6. Áreas

Objetivo

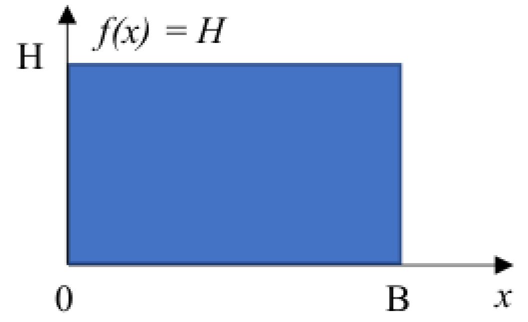
O objetivo dessa aula é contextualizar a aplicação de integrais para áreas de superfícies.

Começando Simples

Inicialmente, vamos explorar como pode ser feito para calcularmos a área de figuras 2D : Retângulos, Triângulos Trapézios, Círculos e Elipses.

Retângulo

Bom, o retângulo pode ser expresso simplesmente por uma função constante: $f(x) = h$.



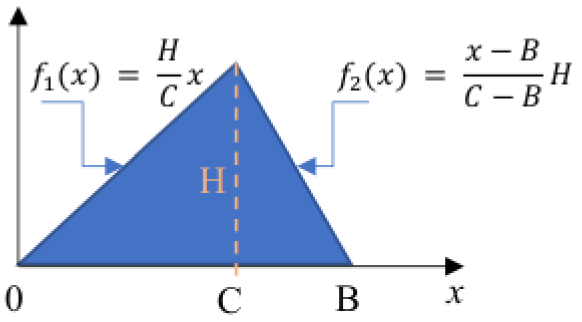
Dessa maneira, podemos simplesmente calcular a integral dessa função de 0 até B.

$$A = \int_0^B f(x)dx = \int_0^B Hdx = H\int_0^B dx = H[x]_0^B = BH$$

Também poderíamos ter feito utilizando Newton-Cotes de grau 1 ou Gauss-Legendre (apesar de ser muito nesse caso).

Triângulo

Aqui é onde as coisas começam a ficar interessantes! Observe que um triângulo pode ser expresso como duas funções:



Sendo assim, poderíamos calcular como a soma de duas integrais:

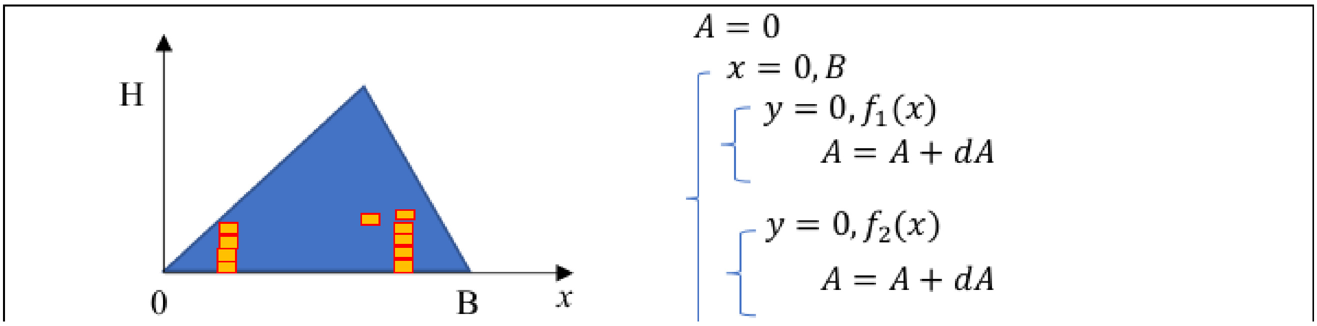
$$\int_0^C f_1(x)dx + \int_C^B f_2(x)dx$$

Apesar das integrais serem simples, é preferível evitar trabalho adicional. O foco dessa aula é exibir maneiras diferentes de enxergar uma integração, sempre pensando em mudanças de variável.

Mudando a Visão!

Na essência, um pouco mais fácil de visualizar já que estamos sempre pensando numericamente, uma integral é uma soma de pedacinhos. A nossa estratégia se baseará em encontrar uma boa maneira de representar esses pedacinhos.

Pense no triângulo, o que queremos é somar diversos $dA = dxdy$, onde dx e dy são os tamanhos do lado de cada um desses pedacinhos. Observe o que queremos fazer:



O problema é que, em coordenadas cartesianas necessitamos das equações das retas $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Vamos mudar isso!

Trocando as Variáveis

Temos a seguinte expressão:

$$A = \int_A dA$$

O que queremos fazer é relacionar a expressão acima com uma nova, mas que esteja em um novo sistema de coordenadas. Podemos fazer isso da seguinte forma:

$$A = \int_A dA = \int_\Omega |J| d\Omega$$

Tudo bem! Mas o que vamos fazer nesse exemplo?

1. Imagine um ponto P que desliza sobre a base do triângulo.
2. A posição do nosso ponto P vai ser descrita por por uma variável $\alpha \in [0, 1]$
3. A posição do elemento de área dA será descrita por uma variável $\beta \in [0, 1]$

Podemos expressar a nossa nova área da seguinte maneira:

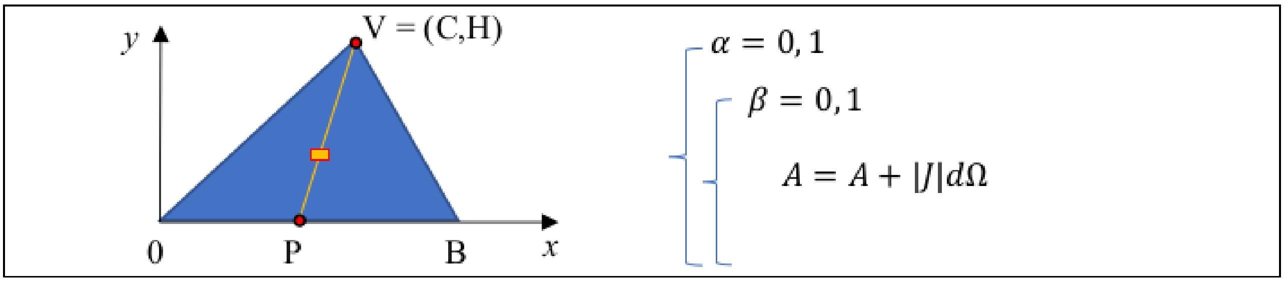


Figura 3. Mudança de variáveis para facilitar o processo de varredura.

Certo! Mas como podemos o determinante da matriz Jacobiana?

Jacobiana

No nosso caso, em específico, a matriz Jacobiana será dada da seguinte maneira:

$$|J| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix}$$

Bom, para resolvermos essas derivadas parciais, precisamos primeiro obter α e β em função de x e y.

Para definir P em função de α basta lembrar como fazer para definir um vetor $\vec{AB}$ em função de uma variável controladora $t \in [0, 1]$. Se temos o segmento $\vec{AB}$, a seguinte expressão pode ser obtida:

$$P(t) = A + \vec{AB}t$$

Então, para o nosso caso, teremos:

$$P(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})\alpha = \alpha \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

E para o nosso "pedacinho", $\bar{P}(\beta)$, temos:

$$\bar{P}(\alpha, \beta) = P(\alpha) + (V - P(\alpha))\beta$$

Onde V é o vértice do triângulo. Assim, podemos chegar no seguinte:

$$x(\alpha, \beta) = \alpha B + \beta(C - \alpha B) = \alpha B + \beta C - \alpha\beta B$$
$$y(\alpha, \beta) = \beta H$$

Assim, podemos determinar $|J|$:

$$|J| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} (B - \beta B) & (C - \alpha B) \\ 0 & H \end{bmatrix} = HB(1 - \beta)$$

Finalizando

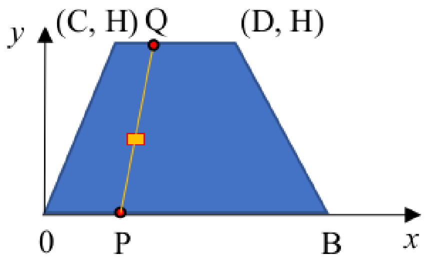
Assim, temos a nova integral:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_A dA = \int_\Omega |J| d\Omega \\
&= \int_\Omega BH(1-\beta) d\Omega \\
&= \int_0^1 (\int_0^1 BH(1-\beta) d\beta) d\alpha \\
&\dots \\
A &= \frac{BH}{2}
\end{aligned}
$$

Trapézio

Bom, agora já sabemos de algumas coisas. Vamos tentar aplicar o mesmo para a área de um trapézio. Nesse caso, teremos:

1. Um elemento de área desliza sobre a reta PQ, e P e Q deslizam horizontalmente sobre os segmentos inferior e superior, respectivamente. Assim:



$$
\alpha = 0,1 \quad \left\{ \beta = 0,1 \quad \left\{ A = A + |J| d\Omega \right. \right.
$$

Figura 4. Mudança de variáveis para facilitar o processo de varredura no trapézio.

$$
P(\alpha) = \alpha \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
Q(\alpha) = \begin{bmatrix} C \\ H \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} D - C \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C + \alpha(D-C) \\ H \end{bmatrix}
$$

Assim:

$$
\begin{bmatrix} x(\alpha, \beta) \\ y(\alpha, \beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \end{bmatrix}
$$

Ou seja:

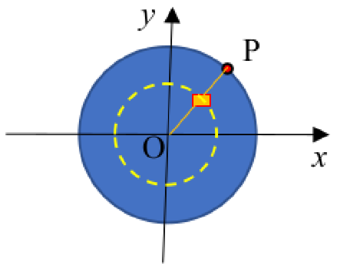
$$
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} (\alpha, \beta) = P(\alpha) + \beta(Q(\alpha) - P(\alpha))
$$

Daí, basta realizar o mesmo desenvolvimento que o anterior! (Pode ser visto nas notas de aula novamente).

Círculo

Os dos casos anteriores já contempla uma estratégia para mudança de variável. Nesse caso, não seria muito útil para uma circunferência. Podemos fazer por coordenadas polares:

1. α controlará o raio.
2. β percorrerá o ângulo.



$$\alpha = 0,1$$
$$\beta = 0,2\pi$$
$$A = A + |J| d\Omega$$

Trivialmente já temos a relação entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha R\, cos(\beta) \\ \alpha R\, sen(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Daí, podemos obter a seguinte matriz Jacobiana:

$$|J| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} R\, cos(\beta) & -\alpha R\, sen(\beta) \\ R\, sen(\beta) & \alpha R\, cos(\beta) \end{bmatrix} = R^2\alpha(cos^2(\beta) + sen^2(\beta)) = R^2\alpha$$

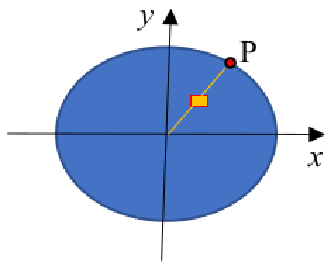
E prosseguir com o cálculo da integral:

$$\begin{aligned} A &= \int_A dA = \int_\Omega |J| d\Omega \\ &= \int_\Omega (R^2\alpha) d\Omega \\ &= \int_0^1 (\int_0^{2\pi} R^2\alpha\, d\beta) d\alpha \\ &= R^2 \int_0^1 \alpha (\int_0^{2\pi} d\beta) d\alpha \\ &= 2\pi R^2 \int_0^1 \alpha d\, \alpha \\ A &= \pi R^2 \end{aligned}$$

Elipse

Para a elipse, vamos focar na mudança de variável e omitir as contas. A elipse possui semieixos a e b. Vamos para a mudança:

1. As variáveis controladoras são as mesmas para o círculo.



$\alpha = 0,1$

$\beta = 0,2\pi$

$A = A + |J| d\Omega$

Para a troca de variável, temos o seguinte:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a\, cos(\beta) \\ \alpha b\, sen(\beta) \end{bmatrix}$$

Daí, basta prosseguir com as contas...

(25) $dA = |J| d\Omega$

onde $|J|$ é o determinante da matriz Jacobiana mostrada na equação (26), e $d\Omega$ é o elemento de área infinitesimal do sistema (α, β), isto é

$$(26) \quad \begin{aligned} |J| &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix} \\ &\overset{eq.(24)}{=} \det \begin{bmatrix} a \cos(\beta) & -\alpha a \operatorname{sen}(\beta) \\ b \operatorname{sen}(\beta) & \alpha b \cos(\beta) \end{bmatrix} \\ &= ab\alpha(\cos^2(\beta) + \operatorname{sen}^2(\beta)) = ab\alpha \end{aligned}$$

e

(27) $d\Omega = d\alpha . d\beta.$

Assim, fazendo-se mudança de variáveis, a área da elipse pode ser calculada como

$$(28) \quad \begin{aligned} A &= \int_A dA = \int_\Omega |J| d\Omega \\ &= \int_\Omega (ab\alpha) d\Omega \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} ab\alpha\, d\beta \right) d\alpha \\ &= ab \int_0^1 \alpha \left(\int_0^{2\pi} d\beta \right) d\alpha \\ &= 2\pi ab \int_0^1 \alpha\, d\alpha = 2\pi ab \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(29) \quad \boldsymbol{A = \pi ab}$$

Em síntese:

Podemos extrair o seguinte das questões anteriores:

1. O mais difícil é encontrar uma mudança de variável que funcione.

2. Depois da mudança de variável, os cálculos são simples e a integral também fica simples.
3. Problemas parecidos geralmente precisam de mudanças de variável parecidas.

Vamos para algo maior agora:

Áreas de Superfícies 3D.

Elevando o nível, vamos tratar de superfícies 3D no formato $z = f(x, y)$. Em coordenadas cartesianas, o elemento infinitesimal de superfície dS associado à área infinitesimal dA no plano xy é dado por:

$$dS = \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)^2}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f(x,y)^2}{\partial y}\right) + 1}\right)$$

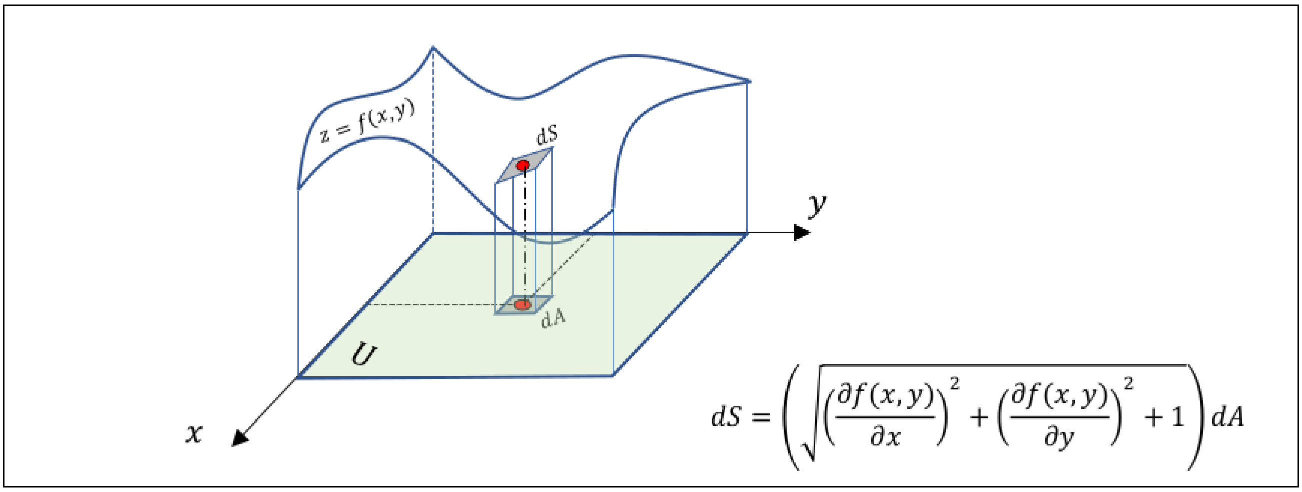


Figura 7. Área da superfície $z = f(x, y)$ para $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$

Assim, a área da superfície acima da região $U \subset xy$ é dada por:

$$\int_S dS = \int_U \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)^2}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f(x,y)^2}{\partial y}\right) + 1}\right) dA$$

Geralmente integrais como essa são difíceis de se obter analiticamente. Nesse caso, vamos utilizar uma das quadraturas para resolver numericamente.

Tomemos um problema real para usar como exemplo:

A região $U \in xy$ é $U = \{(x, y)| - 50 \leq x \leq 50m, -50m \leq y \leq 50m\}$

Resolvendo:

$$
\begin{aligned}
\int_S dS &= \int_U \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)^2}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f(x,y)^2}{\partial y}\right) + 1}\right) dA \\
&= \int_{-50}^{50} \left(\int_{-50}^{50} \left(\sqrt{(0.4x^2) + (0.4y)^2 + 1}\right) dx\right) dy
\end{aligned}
$$

Essa integral acima é o que queremos. Vamos resolver por Gauss-Legendre:

Quadratura de Gauss-Legendre com três pontos na direção x e três pontos na direção y.

A quadratura requer a seguinte mudança de variável:

$$
\begin{bmatrix} x(\alpha,\beta) \\ y(\alpha,\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-50+50}{2} & \frac{50-(-50)}{2}\alpha \\ \frac{-50+50}{2} & \frac{50-(-50)}{2}\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\alpha \\ 50\beta \end{bmatrix}
$$

Assim, podemos determinar o seguinte $|J|$:

$$
|J| = \det \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} = 2500
$$

Assim, temos a nova integral:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{(0.4x(\alpha,\beta))^2 + (0.4y(\alpha,\beta))^2 + 1}\right) 2500 d\alpha\right) d\beta \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{(0.4(50\alpha))^2 + (0.4(50\beta))^2 + 1}\right) 2500 d\alpha\right) d\beta \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{(20\alpha)^2 + (20\beta)^2 + 1}\right) 2500 d\alpha\right) d\beta \\
&\approx 2500 \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(w_i w_j \sqrt{\left(20\alpha_j\right)^2 + \left(20\beta_i\right)^2 + 1}\right) = 146328.37\mathrm{m}^2.
\end{aligned}
$$

A última expressão indica que os termos entre parênteses tem que ser calculada conforme os novos pares ordenados. Observe em forma de tabela:

(α_j, β_i)	$w_j w_i$	$g(\alpha_j, \beta_i) = \sqrt{(20\alpha_j)^2 + (20\beta_i)^2 + 1}$	$w_i w_j\, g(\alpha_j, \beta_i)$	*2500
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{25}{81}$	21.93171219956	6.76904697514	
$\left(0, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{8}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{40}{81}$	15.52417469626	7.66625910926	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{25}{81}$	21.93171219956	6.76904697514	
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{8}{9} = \frac{40}{81}$	15.52417469626	7.66625910926	
$(0,0)$	$\frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} = \frac{64}{81}$	1	0.79012345679	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{8}{9} = \frac{40}{81}$	15.52417469626	7.66625910926	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{25}{81}$	21.93171219956	6.76904697514	
$\left(0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{8}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{40}{81}$	15.52417469626	7.66625910926	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{25}{81}$	21.93171219956	6.76904697514	
			58.53134779439	**146 328.37**

Uffa! Terminamos. Para mais detalhes de desenvolvimento: Tarefa 8