5. Singularidades

Objetivo

O objetivo dessa aula é desenvolver estratégias para a resolução de integrais que apresentam singularidade em algum dos limites de integração. O problema que queremos resolver:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Onde a ou b são pontos de singularidade.

Entendendo o Problema

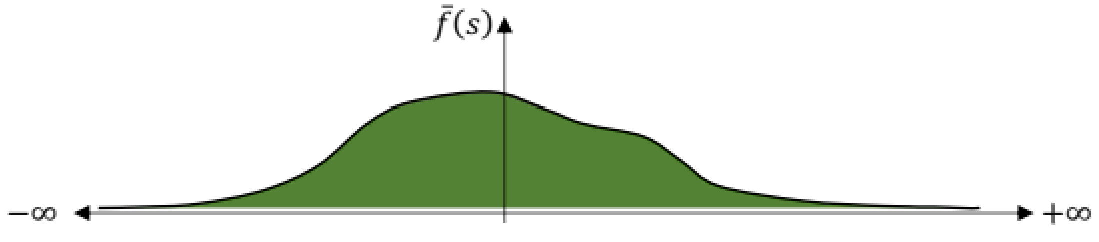
Alguns dos nossos métodos para integração utilizam o cálculo da função nos limites. Quando temos algum ponto de singularidade, isso pode ser um problema.

É claro que poderíamos utilizar Newton-Cotes com a abordagem aberta ou até mesmo Gauss-Legendre, mas infelizmente os resultados não são agradáveis, com convergência lenta.

Mudança de Variável

Para resolver o nosso problema, imagine nossa função como um dinossauro.

Bom, o problema de funções da maneira acima é que não conseguimos calcular a cabeça dele. A ideia é realizar uma mudança de variável que deixe nossa função mais próxima da figura abaixo:



Com o resultado acima, fica bem mais fácil de integrar. Apesar de ainda não conseguirmos calcular nas pontas, elas são bem menos representativas do que anteriormente.

A mudança de variável necessária é a seguinte:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x(s))\frac{dx(s)}{ds}ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(s)ds$$

Para conseguirmos representar dessa maneira, exploraremos duas estratégias diferentes:

1. Exponencial simples

$$x(s) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}tanh(s)$$
$$\frac{dx(s)}{ds} = \frac{b-a}{2}\frac{1}{(cosh(s))^2}$$

2. Exponencial dupla

$$x(s) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}tanh(\frac{\pi}{2}sinh(s))$$
$$\frac{dx(s)}{ds} = \frac{b-a}{2}\left[\frac{\pi}{2}\frac{cosh(s)}{\left(cosh(\frac{\pi}{2}sinh(s))\right)^2}\right]$$

Computando

Independente dos casos, o que teríamos é que em vez de integrar no intervalo original, faríamos para:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(s)ds$$

Onde $\bar{f}(s)$ é simplesmente o produto de $f(x(s))$ com $\frac{dx(s)}{ds}$.

Usando os métodos

Em Newton-Cotes e Gauss-Legendre, não podemos utilizar os limites de integração de $[-\infty, +\infty]$. Para esse caso, independente do método utilizado, vamos fazer o seguinte:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(s)ds \approx \int_{-c}^{+c} \bar{f}(s)ds$$

E partindo dessa mudança, realizaremos o cálculo.

Detalhes de implementação:

- Receberemos uma função e chamaremos a troca de variável para ela.
- O método calculará o resultado para o método desejado, dado um C ou a tolerância desejada.

Temos duas tolerâncias:

- Uma do método que está calculando no intervalo $[-c, +c]$
- Outra para o resultado dessa integração para a próxima (com c maior)