7. Volumes

Objetivo

Continuar a discussão da aula anterior, mas aplicando para volumes! As soluções de elipsoide e cone serão omitidas.

Cubo

É o caso mais simples! Não precisamos fazer mudanças de variável. Temos apenas um loop aninhando nas direções x, y e z.

2.1 Volume de um paralelepípedo reto de lados L_x, L_y e L_z

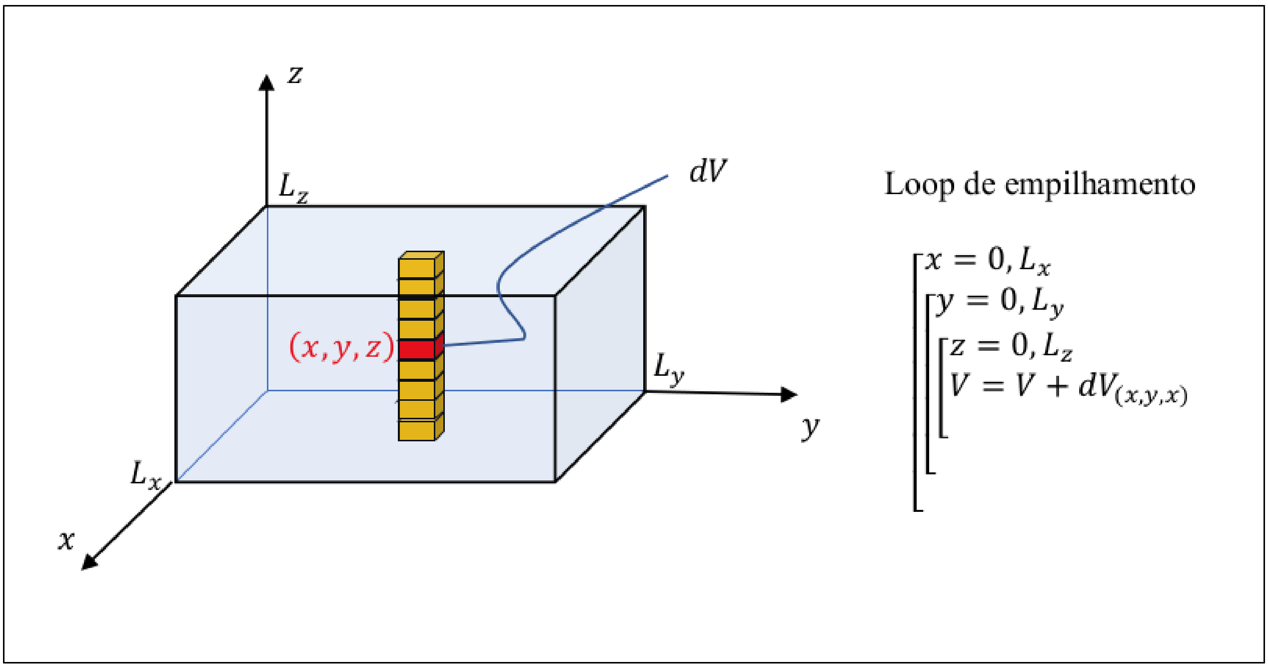

Figura 1. Paralelepípedo reto

Sendo assim, vamos ao cálculo:

$$V = \int_D dV = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} dzdydx$$
$$V = L_z L_y L_x$$

Esfera

Aqui as coisas já ficam mais interessantes!

As coordenadas de um ponto no interior da esfera são tais que:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leq 0.$$

Seguindo por empilhamento via coordenadas cartesianas, cairíamos na seguinte integral:

$$V \quad = \quad \int_D \, dV = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \right) dy \right) dx.$$

Ok. É triste. Vamos seguir por um novo sistema coordendas:

Coordenadas Esféricas

Para o novo sistema de coordenadas, temos a seguinte relação:

$$(11) \quad \begin{pmatrix} x(\rho,\phi,\theta) \\ y(\rho,\phi,\theta) \\ z(\rho,\phi,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\phi)\cos(\theta) \\ \rho\cos(\phi)\sin(\theta) \\ \rho\sin(\phi) \end{pmatrix}.$$

$\rho \in [0, R]$ é o raio polar

$\theta \in [0, 2\pi]$ é a o ângulo de longitude

$\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é o ângulo de latitude

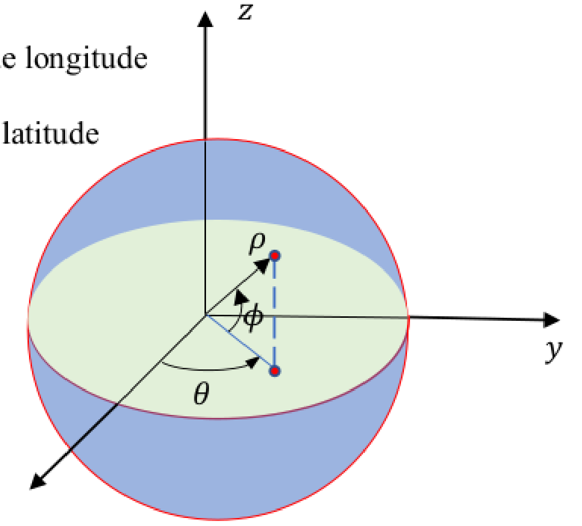

Figura 2. Coordenadas esféricas

Assim, com essa relação, já podemos obter a matriz Jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho\cos(\phi)\sin(\theta) & -\rho\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\sin(\theta) & \rho\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi) & 0 & \rho\cos(\phi) \end{bmatrix}.$$

Com a matriz jacobiana montada, basta seguir com o cálculo da integral:

Portanto, de acordo com a equação (5), temos

$$
\begin{aligned}
|J| &= \det\left(\begin{bmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho\cos(\phi)\sin(\theta) & -\rho\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\sin(\theta) & \rho\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi) & 0 & \rho\cos(\phi) \end{bmatrix}\right) \\
&= \rho^2\cos(\phi)\cos^2(\phi)\cos^2(\theta) + \rho^2\cos(\phi)\sin^2(\phi)\sin^2(\theta) \\
&+ \rho^2\cos(\phi)\sin^2(\phi)\cos^2(\theta) + \rho^2\cos(\phi)\cos^2(\phi)\sin^2(\theta) \\
&= \rho^2\cos(\phi)\cos^2(\phi)\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right) \\
&+ \rho^2\cos(\phi)\sin^2(\phi)\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right) = \rho^2\cos(\phi)\,.
\end{aligned} \tag{13}
$$

O volume pode ser calculado de uma maneira mais simples neste novo sistemas de coordenadas como

$$
\begin{aligned}
V &= \int_D dV = \int_\Omega |J| d\Omega = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\cos(\phi)d\phi\right)d\theta\right)d\rho \\
&= \int_0^R \rho^2\left(\int_0^{2\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)d\theta\right)d\rho \\
&= 2\int_0^R \rho^2\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)d\rho = 2\int_0^R \rho^2(2\pi - 0)\,d\rho \\
&= 4\pi\int_0^R \rho^2\,d\rho = 4\pi\left(\frac{R^3}{3} - 0\right) = \frac{4\pi R^3}{3}
\end{aligned} \tag{14}
$$

Solução final: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

OBS: Não vou me extender muito aqui. O objetivo principal é mostrar como o processo ocorre. Para qualquer outro exemplo, teremos o mesmo padrão:

1. Troca de variável
2. Matriz Jacobiana
3. Novo empilhamento

Cada caso é diferente, e vale a pena ser explorado nas **notas de aula do professor.**

Volume delimitado por um plano e uma superfície.

Da mesma forma que nos casos anteriores, precisamos realizar o acúmulo de volumezinhos dV. Se o domínio plano for retangular, podemos resolver por coordenadas cartesianas.

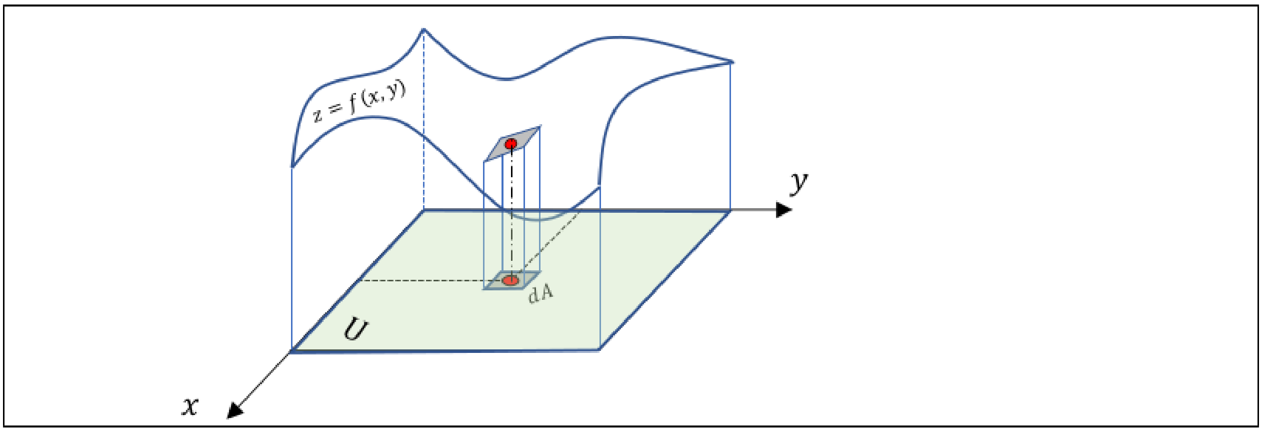

Figura 4. Volume abaixo da superfície $z = f(x, y)$ para $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$

Assim, o volume entre a superfície e a região $U \subset xy$ é dada por:

$$V = \int_D dV = \int_U \left(\int_0^{f(x,y)} dz \right) dA$$
$$= \int_U f(x, y)\, dA.$$

1. Em coordenadas cartesianas, onde $U \subset xy$ é uma região retangular com limite x_{min}, x_{max} no eixo x e y_{min}, y_{max} no eixo y a equação anterior pode ser escrita como:

$$V = \int_U f(x, y)\, dA$$
$$= \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\int_{y_{min}}^{y_{max}} f(x, y)\, dy \right) dx$$

2. Em outras coordenadas α e β, faz-se uma mudança de variáveis na equação. Assim:

$$V = \int_U f(x, y)\, dA \qquad = \int_\Omega f(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))\, |J|\, d\alpha\, d\beta$$

A região $U \in xy$ é $U = \{(x, y) | -40 \leq x \leq 40m, -20m \leq y \leq 20m\}$

Não tem muita graça, basta substituir na fórmula que já encontramos para o caso retângular:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_U f(x,y)dA = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}}\left(\int_{y_{\min}}^{y_{\max}}(f(x,y))dy\right)dx. \\
(27) \qquad &= \int_{-40}^{40}\left(\int_{-20}^{20}(0.2(x^2-y^2))dy\right)dx \\
&= 0.2\left(\int_{-20}^{20}\left(\int_{-40}^{40}(x^2)dx\right)dy - \int_{-40}^{40}\left(\int_{-20}^{20}(y^2)dy\right)dx\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= 0.2\left(\int_{-20}^{20}\left(\frac{40^3}{3}-\frac{(-40)^3}{3}\right)dy - \int_{-40}^{40}\left(\frac{20^3}{3}-\frac{(-20)^3}{3}\right)dx\right) \\
(27) \qquad &= 0.2\left(2\frac{40^3}{3}\int_{-20}^{20}dy - 2\frac{20^3}{3}\int_{-40}^{40}dx\right) \\
&= 0.2\left(2\frac{40^3}{3}40 - 2\frac{20^3}{3}80\right) = 0.2\left(2\frac{20^3}{3}320 - 2\frac{20^3}{3}80\right) = 0.4\frac{20^3}{3}(320-80) \\
\boldsymbol{V} &= \mathbf{256000m^3}
\end{aligned}
$$

Solucionando por Gauss-Legendre (3 pontos em cada direção)

É exatamente a mesma coisa que para áreas:

A quadratura de Gauss-Legendre exige uma mudança de coordenadas dada pela expressão

$$
(28) \qquad \begin{pmatrix} x(\alpha,\beta) \\ y(\alpha,\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-40+40}{2} + \frac{40-(-40)}{2}\alpha \\ \frac{-20+20}{2} + \frac{20-(-20)}{2}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40\alpha \\ 20\beta \end{pmatrix}.
$$

Assim,

$$
(29) \qquad |J| = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix} \overset{eq.(34)}{\triangleq} \det\begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} = 800
$$

e a mudança de variáveis na equação (27) fica

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\left(\left(0.2((40\alpha)^2-(20\beta)^2)\right)\right)800d\alpha\right)d\beta \\
(36) \qquad &= 160\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}((40\alpha)^2-(20\beta)^2)d\alpha\right)d\beta \\
&\approx 160\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(w_i w_j\left(\left(40\alpha_j\right)^2-\left(20\beta_i\right)^2\right)\right) = 256000\text{m}^3.
\end{aligned}
$$

Lembrando que, chegando na última expressão, precisamos calcular seguindo os pares ordenados:

(α_j, β_i)	$w_j w_i$	$g(\alpha_j, \beta_i) = (40\alpha_j)^2 - (20\beta_i)^2$	$w_i w_j\, g(\alpha_j, \beta_i)$	*160
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{25}{81}$	720	222.222222222	
$\left(0, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{8}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{40}{81}$	-240	- 118.518518518	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{25}{81}$	720	222.222222222	
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{8}{9} = \frac{40}{81}$	960	474.074074074	
(0,0)	$\frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} = \frac{64}{81}$	0	0.	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{8}{9} = \frac{40}{81}$	960	474.074074074	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{25}{81}$	720	222.222222222	
$\left(0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{8}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{40}{81}$	-240	- 118.518518518	

Uffa! Terminamos. Para mais detalhes de desenvolvimento: Tarefa 9