2. Derivação por Interpolação

Avaliação

Independente da maneira que vamos prosseguir, o primeiro passo é avaliar a expansão em série de Taylor em torno do ponto X. Tomemos o exemplo a seguir:

- `Desenvolvimento da expressão para o cálculo da derivada terceira na filosofia forward com erro quadrático`

1. Se queremos a derivada terceira com erro quadrático, precisamos expandir até a quinta ordem.

$$1)\ f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}f''(x)(\Delta x)^3 + \ \ldots$$

   Para eliminar os termos indesejados, precisaremos de mais três equações. (para eliminar f', f'', f''''). Dessa forma, precisaremos usar os seguintes pontos amostrais:

$$f(x_i),\ f(x_{i+1}),\ f(x_{i+2}),\ f(x_{i+3}),\ f(x_{i+4})$$

Construção do Polinômio

Para construir o polinômio de interpolação, basta usar a fórmula abaixo:

$$\mathrm{g(s)} = \sum_{k=0}^{N} \binom{s}{k} \Delta^k f_0$$

Lembrando que:

$$\binom{s}{k} = \frac{s!}{k!\,(s-k)!}$$

e:

$$\Delta^k f_i = \begin{cases} f_i & \text{se } k = 0 \\ \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i & \text{se } k > 0 \end{cases}.$$

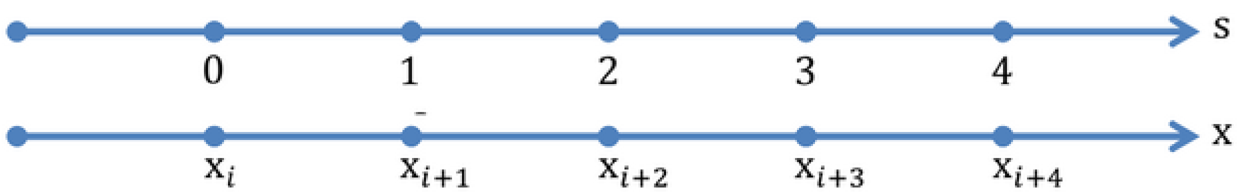
Como precisamos de 5 pontos, o grau do polinômio precisa ser 4. Fazendo as contas para N =

4 temos o seguinte:

$$\begin{aligned} g(s) \quad &= \Delta^0 f_0 + s\Delta^1 f_0 + \frac{1}{2}(s^2 - s)\Delta^2 f_0 \\ &+ \frac{1}{6}(s^3 - 3s^2 + 2s)\Delta^3 f_0 + \frac{1}{24}(s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s)\Delta^4 f_{0.} \end{aligned}$$

Mudança de Variável

Para facilitar nossos trabalhos, escolheremos pontos genéricos que possuem uma bijeção com os dados originais.



Dada a função acima, é fácil ver que:

$$x(s) = x_i + s\Delta x$$
$$s(x) = \frac{1}{\Delta x}(x - x_i).$$

Lembrando que queremos derivar f(x) e ele está associado à s da seguinte forma:

$$f(x) \approx g(s(x))$$

Pela regra da cadeia, temos que:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \approx \frac{dg(s)}{ds}\frac{ds(x)}{dx}$$

Onde

$$\frac{ds(x)}{dx} = \frac{1}{\Delta x}.$$

Assim, podemos reescrever os termos das derivadas da seguinte maneira:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \approx \frac{1}{\Delta x}\frac{dg(s)}{ds}.$$

Aplicando a regra da cadeia sucessivamente, temos

$$f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}\frac{d^2g(s)}{ds^2}$$

e

$$f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3} \approx \frac{1}{(\Delta x)^3}\frac{d^3g(s)}{ds^3}.$$

Como o nosso objetivo é chegar na derivada terceira, basta derivar três vezes g(s).

$$f'''(x) = \frac{1}{(\Delta x)^3}\left(\Delta^3 f_0 + \frac{1}{24}(24s - 36)\Delta^4 f_0\right).$$

Dessa função acima, basta expandir os termos das diferenças divididas.

$$\begin{aligned} f'''(x_i) &= \frac{1}{(\Delta x)^3}\left((f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0) - \frac{3}{2}(f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0)\right) \\ &= \frac{1}{(\Delta x)^3}\left(-\frac{5}{2}f_0 + 9f_1 - 12f_2 + 7f_3 - \frac{3}{2}f_4\right) \end{aligned}.$$

Lembrando que no caso acima nós usamos S = 0 já que é filosofia forward.

Dedução da estimativa do erro

Para deduzir o erro, é só expandir o termo que faltou e fazer o mesmo processo. Nesse caso, seria o termo de N = 5

$$e(s) = \frac{s!}{5!(s-5)!}\Delta^5 f_0 = \frac{1}{120}\Delta^5 f_0(s^5 - 10s^4 + 35s^3 - 50s^2 + 24s).$$

$$Erro(x(s)) \approx \frac{1}{(\Delta x)^3}\frac{d^3e(s)}{ds^3} = \frac{1}{120}\frac{\Delta^5 f_0}{(\Delta x)^5}(\Delta x)^2(60s^2 - 240s + 210).$$

Delta X vem daqui! E por isso tem grau 5, mas tem coisas estranhas com o desenvolvimento acima. Provavelmente seria ideal colocar o

$$x(s) = x_i + s\Delta x$$

antes e derivar dps?