ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับปัญญาประดิษฐ์

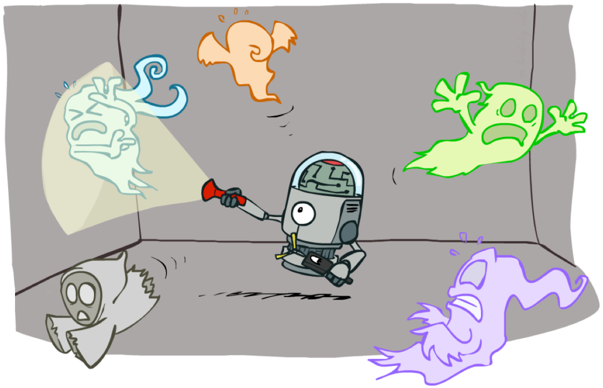
บรรยายครั้งที่ 6: การให้เหตุผลข้ามเวลา

ผศ. ดร. อิทธิพล ฟองแก้ว
ittipon@g.sut.ac.th

วันนี้

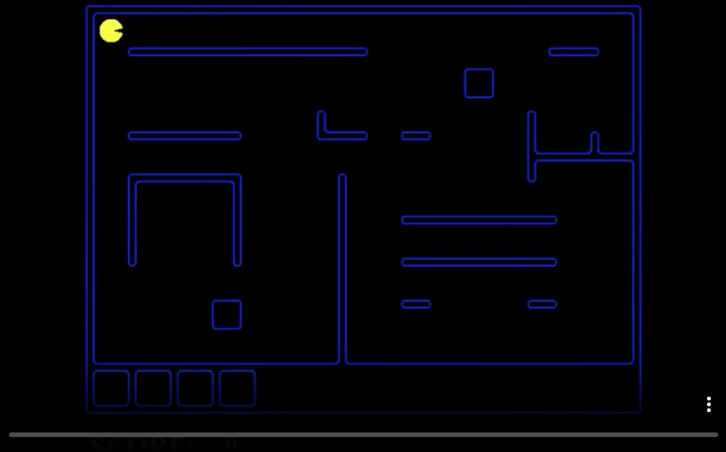
คงสถานะความเชื่อ (belief state) เกี่ยวกับโลก และอัปเดตเมื่อเวลาผ่านไปและมีหลักฐานใหม่เข้ามา

- แบบจำลองมาร์คอฟ (Markov models)
  - กระบวนการมาร์คอฟ (Markov processes)
  - งานการอนุมาน (Inference tasks)
  - แบบจำลองมาร์คอฟแบบซ่อนเร้น (Hidden Markov models)
- ตัวกรอง (Filters)
  - ตัวกรองคาลมาน (Kalman filter)
  - ตัวกรองอนุภาค (Particle filter)



อย่ามองข้ามการบรรยายนี้!

ที่มา: CS188, UC Berkeley.



Pacman แก้แค้น: จะใช้ประโยชน์จากค่าที่อ่านได้จากโซนาร์ได้อย่างไร?

ที่มา: CS188, UC Berkeley.

แบบจำลองมาร์คอฟ (Markov models)

การสร้างแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงของเวลา

เราจะพิจารณาโลกว่าเป็นชุดของช่วงเวลาที่ไม่ต่อเนื่อง (discrete) ซึ่งแต่ละช่วงเวลาประกอบด้วยชุดของตัวแปรสุ่ม:

- $\mathbf{X}_t$ แทนเซตของตัวแปรสถานะที่ไม่สามารถสังเกตได้ (unobservable) ณ เวลา t
- $\mathbf{E}_t$ แทนเซตของตัวแปรหลักฐานที่สามารถสังเกตได้ (observable) ณ เวลา t

เราจะระบุ

- ค่าก่อน (prior) $\mathbf{P}(\mathbf{X}_0)$ ที่กำหนดสถานะความเชื่อเริ่มต้นของเราเกี่ยวกับตัวแปรสถานะที่ซ่อนอยู่
- แบบจำลองการเปลี่ยนสถานะ (transition model) $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{0:t-1})$ (สำหรับ $t > 0$) ที่กำหนดการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสถานะล่าสุด โดยพิจารณาจากค่าก่อนหน้า (ที่ไม่ได้สังเกต)
- แบบจำลองเซ็นเซอร์ (sensor model) $\mathbf{P}(\mathbf{E}_t|\mathbf{X}_{0:t}, \mathbf{E}_{0:t-1})$ (สำหรับ $t > 0$) ที่กำหนดการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรหลักฐานล่าสุด โดยพิจารณาจากค่าก่อนหน้าทั้งหมด (ทั้งที่สังเกตได้และไม่ได้สังเกต)

กระบวนการมาร์คอฟ (Markov processes)

ข้อสมมติของมาร์คอฟ (Markov assumption)

สถานะปัจจุบันของโลกขึ้นอยู่กับสถานะก่อนหน้าทันทีเท่านั้น กล่าวคือ $\mathbf{X}_t$ ขึ้นอยู่กับเซตย่อยที่มีขอบเขตของ $\mathbf{X}_{0:t-1}$ เท่านั้น

กระบวนการสุ่มที่สอดคล้องกับข้อสมมตินี้เรียกว่า กระบวนการมาร์คอฟ (Markov processes) หรือ ลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov chains)

กระบวนการมาร์คอฟอันดับหนึ่ง (First-order Markov processes)

กระบวนการมาร์คอฟที่

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{0:t-1}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{t-1})$$

กล่าวคือ $\mathbf{X}_t$ และ $\mathbf{X}_{0:t-2}$ เป็นอิสระต่อกันตามเงื่อนไข (conditionally independent) เมื่อกำหนด $\mathbf{X}_{t-1}$

ข้อสมมติของเซ็นเซอร์มาร์คอฟ (Sensor Markov assumption)

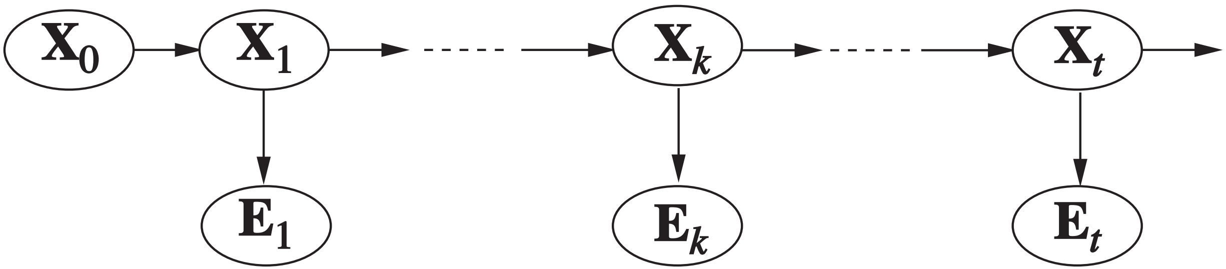
เราตั้งข้อสมมติของเซ็นเซอร์มาร์คอฟ (อันดับหนึ่ง) ว่า

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}_t|\mathbf{X}_{0:t}, \mathbf{E}_{0:t-1}) = \mathbf{P}(\mathbf{E}_t|\mathbf{X}_t)$$

ข้อสมมติของความนิ่ง (Stationarity assumption)

แบบจำลองการเปลี่ยนสถานะและแบบจำลองเซ็นเซอร์จะเหมือนกันสำหรับทุกค่า t (กล่าวคือ กฎทางฟิสิกส์ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา)

การแจกแจงร่วม (Joint distribution)

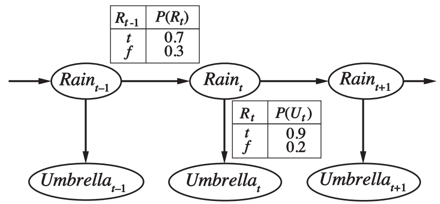


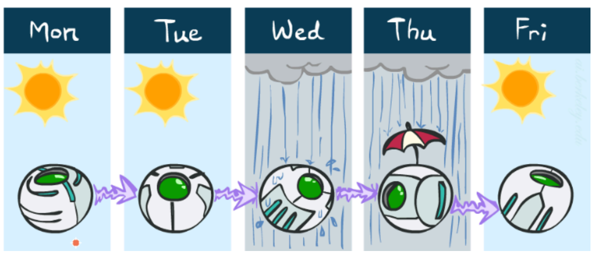
ลูกโซ่มาร์คอฟที่เชื่อมต่อกับแบบจำลองเซ็นเซอร์สามารถแสดงเป็นเครือข่ายแบบเบย์ (Bayesian network) ที่ขยายได้ (growable) และคลี่ออกไปอย่างไม่สิ้นสุดตามเวลา

การแจกแจงร่วมของตัวแปรทั้งหมดจนถึงเวลา t คือ

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{0:t}, \mathbf{E}_{1:t}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_0) \prod_{i=1}^{t} \mathbf{P}(\mathbf{X}_i | \mathbf{X}_{i-1}) \mathbf{P}(\mathbf{E}_i | \mathbf{X}_i)$$

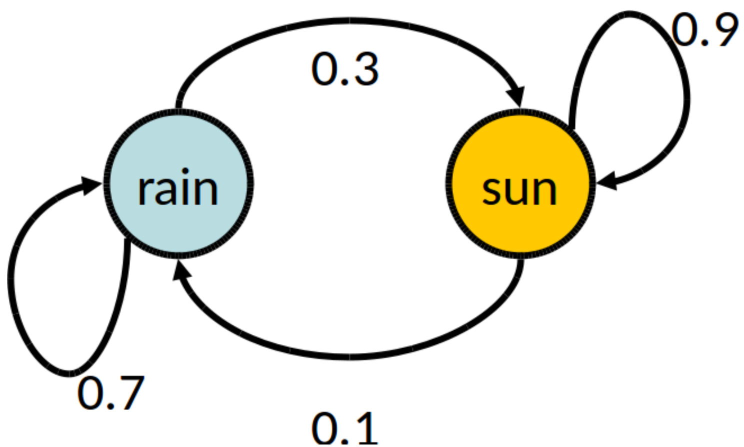
ตัวอย่าง: วันนี้คุณจะพกร่มไปด้วยไหม?





- $\mathbf{P}(\text{Umbrella}_t|\text{Rain}_t)$?
- $\mathbf{P}(\text{Rain}_t|\text{Umbrella}_{0:t-1})$?
- $\mathbf{P}(\text{Rain}_{t+2}|\text{Rain}_t)$?

ที่มา: CS188, UC Berkeley.

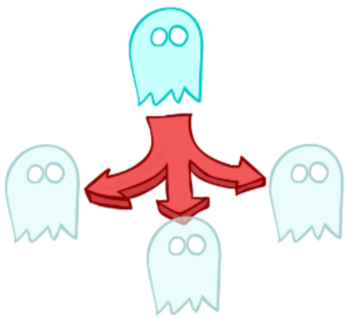


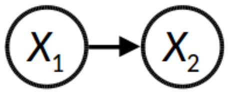
แบบจำลองการเปลี่ยนสถานะ $\mathbf{P}(\mathrm{Rain}_t|\mathrm{Rain}_{t-1})$ สามารถแสดงแทนได้ด้วยแผนภาพการเปลี่ยนสถานะ (state transition diagram)

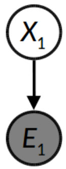
งานการอนุมาน (Inference tasks)

- การทำนาย (Prediction): $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k}|\mathbf{e}_{1:t})$ สำหรับ $k > 0$
  - การคำนวณการแจกแจงภายหลัง (posterior distribution) ของสถานะในอนาคต
  - ใช้สำหรับการประเมินลำดับการกระทำที่เป็นไปได้
- การกรอง (Filtering): $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{e}_{1:t})$
  - การกรองคือสิ่งที่เอเจนต์ที่มีเหตุผล (rational agent) ทำเพื่อติดตามสถานะที่ซ่อนอยู่ปัจจุบัน $\mathbf{X}_t$ หรือ สถานะความเชื่อ (belief state) ของมัน เพื่อให้สามารถตัดสินใจอย่างมีเหตุผลได้
- การปรับให้เรียบ (Smoothing): $\mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:t})$ สำหรับ $0 \leq k < t$
  - การคำนวณการแจกแจงภายหลังของสถานะในอดีต
  - ใช้เพื่อสร้างการประมาณค่าที่ดีขึ้น เนื่องจากรวมหลักฐานมากขึ้น
  - จำเป็นสำหรับการเรียนรู้
- คำอธิบายที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุด (Most likely explanation): $\arg\max_{\mathbf{x}_{1:t}} P(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{e}_{1:t})$
  - การถอดรหัสช่องสัญญาณที่มีสัญญาณรบกวน, การรู้จำเสียงพูด, ฯลฯ

กรณีพื้นฐาน (Base cases)







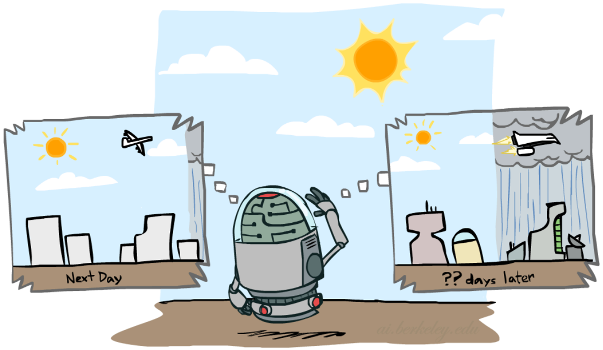
$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_1|\mathbf{e}_1) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{e}_1|\mathbf{X}_1)\mathbf{P}(\mathbf{X}_1)}{P(\mathbf{e}_1)}$$
$$\propto \mathbf{P}(\mathbf{e}_1|\mathbf{X}_1)\mathbf{P}(\mathbf{X}_1)$$

(อัปเดต) อัปเดต $\mathbf{P}(\mathbf{X}_1)$ ด้วยหลักฐาน $\mathbf{e}_1$ โดยใช้แบบจำลองเซ็นเซอร์

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_2) = \sum_{\mathbf{x}_1} \mathbf{P}(\mathbf{X}_2, \mathbf{x}_1)$$
$$= \sum_{\mathbf{x}_1} P(\mathbf{x}_1)\mathbf{P}(\mathbf{X}_2|\mathbf{x}_1)$$

(ทำนาย) ผลัก $\mathbf{P}(\mathbf{X}_1)$ ไปข้างหน้าผ่านแบบจำลองการเปลี่ยนสถานะ

การทำนาย (Prediction)



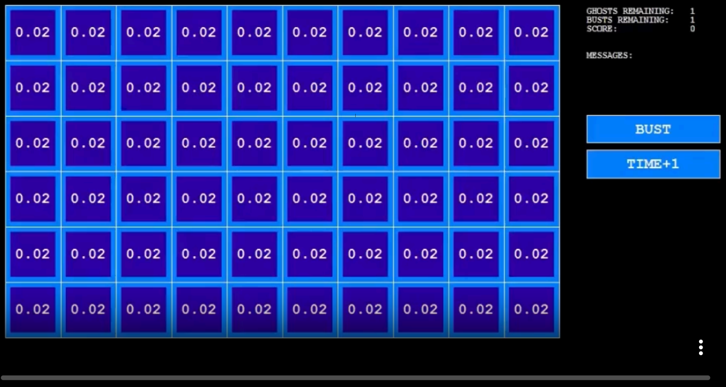
เพื่อทำนายอนาคต $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k}|\mathbf{e}_{1:t})$:

- ผลักสถานะความเชื่อก่อนหน้า $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{e}_{1:t})$ ผ่านแบบจำลองการเปลี่ยนสถานะ:

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t}) = \sum_{\mathbf{x}_t} \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t)P(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t})$$

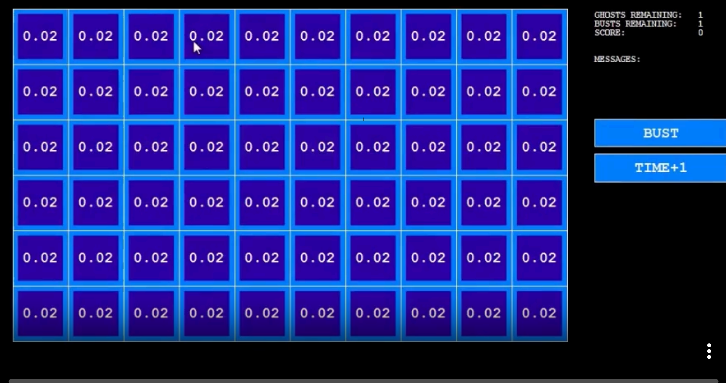
- ทำซ้ำจนถึง $t+k$ โดยใช้ $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k-1}|\mathbf{e}_{1:t})$ เพื่อคำนวณ $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k}|\mathbf{e}_{1:t})$

ที่มา: CS188, UC Berkeley.



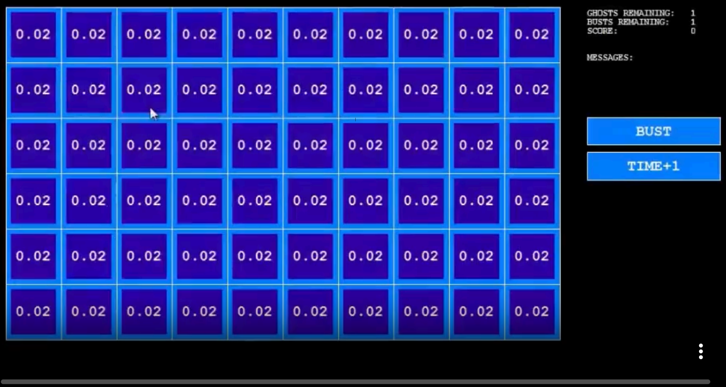
พลวัตแบบสุ่ม (Random dynamics)

ที่มา: CS188, UC Berkeley.



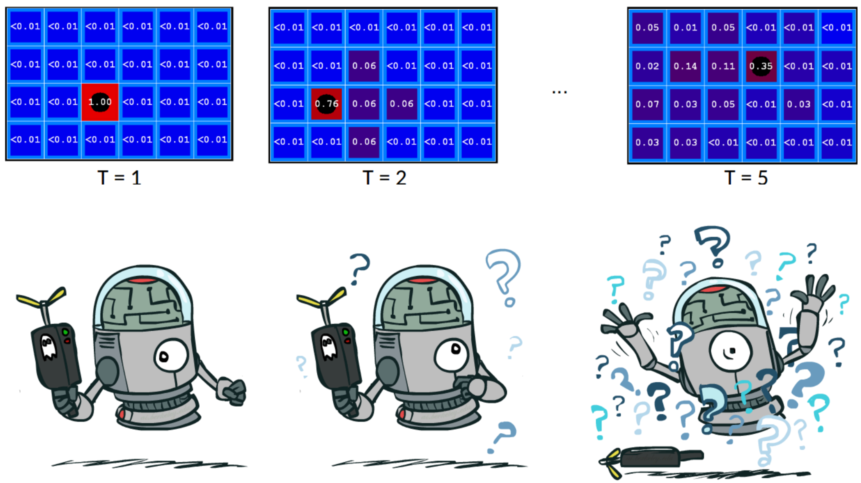
พลวัตแบบวงกลม (Circular dynamics)

ที่มา: CS188, UC Berkeley.



พลวัตแบบน้ำวน (Whirlpool dynamics)

ที่มา: CS188, UC Berkeley.



เมื่อเวลาผ่านไป ความไม่แน่นอน (uncertainty) มักจะเพิ่มขึ้นเมื่อไม่มีหลักฐานใหม่

ที่มา: CS188, UC Berkeley.

การแจกแจงคงที่ (Stationary distributions)

จะเกิดอะไรขึ้นถ้า $t \to \infty$?

- สำหรับลูกโซ่ส่วนใหญ่ อิทธิพลของการแจกแจงเริ่มต้นจะลดน้อยลงเรื่อยๆ ตามเวลา
- ในที่สุด การแจกแจงจะลู่เข้าสู่จุดคงที่ เรียกว่า การแจกแจงคงที่ (stationary distribution)
- การแจกแจงนี้เป็นไปตามสมการ

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_\infty) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_{\infty+1}) = \sum_{\mathbf{x}_\infty} \mathbf{P}(\mathbf{X}_{\infty+1}|\mathbf{x}_\infty) P(\mathbf{x}_\infty)$$

$\mathbf{X}_{t-1}$	$\mathbf{X}_t$	P
sun	sun	0.9
sun	rain	0.1
rain	sun	0.3
rain	rain	0.7

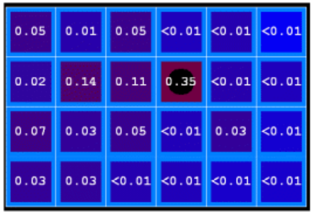
ตัวอย่าง

$$
\begin{aligned}
P(\mathbf{X}_\infty = \text{sun}) &= P(\mathbf{X}_{\infty+1} = \text{sun}) \\
&= P(\mathbf{X}_{\infty+1} = \text{sun} | \mathbf{X}_\infty = \text{sun}) P(\mathbf{X}_\infty = \text{sun}) \\
&\quad + P(\mathbf{X}_{\infty+1} = \text{sun} | \mathbf{X}_\infty = \text{rain}) P(\mathbf{X}_\infty = \text{rain}) \\
&= 0.9 P(\mathbf{X}_\infty = \text{sun}) + 0.3 P(\mathbf{X}_\infty = \text{rain})
\end{aligned}
$$

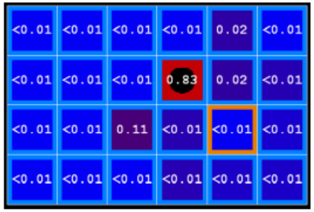
ดังนั้น $P(\mathbf{X}_\infty = \text{sun}) = 3P(\mathbf{X}_\infty = \text{rain})$

ซึ่งหมายความว่า $P(\mathbf{X}_\infty = \text{sun}) = \frac{3}{4}$ และ $P(\mathbf{X}_\infty = \text{rain}) = \frac{1}{4}$

การกรอง (Filtering)



Before observation



After observation

เมื่อมีหลักฐานใหม่ ความไม่แน่นอนจะลดลง ความเชื่อจะถูกถ่วงน้ำหนักใหม่ แต่อย่างไร?

ตัวกรองของเบย์ (Bayes filter)

เอเจนต์จะรักษาการประมาณค่า สถานะความเชื่อ (belief state) $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{e}_{1:t})$ และอัปเดตเมื่อมีหลักฐานใหม่ $\mathbf{e}_{t+1}$ เข้ามา

กระบวนการนี้สามารถทำได้โดยใช้กระบวนการประมาณค่าแบบเบย์เวียนซ้ำ $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t+1}) = f(\mathbf{e}_{t+1}, \mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{e}_{1:t}))$ ซึ่งสลับระหว่างสองขั้นตอน:

- (ขั้นตอนการทำนาย): ฉายภาพสถานะความเชื่อปัจจุบันไปข้างหน้าจาก t ไปยัง $t+1$ ผ่านแบบจำลองการเปลี่ยนสถานะ
- (ขั้นตอนการอัปเดต): อัปเดตสถานะใหม่นี้โดยใช้หลักฐาน $\mathbf{e}_{t+1}$

ในทางคณิตศาสตร์ ตัวกรองของเบย์ถูกกำหนดโดย

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t+1}) &= \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t},\mathbf{e}_{t+1}) \\
&\propto \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1},\mathbf{e}_{1:t})\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t}) \\
&\propto \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1})\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t}) \\
&\propto \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1})\sum_{\mathbf{x}_t}\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t,\mathbf{e}_{1:t})P(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t}) \\
&\propto \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1})\sum_{\mathbf{x}_t}\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t)P(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t})
\end{aligned}$$

โดยที่

- ค่าคงที่การทำให้เป็นบรรทัดฐาน (normalization constant)

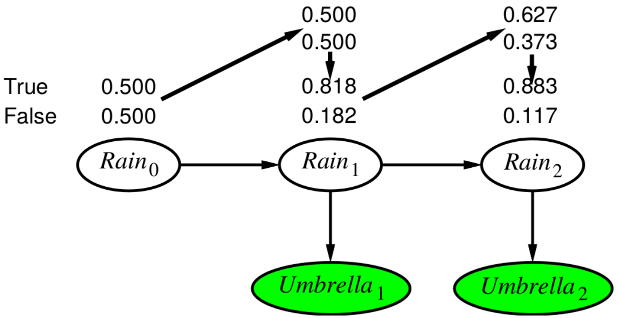
  $$Z = P(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t}) = \sum_{\mathbf{x}_{t+1}} P(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1})P(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t})$$

  ใช้เพื่อทำให้ความน่าจะเป็นรวมกันเป็น 1
- ในนิพจน์สุดท้าย พจน์แรกและพจน์ที่สองได้มาจากแบบจำลอง ในขณะที่พจน์ที่สามได้มาจากการเรียกซ้ำ

เราสามารถคิดว่า $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{e}_{1:t})$ เป็น ข้อความ (message) $\mathbf{f}_{1:t}$ ที่ถูกส่งต่อ ไปข้างหน้า (forward) ตามลำดับ ซึ่งถูกแก้ไขโดยการเปลี่ยนสถานะแต่ละครั้งและอัปเดตโดยการสังเกตใหม่แต่ละครั้ง

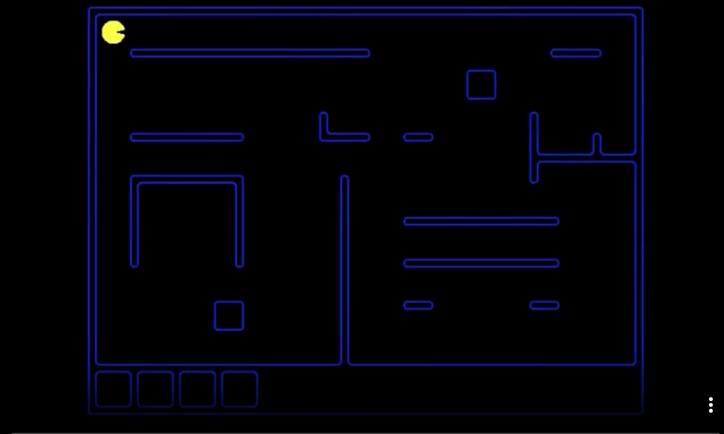
ดังนั้น กระบวนการนี้สามารถเขียนเป็น $\mathbf{f}_{1:t+1} \propto \text{forward}(\mathbf{f}_{1:t}, \mathbf{e}_{t+1})$ ความซับซ้อนของมันคงที่ (ทั้งในด้านเวลาและพื้นที่) เทียบกับ t

ตัวอย่าง



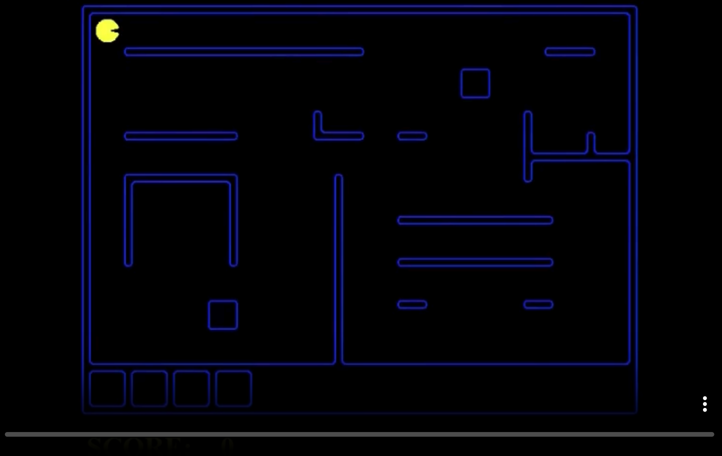
R_{t-1}	$P(R_t)$
true	0.7
false	0.3

R_t	$P(U_t)$
true	0.9
false	0.2



Ghostbusters กับตัวกรองของเบย์

ที่มา: CS188, UC Berkeley.



Ghostbusters กับตัวกรองของเบย์

```
python3 run.py --nghosts 2 --layout maze_small --agentfile sherlockpacman.py --bsagentfile bayesfilter.py --show True
python3 run.py --nghosts 3 --layout maze_medium --agentfile sherlockpacman.py --bsagentfile bayesfilter.py --show True
python3 run.py --nghosts 4 --layout maze_huge --agentfile sherlockpacman.py --bsagentfile bayesfilter.py --show True
```

ที่มา: CS188, UC Berkeley.

การปรับให้เรียบ (Smoothing)

เราต้องการคำนวณ $\mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:t})$ สำหรับ $0 \leq k < t$

โดยการแบ่งหลักฐาน $\mathbf{e}_{1:t}$ ออกเป็น $\mathbf{e}_{1:k}$ และ $\mathbf{e}_{k+1:t}$ เราจะได้

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:t}) &= \mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:k}, \mathbf{e}_{k+1:t}) \\
&\propto \mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:k})\mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{X}_k, \mathbf{e}_{1:k}) \\
&\propto \mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:k})\mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{X}_k)
\end{aligned}$$

ให้ข้อความ ย้อนกลับ (backward) $\mathbf{b}_{k+1:t}$ แทน $\mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{X}_k)$ ดังนั้น

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:t}) = \alpha\,\mathbf{f}_{1:k} \times \mathbf{b}_{k+1:t},$$

โดยที่ $\times$ คือการคูณแบบจุดต่อจุดของเวกเตอร์

ข้อความย้อนกลับนี้สามารถคำนวณได้โดยใช้การเรียกซ้ำแบบย้อนกลับ:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{X}_k) &= \sum_{\mathbf{x}_{k+1}} \mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{X}_k, \mathbf{x}_{k+1})\mathbf{P}(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{X}_k) \\
&= \sum_{\mathbf{x}_{k+1}} P(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{x}_{k+1})\mathbf{P}(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{X}_k) \\
&= \sum_{\mathbf{x}_{k+1}} P(\mathbf{e}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1})P(\mathbf{e}_{k+2:t}|\mathbf{x}_{k+1})\mathbf{P}(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{X}_k)
\end{aligned}$$

ปัจจัยแรกและปัจจัยสุดท้ายได้มาจากแบบจำลอง ปัจจัยที่สองได้มาจากการเรียกซ้ำ ดังนั้น

$$\mathbf{b}_{k+1:t} = \text{backward}(\mathbf{b}_{k+2:t}, \mathbf{e}_{k+1})$$

อัลกอริทึมไปข้างหน้า-ย้อนกลับ (Forward-backward algorithm)

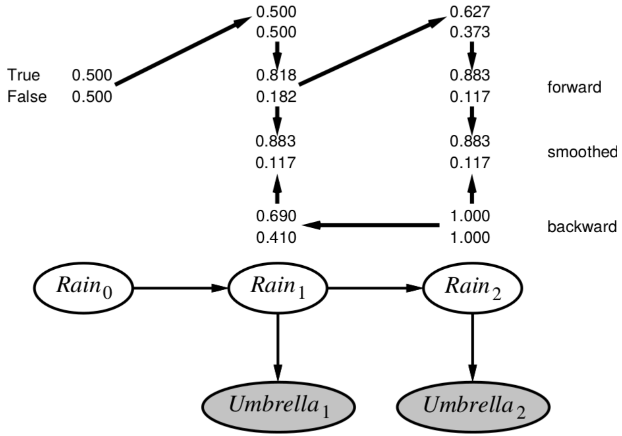
```
function FORWARD-BACKWARD(ev, prior) returns a vector of probability distributions
  inputs: ev, a vector of evidence values for steps 1, ..., t
          prior, the prior distribution on the initial state, P(X_0)
  local variables: fv, a vector of forward messages for steps 0, ..., t
                   b, a representation of the backward message, initially all 1s
                   sv, a vector of smoothed estimates for steps 1, ..., t

  fv[0] ← prior
  for i = 1 to t do
     fv[i] ← FORWARD(fv[i − 1], ev[i])
  for i = t downto 1 do
     sv[i] ← NORMALIZE(fv[i] × b)
     b ← BACKWARD(b, ev[i])
  return sv
```

ความซับซ้อน:

- การปรับให้เรียบสำหรับช่วงเวลา k ใดๆ ใช้เวลา: $O(t)$
- การปรับให้เรียบทั้งลำดับ (เนื่องจากการแคช): $O(t)$

ตัวอย่าง



0.500
0.500
0.627
0.373
True 0.500
False 0.500
0.818
0.182
0.883
0.117
forward
0.883
0.117
0.883
0.117
smoothed
0.690
0.410
1.000
1.000
backward
$Rain_0$
$Rain_1$
$Rain_2$
$Umbrella_1$
$Umbrella_2$

คำอธิบายที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุด (Most likely explanation)

ที่มา: CS188, UC Berkeley.

สมมติว่า [true, true, false, true, true] คือลำดับการพกร่ม

- ลำดับของสภาพอากาศที่น่าจะอธิบายสิ่งนี้ได้ดีที่สุดคืออะไร?
- ในบรรดาลำดับทั้งหมด 2^5 ลำดับ มีวิธี (ที่มีประสิทธิภาพ) ในการค้นหาลำดับที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุดหรือไม่?

ที่มา: CS188, UC Berkeley.

ลำดับที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุด ไม่ใช่ ลำดับของสถานะที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุด!

เส้นทางที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุดไปยังแต่ละ $\mathbf{x}_{t+1}$ คือเส้นทางที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุดไปยัง บาง $\mathbf{x}_t$ บวกอีกหนึ่งขั้นตอน ดังนั้น

$$\begin{aligned}&\max_{\mathbf{x}_{1:t}} \mathbf{P}(\mathbf{x}_{1:t}, \mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{e}_{1:t+1})\\ &\propto \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1} | \mathbf{X}_{t+1}) \max_{\mathbf{x}_t}(\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{x}_t) \max_{\mathbf{x}_{1:t-1}} \mathbf{P}(\mathbf{x}_{1:t-1}, \mathbf{x}_t | \mathbf{e}_{1:t}))\end{aligned}$$

ลองพิจารณาเส้นทางที่ไปถึงสถานะ `Rain 5 = true`

เนื่องจากคุณสมบัติของมาร์คอฟ จะเห็นได้ว่าเส้นทางที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุดไปยังสถานะ `Rain 5 = true` ประกอบด้วยเส้นทางที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุดไปยังสถานะใดสถานะหนึ่ง ณ เวลา 4 ตามด้วยการเปลี่ยนไปยัง `Rain 5 = true`; และสถานะ ณ เวลา 4 ที่จะกลายเป็นส่วนหนึ่งของเส้นทางไปยัง `Rain 5 = true` คือสถานะใดก็ตามที่ทำให้ความน่าจะเป็นของเส้นทางนั้นสูงสุด

สิ่งนี้เหมือนกับการกรอง ยกเว้นว่า

- ข้อความไปข้างหน้า $\mathbf{f}_{1:t} = \mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{e}_{1:t})$ ถูกแทนที่ด้วย

$$\mathbf{m}_{1:t} = \max_{\mathbf{x}_{1:t-1}} \mathbf{P}(\mathbf{x}_{1:t-1}, \mathbf{X}_t|\mathbf{e}_{1:t}),$$

  โดยที่ $\mathbf{m}_{1:t}(i)$ ให้ความน่าจะเป็นของเส้นทางที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุดไปยังสถานะ i

- การอัปเดตมีการแทนที่ผลรวมด้วยค่าสูงสุด

อัลกอริทึมที่ได้เรียกว่า อัลกอริทึม Viterbi ซึ่งคำนวณคำอธิบายที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุดเป็น

$$\mathbf{m}_{1:t+1} \propto \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1}) \max_{\mathbf{x}_t} \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t)\mathbf{m}_{1:t}$$

ความซับซ้อนของมันเป็นเชิงเส้นกับ t ซึ่งเป็นความยาวของลำดับ

ขั้นตอนแบบง่าย: ใช้การปรับให้เรียบเพื่อคำนวณ $P(X_k|e_{1:t})$ จากนั้นแสดงผลลำดับของค่าที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุดสำหรับแต่ละ k

ตัวอย่าง

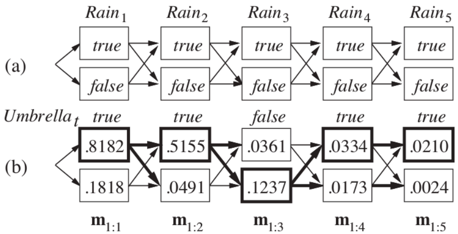


Figure 15.5 (a) Possible state sequences for $Rain_t$ can be viewed as paths through a graph of the possible states at each time step. (States are shown as rectangles to avoid confusion with nodes in a Bayes net.) (b) Operation of the Viterbi algorithm for the umbrella observation sequence $[true, true, false, true, true]$. For each t, we have shown the values of the message $\mathbf{m}_{1:t}$, which gives the probability of the best sequence reaching each state at time t. Also, for each state, the bold arrow leading into it indicates its best predecessor as measured by the product of the preceding sequence probability and the transition probability. Following the bold arrows back from the most likely state in $\mathbf{m}_{1:5}$ gives the most likely sequence.

[Q] คุณจะดึงเส้นทางกลับมาได้อย่างไร นอกเหนือจากความน่าจะเป็นของมัน?

แบบจำลองมาร์คอฟแบบซ่อนเร้น (Hidden Markov models)

จนถึงตอนนี้ เราได้อธิบายกระบวนการมาร์คอฟบนเซตของตัวแปรสถานะ $\mathbf{X}_t$ และตัวแปรหลักฐาน $\mathbf{E}_t$ ใดๆ

- แบบจำลองมาร์คอฟแบบซ่อนเร้น (HMM) คือกระบวนการมาร์คอฟที่ทั้งสถานะ $\mathbf{X}_t$ และหลักฐาน $\mathbf{E}_t$ เป็นตัวแปรสุ่มเดี่ยวที่ไม่ต่อเนื่อง (single discrete)
    - $\mathbf{X}_t = X_t$, โดยมีโดเมน $D_{X_t} = \{1, ..., S\}$
    - $\mathbf{E}_t = E_t$, โดยมีโดเมน $D_{E_t} = \{1, ..., R\}$
- โครงสร้างที่จำกัดนี้ช่วยให้สามารถปรับสูตรอัลกอริทึมไปข้างหน้า-ย้อนกลับในรูปของการดำเนินการเมทริกซ์-เวกเตอร์ได้

หมายเหตุเกี่ยวกับคำศัพท์

ผู้เขียนบางคนแบ่งแบบจำลองมาร์คอฟออกเป็นสองประเภท ขึ้นอยู่กับการสังเกตสถานะของระบบ:

- สถานะของระบบที่สังเกตได้: ลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov chains)
- สถานะของระบบที่สังเกตได้บางส่วน: แบบจำลองมาร์คอฟแบบซ่อนเร้น (Hidden Markov models)

ในที่นี้เราจะใช้คำศัพท์ตามตำราเรียนตามที่กำหนดไว้ในสไลด์ก่อนหน้า

อัลกอริทึมเมทริกซ์แบบง่าย

- ค่าก่อน $\mathbf{P}(X_0)$ จะกลายเป็นเวกเตอร์คอลัมน์ (ที่ทำให้เป็นบรรทัดฐาน) $\mathbf{f}_0 \in \mathbb{R}_+^S$
- แบบจำลองการเปลี่ยนสถานะ $\mathbf{P}(X_t|X_{t-1})$ จะกลายเป็น เมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะ (transition matrix) $\mathbf{T}$ ขนาด $S \times S$ โดยที่

$$\mathbf{T}_{ij} = P(X_t = j|X_{t-1} = i)$$

- แบบจำลองเซ็นเซอร์ $\mathbf{P}(E_t|X_t)$ ถูกกำหนดเป็น เมทริกซ์เซ็นเซอร์ (sensor matrix) $\mathbf{B}$ ขนาด $S \times R$ โดยที่

$$\mathbf{B}_{ij} = P(E_t = j|X_t = i)$$

- ให้เมทริกซ์การสังเกต $\mathbf{O}_t$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกเป็นคอลัมน์ e_t ของเมทริกซ์เซ็นเซอร์ $\mathbf{B}$
- ถ้าเราใช้เวกเตอร์คอลัมน์แทนข้อความไปข้างหน้าและย้อนกลับ เราจะได้

$$\mathbf{f}_{1:t+1} = \alpha \mathbf{O}_{t+1} \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{1:t}$$

$$\mathbf{b}_{k+1:t} = \mathbf{T} \mathbf{O}_{k+1} \mathbf{b}_{k+2:t},$$

  โดยที่ $\mathbf{b}_{t+1:t}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีค่าเป็นหนึ่งทั้งหมดขนาด S
- ดังนั้นอัลกอริทึมไปข้างหน้า-ย้อนกลับต้องการเวลา $O(S^2t)$ และพื้นที่ $O(St)$

ตัวอย่าง

สมมติว่า $[\mathrm{true}, \mathrm{true}, \mathrm{false}, \mathrm{true}, \mathrm{true}]$ คือลำดับการพกร่ม

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_0 &= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \\
\mathbf{T} &= \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \\
\mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \\
\mathbf{O}_1 = \mathbf{O}_2 = \mathbf{O}_4 = \mathbf{O}_5 &= \begin{pmatrix} 0.9 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{O}_3 &= \begin{pmatrix} 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ดูการทำงานได้ที่ `code/lecture6-forward-backward.ipynb`

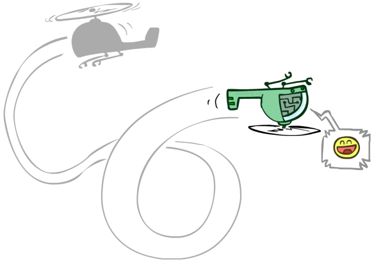
การแจกแจงคงที่ (Stationary distribution)

การแจกแจงคงที่ $\mathbf{f}$ ของ HMM คือการแจกแจงที่

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}$$

ดังนั้น การแจกแจงคงที่จึงสอดคล้องกับเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (eigenvector) (ที่ทำให้เป็นบรรทัดฐาน) ของเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะที่สลับเปลี่ยน (transposed) ซึ่งมีค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) เท่ากับ 1

ตัวกรอง (Filters)



สมมติว่าเราต้องการติดตามตำแหน่งและความเร็วของหุ่นยนต์จากการสังเกตที่มีสัญญาณรบกวนซึ่งรวบรวมเมื่อเวลาผ่านไป

ในทางคณิตศาสตร์ เราต้องการประมาณค่าตัวแปรสถานะต่อเนื่อง (continuous) เช่น

- ตำแหน่ง $\mathbf{X}_t$ ของหุ่นยนต์ ณ เวลา t
- ความเร็ว $\dot{\mathbf{X}}_t$ ของหุ่นยนต์ ณ เวลา t

เราสมมติว่าช่วงเวลาเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง (discrete)

ที่มา: CS188, UC Berkeley.

ตัวแปรต่อเนื่อง (Continuous variables)

ให้ $X : \Omega \to D_X$ เป็นตัวแปรสุ่ม

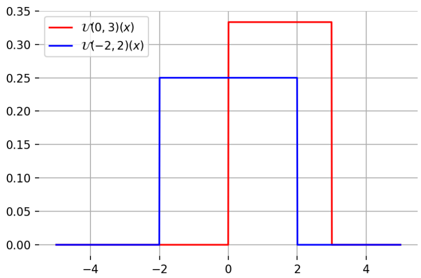
- เมื่อ D_X เป็นอนันต์แบบนับไม่ได้ (uncountably infinite) (เช่น $D_X = \mathbb{R}$) X จะถูกเรียกว่า ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง
- ถ้า X เป็นแบบต่อเนื่องสัมบูรณ์ (absolutely continuous) การแจกแจงความน่าจะเป็นของมันจะถูกอธิบายโดย ฟังก์ชันความหนาแน่น (density function) p ที่กำหนดความน่าจะเป็นให้กับช่วงใดๆ $[a, b] \subseteq D_X$ โดยที่

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b p(x)dx,$$

โดยที่ p เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงๆ ที่ไม่เป็นลบ และ

$$\int_{D_X} p(x)dx = 1$$

การแจกแจงเอกรูป (Uniform)

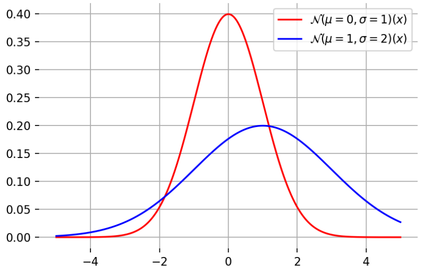


การแจกแจงเอกรูป $\mathcal{U}(a, b)$ ถูกอธิบายโดยฟังก์ชันความหนาแน่น

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{if } x \in [a, b] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

โดยที่ $a \in \mathbb{R}$ และ $b \in \mathbb{R}$ คือขอบเขตของมัน

การแจกแจงปกติ (Normal)

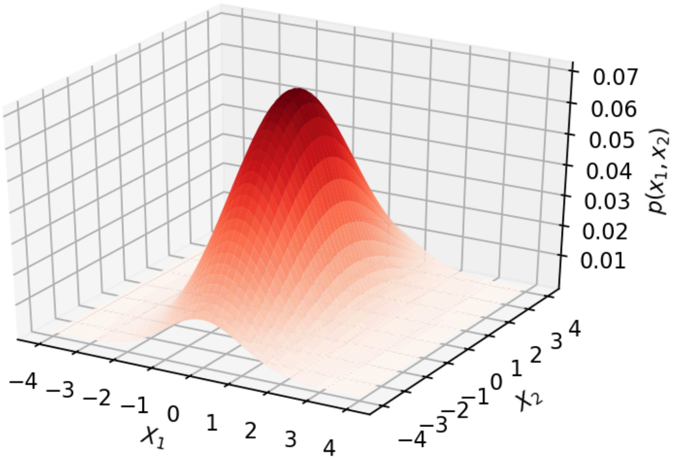


การแจกแจงปกติ (หรือเกาส์เซียน) $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ ถูกอธิบายโดยฟังก์ชันความหนาแน่น

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

โดยที่ $\mu \in \mathbb{R}$ และ $\sigma \in \mathbb{R}^+$ คือพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของมัน

การแจกแจงปกติหลายตัวแปร (Multivariate normal)



การแจกแจงปกติหลายตัวแปรขยายไปสู่ตัวแปรสุ่ม n ตัว ฟังก์ชันความหนาแน่น (ร่วม) ของมันถูกกำหนดเป็น

$$p(\mathbf{x} = x_1, ..., x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{\Sigma}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m})\right)$$

โดยที่ $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$ และ $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์บวกกึ่งแน่นอน (positive semi-definite)

สูตรสรุปสำหรับแบบจำลองเกาส์เซียน (Särkkä, 2013)

ถ้า $\mathbf{x}$ และ $\mathbf{y}$ มีการแจกแจงเกาส์เซียนร่วม

$$p\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{pmatrix} = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{C}^T & \mathbf{B}\end{pmatrix}\right),$$

แล้วการแจกแจงขอบ (marginal) และการแจกแจงมีเงื่อนไข (conditional) ของ $\mathbf{x}$ และ $\mathbf{y}$ จะเป็น

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}) &= \mathcal{N}(\mathbf{x}|\mathbf{a}, \mathbf{A})\\
p(\mathbf{y}) &= \mathcal{N}(\mathbf{y}|\mathbf{b}, \mathbf{B})\\
p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= \mathcal{N}(\mathbf{x}|\mathbf{a} + \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b}), \mathbf{A} - \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}^T)\\
p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) &= \mathcal{N}(\mathbf{y}|\mathbf{b} + \mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}), \mathbf{B} - \mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})
\end{aligned}$$

ถ้าตัวแปรสุ่ม $\mathbf{x}$ และ $\mathbf{y}$ มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเกาส์เซียน

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{x}) &= \mathcal{N}(\mathbf{x}|\mathbf{m}, \mathbf{P}) \\
p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) &= \mathcal{N}(\mathbf{y}|\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{u}, \mathbf{R}),
\end{aligned}
$$

แล้วการแจกแจงร่วมของ $\mathbf{x}$ และ $\mathbf{y}$ จะเป็นแบบเกาส์เซียนด้วย

$$
p\begin{pmatrix}\mathbf{x} \\ \mathbf{y}\end{pmatrix} = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{x} \\ \mathbf{y}\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}\mathbf{m} \\ \mathbf{H}\mathbf{m} + \mathbf{u}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{H}^T \\ \mathbf{H}\mathbf{P} & \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\end{pmatrix}\right)
$$

ตัวกรองของเบย์แบบต่อเนื่อง (Continuous Bayes filter)

ตัวกรองของเบย์ขยายไปสู่ตัวแปรสถานะและหลักฐานต่อเนื่อง $\mathbf{X}_t$ และ $\mathbf{E}_t$

ผลรวมจะถูกแทนที่ด้วยปริพันธ์ และฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นจะถูกแทนที่ด้วยฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น ทำให้ได้ความสัมพันธ์แบบเบย์เวียนซ้ำ

$$p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t+1}) \propto p(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1}) \int p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t) p(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t}) d\mathbf{x}_t,$$

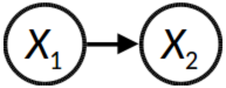
โดยที่ค่าคงที่การทำให้เป็นบรรทัดฐานคือ

$$Z = \int p(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1}) p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t}) d\mathbf{x}_{t+1}$$

ตัวกรองคาลมาน (Kalman filter)

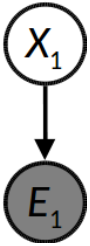
ตัวกรองคาลมาน เป็นกรณีพิเศษของตัวกรองของเบย์ ซึ่งสมมติว่า:

- ค่าก่อนเป็นแบบเกาส์เซียน
- แบบจำลองการเปลี่ยนสถานะเป็นแบบเกาส์เซียนเชิงเส้น
- แบบจำลองเซ็นเซอร์เป็นแบบเกาส์เซียนเชิงเส้น



$$p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}, \mathbf{\Sigma}_\mathbf{x})$$

แบบจำลองการเปลี่ยนสถานะ



$$p(\mathbf{e}_t|\mathbf{x}_t) = \mathcal{N}(\mathbf{e}_t|\mathbf{C}\mathbf{x}_t + \mathbf{d}, \mathbf{\Sigma}_\mathbf{e})$$

แบบจำลองเซ็นเซอร์

การกรองการแจกแจงแบบเกาส์เซียน

- *ขั้นตอนการทำนาย:*

  ถ้าการแจกแจง $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t})$ เป็นแบบเกาส์เซียน และแบบจำลองการเปลี่ยนสถานะ $p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)$ เป็นแบบเกาส์เซียนเชิงเส้น แล้วการแจกแจงที่ทำนายล่วงหน้าหนึ่งขั้นตอนที่ได้จาก

  $$p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t}) = \int p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t})d\mathbf{x}_t$$

  ก็จะเป็นการแจกแจงแบบเกาส์เซียนเช่นกัน

- *ขั้นตอนการอัปเดต:*

  ถ้าการทำนาย $p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t})$ เป็นแบบเกาส์เซียน และแบบจำลองเซ็นเซอร์ $p(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1})$ เป็นแบบเกาส์เซียนเชิงเส้น แล้วหลังจากการปรับเงื่อนไขด้วยหลักฐานใหม่ การแจกแจงที่อัปเดตแล้ว

  $$p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t+1}) \propto p(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1})p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t})$$

  ก็จะเป็นการแจกแจงแบบเกาส์เซียนเช่นกัน

ดังนั้น สำหรับตัวกรองคาลมาน $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t})$ จะเป็นการแจกแจงปกติหลายตัวแปร $\mathcal{N}(\mathbf{x}_t|\mu_t, \mathbf{\Sigma}_t)$ สำหรับทุกค่า t

- การกรองจะลดรูปลงเหลือเพียงการคำนวณพารามิเตอร์ μ_t และ $\mathbf{\Sigma}_t$
- ในทางตรงกันข้าม สำหรับกระบวนการทั่วไป (ที่ไม่ใช่เชิงเส้น, ไม่ใช่เกาส์เซียน) คำอธิบายของการแจกแจงภายหลังจะเติบโตอย่างไม่มีขีดจำกัด เมื่อ $t \to \infty$

ตัวอย่าง 1 มิติ

การเดินสุ่มแบบเกาส์เซียน (Gaussian random walk):

- ค่าก่อนแบบเกาส์เซียน:

$$p(x_0) = \mathcal{N}(x_0 | \mu_0, \sigma_0^2)$$

- แบบจำลองการเปลี่ยนสถานะจะเพิ่มการรบกวนแบบสุ่มที่มีความแปรปรวนคงที่:

$$p(x_{t+1} | x_t) = \mathcal{N}(x_{t+1} | x_t, \sigma_x^2)$$

- แบบจำลองเซ็นเซอร์ให้ค่าการวัดที่มีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนที่มีความแปรปรวนคงที่:

$$p(e_t | x_t) = \mathcal{N}(e_t | x_t, \sigma_e^2)$$

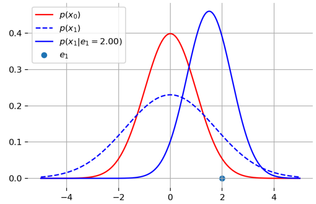
การแจกแจงที่ทำนายล่วงหน้าหนึ่งขั้นตอนคือ

$$
\begin{aligned}
p(x_1) &= \int p(x_1|x_0)p(x_0)dx_0 \\
&\propto \int \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_1-x_0)^2}{\sigma_x^2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_0-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}\right)dx_0 \\
&\propto \int \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2(x_1-x_0)^2+\sigma_x^2(x_0-\mu_0)^2}{\sigma_0^2\sigma_x^2}\right)dx_0 \\
&\ldots \text{ (จัดรูปโดยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์)} \\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_1-\mu_0)^2}{\sigma_0^2+\sigma_x^2}\right) \\
&= \mathcal{N}(x_1|\mu_0, \sigma_0^2+\sigma_x^2)
\end{aligned}
$$

โปรดทราบว่าผลลัพธ์เดียวกันนี้สามารถหาได้โดยใช้เอกลักษณ์ของแบบจำลองเกาส์เซียนแทน

สำหรับขั้นตอนการอัปเดต เราต้องปรับเงื่อนไขตามการสังเกต ณ เวลาแรก:

$$
\begin{aligned}
p(x_1|e_1) &\propto p(e_1|x_1)p(x_1) \\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(e_1-x_1)^2}{\sigma_e^2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_1-\mu_0)^2}{\sigma_0^2+\sigma_x^2}\right) \\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_1-\frac{(\sigma_0^2+\sigma_x^2)e_1+\sigma_e^2\mu_0}{\sigma_0^2+\sigma_x^2+\sigma_e^2}\right)^2}{\frac{(\sigma_0^2+\sigma_x^2)\sigma_e^2}{\sigma_0^2+\sigma_x^2+\sigma_e^2}}\right) \\
&= \mathcal{N}\left(x_1\middle|\frac{(\sigma_0^2+\sigma_x^2)e_1+\sigma_e^2\mu_0}{\sigma_0^2+\sigma_x^2+\sigma_e^2}, \frac{(\sigma_0^2+\sigma_x^2)\sigma_e^2}{\sigma_0^2+\sigma_x^2+\sigma_e^2}\right)
\end{aligned}
$$



โดยสรุป สมการอัปเดตเมื่อมีหลักฐานใหม่ e_{t+1} คือ:

$$\mu_{t+1} = \frac{(\sigma_t^2 + \sigma_x^2)e_{t+1} + \sigma_e^2 \mu_t}{\sigma_t^2 + \sigma_x^2 + \sigma_e^2}$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \frac{(\sigma_t^2 + \sigma_x^2)\sigma_e^2}{\sigma_t^2 + \sigma_x^2 + \sigma_e^2}$$

เราสามารถตีความ การคำนวณค่าเฉลี่ยใหม่ μ_{t+1} ว่าเป็นเพียงค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของการสังเกตใหม่ e_{t+1} และค่าเฉลี่ยเก่า μ_t

- ถ้าการสังเกตไม่น่าเชื่อถือ แล้ว σ_e^2 จะมีค่ามาก และเราจะให้ความสำคัญกับค่าเฉลี่ยเก่ามากกว่า
- ถ้าการสังเกตน่าเชื่อถือ แล้วเราจะให้ความสำคัญกับหลักฐานมากกว่าและให้ความสำคัญกับค่าเฉลี่ยเก่าน้อยลง
- ถ้าค่าเฉลี่ยเก่าไม่น่าเชื่อถือ (σ_t^2 มีค่ามาก) หรือกระบวนการคาดเดาได้ยากมาก (σ_x^2 มีค่ามาก) แล้วเราจะให้ความสำคัญกับการสังเกตมากกว่า

การอัปเดตคาลมานทั่วไป

การสืบทอดเดียวกันนี้ขยายไปสู่การแจกแจงปกติหลายตัวแปร

สมมติว่าแบบจำลองการเปลี่ยนสถานะและเซ็นเซอร์เป็น

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t) &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{F}\mathbf{x}_t, \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{x}}) \\ p(\mathbf{e}_t|\mathbf{x}_t) &= \mathcal{N}(\mathbf{e}_t|\mathbf{H}\mathbf{x}_t, \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{e}}), \end{aligned}$$

เราจะได้สมการอัปเดตทั่วไปดังนี้:

$$\begin{aligned} \mu_{t+1} &= \mathbf{F}\mu_t + \mathbf{K}_{t+1}(\mathbf{e}_{t+1} - \mathbf{H}\mathbf{F}\mu_t) \\ \mathbf{\Sigma}_{t+1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{t+1}\mathbf{H})(\mathbf{F}\mathbf{\Sigma}_t\mathbf{F}^T + \mathbf{\Sigma}_x) \\ \mathbf{K}_{t+1} &= (\mathbf{F}\mathbf{\Sigma}_t\mathbf{F}^T + \mathbf{\Sigma}_x)\mathbf{H}^T(\mathbf{H}(\mathbf{F}\mathbf{\Sigma}_t\mathbf{F}^T + \mathbf{\Sigma}_x)\mathbf{H}^T + \mathbf{\Sigma}_e)^{-1} \end{aligned}$$

โดยที่ $\mathbf{K}_{t+1}$ คือเมทริกซ์เกนคาลมาน (Kalman gain matrix)

โปรดทราบว่า $\mathbf{\Sigma}_{t+1}$ และ $\mathbf{K}_{t+1}$ ไม่ขึ้นอยู่กับหลักฐาน ดังนั้นจึงสามารถคำนวณแบบออฟไลน์ได้

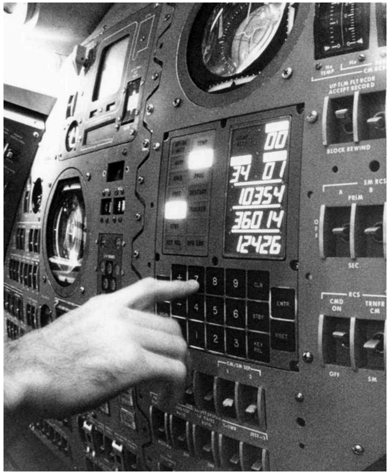
สมการเหล่านี้มีความหมายที่เข้าใจได้ง่าย

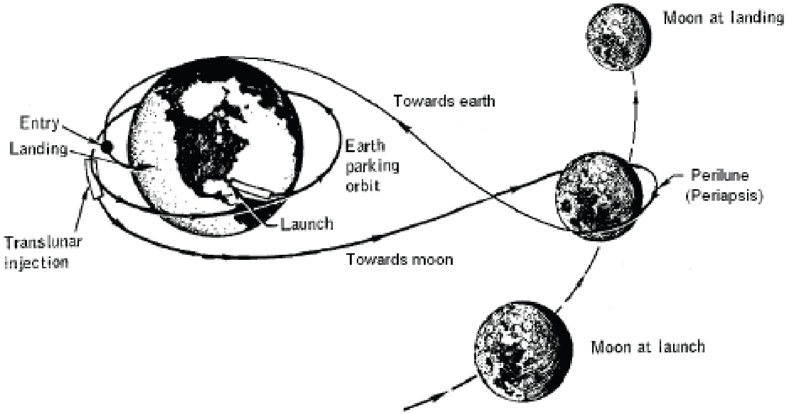
พิจารณา การอัปเดตสำหรับค่าประมาณสถานะเฉลี่ย μ_{t+1}

- พจน์ $\mathbf{F}\mu_t$ คือสถานะที่ทำนาย ณ เวลา $t+1$
- ดังนั้น $\mathbf{HF}\mu_t$ คือการสังเกตที่ทำนาย
- ดังนั้น พจน์ $\mathbf{e}_{t+1} - \mathbf{HF}\mu_t$ แทนข้อผิดพลาดใน การสังเกตที่ทำนาย
- สิ่งนี้ถูกคูณด้วย $\mathbf{K}_{t+1}$ เพื่อแก้ไขสถานะที่ทำนาย; ดังนั้น $\mathbf{K}_{t+1}$ คือตัวชี้วัดว่าจะให้ความสำคัญกับการสังเกตใหม่เทียบกับการทำนายมากน้อยเพียงใด

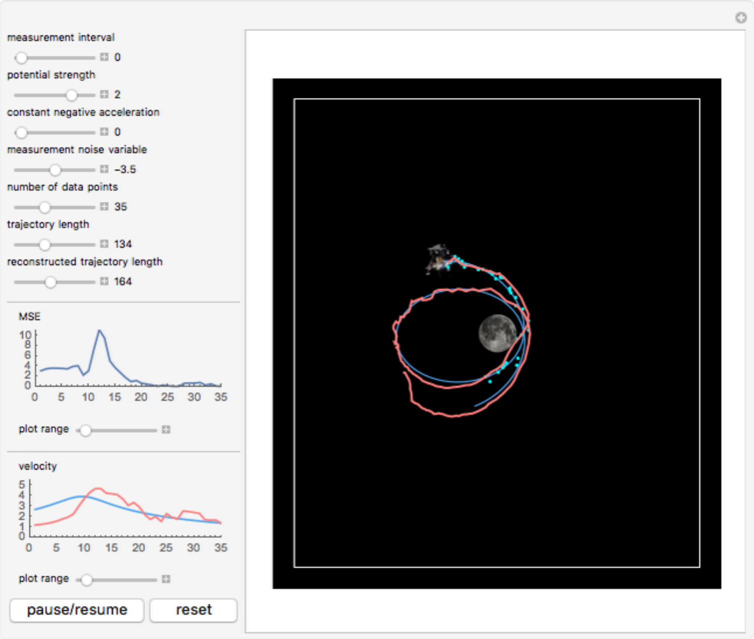
คอมพิวเตอร์นำทางของอพอลโล

คอมพิวเตอร์นำทางของอพอลโล (Apollo Guidance Computer) ใช้ตัวกรองคาลมานเพื่อประมาณตำแหน่งของยานอวกาศ ตัวกรองคาลมานถูกใช้เพื่อรวมข้อมูลใหม่เข้ากับการวัดตำแหน่งในอดีตเพื่อสร้างค่าประมาณตำแหน่งที่ดีที่สุดของยานอวกาศ





—
ที่มา: ซอร์สโค้ดของอพอลโล-11

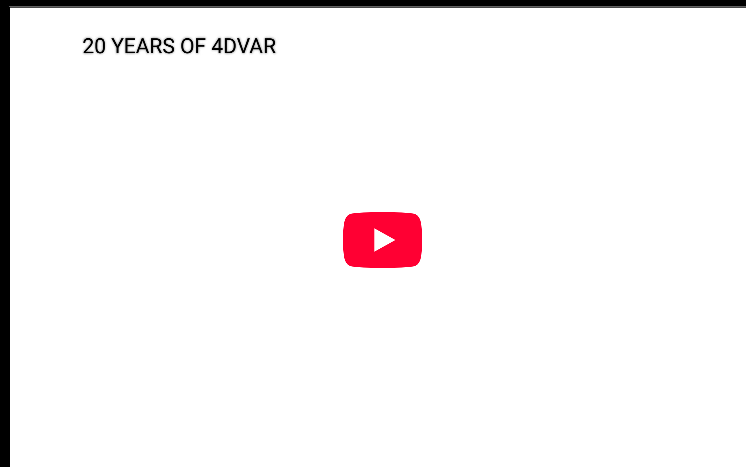


สาธิต: การติดตามวัตถุในอวกาศโดยใช้ตัวกรองคาลมาน

การดูดกลืนข้อมูลสำหรับการพยากรณ์อากาศ

ในการพยากรณ์อากาศ การกรองถูกใช้เพื่อรวมการสังเกตการณ์บรรยากาศเข้ากับแบบจำลองเชิงตัวเลขเพื่อประมาณสถานะปัจจุบันของมัน สิ่งนี้เรียกว่า การดูดกลืนข้อมูล (data assimilation)

จากนั้น แบบจำลองจะถูกใช้เพื่อทำนายสถานะในอนาคตของบรรยากาศ


20 YEARS OF 4DVAR

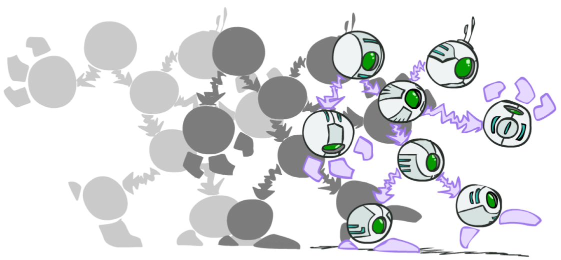
การดูดกลืนข้อมูลสำหรับการพยากรณ์อากาศ

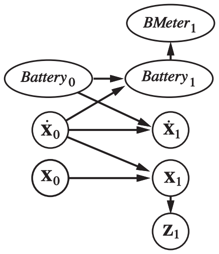
ในการพยากรณ์อากาศ การกรองถูกใช้เพื่อรวมการสังเกตการณ์บรรยากาศเข้ากับแบบจำลองเชิงตัวเลขเพื่อประมาณสถานะปัจจุบันของมัน สิ่งนี้เรียกว่า การดูดกลืนข้อมูล (data assimilation)

จากนั้น แบบจำลองจะถูกใช้เพื่อทำนายสถานะในอนาคตของบรรยากาศ


20 YEARS OF 4DVAR

เครือข่ายเบย์แบบพลวัต (Dynamic Bayesian networks)





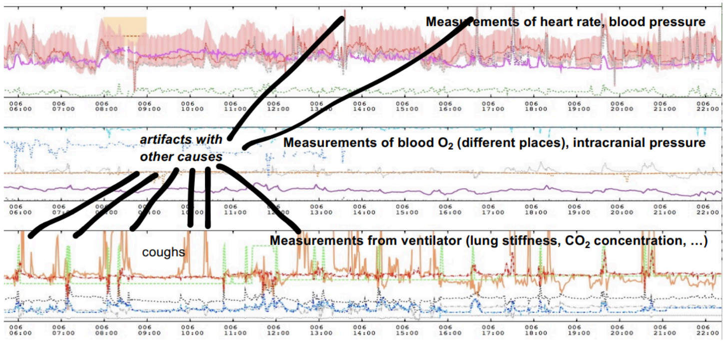
เครือข่ายเบย์แบบพลวัต (Dynamic Bayesian networks - DBNs) สามารถใช้ในการติดตามตัวแปรหลายตัวเมื่อเวลาผ่านไป โดยใช้แหล่งข้อมูลหลายแหล่ง แนวคิดคือ:

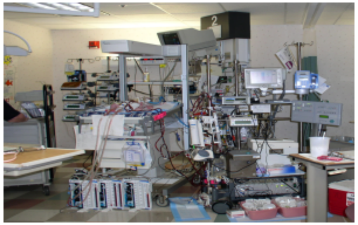
- ทำซ้ำโครงสร้างเครือข่ายเบย์คงที่ในแต่ละช่วงเวลา t
- ตัวแปรจากเวลา t ขึ้นอยู่กับตัวแปรจาก $t-1$

DBNs เป็นการขยายแนวคิดของ HMMs และตัวกรองคาลมาน

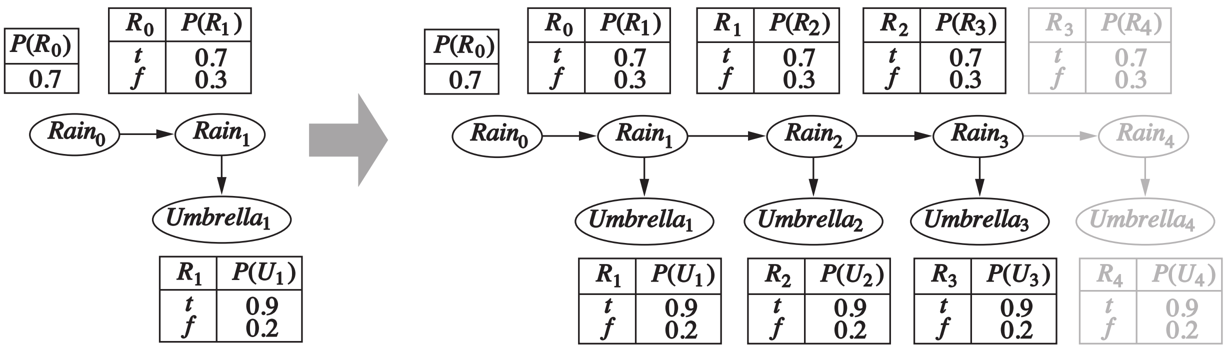
ที่มา: CS188, UC Berkeley.

การประยุกต์ใช้: การเฝ้าระวังในห้องไอซียู





การอนุมานที่แม่นยำ (Exact inference)



คลี่เครือข่ายออกตามเวลาและใช้อัลกอริทึมการอนุมานที่แม่นยำใดๆ (เช่น การกำจัดตัวแปร)

- ปัญหา: ค่าใช้จ่ายในการอนุมานสำหรับการอัปเดตแต่ละครั้งจะเพิ่มขึ้นตาม t
- การกรองแบบรวบยอด (Rollup filtering): เพิ่มช่วงเวลา $t+1$ แล้วหาผลรวมของช่วงเวลา t โดยใช้การกำจัดตัวแปร
  - ปัจจัยที่ใหญ่ที่สุดคือ $O(d^{n+k})$ และค่าใช้จ่ายในการอัปเดตทั้งหมดต่อขั้นตอนคือ $O(nd^{n+k})$
  - ดีกว่า HMMs ซึ่งเป็น $O(d^{2n})$ แต่ยังคงไม่สามารถทำได้จริงสำหรับตัวแปรจำนวนมาก

ตัวกรองอนุภาค (Particle filter)

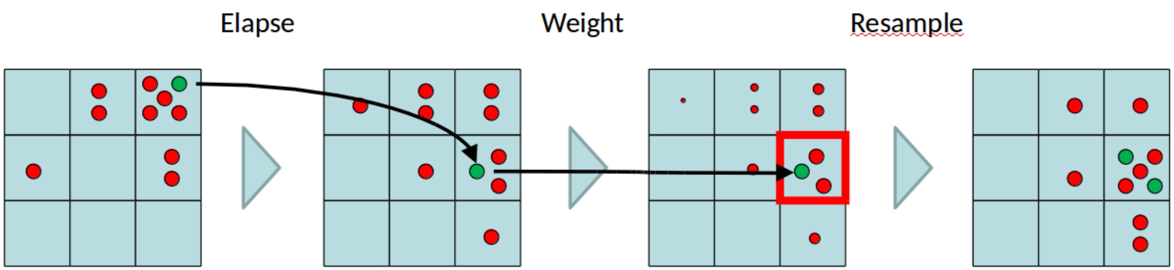
แนวคิดพื้นฐาน:

- รักษาประชากรจำกัดของตัวอย่าง เรียกว่า อนุภาค (particles)
  - การแสดงความเชื่อของเราคือรายการของอนุภาค N ตัว
- ตรวจสอบให้แน่ใจว่าอนุภาคติดตามบริเวณที่มีความน่าจะเป็นสูงของปริภูมิสถานะ
- ทิ้งตัวอย่างที่มีน้ำหนักต่ำมากตามหลักฐาน
- ทำซ้ำตัวอย่างที่มีน้ำหนักสูง

วิธีนี้สามารถปรับขนาดให้เข้ากับมิติที่สูงได้!

ที่มา: CS188, UC Berkeley.

วงจรการอัปเดต



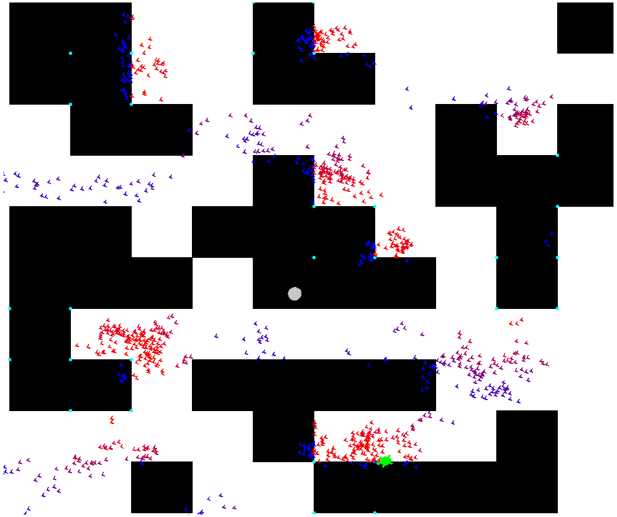
Particles:	Particles:	Particles:	(New) Particles:
(3,3)	(3,2)	(3,2) w=.9	(3,2)
(2,3)	(2,3)	(2,3) w=.2	(2,2)
(3,3)	(3,2)	(3,2) w=.9	(3,2)
(3,2)	(3,1)	(3,1) w=.4	(2,3)
(3,3)	(3,3)	(3,3) w=.4	(3,3)
(3,2)	(3,2)	(3,2) w=.9	(3,2)
(1,2)	(1,3)	(1,3) w=.1	(1,3)
(3,3)	(2,3)	(2,3) w=.2	(2,3)
(3,3)	(3,2)	(3,2) w=.9	(3,2)
(2,3)	(2,2)	(2,2) w=.4	(3,2)

ที่มา: CS188, UC Berkeley.

function PARTICLE-FILTERING($\mathbf{e}$, N, dbn) **returns** a set of samples for the next time step
  inputs: $\mathbf{e}$, the new incoming evidence
    N, the number of samples to be maintained
    dbn, a DBN with prior $\mathbf{P}(\mathbf{X}_0)$, transition model $\mathbf{P}(\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_0)$, sensor model $\mathbf{P}(\mathbf{E}_1|\mathbf{X}_1)$
  persistent: S, a vector of samples of size N, initially generated from $\mathbf{P}(\mathbf{X}_0)$
  local variables: W, a vector of weights of size N

  for i = 1 to N **do**
    $S[i] \leftarrow$ sample from $\mathbf{P}(\mathbf{X}_1 \mid \mathbf{X}_0 = S[i])$ /* step 1 */
    $W[i] \leftarrow \mathbf{P}(\mathbf{e} \mid \mathbf{X}_1 = S[i])$ /* step 2 */
  $S \leftarrow$ WEIGHTED-SAMPLE-WITH-REPLACEMENT(N, S, W) /* step 3 */
  return S

การหาตำแหน่งหุ่นยนต์ (Robot localization)



(ดูการสาธิต)

สรุป

- แบบจำลองเชิงเวลาใช้ตัวแปรสถานะและเซ็นเซอร์ที่ทำซ้ำเมื่อเวลาผ่านไป
    - จุดประสงค์คือเพื่อรักษาสถานะความเชื่อเมื่อเวลาผ่านไปและเมื่อมีหลักฐานมากขึ้น
- ข้อสมมติของมาร์คอฟและความนิ่งหมายความว่าเราต้องระบุเพียง
    - แบบจำลองการเปลี่ยนสถานะ $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{X}_t)$
    - แบบจำลองเซ็นเซอร์ $\mathbf{P}(\mathbf{E}_t|\mathbf{X}_t)$
- งานการอนุมานรวมถึงการกรอง, การทำนาย, การปรับให้เรียบ และการค้นหาลำดับที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุด
- อัลกอริธึมตัวกรองทั้งหมดมีพื้นฐานมาจากแนวคิดหลักของ
    - การฉายภาพสถานะความเชื่อปัจจุบันผ่านแบบจำลองการเปลี่ยนสถานะ
    - การอัปเดตการทำนายตามหลักฐานใหม่

The end.