Tarefa 4

Gustavo Fernandez Vidal Vazquez - 537296

Desenvolva a estimativa do erro para a fórmula aberta com polinômio de substituição de grau 2.

OBS: Percebi que nas anotações da aula 7, o h é fixo como sendo sempre $\Delta x/2$. Para essa anotação, o h é diferente (definido no escopo do problema).

Fórmula de Milne

Para o polinômio de substituição de grau 2, para a abordagem aberta, temos a seguinte fórmula:

$$I \approx \frac{4h}{3}(2f(x_i+h) - f(x_i+2h) + 2f(x_i+3h))$$

Para esse caso, $h = \frac{\Delta x}{4}$

Agora, vamos usar a Série de Taylor para os pontos de interpolação (em termos de $\bar{x}$ (que é $x_i + 2h$)

$$\begin{aligned} f(x_i+h) = f(\bar{x}-h) &= f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(h) + \frac{1}{2!}f''(\bar{x})(h)^2 - \frac{1}{3!}f'''(\bar{x})(h)3 + ... \\ f(x_i+2h) &= f(\bar{x}) \\ f(x_i+3h) = f(\bar{x}+h) &= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(h) + \frac{1}{2!}f''(\bar{x})(h)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\bar{x})(h)3 + ... \end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima na fórmula acima:

$$I_f = \frac{4h}{3}(3f(\bar{x}) + \frac{4}{2!}f''(\bar{x})(h)^2 + \frac{4}{4!}f^{iv}(\bar{x}(h)^4) + ...)$$

Bom, nós sabemos que a integral exata pode ser dada por:

$$I_e = \int_a^b f(x)dx = k\int_{-1}^{1}(f(\bar{x}+\xi k) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(\xi k) + \frac{1}{2!}f''(\bar{x})(\xi k)^2 + ...)d\xi$$

Onde k, para a integral acima, é metade do intervalo. Ou seja, vamos querer $k = 2h$.

Realizando as integrações acima, temos a seguinte fórmula:

$$I_e = 2h\ (2f(\bar{x}) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x)\frac{2}{3} + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(iv)}(\bar{x})\frac{2}{5} + ...)$$

Agora basta descobrir o erro:

$$
\begin{aligned}
E_a = I_e - I_f = 2h\,(2f(\bar{x}) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x)\frac{2}{3} + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(iv)}(\bar{x})\frac{2}{5} + \ \ldots) \\
- \frac{4h}{3}(3f(\bar{x}) + \frac{4}{2!}f''(\bar{x})(h)^2 + \frac{4}{4!}f^{iv}(\bar{x}(h)^4) + \ \ldots) \\
= \frac{14h^5}{45}
\end{aligned}
$$

Como temos que $4h = \Delta x$

$$
Ea = \frac{7\Delta x^5}{23040}
$$

Comparando com o resultado na Wikipedia:

Regra de Milne	$\frac{b-a}{4}$	$\frac{b-a}{3}(2f_1 - f_2 + 2f_3)$	$\frac{7(b-a)^5}{23040}f^{(4)}(\xi)$	4