Notas sobre o modelo de Ramsey-Cass-Koopman

Gustavo Vital*

22 de junho de 2020

Modelos de crescimento econômico frequentemente são revisitados e revisados. Em termos do *mainstream* o modelo de Solow (mesmo responsável pelo prêmio Nobel) introduz o conceito de exogeneidade ao crescimento de uma nação. Levando em consideração – na sua forma mais básica – tecnologia; estoque de capital; e trabalho; Solow apresenta de forma sucinta seu modelo de crescimento. O modelo, entretanto, peca em alguns fatores considerados cruciais para o melhor entendimento de como se dá o crescimento de uma economia. Sua premissa de exogeneidade quanto a choques tecnológicos também é contestável, visto que tecnologia acontece fundamentalmente devido a acumulo de conhecimento, educação.

1 O Modelo de Ramsey-Cass-Koopman

O modelo de Ramsey-Cass-Koopman se apresenta como um modelo de horizonte infinito. A vantagem fundamental é explicar de forma matemática o processo de decisão dos agentes, de forma microfundamentada. A compreensão desse modelo é essencial para a compreensão da teoria de *Real Business Cycle* (RBC).

1.1 Premissas do Modelo

Considera-se que existe um número infinito de famílias idênticas e o tamanho de cada família cresce a uma taxa n. A equação que descreve o crescimento da população é dada por:

$$\frac{dL}{dn} = nL$$

integrando de ambos os lados, ficamos com:

$$\int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \int_0^t n dt$$

*Faculdade de Economia do Porto – FEP. Email: gustavoovital@id.uff.br

o que nos dá:

$$\log L\Big|_{L_0}^{L} = nt\Big|_0^t$$
$$\therefore \log L - \log L_0 = nt$$
$$\therefore \log\left(\frac{L}{L_0}\right) = nt$$

aplicando o exponencial:

$$L(t) = L_0 e^{nt} \tag{1}$$

A equação (1) representa o crescimento populacional da economia onde $L(t)$ representa a população total da economia; L_0 a população inicial no momento analisado e t o tempo percorrido. Se considerarmos H como o número de famílias e $\bar{C}$ o consumo total da economia. O consumo per capita será representado por:

$$\frac{\bar{C}(t)}{L(t)}$$

e o consumo por membro família $(C(t))$ será dado por:

$$C(t) = \frac{\bar{C}(t)}{\left(\frac{L(t)}{H}\right)} \tag{2}$$

de onde tiramos que o consumo total pode ser escrito como:

$$\bar{C}(t) = C(t)\frac{L(t)}{H}$$

1.2 Utilidade

Tomando por base um modelo microfundamentado, é essencial que tomemos em consideração a utilidade dos agentes. Representando a utilidade de cada membro da família por $u(C(t))$, podemos generalizar e representar a utilidade da população no período t por:

$$U(\bar{C}(t)) = u(C(t))\frac{L(t)}{H}$$

A utilidade, então, da vida dos indivíduos pode ser representada por:

$$U = U(\bar{C}(0)) + \beta U(\bar{C}(1)) + \beta^2 U(\bar{C}(2)) + \cdots + \beta^t U(\bar{C}(t)) \tag{3}$$

em que β representa o fator de desconto intertemporal da utilidade. O problema da equação acima é levar em consideração que o tempo é uma variável discreta. O problema pode ser representado de outra maneira, tomando por base que o tempo é uma variável contínua:

$$U = \int_0^t \beta^t U(\bar{C}(t))dt \tag{4}$$

podemos reescrever (4) de forma que considere a utilidade por membro da família. Unindo (2) e (4) e considerando um horizonte infinito de tempo, temos:

$$U = \int_0^\infty \beta^t u(C(t))\frac{L(t)}{H}dt \tag{5}$$

a equação (5) é chamada de *lifetime utility*, e demonstra que a geração no período t é seguida de seus descendentes, com transferências intergeracionais baseadas no altruísmo.

Por mais que o modelo de Ramsey-Cass-Koopman não considere expectativas e incertezas, a partir da especificação da função de utilidade é possível inferir sobre determinadas preferências dos agentes. Por exemplo, ao considerarmos que a função utilidade assume um formato CRRA[1], quando o parâmetro θ se aproxima de zero a famílias estão dispostas a aceitarem oscilações no consumo afim de tirarem vantagem da diferença entre a taxa de desconto e a taxa de retorno sobre a poupança. Considerando uma função utilidade de formato CRRA, temos que a *lifetime utility* pode ser expressa por:

$$U = \int_0^\infty \beta^t \left[\frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}\right]\frac{L(t)}{H}dt$$

1.3 Produção e Estoques

A função de produção no modelo de Ramsey-Cass-Koopman se assemelha a função de produção no modelo de Solow. A tecnologia, entretanto, é tratada como uma variável endógena. Definimos de forma genérica a função de produção:

$$Y(t) = F(A(t), K(t), L(t))$$

em que A(t) representa a tecnologia, K(t) o estoque de capitais, e L(t) o trabalho. No modelo, somente os níveis iniciais das variáveis são considerados exógenos e crescem a uma taxa constante, tal que:

$$\dot{L}(t) = nL(t)$$
$$\dot{A}(t) = gA(t)$$

[1] $u(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}$

consideramos, também, que a função de produção possui retornos constantes de escala. Isso é $F(\alpha K, \alpha AL) = \alpha F(K, AL)$. Assim, assumindo retorno constante de escala e dividindo a função de produção por AL e sendo $k = \frac{K}{AL}$, temos:

$$F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) = \frac{1}{AL} F(K, AL) \Rightarrow \underbrace{F(k, 1)}_{f(k)} = \frac{Y}{AL}$$