Gráficos e interpretações gráficas

Interpretação de gráficos e seus principais pontos.

Prof. Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

Propósito

Reconhecer que, no cotidiano, muitas quantidades dependem de uma ou mais variáveis; portanto, o conceito de gráfico das funções torna-se essencial ao profissional, pois os gráficos fazem parte da comunicação e conseguem, muitas vezes, passar informações independentemente de idiomas locais.

Preparação

Reconhecer que, no cotidiano, muitas quantidades dependem de uma ou mais variáveis; portanto, o conceito de gráfico das funções torna-se essencial ao profissional, pois os gráficos fazem parte da comunicação e conseguem, muitas vezes, passar informações independentemente de idiomas locais.

Objetivos

- Interpretar os conceitos básicos de intervalo.
- Identificar pontos no plano.
- Interpretar as informações contidas em um gráfico.
- Identificar pontos notáveis de um gráfico.

Introdução

A matemática é uma linguagem que permite analisar e descrever diversas situações. Este conteúdo apresenta as funções a partir de conceitos elementares, como: intervalos, pontos e plano cartesiano, e contribui para o entendimento das funções, correlacionando-as a uma lista ou tabela em que o plano cartesiano não é nada além do objeto de manifestação gráfica de seus resultados.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Intervalos

Intervalos reais

Este módulo ficará mais fácil e interessante se você começar assistindo a este vídeo. Vamos lá?

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

No decorrer deste tema, os intervalos merecem destaque. Será necessário que você analise situações gráficas e localize os melhores momentos – os intervalos – para possíveis intervenções.

> A palavra intervalo nos remete a uma forma de medir.

Quando consideramos o intervalo das 9 às 11 horas, temos todos os minutos, segundos e qualquer subdivisão de tempo compreendida nesse período.

No contexto matemático, os intervalos são subconjuntos do conjunto dos números reais R.

Exemplo

Todos os valores entre 3 e 5. Isso significa, por exemplo, que o número irracional π(pi), que é aproximadamente 3,14, pertence a esse intervalo, bem como o número 4, pois eles são maiores que 3 e menores que 5.

É claro que você pode usar a língua portuguesa para descrever tais conjuntos, mas a Matemática também é uma linguagem com características próprias, que serão abordadas ao longo deste tema.

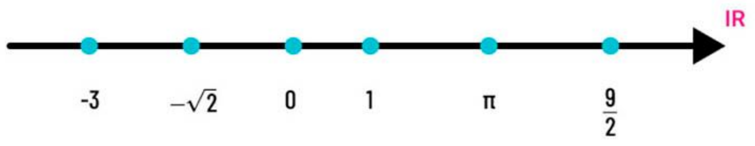
Conceitos

Classificando intervalos na reta numéricas

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Intuitivamente, ao pensar em números reais, você deve imaginar uma reta infinita, onde cada ponto dela é um número real. Esse objeto será chamado de **Reta Real** e admite o símbolo R. Essa reta é organizada de forma crescente do menos infinito ($-\infty$) ao mais infinito ($+\infty$).



Reta real

Dessa forma, é importante destacar que:

> Um intervalo é um subconjunto dos números reais.

Para uma representação gráfica desse conceito, adotaremos a seguinte notação:

Bola fechada

Indica que o extremo do intervalo **está contido** no conjunto.

Bola aberta

Indica, em nossa representação, que o extremo do intervalo **não está contido** no conjunto.

Dessa forma, o intervalo, que pode ser visto na imagem a seguir, compreende todos os números reais de *1* até *6*, ***excluindo o 1*** e ***incluindo o 6***.

Transferindo a linguagem

Quando tratarmos do conjunto dos números reais, os símbolos:

Bola fechada

É representada por:
≥ (maior ou igual) e ≤ (menor ou igual) ou [ ] (colchetes)
Se $x \in R$ e $-4 \leq x \leq 2$, isso significa que x pode ser maior que *−4* ou igual a *−4* e menor que *2* ou igual a *2*; portanto, dentro do intervalo.

Sobre a notação de conjuntos, podemos representar tal intervalo da seguinte forma: $[-4,2] = \{x \in R; -4 \leq x \leq 2\}$ Ou seja, todos os números reais **a partir** do número *−4* até o número *2*. Um intervalo que possui as extremidades é chamado de intervalo fechado.

Bola aberta

É representada por:
> (maior) e < (menor) ou ( ) (parênteses) ou] colchetes [
Se $x \in R$ e $-4 < x < 2$, **x pode ser maior que -4 e menor que 2. Portanto, os extremos não fazem parte do conjunto.**

Sobre a notação de conjuntos, podemos representar tal intervalo da seguinte forma: $[-4,2] = \{x \in R; -4 < x < 2\}$ Ou seja, todos os números reais depois do número *−4* anteriores ao número *2*. Um intervalo que não possui as extremidades é chamado de intervalo aberto.

A **amplitude de um intervalo** é sempre definida por:

$$\text{Amplitude} = LS - LI \text{ Onde: } LS = \text{Limite superior do Intervalo } LI = \text{Limite inferior do intervalo}$$

Portanto, nos **casos anteriores**, podemos calcular a **amplitude** do intervalo subtraindo a extremidade mais à direita da extremidade mais à esquerda:

$$2 - (-4) = 6$$

Isto é, nos **dois casos**, o **intervalo** possui a **amplitude** de ***6* unidades**.

Você deve estar se perguntando:

> Mesmo com os intervalos abertos, onde as extremidades não estão incluídas, a amplitude é a mesma dos intervalos fechados?

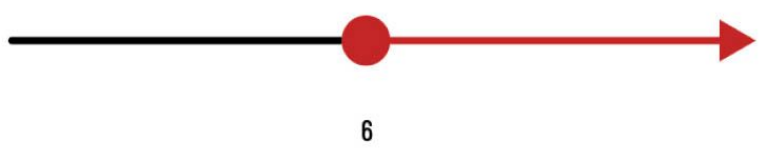
A resposta é **sim**!

Isso acontece porque, mesmo nos intervalos abertos, é possível pensar que podemos ficar bem perto do limite aberto. Na verdade, podemos ficar “infinitamente” perto de um limite aberto. Logo, a amplitude (também traduzida na figura como o comprimento do trecho da reta) será igual se o limite for fechado ou aberto.

Agora, vamos entender as semirretas.

Exemplo

x ∈ R e x ≥ 6 x pode ser maior que 6 ou igual a 6 e, portanto, estará dentro do intervalo.



Intervalo

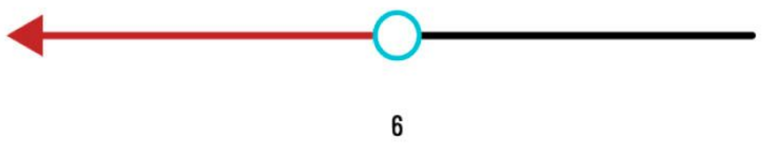
Sobre a notação de conjuntos, podemos representar tal intervalo da seguinte forma:`

$$(-\infty, 6) = \{x \in R; x < 6\}$$

Ou seja, todos os números reais a partir do número *6*. Note que uma semirreta pode possuir, no máximo, uma extremidade e, neste caso, diremos que a semirreta é **fechada**.

Exemplo

x ∈ R e x < 6 isso significa que x pode ser apenas menor que 6, e nunca igual a 6; portanto, 6 não está dentro do intervalo.



6 não está dentro do intervalo.

Ou seja, todos os números reais **antes** do número *6*. A semirreta que não possui a sua extremidade é denominada **semirreta aberta**.

Note que uma semirreta tem a **amplitude infinita**.

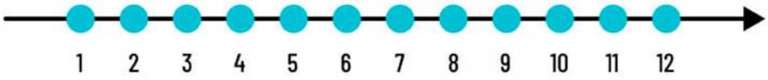
Vamos aplicar o que estudamos até agora?

Exemplos onde podemos perceber intervalos à nossa volta

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Designaremos os valores de *1* até *12* como os meses do ano, *1* para janeiro, *2* para fevereiro, e assim por diante, até chegarmos a *12* para dezembro.



A partir das informações apresentadas até aqui, tente responder a questão a seguir.

Atividade discursiva

Caracterize por intervalos o segundo trimestre do ano:

Chave de resposta

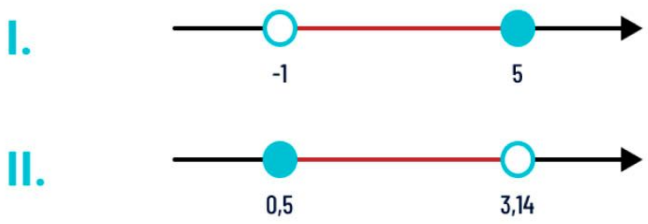
O segundo trimestre de um ano contém os meses de abril, maio e junho. No gráfico da reta que temos, consideramos 1 para janeiro, 2 para fevereiro, e assim em diante. Desse modo, podemos seguir a lógica de 1 para janeiro; 2 para fevereiro; 3 para março; 4 para abril; 5 para maio; 6 para junho; 7 para julho; ....; 12 para dezembro.

Logo, o segundo trimestre seria o intervalo dos números que representam os meses de abril, maio e junho, que seriam 4, 5 e 6. Portanto, o intervalo do segundo trimestre seria [4, 6]. Representado pela figura:

Verificando o aprendizado

Questão 1

Considere os intervalos a seguir:



A

{x ∈ R; −1 < x ≤ 5} e {x ∈ R; 0,5 < x < 3,14}

B

{x ∈ R; −1 < x ≤ 5} e {x ∈ R; 0,5 ≤ x < 3,14}

C

{x ∈ R; −1 ≤ x ≤ 5} e {x ∈ R; 0,5 < x < 3,14}

D

{x ∈ R; −1 ≤ x ≤ 5} e {x ∈ R; 0,5 ≤ x ≤ 3,14}

E

{x ∈ R; −1 < x < 5} e {x ∈ R; 0,5 < x < 3,14}

A alternativa B está correta.

A atividade em questão tem o propósito das associações, isto é, > , < bola aberta e ≥, ≤ bola fechada. Assim, devemos procurar a alternativa que contenha aberto em *−1*, fechado em *5*, fechado em *0,5* e aberto em *3,14*. A única alternativa com exatamente essa combinação é a letra B.

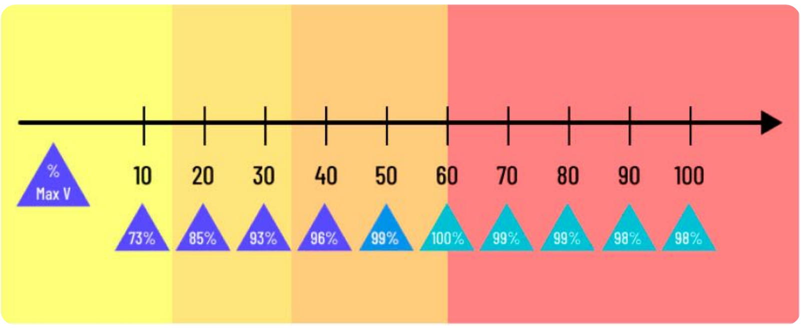
Vamos apresentar algumas soluções aceitáveis para cada uma das representações.

a. *{x ∈ R; −1 < x ≤ 5}* ou os números reais maiores que *−1* e menores ou iguais a *5* ou os números reais entre *−1* e *5* , incluindo o número 5 ou *(−1, 5]*.

b. *{x ∈ R; 0,5 ≤ x < 3,14}* ou os números reais maiores ou iguais a *0,5* e menores que *3,14* ou os números reais entre *0,5* e *3,14*, incluindo o número *0,5* ou *(0, 5, 3, 14]*.

Questão 2

Veja, a seguir, o desempenho de um corredor durante uma competição dos 100 metros rasos. A reta em questão mostra a marcação da distância na pista e, a cada 10 metros, é apresentado o desempenho do corredor em comparação à sua velocidade máxima.



Em qual dos intervalos a seguir o corredor manteve a sua velocidade maior ou igual à de *99%* de sua capacidade máxima.

A

[50 , 80]

B

[30 , 100]

C

[0, 50) e *(80 , 100]*

D

(59, 61)

E

[50 , ∞)

A alternativa A está correta.

A palavra maior ou igual presume que estamos considerando o valor de *99%* em nossa análise. Sendo assim, o intervalo que corresponde ao que foi pedido é a letra A.

Plano cartesiano

Como posicionar pontos no plano cartesiano

Este módulo ficará mais fácil e interessante se você começar assistindo ao presente vídeo.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Na vida cotidiana, muitas quantidades mensuráveis dependem de uma ou mais variáveis. Por exemplo: o crescimento das plantas depende da luz solar e das chuvas; a velocidade depende da distância percorrida e do tempo gasto; a tensão elétrica depende da corrente e resistência.

> O plano cartesiano é uma das formas mais eficientes para representar o relacionamento entre duas ou mais variáveis.

Saiba mais

O plano cartesiano foi criado com o objetivo inicial de marcar pontos no plano pelo matemático e filósofo René Descartes (1596-1650).

Neste módulo, apresentaremos algumas ideias de como podemos fazer uso dessa ferramenta.

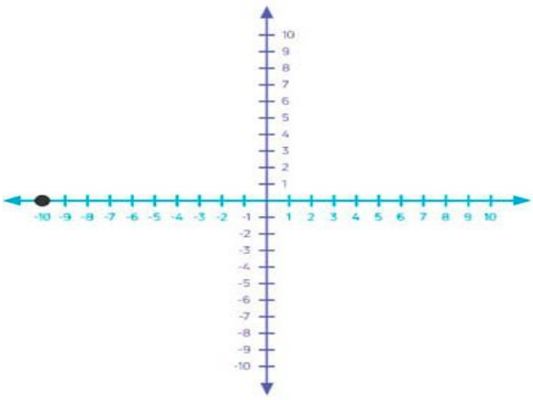
Conceitos do plano cartesiano

Entendendo o plano cartesiano, marcando pontos com GeoGebra

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

O plano cartesiano apresenta duas linhas numéricas: uma horizontal, da esquerda para a direita, e outra vertical, de baixo para cima.



Exemplo de plano cartesiano

Utiliza-se a letra x para simbolizar os valores sobre a reta horizontal e a letra y para simbolizar os valores sobre a reta vertical.

Observe que:

À medida que x aumenta, o ponto se move mais para a direita. Quando x diminui, o ponto se move mais para a esquerda.

À medida que y aumenta, o ponto se move mais para cima. Quando y diminui, o ponto se move mais para baixo.

É importante ressaltar que as retas horizontal e vertical também são chamadas, respectivamente, de "abscissa" e "ordenada”. O ponto (0,0) é chamado de “origem”.

As coordenadas são sempre escritas em determinada ordem. A coordenada horizontal vem primeiro. Então, em seguida, vem a coordenada vertical. Isso é chamado de **par ordenado**.

Par ordenado

Par de números em uma ordem especial.

Atenção

Os números são separados por vírgula e, em torno deles, ficam os parênteses.

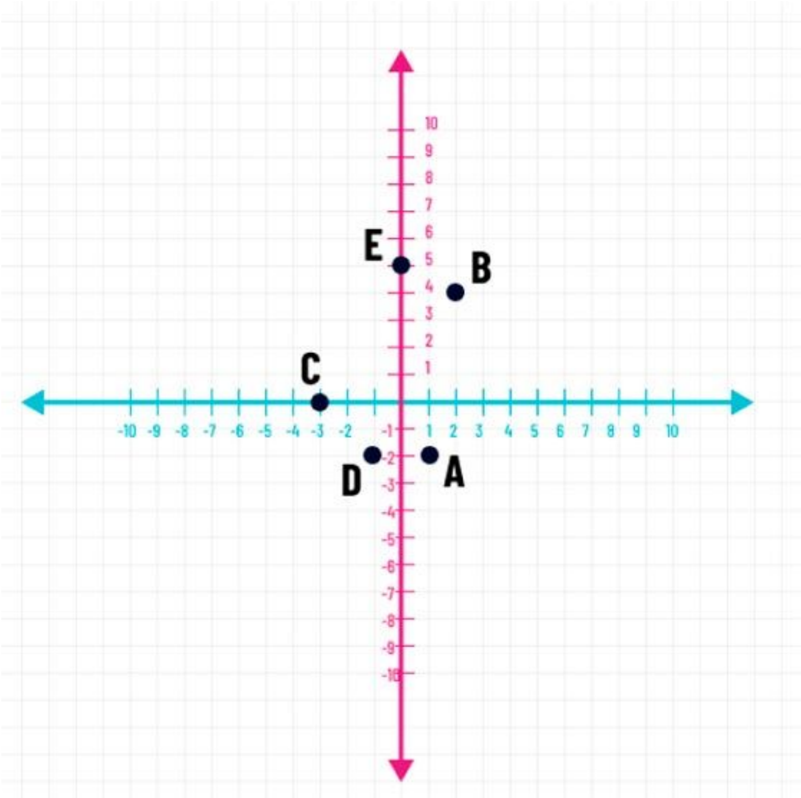
Como exemplo vamos **marcar os pontos** no **plano cartesiano**: (1, −2); (2, 4); (−3, 0); (−1, −2); (0, 5). Em primeiro lugar, precisamos montar uma tabela com os pontos dados:

x	y
1	−2
2	4
−3	0
−1	−2
0	5

Pares ordenados para pontos no plano cartesiano.
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

É importante perceber que a notação se parece com a de intervalo aberto que aprendemos no Módulo 1. Portanto, você deve se manter atento ao que é pedido no enunciado de cada questão.

Agora, marcaremos as coordenadas no plano cartesiano. Sendo a primeira na reta horizontal, abscissa, e a segunda na vertical, ordenada.



Pontos no plano cartesiano

Vejamos agora um vídeo sobre a aplicação do conceito de plano cartesiano em robótica.

Aplicação do plano cartesiano na robótica

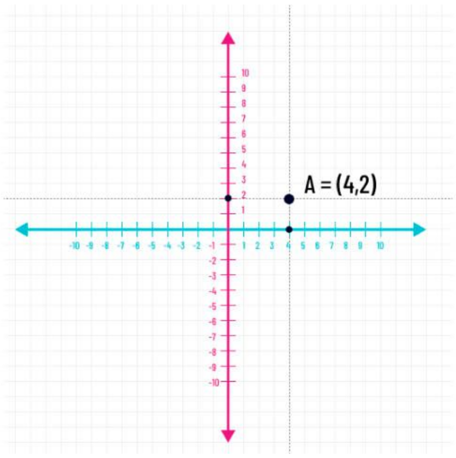
Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Agora, vamos verificar se você entendeu por meio de uma atividade?

Atividade discursiva

Na figura a seguir, vemos o ponto (4, 2).



Diga o que ocorre se movimentássemos o ponto:

1. Duas unidades para cima.
2. Três unidades para a esquerda e, depois, duas unidades para baixo.

Chave de resposta

1. O ponto moveria duas unidades na reta da variável *y* para cima. Logo, parou em *(4, 4)*.
2. O ponto moveria *3* unidades para a esquerda, parando em *(1, 2)* e, depois, foi deslocado duas unidades para baixo, parando em *(1, 0)*.

Saiba mais

Pesquise calculadoras e aplicativos na Internet para representar os pontos no plano cartesiano. O GeoGebra é um exemplo de ferramenta disponível na Internet.

Acabamos de vislumbrar o plano cartesiano como forma de representação gráfica de uma tabela, ilustrando a relação de dois ou mais objetos ou grandezas.

Um gráfico, nessas condições, é uma estrutura matemática bem definida. Em todos os exemplos e nas atividades, vimos que podemos representar pontos em uma tabela e as tabelas no plano cartesiano. Essa associação entre as tabelas e os pontos no plano cartesiano forma a ideia central do módulo 3.

Verificando o aprendizado

Questão 1

A imagem apresenta um gráfico de setores de uma cidade. Esses setores foram divididos de A a H, e de 0 a 3, assim a identificação de um setor pode ser feita da seguinte forma, como exemplo: A0, B3, F2 etc. Considere que todos os setores foram divididos em áreas iguais (considere os retângulos idênticos), e que existe a necessidade de se realizar uma entrega que saia de B0 e chegue em G0. O gráfico abaixo apresentam duas rotas para que seja realizada a entrega.

Após observar essas rotas, analise as afirmativas "abaixo":

1. A rota vermelha é a mais longa
2. A rota verde é a mais curta
3. A rota vermelha é a mais adequada

Sabendo que a entrega deve ser feita o mais rápido possível, percorrendo a menor distância permitida, assinale a opção correta, sobre a veracidade das afirmações "acima":

A

I- verdadeira, II- verdadeira, III- falsa

B

I- falsa, II- verdadeira, III- falsa

C

I- verdadeira, II- falsa, III- falsa

D

I- verdadeira, II- falsa, III- verdadeira

E

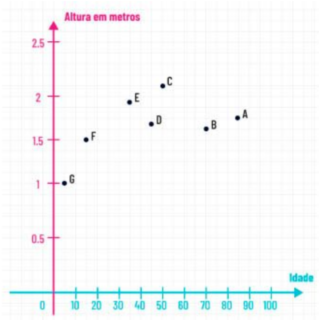
I- falsa, II- verdadeira, III- verdadeira

A alternativa A está correta.

Uma vez que os quadrados possuem áreas iguais e os retângulos são considerados idênticos, o que determina a distância é a quantidade de retângulos pintados. Veja que temos 10 retângulos vermelhos e 7 retângulos verdes, sendo assim, as afirmativas I e II são verdadeiras. Por conta do fato de a entrega ter que ser feita o mais rápido possível, percorrendo o menor caminho, a rota mais adequada é a rota verde, que é mais curta, por isso a afirmativa II é falsa.

Questão 2

No gráfico abaixo é mostrada a relação da altura de *7* indivíduos, com sua idade:



Relação da altura

Após observar o gráfico, assinale a opção que apresenta, respectivamente, o indivíduo de maior idade e o indivíduo de maior altura.

A

F e G

B

A e E

C

D e A

D

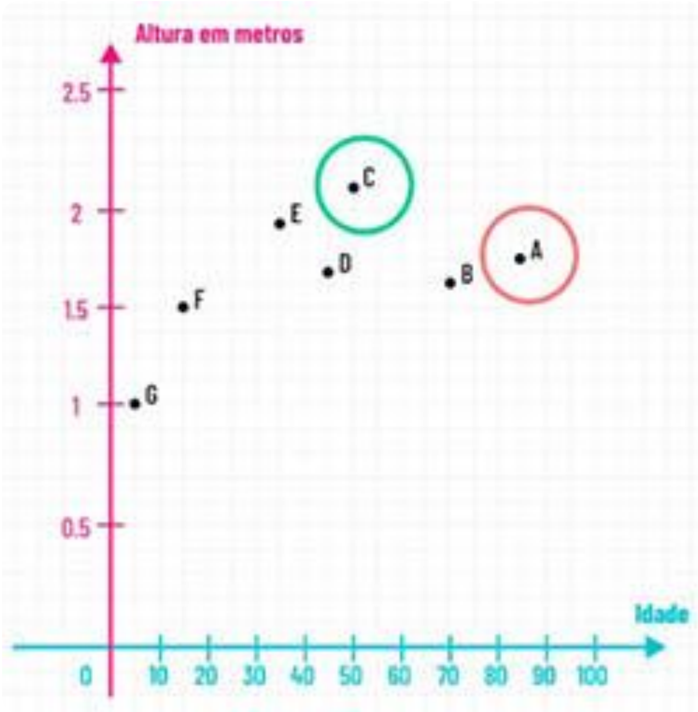
D e C

E

A e C

A alternativa E está correta.

Uma vez que os quadrados possuem áreas iguais e os retângulos são considerados idênticos, o que determina a distância é a quantidade de retângulos pintados. Veja que temos 10 retângulos vermelhos e 7 retângulos verdes, sendo assim, as afirmativas I e II são verdadeiras. Por conta do fato de a entrega ter que ser feita o mais rápido possível, percorrendo o menor caminho, a rota mais adequada é a rota verde, que é mais curta, por isso a afirmativa II é falsa.



Resposta do exercício

Vamos começar!

Exemplo de aplicação do plano cartesiano

Este módulo ficará mais fácil e interessante se você começar assistindo ao presente vídeo.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

O que é função?

Evolução do conceito histórico de funções

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

A palavra **função** apareceu pela primeira vez em um artigo de **Gottfried Leibniz**, em 1692. Ele chamou de função as **quantidades geométricas variáveis relacionadas** a uma **curva**.

Gottfried Leibniz

Filósofo alemão (1646 - 1716) e figura central na história da Matemática e da Filosofia.

No entanto, foi **Daniel Bernoulli**, em 1718, que definiu o conceito de função de maneira formal pela primeira vez, e se tratava de algo bem diferente do que conhecemos hoje em dia.

Daniel Bernoulli

Matemático suíço (1700 - 1782), lembrado por suas aplicações da Matemática à Mecânica.

Saiba mais

Para conhecer mais sobre a história e a formalização do conceito de função, leia o livro História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.

Podemos perceber o conceito de função quando temos duas quantidades ("variáveis") e observamos que há uma relação entre elas. Se acharmos que, para cada valor da primeira variável, existe apenas um valor da segunda variável, dizemos que:

> A **segunda variável** é uma função da **primeira variável.**

Uma função é, a rigor, uma tabela organizada

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

No módulo anterior, vimos que podemos representar tabelas utilizando o plano cartesiano, no qual uma função não é nada além de uma tabela em que todos os valores da primeira coluna estão relacionados aos valores da segunda coluna, sem ambiguidades entre os valores da primeira coluna e os da segunda. É claro que esta não é a definição formal de função, mas, na prática, é o que se deseja.Veremos a seguir alguns exemplos de função.

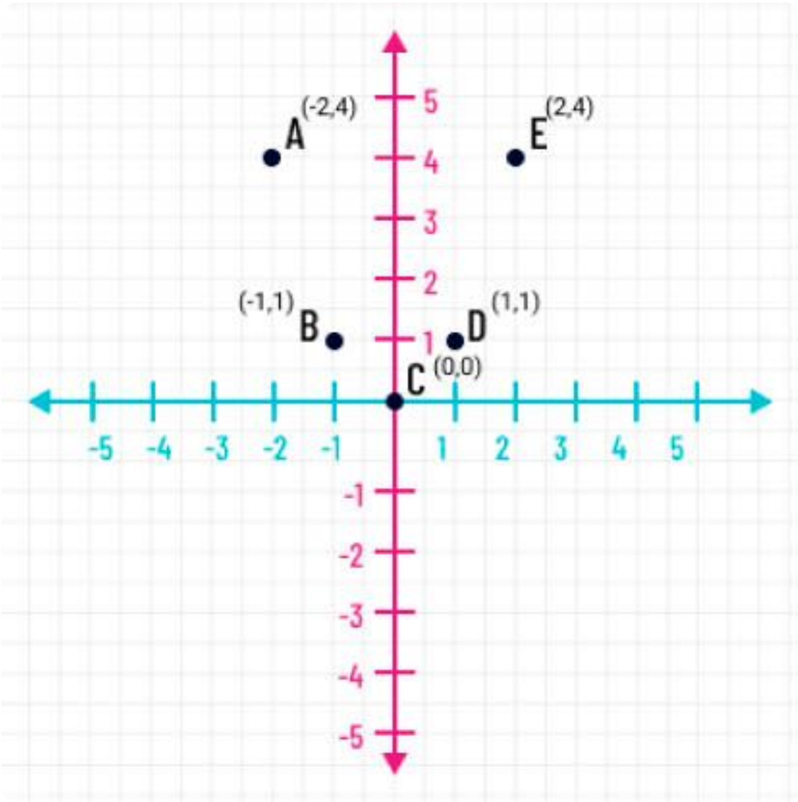
Exemplos de função

Exemplo 1

Vamos fazer uma tabela com a seguinte relação: a cada número real x, associamos o seu valor ao quadrado $\mathbf{x \times x = x^2}$ A seguir, podemos acompanhar o que ocorre com essa tabela de forma associada ao plano cartesiano.

Valor de x	Valor de $y = x^2$
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4

Pares ordenados de *X* e *Y*.
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha



Plano cartesiano

Os valores da primeira coluna da tabela dependem explicitamente dos valores da segunda.

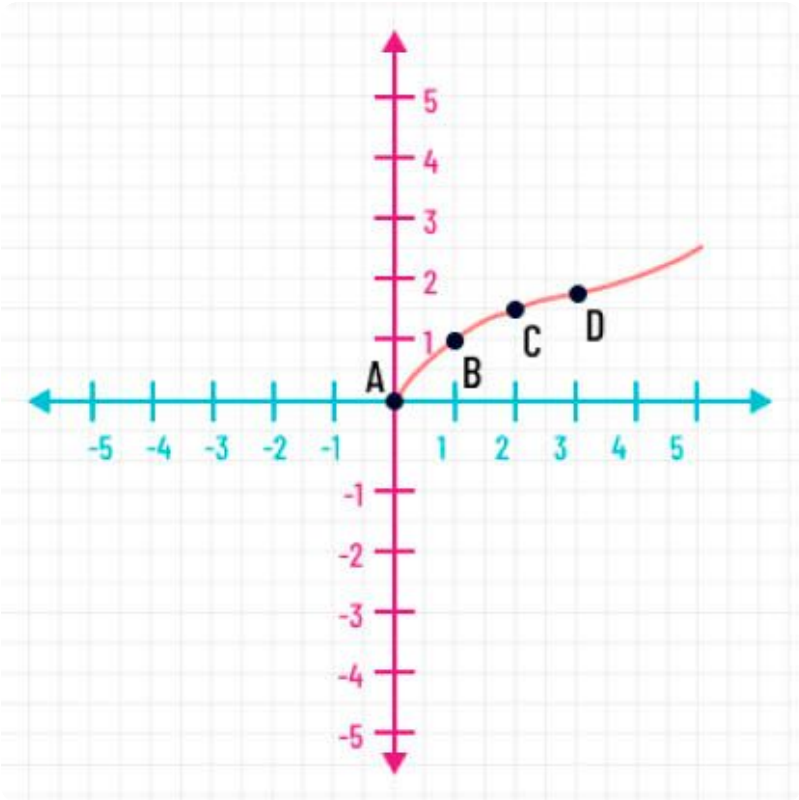
Devido à nossa experiência com o Ensino Médio, é possível ligar os pontos azuis, tendo, assim, melhor compreensão do todo que a tabela poderia nos dar.

Exemplo 2

Desta vez, faremos uma tabela com a seguinte relação: a cada número real x, associamos sua raiz quadrada √x.

Valor de x	Valor de y = √x
−1	$i \notin R$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
3	2

Pares ordenados de X e Y
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha



Plano cartesiano

Percebemos que **−1**, em particular, **não gera valores** em nossa tabela, pois estamos trabalhando apenas com **números reais**.

Note que todo valor **maior ou igual a zero** possui um lugar em nossa tabela. O caso é que os valores **menores que zero** não fazem parte dela.

> O maior conjunto de valores admissíveis de uma função, em analogia à primeira coluna de nossas tabelas, é conhecido como domínio da função.

Vejamos a seguir o ultimo exemplo desse grupo.

Exemplo 3

Qual é o custo de azulejar qualquer parede quadrada, com azulejos quadrados de **10cm (0,1m) de lado**, sabendo que **cada 1m²** dos azulejos é **vendido a R$32** nas Casas Pitágoras?

Para solucionar essa questão, temos de analisar o problema e entender as suas variáveis. Primeiramente, devemos perceber que o metro quadrado depende do comprimento do lado do quadrado. Assim, podemos fazer uma primeira tabela:

Lado da parede quadrada	Parede em m^2	Quantidade de azulejos
1	1	100
2	4	400
3	9	900
x	x^2	$100 \times x^2$

Informações do exemplo
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

Para preencher a última coluna, basta entendermos quantos azulejos de 0,1m de lado são necessários para preenchermos um metro quadrado. A **figura exemplo** ilustra a ideia de um metro quadrado dividido em azulejos de 10cm de lado e, como podemos ver, são necessários 100 azulejos.

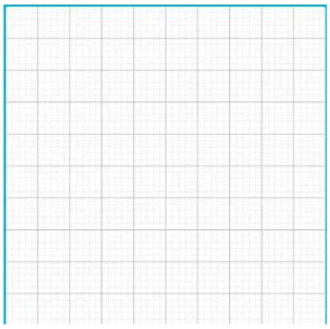
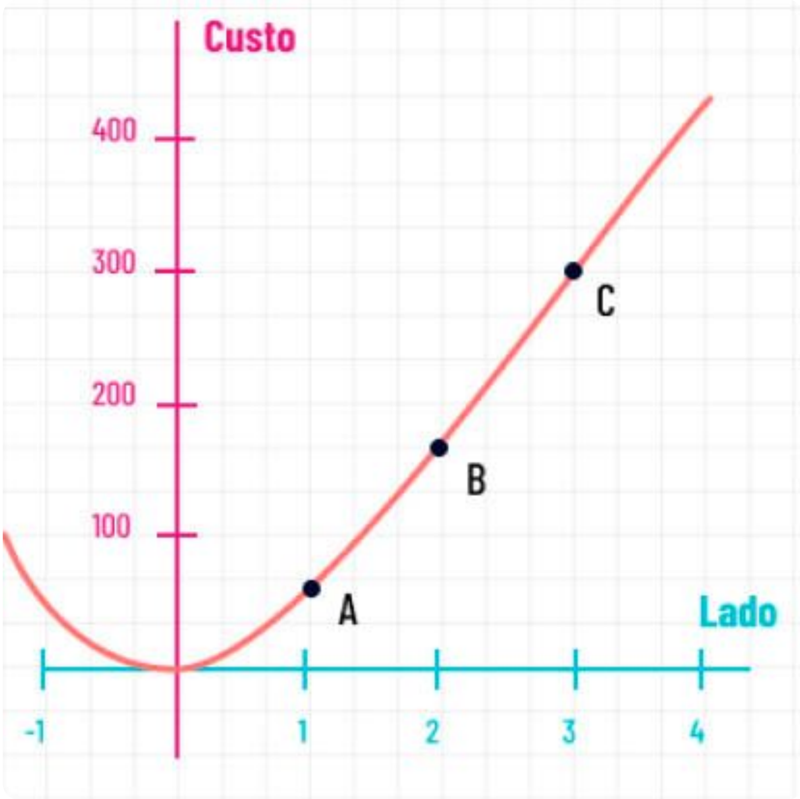


Figura exemplo

Podemos perceber que a quantidade 100 representa o número necessário de azulejos para preencher um metro quadrado de azulejos, que custa R$32 nas Casas Pitágoras. Sendo assim, existe uma relação de 100 → R$32. Concluímos, então, que a tabela final relaciona a metragem da parede com o custo em azulejos.

Lado da parede quadrada	Custo em azulejos $
1	32
2	32×4
3	32×9
x	$32 \times x^2$

Parede x custo em azulejos
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha



Custo x lado

Daí, a relação que expressa o custo e a metragem da parede é **$Cx = 32 \times x^2$** reais.

Ambiguidade

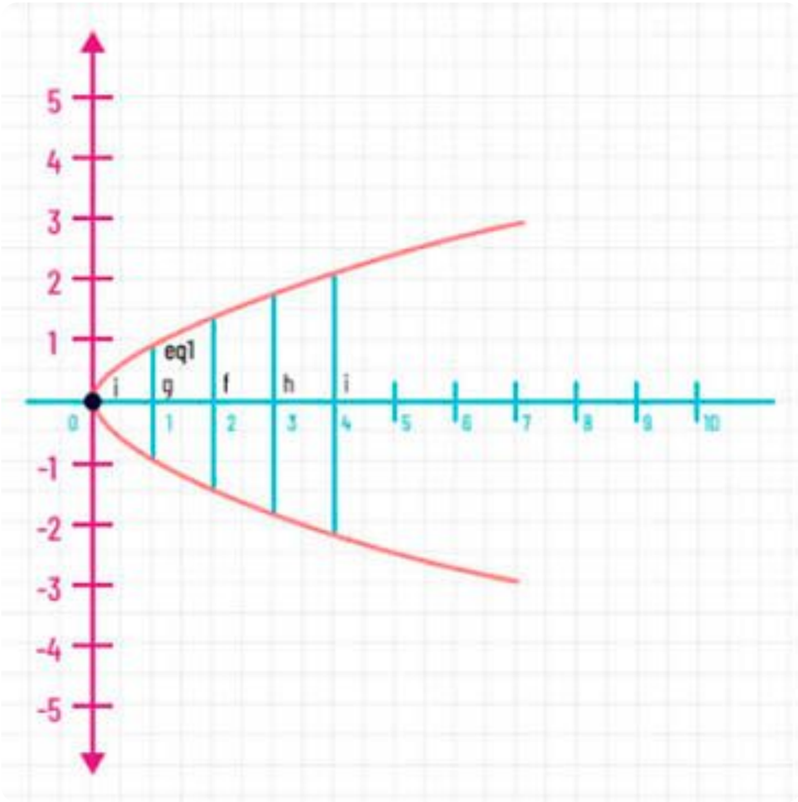
Um conceito importante sobre a construção da relação entre uma tabela e a sua representação gráfica é que ela **não pode ser ambígua**, isto é, os valores do que estamos caracterizando por variável dependente **não devem gerar duas possibilidades**.

Vamos entender melhor a questão da ambiguidade e por que ela não é uma função:

Veja como exemplo uma tabela com as soluções da equação $y^2 = x$, onde $x \in [0,\infty)$.

Valores de *x*	Solução de
0	*0*
1	*1* ou *−1*
2	*√2* ou *−√2*
3	*√3* ou *−√3*
4	*2* ou *−2*

Valores de X.
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha



Ambiguidade

Neste exemplo, fica clara a ambiguidade pela **não unicidade das soluções do problema**, deixando-nos o dilema em cada ponto, se estamos considerando a parte positiva ou negativa.

> Quando esse tipo de fenômeno ocorrer, diremos que a relação estabelecida **não é uma função**.

Portanto, uma função f é uma tabela de pares ordenados com a seguinte propriedade:Se *(x,y)* e *(x,b)* estiverem na **mesma tabela**, então ***b = y***.

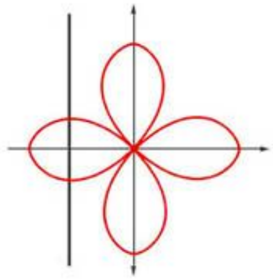
Resumindo

Uma tabela não pode conter pares ordenados distintos que possuam o mesmo primeiro elemento.

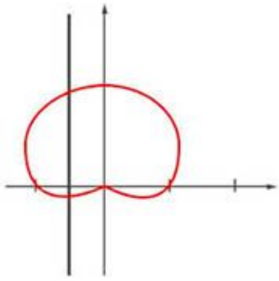
Sendo *f* uma função, o domínio de *f* é: o conjunto de todos os *x*, para o qual exista um *y*, tal que o par (*x*,*y*) esteja na tabela *f*.

Dessa forma, ao observarmos um gráfico no plano cartesiano, o que devemos perceber, a fim de entender se ele representa uma função, é se as **retas verticais** o **tocam** em um **único ponto**.

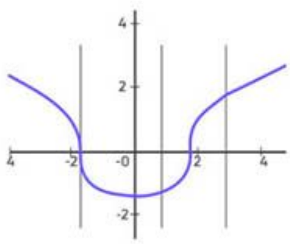
Veja os exemplos:



Não é função



Não é função



É função

Você já deve ter notado que **sempre associamos** as **tabelas** a uma **figura no plano cartesiano**, que representa todos os pontos possíveis das tabelas em questão.

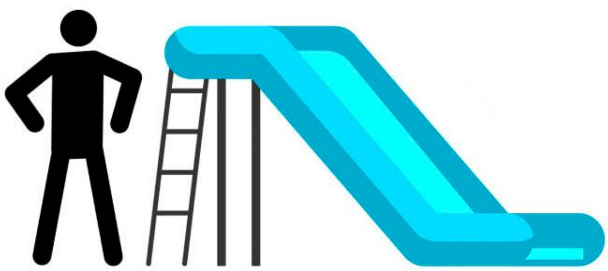
Essas figuras são chamadas de gráficos. Quando as tabelas representarem, de fato, uma função, a imagem será chamada de gráfico de função.

Reconhecimento e contexto

Agora, apresentaremos uma série de exemplos a fim de que você possa entender que nem sempre podemos, de forma explícita, construir a tabela, embora a relação com o gráfico ainda se faça presente.

Primeiro exemplo

A ilustração a seguir mostra um homem andando por um brinquedo em um parque:



A partir da imagem acima, pense na seguinte questão:

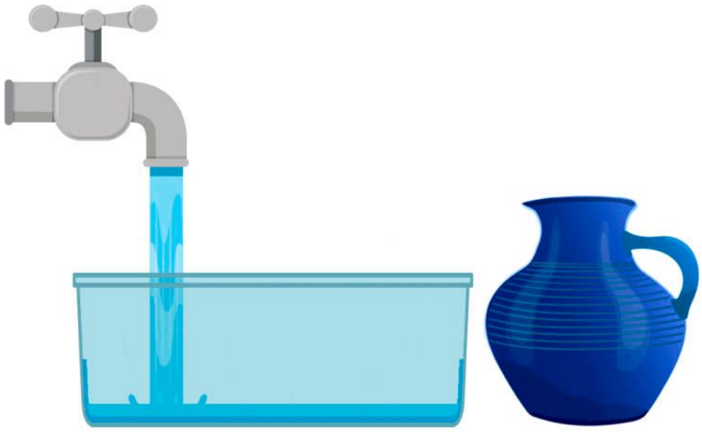
Quais diferentes medidas podemos ver em função do tempo associadas à ilustração?

A altura do homem em relação ao solo e sua velocidade variam em função do tempo.

Agora, ainda em relação à imagem apresentada no primeiro exemplo, tente responder a atividade proposta.

Segundo exemplo

A ilustração a seguir apresenta um recipiente sendo cheio por água.



A partir da imagem acima, pensa na seguinte questão:

Quais diferentes variáveis podemos ver em função do tempo associadas à ilustração?

A quantidade de litros de água que está dentro do recipiente e a velocidade em que o recipiente fica cheio variam em função do tempo.

Agora, ainda em relação à imagem apresentada no segundo exemplo, tente responder a atividade proposta.

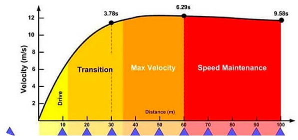
Os gráficos dos exemplos que acabamos de ver representam uma tabela em que a quantidade de água no recipiente ou a altura da cabeça do homem **variam sem ambiguidade** em **função do tempo**, apresentando, assim, o **conceito de função**.

Geralmente, na escola, estudamos funções como fórmulas preestabelecidas. No entanto, como vimos nos exemplos anteriores, essa ideia não é completa. Devemos ser capazes de enxergar o conceito de função na diversidade à nossa volta, conforme os exemplos a seguir:

Exemplo A

A imagem mostra um gráfico do desempenho do corredor Usain Bolt ao conquistar o recorde mundial dos 100 metros rasos, no campeonato mundial de atletismo.

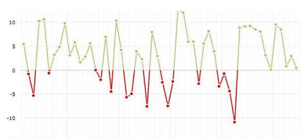
A reta vertical apresenta a velocidade do corredor em metros por segundo (m/s), e a reta horizontal mostra a distância percorrida em metros.
O gráfico é uma função que mede a velocidade do corredor em cada momento da trajetória.



Exemplo B

Já esta imagem mostra o crescimento do PIB argentino, do início dos anos 1960 até a década de 2010.

O gráfico apresenta o histórico do desenvolvimento econômico argentino. A partir dele, podemos apresentar uma tendência, auxiliando um futuro investidor.

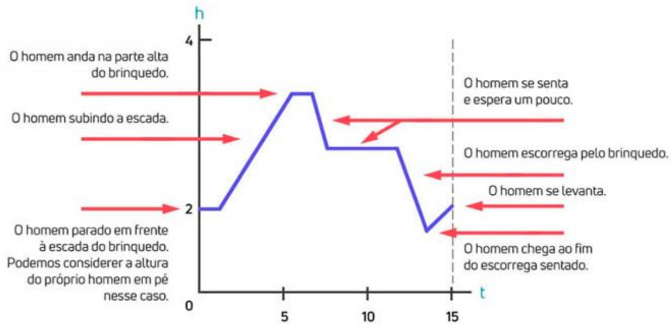


Atividade discursiva

Agora, com uma caneta e um papel, tente desenhar o gráfico da **altura do homem** em função do **tempo**.

Chave de resposta

Observe o gráfico da **altura do homem** em função do **tempo**.



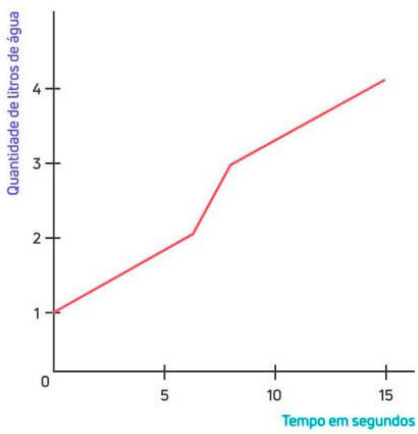
Altura em função do tempo.

Atividade discursiva

Agora, com uma caneta e um papel, tente desenhar o gráfico da **quantidade de litros de água** no recipiente em função do **tempo**.

Chave de resposta

Ao analisarmos a ilustração com cuidado, percebemos que já havia água no balde; depois, ele recebe mais um litro de água, além do que já estava entrando, fazendo com que o fluxo de água fosse maior nesse intervalo de tempo, retornando, mais tarde, à vazão natural. Obtemos assim:

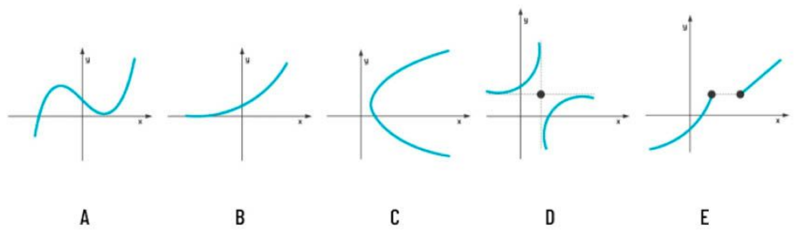


Quantidade de litros de água em função do tempo em segundos.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Qual das opções a seguir não apresenta um gráfico de função?



Marque a opção correta:

A

A

B

B

C

C

D

D

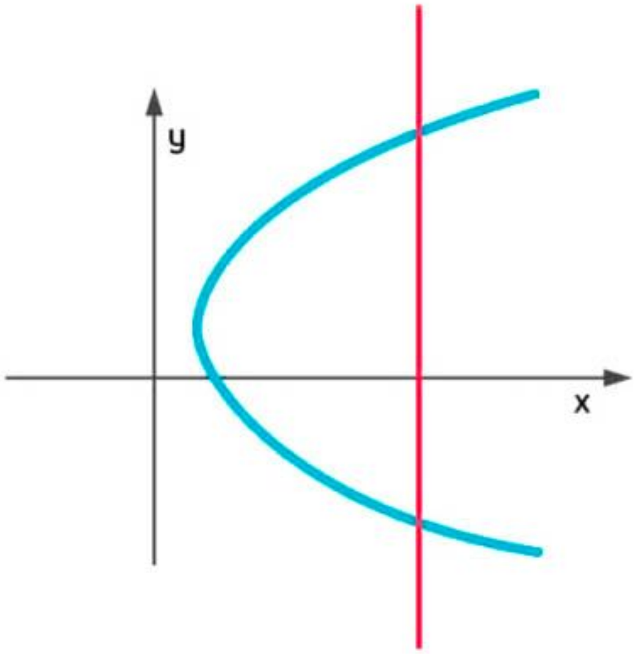
E

E

A alternativa C está correta.

Os itens A, B, D e E são funções, e o item C não é uma função, de acordo com o que foi visto neste módulo, pois a reta vertical toca o gráfico em mais de um ponto.

Em relação à alternativa E, o ponto é que, na “tabela” que apresenta o gráfico, o que ocorreu foi que ela pulou alguns valores. De acordo com a definição de função, podemos entender que, em momento algum, é relatado que não é possível pularmos valores. Sendo assim, o item E não contradiz em nada a definição de função. Logo, também se trata de um gráfico de função.



Alternativa C

Questão 2

Em 2020, houve uma pandemia global provocada pelo vírus SARS-CoV-2. Tal pandemia trouxe danos incalculáveis às economias globais e provocou milhares de mortes pelo mundo inteiro. O estudo do epidemiologista Neil Ferguson, do Imperial College, apresentou um gráfico mostrando requisitos de leito de cuidados intensivos (UTI) por 100 mil habitantes em diferentes cenários:

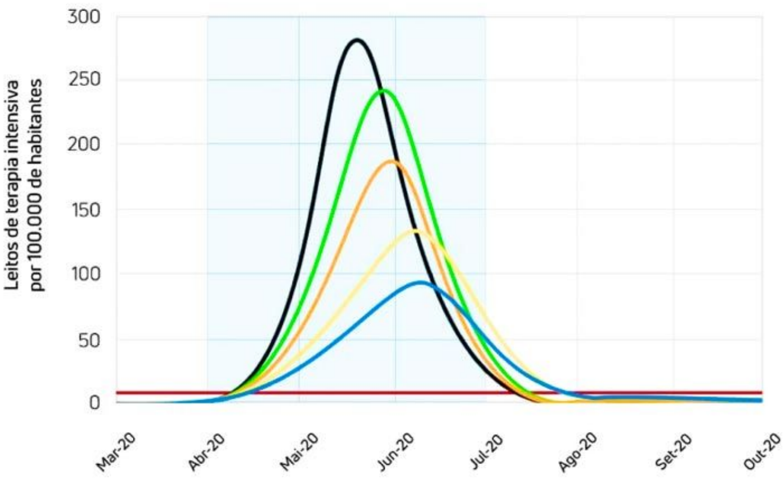


Figura A

- Mostra o número de leitos de UTI por 100 mil habitantes que a Inglaterra possuía em 2019, antes do surto.
- Mostra a epidemia não mitigada.
- Mostra o isolamento do caso.
- Mostra o isolamento dos casos e a quarentena das famílias.
- Mostra uma estratégia de mitigação com o fechamento de escolas e universidades.
- Mostra o isolamento de casos, a quarentena doméstica e o distanciamento social das pessoas com mais de 70 anos.

Figura B

Assinale a alternativa correta:

A

Nenhum dos gráficos apresentados nas figuras é função.

B

Os picos em todos os cenários ocorrem em maio.

C

Em todos os cenários, em junho, na Inglaterra, serão necessários 150 leitos de UTI a cada 100 mil habitantes.

D

O sistema de saúde inglês volta ao normal em todos os cenários em agosto.

E

Os picos de todos os cenários na Grã-Bretanha ocorrem no mês de junho.

A alternativa D está correta.

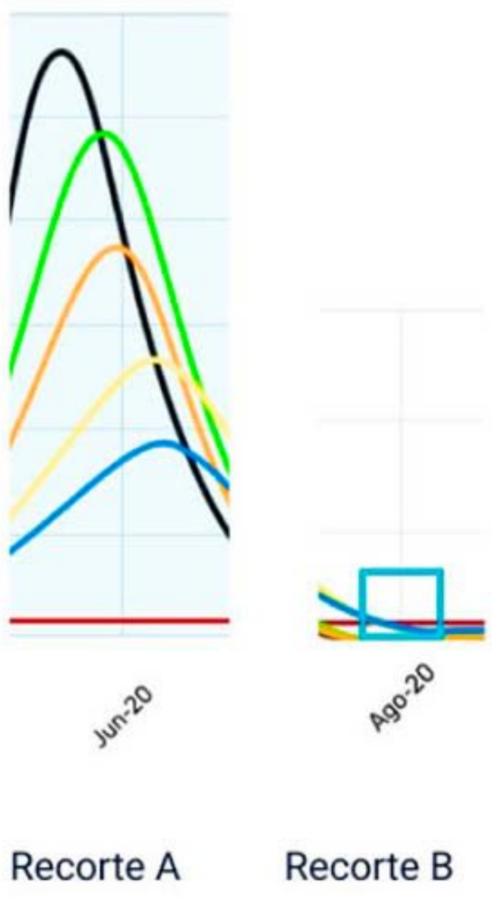
A letra A é falsa, pois não há ambiguidade nos pontos, portanto todos os cenários são funções.

Para responder se o item B é verdadeiro ou falso, temos duas opções: fazer o recorte do mês de maio ou fazer o recorte dos picos. O mesmo vale pra avaliarmos o item E. Optamos por fazer o recorte dos picos, como ilustra a Recorte A.

O gráfico deixa claro que os picos se concentram durante os meses de maio e junho é não só em maio ou só em junho.

No caso do item C, percebemos que os cenários amarelo e azul não chegam aos 150 leitos de UTI por 100 mil habitantes.

Esse raciocínio evidencia que a resposta é a letra D. O recorte a seguir (Recorte B) deixa claro que em todos os cenários o sistema de saúde inglês volta à normalidade no mês de agosto.



Recorte A e Recorte B

Vamos começar!

Exemplos de gráficos de modelos reais

Este módulo ficará mais fácil e interessante se você começar assistindo ao presente vídeo.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Raízes ou zeros

As **raízes ou zeros** de uma função f **serão os valores no eixo OX**, que também fazem parte da sua função/ tabela (x , y), onde y = f(x). Isto é, correspondem aos valores x que são associados ao valor zero, (x , 0).

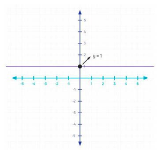
Você, provavelmente, encontrará a seguinte representação nos livros de cálculo:são os valores de x tais que **f(x) = 0**.

Graficamente, são os valores da função que se encontram sobre a reta horizontal (eixo OX).

Vejamos alguns exemplos a seguir:

Exemplo 1

Descreveremos o conjunto das raízes apresentadas no gráfico das funções a seguir.



O gráfico das funções a serem consideradas está em roxo.

Exemplo 1.

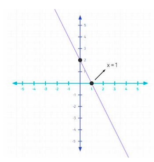
Neste gráfico, podemos perceber que o gráfico da função nunca toca o eixo OX.

Esse tipo de gráfico é comumente conhecido como gráfico de uma **função constante**.

Sendo assim, o conjunto de todas as suas raízes é **vazio**.

Exemplo 2

As raízes de uma função são os valores da primeira coordenada, cujo gráfico da função f está sobre o eixo OX.



Exemplo 2.

Neste caso, temos uma única raiz, x = 1.

Agora que você já compreendeu os exemplos, analise os gráficos a seguir e responda.

Atividade discursiva

Quais são as raízes das funções a seguir?

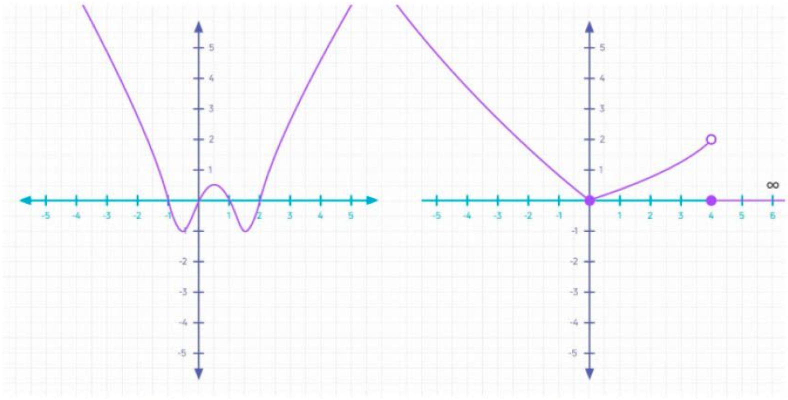


Figura A Figura B

Função A (esquerda) e Função B (direita)

Chave de resposta

Função A:

Podemos ver os valores na reta horizontal que são tocados pelo gráfico da função, isto é, *{−1, 0, 1, 2}*.

Dessa forma, temos que a função em questão possui *4* raízes.

Função B:

Os valores no eixo *OX* fazem parte da sua tabela/gráfico da função. Nesse sentido, podemos ver o valor *x = 0* e *x = 4*.

O caso aqui é que todos os valores de x maiores que *4* fazem parte da nossa tabela e estão sobre o eixo horizontal. Portanto, as raízes da função dada pelo gráfico são *4* e *[4, ∞)*. Ou seja, a função pode ter uma infinidade de raízes.

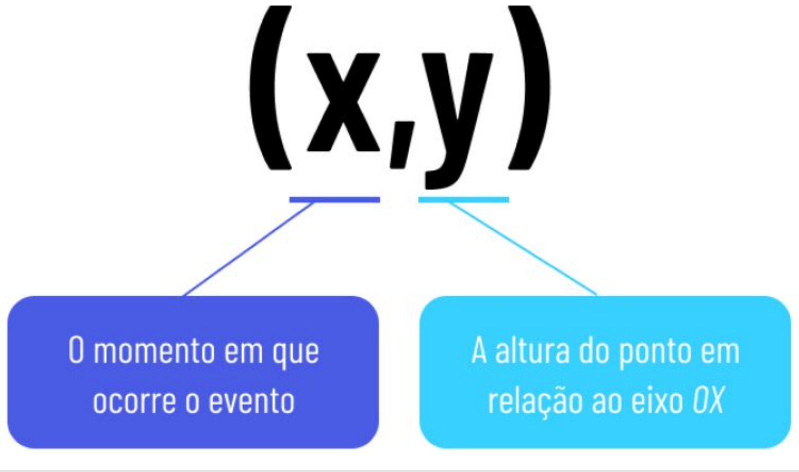
Máximos e mínimos de um gráfico

Reconhecendo máximos e mínimos locais e globais

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

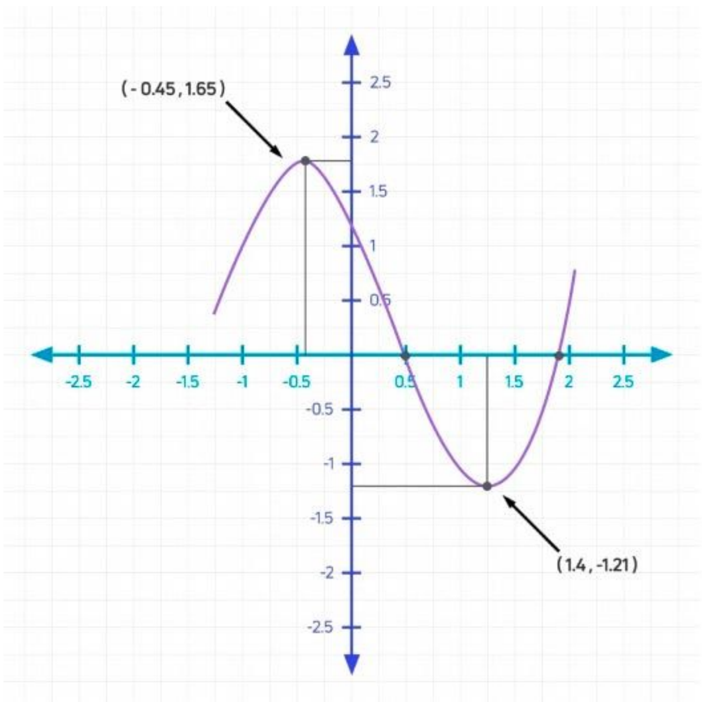
Devemos sempre ter em mente que, quando falamos em ponto de máximo ou mínimo de um gráfico, este é um par ordenado, um elemento da nossa tabela, e, por isso, possui **dois valores associados**.



O valor de x é o que geralmente chamamos na literatura de **máximo** ou **mínimo**.
O valor de y = f (x) é o **valor máximo** ou **valor mínimo**.

Muitas vezes, podemos nos confundir com o que o problema pede quando essas ideias não estão claras.

Considere o gráfico abaixo:



Exemplo

De acordo com o gráfico temos: O máximo da função ocorre em x = −0.45, e o seu valor máximo é y = f (−0.45) = 1.65.O mínimo ocorre em x = 1.4, e o seu valor mínimo é y = f (1.4) = −1.21.

Trata-se do que chamamos na literatura de **máximos** e **mínimos globais**.

Trata-se do que chamamos na literatura de máximos e mínimos globais. Dado o gráfico de uma função f, o ponto de máximo (ou mínimo) (x, ƒ (x)) tem a propriedade de ser o ponto mais alto (ou mais baixo) do gráfico. Em linguagem matemática, é o ponto $(x_0, f(x_0))$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ e $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x admissível.

Pontos notáveis de um gráfico

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

O gráfico abaixo apresenta a taxa de desemprego de 2013.

Taxa de desemprego mensal (em%) - 2013

Considerando as informações constantes no gráfico, em quais meses há o maior índice de desemprego e o menor índice?

A

Maior índice: dezembro; menor índice: junho.

B

Maior índice: fevereiro; menor índice: setembro.

C

Maior índice: agosto; menor índice: setembro.

D

Maior índice: janeiro; menor índice: setembro.

E

Maior índice: janeiro; menor índice: dezembro.

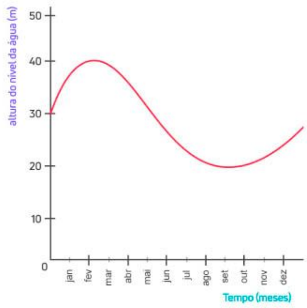
A alternativa B está correta.

A taxa mais alta do gráfico é 130, ou seja, ponto mais alto do gráfico. Portanto, o maior índice de desemprego ocorre no mês de fevereiro, e o menor índice, em setembro, onde se encontra o ponto mais baixo do gráfico, 90.

Questão 2

O gráfico a seguir mostra o nível de água em um reservatório durante o ano de 2015.

Se os níveis de água no reservatório dependem dos níveis de chuva na região, assinale, respectivamente, os meses do ano em que mais choveu e em que menos choveu no ano de 2015.



Altura do nível da água (m) em função do tempo (meses)

A

Janeiro e dezembro.

B

Fevereiro e novembro.

C

Março e outubro.

D

Fevereiro e setembro.

E

Janeiro e agosto.

A alternativa D está correta.

O mês de fevereiro teve o maior volume de chuvas. Além disso, podemos perceber que, em outubro, choveu mais que em setembro.

Considerações finais

O que você aprendeu neste conteúdo?

A Matemática é, a rigor, uma linguagem que permite analisar e descrever diversas situações. Como toda língua, ela possui seus conceitos mais elementares, que abrem caminho para toda a beleza, cultura e os mistérios que circundam civilizações antigas e as mais modernas tecnologias.

Este tema buscou apresentar as funções a partir de conceitos elementares, como intervalos e o plano cartesiano, e desmistificar o entendimento das funções, correlacionando-as a uma lista ou tabela onde o plano cartesiano não é nada além do objeto de manifestação gráfica de seus resultados.

Podcast

No podcast a seguir, veremos um breve resumo sobre o tema.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para ouvir o áudio.

Explore +

Para conhecer mais sobre a história e a formalização do conceito de função, leia o livro **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**, de Tatiana Roque.

Pesquise na Internet o projeto **Um livro aberto**, que conta com a colaboração de professores universitários de todo o Brasil.

Pesquise sites de calculadoras científicas e aplicativos que ajudem a fazer contas.

Procure na Internet o livro **Biomechanic of sprinting**.

Consulte o **Portal do Saber**, da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

Referências

CONNALLY, E. et al. **Functions Modeling Change**: A Preparation for Calculus. Nova York: Wiler, 2010.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos matemáticos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar I**. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, E. L. **Curso de Análise** – Volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SPIVAK, M. **Calculus**: cálculo infinitesimal. Barcelona: Reverté, 1970.