Soluções Aproximadas

Como dito na aula anterior, a solução aproximada de um PVI parte da condição inicial e busca aproximações da solução da equação diferencial, isto é, aproximações de $S(t)$ em uma sequência de valores discretos da variável t.

Para resolver um PVI de forma aproximada, o primeiro passo é transformar o problema para o seguinte formato:

$$PVI: \begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = F(S(t), t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}$$

Onde $S(t)$ é o estado do problema e S_0 é o estado inicial.

Depois de transformado para essa forma, a solução aproximada exige que sejam definidos o número de pontos discretos para os quais a solução aproximada será obtida, além do espaçamento entre esses pontos.

- Ponto inicial t_0;
- Ponto final t_F;
- Espaçamento entre os pontos discrrtos Δt.

Seguindo os passo acima, teríamos uma sequência de estados $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ onde $S_i \approx S(t_0 + i\Delta t)$

Classificação dos métodos aproximados

Podemos pensar nos métodos como caixas pretas que recebem alguns parâmetros de entrada e produz uma saída. Classificaremos os métodos em duas maneiras:

1. Passo simples

$$\begin{cases} S_i, \Delta t \\ \text{Outros parâmetros que definem F} \end{cases} \implies [\text{MÉTODO DE PASSO SIMPLES}] \implies S_{i+1}$$

2. Passos múltiplos

$$\begin{cases} S_{i-k}, \ldots, S_{i-1}, S_i, \Delta t \\ \text{Outros parâmetros que definem F} \end{cases} \implies [\text{MÉTODO DE PASSOS MÚLTIPLOS}] \implies S_{i+1}$$

Como vimos anteriormente, os métodos recebem como entrada dados explícitos, que já foram calculados, produzem uma fórmula e o resultado de saída S_{i+1}. Métodos com essa característica são chamados de **explícitos** e podem ser representados pela seguinte expressão:

$$S_{i+1} = G(S_{i-k}, \ldots, S_{i-1}, S_i, \Delta t, L_p),$$

Onde L_p é uma lista de parâmetros adicionais. Nos métodos de passo simples, $k = 0$.

No entando, a fórmula pode ter a seguinte representação abstrata:

$$S_{i+1} = G(S_{i-k}, \ldots, S_{i-1}, S_i, S_{i+1}, \Delta t, L_p),$$

Onde o cálculo de S_{i+1} não é mais explícito, pois ele também se encontra nos argumentos, gerando uma equação que precisa ser resolvida. Métodos com essa característica são chamados de métodos **implícitos**.

Métodos de passo simples.

Os métodos de passo simples podem ser explícitos ou implícitos. Existem diversos métodos de passo simples que usam estratégias diferentes para o cálculo de S_{i+1}. Nas próximas duas seções investigaremos o método de Euler Explícito e Implícito enquanto na próxima aula investigaremos os métodos de Range-Kutta. Na última aula da unidade veremos os de passos múltiplos.

Método de Euler Explícito

Considere o PVI no formato que já estamos acostumados:

$$PVI : \begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = F(S(t), t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}$$

Vamos supor que estamos calculando a derivada da equação diferencial usando o método Euler pela abordagem Forward, assim:

$$\frac{dS(t_i)}{dt} \approx \frac{S(t_{i+1} - S(t_i)}{\Delta t}$$

Substituindo a nova expressão da derivada aproximada na expressão do PVI, podemos obter o seguinte:

$$\frac{dS(t_i)}{dt} = F(S(t_i), t_i) \implies \frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{\Delta t} \approx F(S(t_i), t_i)$$

Multiplicando os dois lados da expressão à direita por Δt, chegamos na fórmula da expressão do Método de Euler Explícito:

$$S_{i+1} = S_i + \Delta t F(S_i, t_i)$$

A aplicação do método pode ser verificada nas notas de aula do professor. Observe que a cada passo o resultado piora bastante.

Método de Euler Implícito

Começando da mesma estrutura anterior:

$$PVI : \begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = F(S(t), t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}$$

Agora, em vez de usar a fórmula da derivada na filosofia forward, vamos supor que a derivada está sendo calculada por uma aproximação utilizando a filosofia Backward, isto é:

$$\frac{dS(t_i + 1)}{dt} \approx \frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{\Delta t}$$

Note que agora estamos calculando a derivada no ponto $t_i + 1$. Assim, substituindo na equação diferencial:

$$\frac{dS(t_i)}{dt} = F(S(t_{i+1}), t_{i+1}) \implies \frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{\Delta t} \approx F(S(t_{i+1}), t_{i+1})$$

Multiplicando os dois lados da expressão à direita por Δt, chegamos na fórmula da expressão do Método de Euler Implícito:

$$S_{i+1} = S_i + \Delta t F(S_{i+1}, t_{i+1})$$

Assim como no método explícito, os resultados pioram bastante a cada passo, sendo necessário um delta bem pequeno para bons resultados.