# Tarefa 2

**Gustavo Fernandez Vidal Vazquez - 537296**

---

***Desenvolva fórmulas Fechada e Aberta para um polinômio de substituição de grau 4.***

# Determinando $g(s)$

Como queremos de grau quatro, independente da abordagem, precisaremos desenvolver $g(s)$ para $N = 4$.

$$g(s) = \sum_{K=0}^{4} \binom{s}{k} \Delta^k f_0$$

$$g(s) = \Delta^0 f_0 + s\Delta^1 f_0 + \frac{1}{2}(s^2 - s)\Delta^2 f_0 + \frac{1}{6}(s^3 - 3s^2 + 2s)\Delta^3 f_0 + \frac{1}{24}(s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s)\Delta^4 f_0$$

Temos que:
$\Delta^0 f_0 = f_0$
$\Delta^1 f_0 = f_1 - f_0$
$\Delta^2 f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0$
$\Delta^3 f_0 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$
$\Delta^4 f_0 = f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0$

Substituindo:

$$g(s) = f_0 + s(f_1 - f_0) + \frac{1}{2}(s^2 - s)(f_2 - 2f_1 + f_0) + \frac{1}{6}(s^3 - 3s^2 + 2s)(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0) +$$

$\frac{1}{24}(s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s)(f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0)$.

Colocando em termos de $f_0, f_1 \ldots$

$$\begin{aligned} g(s) = {} & f_0(1 - s + \frac{1}{2}(s^2 - s) - \frac{1}{6}(s^3 - 3s^2 + 2s) + \frac{1}{24}(s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s)) \\ & + f_1(s - 2\frac{1}{2}(s^2 - s) + 3\frac{1}{6}(s^3 - 3s^2 + 2s) - 4\frac{1}{24}(s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s)) \\ & + f_2(\frac{1}{2}(s^2 - s) - 3\frac{1}{6}(s^3 - 3s^2 + 2s) + 6\frac{1}{24}(s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s)) \\ & + f_3(\frac{1}{6}(s^3 - 3s^2 + 2s) - 4\frac{1}{24}(s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s)) \\ & + f_4(\frac{1}{24}(s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s)) \end{aligned}$$

Simplificando:

$$
\begin{aligned}
g(s) = f_0(1 - \frac{25s}{12} + \frac{35s^2}{24} - \frac{5s^3}{12} + \frac{s^4}{24}) \\
+ f_1(4s - \frac{13s^2}{3} + \frac{3s^3}{2} - \frac{s^4}{6})) \\
+ f_2(-3s + \frac{19s^2}{4} - 2s^3 + \frac{s^4}{4}) \\
+ f_3(\frac{4s}{3} - \frac{7s^2}{3} + \frac{7s^3}{6} - \frac{s^4}{6}) \\
+ f_4(-\frac{s}{4} + \frac{11s^2}{24} - \frac{s^3}{4} + \frac{s^4}{24})
\end{aligned}
$$

Para as duas abordagens, usaremos o $g(s)$ acima, o que vai mudar é a troca de variável em cada uma delas.

# Abordagem Fechada

## Troca de Variável

Como já vimos, a abordagem fechada leva a seguinte troca de variável:

$$x(s) = x_i + sh$$

no nosso caso, o polinômio de interpolação de grau 4 passa por cinco pontos. Os pontos $x_i$ e $x_f$ são obrigatórios. Dessa maneira, o polinômio deve passar por $f(x_i), f(x_f)$ e outros três pontos intermediários que dividam o intervalo $[x_i, x_f]$ de forma simétrica. A distância entre os valores de $x$ será $h$, dada por:

$$h = \frac{\Delta x}{4}$$

lembrando que satisfaz a relação, tendo em vista que:

$$
\begin{cases}
x(0) = x_i + 0h = x_i \\
x(1) = x_i + 1h \\
x(2) = x_i + 2h \\
x(3) = x_i + 3h \\
x(4) = x_i + 4h = x_f
\end{cases}
$$

Assim, a nossa integral agora passa a ser:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x(s))\frac{dx(s)}{ds}ds = h\int_{s_i}^{s_f} g(s)ds = h\int_{0}^{4} g(s)ds$$

Lembrando que a integral acima ocorre pois:

$$
\begin{cases}
\frac{dx(s)}{ds} = h \\
x = x_i \iff s_i = 0 \\
x = x_f \iff s_f = 4
\end{cases}
$$

## Calculando a Integral

Agora que já fizemos a troca de variável, basta calcular a nova integral:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx h\int_0^4 g(s)$$

$$= h(f_0\int_0^4 (1 - \frac{25s}{12} + \frac{35s^2}{24} - \frac{5s^3}{12} + \frac{s^4}{24})$$

$$+ f_1\int_0^4 (4s - \frac{13s^2}{3} + \frac{3s^3}{2} - \frac{s^4}{6}))$$

$$+ f_2\int_0^4 (-3s + \frac{19s^2}{4} - 2s^3 + \frac{s^4}{4})$$

$$+ f_3\int_0^4 (\frac{4s}{3} - \frac{7s^2}{3} + \frac{7s^3}{6} - \frac{s^4}{6})$$

$$+ f_4\int_0^4 (-\frac{s}{4} + \frac{11s^2}{24} - \frac{s^3}{4} + \frac{s^4}{24}))$$

Simplificando:

$$I \approx h(f_o\frac{14}{45} + f_1\frac{64}{45} + f_2\frac{8}{15} + f_3\frac{64}{45} + f_4\frac{14}{45})$$

$$\approx \frac{h}{45}(14f_0 + 64f_1 + 24f_2 + 64f_3 + 14f_4)$$

Daí, temos a seguinte fórmula fechada:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \frac{h}{45}(14f(x_i) + 64f(x_i + h) + 24f(x_i + 2h) + 64f(x_i + 3h) + 14f(x_f))$$

Onde $h = \frac{\Delta x}{4} = \frac{x_f - x_i}{4}$.

# Abordagem Aberta

## Troca de Variável

Um polinômio de interpolação de grau 4 interpola 5 pontos. Na abordagem aberta, os pontos $x_i$ e $x_f$ são proibidos. Portanto, o polinômio de interpolação deve passar por $f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$ tal que os pontos $x_i, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_f$ estejam igualmente espaçados. Como já vimos, a troca de variável ocorre da seguinte maneira:

$$x(s) = x_i + h + sh$$

No nosso caso, $h = \frac{\Delta x}{6}$. A relação pode ser confirmada analisando a seguinte expressão:

$$\begin{cases} x(0) = x_i + h + 0h = x_0 \\ x(1) = x_i + h + 1h = x_1 \\ x(2) = x_i + h + 2h = x_2 \\ x(3) = x_i + h + 3h = x_3 \\ x(4) = x_i + h + 4h = x_4 \end{cases}$$

Assim, a nossa integral passa a ser:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x(s))\frac{dx(s)}{ds}ds = h\int_{s_i}^{s_f} g(s)ds = h\int_{-1}^{5} g(s)ds$$

Lembrando que essa integral ocorre pois:

$$\begin{cases} \frac{dx(s)}{ds} = h \\ x = x_i \iff s_i = -1 \\ x = x_f \iff s_f = n+1 \end{cases}$$

# Calculando a Integral

Agora que já fizemos a troca de variável, basta calcular a nova integral:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx h \int_{-1}^{5} g(s)$$

$$\begin{aligned} &= h(f_0 \int_{-1}^{5} (1 - \frac{25s}{12} + \frac{35s^2}{24} - \frac{5s^3}{12} + \frac{s^4}{24}) \\ &+ f_1 \int_{-1}^{5} (4s - \frac{13s^2}{3} + \frac{3s^3}{2} - \frac{s^4}{6})) \\ &+ f_2 \int_{-1}^{5} (-3s + \frac{19s^2}{4} - 2s^3 + \frac{s^4}{4}) \\ &+ f_3 \int_{-1}^{5} (\frac{4s}{3} - \frac{7s^2}{3} + \frac{7s^3}{6} - \frac{s^4}{6}) \\ &+ f_4 \int_{-1}^{5} (-\frac{s}{4} + \frac{11s^2}{24} - \frac{s^3}{4} + \frac{s^4}{24})) \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} I &\approx h(f_o \frac{33}{10} - f_1 \frac{21}{5} + f_2 \frac{39}{5} - f_3 \frac{21}{5} + f_4 \frac{33}{10}) \\ &\approx \frac{h}{10}(33f_0 - 42f_1 + 78f_2 - 42f_3 + 33f_4) \end{aligned}$$

Daí, temos a seguinte fórmula para a abordagem aberta:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \frac{h}{10}(33f_0 - 42f_1 + 78f_2 - 42f_3 + 33f_4)$$

Onde $h = \frac{\Delta x}{6} = \frac{x_f - x_i}{6}$.