# Regressão

Prof. Gustavo Willam Pereira

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais

# Introdução

- Os problemas de machine learning podem ser divididos em aprendizagem supervisionada e não-supervisionada.
- A classificação supervisionada é realizada quando temos disponíveis dados de entrada e conhecemos, para cada entrada, o resultado da saída.
- Podemos dividir a aprendizagem supervisionada em dois grupos: regressão e classificação.
- Na regressão utilizamos dados de entrada para prever valores contínuos.
- Na classificação os dados de entrada são utilizados para prever classes, que são variáveis categóricas.
- Na aprendizagem não-supervisionada os algoritmos utilizam os próprios dados de entrada para encontrar padrões/relações entre esses dados. Nesse caso os dados não apresentam rótulos pré-definidos.

# Regressão Linear Simples

- Para fazer a previsão de valores contínuos iremos utilizar a regressão.
- Podemos ter regressão linear ou não-linear.
- Temos vários tipos de algoritmos para regressão, a seguir vamos descrever alguns mais importantes para *machine learning*.

- **Regressão Linear Simples**
    - A regressão linear simples pode ser explicada como a estimativa de valores de uma variável dependente em função de uma variável independente.
    - A Figura 1 a seguir é uma representação gráfica da variável independente altura no eixo X versus a variável dependente massa corporal no eixo Y.

# Regressão Linear Simples

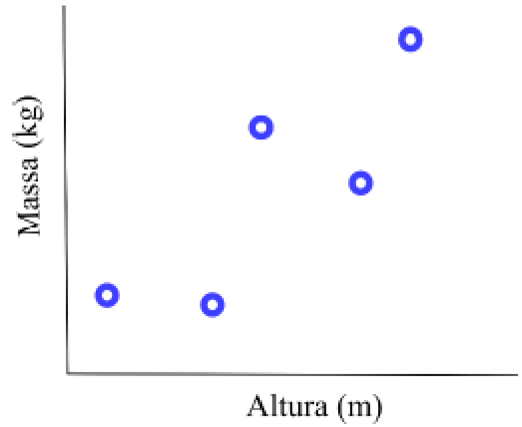



Figura 1 – Gráfico da variável independente altura versus a variável dependente massa.

# Regressão Linear Simples

- Na Figura 2 foram projetados os valores das massas no eixo Y e determinado a média das massas.
- A média seria uma estimativa para a massa para qualquer valor no eixo X (altura).
- Poderíamos calcular a diferença entre cada valor de massa até a média das massas.
- Para que os valores negativos não anulem valores positivos, elevamos a diferença ao quadrado.
- A soma da diferença ao quadrado é a nossa Soma de quadrado total (SQT), conforme apresentado na Figura 2.

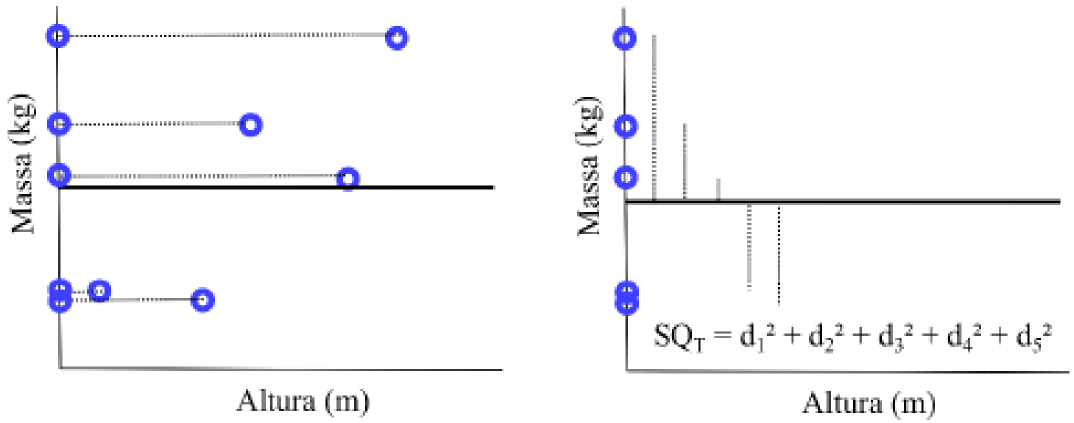



Figura 2 – Estimativa dos valores pela média da massa.

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais

# Regressão Linear Simples

- Podemos obter uma soma dos quadrados dos resíduos menor que aquela obtida na Figura 2 modificando o ângulo da reta.
- Veja na Figura 3 que para diferentes ângulos seria obtido um valor menor da soma dos quadrados (SQ1, SQ2) até chegar em um valor mínimo (SQR).

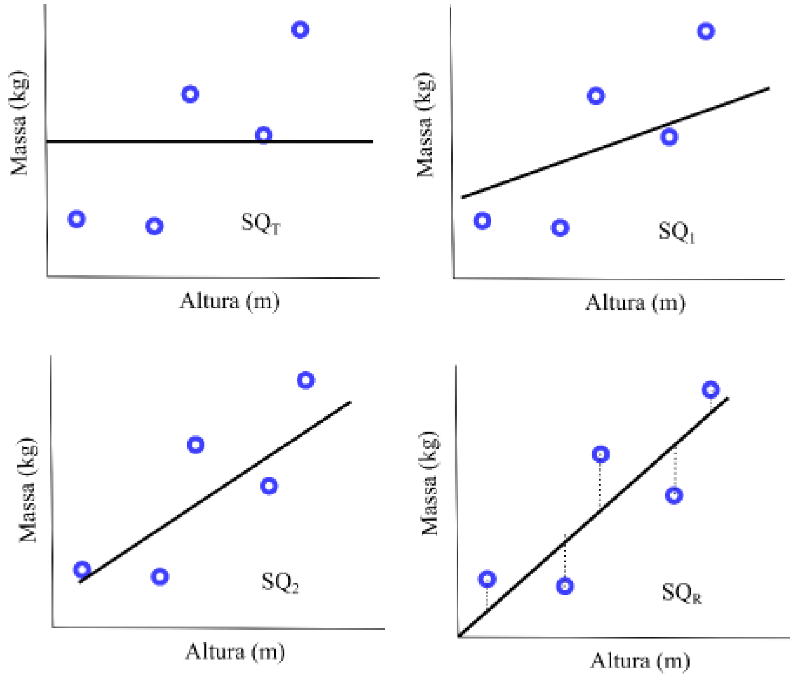



Figura 3. Modificação do ângulo da reta até chegar em um valor da soma dos quadrados dos resíduos mínimo

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais

# Regressão Linear Simples

- O modelo para a regressão linear simples pode ser representado pela equação:

$$y = b_0 + b_1 * x_1$$

- Na equação acima, y é a variável dependente e x1 é a variável independente. O parâmetro b0 é o intercepto e b1 é a inclinação da reta.

- Conforme Figura 2 e 3, de forma intuitiva, com os valores da soma dos quadrados total ($SQ_T$) e o valor da soma dos quadrados da regressão ($SQ_R$) podemos obter o coeficiente de determinação $R^2$.

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais

## Regressão Linear Simples

- O coeficiente de determinação, equação abaixo, é muito utilizado para avaliar a qualidade do modelo.
- O coeficiente de determinação nos indica quantos porcento a massa corporal é explicada pela altura.

$$R^2 = \frac{SQ_T - SQ_R}{SQ_T}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

- O RMSE é um valor absoluto que está na mesma unidade da variável (y), descreve a precisão do modelo, o que significa quão próximos os valores previstos estão dos valores reais

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x}_i)^2}$$

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais

# Regressão Linear Múltipla

- A regressão linear simples pode ser considerada como um caso particular de uma regressão linear múltipla.
- A seguir é apresentado a equação geral para um modelo de regressão linear múltipla. Na regressão múltipla temos várias variáveis.

$$y = b_0 + b_1 * x_1 + b_2 * x_2 + \cdots + b_n * x_n$$

- **P-Value**
  - Como regra geral, um bom modelo de regressão é aquele que tem um elevado $R^2$ com menor número de variáveis, ou seja, devemos utilizar variáveis realmente importantes para o modelo.
  - Modelos de regressão com variáveis pouco importantes poderá gerar modelos ruins, primeiro pelo pior ajuste e segundo pela complexidade.

## P-Value

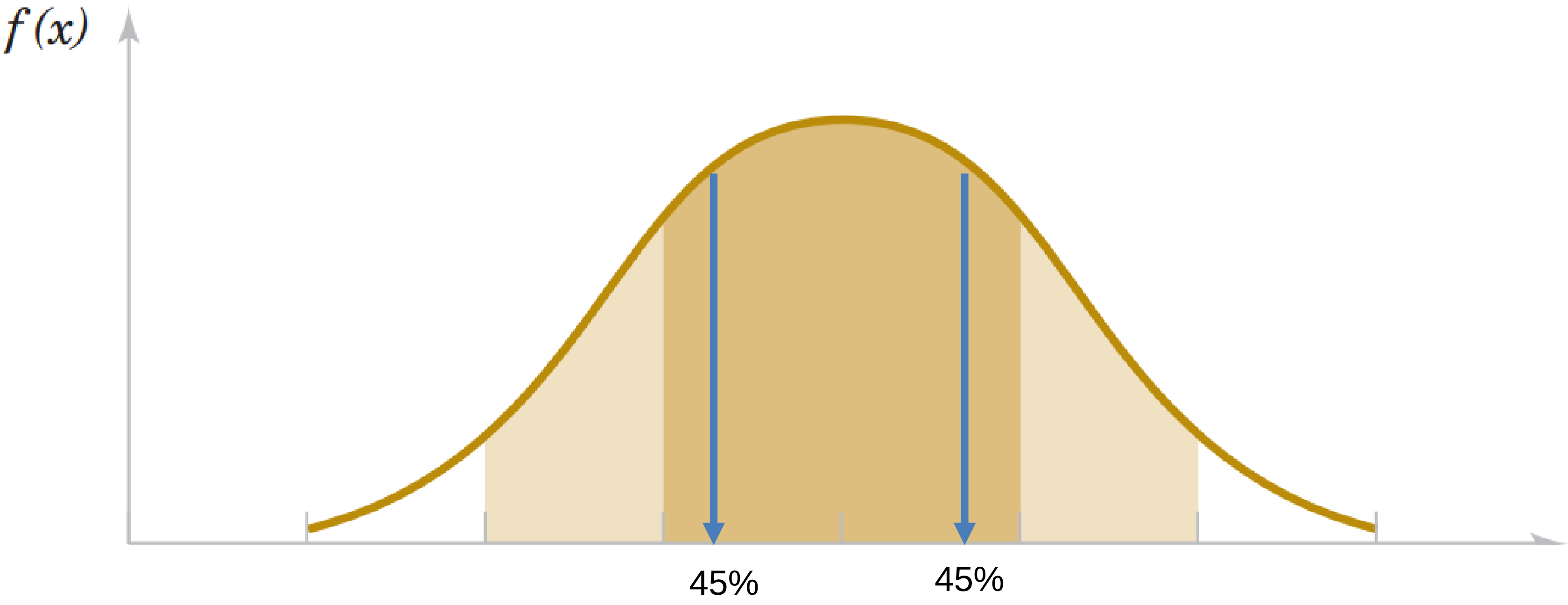
- Então, quando estamos gerando um modelo de regressão múltipla, devemos verificar quais as variáveis são realmente importantes no modelo.
- Para verificar se uma determinada variável é realmente importante para o modelo, podemos testar se o parâmetro beta da variável é diferente de zero.
- Se beta for igual a zero significa que o parâmetro em questão não é importante para o modelo. Em um modelo de regressão, nossa hipótese nula é que uma determinada variável, x1 por exemplo, não afeta o modelo (beta = 0).

# P-Value

- Em estatística, assumimos que a hipótese nula é verdadeira, a não ser que a nossa amostram seja tão “estranha” que nos leve a pesar que podemos considerar que a hipótese nula é falsa, ou seja, rejeitar a hipótese nula.
- Para verificar o quão estranha é nossa amostra, determinamos o p-valor.
- O p-valor é a probabilidade de obtermos uma amostra como a nossa ou mais extrema que a nossa, se a hipótese nula é verdadeira.
- Então, se o p-valor for de 0,90, ele indica que temos 90% de chance de pegarmos uma amostra, como a nossa ou mais extrema, se a hipótese nula é verdadeira, ou seja, nossa amostra não é nada “estranha” com 90% de probabilidade.
- Dessa forma, com p-valor de 90% não temos evidências para rejeitar a hipótese nula

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais

# P-Value




P-value = 90%

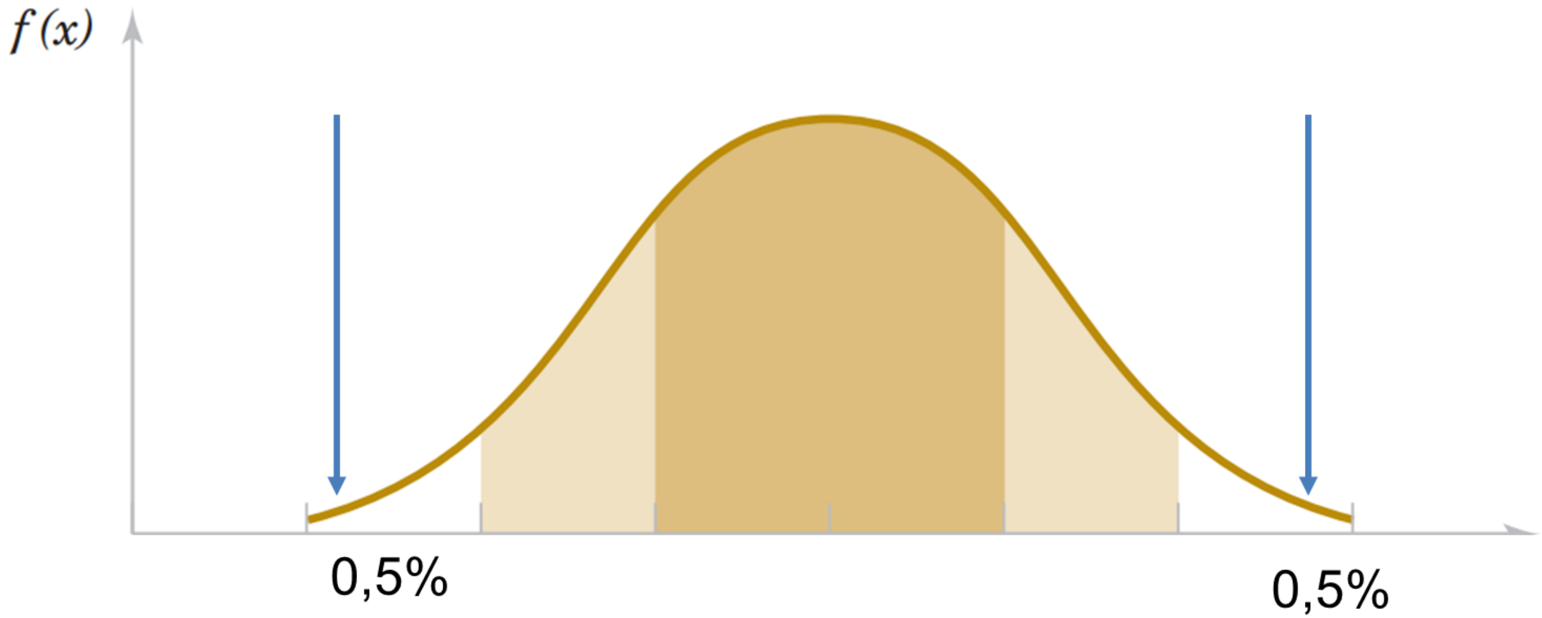
INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais

Com p-valor de 90% não temos evidências para rejeitar a hipótese nula

## P-Value

- Se o p-valor for de 0,01, isso indica que temos probabilidade de 1% de pegarmos uma amostra como a nossa ou mais extrema, se a hipótese nula é verdadeira.
- Podemos assim, considerar que essa amostra é “estranha”.
- Assim, começamos a pensar que com um valor muito baixo de probabilidade, podemos pensar que talvez a hipótese nula seja falsa.
- Normalmente consideramos que p-valor abaixo de 5% poderíamos rejeitar a hipótese nula.

# P-Value




P-value = 1%

Com p-valor de 1% podemos pensar que a hipótese nula seja falsa

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais

## Regressão Polinomial

- Podemos considerar que a regressão polinomial é um caso particular da regressão múltipla.
- A diferença é que na regressão polinomial iremos utilizar uma variável e as demais “variáveis” serão geradas pela variável original elevada a uma potência.
- $$y = b_0 + b_1 * x_1 + b_2 * x_1^2 + \cdots + b_n * x_1^n$$
- Vamos utilizar o Scikit Learn para fazer um modelo de regressão linear polinomial.
- No código a seguir vamos importar o banco de dados e criar as variáveis X e y.

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais

# Regressão Polinomial

```python
import pandas as pd

dados = pd.read_csv('Position_Salaries.csv')

### Separar dados de treinamento e dados de teste.

X = dados[['Level']] #slice no dataframe e retorna dataframe
y = dados[['Salary']]
```

- Veja que temos uma variável (‘Level’). Quanto maior o nível maior será o salário.
- Então vamos gerar um modelo polinomial para essa regressão e plotar os gráficos.

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais

# Regressão Polinomial

```
from sklearn.linear_model import LinearRegression
import matplotlib.pyplot as plt

#Regressão linear simples
regressor = LinearRegression() #esse método já considera a constante

regressor.fit(X, y)

# Predicting the Test set results
y_pred = regressor.predict(X)

plt.plot(X['Level'], y_pred)

plt.scatter(X['Level'], y['Salary'])
```

# Regressão Polinomial

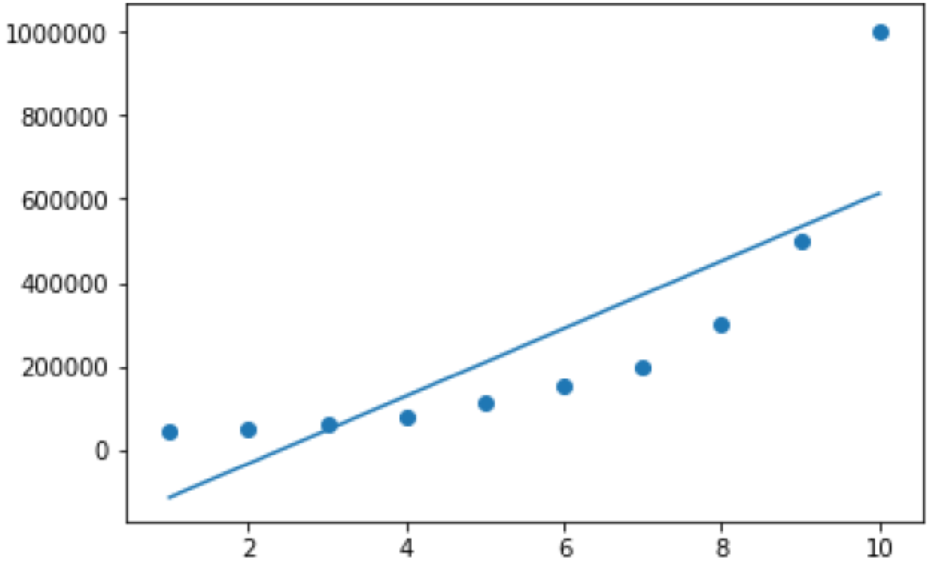



Figura 7. Regressão linear

Nesse código foi ajustado um modelo de regressão linear simples.
Agora vamos criar uma variável. Essa nova variável será a variável ‘Level’ elevada ao quadrado (grau 2).
Veja o código e o resultado gráfico.

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais

# Regressão Polinomial

```
#Regressão Polinomial (grau 2)
X.insert (0, 'Level2', X['Level']**2)

poly_model = LinearRegression()
poly_model.fit(X,y)

y_pred = poly_model.predict(X)

plt.plot(X['Level'], y_pred)

plt.scatter(X['Level'], y['Salary'])
```

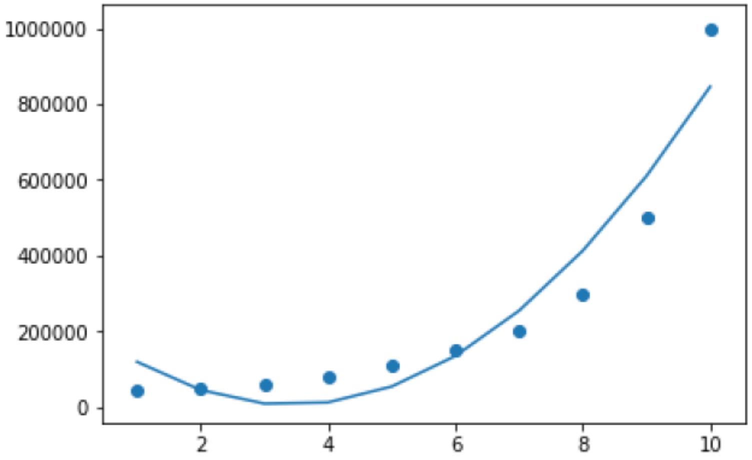



Figura 8. Regressão polinomial de grau 2.

Agora vamos acrescentar uma outra variável que será a variável ‘Level’ com potência 3 (grau 3).
Veja o código e o resultado gráfico.

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais

# Regressão Polinomial

```
#Regressão Polinomial (grau 3)
X.insert (0, 'Level3', X['Level']**3)

poly_model2 = LinearRegression()
poly_model2.fit(X,y)

y_pred = poly_model2.predict(X)

plt.plot(X['Level'], y_pred)

plt.scatter(X['Level'], y['Salary'])

poly_model2.coef_
```

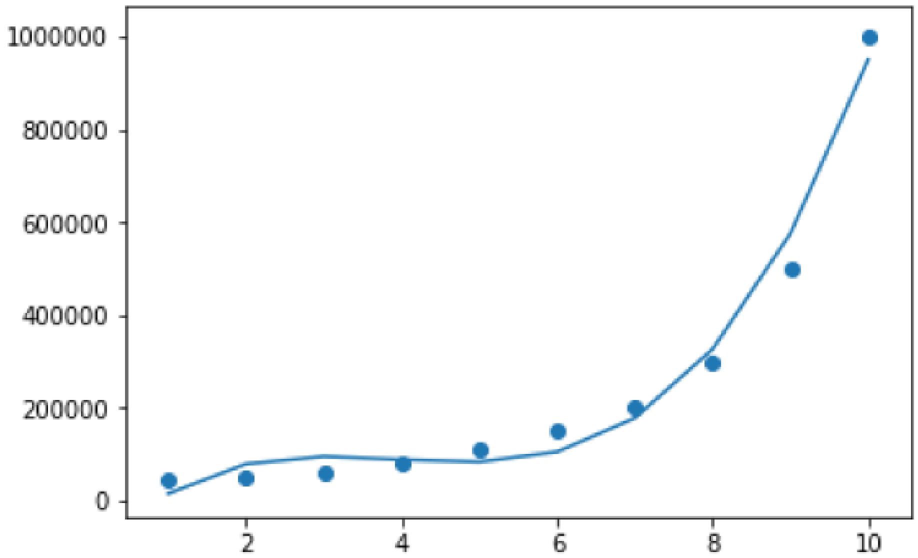



Figura 8. Modelo de regressão polinomial de grau 3

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais