📖 **Tarefa 14**

Gustavo Fernandez Vidal Vazquez - 537296

Equação base:

$$S_{i+1} = S_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t)dt$$

Método preditor-corretor de quarta ordem

Neste método, $k = 3$. Portanto, os pontos $(t_{i-3}, F(s_{i-3}, t_{i-3})), (t_{i-2}, F(s_{i-2}, t_{i-2})), (t_{i-1}, F(s_{i-1}, t_{i-1}))$ e $(t_i, F(S_i, t_i))$ serão usados para construir a função $\frac{dS(t)}{dt} \approx g(t)$ que será usada como integrando.

Neste caso, a função $g(t)$ é um polinômio de interpolação de terceiro grau. A integral base fica mais fácil de calcular se for feita uma mudança de variável, assim como no desenvolvimento das fórmulas de integração de Newton-Cotes. Assim, teremos a seguinte mudança:

$$t(r) = t_{i-3} + r\Delta t$$

Com essa mudança, chegamos a seguinte integração:

$$I = \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t)dt = \int_3^4 g(t(r))\frac{dt(r)}{dr}dr = \int_3^4 \hat{g}(r)\frac{dt(r)}{dr}dr$$

Onde $\hat{g}(r)$ é o polinômo de interpolação de Newton de terceiro grau na variável r com os pontos citados anteriormente. Assim, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} t(r) &= t_{i-3} + r\Delta t \\ \frac{dt(r)}{dr} &= \Delta t \\ \hat{g}(r) &= \sum_{i=0}^{3} \Delta_0^i F_{i-3} \frac{r!}{i!(r-i)!} \\ \Delta^0 F_{i-3} &= F_{i-3} \\ \Delta^1 F_{i-3} &= F_{i-2} - F_{i-3} \\ \Delta^2 F_{i-3} &= F_{i-1} - 2F_{i-2} + F_{i-3} \\ \Delta^3 F_{i-3} &= F_i - 3F_{i-1} + 3F_{i-2} - F_{i-3} \end{aligned}$$

O primeiro passo é desenvolver $\hat{g}(r)$:

$$g(r) = f_0 + r(f_1 - f_0) + \frac{1}{2}(r^2 - r)(f_2 - 2f_1 + f_0) + \frac{1}{6}(r^3 - 3r^2 + 2r)(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0)$$

Lembrando que, para o caso acima, teremos um pequeno shift, onde F_0 é na verdade F_{i-3}.
Resolvendo a integral $\int_3^4 \hat{g}(r)dr$, temos o seguinte resultado:

$$\bar{S}_{i+1} = S_i + \frac{\Delta t}{24}(-9f_{i-3} + 37f_{i-2} - 59f_{i-1} + 55f_i)$$

Agora que temos uma estimativa de $\bar{S}_{i+1}$ formada pelos últimos quatro estados $(t_{i-2}, F(s_{i-2}, t_{i-2})), (t_{i-1}, F(s_{i-1}, t_{i-1})), (t_i, F(s_i, t_i))$ e $(t_{i+1}, F(S_{i+1}, t_{i+1}))$, podemos repetir o processo anterior para os novos pontos:

Parametrização nova:

$$t(r) = t_{i-2} + r\Delta t$$

Com essa mudança, chegamos a seguinte integração:

$$I = \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t)dt = \int_2^3 g(t(r))\frac{dt(r)}{dr}dr = \int_3^4 \hat{g}(r)\frac{dt(r)}{dr}dr$$

Onde $\hat{g}(r)$ é o polinômo de interpolação de Newton de terceiro grau na variável r com os pontos citados anteriormente. Assim, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
t(r) &= t_{i-3} + r\Delta t \\
\frac{dt(r)}{dr} &= \Delta t \\
\hat{g}(r) &= \sum_{i=0}^{3} \Delta_0^i F_{i-3} \frac{r!}{i!(r-i)!} \\
\Delta^0 F_{i-2} &= F_{i-2} \\
\Delta^1 F_{i-2} &= F_{i-1} - F_{i-2} \\
\Delta^2 F_{i-2} &= F_i - 2F_{i-1} + F_{i-2} \\
\Delta^3 F_{i-2} &= F_{i+1} - 3F_i + 3F_{i-1} - F_{i-2}
\end{aligned}$$

A integral é a mesma da anterior, mas com os limites de integração diferentes (e o indice também).
Segue o resultado final abaixo:

$$S_{i+1} = S_i + \frac{\Delta t}{24}(f_{i-2} - 5f_{i-1} + 19f_i + 9f_{i+1})$$

Note que, para usar a predição e a correção, precisamos ir do ponto t_{i-3} até o t_i. Daí, só podemos usar a fórmula para S_4, e os estados anteriores devem ser obtidios por uma passo simples de quarta ordem.

Sintetizando

Fase de inicialização : Obter os estados $S_1, S_2 e S_3$ pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Fase de predição: Estimar o estado S_{i+1}

$$\bar{S}_{i+1} = S_i + \frac{\Delta t}{24}(-9f_{i-3} + 37f_{i-2} - 59f_{i-1} + 55f_i)$$

Fase de correção: Atualizar o estado de S_{i+1}

$$S_{i+1} = S_i + \frac{\Delta t}{24}(f_{i-2} - 5f_{i-1} + 19f_i + 9f_{i+1})$$

Note que fórmula de correção pode ser usada repetidas vezes baseada na última correção, até que convirja para alguma tolerância específicada.