Tarefa 8

Gustavo Fernandez Vidal Vazquez - 537296

Tarefa: A região** $U \in xy$ **é: $U = \{(x, y) \in \frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{1600} \leq 1\}$

Montando o problema

Primeiramente, nós temos o seguinte em coordenadas cartesianas:

$$A = \int_S dS = \int_U \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)^2}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f(x,y)^2}{\partial y} \right) + 1} \right) dA$$

Bom, se estivéssemos em um plano retangular, como no primeiro exemplo, bastaria extender os limites de integração para varrer todo o plano.

Precisamos de uma maneira para representar a nossa mesma integral, porém, com um plano elíptico.

Mudando as variáveis

Fugindo do mundo cartesiano, vamos entrar em coordenadas elípticas, trocando o ambiente em que estamos trabalhando. Podemos montar a seguinte integral (já substituindo os valores)

$$\begin{aligned} A &= \int_U \left(\sqrt{(0.4x)^2 \; + (0.4y)^2 + 1} \right) dA \\ &= \int_\Omega \left(\sqrt{(0.4x(\alpha, \beta))^2 \; + (0.4y(\alpha, \beta))^2 + 1} \right) |J| \; d\alpha \; d\beta \end{aligned}$$

De coordenadas cartesianas para coordenadas elípticas, temos a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \cos(\beta) \\ \alpha b \sin(\beta) \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz Jacobiana é a seguinte:

$$J = \begin{bmatrix} a \cos(\beta) & -\alpha a \sin(\beta) \\ b \sin(\beta) & \alpha b \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

O que nos dá a seguinte determinante:

$$|J| = ab\alpha$$

Daí, basta prosseguir com a integral, utilizando os seguintes valores:

$$
\begin{aligned}
a &= 40 \\
b &= 40 \\
|J| &= 1600\alpha \\
x(\alpha, \beta) &= 40\alpha\cos(\beta) \\
y(\alpha, \beta) &= 40\alpha\sin(\beta)
\end{aligned}
$$

Assim, substituindo na integral obtida anteriormente, temos:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_\Omega \left(\sqrt{(16\alpha\cos(\beta))^2 \ + (16\alpha\sin(\beta))^2 + 1} \right) |J| \; d\alpha \; d\beta \\
&= 1600 \int_0^1 \alpha \left(\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{(16\alpha\cos(\beta))^2 \ + (16\alpha\sin(\beta))^2 + 1} \right) d\beta \right) d\alpha
\end{aligned}
$$

Bom, não sei calcular isso! Vamos ter que partir para algum dos métodos que conhecemos.

Aplicando Gauss-Legendre

Para aplicarmos Gauss-Legendre, podemos usar a fórmula que já conhecemos para esse tipo de expressão, aplicando internamente e depois usando o resultado para aplicar externamente.

Para simplificar (ou não) as coisas, vamos realizar a mudança de variável que Gauss-Legendre requer:

Mudando de Variável (novamente)

Para o nosso novo sistema (α, β), temos a expressão seguinte:

$$
\begin{bmatrix} \alpha(\omega, \theta) \\ \beta(\omega, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2}\omega \\ \frac{0+2\pi}{2} + \frac{2\pi-0}{2}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\omega}{2} \\ \pi + \theta\pi \end{bmatrix}
$$

Assim, temos a seguinte matriz Jacobiana:

$$
\begin{bmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial\omega} & \frac{\partial\alpha}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\beta}{\partial\omega} & \frac{\partial\beta}{\partial\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix}
$$

Daí, temos os valores abaixo:

$$
\begin{aligned}
|J| &= \frac{\pi}{2} \\
\alpha(\omega, \theta) &= \frac{1}{2} + \frac{\omega}{2} \\
\beta(\omega, \theta) &= \pi + \theta\pi
\end{aligned}
$$

Substituindo na integral:

$$
\begin{aligned}
A &= 1600 \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{(16\alpha \cos(\beta))^2 \ + (16\alpha \sin(\beta))^2 + 1} \right) \alpha \, d\beta \right) d\alpha \\
&= 800\pi \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\alpha(\omega,\theta) \sqrt{(16\alpha(\omega,\theta) \cos(\beta(\omega,\theta)))^2 \ + (16\alpha(\omega,\theta) \sin(\beta(\omega,\theta)))^2 + 1} \right) d\theta \right) d\omega \\
&\approx 800\pi \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(w_i w_j \left(\alpha(\omega,\theta) \sqrt{(16\alpha(\omega,\theta) \cos(\beta(\omega,\theta)))^2 \ + (16\alpha(\omega,\theta) \sin(\beta(\omega,\theta)))^2 + 1} \right) \right)
\end{aligned}
$$

Lembre-se que internamente na verdade estamos chamando para ω_i e θ_j.