

# Notas sobre o Modelo de Solow\*

Gustavo Vital†

11 de junho de 2020

O modelo de Solow é ainda hoje um modelo fundamental para a compreensão do crescimento de longo prazo e diferença de renda entre países. Proposto por Robert Solow, mais tarde ganhador do prêmio nobel de economia, o modelo assume que o crescimento de um país se dá fundamentalmente por choques exógenos de tecnologia, dado a função particular de crescimento de longo prazo.

## 1 Produção, Consumo, e Investimento

O modelo de Solow assume que existe uma função de produção agregada tal que seja composta por capital (K) e trabalho (L), sendo esses fatores os responsáveis pela determinação da produção. Ambos, capital e trabalho, são considerados fatores de produção. A distinção fundamental dos dois fatores é: capital é estoque, trabalho é fluxo.

O trabalho, ainda em termos de distinção, é dado. Não há nada que se possa fazer para aumentar as horas de trabalho em um dia (por mais que se aumente a carga horária, um dia tem um limite de horas possíveis). O capital – por outro lado – é cumulativo. A quantidade de capital num período  $t$  influencia *diretamente* a quantidade de capital num período  $t + 1$ .

Em termos matemáticos, podemos escrever a função de produção, tal que: seja  $K_t$  o estoque de capital no período  $t$ ; e  $N_t$  o total de horas de

---

\*Baseado em Eric Sims.

†Mestrando em Economia pela Faculdade de Economia do Porto. Email: gustavovital@id.uff.br

trabalho no período  $t$ . A função de produção será dada por:

$$Y_t = A_t F(K_t, N_t) \quad (1)$$

$A_t$  é uma **variável exógena** que representa produtividade; tecnologia.  $F$  é a função de produção ainda não especificada, que relaciona horas de trabalho com capital. A função  $F(\cdot)$  possui as seguintes propriedades  $F_K > 0$  e  $F_N > 0$ . Isso é, o produto marginal é sempre positivo. Além disso, temos  $F_{KK} < 0$  e  $F_{NN} < 0$ , retornos decrescente de produção – quanto mais unidades de capital ou trabalho se possui, menor é a variação do produto em termos de trabalho/capital. assumimos além disso que a função possui retornos constantes de escala. Isso é:  $F(\gamma K_t, \gamma N_t) = \gamma F(K_t, N_t)$ . Por fim, assumimos que tanto capital quanto trabalho são necessários para a produção i.e.  $F(K_t, 0) = F(0, N_t) = 0$ .

A fim de apresentar a forma funcional de  $F(\cdot)$ , trabalharemos com uma função de produção de formato Cobb-Douglas. Então

$$F(K_t, N_t) = K_t^\alpha N_t^{1-\alpha} \quad \text{sendo} \quad 0 < \alpha < 1; \quad (2)$$

dado o problema acima, a firma buscará otimizar seus lucros ( $\Pi_t$ ) – produto subtraído de custos e retorno do capital, tal que seu problema de otimização será:

$$\max_{K_t, N_t} \Pi_t = A_t F(K_t, N_t) - w_t N_t - R_t K_t \quad ; \quad (3)$$

onde  $w_t$  representa o salário pago pelas firmas e  $R_t$  o retorno pago pelo capital. As condições de primeira ordem (CPO) são:

$$w_t = A_t F_N(K_t, N_t) \quad (4)$$

$$R_t = A_t F_K(K_t, N_t) \quad (5)$$

essas condições dizem que as firmas devem contratar capital e trabalho até o ponto em que os “benefícios” marginais se igualam.

Além das firmas, devemos representar as famílias desta economia. Bem como de forma simplificada, as famílias ofertam mão de obra e recebem um

salário. Além disso, recebem um retorno referente ao capital, de tal forma que  $w_t N_t + R_t K_t$  representa a renda da família no período  $t$ . Ainda, a família pode investir o recebido ou consumir. Sua restrição orçamentária é, então:

$$C_t + I_t = w_t N_t + R_t K_t + \Pi_t \quad (6)$$

Como já exposto, as firmas operam em retorno constante de escala, então o produto é igual a renda, de forma que  $Y_t = w_t N_t + R_t K_t$ . Em 6, ao considerarmos retorno constantes de escala, temos que  $\Pi_t = 0$  e apresenta-se a identidade:

$$Y_t = C_t + I_t \quad (7)$$

a evolução do capital por sua vez pode ser apresentada como o estoque de capital no período  $t$  não depreciado somado ao investimento do período corrente. Matematicamente:

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t \quad (8)$$

onde  $0 < \delta < 1$  representa a taxa de depreciação do capital. A equação acima representa a “lei de movimento” do capital; mais que isso, ela assume que uma unidade de investimento no período  $t$  é totalmente revertido em estoque de capital em  $t + 1$ . Exemplificando a lei de movimento do capital, suponha que  $k_t = 10$ , a taxa de depreciação do capital é igual a 0.1 ( $\delta = 0.1$ ). Se a produção no período  $t$  é 3 ( $Y_t = 3$ ) e o consumo no período  $t$  também é igual a 3 ( $C_t = 3$ ) temos que  $I_t = 0$ , de tal forma que  $K_{t+1} = 9$ . Se o consumo no período  $t$  for igual a 2, significa que o investimento nesse período será igual a 1 e assim o capital no período  $t + 1$  será igual a 10 novamente. O modelo de Solow, visto dessa forma assume – então – que o investimento no período  $t$  é uma fração da produção do mesmo período  $t$ :

$$I_t = sY_t \quad \text{sendo} \quad 0 < s < 1; \quad (9)$$

combinando 9 com 7 temos:

$$C_t = (1 - s)Y_t \quad (10)$$

O modelo de Solow assume dessa forma que a economia pode ser represen-

tada pelo consumo corrente num período  $t$  e um não-consumo, revertido em investimento, que gera acumulação de capital num período  $t + 1$ . Considera ainda que a quantidade de tempo que uma família passa trabalhando é inelástica ao preço pago pelo trabalho,  $w_t$ . Assim, o número de horas de trabalho  $N_t$  se torna exógeno ao modelo.<sup>1</sup> O modelo de Solow é caracterizado, dessa forma, pelas seguintes equações:

$$Y_t = A_t F(K_t, N_t) \quad (11)$$

$$Y_t = C_t + I_t \quad (12)$$

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t \quad (13)$$

$$I_t = sY_t \quad (14)$$

$$w_t = A_t F_N(K_t, N_t) \quad (15)$$

$$R_t = A_t F_K(K_t, N_t) \quad (16)$$

Seis são as equações e seis são as variáveis endógenas. São elas:  $Y_t, C_t, I_t, K_{t+1}, w_t$  e  $R_t$ .  $K_t, N_t$  e  $A_t$  são consideradas **exógenas** para o modelo,  $s$  e  $\delta$  são, por sua vez, parâmetros.

Podemos ainda combinar as equações 12, 14, e 15, de tal forma que:

$$K_{t+1} = sA_t F(K_t, N_t) + (1 - \delta)K_t \quad (17)$$

A equação 17 representa a evolução do capital. Dado o valor exógeno de  $k_t, N_t$  e  $A_t$ , esses compõem o valor futuro do estoque de capital, de forma que  $k_{t+1}$  se torna endógeno ao modelo. É vantajoso, entretanto, escrevermos a equação de maneira que essa represente o valor per capita. Assim, dividindo ambos os lados de 17 por  $N_t$ , temos:

$$\frac{K_{t+1}}{N_t} = \frac{sA_t F(K_t, N_t)}{N_t} + \frac{(1 - \delta)K_t}{N_t} \quad (18)$$

Definimos então a nossa relação em função do capital por trabalhador. Isso é,  $k_t \equiv K_t/N_t$ . Dado que nossa função de produção possui retornos constantes

---

<sup>1</sup>O problema aqui é a ausência da microfundamentação do modelo. A curto prazo as famílias não considerarem a otimização frente a oferta de trabalho não parece fazer muito sentido, a longo prazo entretanto, essa ideia é consistente ao modelo

de escala, podemos escrever a função de produção de forma que:

$$\frac{F(K_t, N_t)}{N_t} = F\left(\frac{K_t}{N_t}, \frac{N_t}{N_t}\right) = F(k_t, 1); \quad (19)$$

dessa forma, podemos reescrever a equação 17 em termos de capital por trabalhador ( $f(k_t) \equiv F(k_t, 1)$ ):

$$\frac{K_{t+1}}{N_t} = sA_t f(k_t) + (1 - \delta)k_t \quad (20)$$

A partir desta equação, se multiplicarmos e dividirmos o lado esquerdo por  $N_{t+1}$ , e considerando que a força de trabalho é exógena e constante em relação a  $t, t + 1$ , temos:

$$\frac{K_{t+1}}{N_t} \frac{N_{t+1}}{N_{t+1}} = sA_t f(k_t) + (1 - \delta)k_t$$

Em termos de capital per capita, temos a equação central do modelo de Solow:

$$k_{t+1} = sA_t f(k_t) + (1 - \delta)k_t \quad (21)$$

essa descreve a evolução do capital em termos de trabalhadores, dado a produtividade, a taxa de depreciação do capital e a taxa marginal de investimento. Reescrevendo as equações fundamentais do modelo, em termo de capital por trabalhadores, temos:

$$y_t = A f(k_t) \quad (22)$$

$$c_t = (1 - s)A f(k_t) \quad (23)$$

$$i_t = sA f(k_t) \quad (24)$$

## 2 Análise Gráfica do Modelo de Solow

Iremos analisar o modelo de Solow de forma gráfica e matemática. Considere a equação central do modelo de Solow 21. Podemos graficamente representar essa equação de forma que  $k_{t+1}$  se relacione com  $k_t$ . Se  $k_t = 0$ , então  $k_{t+1} = 0$ , dado que o capital é uma variável necessária para a produção.

Graficamente, isso significa que quando  $k_{t+1}$  está no eixo vertical e  $k_t$  no eixo horizontal, o gráfico começa na origem. A questão é: como  $k_{t+1}$  irá variar, dado uma variação em  $k_t$ ? Afim de uma melhor compreensão da relação capital, tiremos a derivada de  $k_{t+1}$  em relação a  $k_t$ :

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = sAf'(k_t) + (1 - \delta); \quad (25)$$

a equação 25 acima representa a inclinação da curva  $k_{t+1}$  contra  $k_t$ . A magnitude da inclinação depende do valor de  $k_t$ . Ainda, sendo  $f'(k_t)$  positivo e  $\delta < 1$ , a inclinação é positiva, então  $k_{t+1}$  cresce em função de  $k_t$ . Sendo  $f''(k_t) < 0$ , o termo  $sAf'(k_t)$  fica cada vez menor conforme  $k_t$  aumenta. Vamos assumir mais duas condições<sup>2</sup>:

$$\lim_{k_t \rightarrow 0} f'(k_t) = \infty \quad (26)$$

$$\lim_{k_t \rightarrow \infty} f'(k_t) = 0 \quad (27)$$

Em outras palavras, 26 diz que o produto marginal do capital é infinito quando não há capital; e 27 diz que o produto marginal do capital é zero quando o capital tende ao infinito<sup>3</sup>.

A Figura 1 representa a relação entre  $k_t$  e  $k_{t+1}$ . A curva começa na origem, e conforme  $k_t$  aumenta,  $k_{t+1}$  cresce e possui inclinação de  $(1 - \delta)$ . Foi adicionado ao gráfico uma reta de 45 graus, representando  $k_t = k_{t+1}$ .  $k_{t+1}$  inicia com uma inclinação maior que 1 ( $\delta < 0$ ), conseqüentemente acima da reta de 45 graus e conforme varia<sup>4</sup> a inclinação da curva referente a função de acumulação de capital se torna menos inclinada.

Eventualmente, dada a inclinação da curva, essa irá cruzar a reta  $k_t = k_{t+1}$ , no ponto  $k_t^*$ . Esse ponto é conhecido como “estado estacionário”<sup>5</sup>.

Normalmente se inclui a reta em 45 graus devido a análise direta do funcionamento do modelo. Isso é, a dinâmica do estoque de capital por trabalhador. Ainda, a reta permite refletir o eixo vertical no eixo horizon-

---

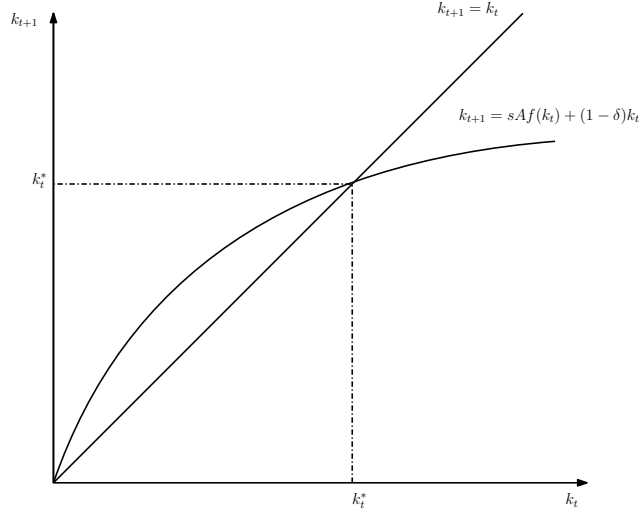
<sup>2</sup>Essas condições são conhecidas também como “condições de Inada”

<sup>3</sup>infinitamente grande

<sup>4</sup> $\delta < 1$

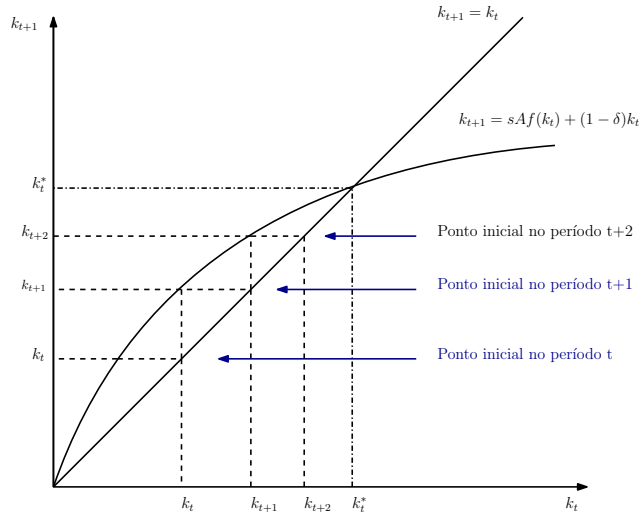
<sup>5</sup>“Steady State”

Figura 1: Grafico da equação central do modelo de Solow



tal. Por exemplo, suponha que a economia num período  $t$  tal que  $k_t < k_t^*$ , dessa forma com estoque de capital abaixo do estoque do estado estacionário. Podemos entender o capital de estoque “refletindo” na reta de 45 graus.

Figura 2: Convergência para o estado estacionário ( $k_t < k_t^*$ )



O movimento ao estado estacionário acontece pela reflexão na reta que simboliza o estado estacionário. Dado um estoque de capital no período  $t$ , senão no estado estacionário esse é “iterado” entre a curva que representa o estado estacionário e a que representa a equação central do modelo de Solow.

A análise feita acima possui um ponto crucial: dado um valor de  $k_t$  diferente de zero, o estoque de capital tende a caminhar ao seu estado estacionário. Em outras palavras, o estado estacionário é um “ponto de atração” do estoque de capital. Uma vez que o estoque de capital atinge seu estado estacionário este permanece ali, desde que  $k_t = k_{t+1}$ .

O estado estacionário é sempre um ponto de interesse analítico. Não porque uma vez nesse ponto a economia permanece nesse ponto, mas porque independente dos valores iniciais esse é o estado que a economia irá convergir.

### 3 A Álgebra do Estado Estacionário A Partir de uma Função Cobb-Douglas de Produção

Suponhamos agora que a função de produção da economia assume forma funcional de uma Cobb-Douglas. Para resolvermos o modelo no seu estado estacionário temos  $k_t = k_{t+1} = k_t^*$ :

$$k_t^* = sAk_t^{*\alpha} + (1 - \delta)k_t^* \quad (28)$$

$k_t^*$  pode ser definido como:

$$k_t^* = \left( \frac{sA}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (29)$$

A medida em que  $s$  e  $A$  aumentam,  $k_t^*$  aumenta. Por sua vez, a medida em que  $\delta$  aumenta,  $k_t^*$  diminui. Isso é, o estoque de capital é inversamente proporcional a taxa de desconto do capital, bem como é proporcional a propensão marginal a investir e a produtividade. Além disso, podemos obter o valor das outras variáveis para o estado estacionário, visto que podemos



substituir  $k_t^*$  nas outras equações, de forma que:

$$y^* = Ak^{*\alpha} \quad (30)$$

$$c^* = (1 - s)Ak^{*\alpha} \quad (31)$$

$$i^* = sAk^{*\alpha} \quad (32)$$

$$R^* = \alpha Ak^{*\alpha-1} \quad (33)$$

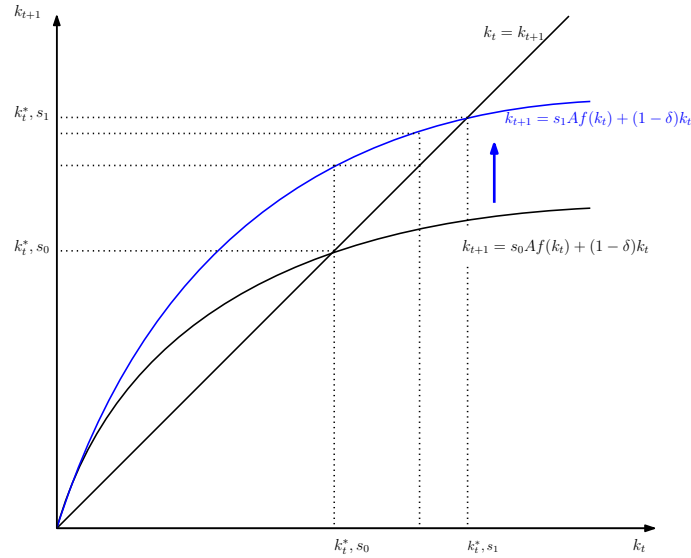
$$w^* = (1 - \alpha)Ak^{*\alpha} \quad (34)$$

## 4 Mudanças em $s$ e Mudanças em $A$

Nosso objetivo agora é entender como as variáveis endógenas reagem a mudanças nas variáveis exógenas  $s$  e  $A$ . Vamos considerar inicialmente uma mudança em  $s$ . Esta, no mundo real, poderia ser vista como uma mudança de política fiscal por exemplo. Suponha inicialmente a economia no estado estacionário, onde  $s$  inicial é dado por  $s_0$ . Então, em  $t$ ,  $s_1 > s_0$ .

Em termos gráficos, um aumento em  $s$  desloca a curva da equação central do modelo para cima. Desta forma a economia passa a caminhar para um novo estado estacionário, em que  $k_1^* > k_0^*$ , Figura 3

Figura 3: Convergência para o estado estacionário após uma mudança em  $s$



É possível perceber que dado um aumento na propensão marginal a in-

vestir, o estoque de capital por trabalhador aumenta. O novo estado estacionário, entretanto, não acontece de uma hora para outra. Como sabemos que  $k^*, s_1 > k^*, s_0$ , é interessante observarmos o que ocorre com as outras variáveis endógenas.