Métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta são explícitos e de passo simples. Há várias maneiras de desenvolver a fórmula:

$$S_{i+1} = G(S_i, \Delta t, L_p)$$

Suponha que já resolvemos os problemas para os passos $S_0, S_1, \ldots, S_{i-1}, S_i$.

A equação deiferencial ordinária pode ser reescrita na forma diferencial como:

$$\frac{dS(t)}{dt} = F(S(t), t) \implies dS = F(S(t), t)dt$$

Integrando os dois lados no intervalo $[t_i, ti + 1]$, temos:

$$\int_{S_i}^{S_{i+1}} dS = \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(S(t), t)dt \implies S_{i+1} - S_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(S(t), t)dt$$

Lembre-se que $S_i = S(t_i) \approx S(t_0 + i\Delta t)$.

Dessa forma, podemos reescrever a expressão acima como:

$$S_{i+1} = S_i + \int_{t_i}^{t_{i_1}} F(S(t), t)dt$$

Onde, para cálculo da integral, podemos usar as fórmulas de integração de Newton-Cotes.

Range-Kutta de segunda ordem

Vamos usar a fórmula de Newton-Cotes fechada com polinômio de substituição de grau 1. Se ela for aplicada à integral da expressão acima, temos:

$$S_{i+1} = S_i + \int_{t_i}^{t_{i_1}} F(S(t), t)dt \implies S_{i+1} = S_i + \frac{\Delta t}{2}(F(S_i, t_i) + F(S_{i_1}, t_{i+1}))$$

Podemos fazer algumas modificações para que o método se torne explícito, isto é:

$$S_{i+1} = S_i + \int_{t_i}^{t_{i_1}} F(S(t), t)dt \implies S_{i+1} = S_i + \frac{\Delta t}{2}\Big(F(S_i, t_i) + F(\bar{S}_{i+1}, t_{i+1})\Big)$$

A nova expressão acima exige uma nova estimativa para $\bar{S}_{i+1}$.

Suponha que a estimativa $\bar{S}_{i+1}$ seja obtida pelo método de Euler Explícito, a fórmula acima nos dá uma maneira para melhorar o valor usando os seguinte subpassos:

1. Estimativa grosseira do estado S_{i+1}

$$\bar{S}_{i+1} = S_i + \Delta t F(S_i, t_i)$$

2. Atualização melhorada do estado S_{i+1}

$$S_{i+1} = S_i + \frac{\Delta t}{2}\Big(F(S_i, t_i) + F(\bar{S}_{i+1}, t_{i+1})\Big)$$

Range-Kutta de terceira ordem

Aqui temos basicamente o mesmo desenvolvimento que o anterior, mas vamos utilizar a fórmula fechada com polinômio de grau 2. Assim, a equação poderá ser escrita como:

$$S_{i+1} = S_i + \frac{\frac{\Delta t}{2}}{3}\Big(F(S_i, t_i) + 4F(S_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}}) + F(S_{i+1}, t_{i+1})\Big)$$

Nesse caso, temos dois termos desconhecidos, fazendo com que a equação não seja explícita. Para tornar explícita, vamos usar os subpassos:

1. Estimativa grosseira do primeiro estado:

$$\bar{S}_{i+\frac{1}{2}} = S_i + \frac{\Delta t}{2} F(S_i, t_i)$$

2. Estimativa grosseira do segundo estado:

$$\bar{S}_{i+1} = S_i + \Delta t F(S_i, t_i)$$

3. Atualização melhorada do estado S_{i+1}

$$S_{i+1} = S_i + \frac{\frac{\Delta t}{2}}{3}\Big(F(S_i, t_i) + 4F(\bar{S}_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}}) + F(\bar{S}_{i+1}, t_{i+1})\Big)$$