

# Notas sobre o Modelo de Solow\*

Gustavo Vital†

9 de junho de 2020

O modelo de Solow é ainda hoje um modelo fundamental para a compreensão do crescimento de longo prazo e diferença de renda entre países. Proposto por Robert Solow, mais tarde ganhador do prêmio nobel de economia, o modelo assume que o crescimento de um país se dá fundamentalmente por choques exógenos de tecnologia, dado a função particular de crescimento de longo prazo.

## 1 Produção, Consumo, e Investimento

O modelo de Solow assume que existe uma função de produção agregada tal que seja composta por capital (K) e trabalho (L), sendo esses fatores os responsáveis pela determinação da produção. Ambos, capital e trabalho, são considerados fatores de produção. A distinção fundamental dos dois fatores é: capital é estoque, trabalho é fluxo.

O trabalho, ainda em termos de distinção, é dado. Não há nada que se possa fazer para aumentar as horas de trabalho em um dia (por mais que se aumente a carga horária, um dia tem um limite de horas possíveis). O capital – por outro lado – é cumulativo. A quantidade de capital num período  $t$  influencia *diretamente* a quantidade de capital num período  $t + 1$ .

Em termos matemáticos, podemos escrever a função de produção, tal que: seja  $K_t$  o estoque de capital no período  $t$ ; e  $N_t$  o total de horas de trabalho no período  $t$ . A função de produção será dada por:

$$Y_t = A_t F(K_t, N_t) \tag{1}$$

$A_t$  é uma **variável exógena** que representa produtividade; tecnologia.  $F$  é a função de produção ainda não especificada, que relaciona horas de trabalho com capital. A função  $F(\cdot)$  possui as seguintes propriedades  $F_K > 0$

---

\*Baseado em Eric Sims.

†Mestrando em Economia pela Faculdade de Economia do Porto. Email: gustavovital@id.uff.br

e  $F_N > 0$ . Isso é, o produto marginal é sempre positivo. Além disso, temos  $F_{KK} < 0$  e  $F_{NN} < 0$ , retornos decrescente de produção – quanto mais unidades de capital ou trabalho se possui, menor é a variação do produto em termos de trabalho/capital. assumimos além disso que a função possui retornos constantes de escala. Isso é:  $F(\gamma K_t, \gamma N_t) = \gamma F(K_t, N_t)$ . Por fim, assumimos que tanto capital quanto trabalho são necessários para a produção i.e.  $F(K_t, 0) = F(0, N_t) = 0$ .

A fim de apresentar a forma funcional de  $F(\cdot)$ , trabalharemos com uma função de produção de formato Cobb-Douglas. Então

$$F(K_t, N_t) = K_t^\alpha N_t^{1-\alpha} \quad \text{sendo} \quad 0 < \alpha < 1; \quad (2)$$

dado o problema acima, a firma buscará otimizar seus lucros ( $\Pi_t$ ) – produto subtraído de custos e retorno do capital, tal que seu problema de otimização será:

$$\max_{K_t, N_t} \Pi_t = A_t F(K_t, N_t) - w_t N_t - R_t K_t \quad ; \quad (3)$$

onde  $w_t$  representa o salário pago pelas firmas e  $R_t$  o retorno pago pelo capital. As condições de primeira ordem (CPO) são:

$$w_t = A_t F_N(K_t, N_t) \quad (4)$$

$$R_t = A_t F_K(K_t, N_t) \quad (5)$$

essas condições dizem que as firmas devem contratar capital e trabalho até o ponto em que os “benefícios” marginais se igualam.

Além das firmas, devemos representar as famílias desta economia. Bem como de forma simplificada, as famílias ofertam mão de obra e recebem um salário. Além disso, recebem um retorno referente ao capital, de tal forma que  $w_t N_t + R_t K_t$  representa a renda da família no período  $t$ . Ainda, a família pode investir o recebido ou consumir. Sua restrição orçamentária é, então:

$$C_t + I_t = w_t N_t + R_t K_t + \Pi_t \quad (6)$$

Como já exposto, as firmas operam em retorno constante de escala, então o produto é igual a renda, de forma que  $Y_t = w_t N_t + R_t K_t$ . Em 6, ao considerarmos retorno constantes de escala, temos que  $\Pi_t = 0$  e apresenta-se a identidade:

$$Y_t = C_t + I_t \quad (7)$$

a evolução do capital por sua vez pode ser apresentada como o estoque de capital no período  $t$  não depreciado somado ao investimento do período corrente. Matematicamente:

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t \quad (8)$$

onde  $0 < \delta < 1$  representa a taxa de depreciação do capital. A equação acima representa a “lei de movimento” do capital; mais que isso, ela assume que uma unidade de investimento no período  $t$  é totalmente revertido em estoque de capital em  $t + 1$ . Exemplificando a lei de movimento do capital, suponha que  $k_t = 10$ , a taxa de depreciação do capital é igual a 0.1 ( $\delta = 0.1$ ). Se a produção no período  $t$  é 3 ( $Y_t = 3$ ) e o consumo no período  $t$  também é igual a 3 ( $C_t = 3$ ) temos que  $I_t = 0$ , de tal forma que  $K_{t+1} = 9$ . Se o consumo no período  $t$  for igual a 2, significa que o investimento nesse período será igual a 1 e assim o capital no período  $t + 1$  será igual a 10 novamente. O modelo de Solow, visto dessa forma assume – então – que o investimento no período  $t$  é uma fração da produção do mesmo período  $t$ :

$$I_t = sY_t \quad \text{sendo} \quad 0 < s < 1; \quad (9)$$

combinando 9 com 7 temos:

$$C_t = (1 - s)Y_t \quad (10)$$

O modelo de Solow assume dessa forma que a economia pode ser representada pelo consumo corrente num período  $t$  e um não-consumo, revertido em investimento, que gera acumulação de capital num período  $t + 1$ . Considera ainda que a quantidade de tempo que uma família passa trabalhando é inelástica ao preço pago pelo trabalho,  $w_t$ . Assim, o número de horas de trabalho  $N_t$  se torna exógeno ao modelo.<sup>1</sup> O modelo de Solow é caracterizado, dessa forma, pelas seguintes equações:

$$Y_t = A_t F(K_t, N_t) \quad (11)$$

$$Y_t = C_t + I_t \quad (12)$$

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t \quad (13)$$

$$I_t = sY_t \quad (14)$$

$$w_t = A_t F_N(K_t, N_t) \quad (15)$$

$$R_t = A_t F_K(K_t, N_t) \quad (16)$$

Seis são as equações e seis são as variáveis endógenas. São elas:  $Y_t, C_t, I_t, K_{t+1}, w_t$  e  $R_t$ .  $K_t, N_t$  e  $A_t$  são consideradas **exógenas** para o modelo.

---

<sup>1</sup>O problema aqui é a ausência da microfundamentação do modelo. A curto prazo as famílias não considerarem a otimização frente a oferta de trabalho não parece fazer muito sentido, a longo prazo entretanto, essa ideia é consistente ao modelo