4. Outras Quadraturas

Objetivo

O objetivo desta aula é desenvolver as fórmulas de integração especiais de Gauss-Hermite, Gauss-Laguerre e Gauss-Chebyshev.

$$
\begin{aligned}
&1)\ I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) : \text{Gauss-Hermite} \\
&2)\ I = \int_{0}^{+\infty} e^{-x} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) : \text{Gauss-Laguerre} \\
&3)\ I = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) : \text{Gauss-Chebyshev}
\end{aligned}
$$

Veremos que cada uma das fórmulas precisarão de pontos de interpolação diferentes, sendo cada uma usada em um caso específico. Para encontrar esses pontos, precisaremos dos polinômios de Hermite, $H_n(x)$, de Laguerre, $L_n(x)$ e de Chebyshev, $T_n(x)$.

É importante que os passos sejam respeitados (apesar de podermos forçar):

1. Os limite de integração tem que ser os mesmos.
2. As funções que multiplicam $f(x)$ precisam ser as mesmas
3. A função utilizada no somatório é $f(x)$ e não o integrando.

Desenvolvimento das Fórmulas

Os ingredientes necessários serão parecidos com o que fizemos para Gauss-Legendre:

1. O polinômio específico
2. Raízes do polinômio
3. Produtos internos nos espaços de cada função
4. Bases de um espaço vetorial
5. Fórmula da divisão de polinômios

Polinômio Específico

Segue abaixo como cada polinômio é definido:

$$
\begin{aligned}
H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \\
L_n(x) &= \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \\
T_n(x) &= \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{(1-x^2)} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Cada polinômio acima possui propriedades específicas em relação às suas raízes, suponha um polinômio de grau n.

1. Em Hermite, tem n raízes distintas situadas, simetricamente, entre $(-\infty + \infty)$
2. de Laguerre, tem n raízes distintas positivas situadas entre $[0, +\infty)$.
3. de Chebyshev, possui n raízes distintas situadas, simetricamente, entre $[-1, +1]$

Ortogonalidade

Diferente de Gauss-Legendre, aqui precisamos de uma função de ponderação para garantir que o produto nulo nos casos especificados:

(7) $$< H_i(x), H_j(x) >= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_i(x)H_j(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ \sqrt{\pi}\, 2^i\, i!\,, & \text{se } i = j. \end{cases};$$

(8) $$< L_i(x), L_j(x) >= \int_{0}^{\infty} e^{-x} L_i(x)L_j(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases};$$

(9) $$< T_i(x), T_j(x) >= \int_{-1}^{\mathbf{1}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_i(x)T_j(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ \pi/2 & \text{se } i = j \neq 0 \\ \pi, & \text{se } i = j = 0. \end{cases}$$

O resto da base é extremamente parecida com Gauss-Legendre, se houver dúvidas, consulte 2. Gauss-Legendre (base). Seguiremos com o desenvolvimento.

Fórmula Final

Quadraturas especiais de Gauss

(39) $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)$$ - Gauss-Hermite

(40) $$I = \int_{0}^{+\infty} e^{-x} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)$$ - Gauss-Laguerre

(41) $$I = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)$$ - Gauss-Chebyshev

onde

i) $x_k,\ k = 1, 2, \dots n$ são as raízes dos polinômios, $H_n(x)$, $L_n(x)$ e $T_n(x)$ respectivamente nas fórmulas (39), (40) e (41);

ii) $w_k,\ k = 1, 2, \dots n$ são os pesos correspondentes dados, respectivamente, por

$$w_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} L_{g_k}(x)dx.$$ (veja equação (36))

$$w_k = \int_{0}^{\infty} e^{-x} L_{g_k}(x)dx$$ (veja equação (37))

$$w_k = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} L_{g_k}(x)dx$$ (veja equação (38))

- Podemos ver que é quase igual Gauss-Legendre, mas o polinômio mudará (as raízes também) além de que o peso possui limites de integração diferentes, além de função de ponderação que acompanha.

Dito isso, o processo será bem parecido! Para mais detalhes, Tarefa 6