

Aplicação de Modelos Ocultos de Markov na Teoria dos Jogos

Eduardo R. Waghbi, Mario R. F. Benevides

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação (PESC)
COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Caixa Postal 68.511 – 21945-970 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

ewaghbi@gmail.com, mario@cos.ufrj.br

Abstract. *In this paper we discuss possibilities of connections between two different areas of research: Game Theory and Hidden Markov Models. Two different models are presented: the first one shows some traps one must avoid, while presenting positive results on the use of Genetic Algorithms for the HMM training. The second model shows success on the use of HMM for strategic advantages on mixed strategy games. This model is generalized in the last section aiming its use on a wider variety of mixed strategy games.*

Resumo. *Neste trabalho discutimos possibilidades de ligação entre os campos de Teoria dos Jogos e dos Modelos Ocultos de Markov. Duas modelagens são apresentadas: a primeira demonstra algumas falácias a serem evitadas, obtendo resultados positivos para o treinamento de Modelos Ocultos de Markov utilizando algoritmos genéticos. O segundo demonstra uma modelagem bem sucedida, com possibilidades reais de aplicação de Modelos Ocultos de Markov para a obtenção de vantagens estratégicas em jogos de estratégia mista. Este modelo é generalizado na última seção com o objetivo de abranger um maior número de jogos de estratégia mista.*

1. Introdução

Considerando o grande número de aplicações de técnicas computacionais no campo da Teoria dos Jogos nos últimos anos, é surpreendente a aparente ausência de trabalhos utilizando Modelos Ocultos de Markov – ferramenta eminentemente estocástica – em jogos de estratégia mista. Este artigo tem o objetivo de preencher esta lacuna.

Neste trabalho discutimos possibilidades de ligação entre estes dois campos de pesquisa, examinando as possíveis técnicas envolvidas. Duas propostas de aplicações são apresentadas. A primeira demonstra algumas falácias a serem evitadas em tais modelagens. Incidentalmente, nesta aplicação obtemos resultados positivos para o treinamento de Modelos Ocultos de Markov utilizando algoritmos genéticos, fundamentando nossa escolha por esta solução e fornecendo argumentos para futuras pesquisas.

A segunda aplicação apresenta uma modelagem bem sucedida com possibilidades reais de aplicação de Modelos Ocultos de Markov para a obtenção de vantagens estratégicas em jogos de estratégia mista. Este modelo é generalizado na última seção com o objetivo de abranger um maior número de jogos de estratégia mista.

2. Teoria dos Jogos

O nascimento formal da Teoria dos Jogos deu-se, tal como hoje amplamente reconhecido, de sua contribuição com Oskar Morgenstern, no início dos anos 40, através do trabalho referência “Theory of Games and Economic Behavior” (1944) (FUDENBERG e TIROLE, 1994).

Em 1950 a tese de Doutorado de John Forbes Nash Jr. “Non-Cooperative Games” provocou grande impacto ao apresentar o conceito do Equilíbrio de Nash, uma generalização na obtenção da solução de jogos entre dois oponentes apresentada por Neumann e Morgenstern (NASH, 1950). O Equilíbrio de Nash ampliou as aplicações da teoria de jogos, alcançando campos tão diversos como Economia, Biologia, Filosofia e Inteligência Artificial. Os conceitos e a nomenclatura da Teoria dos Jogos utilizados para os fins deste trabalho são apresentados abaixo, de forma muito sucinta.

2.1. Conceitos Básicos

Trataremos aqui apenas de jogos na forma normal ou estratégica. Podemos definir formalmente um jogo estratégico $\gamma = \{J, S_i, u_i\}$ como composto por (FUDENBERG e TIROLE, 1994):

- Um conjunto $J = \{1, 2, \dots, n\}$ finito de n jogadores
- Um espaço S_i de estratégias puras para cada jogador i , contendo todas as ações que possam ser realizadas pelo jogador; e
- Um conjunto u_i de funções utilidade $u_i(s)$ que, para cada jogador i , fornecem a recompensa recebida a partir de um possível perfil estratégico do jogo.

A maior parte destes componentes pode ser convenientemente representada através de uma matriz de recompensas:

Tabela 2.1 – Exemplo de uma Matriz de Recompensas

Prisioneiro 2	Prisioneiro 1	
	Calar	Delatar
Calar	-2 anos, -2 anos	-5 anos, -1 ano
Delatar	-1 ano, -5 anos	-4 anos, -4 anos

O exemplo acima provém de um clássico jogo da teoria, conhecido como “O Dilema do Prisioneiro” (FUDENBERG e TIROLE, 1994). Incidentemente, o conceito de perfil estratégico aparece, podendo ser definido como um conjunto que reúne uma possível estratégia para cada jogador, representando uma possibilidade de resultado para o jogo. Um perfil estratégico s de estratégias puras para um jogo $\gamma = \{J, S_i, u_i\}$ pode ser definido como $s = (s_1, \dots, s_n)$ onde $s_i \in S_i$ para todo $i = [1, n]$.

2.2 Equilíbrio de Nash

Um Equilíbrio de Nash pode ser definido informalmente como um ponto na matriz de recompensas (ou seja, um conjunto de estratégias, ou perfil estratégico) onde nenhum jogador, dado que as opções dos demais jogadores permaneçam constantes, possui vantagens em mudar a sua estratégia. Formalmente (FUDENBERG e TIROLE, 1994),

dado o jogo $\mathcal{V}=\{J, S_i, u_i\}$, um perfil estratégico $s=(s_1, s_2, \dots, s_n)$ é um equilíbrio de Nash se, para todo jogador i e sua estratégia s_i , $u_i(s) \geq u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$ para todo $s_i \in S_i$.

2.3 Estratégias Mistas

Uma Estratégia Mista é uma distribuição probabilística sobre as estratégias puras de cada jogador (FUDENBERG e TIROLE, 1994), indicando a chance de que o jogador escolha cada estratégia pura. Formalmente, uma estratégia mista σ_i de um jogador $i = [1, n]$ em um jogo $\mathcal{V}=\{J, S_i, u_i\}$ pode ser definida como $\sigma_i=(w_1, \dots, w_{|S_i|})$ onde, para todo $m = [1, |S_i|]$, w_m representa a chance do jogador i escolher a estratégia pura $s_m \in S_i$, sendo que necessariamente $w_m = [0, 1]$ e a igualdade $w_1+\dots+w_m = 1$ se verifica.

2.4 Indiferença e Punição

Duas observações importantes podem ser realizadas com respeito ao Equilíbrio de Nash. A primeira é o fato de que se um dos jogadores está utilizando a estratégia do Equilíbrio de Nash, sua recompensa é indiferente às alterações da estratégia dos outros jogadores (FUDENBERG e TIROLE, 1994). A escolha da estratégia do equilíbrio de Nash protege, por assim dizer, o jogador que a utiliza.

A segunda observação decorre da primeira: quando um jogador foge do equilíbrio de Nash, este pode ser punido pelos demais jogadores através de estratégias com as quais obtenham um resultado melhor do que seria esperado, dadas as recompensas do jogo.

3. Modelos Ocultos de Markov

Modelos Ocultos de Markov (doravante apenas *MOM*) podem ser considerados casos especiais de Redes Bayesianas Dinâmicas embora tenham sido desenvolvidos antes, em meados da década de 1960, quando alguns importantes artigos de Leonard Baum e outros autores formaram a base da teoria e seus vários algoritmos relacionados (RUSSEL e NORVIG, 2004). Neste artigo estaremos trabalhando apenas com MOM de tempo discreto.

3.1 Conceitos básicos

A idéia principal por trás dos MOM é representar uma variável aleatória como uma Cadeia de Markov (ou processo de Markov), com a propriedade particular de que tal variável não pode ser medida diretamente, mas sim através de observações possíveis a partir de cada estado da variável. Considere uma pequena cadeia de três estados, baseada em exemplos de RABINER (1989) e JUFRASKY e MARTIN (2006), representando um modelo simplificado do clima:

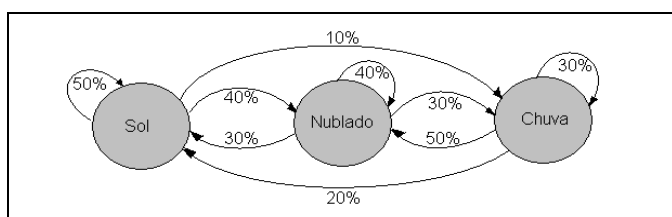


Figura 3.1 – Cadeia de Markov para previsão do tempo

Mantendo o exemplo, imaginemos que um profissional que prevê o tempo não possa observar diretamente o clima. Trabalhando em um ambiente confinado, sua única dica de como está o tempo baseia-se nas vestimentas dos outros companheiros de trabalho. Como nem sempre seus companheiros conseguem prever corretamente o tempo, uma pessoa portando um guarda-chuva não significa certeza de chuva, mas tão somente uma probabilidade alta. Da mesma forma alguém de camiseta poderia ser surpreendido por um mau tempo, mas não tão frequentemente.

Neste cenário ligeiramente estranho, a cadeia de estados do tempo está oculta ao meteorologista, e suas aferições têm que se basear em observações relacionadas com o tempo através de uma matriz de probabilidades. Em um diagrama:

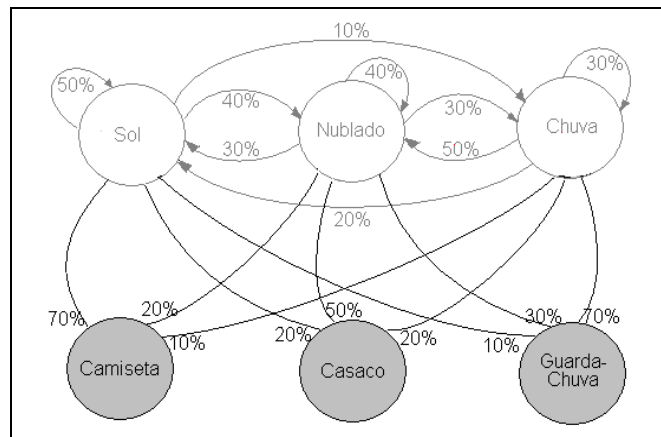


Figura 3.2 – MOM para previsão do tempo

A partir do modelo acima o meteorologista pode inferir, observando o comportamento de seus companheiros durante um tempo determinado, qual foi a sequência de estados ocultos (o tempo) mais provável de produzir a sequência de observações, obtendo assim uma expectativa de em qual estado o sistema está no momento atual, consequentemente permitindo a previsão do dia seguinte.

Mantendo nosso exemplo em vista definimos um Modelo Oculto de Markov $\lambda = \{A, B, \Pi\}$ como composto por (baseado em JUFRASKY e MARTIN (2006)):

- Um conjunto $Q = \{q_i\}$ de estados ocultos do modelo, ou apenas estados.
- Uma matriz de probabilidades de transições $A = \{a_{ij}\}$ entre os estados q_i e q_j , onde $a_{ij} = [0, 1]$ com $i, j \in [1, |Q|]$, e $\sum a_{ij} = 1$ para um mesmo estado q_i .
- Um conjunto $O = \{o_n\}$ de estados observáveis, ou observações.
- Uma matriz de probabilidades $B = \{b_{in}\}$ indicando a chance do estado q_i produzir a observação o_n , onde $b_{in} = [0, 1]$ com $i \in [1, |Q|]$, $n \in [1, |O|]$.
- Uma distribuição $\Pi = \{\pi_i\}$ de probabilidades da modelo iniciar no estado q_i , onde $\pi_i = [0, 1]$ com $i \in [1, |Q|]$.

Em seus influentes artigos do final da década de 80, Lawrence Rabiner destacava como três os problemas fundamentais que os MOM apresentavam (RABINER, 1989):

Problema 1 – Cálculo de Probabilidade: dada uma sequência de observações

$Ob=\{o_1, ..., o_n\}$ e um MOM λ , como calcular a probabilidade de que o modelo produza a sequência observada, ou seja, $P(Ob/\lambda)$?

Problema 2 – Decodificação: dada uma sequência de observações $Ob=\{o_1, ..., o_n\}$ e um MOM λ , como calcular a sequência de estados ocultos q_i que mais provavelmente produziria a sequência de observações?

Problema 3 – Treinamento: dada uma sequência de observações $Ob=\{o_1, ..., o_n\}$ e um MOM λ , como ajustar os valores de A , B e Π de forma a maximizar $P(Ob/\lambda)$?

Estes três problemas são hoje tradicionalmente resolvidos, respectivamente, pelos algoritmos *forward-backward*, *Viterbi* e *Baum-Welch* ou *K-Means* (para detalhes das implementações, consulte RABINER (1989)).

3.2 Treinamento com Algoritmos Genéticos

A aplicação de um Algoritmo Genérico na estimativa dos parâmetros de um MOM se dá estabelecendo um cromossomo que contenha os valores desconhecidos das matrizes A , B e Π do modelo (CHAU, KWONG ET AL., 1997). Então se utiliza como função de *fitness* a maximização da chance do modelo – produzido pelos parâmetros contidos no cromossomo, juntamente com eventuais parâmetros já conhecidos – gerar as observações, utilizando para isto algoritmo *forward* citado acima.

Os resultados de desempenho encontrados pelos pesquisadores são positivos: os treinamentos de Modelos Ocultos de Markov com Algoritmos Genéticos têm se mostrado superiores aos tradicionais métodos de Maximização de Expectativa (*Baum-Welch* e *K-Means*) tanto em tempo de convergência quanto em encontrar o máximo global.

4. Aplicações de MOM na Teoria dos Jogos

Nesta seção apresentaremos nossa contribuição ao tema, descrevendo duas possíveis formas de utilização de MOM para a modelagem de jogos de estratégia mista.

4.1 Modelo da Moeda viciada

Por sua natureza estocástica, situações de lançamentos de moeda são frequentemente utilizadas para exemplificar ambos os temas (veja RABINER (1989) para MOM e FUDENBERG e TIROLE (2004) para Teoria dos Jogos). Inspirados por estes, delineamos o primeiro modelo no jogo a seguir.

Dois amigos decidem aportar em um jogo de cara-ou-coroa, com algumas modificações: Um jogador (jogador 1) lança a moeda, e o outro (jogador 2) “canta” (escolhe qual lado, cara ou coroa, ele vai apostar), simultaneamente. O jogador 1 possui uma moeda normal e uma moeda “viciada”, que tem tendência a um dos dois resultados.

O jogador 2 não sabe qual é o lado “viciado” da moeda alterada, nem o quão tendenciosa ela é, ou ainda qual moeda o jogador 1 decidiu jogar. O jogo prossegue como uma sequência de apostas após as quais um jogador escolhe o lado e o outro escolhe a moeda e realiza o lançamento. O objetivo do jogador 2 é utilizar uma estratégia que lhe permita escolher o lado vencedor o maior número de vezes possível. Na figura 4.1 é possível ver um modelo deste jogo, com pesos arbitrários.

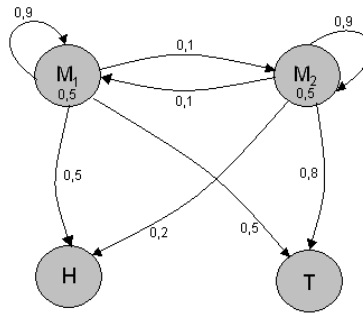


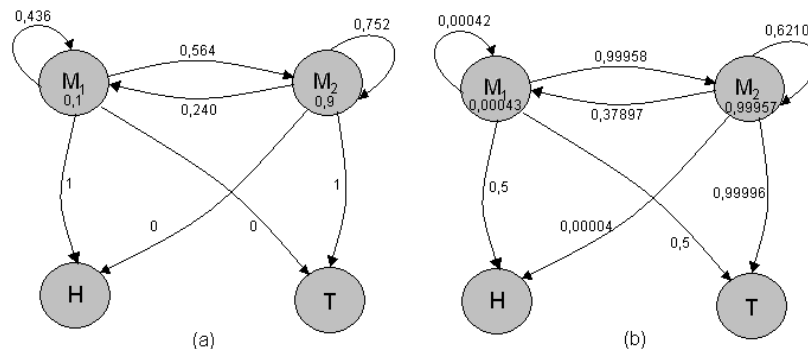
Figura 4.1 – Modelo básico para o jogo da Moeda Viciada

Os dois estados M_1 e M_2 são os estados ocultos do modelo, cada qual representando uma moeda. A frequência das observações H (*heads* – cara) e T (*tails* – coroa) é representada por arcos dos estados às observações. As transições da cadeia de Markov oculta demonstram a chance do jogador 1 permanecer ou trocar de moeda.

A partir de seqüências aleatórias de 15 observações cara-ou-coroa, respeitando os pesos fornecidos no modelo acima, treinamos um MOM através do algoritmo K-Means, obtendo o modelo apresentado na figura 4.2(a). Os valores obtidos pelo algoritmo apresentam um modelo duas moedas completamente viciadas, uma que apenas gera resultados “cara”, e outra que apenas gera resultados “coroa”. Apesar de gerar as observações com probabilidade maior que o modelo original, devemos notar que o modelo obtido não serve para nossos fins. Há partes do problema que são conhecidas (uma das moedas não é viciada), e a criação do MOM deve considerar isto, sob o risco de produzir um modelo divergente demais da realidade.

À parte das melhoras em desempenho, ou ainda das maiores chances de encontrar o máximo global (CHAU, KWONG ET AL., 1997), este nos parece um argumento definitivo para a utilização de Algoritmos Genéticos no treinamento de MOM: a capacidade de introduzir valores conhecidos do problema no processo de treinamento, orientando-o a produzir um modelo tão próximo da situação que se quer estudar quanto possível.

Desta feita, utilizando um cromossomo semelhante a CHAU, KWONG ET AL. (1997) e uma função de *fitness* que utiliza a probabilidade do MOM gerar as seqüências de observações, treinamos o MOM, obtendo o modelo representado na figura 4.2(b).



**Figura 4.2 (a) Modelo gerado através de treinamento com o algoritmo K-Means
(b) Modelo gerado através de treinamento com um algoritmo genético**

Tabela 4.1 – Comparação dos Modelos treinados

MOM	Chance média
Original	0,03%
K-Means	0,09%
Algoritmos Genéticos	0,12%

4.2 Interpretação dos resultados da Moeda Viciada

Ao adicionarmos um segundo jogador e mais uma moeda no tradicional cara-ou-coroa, nós mudamos a natureza do jogo:

Tabela 4.2 – Recompensas para o jogo Moeda Viciada

Jogador Lançador	Jogador Cantor	
	Cara	Coroa
Moeda normal	0,5	0,5
Moeda viciada	0,2	0,8

Apesar de todos os elementos de um jogo de estratégia mista, agora é possível identificar, claramente, que {Coroa, Moeda Normal} é o Equilíbrio de Nash para este jogo, um *equilíbrio em estratégias puras*. Ou seja, basta ao nosso jogador 2 identificar qual é o lado preferencial da moeda viciada para passar a escolher apenas este, e restará ao jogador 1 escolher a moeda normal, que lhe conferirá vitória em apenas 50% das partidas já que, lembrando o afirmado na seção 2.4 deste artigo, qualquer fuga do Equilíbrio de Nash pode ser punido pelo outro jogador.

Uma vez que a determinação do lado preferencial da moeda pode ser realizada através de uma contagem simples a utilização de um Modelo Oculto de Markov, por melhor que represente a realidade, não se justifica.

4.3 Estratégias Mistas Alternadas: Jogo de Tênis

No exemplo anterior argumentamos que a aplicação de um MOM em um jogo como o da moeda viciada não era viável porque alguns conceitos-chave da Teoria dos Jogos garantiam que em uma possível fuga do equilíbrio a melhor punição fosse simples de aplicar, e uma vez que a própria medição do equilíbrio pode ser realizada por contagem simples, o MOM tornava-se simplesmente inútil. Consideremos agora outro jogo:

Dois jogadores estão disputando uma partida de tênis. Cada vez que um ponto é disputado, um dos jogadores realiza o “saque”. Ao sacar, o jogador pode escolher entre direcionar a bola para um dos lados do jogador recebedor. No saque, o recebedor muitas vezes se antecipa ao lance com o objetivo de aumentar sua chance de devolver a bola. Quando ele erra a sua antecipação, no entanto, estas mesmas chances se reduzem.

Nesta situação, quando um jogador melhora seu golpe, o equilíbrio desloca-se em direção a um menor uso do golpe melhorado (mas com uma melhor recompensa – GINTIS, 2000). Desta feita, a alteração nos valores contidos na matriz de recompensas desloca o equilíbrio do jogo, criando para todos os fins um segundo jogo. Suponhamos que há alguma possibilidade p_1 de, ao longo do jogo, o recebedor aumentar a confiança em seu *backhand*, aumentando a chance de devolução deste golpe. Uma vez neste

estado, há a possibilidade p_2 de que o jogador volte a seu estado normal. Na tabela 4.3 pode ser vista a matriz de recompensas para os dois jogos.

Tabela 4.6 Matriz de recompensas do jogo de tênis

Sacador	Recebedor			
	Jogo γ_1 (normal)		Jogo γ_2 (<i>backhand</i> melhorado)	
	Esquerda	Direita	Esquerda	Direita
Esquerda	0,75	0,55	0,87	0,55
Direita	0,40	0,90	0,45	0,90

Nestes jogos não há equilíbrios por estratégias puras. A estratégia de equilíbrio para o recebedor, no jogo γ_1 , seria $\sigma_{\text{recebedor}} = \{0,50; 0,50\}$ e, no jogo γ_2 , $\sigma_{\text{recebedor}} = \{0,45; 0,55\}$. Temos, portanto um jogo que se assemelha ao anterior, com a sutil diferença de que as recompensas representam as habilidades dos jogadores em um instante, e que podem variar durante o jogo. Ao longo da partida de tênis, as alterações em tais parâmetros deslocam o equilíbrio do jogo e quem for mais sensível aos deslocamentos possui uma vantagem competitiva.

Vamos apresentar um MOM possível para a situação do jogo. Podemos considerar todo o jogo como um estado oculto para o qual os eventos observáveis são as estratégias puras de um jogador, que ocorrem em proporções determinadas pela estratégia mista do equilíbrio Nash do jogo, em relação a um determinado jogador. Para o recebedor, o modelo seria o seguinte:

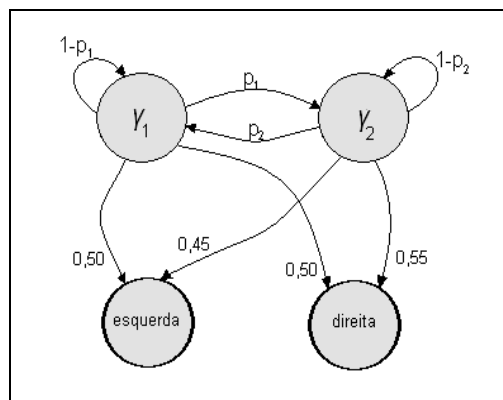


Figura 4.4 – Modelo para o jogo de tênis com dois equilíbrios

A principal diferença entre os modelos é que no primeiro caso os estados ocultos do MOM representavam estratégias puras de um jogador o que, ainda que a aplicação não houvesse fracassado devido à trivialidade do objetivo, limitava a aplicação do modelo. Neste presente caso, cada estado oculto representa um equilíbrio de Nash diferente, resultante das modificações na matriz de recompensa do jogo, sendo indiferente aos detalhes de tais recompensas

A utilização de equilíbrios diferentes nos estados ocultos aumenta a aplicação deste modelo na medida em que podemos adicionar arbitrariamente novos equilíbrios possíveis sem que as demais componentes do jogo (jogadores e estratégias puras) alterem-se, o que não seria possível no primeiro caso. Se o fato de utilizar equilíbrios no lugar de estratégias puras já aumenta a complexidade, a possibilidade de analisar vários

equilíbrios diferentes do mesmo jogo leva definitivamente a tarefa para o longe das capacidades humanas de contagem, e próximo do campo onde a automação dos cálculos e o volume de informação fazem as ferramentas de Inteligência Artificial – entre elas os Modelos Ocultos de Markov – tão úteis.

Na próxima seção, formalizaremos a aplicação dos Modelos Ocultos de Markov em tais jogos de estratégia mista, reunindo as definições apresentadas nos capítulos anteriores em um modelo genérico:

5. Generalização de um Modelo para Jogos de Estratégia Mista

Nesta seção apresentamos um modelo de jogo de estratégias mistas que pode ser analisado em conjunto com um MOM.

Considere o jogo estratégico $\gamma = \{J, S_i, u_i\}$ com e variações estratégias discretas identificadas pelas diferentes funções de utilidade u_i^e , cada uma estabelecendo um equilíbrio de Nash. Considere ainda que um jogador $j \in J$ possua as estratégias mistas σ_j^1 a $\sigma_j^e = (w_1^e, \dots, w_{|S_j|}^e)$ que indicam a proporção com que cada solução $s \in S_j$ é jogada em cada equilíbrio de Nash.

Assumindo que o jogo, em um momento discreto onde a variação estratégica n esteja sendo jogada, possui a chance a_n^n de, no próximo momento, permanecer na variação n , ou ainda a chance a_m^n de alternar à variação estratégica m , com $m, n = [1, e]$.

Tal cenário poderia ser representado pela figura abaixo, onde cada variação estratégica do jogo está representada pela função utilidade do jogador j :

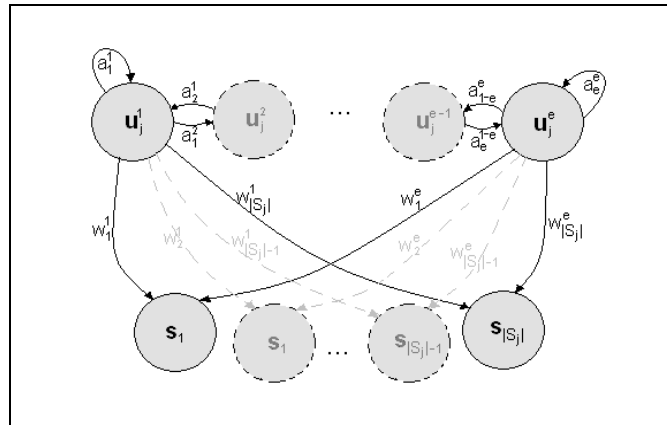


Figura 5.1 – Modelo genérico para um jogo de estratégias mistas

Considere agora o MOM $\lambda = \{A, B, \Pi\}$ com o conjunto Q de e estados ocultos q_1 a q_e e o conjunto O de $|S_j|$ estados observáveis, onde a matriz de probabilidades de transições $A = \{a_{ij}\}$ entre os estados q_i e q_j e a matriz de probabilidades $B = \{b_{in}\}$ indicando a chance do estado q_i produzir a observação o_n podem ser diretamente deduzidas das transições entre estratégias a e as proporções de soluções w , respectivamente. Resta-nos a definição da distribuição $\Pi = \{\pi_i\}$ que depende diretamente da definição do jogo – a probabilidade de que o jogo se inicie em cada variação estratégica.

A partir de um conjunto de observações – que são as estratégias praticadas do jogador j poderemos então treinar o MOM e aplicar os algoritmos apresentados na seção 3 deste trabalho para obter informações acerca do jogador j em estudo.

6. Conclusão

O Modelo apresentado por nós na quinta seção deste artigo permite a aplicação de um Modelo Oculto de Markov para analisar o comportamento de um jogador específico em toda uma classe de jogos estratégicos que tenham o equilíbrio alterado sistematicamente durante o jogo. Os valores exatos das matrizes de recompensa não são utilizados, e assim a aplicação do modelo estende-se além dos jogos de informação completa.

Com o modelo, as perguntas clássicas de RABINER (1989) podem ser respondidas através dos algoritmos usuais para a determinação das possibilidades presentes e futuras do jogo e obtenção de vantagens estratégicas aos participantes.

Este modelo pode ser treinado continuamente a partir das observações (estratégias) colhidas do jogo, atualizando as matrizes para um estado mais atual do jogo e aumentando sua eficiência. Um modelo pode ser produzido para cada jogador de um jogo estratégico, utilizando o mesmo procedimento.

Como próximos trabalhos no campo, sugerimos o estudo de casos particulares de aplicação do modelo nas diversas áreas em que hoje os jogos de estratégia mista são aplicados.

7. Referências Bibliográficas

- CHAU, C. W. , KWONG, S. , DIU, C.K. ET AL., 1997, “Optimization Of HMM By A Genetic Algorithm”, Conferência Internacional IEEE sobre Acústica, Fala e Processamento de Sinal, Munique, Alemanha.
- FUDENBERG, D., TIROLE, J., 1994, “Game Theory”, MIT Press, Cambridge.
- GINTIS, H., 2000, “Game Theory Evolving”, Princeton University Press, New Jersey, EUA.
- JURAFSKY, D., MARTIN, J. H., 2006, “Speech and Language Processing: An introduction to natural language processing”, Prentice Hall, New Jersey, EUA, 1st ed.
- NASH, J. F., 1950, “Non-Cooperative Games”, Dissertação de Doutorado, Universidade de Princeton, New Jersey, EUA.
- RABINER, L., 1989, “A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition”, Proceedings of the IEEE, 77 (2), p. 257–286.
- RUSSELL, S., NORVIG, P., 2004, “Inteligência Artificial”, Elsevier Editora, São Paulo, Brasil, tradução da Segunda Edição.
- VON NEUMANN, J., MORGENSTERN, O., 1944, “Theory of Games and Economic Behavior”, Princeton University Press, New Jersey, EUA, 60.ed.