

Tarefa 4

Gustavo Fernandez Vidal Vazquez - 537296

Desenvolva a estimativa do erro para a fórmula aberta com polinômio de substituição de grau 2.

OBS: Percebi que nas anotações da aula 7, o h é fixo como sendo sempre $\Delta x/2$. Para essa anotação, o h é diferente (definido no escopo do problema).

Fórmula de Milne

Para o polinômio de substituição de grau 2, para a abordagem aberta, temos a seguinte fórmula:

$$I \approx \frac{4h}{3}(2f(x_i + h) - f(x_i + 2h) + 2f(x_i + 3h))$$

Para esse caso, $h = \frac{\Delta x}{4}$

Agora, vamos usar a Série de Taylor para os pontos de interpolação (em termos de \bar{x} (que é $x_i + 2h$))

$$\begin{aligned}f(x_i + h) &= f(\bar{x} - h) = f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(h) + \frac{1}{2!}f''(\bar{x})(h)^2 - \frac{1}{3!}f'''(\bar{x})(h)^3 + \dots \\f(x_i + 2h) &= f(\bar{x}) \\f(x_i + 3h) &= f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(h) + \frac{1}{2!}f''(\bar{x})(h)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\bar{x})(h)^3 + \dots\end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima na fórmula acima:

$$I_f = \frac{4h}{3}(3f(\bar{x}) + \frac{4}{2!}f''(\bar{x})(h)^2 + \frac{4}{4!}f^{(iv)}(\bar{x})(h)^4 + \dots)$$

Bom, nós sabemos que a integral exata pode ser dada por:

$$I_e = \int_a^b f(x)dx = k \int_{-1}^1 (f(\bar{x} + \xi k) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(\xi k) + \frac{1}{2!}f''(\bar{x})(\xi k)^2 + \dots) d\xi$$

Onde k , para a integral acima, é metade do intervalo. Ou seja, vamos querer $k = 2h$.

Realizando as integrações acima, temos a seguinte fórmula:

$$I_e = 2h \left(2f(\bar{x}) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(\bar{x})\frac{2}{3} + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(iv)}(\bar{x})\frac{2}{5} + \dots \right)$$

Agora basta descobrir o erro:

$$\begin{aligned}
 E_a = I_e - I_f &= 2h \left(2f(\bar{x}) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(\bar{x}) \frac{2}{3} + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(iv)}(\bar{x}) \frac{2}{5} + \dots \right) \\
 &\quad - \frac{4h}{3} \left(3f(\bar{x}) + \frac{4}{2!} f''(\bar{x}) (h)^2 + \frac{4}{4!} f^{(iv)}(\bar{x}) (h)^4 + \dots \right) \\
 &= \frac{14h^5}{45}
 \end{aligned}$$

Como temos que $4h = \Delta x$

$$Ea = \frac{7\Delta x^5}{23040} f^{(iv)}(\bar{x})$$

Comparando com o resultado na Wikipedia:

Regra de Milne	$\frac{b-a}{4}$	$\frac{b-a}{3}(2f_1 - f_2 + 2f_3)$	$\frac{7(b-a)^5}{23040} f^{(4)}(\xi)$	4
----------------	-----------------	------------------------------------	---------------------------------------	---