Tarefa 6

Gustavo Fernandez Vidal Vazquez - 537296

Seguindo o desenvolvimento apresentado nesta aula, complete a linha n=4 da tabela. Em seguida, implemente as Quadraturas especiais para n = 2, 3 e 4.*

Completando a tabela

A tabela citada na questão é a seguinte:

n	$H_n(x)$		$L_n(x)$		$T_n(x)$	
	x_k	$w_k = \frac{2^{n-1}n!\sqrt{\pi}}{n^2[H_{n-1}(x_i)]^2}$	x_k	$w_k = \frac{x_i}{(n+1)^2[L_{n+1}(x_i)]^2}$	x_k	$w_k = \frac{\pi}{n}$
2	$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2 = +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$	$w_1 = w_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$\begin{cases} x_1 = 2-\sqrt{2} \\ x_2 = 2+\sqrt{2} \end{cases}$	$\begin{cases} w_1 = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2}) \\ w_2 = \frac{1}{4}(2-\sqrt{2}) \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2 = +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$	$w_1 = w_2 = \frac{\pi}{2}$
3	$\begin{cases} x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = +\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$	$w_1 = w_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{6}$ $w_2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{3}$	$\begin{cases} x_1 = 0.4157745568 \\ x_2 = 2.2942803603 \\ x_3 = 6.2899450829 \end{cases}$	$\begin{cases} w_1 = 0.7110930099 \\ w_2 = 0.2785177336 \\ w_3 = 0.0103892565 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = +\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$	$w_1 = w_2 = w_3 = \frac{\pi}{3}$
4	$\begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \\ x_4 = \end{cases}$	$w_1 = w_4 =$ $w_2 = w_3 =$	$\begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \\ x_4 = \end{cases}$	$\begin{cases} w_1 = \\ w_2 = \\ w_3 = \\ w_4 = \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \\ x_4 = \end{cases}$	$w_1 = \dots = w_4 =$

Basta encontrar as raízes e os pesos para cada caso. Normalmente, precisaríamos calcular a fórmula de cada peso, mas ela já foi dada na própria tabela.

Encontrando as raízes:

Temos os seguintes polinômios:

$$
\begin{aligned}
H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \\
L_n(x) &= \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \\
T_n(x) &= \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{(1-x^2)} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Usando o wolfram alpha para obter as raízes:

$$\text{Hermite: } \begin{cases} x_1 \approx -1.6507 \\ x_2 \approx -0.52465 \\ x_3 \approx +0.52465 \\ x_4 \approx +1.6507 \end{cases}$$

$$\text{Laguerre: } \begin{cases} x_1 \approx 0.32255 \\ x_2 \approx 1.7458 \\ x_3 \approx 4.5366 \\ x_4 \approx 9.3951 \end{cases}$$

$$\text{Chebyshev: } \begin{cases} x_1 \approx -0.92388 \\ x_2 \approx -0.38268 \\ x_3 \approx +0.38268 \\ x_4 \approx +0.92388 \end{cases}$$

Agora para os pesos:

$$\text{Hermite: } \begin{cases} w_1 = w_4 = \frac{\sqrt{\pi}}{4(3-\sqrt{6})} \\ w_2 = w_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{4(3+\sqrt{6})} \end{cases}$$

$$\text{Laguerre: } \begin{cases} w_1 \approx 0.603154 \\ w_2 \approx 0.357419 \\ w_3 \approx 0.0388879 \\ w_4 \approx 0.000539295 \end{cases}$$

$$\text{Chebyshev: } w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = \frac{\pi}{4} \$\$ Pronto, agorabastaimplementar!$$