2. Gauss-Legendre (base)

Objetivo

O objetivo é mostrar uma nova maneira de calcular integral e o porquê vale a pena utilizar esse novo método. O problema ainda é o mesmo, calcular uma integral:

$$I = \int_a^b f(x)dx\$\$Bom, éclaroquenósnãosabemosfazerissodeformaalgébrica...AanáliseparaoGaus$$

3. É claro que a integral acima será substituída pela função $p(x)$ no intervalo!

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx$$

Até aqui tudo igual... Onde entra a diferença?

A motivação

Suponha que precisamos de um polinômio de grau G. Quantos pontos precisaríamos na nossa interpolação para representá-lo?

- Bom, se usamos a fórmula de Newton-Cotes, precisamos de G + 1 pontos, afinal, uma precisamos de uma função de grau G, e seria impossível determiná-la com menos pontos!

Será que seria impossível mesmo?

- Newton: com n pontos, posso integrar um polinômio de grau $G = n - 1$
- Gauss: com n pontos, posso integrar um polinômio de grau $G = 2n - 1$

An? Como assim? $2n - 1$? Isso é muito mais! Como isso é possível?

Ferramentas necessárias

Para entendermos o que Gauss fez, vamos precisar de alguns conceitos antes:

1. Polinômios de Legendre;
2. Raízes dos polinômios de Legendre;
3. Ortogonalidade dos polinômios de Legendre no intervalo $[-1, 1]$;
4. Base ortogonal de um espaço vetorial de polinômios;
5. Divisão de polinômios.

Cada passo é importante, mas algumas coisas servem apenas para o desenvolvimento e serão descartadas em algum momento. Não desista antes do fim!

Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre são... polinômios! Bom, isso provavelmente você já sabia, mas então, o que eles tem de especiais?

Vamos conhecer ele primeiro. A fórmula que o define é essa:

$$P_n(\alpha) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\,\alpha^n}[(\alpha^2-1)^n]$$

Bonitão né? Vamos explorar algumas das propriedades desse bichão, a começar pelas suas raízes:

Raízes dos Polinômios de Legendre

Não estamos em um curso de Polinômios, então, por favor, tomem as seguintes afirmações como verdade *(odeio essa parte...)*

1. Todas as raízes são distintas.
2. Todas as raízes estão no intervalo $(-1, 1)$
3. Cada raiz $\bar{\alpha}$ tem sua correspondente simétrica $\bar{\alpha}'$

Um polinômio de Legendre de grau n tem n raízes distintas situadas, simetricamente, entre - 1 e 1.

Ortogonalidade dos polinômios de Legendre no intervalo $[-1, 1]$

Espero que ainda lembrem alguma coisa de álgebra linear. *Dois vetores são ortogonais entre si se o **produto escalar entre eles é zero***.

Bom, isso é verdade. Também é verdade que polinômios são vetores! Claro! São elementos do espaço vetorial deles! O que queremos generalizar aqui, é o conceito de **produto vetorial** para esses *vetores diferenciados*.

A forma como vamos fazer isso é a seguinte:

$$u \cdot v = u[1]v[1] + u[2]v[2] + \ldots + u[m]v[m] = \sum_{k=1}^{m} u[k]v[k]$$

Agora imagine que os polinômios p e q na variável α, definidos em $[-1, 1]$ são na verdade um conjunto de um número infinito de elementos indexados por α. Bom, assim o produto vetorial desses dois vetores seria a soma dos produtos desses elementos.

Mas como somar infinitos números! Acho que sabemos alguma coisa parecida com isso...

$$p \cdot i = \int_{-1}^{1} p(\alpha)q(\alpha)d\alpha$$

Como **sabemos** que são ortogonais, temos o seguinte:

$$p \cdot i = \int_{-1}^{1} p(\alpha)q(\alpha)d\alpha = 0$$

Usando do conceito acima, podemos chegar no seguinte:

$$P_i(\alpha) \cdot P_j(\alpha) = \int_{-1}^{1} p(\alpha)q(\alpha)d\alpha = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ \frac{2}{2i+1}, \text{se i = j} \end{cases}$$

em outras palavras, temos que dois polinômios de Legendre de **graus distintos** são **ortogonais** entre si no intervalo $[-1, 1]$

Base ortogonal

Qualquer polinômio de grau n pode ser escrito como uma combinação linear de $n+1$ polinômios de Legendre de graus de 0 a n. Vejamos um pequeno exemplo:

$$p(\alpha) = \alpha + b\alpha + c\alpha^2$$

podemos escrever esse polinômio como uma combinação dos polinômios de Legendre de graus 0 a 2.

$$c_0 + c_1\alpha + c_2\frac{1}{2}(3\alpha^2 - 1) = \alpha + b\alpha + c\alpha^2$$

Pulando o desenvolvimento, podemos chegar na solução abaixo:

$$\begin{cases} c_2 = \frac{2}{3}c \\ c_1 = b \\ c_0 = \alpha + \frac{1}{3}c \end{cases}$$

Isso é bom! Quer dizer que qualquer polinômio pode se expresso como um produto de polinômios de Legendre!

Uma pequena lembrança: divisão de polinômios

Para esse método, não usaremos o algoritmo de divisão explicitamente, mas é importante entendermos duas coisas fundamentais:

1. $p(\alpha) = P_n(\alpha)q(\alpha) + r(\alpha)$ (Dividendo = Divisor x Quociente + Resto)
2. Os possíveis graus para cada um desses polinômios.

Já temos alguns graus que foram dados:

- $p(\alpha)$ é $2n - 1$
- $P_n(\alpha)$ é n

Para determinar o grau do resto, basta fazer uma simulação do que aconteceria no algoritmo de divisão. O maior grau que $r(\alpha)$ pode ter é $n - 1 = (2n - 1 - n)$.

Para fins de consulta, o desenvolvimento está em outro arquivo:

3. Gauss-Legendre (desenvolvimento)