

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DISCIPLINA EMC 5412 - TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MECÂNICA DOS
FLUIDOS COMPUTACIONAL**

**TRABALHO 8
O PROBLEMA DA CAVIDADE**

**Professor: António Fábio Carvalho da Silva
Aluno: Gusttav Bauermann Lang
Matrícula: 13200534
Florianópolis, 10 de Julho de 2017**

1. Desenvolvimento

O escoamento desenvolvido no interior de uma cavidade pode ser determinado com as equações da conservação da massa e da quantidade de movimento. Estas equações são descritas por:

- Conservação da massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- Conservação da quantidade de movimento em x:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

- Conservação da quantidade de movimento em y:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Sendo que as incógnitas são:

- u : Velocidade na direção x ;
- v : Velocidade na direção y ;
- P : Pressão;

Assim, obtemos 3 equações para as 3 incógnitas.

Na resolução deste problema será utilizado o método dos volumes finitos para obtenção do campo de pressão e do campo de velocidade do fluido no interior da cavidade. Deste modo, a cavidade foi discretizada com uma malha igualmente espaçada, sendo discretizada em N_x volumes de controle na direção horizontal e N_y volumes de controle na direção vertical. Por conveniência, será acrescentado uma linha e uma coluna de volumes fictícios, de maneira que é obtido a mesma quantidade de variáveis para cada incógnita. Logo, a malha possui no total $N_x + 1$ volumes de controle na direção horizontal e $N_y + 1$ na direção vertical.

Ainda, as equações, quando discretizadas, serão solucionadas através da formulação simultânea, onde um único sistema de equações lineares será resolvido para a obtenção da pressão e das velocidades. Por fim, foi utilizado o esquema CDS (Central-Difference Scheme).

Na discretização do problema foi utilizado uma malha descontraída. Desta maneira, são utilizadas 3 malhas. Uma malha para as pressões, em que é aplicada a

equação da conservação da massa, uma malha para a componente da velocidade na direção horizontal em que aplicada a equação da conservação da quantidade de movimento na direção x e a outra malha para a componente da velocidade na direção vertical em que é aplicado a equação da conservação da quantidade de movimento na direção y .

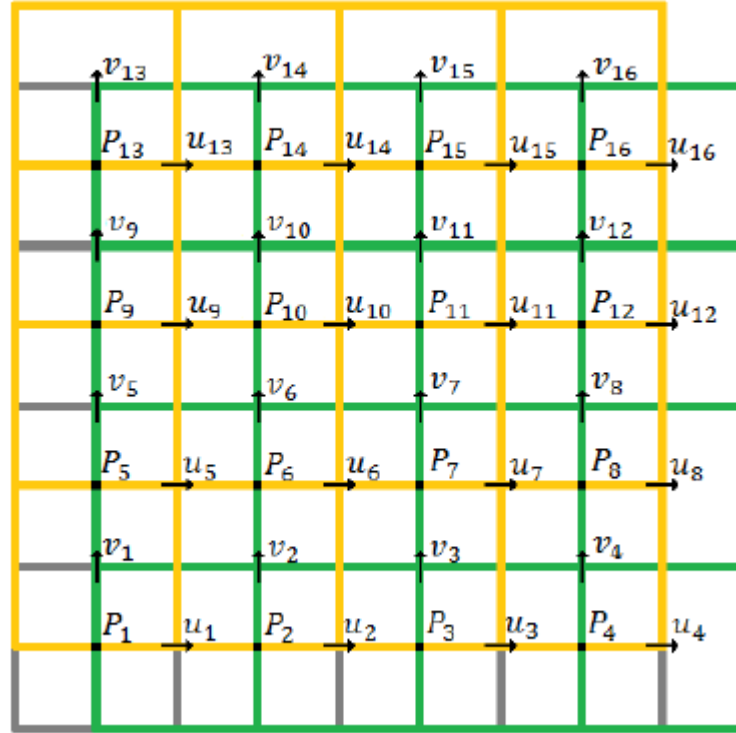


Figura 1 – Representação da malha desencontrada, conservação da massa (cinza), da quantidade de movimento na direção x (verde) e na direção y (amarelo)

Foi utilizado o esquema bumerangue para descrever a nomenclatura da pressão e das velocidades. Logo, nota-se que a malha da velocidade em x está deslocada $\Delta x/2$ em relação à da pressão, enquanto a malha da velocidade em y , $\Delta y/2$.

As equações discretizadas para cada uma de suas respectivas malhas, são:

Equação da conservação da massa:

$$u_P \Delta y - u_W \Delta y + v_P \Delta x - v_S \Delta x = 0$$

Equação da conservação da quantidade de movimento em x :

$$a_P^u u_P = a_e^u u_e + a_w^u u_w + a_n^u u_n + a_s^u u_s + b_P^u - (P_E - P_P) \Delta y$$

Sendo:

$$a_e^u = \left(D_e^u - \frac{M_e^u}{2} \right) \quad a_w^u = \left(D_w^u + \frac{M_w^u}{2} \right)$$

$$a_n^u = \left(D_n^u - \frac{M_n^u}{2} \right)$$

$$a_s^u = \left(D_s^u + \frac{M_s^u}{2} \right)$$

$$b_p^u = a_p^{0,u} u_p^0$$

$$a_p^{0,u} = \frac{\rho \Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$a_p^u = a_e^u + a_w^u + a_n^u + a_s^u + a_p^{0,u}$$

$$M_e^u = \left(\frac{u_P + u_E}{2} \right) \rho \Delta y$$

$$M_w^u = \left(\frac{u_W + u_P}{2} \right) \rho \Delta y$$

$$M_n^u = \left(\frac{v_P + v_E}{2} \right) \rho \Delta x$$

$$M_s^u = \left(\frac{v_S + v_{SE}}{2} \right) \rho \Delta x$$

$$D_e^u = \left(\frac{\mu \Delta y}{\Delta x} \right)_e$$

$$D_w^u = \left(\frac{\mu \Delta y}{\Delta x} \right)_w$$

$$D_n^u = \left(\frac{\mu \Delta x}{\Delta y} \right)_n$$

$$D_s^u = \left(\frac{\mu \Delta x}{\Delta y} \right)_s$$

Condições de contorno para C.Q.M em x:

- Fronteiras Leste e Oeste ($u_P = 0$)

$$a_p^u = 1$$

$$b_p^u = 0$$

- Fronteira Sul $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_s = \frac{u_P - 0}{\frac{\Delta y}{2}} \right)$

$$a_p^u u_P = a_e^u u_E + a_w^u u_W + a_n^u u_N + b_p^u - (P_E - P_P) \Delta y$$

$$a_e^u = \left(D_e^u - \frac{M_e^u}{2} \right)$$

$$a_w^u = \left(D_w^u + \frac{M_w^u}{2} \right)$$

$$a_n^u = \left(D_n^u - \frac{M_n^u}{2} \right)$$

$$a_s^u = 0$$

$$b_p^u = a_p^{0,u} u_p^0$$

$$a_p^u = a_e^u + a_w^u + a_n^u + 2D_s^u + a_p^{0,u}$$

- Fronteira Norte $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_n = \frac{v - u_P}{\frac{\Delta y}{2}} \right)$

$$a_p^u u_P = a_e^u u_E + a_w^u u_W + a_s^u u_S + b_p^u - (P_E - P_P) \Delta y$$

$$a_e^u = \left(D_e^u - \frac{M_e^u}{2} \right)$$

$$a_w^u = \left(D_w^u + \frac{M_w^u}{2} \right)$$

$$a_n^u = 0 \quad a_s^u = \left(D_s^u + \frac{M_s^u}{2} \right)$$

$$b_p^u = a_p^{0,u} u_p^0 + 2D_n^u V_{placa}$$

$$a_p^u = a_e^u + a_w^u + a_s^u + 2D_n^u + a_p^{0,u}$$

Equação da conservação da quantidade de movimento em y:

$$a_p^v v_P = a_e^v v_E + a_w^v v_W + a_n^v v_N + a_s^v v_S + b_p^v - (P_N - P_P) \Delta x$$

Sendo:

$$a_e^v = \left(D_e^v - \frac{M_e^v}{2} \right) \quad a_w^v = \left(D_w^v + \frac{M_w^v}{2} \right)$$

$$a_n^v = \left(D_n^v - \frac{M_n^v}{2} \right) \quad a_s^v = \left(D_s^v + \frac{M_s^v}{2} \right)$$

$$b_p^v = a_p^{0,v} v_p^0 \quad a_p^{0,v} = \frac{\rho \Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$a_p^v = a_e^v + a_w^v + a_n^v + a_s^v + a_p^{0,v}$$

$$M_e^v = \left(\frac{u_P + u_N}{2} \right) \rho \Delta y$$

$$M_w^v = \left(\frac{u_W + u_{NW}}{2} \right) \rho \Delta y$$

$$M_n^v = \left(\frac{v_P + v_N}{2} \right) \rho \Delta x$$

$$M_s^v = \left(\frac{v_P + v_S}{2} \right) \rho \Delta x$$

$$D_e^v = \left(\frac{\mu \Delta y}{\Delta x} \right)_e$$

$$D_w^v = \left(\frac{\mu \Delta y}{\Delta x} \right)_w$$

$$D_n^v = \left(\frac{\mu \Delta x}{\Delta y} \right)_n$$

$$D_s^v = \left(\frac{\mu \Delta x}{\Delta y} \right)_s$$

Condições de contorno para C.Q.M em y:

- Fronteiras Norte e Sul ($v_P = 0$)

$$a_p^v = 1$$

$$b_p^v = 0$$

- Fronteira Leste $\left(\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_e = \frac{0 - v_P}{\frac{\Delta x}{2}} \right)$

$$a_p^v v_P = a_w^v v_W + a_n^v v_N + a_s^v v_S + b_p^v - (P_N - P_P) \Delta x$$

$$a_e^v = 0$$

$$a_w^v = \left(D_w^v + \frac{M_w^v}{2} \right)$$

$$a_n^v = \left(D_n^v - \frac{M_n^v}{2} \right)$$

$$a_s^v = \left(D_s^v + \frac{M_s^v}{2} \right)$$

$$b_p^v = a_p^{0,v} v_p^0$$

$$a_p^v = 2D_e^v + a_w^v + a_n^v + a_s^v + a_p^{0,v}$$

$$\text{Fronteira Oeste} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_w = \frac{v_{P-0} - v_0}{\frac{\Delta x}{2}} \right)$$

$$a_p^v v_p = a_e^v v_e + a_n^v v_n + a_s^v v_s + b_p^v - (P_n - P_p) \Delta x$$

$$a_e^v = \left(D_e^v - \frac{M_e^v}{2} \right)$$

$$a_w^v = 0$$

$$a_n^v = \left(D_n^v - \frac{M_n^v}{2} \right)$$

$$a_s^v = \left(D_s^v + \frac{M_s^v}{2} \right)$$

$$b_p^v = a_p^{0,v} v_p^0$$

$$a_p^v = a_e^v + 2D_w^v + a_n^v + a_s^v + a_p^{0,v}$$

As constantes utilizadas para resolução do problema, são mostradas no quadro a seguir:

Comprimento [m]: L	1
Massa específica [kg/m³]: ρ	1
Número de Reynolds [-]: Re	400
Velocidade da placa [m/s]: V_{placa}	1

2. Resultados

Primeiramente foi verificada a construção da matriz com as equações para resolução do problema. A forma dessa matriz é bem característica e está representada na figura abaixo. Os volumes azuis representam os pontos da matriz que possuem valor atribuído.

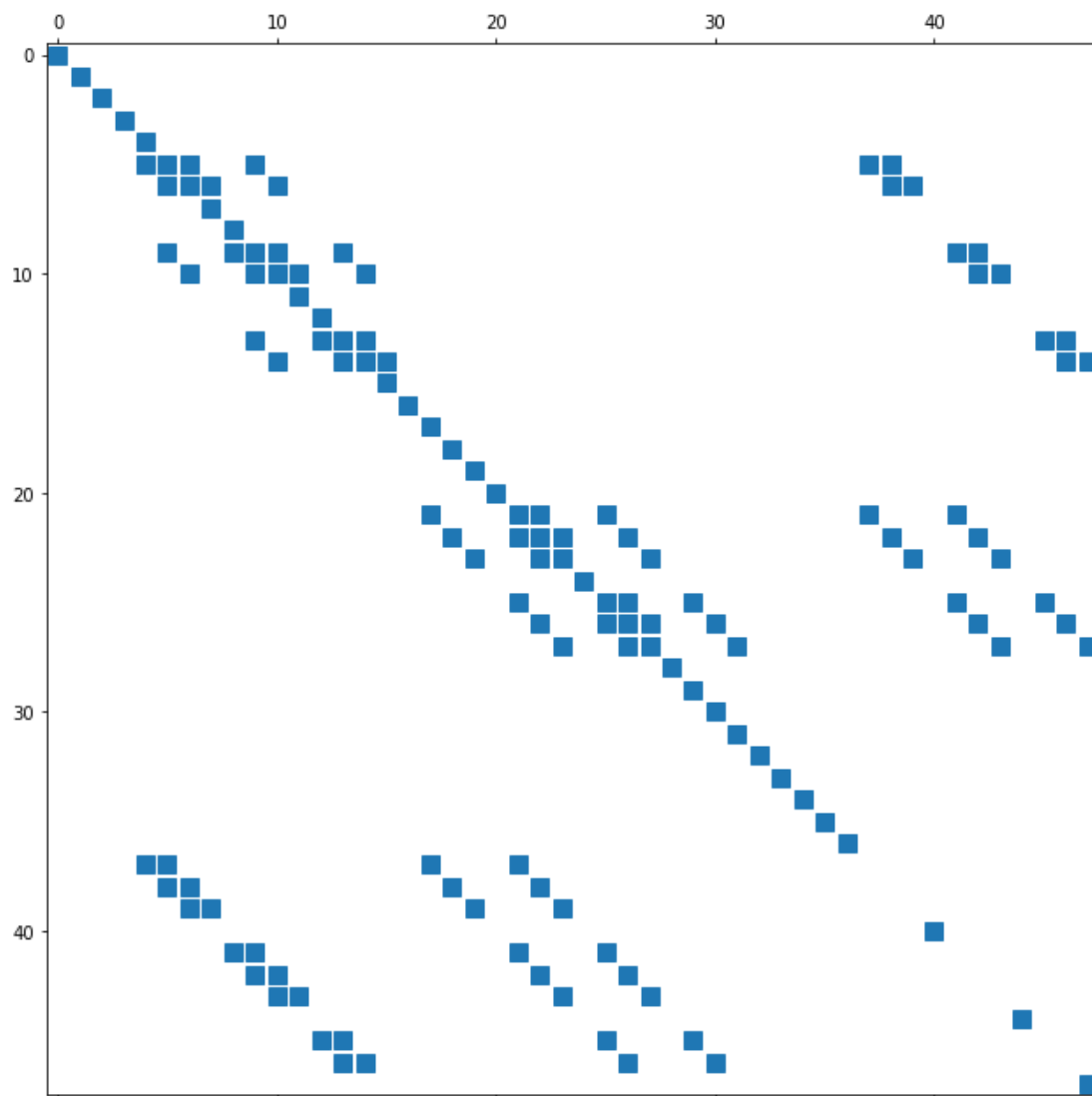


Figura 2 – Representação da cavidade com 16 elementos.

Os resultados obtidos foram comparados com os resultados que são usados como referência de Ghia (1982). Neste artigo Ghia lista uma tabela com as velocidades U (na direção x) para $x = L/2$ em toda a altura da cavidade, bem como as velocidades V (na direção y) para $y = L/2$ em todo o comprimento da cavidade. A comparação entre os resultados pode ser vista nas Figuras 3 e 4.

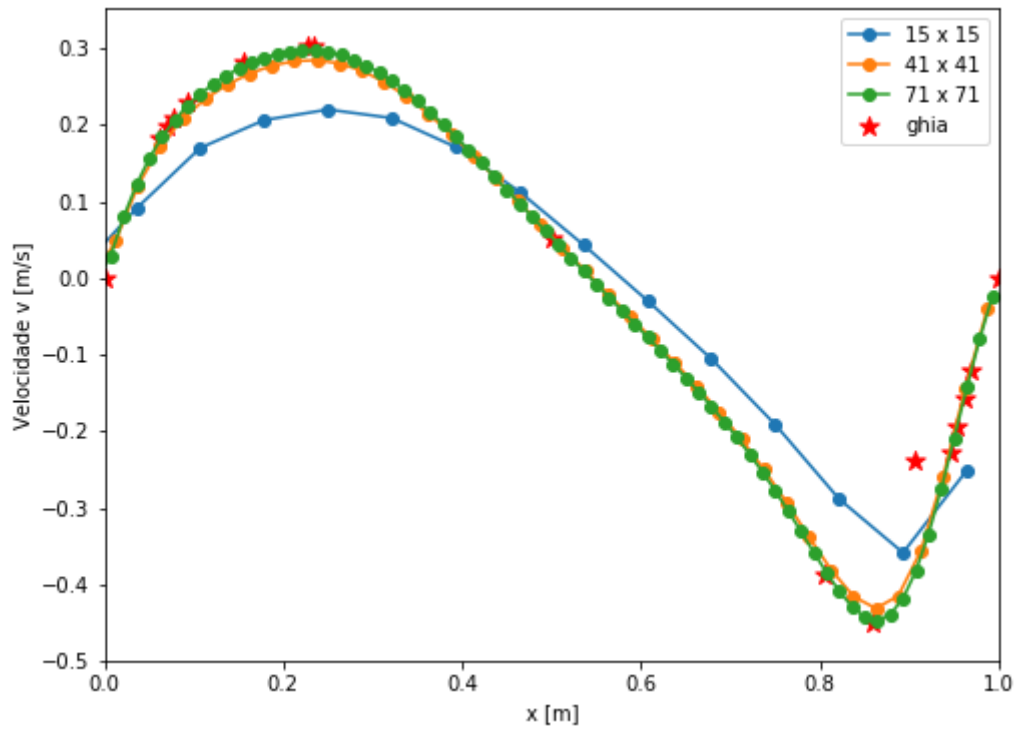


Figura 3 – Perfil de velocidade v ao longo do centro da cavidade

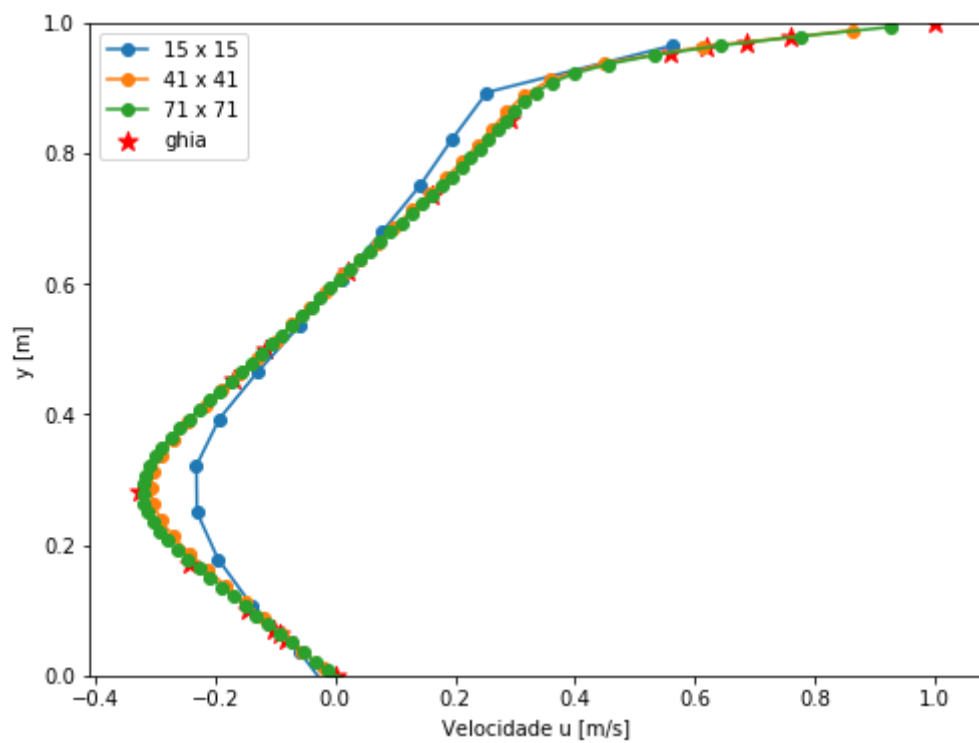


Figura 4 – Perfil de velocidade u ao longo do centro da cavidade

Observa-se pelas figuras 3 e 4 que uma malha de 41 x 41 volumes já consegue representar bem a tendência da curva. Pelo gráfico, é possível perceber que o

esquema CDS consegue representar de forma satisfatória o problema, se aproximando dos resultados da literatura.

Tendo validado o modelo com os resultados da literatura, é mostrado nas figuras 5, 6 e 7 o campo de velocidades do escoamento em regime transiente e permanente.

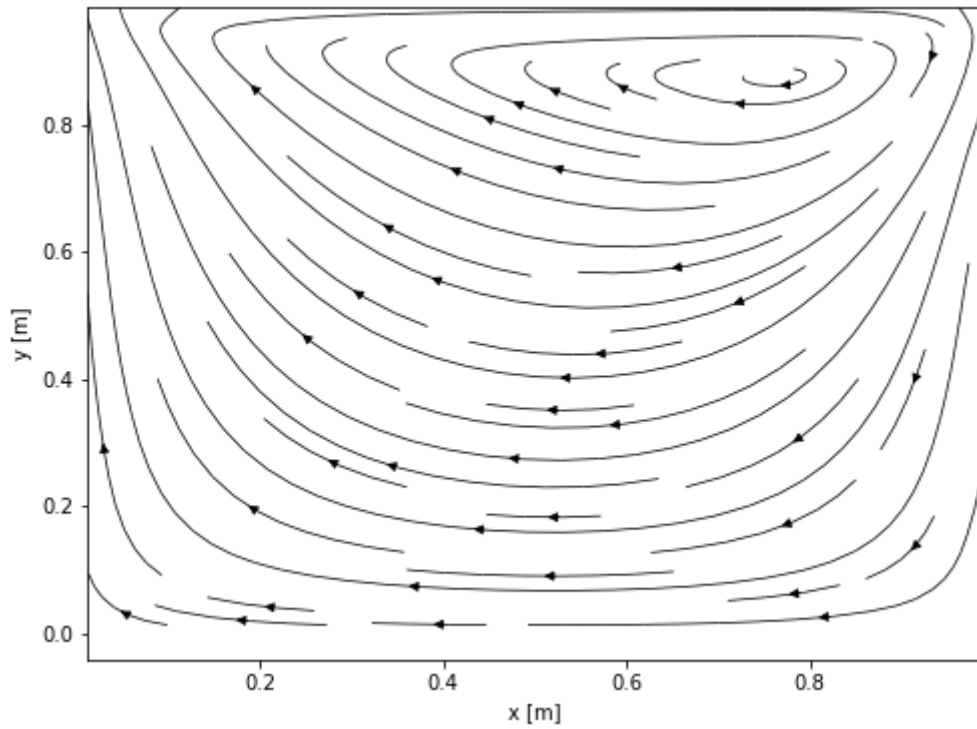


Figura 5 – Campo de velocidades em $t = 1s$.

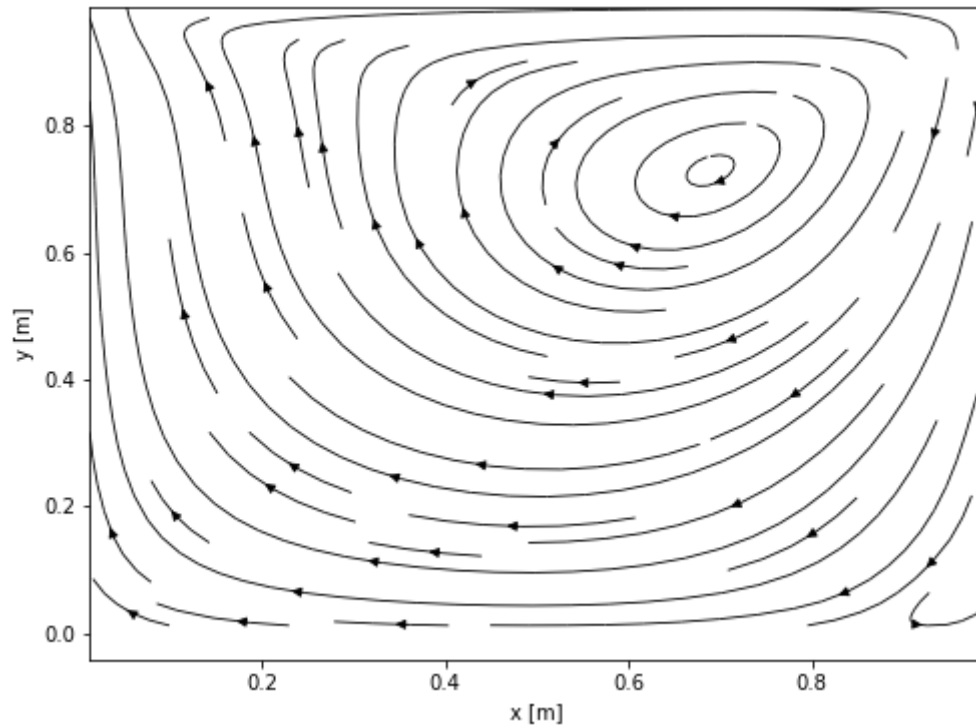


Figura 6 – Campo de velocidades em $t = 5s$.

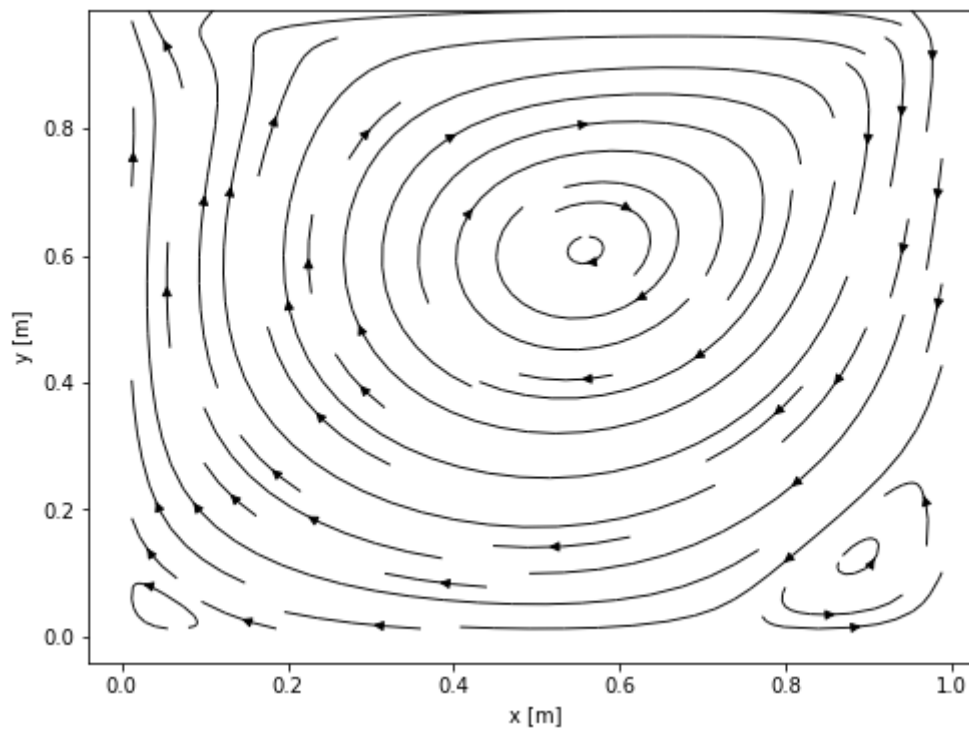


Figura 7 – Campo de velocidades para regime permanente

Atingido o regime permanente, ocorre o desenvolvimento do escoamento e é imposto alterações sobre os campos de pressões e velocidades, de modo que ocorre

descolamento nas bordas inferiores da cavidade. O campo de pressões é mostrado na figura 8.

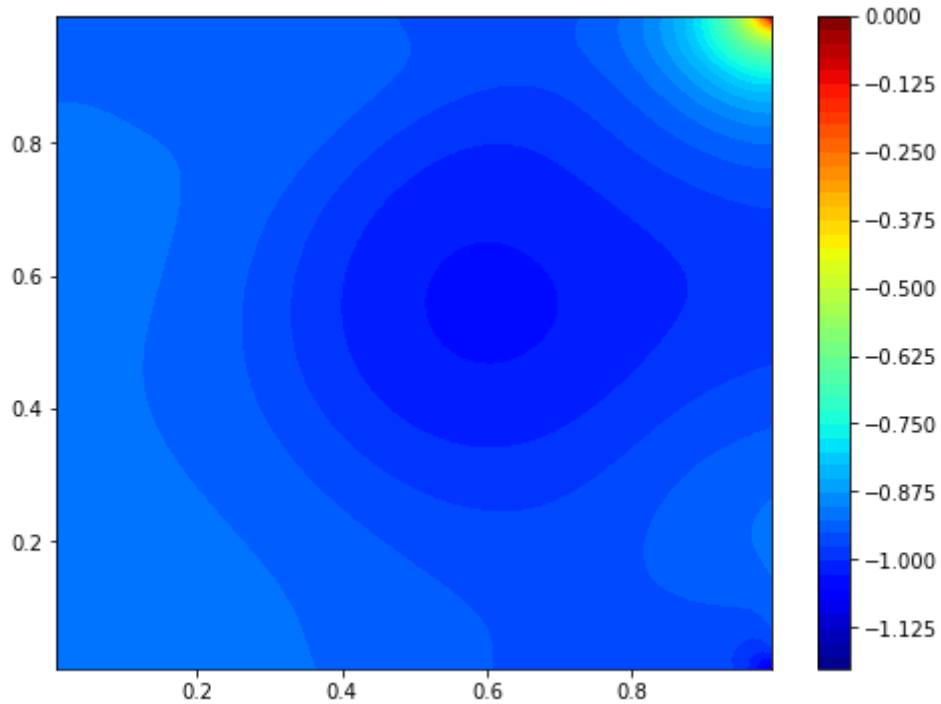


Figura 8 – Campo de pressões para uma malha 71×71 .

Os valores das pressões apresentados na escala são valores relativos em relação a maior pressão da cavidade, que ocorre no canto superior direito.

Por fim, é comparado o campo de tensão normal viscosa σ_{xx} com o campo de pressões. Este campo é avaliado pela seguinte relação:

$$\sigma_{xx} = 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

ou:

$$\sigma_{xx} \cong 2 \cdot \mu \cdot \frac{u_e - u_w}{\Delta x}$$

O resultado do campo de tensões pode ser visto na figura 9.

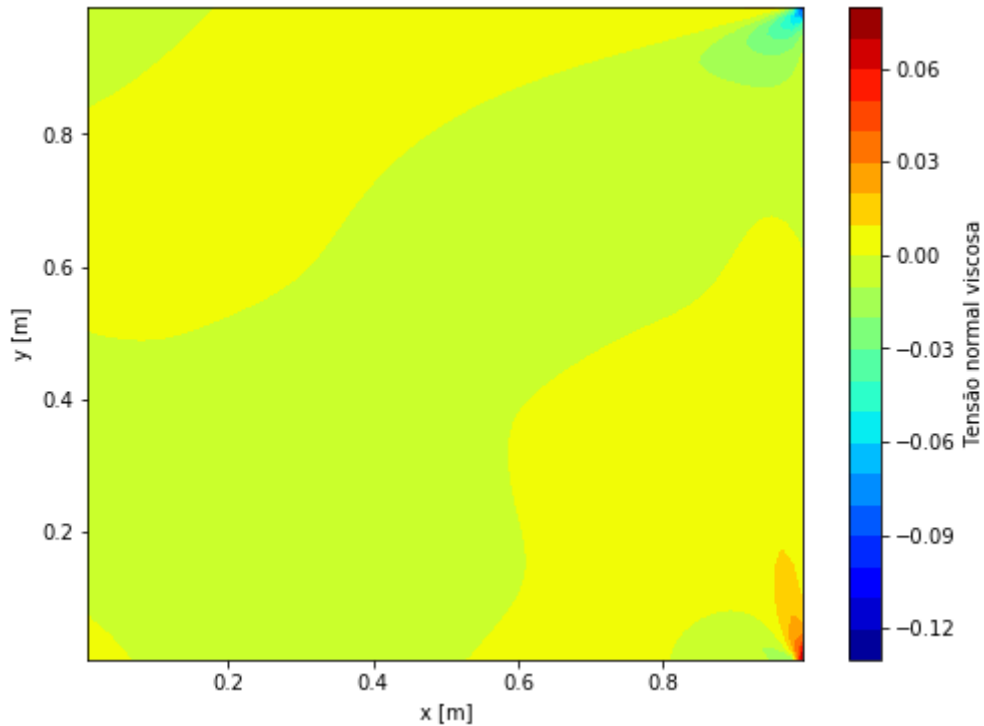


Figura 9 – Campo de tensão normal viscosa para uma malha 71 x 71.

Observando-se a escala do campo de pressões e comparando com a escala da tensão normal viscosa, podemos concluir que para este problema, esta tensão normal em geral pouco afeta o problema. Para ficar mais claro, na figura 10 é mostrado o campo de pressões subtraído do campo de tensão normal viscosa. Os pontos mais afetados são os cantos superior e inferior direito.

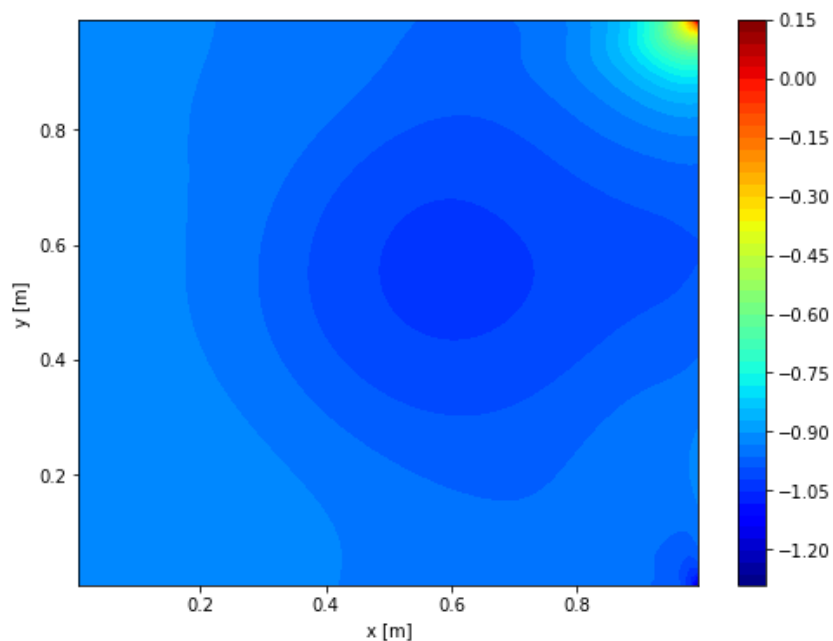


Figura 10 – Campo de pressões subtraído da tensão normal viscosa para uma malha 71 x 71.