, a curvatura mede o quão rápido uma curva está mudando de direção em um dado ponto (*i.e.* como a primeira variável está variando). A curvatura de uma reta é 0 (zero). A curvatura de um círculo de raio a é $1/a$. Em termos de função utilidade, a curvatura é a maneira como a utilidade marginal muda.
- Quanto mais alta é a curvatura, maior é a aversão ao risco. Entretanto, como funções utilidade não são unicamente definidas, precisamos de uma medida (diferente da curvatura em geometria) que forneça um mesmo resultado de aversão a risco para uma grande família de curvas. Uma dessas medidas é a <u>**Relative Risk Aversion**</u> (RRA):

$$RRA = -C\frac{u''(C)}{u'(C)} > 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} u''(C) &= -\theta^2 e^{-\theta C} \\ u'(C) &= \theta e^{-\theta C} \end{aligned}}$$

- Por exemplo, para funções do tipo exponencial $u(C) = 1 - e^{-\theta C}$ temos $RRA = C\theta$ e para as funções $u(C) = \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta}$ com $\theta > 0$ temos $RRA = \theta$. Quando uma função utilidade tem $RRA = constante$ (*i.e.* a aversão ao risco é constante e independente de C), dizemos que ela é uma função *CRRA* (<u>**Constant Relative Risk Aversion**</u>).



Modelo de Crescimento Ramsey–Cass–Koopmans

- Existe um número muito grande de famílias idênticas e o tamanho de cada família cresce a uma taxa n. A equação diferencial que descreve o crescimento exponencial da população é:

$\frac{dL}{dt} = nL$, que integrando, $\int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \int_0^t ndt$, dá $|\ln L|_{L=L_0}^{L} = |nt|_{t=0}^{t} \therefore \ln L - \ln L_0 = nt$

$\therefore \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = nt$. Exponenciando: $\boxed{L(t) = L_0 e^{nt}}$, onde [Romer eq.1.13] $L_0 = L(0) = 1$

> Regras de integração: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$, $\int adx = ax$ e $\int_a^b f(x)dx = |F(x)|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$ onde a e b são constantes; e propriedades de logaritmos: $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ e, por definição, $y = \ln x \leftrightarrow e^y = x$

- Sejam:

$L(t)$	: população total da economia	H	: número de famílias
n	: taxa que cresce a população	$\bar{C}(t)$	: consumo total

então, o consumo per capita é $\frac{\bar{C}(t)}{L(t)}$ e o consumo por membro de família $\mathbf{C(t)}$ é:

> ou, o que é o mesmo: consumo por trabalhador

$$C(t) = \frac{\bar{C}(t)}{\left(\frac{L(t)}{H}\right)}$$, donde: $$\boxed{\bar{C}(t) = C(t)\frac{L(t)}{H}}$$ [Consumo Total Eq. 1]

- A função utilidade instantânea de cada membro da família é $u\big(C(t)\big)$ e a função utilidade instantânea da população é, pela Eq. 1: $U\big(\bar{C}(t)\big) = u\big(C(t)\big)\frac{L(t)}{H}$ [Eq. 2]

Modelo de Crescimento Ramsey–Cass–Koopmans – *lifetime utility*

- A hipótese é que os indivíduos vão querer otimizar a utilidade como ela é vista no presente (*i.e.* no tempo $t = 0$) e para isto trazemos o futuro como sendo a soma das utilidades atualizadas a uma **taxa de retorno** ρ, *i.e.* a utilidade depende do consumo hoje e no futuro:

$$U = U(0) = U\big(\bar{C}(0)\big) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right) U\big(\bar{C}(1)\big) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2 U\big(\bar{C}(2)\big) + \cdots + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t U\big(\bar{C}(t)\big)$$

- A **taxa de retorno** ρ também é chamada de **taxa de desconto** ou **grau de impaciência**. E $1/(1+\rho)$ é o **fator de desconto** que captura o peso que um indivíduo coloca no futuro relativo a hoje. Se o indivíduo é muito impaciente (ρ muito alto) então $1/(1+\rho)$ é muito baixo e, portanto, o indivíduo tem menos preocupação com o futuro (ou, interpretando $1/(1+\rho)$ como a probabilidade de sobreviver até o próximo período, o presente é mais importante): $U \approx U\big(\bar{C}(0)\big)$. Se $\rho = 0$, então $1/(1+\rho) = 1$ e hoje e o futuro têm igual peso.
- Acima, é um modelo de consumo em tempo discreto. Porém, vamos considerar um modelo de consumo em tempo contínuo, onde $\Delta t \to 0$; *i.e.* os indivíduos fazem escolhas a cada instante em tempo contínuo. Esse tipo de modelo leva a resultados mais claros e mais intuitivos. Então, o somatório torna-se uma integral:

$$U = \int_0^t e^{-\rho t} U\big(\bar{C}(t)\big) dt \qquad \text{[Eq. 3]}$$

- O termo $e^{-\rho t}$ representa o **fator de desconto** composto contínuo e corresponde ao comportamento de decaimento dado por $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\rho} y$, o que integrando (como fizemos para o crescimento exponencial) daria $y = y_0 e^{-\rho t}$.
- A Eq. 2 na Eq. 3 leva à função utilidade das famílias em termos da utilidade de cada trabalhador com vida infinita (∞):

$$U = \int_0^\infty e^{-\rho t} u\big(C(t)\big) \frac{L(t)}{H} dt \qquad \text{[Eq. 4] [}\equiv\text{ (2.1) do Romer]}$$

Modelo de Crescimento Ramsey–Cass–Koopmans – *lifetime utility*

- A família com vida infinita da Eq. 4 (eq. 2.1 do Romer) significa que a geração atual é seguida de seus descendentes, com transferências intergeracionais baseadas no altruísmo. A Eq. 4 é chamada de **lifetime utility**.

- Lembre que a taxa de desconto ρ (ou seja, o grau de impaciência) representa a taxa de preferência temporal pelo consumo presente e, portanto, é positiva. E quando ρ **aumenta, menos a família valoriza o consumo futuro em relação ao consumo presente.**

- O modelo Ramsey–Cass–Koopmans não considera incertezas e expectativas. Portanto, a utilidade das famílias com relação ao risco não é diretamente relevante, mas θ na função utilidade CRRA $u(C) = \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta}$ determina o comportamento da família. Por exemplo, se $\theta \to 0$ (isto é, $u(C)$ tende ao tipo linear), a família está disposta a aceitar grandes oscilações no consumo para tirar vantagens de pequenas diferenças entre a taxa de desconto ρ e a taxa de retorno r sobre a poupança.

Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – Produção e Estoques

- Assim como no modelo de Solow, a função de produção é $Y(t) = F\big(K(t), A(t)L(t)\big)$, onde: K é capital; A é **<u>conhecimento</u>** ou a **<u>efetividade de trabalho</u>**; e L é trabalho. O produto $A(t)L(t)$ é chamado de **<u>trabalho efetivo</u>**.
- Os níveis iniciais de capital, trabalho e conhecimento são considerados dados e são assumidos serem estritamente positivos. Trabalho e conhecimento crescem a <u>taxas constantes</u> (eqs. 1.8 e 1.9 do Romer):

$$\dot{L}(t) = nL(t) \quad \text{e} \quad \dot{A}(t) = gA(t) \quad \text{[Eq. 5a e 5b]}$$

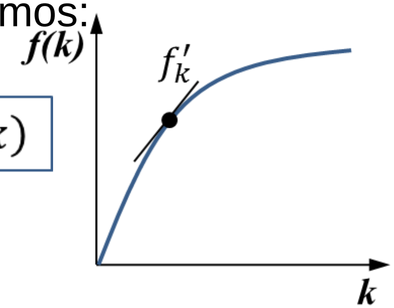
ponto indica derivada em relação ao tempo: $\dot{X}(t)$ é a notação para $\frac{dX(t)}{dt}$

- Uma hipótese crítica é que a função de produção tem retornos constantes. Isto é, dobrando as quantidades de capital K e de trabalho efetivo AL (*e.g.* dobrando K e L, mas com A mantido fixo) também dobra a quantidade produzida. Matematicamente, multiplicando-se por uma constante c, temos: $F(cK, cAL) = cF(K, AL) \quad c \geq 0$ –(eq. 1.2 Romer) [Eq. 6]
- a hipótese de retornos constantes pode ser pensado como uma combinação de duas hipóteses separadas. A primeira é que a economia é grande o bastante de maneira que os ganhos a partir de especialização foram exauridos. Em contraste, numa economia muito pequena, provavelmente há possibilidades suficientes para mais especialização de maneira que dobrando as quantidades de capital e trabalho mais do que dobra a produção. A segunda é que insumos outros que não sejam capital, trabalho e conhecimento são relativamente sem importância.

Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – Produção e Estoques

- A hipótese de retornos constantes nos permite trabalhar com a função de produção em uma foma mais adequada. Fazendo $c = {}^{1}/_{AL}$ na Eq.6 (eq. 1.3 do Romer), temos:

$$F\left(\underbrace{\frac{K}{AL}}_{k},1\right)=\frac{1}{AL}\underbrace{F(K,AL)}_{Y} \Rightarrow \underbrace{F(k,1)}_{f(k)}=\underbrace{\frac{Y}{AL}}_{y} \Rightarrow \boxed{y=f(k)}$$



k: quantidade de capital por unidade de trabalho efetivo

y: produção por unidade de trabalho efetivo

- que é chamada de função de produção na **forma intensiva**. Ela expressa que a quantidade de produção por unidade de trabalho efetivo depende somente da quantidade de capital por unidade de trabalho efetivo e não depende do tamanho global da economia.
- O **produto marginal de capital** é a medida de quanto a produção varia por unidade de mudança em capital, ou seja: $\frac{\partial Y}{\partial K}$. Como $Y = ALf\left(\frac{K}{AL}\right)$ e $K = ALk$ é fácil mostrar que $\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial f(k)}{\partial k}$. Para simplificar, usamos a notação $f'(k)$ para representar $\frac{\partial f(k)}{\partial k}$. Portanto o produto marginal de capital é justamente $f'(k)$.
- Um pouco mais elaborado para mostrar (fica como exercício) é que o **produto marginal de trabalho** é dado por:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A[f(k) - kf'(k)] \qquad \text{[Eq. 7]}$$

Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – Comportamento das Firmas

- Hipóteses para o comportamento das firmas:
- Em qualquer ponto do tempo, as firmas usam estoques de trabalho e capital, paga a eles seus produtos marginais (*i.e.* remunera cada um deles segundo a produtividade marginal de cada um deles) e vende a produção resultante.
- Porque a função de produção tem retornos constantes e a economia é competitiva, as firmas ganham lucros zero. Isto significa que a remuneração do capital é a própria produtividade marginal do capital $f'(k)$. Outra consequência é que, porque não existe depreciação, a taxa real de retorno sobre o capital iguala aos seus ganhos por unidade de tempo, isto é, a taxa de juros reais no tempo t é (eq. 2.3 do Romer):

$$r(t) = f'\big(k(t)\big) \qquad \text{[Eq. 8]}$$

- Como a firma remunera segundo a produtividade marginal, o salário real no tempo t é o próprio produto marginal de trabalho (Eq. 7) (eq. 2.4 Romer):

$$W(t) = A(t)\Big[f\big(k(t)\big) - k(t)f'\big(k(t)\big)\Big] \qquad \text{[Eq. 9]}$$

- e o salário por unidade de trabalho efetivo é (eq. 2.5 do Romer):

$$w(t) = f\big(k(t)\big) - k(t)f'\big(k(t)\big) \qquad \text{[Eq. 10]}$$

Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – Restrição Orçamentária das Famílias

- A taxa de juros reais r e o salário por unidade de trabalho efetivo w são considerados dados.
- A restrição orçamentária da família é que o valor presente de seu consumo de vida inteira (*lifetime comsumption*) não pode exceder sua riqueza inicial mais o valor presente da sua renda de trabalho de vida inteira (*lifetime labor income*).

- Porém, a taxa de juros reais r pode variar com o tempo. Temos, portanto, $r(t)$ como a taxa de retorno instantânea (é o retorno real).
- Vamos definir $R(t) = \int_{\tau=0}^{t} r(\tau)d\tau$ e verificar que com $R(t)$, no período $[0,t]$, uma unidade de bem investido no tempo 0 conduz a $e^{R(t)}$ unidades do bem no tempo t.
- Equivalentemente, o valor de 1 unidade em t em termos de produção em $t = 0$ é $e^{-R(t)}$. Isto é, $e^{-R(t)}$ é o termo utilizado para calcular o valor presente de 1 unidade.
- Se $r(\tau) = constante = \bar{r}$, então $R(t) = \bar{r}t$; e fica fácil verificar que o valor presente de 1 unidade de output é $e^{-\bar{r}t}$. Porém, de uma maneira geral: $e^{-R(t)}$.
- Na *utility function* U (Eq. 4) poderíamos ter condiderado $e^{-P(t)}$ ao invés de $e^{-\rho t}$ com ρ constante.

Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – Restrição Orçamentária das Famílias

- Sejam:
  - $K(t)$: capital no tempo t
  - capital inicial: $K(0) = 1$
  - Riqueza total da família (total wealth): $K(t)/H$
  - Riqueza inicial da família (initial capital holdings): $K(0)/H$
  - Consumo total da família: $C(t)\dfrac{L(t)}{H}$
  - Valor presente do *lifetime consumption*: $\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)}\, C(t)\dfrac{L(t)}{H}\,dt$
  - Valor presente do *lifetime labor income* : $\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)}\, W(t)\dfrac{L(t)}{H}\,dt$
- então, a **Restrição Orçamentária da Família** é que o valor presente do *lifetime consumption* deve ser menor ou igual à soma da riqueza inicial com o valor presente da *lifetime labor income*:

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)}\, C(t)\frac{L(t)}{H}\,dt \leq \frac{K(0)}{H} + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)}\, W(t)\frac{L(t)}{H}\,dt \qquad \text{[Eq. 11] [≡ (2.6) do Romer]}$$

- A família representativa vai querer maximizar sua *lifetime utility* U (Eq. 4)(eq. 2,1 Romer) sujeita à restrição orçamentária dada pela Eq. 11.

Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – Restrição Orçamentária das Famílias

[Eq. 11] [≡ (2.6) do Romer]

In general, it is not possible to find the integrals in this expression. Fortunately, we can express the budget constraint in terms of the limiting behavior of the household's capital holdings; and it is usually possible to describe the limiting behavior of the economy. To see how the budget constraint can be rewritten in this way, first bring all the terms of (2.6) over to the same side and combine the two integrals; this gives us

poupança em t

$$\frac{K(0)}{H} + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)}[W(t) - C(t)]\frac{L(t)}{H}\,dt \geq 0. \tag{2.7}$$

We can write the integral from $t = 0$ to $t = \infty$ as a limit. Thus (2.7) is equivalent to

$$\lim_{s\to\infty} \underbrace{\left[\frac{K(0)}{H} + \int_{t=0}^{s} e^{-R(t)}[W(t) - C(t)]\frac{L(t)}{H}\,dt\right]}_{\frac{K(s)}{H}\Big/e^{R(s)}} \geq 0. \tag{2.8}$$

[Romer, pag. 52]

Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – Restrição Orçamentária das Famílias

Now note that the household's capital holdings at time s are

$$\frac{K(s)}{H} = e^{R(s)}\frac{K(0)}{H} + \int_{t=0}^{s} e^{R(s)-R(t)}[W(t) - C(t)]\frac{L(t)}{H}\,dt. \qquad (2.9)$$

To understand (2.9), observe that $e^{R(s)}K(0)/H$ is the contribution of the household's initial wealth to its wealth at s. The household's saving at t is $[W(t) - C(t)]L(t)/H$ (which may be negative); $e^{R(s)-R(t)}$ shows how the value of that saving changes from t to s.

The expression in (2.9) is $e^{R(s)}$ times the expression in brackets in (2.8). Thus we can write the budget constraint as simply

$$\lim_{s\to\infty} e^{-R(s)}\frac{K(s)}{H} \geq 0. \qquad (2.10)$$

comporta muito que diante a posse de capital pela família.

no Ponzi game

Expressed in this form, the budget constraint states that the present value of the household's asset holdings cannot be negative in the limit.

Equation (2.10) is known as the *no-Ponzi-game condition*. A Ponzi game is a scheme in which someone issues debt and rolls it over forever. That is, the issuer always obtains the funds to pay off debt when it comes due by issuing new debt. Such a scheme allows the issuer to have a present value of lifetime consumption that exceeds the present value of his or her lifetime resources. By imposing the budget constraint (2.6) or (2.10), we are ruling out such schemes.[6]

[Romer, pag. 53]

Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – Problema de Maximização das Famílias

- A família representativa vai querer maximizar sua *lifetime utility* U (Eq. 4) sujeita à restrição orçamentária dada pela Eq. 11.

- É mais fácil trabalhar no modelo com variáveis normalizadas pela quantida de trabalho efetivo. Para isto precisamos expressar a função objetivo (*lifetime utility* U , Eq. 4, que é a (2.1) do Romer) e a restrição orçamentária (Eq. 11, que é a (2.6) do Romer) em termos do consumo e da receita de trabalho por unidade de trabalho efetivo.

- VER NOTAS MANUSCRITAS (até a dedução da Eq. de Euler e a sua interpretação)

Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – A Dinâmica de c

- $c(t)$ é o consumo por unidade de trabalho efetivo
  - Lembrando: $A(t)$ é o "conhecimento" no tempo t, que é chamado de "efetividade de trabalho", e $A(t)L(t)$ representa "trabalho efetivo". Portanto, $c(t) = {C(t)}/{A(t)}$, onde $C(t)$ é o consumo por trabalhador.
- $y(t) = f\big(k(t)\big)$ é a função de produto na forma intensiva, onde $k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$ é a quantidade de capital $K(t)$ por unidade de trabalho efetivo.
- O comportamento de uma economia pode ser convenientemente descrita em termos da evolução de $c(t)$ e $k(t)$.
- A evolução de $c(t)$ é descrita pela Equação de Euler (Eq. 2.20 do Romer):

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{r(t) - \rho - \theta g}{\theta}$$

- onde ρ é a taxa de retorno (também chamada de taxa de desconto ou grau de impaciência), g é a taxa de crescimento do conhecimento A, θ é a constante que determina o tipo de comportamento de aversão ao risco das famílias ($\theta = 0$ seria neutralidade com relação ao risco) e $r(t)$ é a taxa de juros reais dada.
- Lembrando que a hipótese da produção ter retornos constantes e da economia ser competitiva implica na remuneração do capital ser a própria produtividade marginal do capital $f'(k)$ e (porque não existe depreciação) a taxa de juros reais ser igual aos ganhos $f'(k)$: $r(t) = f'\big(k(t)\big)$ (Eq.8 do slide 13).

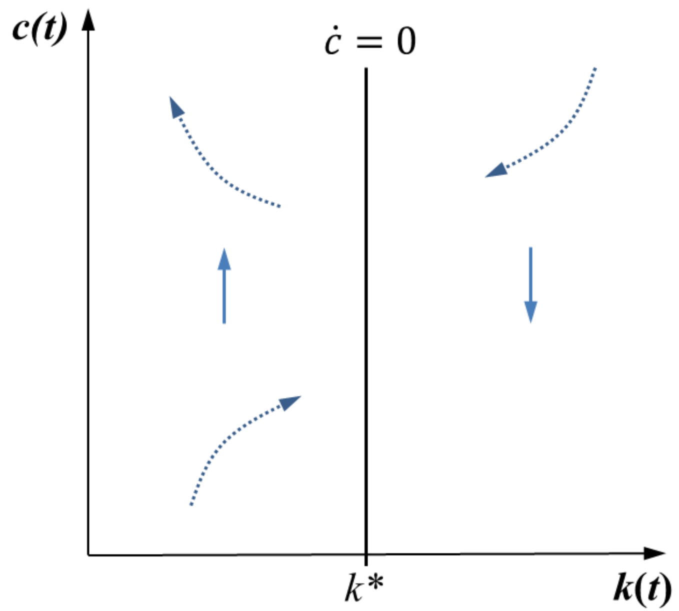
Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – A Dinâmica de c

- Levando $r(t) = f'\big(k(t)\big)$ do slide anterior para a Eq. de Euler, temos:

$$\boxed{\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{f'\big(k(t)\big) - \rho - \theta g}{\theta}} \quad \therefore \quad \dot{c}(t) = c(t)\,\frac{f'\big(k(t)\big) - [\rho + \theta g]}{\theta} \qquad \text{[Eq. 25a]}$$

- Portanto $\dot{c}(t) = 0$ quando: $\boxed{f'\big(k(t)\big) = \rho + \theta g}$ [Eq. 25b]
- Então, se k* denota este valor de k, temos que:
  - se $k > k^*$ então $f'\big(k(t)\big) < \rho + \theta g$ e, portanto, $\dot{c}(t) < 0$ (*i.e.* c move-se para cair)
  - se $k < k^*$ então $f'\big(k(t)\big) > \rho + \theta g$ e, portanto, $\dot{c}(t) > 0$ (*i.e.* c move-se para crescer

- $\dot{c}(t) = 0$ também quando $c(t) = 0$ (i.e. ao longo do eixo horizontal k); mas, numa situação de equilíbrio, c nunca deve ser zero. Trata-se, portanto, de uma condição irrelevante para o modelo.
- Na figura ao lado, a reta vertical $\dot{c} = 0$ separa duas regiões: a região onde a direção de movimento de c é crescente (para cima); e a região que o movimento de c é decrescente (para baixo).
- Os movimentos para cima, por exemplo, podem ser feitos de mais de uma maneira (veja as duas curvas à esquerda da reta vertical). Isto é, nada está dito sobre o que ocorre com relação a k.



Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – A Dinâmica de *k*

- Neste modelo, a hipótese é que o capital agregado se acumula de acordo com:

$$\frac{dK(t)}{dt} = \left(Y(t) - \bar{C}(t)\right) - \delta K(t)$$ ou simplificando a notação: $\dot{K} = (Y - \bar{C}) - \delta K$ [Eq. 26]

- onde K é o capital, Y o produto, $\bar{C}$ o consumo total e δ é a taxa com que o capital existente se deprecia. Se dividimos a Eq. 26 por $L(t)$ temos quantidades por trabalhador e, depois, se dividimos por $A(t)$ temos quantidades por trabalho efetivo:

$$\frac{\dot{K}}{AL} = \left(\frac{Y}{AL} - \frac{\bar{C}}{AL}\right) - \delta\frac{K}{AL}$$ como $k = \frac{K}{AL}$ (slide 12), temos: $\boxed{\frac{\dot{K}}{AL} = y - c - \delta k}$ [Eq. 27]

- Derivando $k = \frac{K}{AL}$, temos:

$$u = f(t) \;\; e \;\; v = h(t) \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dt} - u\frac{dv}{dt}}{v^2} \quad e \quad \frac{d}{dt}(uv) = u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt}$$

$$\frac{dk}{dt} = \frac{AL\dot{K} - K\frac{d(AL)}{dt}}{(AL)^2} = \frac{AL\dot{K} - K\left[A\dot{L} + L\dot{A}\right]}{(AL)^2} = \frac{\dot{K}}{AL} - k\frac{\dot{L}}{L} - k\frac{\dot{A}}{A} \therefore \boxed{\dot{k} = \frac{\dot{K}}{AL} - k(n+g)}$$ [Eq. 28]

- Eq. 27 na Eq. 28 e usando a função de produção na forma intensiva $y = f(k)$, temos que $\dot{k} = f(k) - c - (\delta + n + g)k$, isto é :

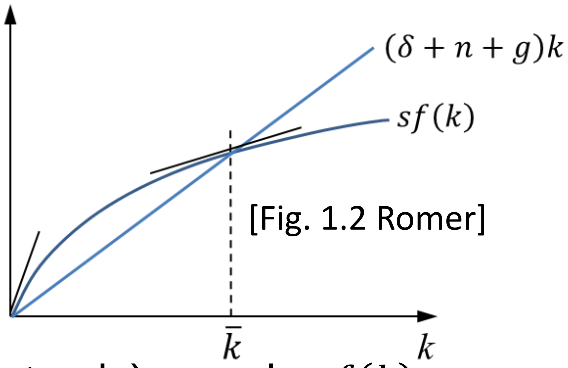
$$\dot{k} = \underbrace{f\left(k(t)\right) - c(t)}_{\textbf{Investimento atual}} - \underbrace{(\delta + n + g)k(t)}_{\textbf{Investimento } \textbf{\textit{break-even}}}$$ [Eq. 29, (2.25) do Romer com $\delta = 0$]

- Antes de analisarmos a Eq.29, devemos fazer uma comparação com a situação similar no Modelo de Solow (próximos 3 slides).

A evolução de *k* reflete tecnologia e deve ser obedecida.
... Não se trata de preferência!

Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – OBS sobre o Modelo de Solow

- No Modelo de Solow, a acumulação de capital é dada por $\dot{K} = sY - \delta K$, onde s é a fração da produção devotada ao investimento (s é poupança exógena e constante no Modelo de Solow – enquanto que no Modelo de Ramsey é endógena). Desta equação, deduzimos que $\dot{k} = sf(k) - (\delta + n + g)k$. Plotando estas duas parcelas de investimento por unidade de trabalho efetivo temos a seguinte figura:



[Fig. 1.2 Romer]

- $f' > 0$, $f'' < 0$ e f é suposta satisfazer as chamadas "condições de Inada": $\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty$ e $\lim_{k \to \infty} f''(k) = 0$.
  Portanto, em k=0, sf(k) tem tangente bem maior do que a linha $(\delta + n + g)k$ e esta tangente vai decrescendo ($f'' < 0$) e as duas curvas devem se interceptar em um $\bar{k}$ (*k.)
- Pela equação $\dot{k} = sf(k) - (\delta + n + g)k$, $\dot{k} > 0$ ($i.e.$ k está aumentando) quando $sf(k) > (\delta + n + g)k$, quando $sf(k) < (\delta + n + g)k$, $\dot{k} < 0$ ($i.e.$ k está caindo) e quando $sf(k) = (\delta + n + g)k$, $\dot{k} = 0$ ($i.e.$ k é constante).
- O investimento de *break-even*, $(\delta + n + g)k$, é a quantidade de investimento que deve ser feito para manter k no seu nível corrente. Existem duas razões para que investimento impeça k de cair: [1] capital existente está depreciando e deve ser reposto para manter o estoque de capital K sem cair (o que é feito pelo termo δk); [2] a quantidade de trabalho efetivo está crescendo e, portanto, não adianta apenas fazer investimento suficiente para manter o estoque de capital (K) constante – ao invés, considerando que a quantidade de trabalho efetivo está crescendo a uma **taxa $n + g$**, o estoque de capital deve crescer a uma taxa de $n + g$ para manter k estável.

A taxa de crescimento de AL é a soma das taxas: $\frac{d(AL)}{dt} = A\dot{L} + L\dot{A} \therefore \frac{d(AL)}{dt}\Big/_{AL} = \frac{A\dot{L} + L\dot{A}}{AL} = \frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{A}}{A} = n + g$

Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – OBS sobre equilíbrio do Modelo de Solow

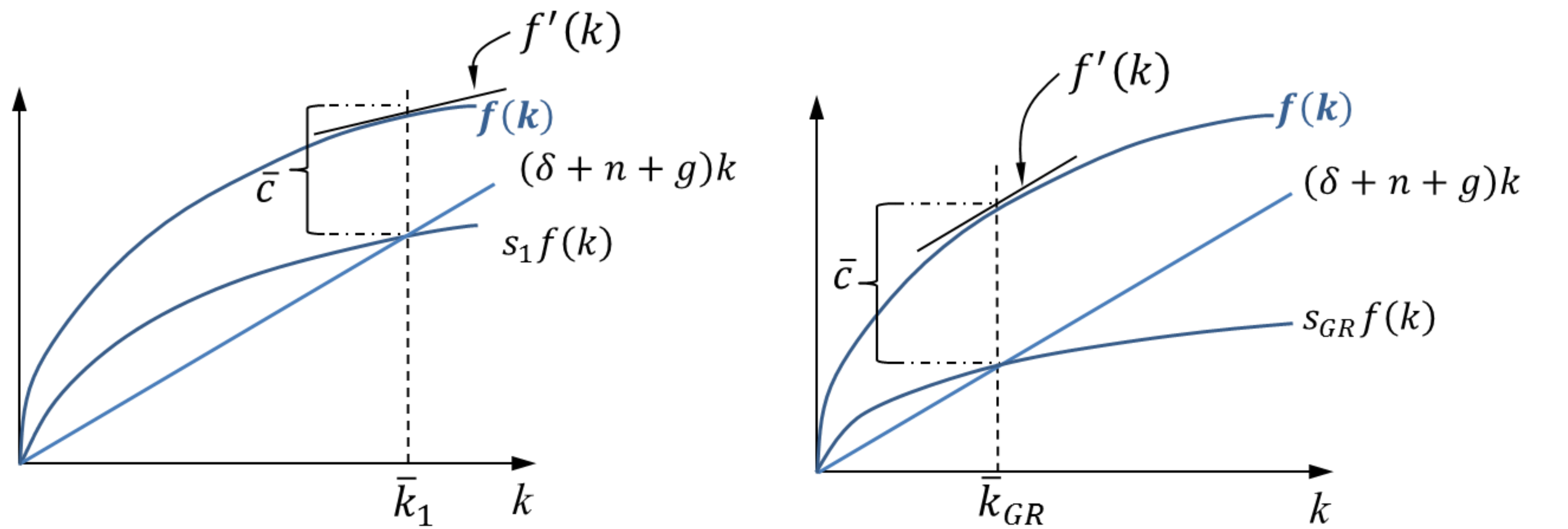
- No Modelo de Solow, k converge para $\bar{k}$. Por hipótese, trabalho e conhecimento crescem a taxas constantes (n e g, respectivamente). $K = ALk$ e k está constante, então a taxa de crescimento do estoque de capital é constante: $\frac{\dot{K}}{K} = n + g$. Com capital e trabalho efetivo crescendo a uma taxa constante de $n + g$, a hipótese de retorno constante implica que o produto Y também cresce nesta mesma taxa. Por fim, capital por trabalhador $^{K}/_{L}$ e produto por trabalhador $^{Y}/_{L}$ crescem a uma taxa g.
- Portanto, o Modelo de Solow implica que, <u>independente do seu ponto de partida</u>, a economia converge para uma **<u>trajetória de crescimento equilibrado</u>** (*balanced growth path*). Isto é, a economia converge para uma situação onde cada variável do modelo está crescendo numa taxa constante. Nesta trajetória de equilíbrio, a taxa de crescimento por trabalhador é determinada somente pela taxa de progresso tecnológico. No último século, grandes economias industrializadas podem ser razoavelmente descritas pela trajetória de crescimento equilibrado de Solow, pois as taxas de crescimento de trabalho, capital e produção foram aproximadamente constantes. Entretanto, Jones (2002) mostrou que isto não é verdade (ver nota 11, pag. 18, Romer).
- Considere que $\bar{c}$ denota o consumo por unidade de trabalho efetivo na trajetória de crescimento equilibrado de Solow. $\bar{c}$ é igual ao produto por unidade de trabalho efetivo $f(\bar{k})$ menos o investimento por unidade de trabalho efetivo $sf(\bar{k})$. Na trajetória de crescimento equilibrado, o investimento atual iguala o investimento *break-even* e, portanto:

$$\bar{c} = f(\bar{k}) - (\delta + n + g)\bar{k}$$ [Eq. 30] eq. 1.19 Romer, ler a barra como *

Jones, C.I. 2002. Sources of U.S. economic growth in a world of ideas. *American Economic Review*, 92 (March), p. 220-239.

Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – OBS sobre equilíbrio do Modelo de Solow

- No Modelo de Solow, a poupança pode ser tal que leva ao máximo nível de consumo entre as trajetórias de crescimento equilibrado. As figuras abaixo (Fig. 1.6 do Romer) mostram que o consumo é máximo quando $f'(\bar{k}) = \delta + n + g$ (*i.e.* a tangente é paralela à reta $(\delta + n + g)k$). Na figura da direita, a tangente é paralela à reta. Este resultado também pode ser obtido, matematicamente, derivando $\frac{\partial \bar{c}}{\partial s}$.



- No caso da figura da direita, uma mudança marginal em s não tem efeito sobre o consumo a longo prazo; e o consumo está no seu nível máximo possível entre as trajetórias de crescimento equilibrado. Este valor de $\bar{k}$ é conhecido como o nível de ***golden-rule*** do estoque de capital. Perguntas:
  – o estoque de capital *golden-rule* é de fato desejável?
  – se poupança for endógena a economia convergirá para este estoque de capital?

Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – A Dinâmica de *k*

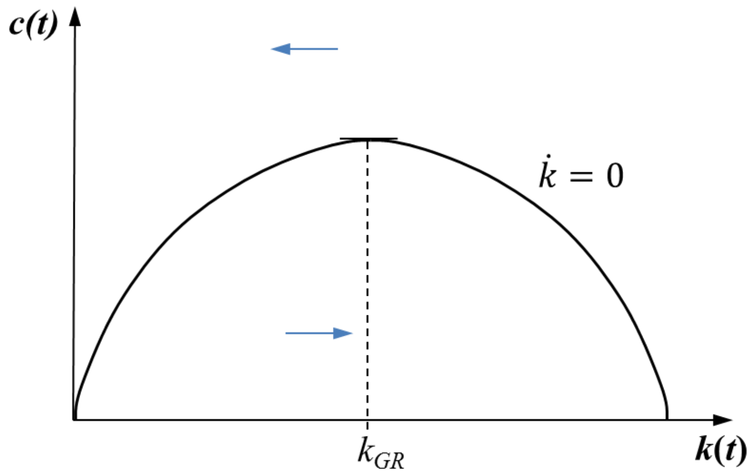
- Voltando à dinâmica de k, a Eq.29, $\dot{k} = f\big(k(t)\big) - c(t) - (\delta + n + g)k(t)$, é simplificada pela hipótese de que não há depreciação:

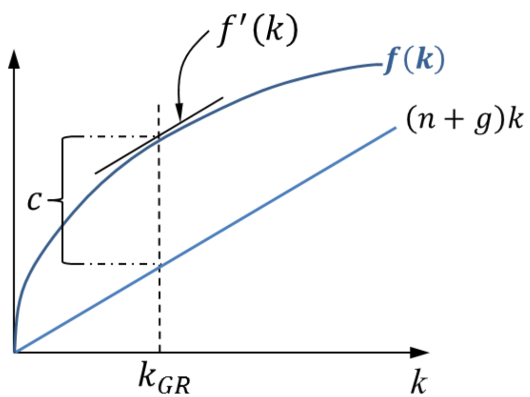
$$\dot{k} = f\big(k(t)\big) - c(t) - (n + g)k(t) \qquad \text{[Eq. 31, (2.25) do Romer]}$$

- Para um dado k, o nível de c que implica em $\dot{k} = 0$ é

$$c(t) = f\big(k(t)\big) - (n + g)k(t) \qquad \text{[Eq. 32]}$$

- Abaixo deste valor, $\dot{k} > 0$ ($i.e.$ k tem comportamento de crescer) e acima deste valor $\dot{k} < 0$ ($i.e.$ k tem comportamento de diminuir). A figura abaixo mostra o lugar onde $\dot{k} = 0$. Nesta figura as setas indicam a direção de movimento de *k*.





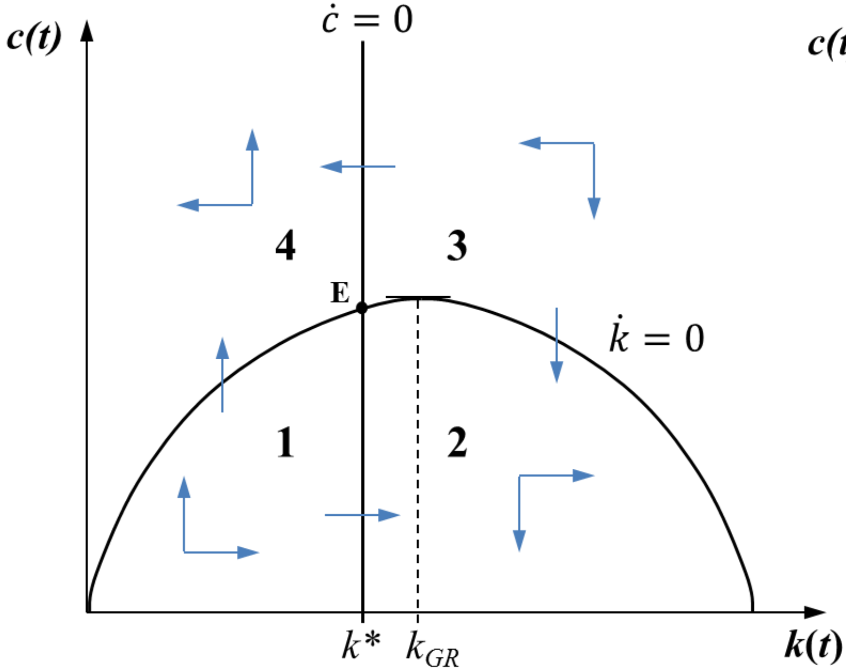
- O valor de c na Eq. 32 cresce com k até um máximo, o que ocorre quando

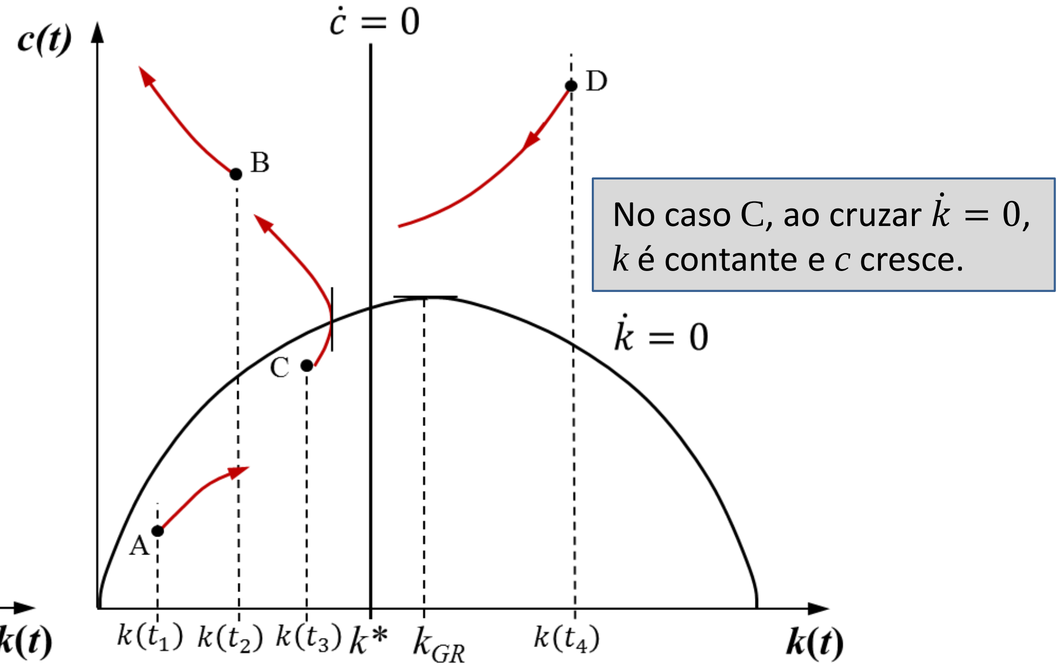
$$f'(k) = n + g \qquad \text{[Eq. 33]}$$

- o valor de k quando isto ocorre é o nível *golden-rule* de k: k_{GR} (já visto no Modelo de Solow). Isto pode ser verificado na figura à direita (acima), quando $f'(k)$ é paralela a $(n + g)k$. O valor de k_{GR} corresponde ao pico da curva de $\dot{k} = 0$. A Eq. 33 também pode vir de $\frac{\partial c}{\partial k} = 0$.

Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – Diagrama de Fase

- As dinâmicas de c e k podem ser combinadas em um diagrama de fase que mostra todas as possíveis direções de movimento.
- Na região $\mathbf{1}$, os movimentos de c e k são no sentido de crescer (setas azuis na mesma direção dos eixos). A figura da direita ilustra alguns movimentos dados um k e um c.

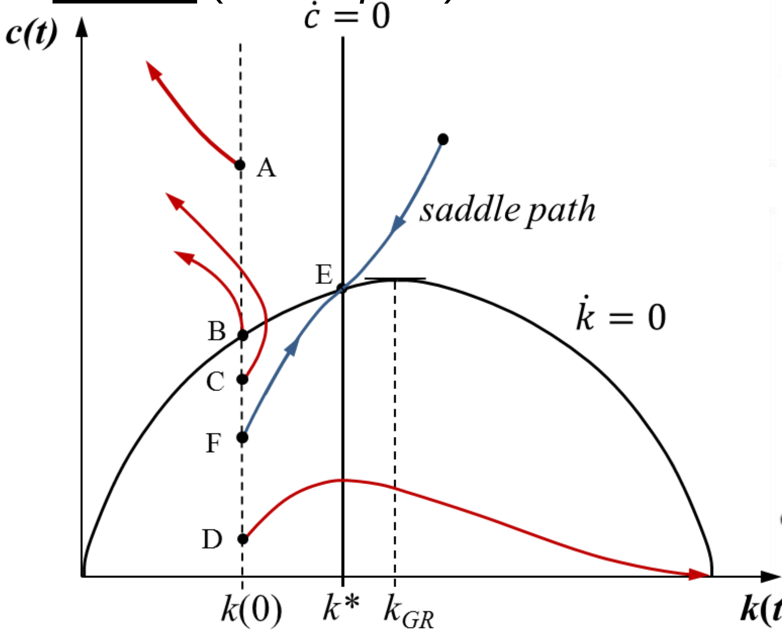


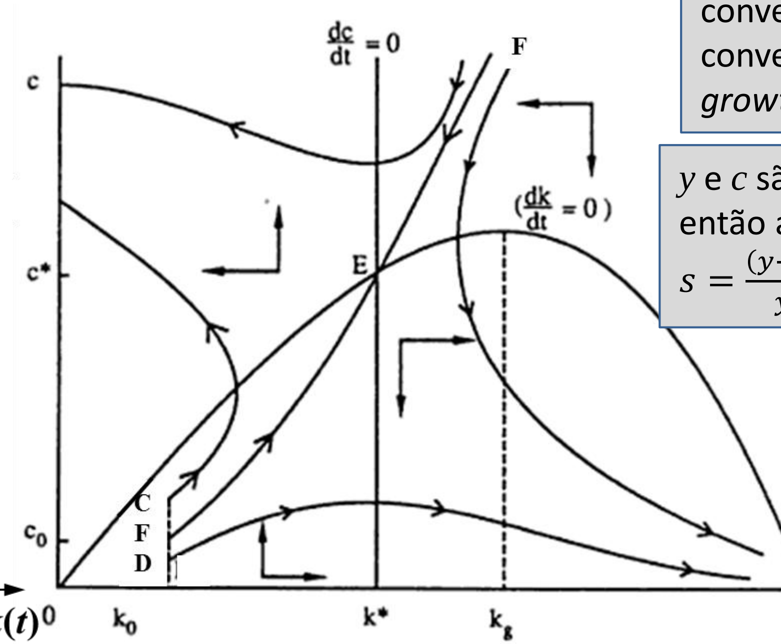


- No ponto E, $\dot{c} = \dot{k} = 0$. Portanto, não há movimento a partir deste ponto!
- Na figura, $k^* < k_{GR}$. Prova: usando a notação para os valores especiais de k, a Eq.25b (slide 20) é $f'(k^*) = \rho + \theta g$ e a Eq.33 (slide 25) é $f'(k_{GR}) = n + g$. Como $f''(k) < 0$, então $f'(k)$ é decrescente. Portanto, $k_{GR} > k^* \leftrightarrow f'(k_{GR}) < f'(k^*) \leftrightarrow (n + g) < (\rho + \theta g) \leftrightarrow \rho - n - (1 - \theta)g > 0$. Esta última relação é exatamente a condição requerida pela *lifetime utility* U (Eq. 2.12 do Romer) para não divergir! $q.e.d$

Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – A Trajetória de Sela

- Dado um valor inicial de k, $k(0)$, o valor inicial de c deve ser determinado. E apenas um determinado valor inicial de c permite movimentos de c e k (*i.e.* uma trajetória) que levam a um ponto estável que é consistente com o processo de otimização das famílias. A figura da esquerda mostra **trajetórias impossíveis** (em vermelho). A figura à direita ilustra melhor os movimento divergentes em torno das trajetórias que levam ao equilíbrio E (trajetória FE). A função que determina o valor inicial de c como uma função de k é conhecida como **trajetória de sela** (*saddle path*).





convergir em E é igual a convergir no *balanced growth path* de Solow

y e c são constantes, então a taxa de poupança $s = \frac{(y-c)}{y}$ também!

k^* e não k_{GR} é o nível ótimo de k, por isto é chamado de *modified golden-rule*.

- Os movimentos para a esquerda do diagrama levam a $k = 0$ (*i.e.*, não há capital e, portanto, o produto é zero) com c positivo. o que não é possível. Os movimentos para a direita entram na região de c decrescente e k crescendo. Neste último caso, k excede o estoque de capital de *golden-rule*, após o qual a taxa de juros reais $f'(k)$ fica menor do que $n + g$ e isto leva a uma *lifetime utility* infinita (divergente) (o que mostraremos mais a frente).

Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – Trajetória de Sela e Transversalidade

- Chamamos de "condições de transversalidade" as condições de otimização usadas em conjunto com equações de Euler para caracterizar trajetórias ótimas de modelos econômicos dinâmicos. Existem várias trajetórias que satisfazem a equação de Euler, <u>mas uma condição de transversalidade permite encontrar a trajetória ótima.</u> O termo foi introduzido pela teoria teoria de otimização dinâmica.
- Um exemplo similar fora da economia é encontrar a trajetória mais curta entre um ponto e uma reta infinitamente longa. A equação de Euler é a condição de que a trajetória tem que ser uma linha reta (... há várias candidatas) e a condição de que a trajetória tem que ser perpendicular à reta é a condição de transversalidade.

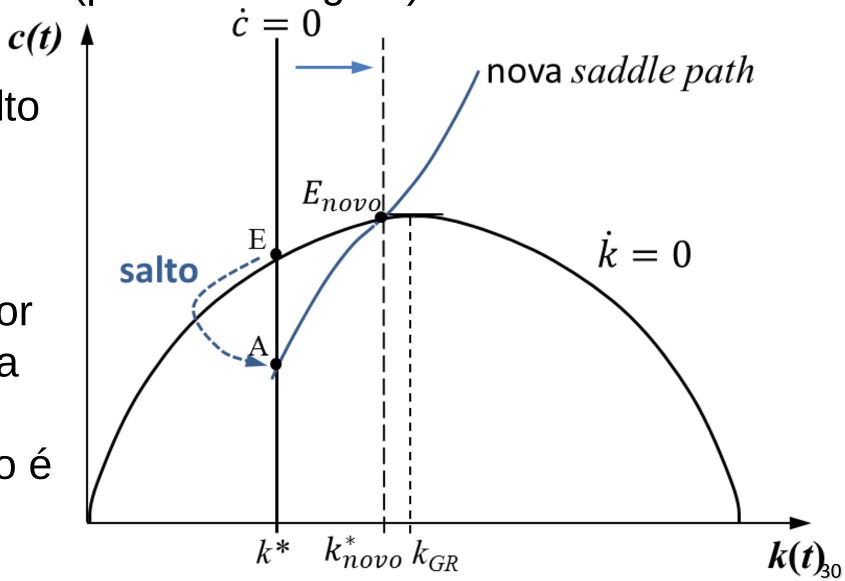
- No modelo de Ramsey, a equação de Euler é a Eq.25a (Eq. 2.24 do Romer) e representa a <u>**condição de otimização intertemporal das famílias**</u>. A Eq.31 (Eq. 2.25 do Romer) estabelece a evolução de *k* (e reflete tecnologia que deve ser obedecida, i.e. não se trata de preferência) é a segunda condição. A terceira condição é $k > 0$.
- A dinâmica de c (Eq. de Euler), a dinâmica do estoque de capital k e $k > 0$ não são condições suficientes. A condição de transversalidade é necessária para encontrar a solução ótima e única. Aqui fazemos uma simplificação adotando a condição de jogo no-Ponzi como sendo a condição de transversalidade. Isto é, a condição de transversalidade é a **restrição orçamentária das famílias** (Eq. 2.15 do Romer) numa forma mais forte de igualdade ($= 0$ ao invés de ≥ 0): $\lim_{s \to \infty} e^{-R(s)} e^{(n+g)} k(s) = 0$.
- Podemos usar a restrição orçamentária das famílias para entender a trajetória de sela (próximo slide).
- De qualquer maneira, o equilíbrio competitivo maximiza o bem estar (*welfare*) das famílias!

Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – Trajetória de Sela e Transversalidade

- A primeira observação é que condições *No-Ponzi-Game* e condições de transversalidade são conceitos diferentes.
  - Na formulação de um problema de consumo, devemos incluir restrições com relação a dívidas (ou do contrário o consumidor nunca pagará sua dívida, deixando ela crescer indefinidamente). Uma maneira de eliminar este comportamento é proibir dívida completamente ($i.e.$ impor que riqueza tem que ser sempre não negativa). Um caminho mais leniente é somente requerer que o valor de riqueza descontado presente seja <u>não negativo no infinito</u>. Esta é restrição conhecida por *no-Ponzi-game* e é diferente de condição de transversalidade. A condição de *no-Ponzi-game* é uma restrição que previne sobre-acumulação de <u>dívida</u>, enquanto que uma condição de transversalidade é uma condição de otimização que elimina sobre-acumulação de <u>riqueza</u>. Estas duas condições colocam restrições opostas.
- No slide 27 vimos que os movimentos para a direita (em D) entram na região de c decrescente e k crescendo. Neste último caso, k excede o estoque de capital de *golden-rule*, após o qual a taxa de juros reais $f'(k)$ fica menor do que $n+g$. Neste caso, $e^{-R(s)}e^{(n+g)s}$ cresce e, como $k(s)$ também está crescendo, então $e^{-R(s)}e^{(n+g)}k(s)$ diverge, isto é: $\lim_{s\to\infty} e^{-R(s)}e^{(n+g)}k(s) = \infty$ (ao invés de 0). Em termos da restrição orçamentária das famílias isto equivale a dizer que o valor presente da renda de vida inteira das famílias é infinitamente maior do que o valor presente do seu consumo de vida inteira. Portanto, cada família pode se dar ao luxo de aumentar seu consumo a cada ponto no tempo e, desta maneira, alcançar maior utilidade. Em outras palavras, as famílias não estão maximizando sua utilidade e, portanto, tal trajetória não pode ser um equilíbrio.
- Se a economia começa numa trajetória de sela (ponto F), k converge para k* e assim r converge para $f'(k^*) = \rho + \theta g$. Neste caso, $e^{-R(s)}e^{(n+g)s}$ cai a uma taxa de ρ – $n -$ $(1-\theta)g = \beta > 0$ e assim $\lim_{s\to\infty} e^{-R(s)}e^{(n+g)}k(s) = 0$. F é, pois, a única trajetória possível.

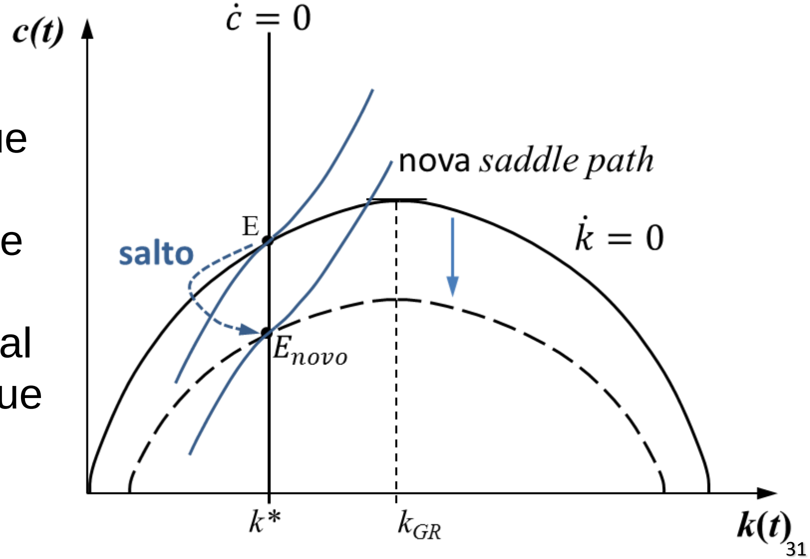
Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – Efeitos de uma Queda em ρ

- Considere uma economia Ramsey-Cass-Koopmans que esteja na sua trajetória de crescimento equilibrado e considere que há uma queda em ρ, a taxa de desconto. Porque ρ é o parâmetro que governa as preferências das famílias entre o consumo atual e futuro, esta mudança é o análogo mais perto a um aumento na taxa de poupança numa economia Solow.
- Como a divisão de produção entre consumo e investimento é determinado por famílias que olham para frente, nós devemos especificar se a mudança é esperada ou imprevista. Se uma mudança é esperada, as famílias podem alterar o seu comportamento antes da mudança ocorrer. Vamos considerar, portanto, o caso simples da mudança inesperada, i.e. um choque.
- Como a evolução de k é determinada pela tecnologia, ρ entra na equação para $\dot{c}$ mas não para k. Portanto, apenas o local $\dot{c} = 0$ é afetado. Como $f''(k) < 0$, então $f'(k)$ é decrescente. E como $f'(k^*) = \rho + \theta g$, então uma queda em ρ aumenta k^* ($i.e.$ a linha $\dot{c} = 0$ se desloca para a direita). Então c (a taxa na qual as famílias estão consumindo) pula para baixo de maneira que a economia está numa nova saddle path (ponto A da figura).
- Similar ao caso de aumento de s em Solow, k aumenta gradualmente para um novo nível mais alto e c inicialmente cai para depois aumentar para um nível acima daquele que estava antes. Portanto, a queda permanente em ρ produz aumentos temporários nas taxas de crescimento de capital por trabalhador e produção por trabalhador. A diferença em relação ao caso Solow (*i.e.* queda de s) é que, em geral, a fração de produção que é poupada não é constante durante o processo de ajuste.



Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – Efeitos de Compras de Governo

- Uma parcela considerável da produção total é comprada pelo governo (e.g. 20% nos USA). O modelo, portanto, precisa ser estendido para incluir o setor do governo.
- Hipóteses:
  - Governo compra produção a uma taxa $G(t)$ por unidade de trabalho efetivo por unidade de tempo.
  - Compras do governo não afetam utilidade de consumo privado.
  - Compras não afetam a produção futura (*i.e.* elas são devotadas ao consumo público ao invés de investimento público).
  - Compras são financiadas por taxas lump-sum por quantidade $G(t)$ (*i.e.* o governo sempre opera um orçamento equilibrado, sem deficit).
- A dinâmica de k inclui $G(t)$: $\dot{k} = f\big(k(t)\big) - c(t) - G(t) - (n+g)k(t)$ [Eq. 34, (2.40) do Romer]
- Então se há um aumento inesperado em $G(t)$ passando do nível G_L para G_H, $\Delta G = G_H - G_L$, a curva $\dot{k} = 0$ se desloca para baixo de ΔG. Como as compras do governo não afetam a equação de Euler, a reta $\dot{c} = 0$ não é afetada. c cai de ΔG e a economia se ajusta a uma nova *saddle path*.
- O aumento permanente nas compras do governo reduz a riqueza de vida inteira das famílias. E, porque estes aumentos são permanentes, não há espaço para as famílias aumentarem sua utilidade através de ajustes de seu consumo. Portanto, o tamanho da queda imediata no consumo é igual à quantidade total do aumento em compras governamentais; e o estoque de capital e a taxa de juros reais não são afetados.



Modelo Ramsey–Cass–Koopmans – Efeitos de Compras de Governo

- Numa economia de Solow, onde o consumo é simplesmente uma fração $1 - s$ da receita corrente, o consumo cai menos que a quantidade de aumento das compras governamentais. Como um resultado, o aumento em compras do governo pressiona os investimentos e, assim, o estoque de capital começa a cair e as taxas de juros reais começam a crescer. Na extensão feita do modelo de Ramsey, nos baseamos na hipótese de que as famílias seguem regras: assim, com otimização intertemporal, um aumento permanente nas compras de governo não pressiona investimentos.
- Um caso mais complicado é quando um aumento antecipado em G é esperado ser temporário. Neste caso, para simplificar, assumimos que a data terminal é conhecida com certeza. Neste caso, podemos mostrar que c não cai de ΔG e a taxa de juros reais cresce, mas depois retorna ao seu nível inicial.

- Em resumo, compras de governo temporariamente altas levam taxas de juros reais a aumentarem, enquanto que compras permanentemente altas não afetam. Este comportamento foi verificado pela teoria em períodos de guerra na Inglaterra, mas não foi nos USA (onde as taxas foram mais baixas do que em outros períodos). Portanto, a teoria ainda é insuficiente para entender completamente como taxas de juros reais respondem a compras do governo.

Modelos Realistas e Defeituosos

- Os modelos de crescimento de Solow e Ramsey oferecem um primeiro momento para se apreciar a utilidade de modelos.
- Estes modelos são grosseiramente simplificados de várias maneiras: só existe um único bem, governo não é completamente considerado, flutuações em emprego são ignoradas, produção é descrita por uma função de produção agregada com apenas 3 insumos, crescimento de população, depreciação e progresso tecnológico são considerados constantes, ...
- Romer (pag. 14) (grifo nosso):
- "*É natural pensar nestas características do modelo como **defeitos**: o modelo omite muitas características óbvias do mundo e, certamente, algumas destas características são importantes para o crescimento. Porém, **o propósito de um modelo não é ser realista**. Afinal, nós **já possuímos um modelo que é completamente realista – o próprio mundo**. O problema com aquele "modelo" é que ele é <u>muito complicado para entender</u>. O propósito de um modelo é prover insights sobre características relevantes do mundo. Se uma hipótese simplificadora leva a um modelo dar respostas incorretas para as questões que ele está tratando, então a falta de realismo pode ser um defeito. (Mesmo quando, a simplificação – mostrando claramente as consequências daquelas características do mundo em um ambiente idealizado – pode ser um ponto de referência útil). Entretanto, se a simplificação não leva o modelo a dar respostas incorretas para as questões que ele está tratando, **então a falta de realismo é uma virtude**: ao isolar o efeito de interesse, **a simplificação torna o mundo mais fácil de entender**."*