Tarefa 5

Gustavo Fernandez Vidal Vazquez - 537296

******Desenvolva a Quadratura de Gauss-Legendre com 4 pontos seguindo o roteiro apresentado nesta aula. Implemente as Quadraturas de Gauss-Legendre de 2 a 4 pontos e teste os resultados com tolerância de 10-6.***

Ingredientes da fórmula de Gauss-Legendre com 4 pontos de interpolação.

Para este caso particular, a fórmula pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} I = \int_{x_i}^{x_f} f(x)dx &\approx \frac{x_f - x_i}{2} \sum_{k=1}^{4} (f(x(\alpha_i))w_i \\ &= \frac{x_f - x_i}{2} (f(x(\alpha_1))w_1 + f(x(\alpha_2))w_2 + f(x(\alpha_3))w_3 + f(x(\alpha_4))w_4) \end{aligned}$$

Quem são α_1, α_2, α_3 e α_4?

Pela fórmula do Polinômio de Legendre, temos que:

$$P_4(\alpha) = \frac{1}{2^4 4!} \frac{d^4}{d\,\alpha^4} [(\alpha^2 - 1)^4] = \frac{1}{8}(3 - 30\alpha^2 + 35x^4)$$

Assim, temos as seguintes raízes:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}} \approx -0.33998 \\ \alpha_2 &= \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}} \approx 0.33998 \\ \alpha_3 &= -\sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}} \approx -0.86114 \\ \alpha_4 &= \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}} \approx 0.86114 \end{aligned}$$

Cálculo de $x(\alpha_1)$, $x(\alpha_2)$, $x(\alpha_3)$ e $x(\alpha_4)$

Com os dados de α calculados, podemos usar a fórmula $x(\alpha_k) = \frac{x_i+x_f}{2} + \frac{x_f-x_i}{2}\alpha_k$ para obter o seguinte:

$$x(\alpha_1) = (\frac{x_i+x_f}{2} - \frac{x_f-x_i}{2})\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2\sqrt{6}}{7}}$$
$$x(\alpha_2) = (\frac{x_i+x_f}{2} + \frac{x_f-x_i}{2})\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2\sqrt{6}}{7}}$$
$$x(\alpha_3) = (\frac{x_i+x_f}{2} - \frac{x_f-x_i}{2})\sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2\sqrt{6}}{7}}$$
$$x(\alpha_4) = (\frac{x_i+x_f}{2} + \frac{x_f-x_i}{2})\sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2\sqrt{6}}{7}}$$

Cálculo de w_1 , w_2, w_3 e w_4

Temos que:

$$w_k = \int_{-1}^{1} L_k(\alpha)d\alpha$$

Onde $L_k(\alpha)$ é o polinômio interpolador de Lagrange. Dessa forma, precisamos calcular o $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$, $L_3(\alpha)$ e $L_4(\alpha)$.

Analisando as raízes e o comportamento do Polinômio de Legendre, podemos afirmar que as integrais de $L_1(\alpha)$ e $L_2(\alpha)$ serão iguais, assim como $L_3(\alpha)$ e $L_4(\alpha)$. Isso acontece por conta da simetria da função.

Como as raízes estão dispostas simetricamente em torno da origem, a integral para esses pontos também é a mesma. Sendo assim, basta calcular os pesos w_1 e w_3 e já obteremos o resto.

$$L_1(\alpha) = \frac{(\alpha-\alpha_2)(\alpha-\alpha_3)(\alpha-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)}$$
$$L_3(\alpha) = \frac{(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)(\alpha-\alpha_4)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)}$$

Usando os valores aproximados, temos o seguinte:

$$L_1(\alpha) = 2.34941(-0.86114+\alpha)(-0.33998+\alpha)(0.86114+\alpha)$$
$$L_3(\alpha) = -0.927553(-0.86114+\alpha)(-0.33998+\alpha)(0.33998+\alpha)$$

Assim, substituindo e descobrindo o w correspondente:

$$w_1 = w_2 = \int_{-1}^{1} L_1(\alpha)d\alpha \approx 0.652147$$
$$w_3 = w_4 = \int_{-1}^{1} L_3(\alpha)d\alpha \approx 0.347852$$

Pronto! Agora já temos todas as ferramentas para calcular a integral...

Resultados da Implementação:

Para a seguinte integral:

$$\int_{-1}^{1} (sen(2x) + 4x^2 + 3x)^2 dx$$

```
2 Points Gauss Legendre: 17.87644249
3 Points Gauss Legendre: 17.87646837
4 Points Gauss Legendre: 17.87645344
```