1. Newton-Cotes

Objetivo

O objetivo é simples, calcular a integral definida abaixo, onde a e b são início e fim do intervalo de integração, e $f(x)$ é uma função dada.

$$\int_a^b f(x)dx$$

O nosso problema é que não sabemos calcular a integral acima! A única coisa que sabemos da função é calcular ela em algum ponto específico. A nossa estratégia vai se basear em dois passos principais:

1. Quebrar a integral em uma soma de integrais:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+\Delta_x} f(x)dx + \int_{a+\Delta x}^{a+2\Delta x} f(x)dx + \ldots + \int_{b-\Delta x}^{b} f(x)dx$$

2. Trocar $f(x)$ por uma função que conhecemos a integral.

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx$$

   Como podemos obter $p(x)$?

Obtendo a função substituta

Para obter a função substituta, utilizando interpolação, precisamos responder duas perguntas:

1. Que grau terá a nossa função substituta?
2. Por quais pontos essa função precisa passar?

Para a primeira pergunta, não temos uma resposta absoluta! Existe uma coerência de usar $p(x)$ com um grau próximo aos pontos de inflexão da sua função. A ideia de usar $\text{Grau} = \#\text{pontos de inflexão} + 2$ é coerente, mas não é uma regra.

Para responder a segunda pergunta, precisamos saber se seguiremos a **abordagem fechada** ou a **abordagem aberta**. De qualquer forma, vamos relembrar a função interpoladora de Newton:

$$g(s) = \sum_{K=0}^{N} \binom{s}{k} \Delta^k f_0$$

1. N é o grau do polinômio de interpolação.

2. $\Delta^k f_0$ é um definido da seguinte maneira:

$$\Delta^k f_i = \begin{cases} f_i \text{ se k} = 0 \\ \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^k f_i \text{ se k} > 0 \end{cases}$$

   Lembrando que, para usar o polinômio de interpolação de newton, a função $g(s)$ precisa ser definida nos pontos $0, 1, \ldots n$. A mudança de variável de x para s mudará em cada abordagem.

Abordagem Fechada

Na abordagem fechada, os pontos para desenvolver o polinômio de substituição incluem $[x_i, x_{i+1}]$. Para adicionar mais pontos, sempre faremos de uma forma que todos os pontos fiquem igualmente espaçados.

Troca de variável

Para a abordagem fechada, a relação entre x e s acontece da seguinte forma:

$$\begin{cases} x(0) = x_i + 0h = x_i \\ x(1) = x_i + 1h = x_{i+1} \\ \ldots \\ x(n) = x_i + nh = x_f \end{cases}$$

$$x(s) = x_i + sh$$

Onde, para manter o devido espaçamento:

$$h = \frac{\Delta x}{n} = \frac{x_f - x_i}{n}$$

Depois que a mudança de variável for feita, teremos a seguinte integral:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x(s)) \frac{dx(s)}{ds} ds = h \int_{s_i}^{s_f} g(s)ds = h \int_0^n g(s)ds$$

Lembrando que a integral acima ocorre pois:

$$\begin{cases} \frac{dx(s)}{ds} = h \\ x = x_i \iff s_i = 0 \\ x = x_f \iff s_f = n \end{cases}$$

Abordagem Aberta

Na abordagem aberta, os pontos x_i e x_f são proibidos. Portanto, será incluso o intervalo (x_i, x_f). Para adicionar mais pontos, sempre faremos de uma forma que todos os pontos fiquem igualmente espaçados.

Troca de variável

Para a abordagem aberta, a relação entre x e s acontece da seguinte forma:

$$\begin{cases} x(0) = x_i + h + 0h = x_{i+1} \\ x(1) = x_i + h + 1h = x_{i+2} \\ \dots \\ x(n) = x_i + h + nh = x_{f-1} \end{cases}$$

$$x(s) = x_i + h + sh$$

Onde, para manter o devido espaçamento:

$$h = \frac{\Delta x}{n+2} = \frac{x_f - x_i}{n+2}$$

Depois que a mudança de variável for feita, teremos a seguinte integral:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x(s))\frac{dx(s)}{ds}ds = h\int_{s_i}^{s_f} g(s)ds = h\int_{-1}^{n+1} g(s)ds$$

Lembrando que a integral acima ocorre pois:

$$\begin{cases} \frac{dx(s)}{ds} = h \\ x = x_i \iff s_i = -1 \\ x = x_f \iff s_f = n+1 \end{cases}$$

Estimativas de Erro

A forma mais básica de encontrar o erro, é saber o valor exato da integral! Esse não é o nosso caso, afinal, se soubéssemos o valor exato, não precisaríamos disso tudo. Para encontrar uma estimativa para o erro, vamos apelar para a Série de Taylor.

Série de Taylor

A famosa série é válida para uma vizinhança "próxima". No nosso caso, tomemos como ponto base para a Série de Taylor o centro do intervalo de integração, ou seja:

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

Se considerarmos ξh como sendo a distância do ponto x ao ponto $\bar{x}$, podemos escrever a Série de Taylor para calcular $f(x) = f(\bar{x} + \xi h)$ como:

$$f(x) = f(\bar{x} + \xi h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(\xi h) + \frac{1}{2!}f''(\bar{x})(\xi h)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)(\xi h)^3 + \dots$$

onde h é a metade do intervalo, isto é:

$$h = \frac{b-a}{2}$$

Assim, a o valor da integral exata I_e será:

$$I_e = \int_a^b f(x)dx = h\int_{-1}^{1}(f(\bar{x} + \xi h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(\xi h) + \frac{1}{2!}f''(\bar{x})(\xi h)^2 + \dots)d\xi$$

É claro que isso vai até o infinito, mas podemos chegar em uma boa aproximação determinando um número fixo.