Aprofundamento de funções

Você vai estudar as funções por diferentes perspectivas complementares: entender o conceito matemático, analisar as propriedades por métodos analíticos e explorar as representações gráficas. O foco estará na consolidação da noção de função real de uma variável real.

Profa. Loisi Carla Monteiro Pereira

Propósito

Compreender a relevância do conceito de função para interpretação e resolução de problemas diversos, inclusive fenômenos naturais, sociais e de outras áreas.

Objetivos

- Reconhecer graficamente o domínio, a imagem e o contradomínio de funções.
- Identificar graficamente os tipos de funções: injetora, sobrejetora e bijetora.
- Definir funções crescentes e decrescentes.
- Definir funções periódicas.

Introdução

Para fazermos modelos matemáticos de nossa realidade, associamos quantidades numéricas aos acontecimentos, fatos e objetos que desejamos estudar ou analisar. É comum obtermos relações expressas em termos de fórmulas ou expressões matemáticas, porém, muitas vezes, as expressões obtidas nem sempre dão origem a um número real para todos os possíveis valores da variável independente.

Este conteúdo aborda as funções reais de variável real, em que tanto o domínio quanto o contradomínio são subconjuntos de R ou até mesmo todo o R. Mostraremos como as funções se comportam em determinados intervalos da reta real e algumas de suas aplicações.

Ao observar a natureza, percebemos diversos fenômenos que ocorrem de forma repetitiva em intervalos regulares de tempo, seguindo padrões cíclicos — como as estações do ano e os batimentos cardíacos, por exemplo. Fenômenos desse tipo são representados por uma classe importante de funções: as periódicas. Dentro desse grupo, destacam-se as funções trigonométricas, como seno, cosseno e tangente.

Para começar, assista ao vídeo a seguir e veja como é importante aprofundar o entendimento sobre as funções.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Função

Definindo funções e seus domínios

As funções são relações matemáticas que seguem algumas regrinhas, e seus domínios precisam de uma análise detalhada. Vamos aprendê-las neste vídeo. Confira!

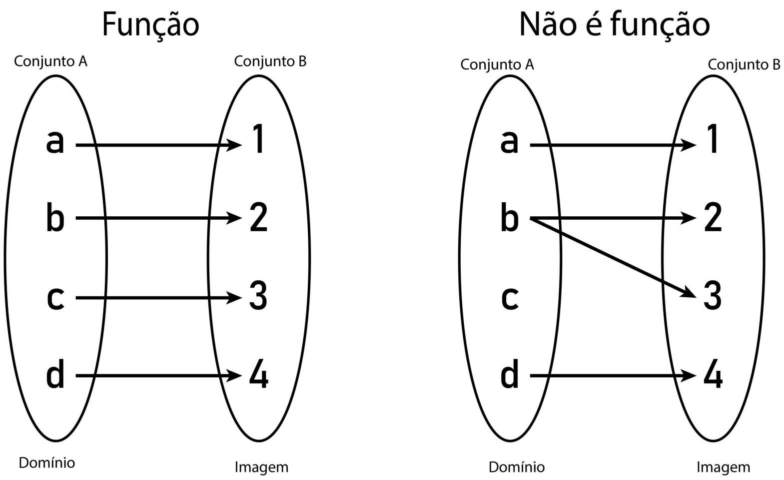
Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

As funções estão presentes em várias áreas da nossa vida, desde o cálculo de custos e lucro até a otimização de processos contábeis e econômicos. Você já parou para pensar o que define funções? Sabe o que é um domínio da função e como analisá-lo? Vamos explorar juntos como essas ferramentas matemáticas são fundamentais na resolução de problemas práticos e no avanço das tecnologias!

Conceito de função e notação funcional

Uma função pode ser entendida como uma relação matemática entre dois conjuntos, em que cada valor do primeiro conjunto (domínio) corresponde exatamente a um valor no segundo conjunto (imagem). Formalmente, escrevemos uma função como $f(x)$, em que f é o nome da função e x é a variável independente. Vamos entender melhor analisando a imagem a seguir.



Representação de função e não função entre as relações dos conjuntos A e B.

Aparecem dois conjuntos na imagem: A e B. Primeiro, observe que cada elemento de A tem um único correspondente em B, ou seja, para cada elemento do conjunto do domínio, temos um único elemento correspondente na imagem. Dizemos, então, que a relação entre A e B é uma **função**.

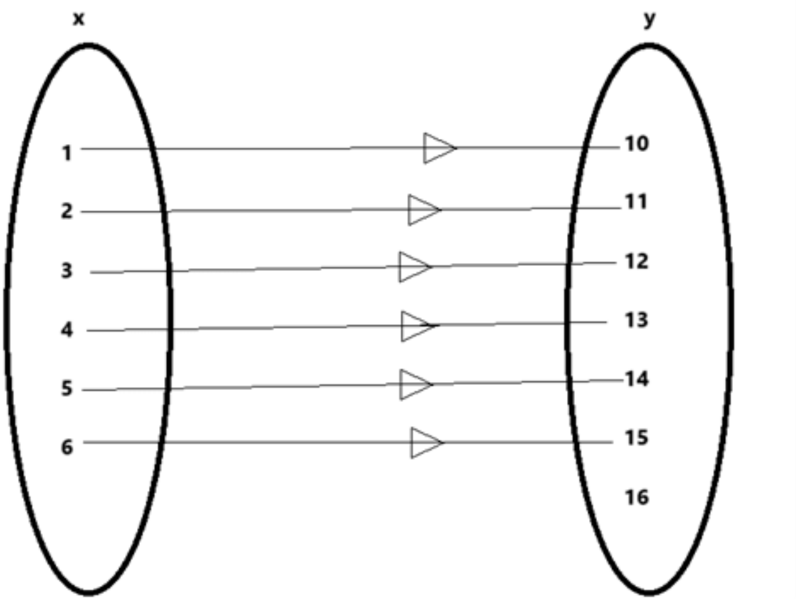
Já no segundo caso, vemos que entre o conjunto A e B, o elemento **b** tem dois correspondentes no conjunto B, o que significa que ele tem dois elementos de imagem, e isso caracteriza que essa relação **não é uma função**. Sendo assim, podemos definir a função como sendo uma **relação entre dois conjuntos, em que cada elemento do domínio tem somente um elemento de imagem**.

Agora, como definir domínio e imagem? Na verdade, se pegarmos a imagem, que representa uma função, temos, nos conjuntos A e B, três conjuntos distintos: o conjunto domínio (**D**), o conjunto contradomínio (**CD**) e o conjunto imagem (**Im**). O conjunto do domínio é de onde saem as setinhas do conjunto A. Por isso o conjunto A é chamado de domínio. O conjunto contradomínio é o conjunto B, pelo simples fato de ele estar recebendo as setinhas. Já o conjunto imagem é formado pelos elementos de B que recebem as setinhas.

Na imagem, de fato, todos os elementos do conjunto B recebem a setinha, mas vamos analisar agora o conjunto a seguir.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para ver mais detalhes da imagem abaixo.



Função de x em y.

Perceba que todos os elementos do conjunto **x** tem um único elemento de correspondência no conjunto **y**, o que caracteriza uma função, porém sobra um elemento de **y** sem ligação. Isso nos diz que os conjuntos: domínio, contradomínio e imagem são:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$CD = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$$
$$Im = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

Perceba que existe uma diferença entre o contradomínio e a imagem, sendo a imagem formada pelos elementos que receberam a ligação dos elementos do conjunto **x**.

Existem diversos tipos de funções e, em geral, na matemática, elas são representadas com o auxílio de polinômios, mas existem outros tipos de funções, como a trigonométrica, mas aqui vamos focar as funções polinomiais. A função é normalmente representada por: *f(x)*, em que *f* representa a função, e o *x* dentro do parêntese representa a variável dessa função, que chamamos de variável independente.

Por que isso?

O *x* é o elemento do domínio, que vai levar ao contradomínio da função *f(x)*, um valor. Ao fazer isso, a função *f(x)* vai processar esse valor e, após processar, vai nos retornar um segundo valor, que é o resultado de *f(x)*. Esse resultando chamamos de imagem. Sendo assim, podemos dizer que *x* é a variável independente da função e *f(x)* a variável dependente da função. Isso porque seu valor depende do processamento do contradomínio, que terá valores diferentes para cada valor de entrada de *x*. Por exemplo, considere a função:

$$f(x) = x + 10$$

Perceba que *x* é a nossa variável independente. Por quê? Porque *x* é o número que vamos escolher para entrar na função. O cálculo: *x* + 10 é o contradomínio. Por quê? Porque quando inserirmos o valor de *x*, vamos realizar um cálculo, que nada mais é do que o processamento do valor de *x*, e o resultado encontrado será a imagem, que nada mais é do que o valor de *f(x)*. Vamos exemplificar!

$$f(x) = x + 10$$

Vamos atribuir para essa função os mesmos valores do domínio da última imagem, ou seja:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Perceba, então, que *x* tem que assumir os valores: 1,2,3,4,5,6. Vamos então realizar essa substituição!

Domínio	Contradomínio	Imagem
x	*x* + 10	*f (x)*
1	1+10	11
2	2+10	12
3	3+10	13
4	4+10	14
5	5+10	15
6	6+10	16

Tabela: Exemplo de domínio e imagem de uma função.
Loisi Carla Monteiro Pereira.

Viu? Os elementos do domínio (x) foram processados no contradomínio $(x + 10)$, o que resultou na imagem $(f(x))$.

A função que calculamos anteriormente é conhecida como função afim. Essa função é representada por um polinômio de grau 1, e tem como o domínio, todo o conjunto dos números reais, ou seja: $D=\{\mathbb{R}\}$. Isso significa que ela é capaz de aceitar qualquer número, no lugar de x .

Mas o domínio sempre será de todos os números reais? A resposta é não! E, para isso, vamos ver dois exemplos:

1º exemplo

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

Perceba agora que a função mudou, e ela tem um x na parte de baixo da fração. Será que aqui podemos colocar todos os números reais no lugar do x ? A resposta é não! E sabe por quê? Simples, não existe número nenhum que possa ser dividido por zero, ou seja, não existe: $\frac{1}{0}$. Pense! Quanto seria a divisão de 8 pedaços de pizza para zero pessoas? Isso não faz sentido, correto? É o mesmo caso dessa fração $\frac{1}{0}$. Não faz sentido. Nesse caso, como não pode ter zero embaixo (no denomiador da fração), o domínio são todos os números reais, exceto o zero, ou seja:

Para $f(x)=\frac{1}{x},$ o domínio é dado por: $D=\{x \in \mathbb{R}^*\}$.

Lemos esse conjunto domínio da seguinte maneira: *x* pertence aos reais, exceto o zero. Esse asterístico significa que o zero não faz parte do conjunto domínio.

Podemos ver que o zero não faz parte do domínio, vendo o gráfico a seguir.

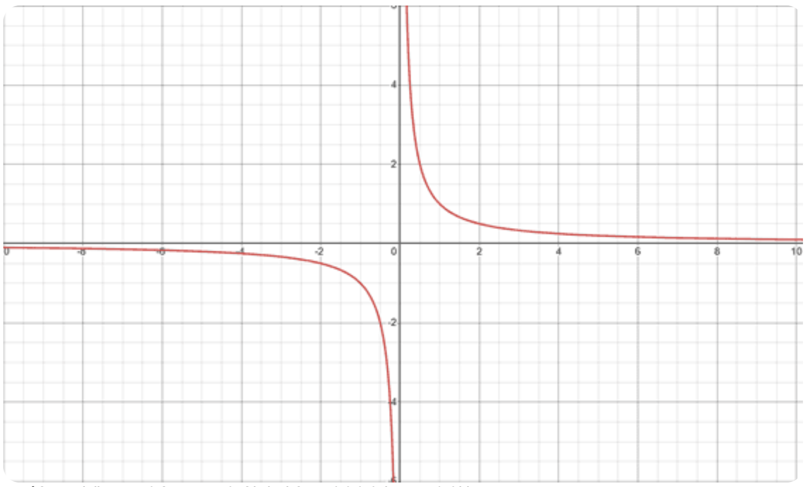


Gráfico: $\text { função } f(x)=\frac{1}{x} \text {. }$

O gráfico aparece no lado positivo do plano cartesiano e também no lado negativo, mas ele salta o zero, ou seja, não passa por *x*=0.

2° exemplo

$$f(x)=\sqrt{x}$$

Perceba que, agora, a função envolve uma raiz quadrada, e dentro de uma raiz quadrada não pode haver número negativo, afinal, não existe raiz quadrada de número negativo. Isso significa que a função pode ter valores positivos ou zero, pois raiz quadrada de zero é zero. Logo, o domínio é:

$$D=\{x \in \mathbb{R}^{+}\}$$
$$\text{ou}$$
$$D=\{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$$

Lemos da seguinte forma: x pertence aos reais, tal que x tem que ser maior ou igual a zero.

Vejamos no gráfico!

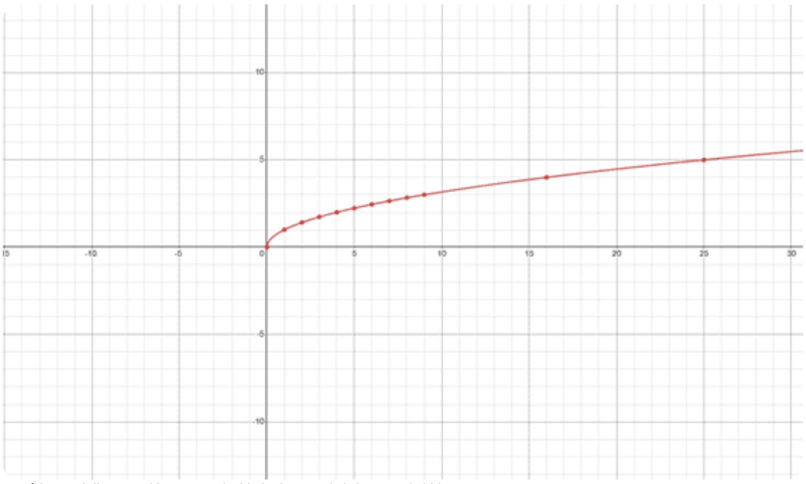


Gráfico: \(\text {função } f(x)=\sqrt{x} \text {. }\)

Viu? O gráfico dessa função começa no zero e se desenvolve para todos os valores de x positivos. Por isso seu domínio é definido em $x \geq 0$.

Entendeu agora como analisamos domínio de uma função? Nós olhamos para a função e vemos se tem alguma restrição, daí explicitamos qual é essa restrição, como fizemos nos dois exemplos anteriores.

3º exemplo

$$f(x)=\begin{cases}|x|, & \text{se } x<1 \\ \ln(x), & \text{se } x \geq 1\end{cases}$$

Vamos descrever o domínio da função do terceiro exemplo em vídeo. Não deixe de conferir!

Domínio de uma função não contínua

As funções podem ser contínuas, como as funções $f(x)=x$, ou $f(x)=x^2$, mas existem funções que são descontínuas, como a função $f(x)=\begin{cases}|x|, \text{ se } x \\ lt; 1 \\ \ln(x), \text{ se } x \geq 1\end{cases}$. Neste vídeo, veremos como analisar seu domínio. Vamos lá!

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Imagem de uma função

Descubra neste vídeo como podemos encontrar o conjunto imagem de uma função por meio da inversa da função.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Imagine uma função como uma máquina que transforma números. Você insere um valor (a entrada, pertencente ao domínio) e a máquina o processa, produzindo um novo valor (a saída, que faz parte da imagem). A **imagem de uma função** é o conjunto de todos os possíveis valores de saída que a função pode gerar. Em outras palavras, é o conjunto de todos os valores que a função "atinge".

Para entender melhor, vamos explorar o conceito de **intervalo de existência da imagem**, que descreve os valores mínimos e máximos que a imagem pode assumir. Uma forma poderosa de determinar a imagem é através da **função inversa**. A ideia é simples: se a função original leva o domínio à imagem, a inversa faz o caminho contrário, levando a imagem de volta ao domínio. Vamos aprender isso por meio de exemplos:

Exemplo 1 - Função afim

Considere a função afim f(x) = 2x + 1. Para encontrar sua inversa, vamos primeiro escrever a função na forma de equação, trocando f(x) por y:

$$y = 2x + 1$$

Agora, vamos trocar x por y:

$$x = 2y + 1$$

Por fim, vamos isolar y:

$$2y = x - 1$$
$$y = \frac{x-1}{2}$$

Y é a função inversa $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$, ou seja: a inversa de $\mathrm{f(x)}$ é $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

Agora que conhecemos a inversa da função, vamos encontrar o domínio da função inversa. Perceba que não temos nenhuma restrição em $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$. Podemos usar todos os números positivos, todos os negativos, e o zero também pode fazer parte. Então, uma vez que não há restrição, podemos definir o domínio de $f^{-1}(x)$, como todos os reais. Logo, nesse caso, a imagem de $f(x)$ são todos os números reais, ou seja:

$$\text{Im} = \{f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Isso significa dizer que o conjunto de números que pertencem à imagem estão no intervalo de: $]-\infty, +\infty[$.

Agora, vamos explorar a função $f(x) = \frac{1}{x}$. Seguindo o mesmo processo para encontrar a inversa, vamos escrever a função na forma de equação:

$$y = \frac{1}{x}$$

Agora, vamos trocar a posição de x e y:

$$x = \frac{1}{y}$$

Por fim, vamos isolar y:

$$y = \frac{1}{x}$$

A inversa é $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$. Aqui, o domínio da inversa é todos os números reais exceto o zero (não podemos dividir por zero). Consequentemente, a imagem de $f(x) = \frac{1}{x}$ também são todos os reais, exceto o zero, representado por $]-\infty, 0[U]0, +\infty[$.

Exemplo 3 - Função módulo 25

Finalmente, vamos analisar a imagem da função módulo: $f(x) = |x|$. Para encontrar a inversa, precisamos considerar que calcular o módulo de x é fazer o seguinte:

$$f(x) = \sqrt{(x)^2}$$

Perceba que calcular o módulo de -5 é elevar -5 ao quadrado e depois tirar sua raiz quadrada, ou seja:

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Perceba, que para realizar a análise, existe uma pegadinha nessa função. Isso porque o domínio dessa função permite todos os reais, todavia, a imagem não é de todos os reais. Como assim? Perceba que, se entrarmos com um número negativo no lugar de x, o resultado será positivo, por exemplo:

$$f^{-1}(-3)=\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$$

Então, como na aplicação do número negativo, isso nos remete a um valor positivo, a imagem estará definida somente para os reais positivos, ou seja:

$$\mathrm{Im}=\{f(x)\in\mathbb{R}/f(x)\geq 0\}$$

Vamos olhar para o gráfico para entender melhor:

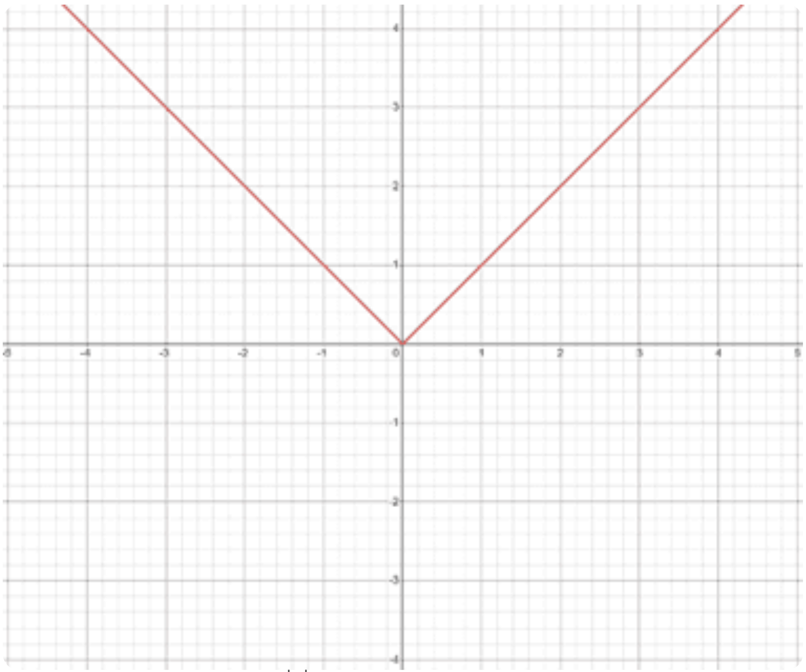


Gráfico: \(\text {Função } f(x)=|x| \text {. }\)

Perceba que, para valores negativos de x, temos valores de y positivos, e para valores de x positivos, temos valores de y positivos, e o zero também participa da função.

Agora que você já leu o exemplo e a solução, vamos concretizar esse aprendizado neste vídeo. Confira!

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Domínio

Confira a definição do domínio da função neste vídeo.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Exemplo 1

Dado o gráfico de uma função, uma forma de encontrar o domínio da função é projetar o gráfico no eixo O_x .

Observe o gráfico da função f :

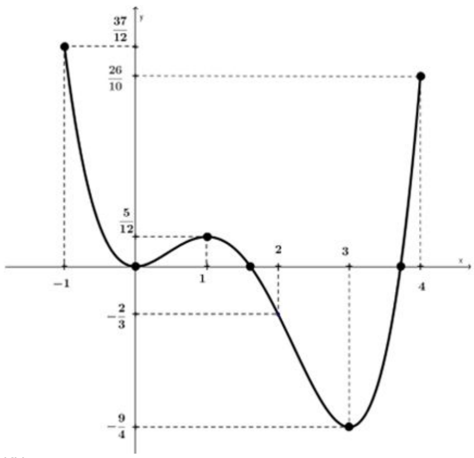


Gráfico: Função \(f\)

O que acontece se projetarmos o gráfico da função no eixo O_x ? Confira no gráfico a seguir.

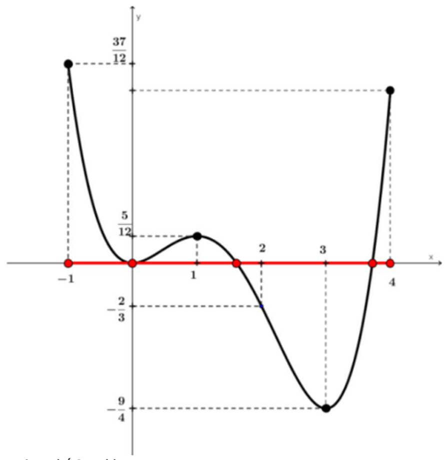


Gráfico: A função no eixo \(O_x\)

Vemos que o domínio da função f é o intervalo no eixo das abscissas indicado em vermelho. Seu domínio é o intervalo fechado: $D(f) = [-1, 4]$

Exemplo 2

Observe o gráfico da função g:

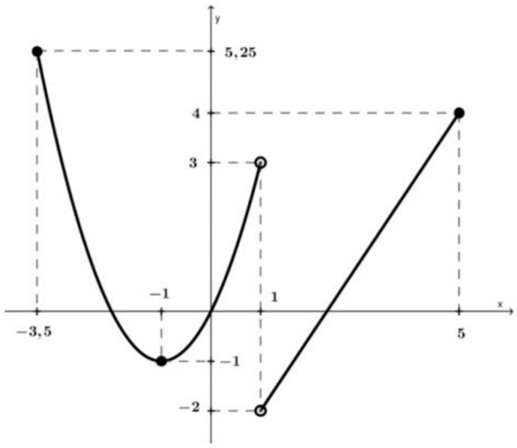


Gráfico: Função g

O que acontece se projetarmos o gráfico da função no eixo O_x ? Confira a seguir.

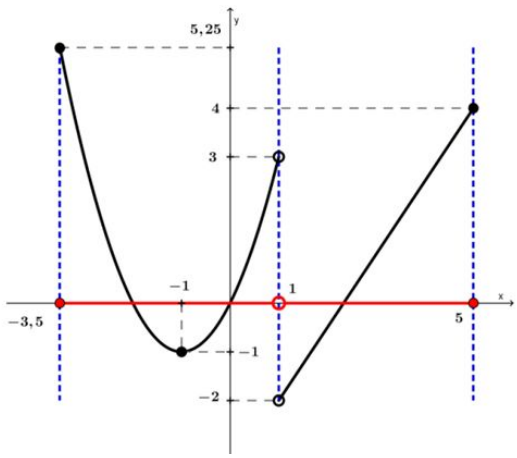


Gráfico: A função g projetada no eixo Ox

Vemos que o domínio da função g é o conjunto no eixo das abscissas indicado em vermelho. Seu domínio é a união de intervalos disjuntos (intervalos cuja interseção é vazia):

$$D(g)=\left[-\frac{7}{2},1\right)\cup(1,5)$$

Domínio da função

Assista ao vídeo e veja mais um exemplo de domínio da função.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Imagem

Exemplo 1

Dado o gráfico de uma função, uma forma de encontrar a imagem da função é projetar o seu gráfico no eixo O_y .

Observe o gráfico da função f :

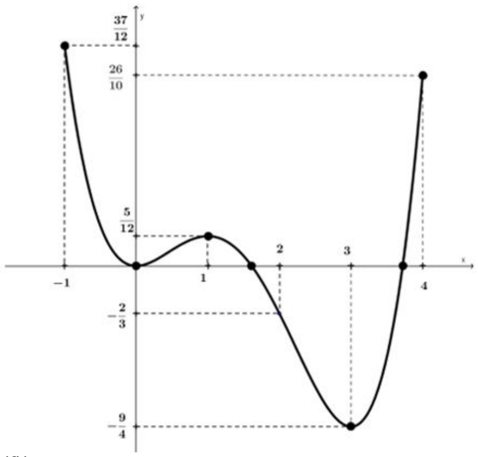


Gráfico: Função \(f\)

O que acontece se projetarmos o gráfico da função no eixo O_y? Veja!

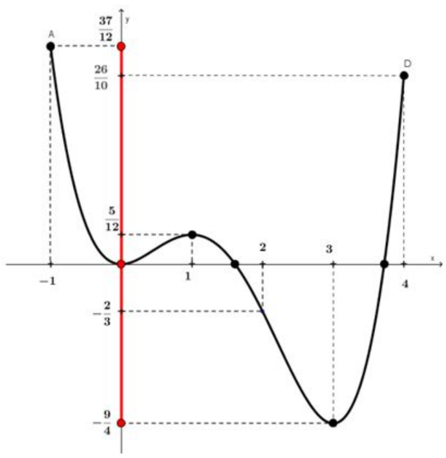


Gráfico: A função no eixo Oy

A imagem da função f é o intervalo fechado indicado em vermelho no eixo O_y . Sua imagem é o intervalo fechado.

$$\left[-\frac{9}{4};\frac{37}{12}\right], \mathrm{Im}(f) = \left[-\frac{9}{4};\frac{37}{12}\right]$$

Exemplo 2

Observe o gráfico da função g:

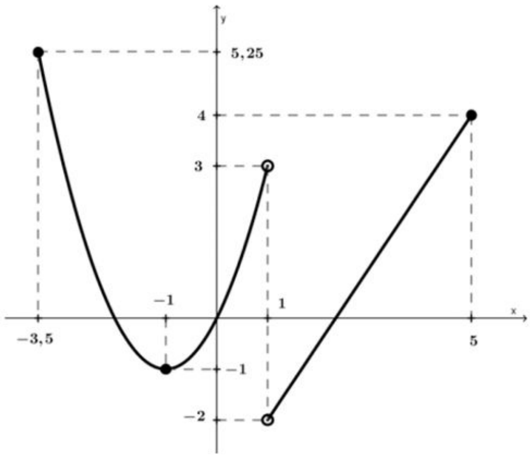


Gráfico: A função g

O que acontece se projetarmos o gráfico da função no eixo O_y? Confira!

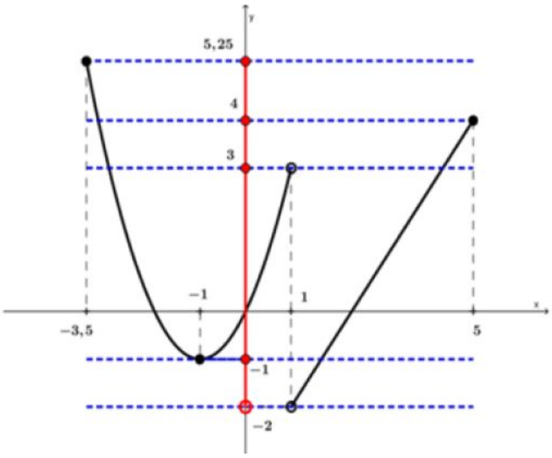


Gráfico: A função g projetada no eixo Oy

Vemos que a imagem da função g é o intervalo indicado em vermelho no eixo O_y . Sua imagem é o intervalo ($-2; 5,25]$.

$Im(g) = (-2; 5,25]$

Exemplo 3

Considere agora o gráfico da função h:

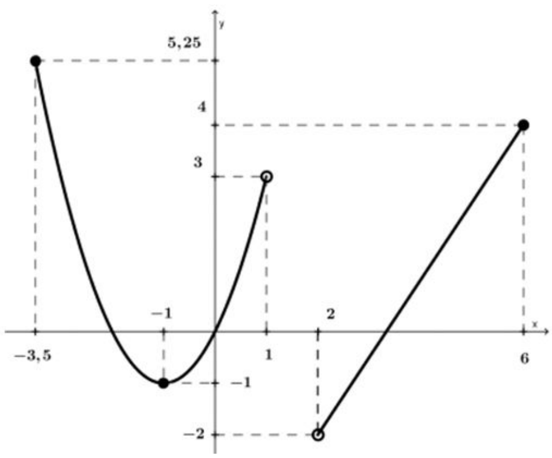


Gráfico: Função h

Se projetarmos o gráfico da função no eixo O_y, vemos que a imagem da função h é o intervalo indicado em vermelho no eixo O_y, conforme mostrado a seguir.

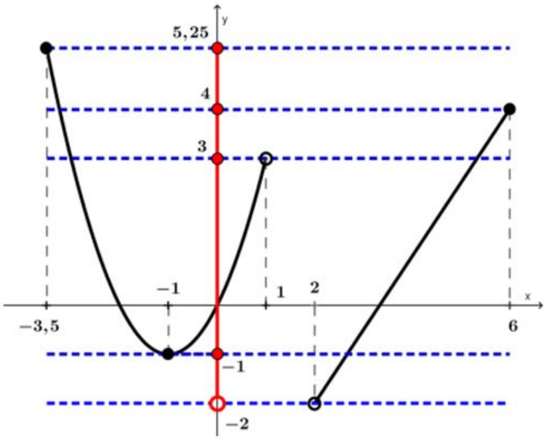


Gráfico: A função no eixo Oy

Sua imagem é o intervalo $(-2; 5,25)$.

$$Im(h) = (-2; 5,25]$$

Em resumo, é possível determinar a imagem de um conjunto de pontos:

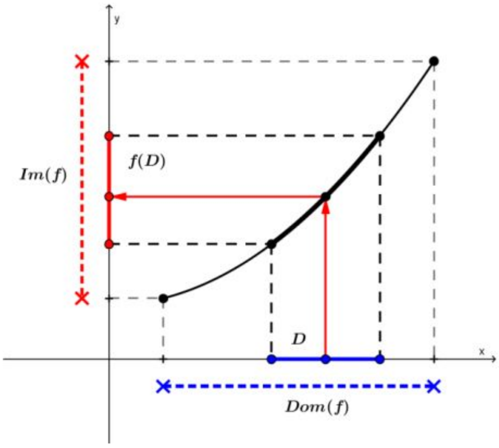


Gráfico: Imagem de um conjunto de pontos

Se D é um subconjunto do domínio da função f (pintado de azul no gráfico), então, a imagem deste subconjunto é dada por $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$.

Exemplo 4

Assista ao vídeo e confira mais um exemplo de imagem da função.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Exemplo 5

Observe o gráfico da função f e o intervalo $[-\,^{2}/_{3};\ ^{5}/_{12}]$ destacado em verde no eixo O_y, que é um subconjunto da imagem de f.

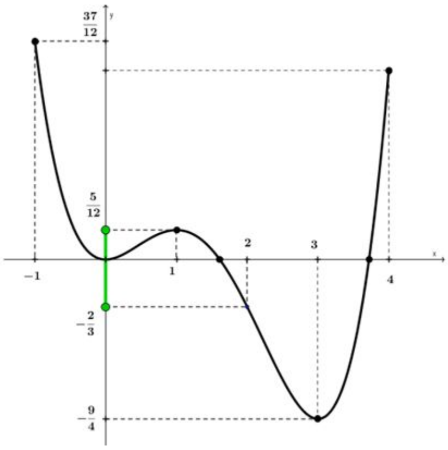


Gráfico: Função f

Ao traçar as retas $y = \,^{5}/_{12}$ e $y = -\,^{2}/_{3}$ de forma horizontal, partindo no eixo O_y , temos:

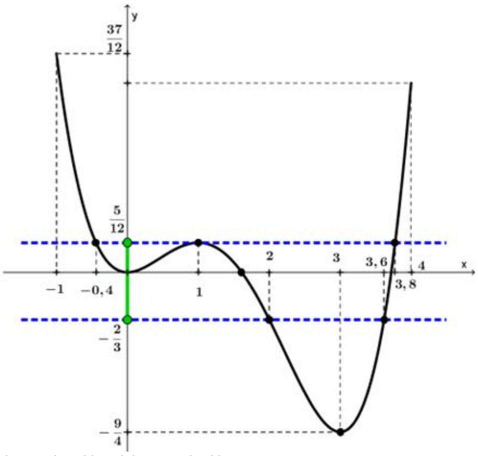


Gráfico: As retas \(y=5 / 12\) e \(y=-2 / 3\)

Se pegarmos a parte do gráfico restrita à região entre as retas $y = -\,^{2}/_{3}$ e $y = \,^{5}/_{12}$, temos:

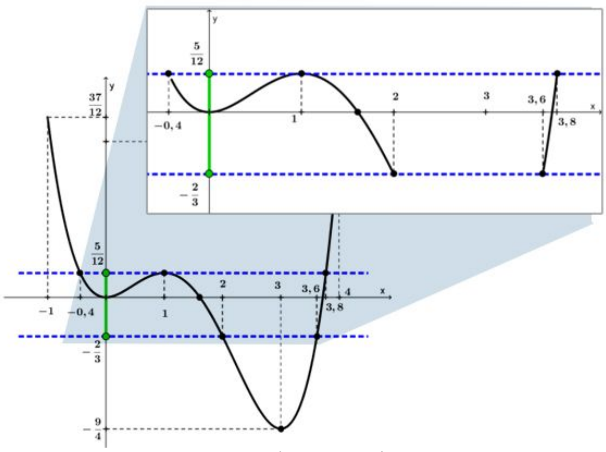


Gráfico: A região entre as retas y = − 2 / 3 e y = 5 / 12

Agora, para descobrirmos a parte do domínio correspondente ao intervalo $[-{}^{2}/_{3};\ {}^{5}/_{12}]$ da imagem, basta projetarmos no eixo O_x. A parte do eixo O_x que nos interessa está destacada em vermelho: [−0,4 ; 2] ∪ [3,6 ; 3,8]:

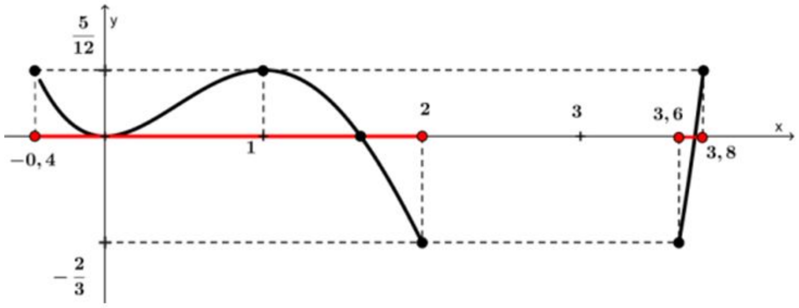


Gráfico: Parte do domínio correspondente ao intervalo [− 2 / 3 ; 5 / 12]

Teoria na prática

A startup InovaTech desenvolveu um aplicativo inovador. O lucro da empresa, em milhares de reais, em função do tempo *t* (em meses) desde o lançamento do aplicativo, é modelado pela seguinte função:

$$L(t) = \frac{t^2+t-12}{t^2-t-12}$$

L(t) representa o lucro da InovaTech no mês *t*. Diante disso, determine:

a) O domínio da função L(t), considerando as restrições do problema. Expresse o domínio como uma união de intervalos.

b) A imagem da função L(t). Expresse a imagem como uma união de intervalos.

Acompanhe a resolução no vídeo a seguir!

O caso InovaTech

Vamos utilizar as análises matemáticas aprendidas, para encontrar neste vídeo, o domínio e a imagem da função que descreve o lucro em função do tempo. Assista!

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Mão na massa

Questão 1

Dona Bete é uma boleira renomada por seus bolos deliciosos. Para facilitar o cálculo do preço das encomendas, ela utiliza a seguinte função matemática:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

x representa o diâmetro do bolo em centímetros (cm) e o resultado de f(x) corresponde ao preço por fatia do bolo (em reais).

Para garantir que a função f(x) calcule corretamente o preço por fatia, qual deve ser o domínio da função, ou seja, quais valores de x (diâmetro do bolo) são permitidos para que o cálculo faça sentido no contexto da situação?

A $x \in \mathbb{R}/3lt;xlt;\infty$

B $x \in \mathbb{R}/-\infty lt;xlt;3$

C $x \in \mathbb{R}$

D $x \in \mathbb{R}/3 \leq xlt;\infty$

E $x \in \mathbb{R}/x \neq 0$

A alternativa A está correta.

Na função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$, a expressão dentro da raiz quadrada precisa ser positiva para evitar raízes quadradas de números negativos, além de garantir que o denominador não seja zero. Assim, $\mathrm{x} - 3gt;0$, ou seja, $\mathrm{x}gt;3$. Portanto, o domínio da função é $x \in \mathbb{R}/3lt;xlt;\infty$.

Questão 2

Um economista está analisando uma função que representa o lucro de uma empresa em função da quantidade de produtos vendidos, dada por:

$$L(x) = \frac{1}{x+2}$$

Aqui, L(x) representa o lucro e x é o número de produtos vendidos. Para garantir que as análises sejam precisas, é necessário entender o domínio dessa função, ou seja, quais valores de x são aceitos.

Qual das opções a seguir apresenta a análise correta do domínio da função L(x)?

A $x \in \mathbb{R}\{nbsp; todososnúmerosreais\}$

B $x \in \mathbb{R}\{-2\}\{\text{todos os números reais, exceto} -2\}$

C $x \in [0, +\infty))$ $\{\text{todos os números reais maiores ou iguais a } 0\}$

D $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)\{\text{ todos os números reais, exceto } -2\}$

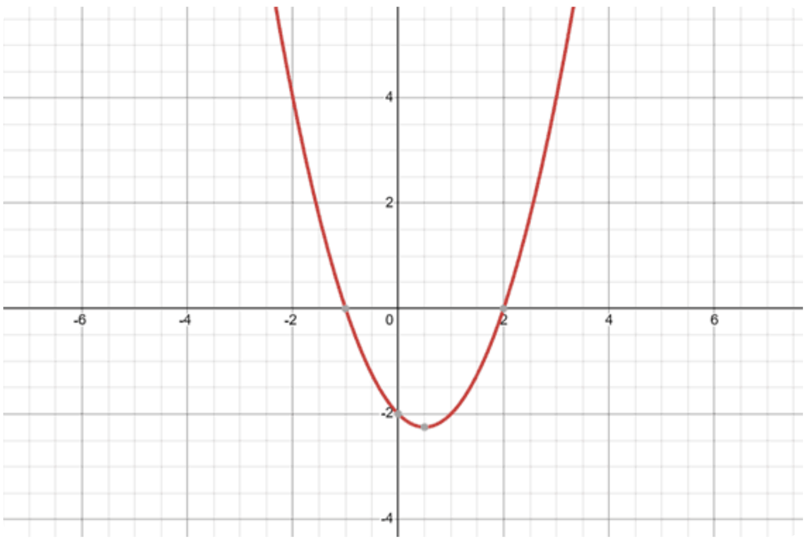
E $x \in [-2, 2])\{\text{ números reais entre } -2 \text{ e } 2, \text{ incluindo os extremos }\}$

A alternativa B está correta.

A função $L(x) = \frac{1}{x+2}$ não está definida para $x = -2$ porque isso resultaria em uma divisão por zero. Portanto, o domínio da função são todos os números reais, exceto -2, já que valores negativos não se aplicam no contexto do lucro da empresa.

Questão 3

Considere a função a seguir.



A função apresentada mostra uma parábola descrita por: $f(x) = x^2 - x - 2$, que é uma função do segundo grau.

Com base na imagem, assinale a alternativa que indica o valor da imagem para o elemento do domínio igual a 2.

A 0

B 1

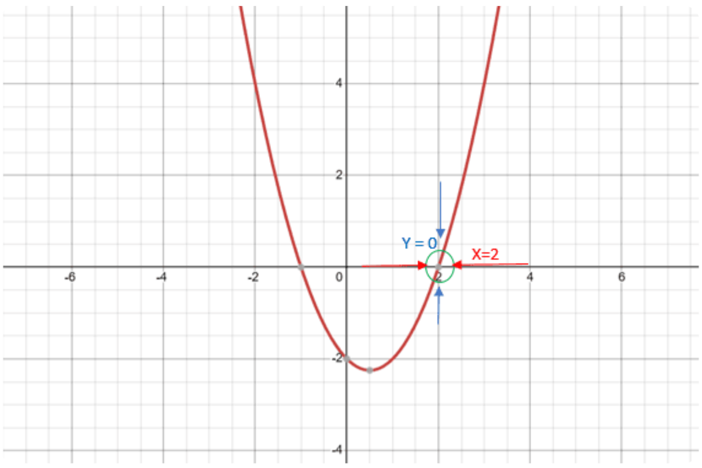
C 2

D 3

E -2

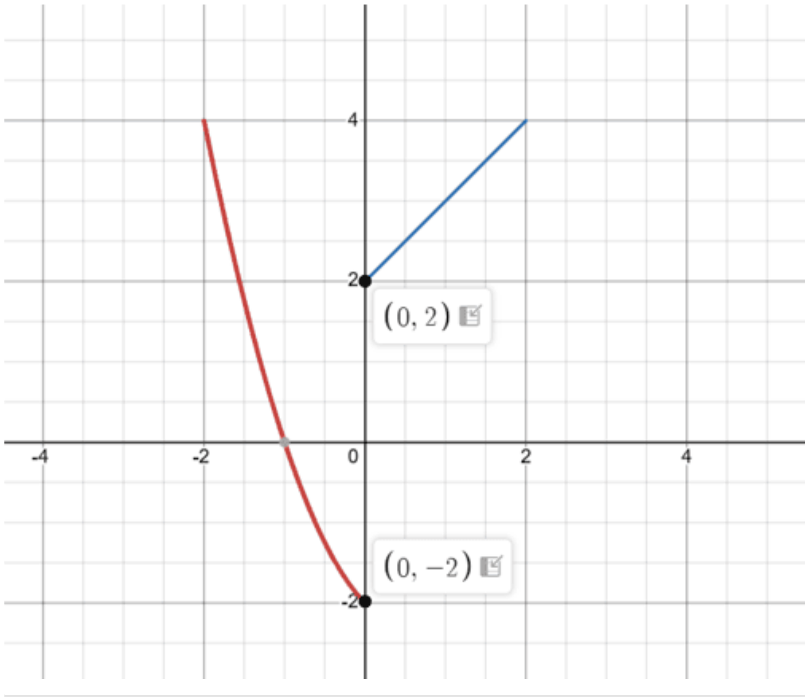
A alternativa A está correta.

No plano cartesiano, os elementos do domínio estão representados no eixo x, e os elementos da imagem, no eixo y. Quando x = 2, y = 0. Veja!



Questão 4

Considere a função matemática apresentada no gráfico a seguir.



Em que coordenada da abscissa ocorre a disjunção dos intervalos da função?

A x = -1

B x = 2

C x = 0

D x = - 2

E x = 4

A alternativa C está correta.

Veja que no gráfico a parte da função em vermelho termina em (0, -2), ou seja, sua abscissa é x = 0, e a parte da função em azul começa em (0, 2), ou seja, sua abscissa é x = 0. Então, a disjunção acontece na abscissa x = 0.

Questão 5

Um contador está desenvolvendo uma planilha para calcular o crescimento de um investimento ao longo do tempo. Para isso, ele usará uma função que deve ter um domínio restrito a valores não negativos, ou seja, $x \geq 0$, representando o tempo em anos.

Qual das opções a seguir apresenta uma função cujo domínio é $x \geq 0$?

A $f(x) = \sqrt{x}$

B $g(x) = \frac{1}{x-2}$

C $h(x) = -x^2 + 5$

D $k(x) = \ln(x+1)$

E $m(x) = x^3 - 3x + 2$

A alternativa A está correta.

A função $f(x) = \sqrt{x}$ está definida para todos os valores de x que são maiores ou iguais a 0, pois a raiz quadrada de um número negativo não é um valor real. As outras opções têm domínios que incluem números negativos.

Questão 6

Um analista financeiro está estudando a variação do preço de uma ação ao longo dos anos, utilizando a função $P(t) = \operatorname{sen}^2(t)$, em que $P(t)$ representa a flutuação do preço da ação em função do tempo t, medido em anos.

Qual das opções apresenta a análise correta sobre o domínio da função e a imagem que ela pode assumir ao longo do tempo?

A O domínio é $t \in R$ ea imagem vai de 0 a 1.

B O domínio é $t \in [0, 2\pi]$ e a imagem vai de -1 a 1.

C O domínio é $t \in [0, 2\pi]$ e a imagem vai de 0 a 1.

D O domínio é $t \in [-\pi, \pi]$ e a imagem vai de -1 a 1.

E O domínio é $t \in [0, \infty)$ e a imagem vai de 0 a 0,5.

A alternativa A está correta.

A função $P(t) = \operatorname{sen}^2(t)$ tem domínio em $t \in R$, já que está definida para todos os valores reais. Os valores que a função pode assumir na função señ (t) variam entre -1 e 1 , mas, como estamos falando de $\operatorname{sen}^2(t)$, os valores negativos se tornam positivos, logo, a imagem passa a variar de 0 a 1.

Verificando o aprendizado

Questão 1

(PETROBRAS - 2008) Considere que f é uma função definida do conjunto D em R por: ƒ(x) = x² − 4x + 8. Sendo Im a imagem de f, é correto afirmar que, se:

A $D = [-2, 0]$, então $\operatorname{Im}(f) = R^+$

B $D = [2, +\infty[$, então $\operatorname{Im}(f) = [0; 4]$

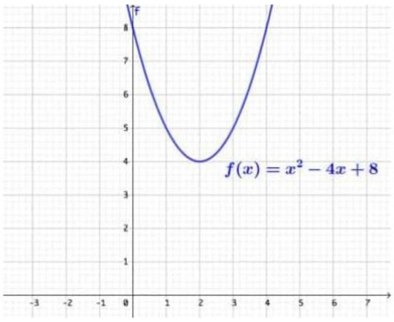
C $D = [2, +\infty[$, então $\operatorname{Im}(f) = R^+$

D $D = [0; 2]$, então $\operatorname{Im}(f) = [4; 8]$

E $D = [-2, 0]$, então $\operatorname{Im}(f) = [4, 8]$

A alternativa D está correta.

O gráfico da função ƒ é dado por:



Vamos analisar cada restrição do domínio da função f.

Note que, se D = [−2, 0], temos que Im(ƒ) = [8, 20].

Se D = [2, +∞[, temos que Im(ƒ) = [4, +∞).

Se D = [0; 2], temos que In(ƒ) = [4 ; 8].

Questão 2

Considere a função f(x) = 120x ÷ (300−x). Podemos afirmar que o domínio da função f é:

A Todo número real x.

B Todo número real x, exceto os números positivos.

C Todo número real x, exceto x = 300.

D Todo número real x, exceto os números negativos.

E Todo número real x, exceto x = 0.

A alternativa C está correta.

A função não está definida para x = 300, pois este número anula o denominador.

Funções injetoras

Conhecendo funções injetoras

Descubra o que é uma função injetora neste vídeo e entenda a importância de conhecer o seu comportamento.

> **Conteúdo interativo**
>
> Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

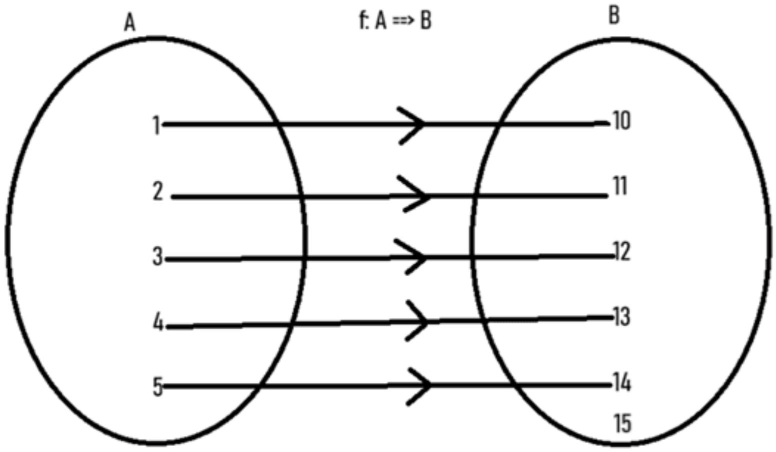
Funções injetoras parece um nome complicado, mas a ideia é bem simples e útil, principalmente quando pensamos em organização e processos em uma empresa.

Imagine que você esteja organizando os funcionários em diferentes equipes para um projeto. Uma função injetora no mundo da matemática é como garantir que cada funcionário (que seria o nosso x) tenha uma única função ou tarefa atribuída (que seria o nosso f(x)), e que funções ou tarefas diferentes sejam sempre atribuídas a funcionários diferentes. Não pode haver dois funcionários fazendo a mesma função se eles são pessoas diferentes.

Formalizando um pouco, mas sem complicação: uma função f é dita injetora (ou injetiva) se, para quaisquer dois números, $a_1 \in a_2$, que fazem parte do domínio da função f , e que são diferentes um do outro $a_1 \neq a_2$, os resultados da função para esses números — ou seja, $f(a_1)$ e $f(a_2)$ — também são sempre diferentes na imagem de f .

Em termos mais práticos ainda, pense assim: se você tem dois inputs diferentes ($a_{-}1$ e a_2), você sempre vai ter outputs diferentes, como: ($f(a_1)$ e $f(a_2)$. É como um sistema de senhas único para cada usuário, cada pessoa (input) tem uma senha diferente (output).

Vamos entender com o auxílio de diagramas. Para isso, vamos repetir: uma função é injetora quando só existe uma única ligação entre domínio e imagem. Nenhum elemento de imagem pode receber mais do que um elemento de domínio, veja!



\(\text { Função injetora de } A \rightarrow B \text {. }\)

Perceba que todos os elementos do domínio (conjunto A) têm um único correspondente na imagem (conjunto B) e que nenhum elemento da imagem tem mais de um elemento do domínio. É, literalmente, "um para cada um".

Vamos explorar três exemplos de funções injetoras, também conhecidas como funções um-para-um.

Atenção

Lembre-se que uma função é injetora se cada elemento da imagem está associado a um único elemento do domínio. Em outras palavras, se , então .

Exemplo 1 - Função fim

Vamos verificar neste exemplo como a função afim $f(x)=3x+2$ é injetora.

Para analisar se uma função é injetora, observamos este gráfico:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para ver mais detalhes da imagem abaixo.

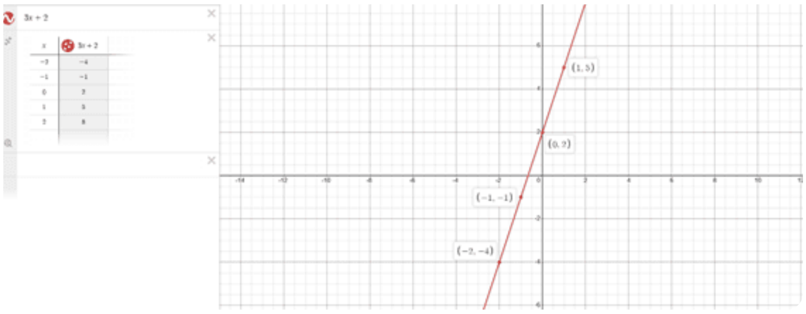


Gráfico: função \(f(x) = 3x + 2\)

Perceba que temos uma reta crescente (que cresce da esquerda para a direita). E que cada elemento de x tem um único correspondente em y, e que cada elemento em y recebe somente um elemento em x. Por isso, essa função afim é injetora.

Observação: funções afins do tipo $f(x)=ax+b$, em que a é diferente de zero, são sempre injetoras. O coeficiente angular a diferente de zero garante que a reta seja inclinada e, portanto, cada valor de y na imagem corresponde a um único valor de x no domínio.

Exemplo 2 - Função exponencial

É uma função do tipo $f(x) = a^x$, em que a é a base e x é o expoente. Para poder verificar que esse tipo de função é injetora, vamos analisar a função: $f(x) = 2^x$. Faremos da mesma forma que fizemos anteriormente. Vamos analisar o gráfico!

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para ver mais detalhes da imagem abaixo.

Gráfico: função $f(x) = 2^x$.

Perceba que, assim como na função afim, temos somente um para um de x e y. E por isso, a função exponencial é uma função injetora.

Exemplo 3 - Função quadrada

Vejamos agora um exemplo de uma função que não é injetora, uma função quadrada do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para isso, vamos analisar o gráfico de $f(x) = ax^2 - x - 12$.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para ver mais detalhes da imagem abaixo.

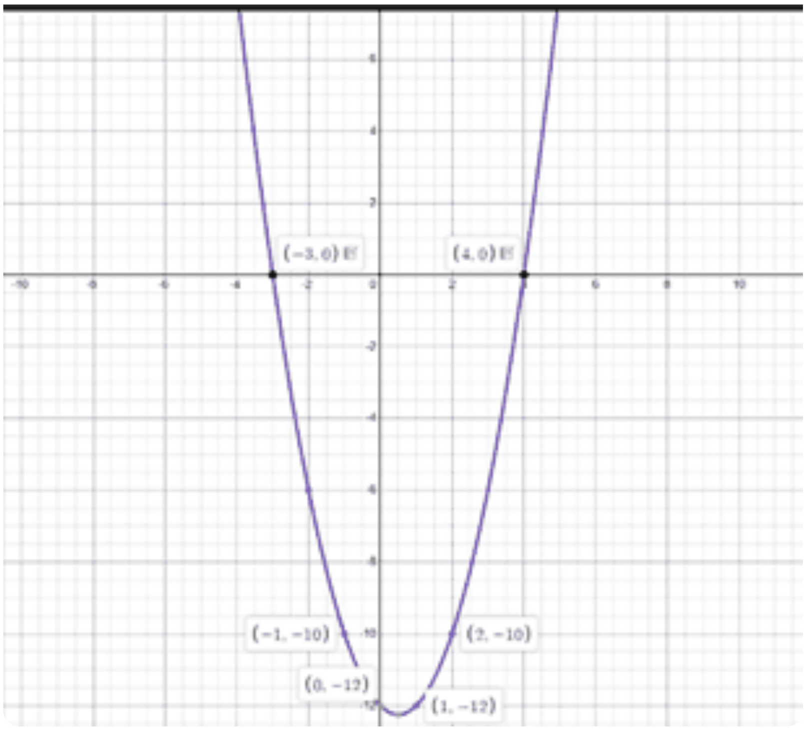


Gráfico: função \(f(x) = ax^2 - x - 12\).

Repare no gráfico que temos alguns exemplos de valores distintos do domínio com a mesma imagem, perceba quando $x = -3, y = 0$ e quando $x = 4, y = 0$ também. Outro exemplo: quando $x = -1, y = -10$ e quando $x = 2, y = -10$.

O fato de existirem elementos distintos do domínio com a mesma imagem faz com que a função não seja injetora.

Funções sobrejetoras

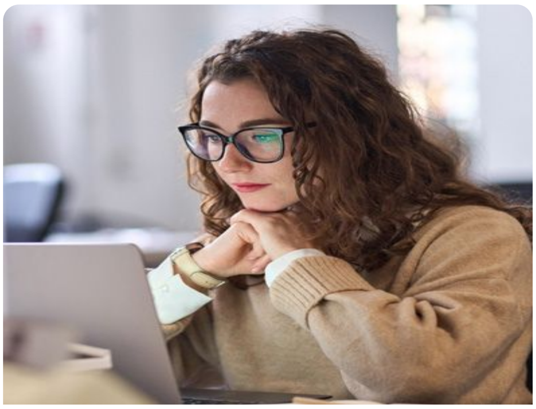
Função sobrejetora

Assista ao vídeo para entender o que é uma função sobrejetora e conferir exemplos práticos que ajudam a identificar se uma função possui ou não essa característica.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

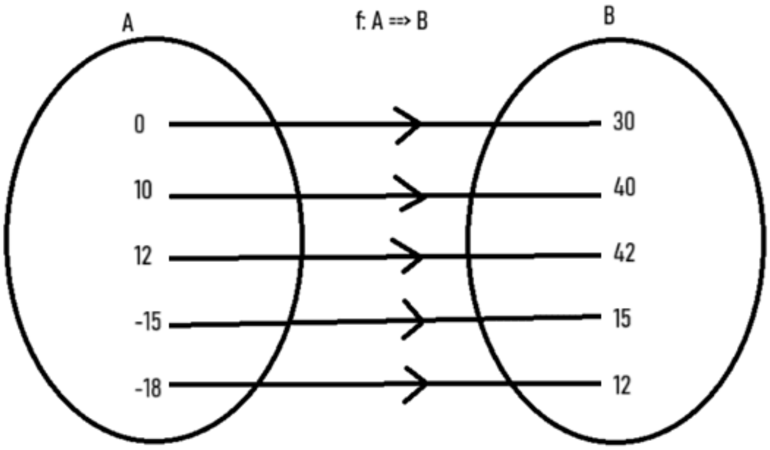
Imagine lançar uma campanha de marketing e descobrir que ela só alcançou uma parte do mercado (público-alvo). Frustrante, não? No universo matemático, as funções também lidam com essa questão de "alcance": como garantir que todos os elementos de um conjunto sejam "atingidos" por uma regra específica? É aqui que entra o conceito de **função sobrejetora**.



Afinal, o que é uma função sobrejetora?

Imagine ter um conjunto de “clientes em potencial” (domínio) e um conjunto de "benefícios do seu produto" (contradomínio). Uma função sobrejetora garante que cada benefício seja relevante para pelo menos um cliente em potencial. Em outras palavras, ninguém fica de fora! A imagem da função (os benefícios realmente relevantes) coincide perfeitamente com o contradomínio (todos os benefícios do produto). Formalmente, uma função $f : A \to B$ é sobrejetora se, para cada elemento b em B (contradomínio), existe pelo menos um $a \, \text{em} \, A$ (domínio), tal que $f(a) = b$.

Em outras palavras, quando o conjunto imagem é igual ao conjunto contradomínio, temos uma função sobrejetora. Vamos ver o diagrama com os balõezinhos para entender melhor:



Representação de uma função sobrejetora.

Nenhum elemento do conjunto B ficou sem ligação, logo, o conjunto imagem é igual ao conjunto contradomínio e ambos são iguais ao conjunto B.

Agora, vamos explorar alguns exemplos para consolidar esse conceito.

Exemplo 1

Para entender o comportamento de uma função sobrejetora, vamos analisar o comportamento de uma função afim do tipo $f(x) = ax + b.$. A função a ser analisada é: $f(x) = 3x - 5$.

Para analisar se o seu contradomínio é igual à sua imagem, observe o gráfico.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para ver mais detalhes da imagem abaixo.

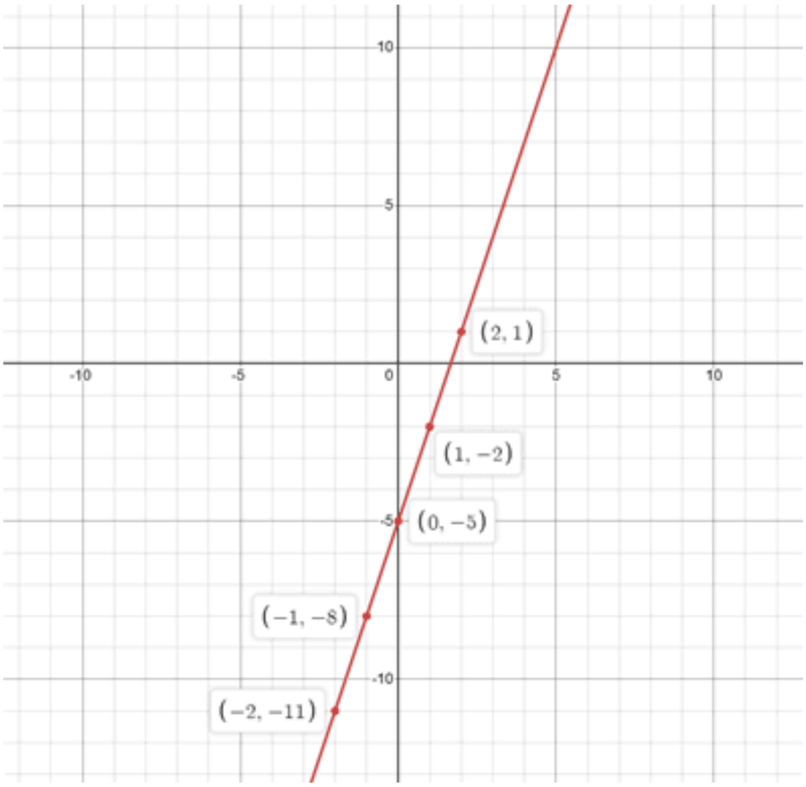


Gráfico: Função afim \(f(x) = 3x - 5\).

Perceba que os domínios da função são todos os reais e, como já vimos, as imagens de qualquer função afim, também são todos os reais. Logo, nesse caso, o conjunto contradomínio é igual ao conjunto imagem, o que faz essa função ser sobrejetora.

Agora, vamos falar de uma função que não apresenta o comportamento sobrejetor: a função quadrática.

Exemplo 2

Vamos analisar a função quadrática $f(x) = x^2$. Observe o gráfico!

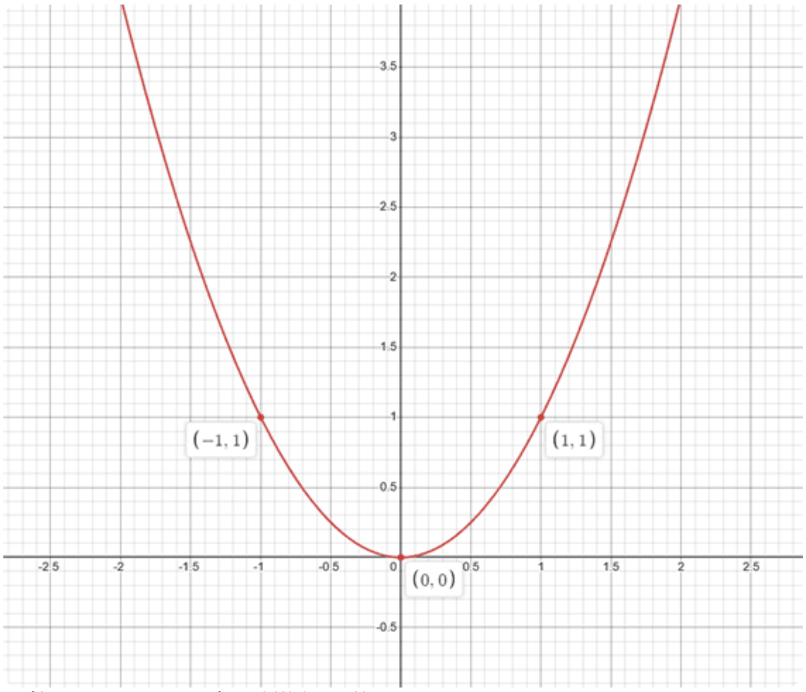
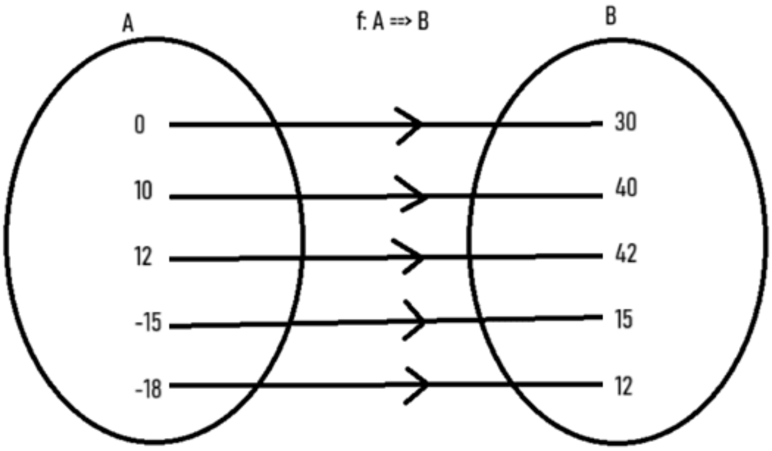


Gráfico: Função quadrática \(f(x)=x^2\).

Perceba que a imagem da função está totalmente acima do eixo x, ou seja, a imagem pertence somente aos reais positivos. Por conta disso, essa função não é sobrejetora, pois os valores negativos do contradomínio não interagem com os elementos do domínio.

Função bijetora

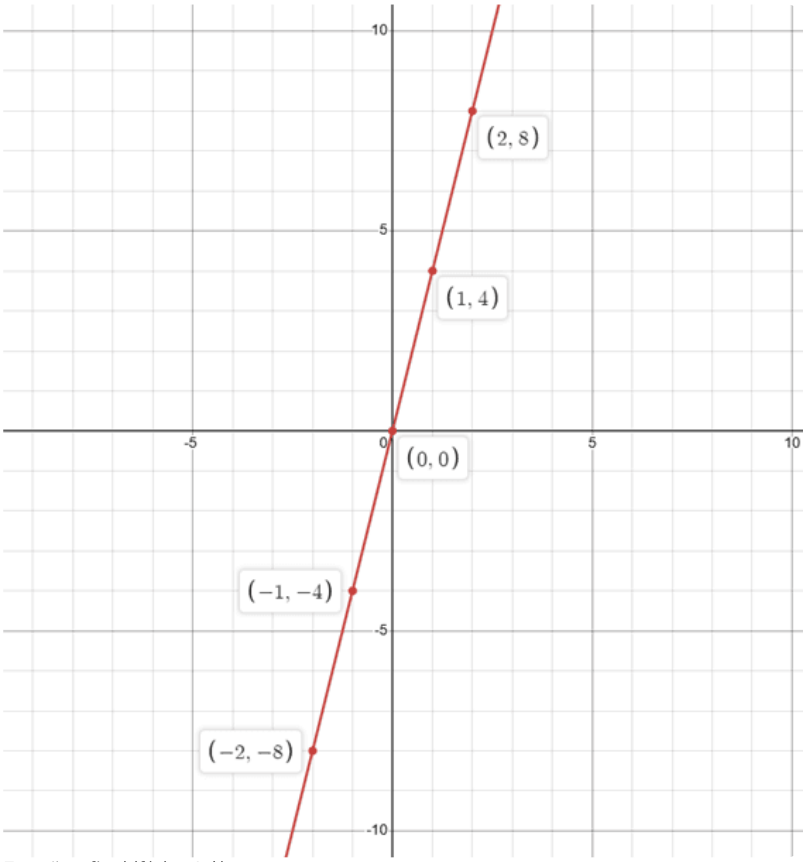
É uma função que é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Ou seja, para cada elemento da imagem, pode haver somente um elemento do domínio, e o conjunto imagem precisa ser igual ao conjunto contradomínio. Demonstrando no diagrama de balõezinhos, temos:



Representação de uma função bijetora.

Confira mais exemplos!

Exemplo 1: Vamos considerar a função afim $f(x) = 4x$. Perceba que essa é uma função afim do tipo $f(x) = ax + b$, em que $b = 0$. O gráfico dessa função nos mostra o seguinte:



Função afim \(f(x) =4x\).

Perceba que o domínio pertence a todos os reais, e a imagem também, uma vez que se trata de uma função afim. Para cada ponto do domínio, temos um ponto de imagem diferente, o que nos faz ver que a função é injetora. Além disso, o conjunto imagem é igual ao conjunto contradomínio, que é o conjunto dos números reais, logo, ela também é sobrejetora. Isso faz dessa função uma função bijetora.

Teoria na prática

Imagine que sua agência de marketing foi contratada para uma campanha publicitária inovadora voltada para o público de meia-idade (45 a 65 anos). O objetivo ambicioso é alcançar 5 milhões de pessoas desse grupo demográfico em apenas 3 dias utilizando anúncios on-line. A equipe de analistas de dados desenvolveu um modelo matemático para prever o alcance da campanha ao longo do tempo, baseado em uma função que leva em conta a viralização do conteúdo e o investimento em impulsionamento.

A função que modela o alcance de pessoas da campanha em função do tempo x (em dias) é dada por:

$$f(x) = 2 \times 10^{2x}$$

Considerando o contexto do problema, defina o domínio, o contradomínio e a imagem, e indique se a função f(x) é injetora sobrejetora ou bijetora. Por fim, diga se a campanha de marketing teve sua meta alcançada.

Após finalizar o caso, acompanhe a resolução no vídeo a seguir!

Analisando uma função exponencial

Veja, neste vídeo, a aplicação de uma função exponencial em uma situação real.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Mão na massa

Questão 1

Uma empresa de marketing digital usa a função $f(x) = x^{10} - x^{-7} + x^8 - x^{-2}$ para prever o ROI de campanhas on-line, em que x é o investimento em milhares de reais (entre 1 e 10) ef(x) é o ROI em porcentagem. Qual opção descreve corretamente o domínio, a imagem, o tipo de função e o ROI para um investimento de R$2.000?

A Domínio: [1, 10], Imagem: [0, ∞), Injetora, $\mathrm{ROI} \approx 1.048.576\%$

B Domínio: (0,10], Imagem: $\mathbb{R}$, Sobrejetora, $\mathrm{ROI} \approx 262.144\%$

C Domínio: [1, 10], Imagem: [0, 10^{10}], Injetora não sobrejetora, ROI $\approx 1.048.576\%$

D Domínio: $[1, \infty)$, Imagem: $\mathbb{R}$, Bijetora, $\mathrm{ROI} \approx 262.144\%$

E Domínio: $[1, 10]$, Imagem: $[0, \infty)$, Sobrejetora, $\mathrm{ROI} \approx 1.000.000\%$

A alternativa C está correta.

Vamos analisar por partes:

- **Domínio**: [1, 10], conforme enunciado.

- **Imagem**: Aproximadamente [0, 10^{10}], considerando o comportamento da função.

- **Tipo**: Injetora (cada x tem um único $f(x)$), não sobrejetora (não cobre todos os reais).

- **ROI** para R$ 2.000:

$$
\begin{aligned}
& f(2) = 2^{10} - 2^{-7} + 2^8 - 2^{-2} \\
& = 1024 - 0,0078125 + 256 - 0,25 \\
& 1024 + 256 = 1280
\end{aligned}
$$

Como o ROI é em porcentagem, multiplicamos por 100: $1280 \cdot 100 \approx 1.048.576\% < br >$

Observação: os termos negativos 2^{-7} = 0,0078125 e 2^{-2} = 0,25 são muito menores que 1, por isso, eles foram dispensados.

Questão 2

Uma empresa de manufatura produz determinado produto. O custo total de produção (em milhares de reais) é dado pela função $C(q) = q^2 + 2q + 5$, em que q representa a quantidade de produtos produzidos (em milhares de unidades). A capacidade máxima de produção da empresa é de 10 mil unidades.

Analise a função $C(q)$ e assinale a opção correta sobre a análise de domínio, imagem e natureza da função:

A Domínio: [0, 10], Imagem: [5, 125], Função Bijetora

B Domínio: [0, 10], Imagem: [5, 125], Função Injetora

C Domínio: $(-\infty, \infty)$, Imagem: [4, ∞), Função Injetora

D Domínio: $[0, 10]$, Imagem: $[0, 125]$, Função Sobrejetora

E Domínio: $[0, \infty)$, Imagem: [5, ∞), Função Sobrejetora

A alternativa B está correta.

O domínio é limitado pela capacidade máxima de produção. A imagem corresponde aos custos para a produção dentro do domínio. A função é injetora, pois, para cada quantidade produzida, há um custo único. Não é sobrejetora porque a imagem não abrange todos os reais positivos.

Questão 3

Uma empresa de varejo utiliza uma função para modelar a demanda (em milhares de unidades) de um produto em função do seu preço p (em reais): $D(p) = 10 - 0,5p$, onde $0 \leq p \leq 20$.

Considerando a função de demanda $D(p)$:

A Domínio: [0, 20], Imagem: [0, 10], Função Bijetora

B Domínio: [0, 20], Imagem: [0, 10], Função Injetora, mas não sobrejetora.

C Domínio: (-∞, ∞), Imagem: (-∞, ∞), Função Bijetora.

D Domínio: [0, 10], Imagem: [0, 20], Função Sobrejetora.

E Domínio: [0, 20], Imagem: [10, 0], Função Injetora

A alternativa B está correta.

O domínio é definido no enunciado e a imagem varia de 10 (para p=0) a 0 (para p=20). Por fim, a função é bijetora, pois é injetora (cada preço tem uma demanda única) e sobrejetora (todos os valores de demanda entre 0 e 10 são atingidos).

Questão 4

Uma empresa de consultoria possui 8 consultores e precisa alocá-los em 6 projetos distintos. Cada consultor pode ser alocado em apenas um projeto e cada projeto precisa de, pelo menos um, consultor.

Modelando a alocação de consultores como uma função que mapeia consultores em projetos,

A a função pode ser injetora e sobrejetora.

B a função pode ser injetora, mas não sobrejetora.

C a função pode ser sobrejetora, mas não injetora.

D a função não pode ser injetora nem sobrejetora.

E a função pode ser bijetora.

A alternativa C está correta.

Como cada projeto precisa de, pelo menos, um consultor, a função é sobrejetora. No entanto, como há mais consultores do que projetos, alguns consultores precisarão ser alocados no mesmo projeto, tornando a função não injetora.

Questão 5

Uma empresa de e-commerce modela seu estoque de um produto pela função E(t) = 1000 - 50t, onde t é o tempo em dias (começando em t=0 com estoque cheio) e E(t) é o número de unidades em estoque. A empresa realiza uma nova encomenda para reabastecer o estoque exatamente quando o nível atinge 200 unidades.

Considerando o período de tempo desde t=0 até o momento exato em que a nova encomenda é feita, qual alternativa descreve corretamente o domínio relevante (D) desse período, a imagem correspondente (I) dos níveis de estoque, e a classificação da função E(t) como uma aplicação de D em I?

A) D = [0, 16], I = [200, 1000], Função Bijetora.

B) D = [0, 20], I = [0, 1000], Função Injetora.

C) D = [0, ∞), I = (-∞, 1000], Função Sobrejetora.

D) D = [0, 16], I = [200, 1000], Função Injetora.

E) D = [0, 20], I = [200, 1000], Função Bijetora.

✓

A alternativa A está correta.

1. **Determinação do Domínio Relevante (D):**
    - O período começa em t=0.
    - O período termina quando o estoque atinge 200 unidades. Precisamos encontrar o valor de t para o qual E(t) = 200.
    - 1000 - 50t = 200
    - 1000 - 200 = 50t
    - 800 = 50t
    - t = 800 / 50 = 16 dias.
    - Portanto, o domínio relevante, que representa o intervalo de tempo do ciclo operacional considerado, é D = [0, 16].

2. **Determinação da Imagem Relevante (I):**
    - A imagem consiste nos valores de E(t) para t no domínio [0, 16].

- No início do período (t=0): E(0) = 1000 - 50(0) = 1000 unidades.
- No final do período (t=16): E(16) = 1000 - 50(16) = 1000 - 800 = 200 unidades.
- Como E(t) é uma função linear decrescente, ela assume todos os valores reais entre 200 e 1000 (inclusive) conforme t varia de 0 a 16.
- Portanto, a imagem relevante, que representa os níveis de estoque durante este ciclo, é I = [200, 1000].

3. **Classificação da Função (E: D → I):**

   - **Injetora (Um-para-um)?** Sim. Como E(t) é uma função linear com inclinação não nula (-50), cada valor de t no domínio [0, 16] corresponde a um único valor E(t) na imagem [200, 1000]. Se t1 ≠ t2, então E(t1) ≠ E(t2).
   - **Sobrejetora (Sobre)?** Sim. Considerando a função como uma aplicação do domínio D = [0, 16] no contradomínio I = [200, 1000], todo elemento da imagem I é atingido por algum elemento do domínio D. Ou seja, para qualquer nível de estoque y entre 200 e 1000, existe um tempo t entre 0 e 16 tal que E(t) = y.
   - **Bijetora?** Sim. Uma função é bijetora se for simultaneamente injetora e sobrejetora (quando o contradomínio considerado é a própria imagem relevante).

     A função E(t), restrita ao ciclo operacional t ∈ [0, 16], mapeia este domínio bijetivamente na imagem [200, 1000]. A alternativa (a) descreve corretamente o domínio, a imagem e a classificação. A alternativa (d) está parcialmente correta (a função é injetora), mas incompleta, pois também é sobrejetora sobre a imagem relevante, tornando-a bijetora. As demais alternativas erram o domínio, a imagem ou ambos.

Questão 6

Uma empresa utiliza a função $P(t) = 100(1 - e^{-0,2t})$ para modelar a produtividade percentual de um novo funcionário em relação ao máximo possível, onde t é o tempo de treinamento em semanas (t ≥ 0).

Considerando o domínio natural da função no contexto do problema (D) e a imagem correspondente dos níveis de produtividade (I), qual alternativa descreve corretamente D, I e a classificação da função P(t)?

A) D = [0, ∞), I = (0, 100), Função Bijetora

B) D = [0, ∞), I = [0, 100), Função Injetora

C) D = (-∞, ∞), I = (0, 100), Função Sobrejetora

D) D = [0, ∞), I = [0, 100], Função Injetora

E) D = (-∞, ∞), I = (-∞, ∞), Função Bijetora

A alternativa B está correta.

1. **Determinação do Domínio (D):**
    - A variável t representa o tempo de treinamento em semanas. No contexto do problema, o tempo não pode ser negativo. Ele começa em t=0 (início do treinamento) e pode, teoricamente, continuar indefinidamente.
    - Portanto, o domínio natural da função neste contexto é D = [0, ∞). Isso elimina as opções (c) e (e).

2. **Determinação da Imagem (I):**
    - A imagem consiste nos valores possíveis de P(t) para t no domínio [0, ∞).
    - No início (t=0): P(0) = 100 $(1 - e^{-0.2.0})$ = 100 $(1 - e^{0})$ = 100(1 - 1) = 0. A produtividade começa em 0%.
    - Conforme t aumenta e tende ao infinito (t → ∞): O termo -0.2t tende a -∞. O termo $e^{(-0.2t)}$ tende a 0.
    - Assim, P(t) tende a 100(1 - 0) = 100. A produtividade se aproxima assintoticamente de 100%, mas nunca a atinge para valores finitos de t, pois $e^{(-0.2t)}$ é sempre maior que zero.
    - Para verificar se a função é crescente, calculamos a derivada: $P'(t) = 100.d/dt(1 - e^{(-0.2t)})$ = $100.(-e^{(-0.2t)}.(-0.2)) = 20.e^{(-0.2t)}$. Como $e^{(-0.2t)}$ é sempre positivo, P'(t) é sempre positivo para t ≥ 0. Isso confirma que a função é estritamente crescente.
    - Como a função começa em P(0)=0 e cresce continuamente, aproximando-se de 100 sem nunca atingi-lo, a imagem (conjunto de valores de produtividade possíveis) é I = [0, 100). Isso elimina as opções (a) (que exclui 0) e (d) (que inclui 100).

3. **Classificação da Função (P: D → ℝ):**
    - **Injetora?** Sim. Como a derivada P'(t) é sempre positiva no domínio [0, ∞), a função P(t) é estritamente crescente. Funções estritamente crescentes (ou decrescentes) são sempre injetoras (um-para-um), pois valores diferentes de t no domínio levarão a valores diferentes de P(t).
    - **Sobrejetora?** Depende do contradomínio considerado. Se o contradomínio for [0, 100), então ela é sobrejetora. Se for [0, 100] ou ℝ, ela não é sobrejetora. A classificação nas opções parece focar nas propriedades intrínsecas da função sobre seu domínio natural.
    - **Bijetora?** Uma função só é bijetora se for injetora e sobrejetora. Como ela é injetora, mas não necessariamente sobrejetora sobre qualquer contradomínio além de [0, 100), "Injetora" é a classificação mais segura e universalmente correta baseada apenas na análise da função e sua derivada.

A função tem domínio [0, ∞) e imagem [0, 100). Ela é estritamente crescente e, portanto, injetora. A alternativa (b) é a única que apresenta corretamente o domínio, a imagem e uma classificação válida (Injetora).

Verificando o aprendizado

Questão 1

Considere a função bijetora f: $[1,+\infty) \to (-\infty, 3]$ definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ e seja (a, b) o ponto de interseção de f com sua inversa f^{-1}. O valor numérico da expressão a + b é

A 2.

B 4.

C 6.

D 8.

E 9.

A alternativa B está correta.

Repare que neste domínio a função é estritamente decrescente. Vamos buscar os pontos em que f encontra a sua inversa localizando as interseções entre f e a função $y = x$ (função identidade). Logo:

$$-x^2 + 2x + 2 = x \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -1$$

Como o domínio de f é o intervalo $[1, +\infty)$, o único valor de x que nos interessa é $x = 2$ e, para este valor, $f(2) = 2$. Assim, o ponto buscado é $(a, b) = (2, 2)$ e então $a + b = 4$.

Questão 2

Considere a função $f : [-1, 2] \to R$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } -1 \leq x \leq 0 \\ (x+1) \div 2, \text{ se } 0 < x \leq 1 \\ -x+2, \text{ se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Nestas condições, é correto afirmar que

A f é sobrejetora.

B ƒ é injetora.

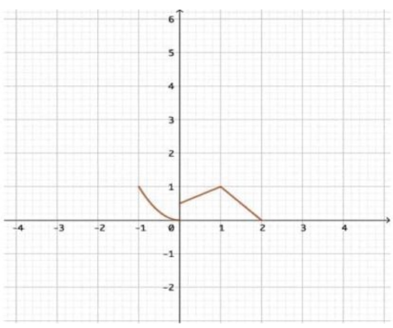
C ƒ é bijetora.

D $\text{Im}(f) = [0, 1]$.

E $D(f) = R$.

A alternativa D está correta.

Observe o gráfico da função f :



Utilizando o teste da horizontal, vemos que a função não é injetora e, consequentemente, não é bijetora. Em contrapartida, $\text{Im}(f) = [0, 1] \neq R$. Logo, a função f não é sobrejetora.

Comportamento das funções crescentes e decrescentes

Vamos analisar neste vídeo como o domínio e a imagem das funções se comportam, e como elas podem ser classificadas em crescente e decrescente.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

As funções crescentes e decrescentes são conceitos fundamentais na análise do comportamento de funções. Elas descrevem como os valores da função mudam em relação às mudanças na variável independente.

Uma função $f(x)$ é dita crescente em um intervalo se, para quaisquer dois pontos x_1 e x_2 nesse intervalo, com $x_1 lt; x_2$, temos $f\left(x_1\right) lt; f\left(x_2\right)$.

Em termos mais simples, uma função crescente é aquela em que o valor da função aumenta à medida que o valor de x aumenta. Ou seja, ela cresce, da esquerda para a direita. Já a função decrescente, decresce da esquerda para a direita, como podemos ver nos exemplos a seguir.

Funções crescentes:

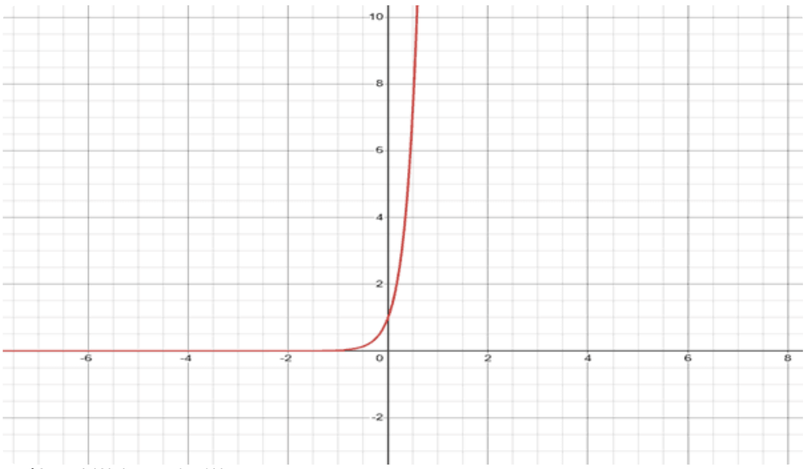


Gráfico: \(f(x) = e^{4x}\)

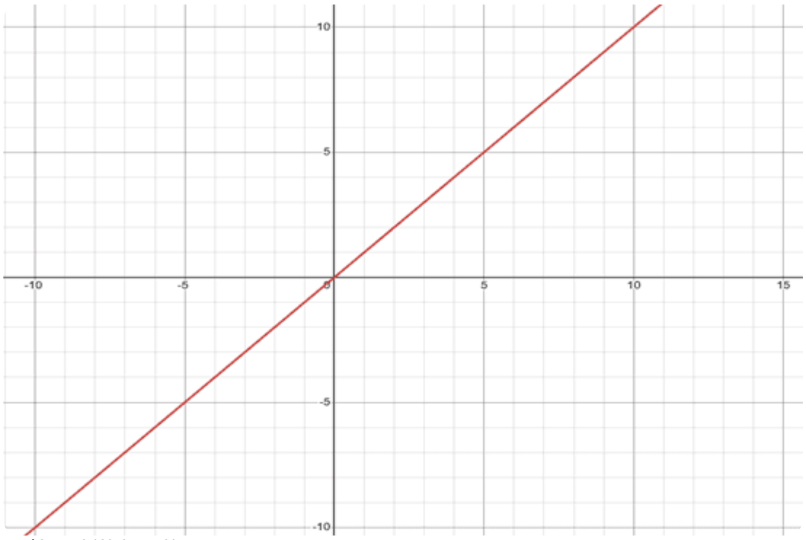


Gráfico: \(f(x) = x\)

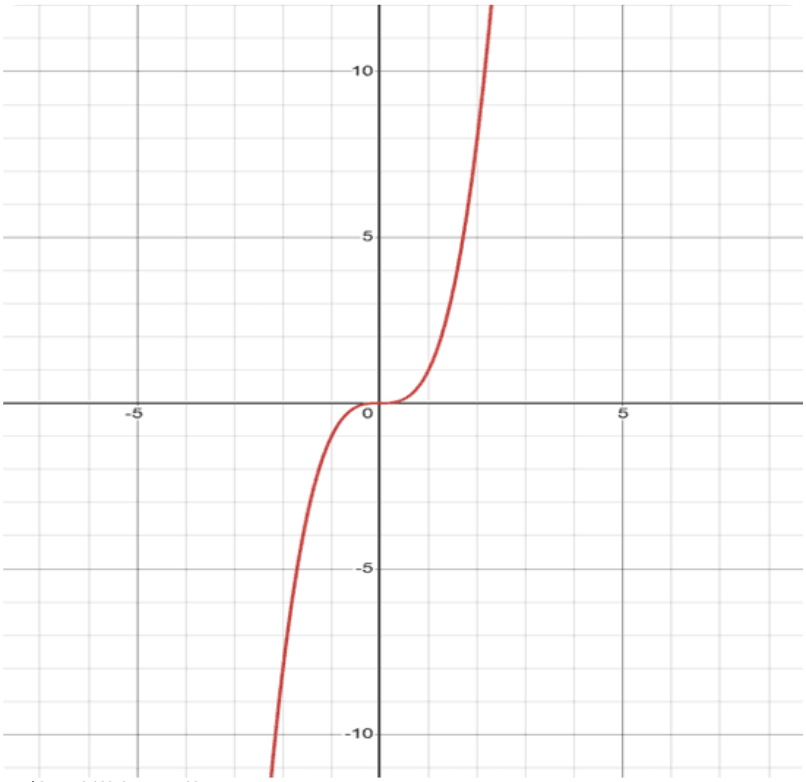


Gráfico: \(f(x) = x^3\)

Funções decrescentes:

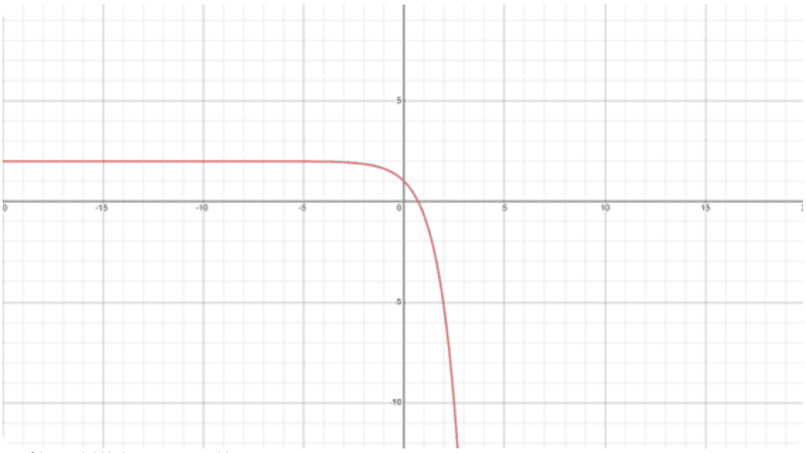


Gráfico: \(f(x) = 2 - e^x\)

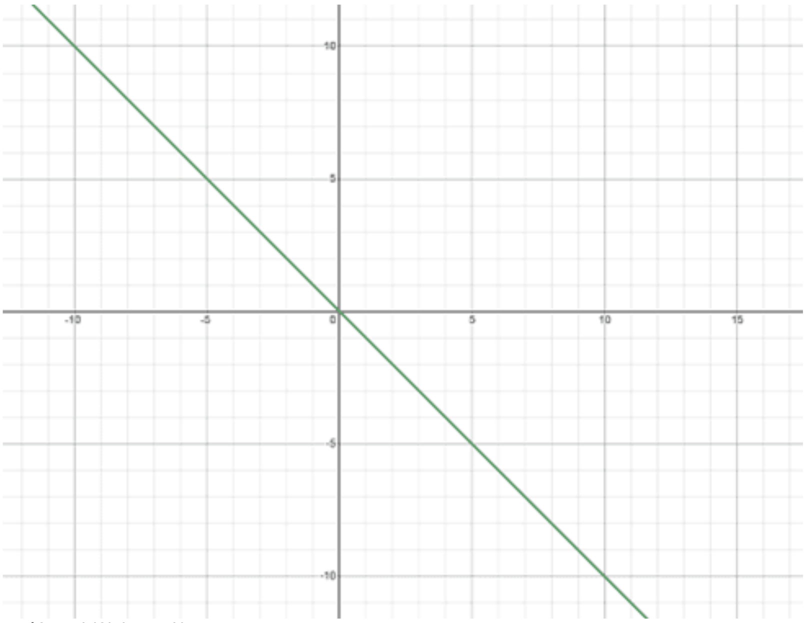


Gráfico: \(f(x) = -x\)

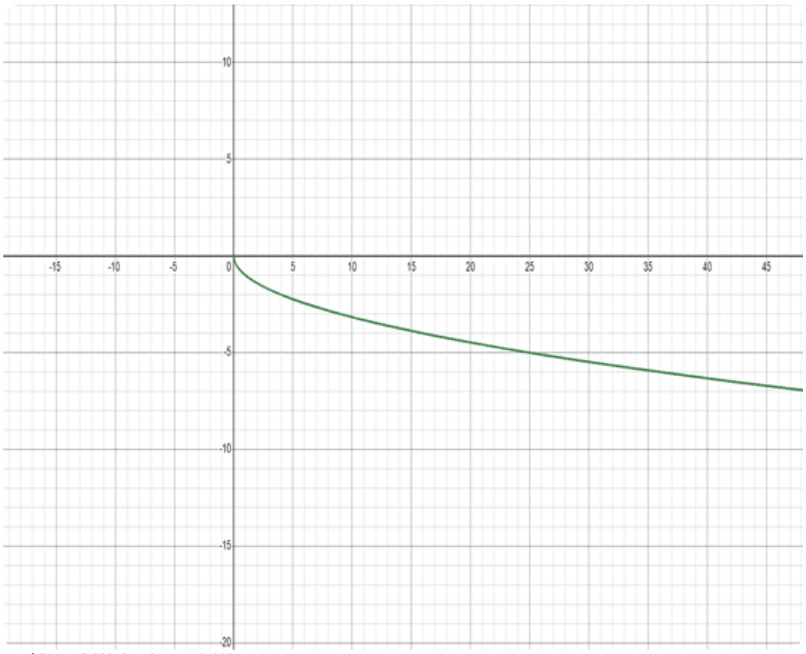


Gráfico: \(f(x)=-\sqrt{x}\)

A identificação de funções crescentes e decrescentes é importante para entender o comportamento geral de uma função, o que é particularmente útil em várias aplicações, como análise de tendências em economia, taxas de crescimento em biologia e otimização em engenharia.

Exemplos de funções crescentes e decrescentes

Vamos ver neste vídeo quatro exemplos que ilustram as funções crescentes e decrescentes.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Vejamos alguns exemplos que nos ajudam a elucidar as funções crescentes e decrescentes de forma prática!

Exemplo 1 - Função crescente: curva de aprendizagem

$$\text{função: } P(t) = 100 - 80e^{-0,2t}$$

Uma empresa de desenvolvimento de software contratou um novo programador. O gerente de projetos usa esta função para prever a produtividade do funcionário ao longo do tempo.

- No início (t = 0), P(0) = 20%, indicando que o novo funcionário começa com 20% da produtividade máxima.
- Após 3 meses (t = 3), P(3) ≈ 60%, mostrando um aumento significativo.
- Após 12 meses (t = 12), P(12) ≈ 91%, indicando que o funcionário está próximo da produtividade máxima.

O gerente pode usar essas informações para planejar alocações de projetos, definir expectativas realistas e programar treinamentos adicionais se necessário.

Exemplo 2 - Função decrescente: depreciação de equipamentos

$$\text{função: } V(t) = 50000 \cdot 0,85^t$$

Uma empresa de manufatura comprou uma máquina de corte a laser por $50.000. O contador usa essa função para calcular o valor contábil da máquina ao longo do tempo.

- No momento da compra, (t = 0), V(0) = $50.000.
- Após 1 ano, (t = 1), V(1) = $42.500.
- Após 5 anos, (t = 5), V(5) ≈ $21.300.

  O CFO pode usar essas informações para decidir quando é mais vantajoso para substituir o equipamento, considerando o custo de manutenção *versus* o valor residual.

Exemplo 3 - Função crescente: crescimento de receita com marketing digital

$$\text{função: } R(x) = 10000 * (1 + 0,05x)^2$$

Uma startup de e-commerce está considerando aumentar seu investimento em marketing digital. O CMO usa essa função para projetar o impacto na receita mensal.

- Com o investimento atual (x = 0), R(0) = $10.000 de receita mensal.
- Com $5.000 adicionais, (x = 5), R(5) ≈ $16.900.
- Com $10.000 adicionais, (x = 10), R(10) ≈ $25.000.

O CMO pode usar esses dados para justificar o aumento no orçamento de marketing, mostrando o potencial retorno sobre o investimento.

Exemplo 4 - Função decrescente: custo unitário com economia de escala

função: C(q) = 50 + 1000/q

Uma fábrica de eletrônicos está analisando como o aumento na produção afeta o custo unitário. O gerente de operações usa essa função para otimizar a produção:

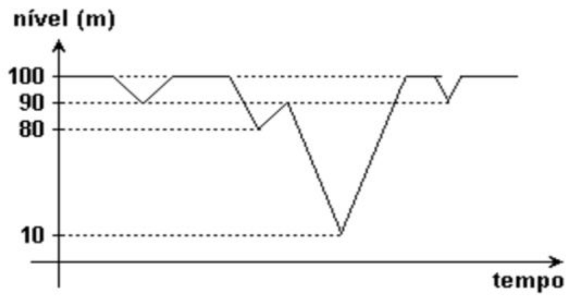
- Produzindo 1.000 unidades (q = 1), C(1) = $1.050 por unidade.
- Produzindo 5.000 unidades (q = 5), C(5) = $250 por unidade.
- Produzindo 10.000 unidades (q = 10), C(10) = $150 por unidade.

O gerente pode usar essas informações para determinar o nível ideal de produção, equilibrando custos unitários mais baixos com a demanda do mercado e a capacidade de armazenamento.

Verificando o aprendizado

Questão 1

(Adaptada de: UFPE - 2017) No gráfico a seguir, temos o nível da água armazenada em uma barragem ao longo de três anos:



De acordo com o gráfico, podemos afirmar que

A o nível de 70 m foi atingido uma única vez.

B o nível da água armazenada cresce em todo tempo.

C o nível da água armazenada é estritamente decrescente.

D o nível de 40 m foi atingido 2 vezes nesse período.

E o nível de 20 m não foi atingido nenhuma vez nesse período.

A alternativa D está correta.

Traçando uma reta horizontal paralela ao eixo x (tempo), vemos que o nível de 40 m foi atingido 2 vezes no período de 3 anos. Isso já mostra que a função, cujo gráfico tem a representação da figura, não é injetora. Além disso, como existem oscilações no nível da água armazenada, em alguns instantes ela cresce e em outros decresce. Assim, a função em questão não é crescente nem decrescente.

Questão 2

Uma função $f : R_+ \to R_+$ é crescente e satisfaz a seguinte condição: $f(3x) = 3f(x)$, para todo $x \in R_+$.

Se $f(9) = 27$, qual o valor de $f(1)$?

A 1

B 2

C 3

D 4

E 5

A alternativa C está correta.

Note que:

$$27 = f(9) = f(3 \times 3) = 3 \times f(3 \times 1) = 3 \times 3 \times f(1)$$

Logo, temos:

$$f(1) = 27/9 = 3$$

Exemplo de função periódica

Confira no vídeo uma aplicação de função periódica.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Função periódica

Definição

Uma função é considerada periódica quando existe um número real $T > 0$, tal que $f(x + T)$, para todo x no domínio da função.

O menor dos valores de $T > 0$, para os quais a propriedade é verificada, é chamado de período da f.

Se uma função **f** é periódica de período **T**, então, f também é periódica de período **nT**, em que **n** $\in$ N, já que:

$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = \ldots = f(x+nT)$$

Exemplo 1

Considere a função f do gráfico a seguir, que corresponde ao **eletrocardiograma** de uma pessoa saudável:

Eletrocardiograma

Exame que tem o objetivo de detectar se existe alguma falha na condução elétrica pelo coração.

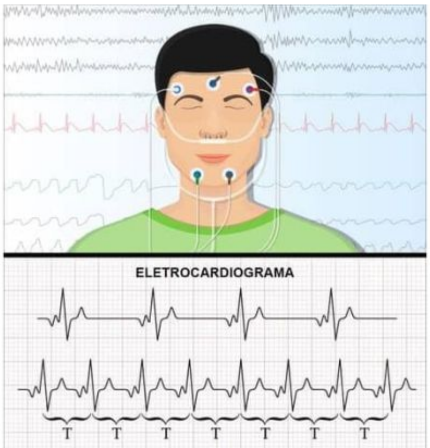


Gráfico: Função f

Observe que o padrão de repetição ocorre em intervalos de comprimento **T**, e não em intervalos de comprimento menor. Assim, a função f é uma função periódica de período **T**.

Exemplo 2

Considere a função:

$$f: N \rightarrow Z, \text{ tal que } f(x) = (-1)x$$

A tabela a seguir mostra o valor da função f para os valores de x de 0 a 5.

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
f(x)	$(-1)^0 = 1$	$(-1)^1 = -1$	$(-1)^2 = 1$	$(-1)^3 = -1$	$(-1)^4 = 1$	$(-1)^5 = -1$

Tabela: Valor da função *f* para os valores de *x* de 0 a 5
Adaptado de Loisi Carla Monteiro Pereira

Se x é um número par, f(x) = 1. Se x é um número ímpar, f(x) = −1.

> Essa é uma função periódica de período 2. Por quê?

Ora, quando x varia duas unidades, o valor da função se repete, ou seja:

$$f(x) = f(x + 2) = f(x + 4) = f(x + 6) = . . .$$

Dessa forma, podemos afirmar que o período dessa função é 2.

Exemplo 3

Acompanhe neste vídeo as funções seno, cosseno e tangente.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Considere a função f(t) = sen(t) e P um ponto no ciclo trigonométrico.

Imagine que o ponto P se movimenta no ciclo no sentido anti-horário, a partir da posição (1, 0) e dá uma volta completa, ângulo t varia de 0 até 2π(pi).

Pensando no ciclo, é possível percebe que:

Quando o ângulo *t* cresce de	O valor *f(t) = sen(t)*
0 a *π(pi) ÷ 2*	Cresce de *0* a *1*
π(pi) ÷ 2 a *π(pi)*	Descresce de *1* a *0*
π(pi) a *3π(pi) ÷ 2*	Descresce de *0* a *−1*

Quando o ângulo *t* cresce de	O valor *f(t) = sen(t)*
3π(pi) ÷ 2 a *2π(pi)*	Cresce de *−1* a *0*

Tabela: A função *f(t) = sen(t)* e o ângulo *t*
Adaptado de Loisi Carla Monteiro Pereira

Representação gráfica do exemplo 3

Confira no vídeo a representação.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Exemplo 4

O fluxo de ar através da traqueia é uma função periódica do tempo x e ocorre em ambos os sentidos dos pulmões (inspiração e expiração).

O fluxo pode ser representado pela função:

f(x) = A sen(z x)

Na qual constatamos que:

- A = fluxo máximo durante a expiração e inspiração.
- z = período respiratório.
- z = 2π(pi) ÷ T → T = o tempo que o indivíduo leva para fazer um ciclo completo.

A função f é, certamente, uma aproximação, pois T varia de indivíduo para indivíduo. Mas estudos experimentais mostram que é uma boa aproximação da realidade. Observe o seguinte gráfico:

Gráfico: A = 1 , T = 1 / 4 , A = 2 , T = 1 / 3

Verificando o aprendizado

Questão 1

Sendo ƒ: R → R uma função periódica de período 2, podemos afirmar que

A a função $g(x) = f(2x)$ é periódica de período 4.

B a função $g(x) = f(2x)$ é periódica de período 1.

C a função $h(x) = f(x/2)$ é periódica de período 1.

D a função $h(x) = f(x + q)$, sendo q uma constante positiva, não é periódica.

E a função $h(x) = f(x/2)$ não é periódica.

A alternativa B está correta.

Note que a função $g(x) = f(2x)$ é periódica de período 1, pois:

$g(x + 1) = f(2(x + 1)) = f(2x + 2) = f(2x) = g(x)$

A função $h(x) = f(x/2)$ é periódica de período 4.

A função $h(x) = f(x + q)$ é periódica de período 4.

Questão 2

Considere que a função $f : [4, +\infty[\to [-3, 7]$ seja periódica com período 6 e seja estritamente crescente no intervalo [4, 10]. Logo, podemos afirmar que

A $f(10) = f(25)$ e $f(4) < f(8)$.

B $f(12) = f(24)$ e $f(15) < f(16)$.

C $f(15) = f(21)$ e $f(21) < f(22)$.

D $f(18) = f(24)$ e $f(28) < f(27)$.

E $f(20) = f(11)$ e $f(24) < f(25)$.

A alternativa D está correta.

Veja que $f(24) = f(18 + 6) = f(18)$, pois f é periódica de período 6.

Além disso, $f(28) = f(4) = -3$, pois f é sobrejetora e estritamente crescente em $[4, 10)$,

e também $f(27) = f(9) > f(4)$. Assim, $f(28) < f(27)$.

Considerações finais

No estudo das funções reais de variável real, você pôde observar que a descrição de problemas do cotidiano é realizada com o auxílio das funções.

O entendimento das funções reais de variável real requer aprender, de maneira mais aprofundada, a determinar o domínio e a imagem de alguns tipos de funções algébricas, bem como reconhecer geometricamente quando a função é injetora, sobrejetora e bijetora.

Para isso, é muito importante que você faça todos os exercícios propostos e estude bem os exemplos apresentados para compreender melhor o conteúdo.

Explore +

Explore estes recursos para enriquecer seus estudos:

- GeoGebra: Use o aplicativo on-line para criar representações gráficas interativas e visualizar funções de forma prática.
- Portal OBMEP do Saber: Acesse conteúdos que ampliam a sua visão sobre matemática aplicada.

Agora, mergulhe nestes exemplos disponíveis no GeoGebra:

- Na obra Desenho da função seno, de André Borges, você encontrará a construção do gráfico da função seno, que permite visualizar de maneira clara o comportamento dessa função.
- Já em Duração do dia, de Paulo Correia, descubra um exercício interessante que apresenta como as horas de sol variam ao longo do ano em diferentes regiões do planeta — uma ótima oportunidade para perceber como a matemática dialoga com fenômenos naturais.

Referências

BRASIL. **Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.** Projeção da população do Brasil e das Unidades da Federação. Brasília: IBGE, 2008.

DELGADO GÓMEZ, J. J. **Pré-cálculo.** Rio de Janeiro: CEDERJ, 2002. v. 4.

FOMIN, D. A. **Círculos matemáticos.** Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar I.** São Paulo: Atual, 2013. v. 1.

LIMA, E.; CARVALHO, P. E. W.; MORCAGO, C. **A Matemática do Ensino Médio.** 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1.

LUCENA, M. **Guerra às sacolinhas.** Galileu, n. 225, 2010.

MAESTRI, R. **Algumas boas notícias com algumas não tanto da covid-19.** Jornal GGN, mar. 2020.

STEWART, J. **Cálculo. 5.** ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. v. 1.

COVID-19: que países conseguiram contrariar a curva do coronavírus? Visão Saúde, 2020. Consultado em 10 abr. 2025.