# 3. Gauss-Legendre (desenvolvimento)

# Desenvolvimento

## 1. Mudança de variável

Agora já temos toda a base necessária para resolver o problema! Vamos lá:

$$I = \int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx$$

A primeira coisa que devemos fazer é uma mudança de variável para que os limites de integração sejam -1 e 1. Para isso, vamos estabelecer uma relação entre os domínios $x \in [x_i, x_f]$ e $\alpha \in [-1, 1]$.

Poupando vocês do esforço, a seguinte relação é estabelecida entre $x$ e $\alpha$:

$$x(\alpha) = \frac{x_i + x_f}{2} + \frac{x_f - x_i}{2}\alpha$$

Daí, também podemos obter a derivada:

$$dx = \frac{x_f - x_i}{2}d\alpha$$

Após a mudança, podemos reescrever o nosso problema original como:

$$I = \int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx = \frac{x_f - x_i}{2}\int_{-1}^{1} p(x(\alpha))d\alpha$$

Para simplificar, por enquanto $p(x(\alpha)) = \bar{p}(\alpha)$. Note como $\bar{p}(\alpha)$ continua tendo grau $2n-1$ em $\alpha$.

## 2. Polinômios de Legendre

Continuando de $\bar{p}(\alpha)$, podemos chegar em:

$$\bar{p}(\alpha) = P_n(\alpha)q_{n-1}(\alpha)$$

Voltando para a fórmula da integral:

$$I = \int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \frac{x_f - x_i}{2}\int_{-1}^{1} (P_n(\alpha)q(\alpha) + r(\alpha))d\alpha$$

Como $q(\alpha)$ é um polinômio de grau $n-1$, podemos reescrever ele como uma combinação de polinômios de Legendre de graus 0 a $n-1$.

$$q(\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(\alpha)$$

Substituindo na integral, temos:

$$I \approx \frac{x_f - x_i}{2} \int_{-1}^{1} (P_n(\alpha) \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(\alpha) + r(\alpha)) d\alpha$$

Como a integral da soma é a soma das integrais, podemos reescrever como:

$$I \approx \frac{x_f - x_i}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-1}^{1} (P_n(\alpha) q(\alpha)) d\alpha + \int_{-1}^{1} r(\alpha) d\alpha$$

Como os polinômios de Legendre são ortogonais entre si (lembre da propriedade), para as funções acima no intervalo, temos o seguinte:

$$I = \frac{x_f - x_i}{2} \int_{-1}^{1} r(\alpha) d\alpha$$

## 3. Desenvolvendo $r(\alpha)$

Bom, agora já temos uma expressão bem forte! Para tratar o resto, podemos fazer a seguinte jogada. Nós temos que:

$$\bar{p}(\alpha_i) = P_n(\alpha_i) q(\alpha_i) + r(\alpha_i)$$

Tá, mas se $a_i$ é raiz do polinômio, todo aquele termo que não é o resto vai ser zero! Então temos simplesmente:

$$\bar{p}(\alpha_i) = r(\alpha_i)$$

A ideia agora é que construiremos o $r(\alpha_i)$ utilizando os as $n$ raízes do polinômio de Legende $P_n(\alpha)$. Agora que conhecemos alguns pontos desse cara, $r(\alpha)$ poderá ser escrito como uma interpolação de Lagrange desses $n$ pontos.

$$r(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \bar{p}(\alpha_k) L_k(\alpha)$$

## 4. Final

Agora que temos a fórmula para o resto, podemos substituir a seguinte integral:

$$I \approx \frac{x_f - x_i}{2} \int_{-1}^{1} r(\alpha) d\alpha$$

Realizando a troca, obtemos o seguinte:

$$I \approx \frac{x_f - x_i}{2} \int_{-1}^{1} \sum_{k=1}^{n} \bar{p}(\alpha_k) L_k(\alpha) d\alpha$$

$$\approx \frac{x_f - x_i}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_{-1}^{1} \bar{p}(\alpha_k) L_k(\alpha) d\alpha$$

Finalmente:

# A famosa Quadratura de Gauss-Legendre

$$I = \int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \frac{x_f - x_i}{2} \sum_{k=1}^{n} \bar{p}(x(\alpha_k))w_k$$

Onde:

1. $x(\alpha_k) = \frac{x_i+x_f}{2} + \frac{x_f-x_i}{2}\alpha_k$
2. $a_k, k = 1, 2, \ldots, n$ são as raízes do polinômio de Legendre de grau $n$, $P_n(\alpha)$
3. $w_k, k = 1, 2, \ldots, n$ são os pesos correspondentes dados por $w_k = \int_{-1}^{1} L_k(\alpha)d\alpha$

---

Aqui se encerra a apresentação da fórmula! Para um maior entendimento do processo para encontrar alguma integral, veja: Tarefa 5