Equações Diferenciais

Antes de iniciar a apresentação do problema de valor inicial, é necessário uma breve introdução às equações diferenciais.

Introdução

Uma equação matemática possui a seguinte forma:

$$E(\dots) = 0.$$

No contexto das equações diferenciais, a expressão acima envolverá funções e suas derivadas. Se a expressão acima envolver uma função $y(t)$ e suas derivadas até uma ordem n eséficica $(n = 1, 2, 3, \dots)$, ela é chamada de **equação diferencial de ordem** n.

Uma equação diferencial é dita **linear** quando $E(\dots)$ é uma combinação linear da função com suas derivadas.

O nosso resultado de uma equação diferencial é uma **função**, isto é, nosso objetivo é encontrar uma função (ou todas as funções) para que nossa equação possui valor nulo.

Problema de Valor Inicial

Um problema de valor inicial (PVI) é definido por uma equação diferencial e uma condição inicial que a solução geral da equação precisa satisfazer. Assim, todo problema é escrito da seguinte forma:

$$PVI : \begin{cases} ED \\ c.i. \end{cases}$$

Onde ED é uma equação diferencial e $c.i$ é a condição inicial específicada. Segue um exemplo ilustrativo abaixo:

$$PVI : \begin{cases} 3\frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Solução exata de um PVI

Uma solução exata de um problema de valor inicial deve satisfazer tanto a Equação Diferncial do problema quanto a condição inicial. Assim, para o exemplo anterior, a solução é:

$$y(t) = y_0 e^{\frac{2}{3}(t-t_0)}$$

Normalmente, na modelagem de um problema de valor inicial, há uma fase de construção de um modelo e posteriormente são definidas as condições iniciais do problema. Em uma situação exata, chegamos em uma resposta com algumas constantes desconhecidas (após integrações) e utilizamos os valores iniciais do problema para encontrar os seus valores exatos dessas constantes. Um exemplo de solução exata para um PVI pode ser encontrada nas notas de aula do professor.

Solução aproximada

A solução aproximada de um PVI parte da condição inicial e busca aproximações da solução da equação diferencial, utilizando aproximações de $S(t)$ por uma sequências de valores discretos da variável t.

Para resolver um PVI de forma aproximada, a descrição original do problema tem que ser transformada para o seguinte formato (EDO de primeira ordem)

$$PVI: \begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = F(S(t), t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}$$

onde $S(t)$ é o estado do problema e S_0 é o estado inicial do problema. Observe abaixo a modificação de um PVI para se enquadrar na forma acima:

$$PVI: \begin{cases} 3\frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Pode ser modificado para:

$$PVI: \begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = \frac{2}{3}y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Observe que no exemplo acima é trivial, mas nem sempre é assim. Em um caso onde temos derivadas de ordem mais alta, é necessário realizar algumas mudanças de variável. Vejamos o caso abaixo:

$$PVI: \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + g = 0 \\ \frac{dy}{dt}(t_0) = v_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Vamos realizar algumas mudanças:

- $\frac{dy(t)}{dy} = v(t)$ representando a velocidade.
- $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt}$

Agora, podemos definir o estado da partícula como as funções que aparecem nas derivadas de primeira ordem, ou seja, $v(t)$ e $y(t)$. Assim, o estado da partícula é escrito como:

$$S(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Daí, fica claro que:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g \\ v(t) \end{pmatrix}$$

Portanto, o PVI transformado é:

$$PVI : \begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = F(S(t), t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}, \text{onde } \frac{dS(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix}, F(S(t), t) = \begin{pmatrix} -g \\ v(t) \end{pmatrix} \text{e } S_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Observe o padrão:

- A derivada é de ordem dois. Além da função inicial padrão $y(t)$, definimos uma nova função $v(t)$.
- Para cada função, precisaremos de uma condição inicial. Sendo assim, uma equação diferencial de ordem n precisará de n valores iniciais.
- Com nossas funções definidas, construimos $S(t)$ e achamos $\frac{dS(t)}{dt}$

Na próxima aula discutiremos métodos para encontrar soluções de um PVI transformado para o formato anterior.