Notas sobre o Modelo de Solow*

Gustavo Vital†

12 de junho de 2020

O modelo de Solow é ainda hoje um modelo fundamental para a compreensão do crescimento de longo prazo e diferença de renda entre países. Proposto por Robert Solow, mais tarde ganhador do premio nobel de economia, o modelo assume que o crescimento de um país se da fundamentalmente por choques exógenos de tecnologia, dado a função particular de crescimento de longo prazo.

1 Produção, Consumo, e Investimento

O modelo de Solow assume que existe uma função de produção agregada tal que seja composta por capital (K) e trabalho (L), sendo esses fatores os responsáveis pela determinação da produção. Ambos, capital e trabalho, são considerados fatores de produção. A distinção fundamental dos dois fatores é: capital é estoque, trabalho é fluxo.

O trabalho, ainda em termos de distinção, é dado. Não há nada que se possa fazer para aumentar as horas de trabalho em um dia (por mais que se aumente a carga horária, um dia tem um limite de horas possíveis). O capital – por outro lado – é cumulativo. A quantidade de capital num período t influencia *diretamente* a quantidade de capital num período $t+1$.

Em termos matemáticos, podemos escrever a função de produção, tal que: seja K_t o estoque de capital no período t; e N_t o total de horas de

*Baseado em Eric Sims.

†Mestrando em Economia pela Faculdade de Economia do Porto. Email: gustavovital@id.uff.br

trabalho no período t. A função de produção será dada por:

$$Y_t = A_t F(K_t, N_t) \tag{1}$$

A_t é uma **variável exógena** que representa produtividade; tecnologia. F é a função de produção ainda não especificada, que relaciona horas de trabalho com capital. A função F$(\cdot)$ possui as seguintes propriedades $F_K > 0$ e $F_N > 0$. Isso é, o produto marginal é sempre positivo. Além disso, temos $F_{KK} < 0$ e $F_{NN} < 0$, retornos decrescente de produção – quanto mais unidades de capital ou trabalho se possui, menor é a variação do produto em termos de trabalho/capital. assumimos além disso que a função possui retornos constantes de escala. Isso é: $F(\gamma K_t, \gamma N_t) = \gamma F(K_t, N_t)$. Por fim, assumimos que tanto capital quanto trabalho são necessários para a produção i.e. $F(K_t, 0) = F(0, N_t) = 0$.

A fim de apresentar a forma funcional de F$(\cdot)$, trabalharemos com uma função de produção de formato Cobb-Douglas. Então

$$F(K_t, N_t) = K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \quad \text{sendo} \quad 0 < \alpha < 1; \tag{2}$$

dado o problema acima, a firma buscará otimizar seus lucros (Π_t) – produto subtraído de custos e retorno do capital, tal que seu problema de otimização será:

$$\max_{K_t, N_t} \Pi_t = A_t F(K_t, N_t) - w_t N_t - R_t K_t \quad ; \tag{3}$$

onde w_t representa o salário pago pelas firmas e R_t o retorno pago pelo capital. As condições de primeira ordem (CPO) são:

$$w_t = A_t F_N(K_t, N_t) \tag{4}$$

$$R_t = A_t F_K(K_t, N_t) \tag{5}$$

essas condições dizem que as firmas devem contratar capital e trabalho até o ponto em que os "benefícios" marginais se igualam.

Além das firmas, devemos representar as famílias desta economia. Bem como de forma simplificada, as famílias ofertam mão de obra e recebem um salário. Além disso, recebem um retorno referente ao capital, de tal forma que $w_tN_t+R_tK_t$ representa a renda da família no período t. Ainda, a família pode investir o recebido ou consumir. Sua restrição orçamentária é, então:

$$C_t + I_t = w_tN_t + R_tK_t + \Pi_t \tag{6}$$

Como já exposto, as firmas operam em retorno constante de escala, então o produto é igual a renda, de forma que $Y_t = w_tN_t + R_tK_t$. Em 6, ao considerarmos retorno constantes de escala, temos que $\Pi_t = 0$ e apresenta-se a identidade:

$$Y_t = C_t + I_t \tag{7}$$

a evolução do capital por sua vez pode ser apresentada como o estoque de capital no período t não depreciado somado ao investimento do período corrente. Matematicamente:

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t \tag{8}$$

onde $0 < \delta < 1$ representa a taxa de depreciação do capital. A equação acima representa a "lei de movimento" do capital; mais que isso, ela assume que uma unidade de investimento no período t é totalmente revertido em estoque de capital em $t+1$. Exemplificando a lei de movimento do capital, suponha que $k_t = 10$, a taxa de depreciação do capital é igual a 0.1 ($\delta = 0.1$). Se a produção no período t é 3 ($Y_t = 3$)e o consumo no período t também é igual a 3 ($C_t = 3$) temos que $I_t = 0$, de tal forma que $K_{t+1} = 9$. Se o consumo no período t for igual a 2, significa que o investimento nesse período será igual a 1 e assim o capital no período $t+1$ será igual a 10 novamente. O modelo de Solow, visto dessa forma assume – então – que o investimento no período t é uma fração da produção do mesmo período t:

$$I_t = sY_t \quad \text{sendo} \quad 0 < s < 1; \tag{9}$$

combinando 9 com 7 temos:

$$C_t = (1-s)Y_t \tag{10}$$

O modelo de Solow assume dessa forma que a economia pode ser representada pelo consumo corrente num período t e um não-consumo, revertido em investimento, que gera acumulação de capital num período $t+1$. Considera ainda que a quantidade de tempo que uma família passa trabalhando é inelástica ao preço pago pelo trabalho, w_t. Assim, o número de horas de trabalho N_t se torna exógeno ao modelo.[1]. O modelo de Solow é caracterizado, dessa forma, pelas seguintes equações:

$$Y_t = A_t F(K_t, N_t) \tag{11}$$

$$Y_t = C_t + I_t \tag{12}$$

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t \tag{13}$$

$$I_t = sY_t \tag{14}$$

$$w_t = A_t F_N(K_t, N_t) \tag{15}$$

$$R_t = A_t F_K(K_t, N_t) \tag{16}$$

Seis são as equações e seis são as variáveis endógenas. São elas: Y_t, C_t, I_t, K_{t+1}, w_t e R_t. K_t, N_t e A_t são consideradas **exógenas** para o modelo, s e δ são, por sua vez, parâmetros.

Podemos ainda combinar as equações 12, 14, e 15, de tal forma que:

$$K_{t+1} = sA_t F(K_t, N_t) + (1-\delta)K_t \tag{17}$$

A equação 17 representa a evolução do capital. Dado o valor exógeno de $k_t, N_t e A_t$, esses compõe o valor futuro do estoque de capital, de forma que k_{t+1} se torna endógeno ao modelo. É vantajoso, entretanto, escrevermos a equação de maneira que essa represente o valor per capita. Assim, dividindo ambos os lados de 17 por N_t, temos:

$$\frac{K_{t+1}}{N_t} = \frac{sA_t F(K_t, N_t)}{N_t} + \frac{(1-\delta)K_t}{N_t} \tag{18}$$

Definimos então a nossa relação em função do capital por trabalhador. Isso é, $k_t \equiv K_t/N_t$. Dado que nossa função de produção possui retornos constantes

[1]O problema aqui é a ausência da microfundamentação do modelo. A curto prazo as famílias não considerarem a otimização frente a oferta de trabalho não parece fazer muito sentido, a longo prazo entretanto, essa ideia é consistente ao modelo

de escala, podemos escrever a função de produção de forma que:

$$\frac{F(K_t, N_t)}{N_t} = F\left(\frac{K_t}{N_t}, \frac{N_t}{N_t}\right) = F(k_t, 1); \tag{19}$$

dessa forma, podemos reescrever a equação 17 em termos de capital por trabalhador ($f(k_t) \equiv F(k_t, 1)$):

$$\frac{K_{t+1}}{N_t} = sA_t f(k_t) + (1-\delta)k_t \tag{20}$$

A partir desta equação, se multiplicarmos e dividirmos o lado esquerdo por N_{t+1}, e considerando que a força de trabalho é exógena e constante em relação a $t, t+1$, temos:

$$\frac{K_{t+1}}{N_t}\frac{N_{t+1}}{N_{t+1}} = sA_t f(k_t) + (1-\delta)k_t$$

Em termos de capital per capita, temos a equação central do modelo de Solow:

$$k_{t+1} = sA_t f(k_t) + (1-\delta)k_t \tag{21}$$

essa descreve a evolução do capital em termos de trabalhadores, dado a produtividade, a taxa de depreciação do capital e a taxa marginal de investimento. Reescrevendo as equações fundamentais do modelo, em termo de capital por trabalhadores, temos:

$$y_t = Af(k_t) \tag{22}$$

$$c_t = (1-s)Af(k_t) \tag{23}$$

$$i_t = sAf(k_t) \tag{24}$$

2 Analise Gráfica do Modelo de Solow

Iremos analisar o modelo de Solow de forma gráfica e matemática. Considere a equação central do modelo de Solow 21. Podemos graficamente representar essa equação de forma que k_{t+1} se relacione com k_t. Se $k_t = 0$, então $k_{t+1} = 0$, dado que o capital é uma variável necessária para a produção.

Graficamente, isso significa que quando k_{t+1} está no eixo vertical e k_t no eixo horizontal, o gráfico começa na origem. A questão é: como k_{t+1} irá variar, dado uma variação em k_t? Afim de uma melhor compreensão da relação capital, tiremos a derivada de k_{t+1} em relação a k_t:

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = sAf'(k_t) + (1 - \delta); \tag{25}$$

a equação 25 acima representa a inclinação da curva k_{t+1} contra k_t. A magnitude da inclinação depende do valor de k_t. Ainda, sendo $f'(k_t)$ positivo e $\delta < 1$, a inclinação é positiva, então k_{t+1} cresce em função de k_t. Sendo $f''(k_t) < 0$, o termo $sAf'(k_t)$ fica cada vez menor conforme k_t aumenta. Vamos assumir mais duas condições[2]:

$$\lim_{k_t \to 0} f'(k_t) = \infty \tag{26}$$

$$\lim_{kt \to \infty} f'(k_t) = 0 \tag{27}$$

Em outras palavras, 26 diz que o produto marginal do capital é infinito quando não há capital; e 27 diz que o produto marginal do capital é zero quando o capital tente ao infinito[3].

A Figura 1 representa a relação entre k_t e k_{t+1}. A curva começa na origem, e conforme k_t aumenta, k_{t+1} cresce e possui inclinação de $(1 - \delta)$. Foi adicionado ao gráfico uma reta de 45 graus, representando $k_t = k_{t+1}$. k_{t+1} inicia com uma inclinação maior que 1 ($\delta < 0$), consequentemente acima da reta de 45 graus e conforme varia[4] a inclinação da curva referente a função de acumulação de capital se torna menos inclinada.

Eventualmente, dada a inclinação da curva, essa irá cruzar a reta $k_t = k_{t+1}$, no ponto k_t^*. Esse ponto é conhecido como "estado estacionário"[5].

Normalmente se inclui a reta em 45 graus devido a análise direta do funcionamento do modelo. Isso é, a dinâmica do estoque de capital por trabalhador. Ainda, a reta permite refletir o eixo vertical no eixo horizon-

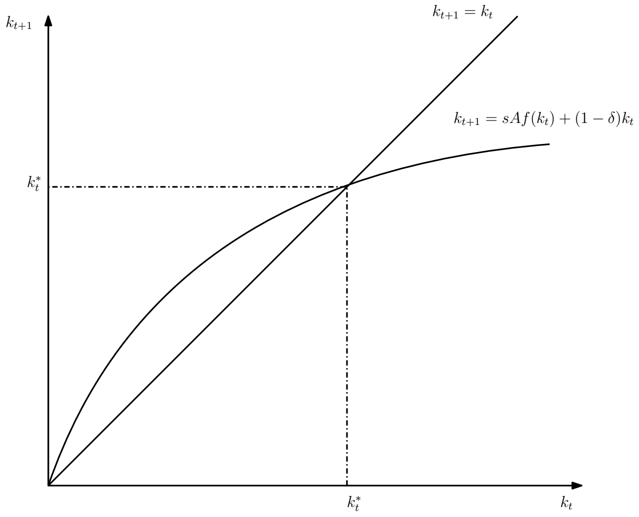
[2]Essas condições são conhecidas também como "condições de Inada"

[3]infinitamente grande

[4]$\delta < 1$

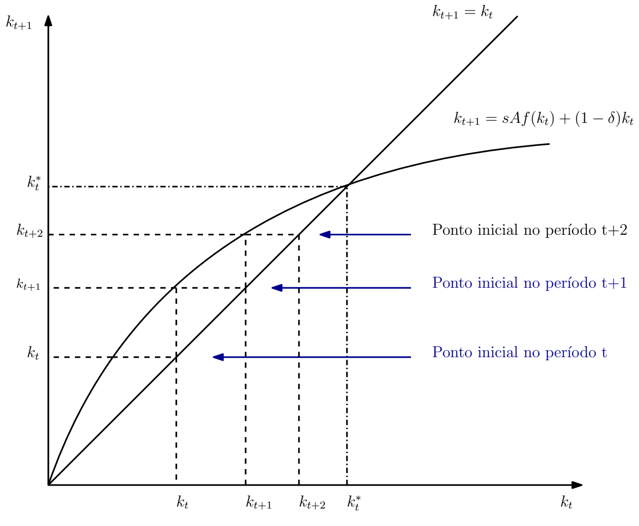
[5]"Steady State"

Figura 1: Grafico da equação central do modelo de Solow



tal. Por exemplo, suponha que a economia num período t tal que $k_t < k_t^*$, dessa forma com estoque de capital abaixo do estoque do estado estacionário. Podemos entender o capital de estoque “refletindo” na reta de 45 graus.

Figura 2: Convergência para o estado estacionário ($k_t < k_t^*$)



O movimento ao estado estacionário acontece pela reflexão na reta que simboliza o estado estacionário. Dado um estoque de capital no período t, senão no estado estacionário esse é “iterado” entre a curva que representa o estado estacionário e a que representa a equação central do modelo de Solow.

A analise feita acima possui um ponto crucial: dado um valor de k_t diferente de zero, o estoque de capital tende a caminhar ao seu estado estacionário. Em outras palavras, o estado estacionário é um "ponto de atração" do estoque de capital. Uma vez que o estoque de capital atinge seu estado estacionário este permanece ali, desde que $k_t = k_{t+1}$.

O estado estacionário é sempre um ponto de interesse analítico. Não porque uma vez nesse ponto a economia permanece nesse ponto, mas porque independente dos valores iniciais esse é o estado que a economia irá convergir.

3 A Álgebra do Estado Estacionário A Partir de uma Função Cobb-Douglas de Produção

Suponhamos agora que a função de produção da economia assume forma funcional de uma Cobb-Douglas. Para resolvermos o modelo no seu estado estacionário temos $k_t = k_{t+1} = k_t^*$:

$$k_t^* = sAk_t^{*\alpha} + (1-\delta)k_t^* \tag{28}$$

k_t^* pode ser definido como:

$$k_t^* = \left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{29}$$

A medida em que s e A aumentam, k_t^* aumenta. Por sua vez, a medida em que δ aumenta, k_t^* diminui. Isso é, o estoque de capital é inversamente proporcional a taxa de desconto do capital, bem como é proporcional a propensão marginal a investir e a produtividade. Além disso, podemos obter o valor das outras variáveis para o estado estacionário, visto que podemos substituir k_t^* nas outras equações, de forma que:

$$y^* = Ak^{*\alpha} \tag{30}$$

$$c^* = (1-s)Ak^{*\alpha} \tag{31}$$

$$i^* = sAk^{*\alpha} \tag{32}$$

$$R^* = \alpha Ak^{*\alpha-1} \tag{33}$$

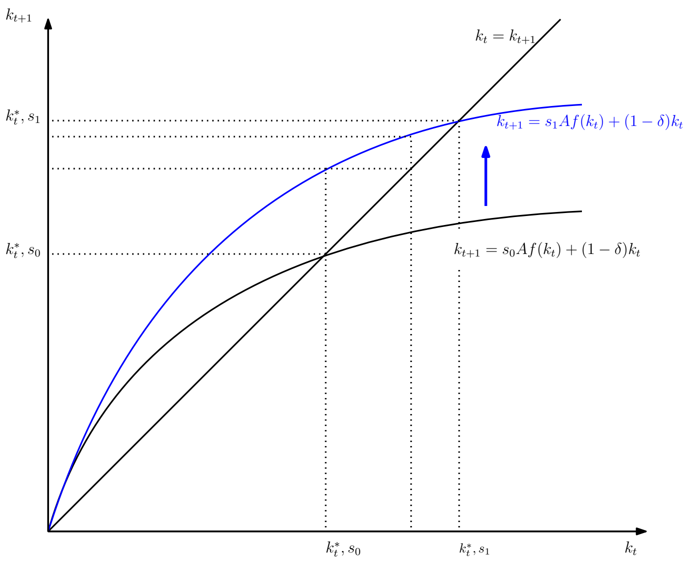
$$w^* = (1-\alpha)Ak^{*\alpha} \tag{34}$$

4 Mudanças em s e Mudanças em A

Nosso objetivo agora é entender como as variáveis endógenas reagem a mudanças nas variáveis exógenas s e A. Vamos considerar inicialmente uma mudança em s. Esta, no mundo real, poderia ser vista como uma mudança de política fiscal por exemplo. Suponha inicialmente a economia no estado estacionário, onde s inicial é dado por s_0. Então, em t, $s_1 > s_0$.

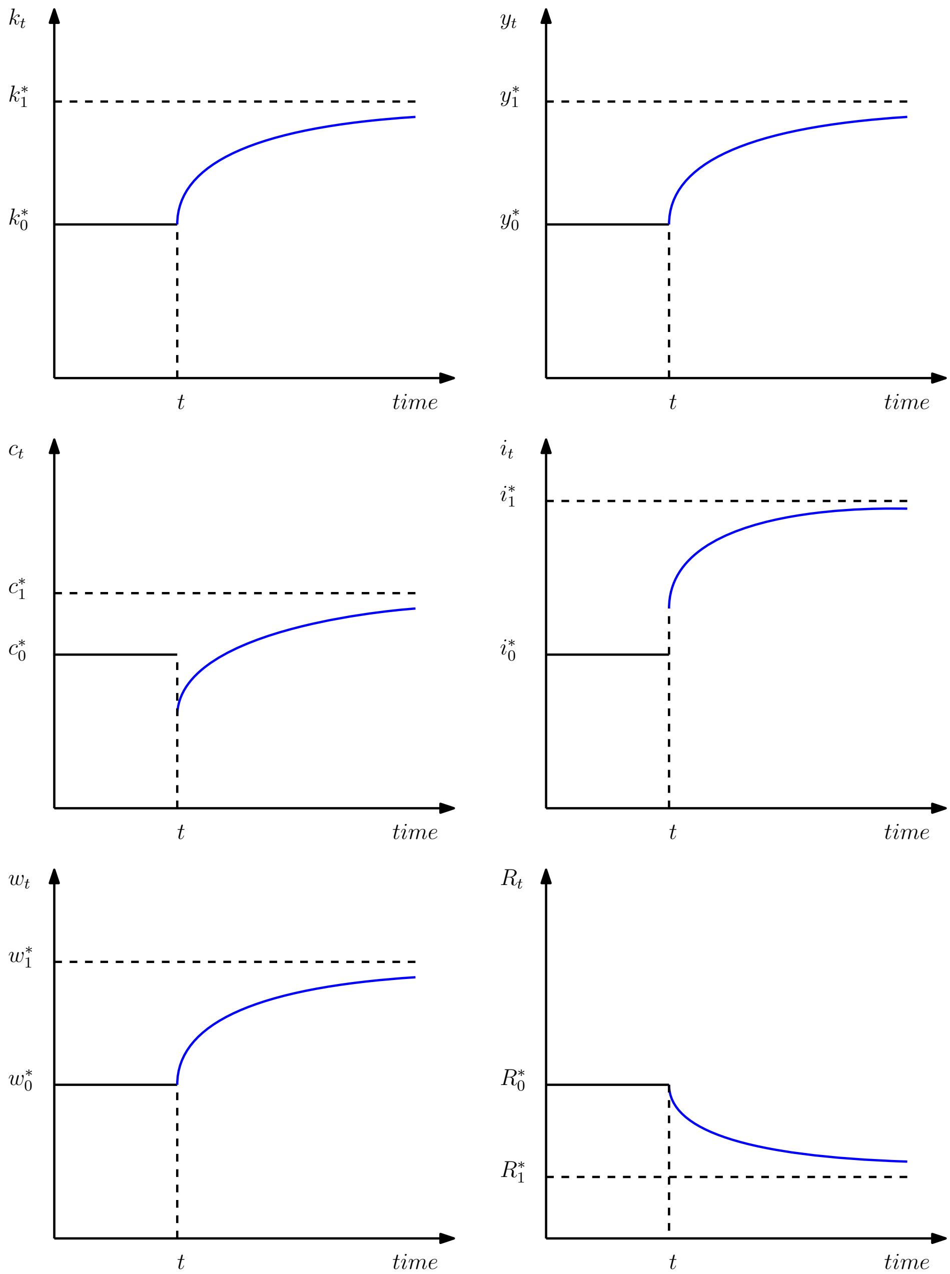
Em termos gráficos, um aumento em s desloca a curva da equação central do modelo para cima. Desta forma a economia passa a caminhar para um novo estado estacionário, em que $k_1^* > k_0^*$, Figura 3

Figura 3: Aumento em s, $s_1 > s_0$



É possível perceber que dado um aumento na propensão marginal a investir, o estoque de capital por trabalhador aumenta. O novo estado estacionário, entretanto, não acontece de uma hora para outra. Como sabemos que $k^*, s_1 > k^*, s_0$, é interessante observarmos o que ocorre com as outras variáveis endógenas.

Figura 4: Respostas das variáveis endógenas a um aumento em s

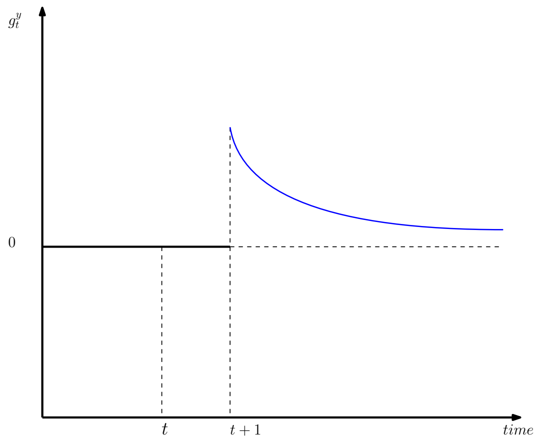


Como mostrado na Figura 4, é possível traçarmos a dinâmica de resposta as variáveis endógenas. Dando mais atenção para o comportamento do consumo e do investimento, temos que a representação dessas variáveis no estado estacionário são dadas por:

$$c^* = (1-s)Ak^{*\alpha}$$
$$i^* = sAk^{*\alpha}$$

de forma que o choque em s, propensão marginal a investir afetará **diretamente** essas duas variáveis no período t, enquanto quando comparado com as outras variáveis do modelo, o choque se da "de forma gradual". A associação em relação ao consumo e ao investimento parte da identidade de o que não é investido é consumido, e vice-versa. Então, dado um choque positivo em s, o consumo irá reduzir a mesma proporção que o investimento aumenta. Como com um aumento em s desloca a economia para um estado estacionário, tal que $k_1^* > k_0^*$, o choque negativo no consumo aumenta gradualmente, de forma que $c_1^* > c_0^*$ - dado que o consumo pode ser posto em função do produto. Em relação ao investimento, a lógica é a mesma. Como o investimento é uma função direta do produto, um aumento em s no período t elevará **imediatamente** o investimento e com o passar do tempo este aumentará mais ainda[6].

Figura 5: Trajetória do crescimento pós choque positivo em s



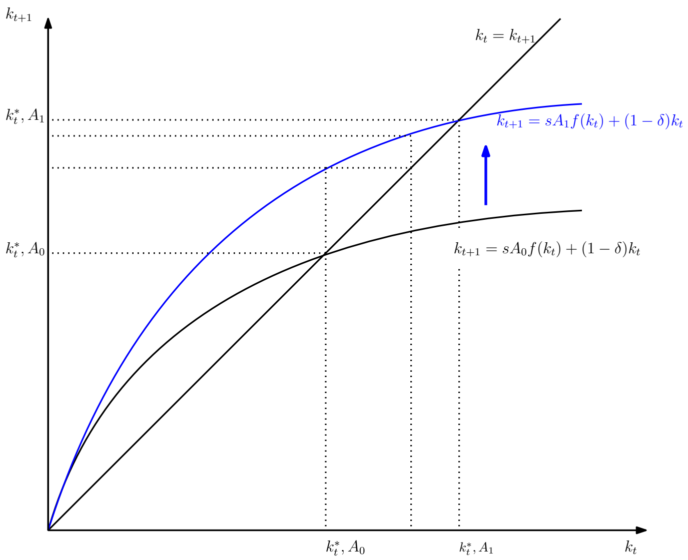
[6] O investimento em t sai do estado estacionário, e seu novo "Steady State" se dá no equilíbrio da economia em k^*

A Figura 5 apresenta a convergência da taxa de crescimento da economia pós choque positivo em s. Inicialmente há um aumento na taxa de crescimento devido a associação do produto com a propensão a investir. Entretanto, o choque é dissipado até o retorno da taxa de crescimento ao seu estado estacionário.

Vamos analisar agora o que acontece com a economia quando há um aumento de produtividade, um aumento em A.

Diferente do que acontece com um aumento na taxa de investimento, um aumento em A se dá de forma permanente. Suponhamos que num estado inicial estacionário, a produtividade seja representada por A_0, dado um choque em A, tal que $A_1 > A_0$ os valores futuros de A serão maiores do que A_0. Em termos dos efeitos dinâmicos na economia, mostremos antes a representação em função do estoque de capital.

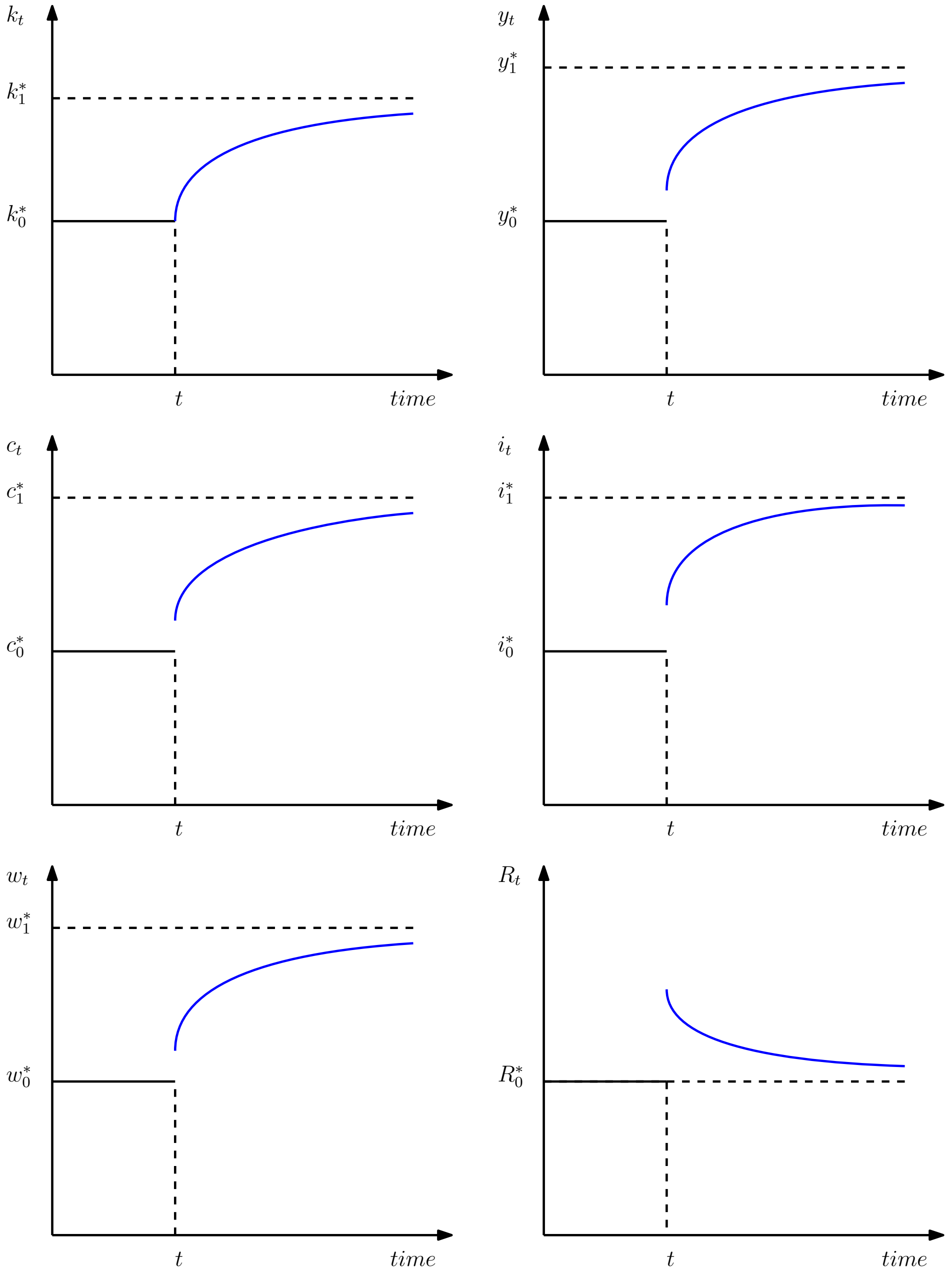
Figura 6: Aumento em A, $A_1 > A_0$



A Figura 6, muito similar a Figura 3, representa um aumento na variável A, de tal maneira que após o choque de produtividade o estado estacionário da economia passa de $k_t^* A_0$ para $k_t^* A_1$. Como feito anteriormente, vamos representar o que acontece com as outras variáveis endógenas.

É interessante perceber que a mudança em k_t é a única que ocorre de

Figura 7: Respostas das variáveis endógenas a um aumento em A



forma gradual. Isso porque k_t é a única variável associada diretamente a A. A rentabilidade do capital (R_t), por sua vez, inicialmente sofre um aumento, devido ao aumento repentino na produtividade marginal do capital e – então – de forma gradual tende novamente ao seu estado estacionário. Podemos associar da mesma forma y_t. O produto da economia é função do estoque de capital por trabalhador que por sua vez é relacionado a tecnologia, produtividade, da economia.

A trajetória do crescimento da economia, por sua vez, é muito similar quando esta sofre um choque em s. Devemos, entretanto, nos atentar para o fato de que um aumento da produtividade em t **afeta a economia já em** t. Isso é, não há defasagem como acontece em relação a s. O retorno ao estado estacionário, por outro lado, ocorre de maneira semelhante.

Figura 8: Trajetória do crescimento pós choque positivo em s