Notas sobre Vetores Auto-regressivos*

Gustavo Vital

3 de julho de 2020

Modelos Auto-regressivos são modelos que relacionam sistemas dinâmicos de equações tal que as variáveis das equações são endógenas. De uma outra forma, há dependência contemporânea entre as variáveis, bem como relação com suas defasagens. Considere o sistema bivariado:

$$y_t = b_{10} - b_{12}z_t + \gamma_{11}y_{t-1} + \gamma_{12}z_{t-1} + \epsilon_{yt} \tag{1}$$

$$z_t = b_{20} - b_{21}z_t + \gamma_{21}y_{t-1} + \gamma_{22}z_{t-1} + \epsilon_{zt} \tag{2}$$

onde assumimos que (i) tanto y_t como z_t são estacionárias; (ii) ϵ_{yt} e ϵ_{zt} são ruídos brancos; e (iii) $\{\epsilon_{yt}\}$ e $\{\epsilon_{yt}\}$ são não relacionados. Dizemos que as equações 1 e 2 constituem um **vetor auto-regressivo** de ordem 1. A fim de interpretação, o coeficiente b_{12} representa o efeito contemporâneo de z_t em y_t e γ_{12} representa o efeito de z_{t-1} em y_t.

Ainda, as equações 1 e 2 não podem ser estimadas por OLS visto que y_t tem efeito contemporâneo em z_t e z_t tem efeito contemporâneo em y_t. A estimação por OLS seria, então, viesada e os resíduos seriam correlacionados. Felizmente, é possível transformarmos o sistema de equações de forma que este seja mais palpável. Usando notação matricial podemos reescrever o sistema da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{yt} \\ \epsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

ou ainda:

$$Bx_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 x_{t-1} + \epsilon_t \tag{3}$$

onde:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix}, x_t = \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}, \Gamma_0 = \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}, \Gamma_1 = \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}, \epsilon_t = \begin{bmatrix} \epsilon_{yt} \\ \epsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

pré multiplicando 3 por B^{-1}, obtemos o VAR em sua forma reduzida:

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_t \tag{4}$$

onde $A_0 = B^{-1}\Gamma_0$, $A_1 = B^{-1}\Gamma_1$, e $e_t = B^{-1}\epsilon_t$. Para propósito de notação, podemos definir a_{i0}

*Baseado em Walter Enders

como o elemento i do vetor A_0; a_{ij} como o elemento na linha i e coluna j da matriz A_1 e e_{it} como o elemento i do vetor e_t. Reescrevendo 4 de forma equivalente:

$$y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + e_{1t} \tag{5}$$

$$z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + e_{2t} \tag{6}$$

a diferença crucial entre o sistema apresentado em 1 e 2 para o sistema apresentado acima (5 e 6) é que o primeiro sistema é chamado de VAR em sua forma estrutural, e o segundo de VAR em sua forma reduzida.

1 Estabilidade e Estacionariedade

Num VAR(1) $y_t = a_0 + a_1y_{t-1} + \epsilon_t$ a condição de estabilidade é que a_1 seja menor do que uma unidade em valores absolutos. Podemos reescrever 4:

$$\begin{aligned}
x_t &= A_0 + A_1x_{t-1} + e_t \\
&= A_0 + A_1(A_0 + A_1x_{t-2} + e_{t-1}) + e_t \\
&= (I + A_1)A_0 + A_1^2x_{t-2} + A_1e_{t-1} + e_t
\end{aligned}$$

onde I é a matriz identidade 2×2. Se continuarmos o processo n vezes, de forma que $n \to \infty$ teremos:

$$x_t = (I + A_1 + \cdots + A_1^n)A_0 + \sum_{i=0}^{n} A_1^i e_{t-i} + A_1^{n+1}x_{t-n-1}$$

Se $n \to \infty$ e a condição de estabilidade é verificada, isso é, $a_1 < |1|$, temos:

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} A_1^i e_{t-i} \tag{7}$$