Tarefa 9

Gustavo Fernandez Vidal Vazquez - 537296

Tarefa: A região** $U \in xy$ **é: $U = \{(x, y) \in \frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{400} \leq 1\}$

Montando o problema

Em coordenadas cartesianas, temos a seguinte integral para cálculo de volume:

$$V = \int_U f(x, y) dA$$

Como U é uma região elíptica, precisamos realizar uma troca de variável para facilitar os nossos cálculos posteriores.

Mudando as variáveis

Fugindo do mundo cartesiano, vamos entrar em coordenadas elípticas, trocando o ambiente em que estamos trabalhando. Podemos montar a seguinte integral (já substituindo os valores)

$$\begin{aligned} A &= \int_U f(x, y) dA \\ &= \int_\Omega f(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta)) \, |J| d\alpha \, d\beta \end{aligned}$$

Já que a equação da nossa superfície é dada por $f(x, y) = 0.2(x^2 - y^2)$, temos o seguinte:

$$\int_\Omega 0.2 \left((x(\alpha, \beta))^2 - (y(\alpha, \beta)^2) \right) \, |J| \, d\alpha \, d\beta$$

Usando algumas coisas da tarefa anterior com a nova equação, temos os seguintes valores:

$$\begin{gathered} a = 40 \\ b = 20 \\ |J| = 800\alpha \\ x(\alpha, \beta) = 40\alpha \cos(\beta) \\ y(\alpha, \beta) = 20\alpha \sin(\beta) \end{gathered}$$

Assim, substituindo na nossa integral, temos:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_\Omega 0.2\left((x(\alpha,\beta))^2 - (y(\alpha,\beta)^2\right)\,|J|\,d\alpha\,d\beta \\
&= \int_\Omega 0.2\left((40\alpha\cos(\beta))^2 - (20\alpha\sin(\beta))^2\right)\,800\alpha\,d\alpha\,d\beta \\
&= 800\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(0.2\left((40\alpha\cos(\beta))^2 - (20\alpha\sin(\beta))^2\right)\,\alpha\,d\beta\right)\,d\alpha
\end{aligned}
$$

Agora é calcular a integral acima usando algum método numérico conhecido

Aplicando Gauss-Legendre

Para aplicarmos Gauss-Legendre, podemos usar a fórmula que já conhecemos para esse tipo de expressão, aplicando internamente e depois usando o resultado para aplicar externamente.

Para simplificar (ou não) as coisas, vamos realizar a mudança de variável que Gauss-Legendre requer:

Mudando de Variável (novamente)

Para o nosso novo sistema (α,β), temos a expressão seguinte:

$$
\begin{bmatrix}\alpha(\omega,\theta)\\ \beta(\omega,\theta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{0+1}{2}+\frac{1-0}{2}\omega\\ \frac{0+2\pi}{2}+\frac{2\pi-0}{2}\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2}\\ \pi+\theta\pi\end{bmatrix}
$$

Assim, temos a seguinte matriz Jacobiana:

$$
\begin{bmatrix}\frac{\partial\alpha}{\partial\omega} & \frac{\partial\alpha}{\partial\theta}\\ \frac{\partial\beta}{\partial\omega} & \frac{\partial\beta}{\partial\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \pi\end{bmatrix}
$$

Daí, temos os valores abaixo:

$$
\begin{aligned}
|J| &= \frac{\pi}{2} \\
\alpha(\omega,\theta) &= \frac{1}{2}+\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}(1+\omega) \\
\beta(\omega,\theta) &= \pi+\theta\pi = \pi(1+\theta)
\end{aligned}
$$

Substituindo na integral:

$$
\begin{aligned}
A &= 800\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(0.2\left((40\alpha\cos(\beta))^2 - (20\alpha\sin(\beta))^2\right)\,\alpha\,d\beta\right)\,d\alpha \\
&= 400\pi\int_{-1}^1\left(\int_{-1}^1\left(0.2\left((40\alpha(\omega,\theta)\cos(\beta(\omega,\theta)))^2 - (20\alpha(\omega,\theta)\sin(\beta(\omega,\theta)))^2\right)\,\alpha(\omega,\theta)\,\right)d\theta\right)d\omega \\
&\approx 400\pi\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3\left(w_iw_j\left(0.2\left((40\alpha(\omega,\theta)\cos(\beta(\omega,\theta)))^2 - (20\alpha(\omega,\theta)\sin(\beta(\omega,\theta)))^2\right)\,\alpha(\omega,\theta)\,\right)\right)
\end{aligned}
$$

Simplificando:

$$\approx 400\pi \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(w_i w_j \left(0.2 \left((40\alpha(\omega,\theta)\cos(\beta(\omega,\theta)))^2 - (20\alpha(\omega,\theta)\sin(\beta(\omega,\theta)))^2\right) \alpha(\omega,\theta) \right)\right)$$

$$\approx 400\pi \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(w_i w_j (1+\omega_i)^2 \left[80\cos^2(\pi(1+\theta_i)) - 10(1+w_j)\sin^2(\pi(1+\theta_i)\right]\right)$$