Método da Potência Regular (preparativos)

O objetivo dessa anotação é mostrar alguns conceitos básicos de Autovalores e Autovetores em matrizes simétricas, apresentando o método da potência regular.

Duas coisas principais vão ser mostradas:

1. Toda matriz simétrica, A, cujos elementos são números reais, possuem autovalores reais. Isto é:

$$a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R} \implies \forall \lambda_k \in \mathbb{R}$$

2. Se dois autovalores quaisquer da matriz A forem diferentes, os autovetores correspondentes são ortogonais entre sim isto é:

$$\lambda_r \neq \lambda s \implies x_r \perp x_s$$

Antes de demonstrar o primeiro ponto, apresento um novo conceito:

Transposta Hermitiana

A transposta Hermitiana de um vetor x_k é obtida simplesmente da seguinte forma:

1. Escreva a transposta do vetor x_k.
2. Troque os elementos pelos seus conjugados complexos.

Lembrando que um número complexo $a + bi$ possui como conjugado $a - bi$.

Seguindo a definição anterior, qual seria o resultado de $(x_k)^H x_k$?

É como se fosse um produto escalar, mas cada elemento do vetor, em vez de ser multiplicado por si mesmo, é multiplicado por seu conjugado complexo. Nesse caso, cada $z = a + bi$ seria multiplicado por $\bar{z} = a - bi$, qual resultado da multiplicação seria:

$$\bar{z}z = a^2 + b^2$$

Ou seja, cada elemento do produto escalar será um número real.

Voltando para o primeiro ponto

Do primeiro ponto, queremos demonstrar o seguinte:

1. Toda matriz simétrica, A, cujos elementos são números reais, possuem autovalores reais. Isto é:

$$a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R} \implies \forall \lambda_k \in \mathbb{R}$$

Com o novo conceito apresentado, já podemos começar nossa demonstração.

Prova:

Por contradição, assuma que um autovalor λ_k da matriz A é um número complexo da seguinte forma:

$$\lambda_k = c + di$$

onde c e d são números reais e i é a unidade imaginária $(i = \sqrt{-1})$.

Assim, se λ_k é um autovalor da matriz A, então o autovetor associado a ele é o vetor x_k. O par deve satisfazer a seguinte expressão:

$$Ax_k = \lambda_k x_k.$$

Agora, multipliquemos os dois lados pela **transposta Hermitiana**:

$$(x_k)^H A x_k = \lambda_k (x_k)^H x_k.$$

Calculando a transposta Hermitiana de cada lado da equação, temos:

$$[(x_k)^H A x_k]^H = [\lambda_k (x_k)^H x_k]^H.$$
$$(x_k)^H A^H x_k = [(x_k)^H x_k]^H (\lambda_k)^H$$

Do resultado acima, podemos tirar algumas observações:

1. Os resultados foram obtidos usando a regra da transposta de um produto:

$$(AB)^H = B^H A^H$$

2. Como a matriz A é simétrica e seus elementos são números reais, então $A^H = A$.
3. Como $(x_k)^H x_k$ resulta em um número real, então $[(x_k)^H x_k]^H = (x_k)^H x_k$
4. A transposta Hermitiana de um número complexo é apenas seu complexo conjugado.

Assim, podemos escrever o seguinte:

$$(x_k)^H A x_k = \bar{\lambda}_k (x_k)^H x_k.$$

Das equações antigas, temos uma outra igualdade com o mesmo lado esquerdo, sendo assim, o conteúdo à direita tem que ser igual.

$$\lambda_k (x_k)^H x_k = \bar{\lambda}_k (x_k)^H x_k. \implies \lambda_k = \bar{\lambda}_k$$

Isso diz que λ_k é igual ao seu complexo conjugado, isto é:

$$\lambda_k = c + di = \bar{\lambda_k} = c - di$$

O que só pode acontecer se $d = 0$. Portanto, $lambda_k = C \in \mathbb{R}$. Ou seja, chegamos em uma contradição e demonstramos o ponto 1. ■

Segundo ponto

No segundo ponto, queremos demonstrar o seguinte:

2. Se dois autovalores quaisquer da matriz A forem diferentes, os autovetores correspondentes são ortogonais entre sim isto é:

$$\lambda_r \neq \lambda s \implies x_r \perp x_s$$

Prova:

Essa é um pouco mais simples. Vamos começar simplesmente escrevendo as relações entre os autovalores e seus respectivos autovetores:

$$Ax_r = \lambda_r x_r$$
$$Ax_s = \lambda_s x_s$$

Multiplicando os dois lados da equação pela transposta do (x_i) da outra equação, temos:

$$(x_s)^T A x_r = \lambda_r (x_s)^T x_r$$
$$(x_r)^T A x_s = \lambda_s (x_r)^T x_s$$

Da segunda equação acima, calculando a transposta dos dois lados, temos:

$$(x_s)^T A^T x_r = \lambda_s (x_s)^T x_r$$

Sabendo que a matriz A é simétrica, temos que $A^T = A$, então os lados esquerdos da equação acima e da primeira logo atrás também são iguais. Sendo assim, podemos igualar seus lados direitos.

$$\lambda_r (x_s)^T x_r = \lambda_s (x_s)^T x_r \implies \lambda_r (x_s)^T x_r - \lambda_s (x_s)^T x_r = 0 \implies (\lambda_r - \lambda_s)(x_s)^T x_r = 0$$

Porém, como $\lambda_r \neq \lambda_s$ então $(x_s)^T x_r = x_r \cdot x_s = 0$. Daí, temos finalmente que $x_r \perp x_s$■.

Verdades

Seguem algumas propriedades importantes, que são válidas, mas que não vamos demonstrar.

Se A é uma matriz simétrica cujos elementos são números reais, a multiplicidade algébrica de qualquer

autovalor é igual à sua multiplicidade geométrica.

Bom, explicar não é demonstrar, então vamos entender alguns desses termos:

Multiplicidade Algébrica

Já sabemos que o polinômio característico de uma matriz $A\ n \times n$ possui grau n e suas raízes são os autovalores de A. Vamos escrever nosso polinômio *genérico* de forma fatorada:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1} + (\lambda - \lambda_2)^{a_2} + \ldots + (\lambda - \lambda_k)^{a_k} = 0$$

Os expoentes dos termos fatorados (nesse caso, a_i) indicam quantas vezes cada raiz está repetida. Esse valor é chamado de multiplicidade algébrica do autovalor. No final, sabemos que a soma de todos os expoentes será n.

Multiplicidade Geométrica

A multiplicidade geométrica associada a um autovalor qualquer λ_i é o número de autovetores distintos associados àquele autovalor. Quando a multiplicidade algébrica é menor que a geométrica, dizemos que a matriz é **defectiva**. No caso das matrizes simétricas de elementos reais, sempre existem a_i autovetores associados ao autovalor λ_i

Se A é uma matriz simétrica cujos elementos são números reais, e como consequência da verdade anterior e de *outros detalhes*, ela tem n autovetores ortogonais que podem ser utilizados como base do espaço $\mathbb{R}^n$