1. Derivação por Sistemas Lineares

Filosofias de Derivação

Podemos definir derivadas partindo de diferentes filosofias:

1. Forward
2. Backward
3. Central

A diferença básica dessas definições é por onde estamos aproximando o valor (direita, esquerda ou os dois)

Forward

Nesta filosofia, temos que o valor que se aproxima de X vem pela "frente", ou seja, é maior que ele:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Backward

Similar a de cima, mas temos que o valor que se aproxima de X vem por "trás"

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

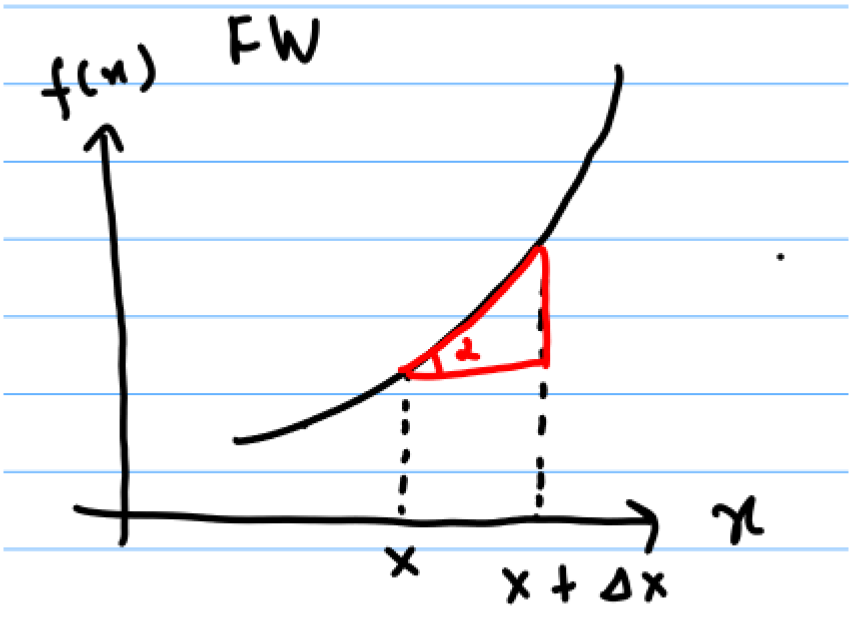
Central

Finalmente, pela central, temos a mistura dos dois:

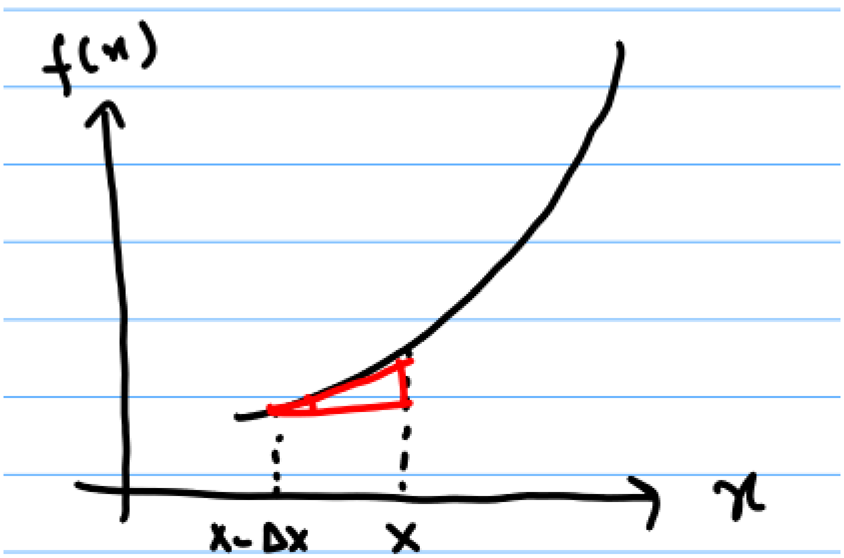
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Podemos visualizar graficamente as três filosofias distintas:

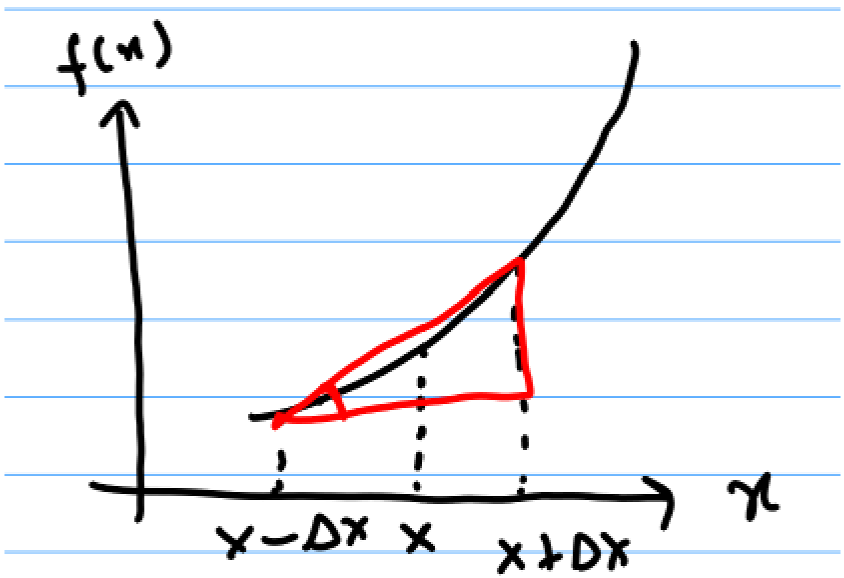
- Forward



- Backward



- Central



Lembrando que a derivada é o mesmo que a tangente desse triângulo. (claro, quando o dX tende à zero)

Derivada de Segunda Ordem

Com o mesmo raciocínio (recursivo), podemos obter as fórmulas para derivada de primeira, segunda, ..., enésima ordem. Vamos examinar novamente para cada filosofia:

Forward

Temos a seguinte fórmula para derivada segunda:

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

expandindo a derivada primeira, temos:

$$f''(x) \approx \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+2\Delta x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)$$

simplificando:

$$f''(x) \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}(f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x))$$

Para as próximas, ocultarei o desenvolvimento e manterei apenas a fórmula final:

Backward

$$f''(x) \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}(f(x) - 2f(x-\Delta x) + f(x-2\Delta x))$$

Central:

Para a central, temos uma pequena diferença. Por estarmos tratando de derivada segunda, a estrutura da fórmula central dependerá de 2 vezes o valor de delta. Então, se adotarmos o valor da metade de delta x, chegamos a seguinte fórmula:

$$f''(x) \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}(f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x))$$

dessa forma, aproveitamos os vizinhos "imediatos".

E onde entra a computação?

O método mais nativo e simples para calcular derivadas de forma numérica é inserir um valor pequeno de delta nas formulas acima!

- Na prática, teremos pontos dispostos em uma curva, que não é uma função "linear" e precisaremos aproximar de alguma maneira. Nesse caso, o delta delimitaria o valor "mais próximo possível" na curva.

A Série de Taylor

Podemos utilizar a série de Taylor para estimar funções baseando-se na derivada. Será possível então o contrário? Estimar a derivada? Vamos fazer primeiro para a abordagem forward.

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x)(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)(\Delta x)^3 + \ \ldots$$

isolando o termo de derivada primeira, temos:

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{1}{2}f''(x)\Delta x + \ \ldots$$

Podemos ignorar o que vem depois do termo Dx já que eles decrescem muito rápido. Dessa forma, o erro vai ser da ordem de Dx.

- Temos como diminuir esse erro? . . .

Forward

Via forward, podemos fazer da seguinte forma:

$$1)\ f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \ \ldots$$

$$2)\ f(x+2\Delta x) = f(x) + 2f'(x)\Delta x + \ \dots$$

A ideia é fazer `a`1 + `b` 2 para zerar o termo de derivada segunda (que foi omitido acima. Prosseguindo, chegamos ao erro quadrático!

Abordagem Central

Podemos fazer um pouco de algebrismo para criar uma expressão que o erro seja quadrático! Considere as seguintes equações:

$$1)\ f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}f''(x)(\Delta x)^3 + \ \dots$$

$$2)\ f(x-\Delta x) = f(x) - f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \frac{1}{3!}f''(x)(\Delta x)^3 + \ \dots$$

Fazendo 1 - 2, temos o seguinte:

$$f'(x) = \frac{1}{2\Delta x}(f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)) - (\frac{1}{6}f'''(x)(\Delta x)^2)$$

Dessa forma, podemos ver que atingimos o erro quadrático via filosofia central.

---

exercício: Desenvolva uma fórmula de derivada segunda na filosofia central de tal forma que o erro seja na ordem de $(\Delta x)^4$

- Existe meio que uma "receita de bolo" para esse tipo de situação.

Se queremos que seja na ordem de $(\Delta x)^4$ e temos que o termo que acompanha a derivada segunda é $(\Delta x)^2$, precisamos zerar todos os termos que acompanham Δ^n onde n < 6. (Isolamos a derivada segunda, passa o termo dividindo...)

segue uma foto abaixo com exemplo:

$$\boxed{f''(x_k) \longrightarrow O((\Delta x))^3}$$

$$(1)\quad f_{k+1} = f_k + \underline{f'_k \Delta} + \frac{1}{2} f''_k \Delta^2 + \underline{\frac{1}{3!} f'''_k \Delta^3} + \underline{\frac{1}{4!} f^{(IV)}_k \Delta^4} + \frac{1}{5!} f^{(V)}_k \Delta^5$$

$$(2)\quad f_{k+2} = f_k + f'_k 2\Delta + \frac{1}{2} f''_k (2\Delta)^2 + \frac{1}{3!} f'''_k 8\Delta^3 + \frac{1}{4!} f^{(IV)}_k 16\Delta^4$$

$$(3)\quad f_{k+3} = f_k + f'_k 3\Delta + \frac{1}{2} f''_k (3\Delta)^2 + \frac{1}{3!} f'''_k 27\Delta^3 + \frac{1}{4!} f^{(IV)}_k 81\Delta^4$$

$$(4)\quad f_{k+4} = f_k + f'_k 4\Delta + \frac{1}{2} f''_k (4\Delta)^2 + \frac{1}{3!} f'''_k 64\Delta^3 + \frac{1}{4!} f^{(IV)}_k 256\Delta^4$$

$$\alpha(1) + \beta(2) + \gamma(3) + \theta(4)$$

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\theta = 0$$
$$\alpha + 8\beta + 27\gamma + 64\theta = 0$$
$$\alpha + 16\beta + 81\gamma + 256\theta = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & 27 & 64 \\ 16 & 81 & 256 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ \theta \end{pmatrix} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\uparrow$$
$$\alpha = -1$$