Teoría de la Información

Trabajo Integrador N°1

- Integrantes: Gutiérrez Paredes José María
- Email: GutierrezJoseMaria01@hotmail.com

- Fecha de entrega: 13/10
- Repositorio: https://github.com/guteeeeeeeee/teoriaInformacion.git

Índice

I. Resumen _____3

II. Introducción_____4

III. Desarrollo Primera Parte_____5

IV. Desarrollo Segunda Parte_____8

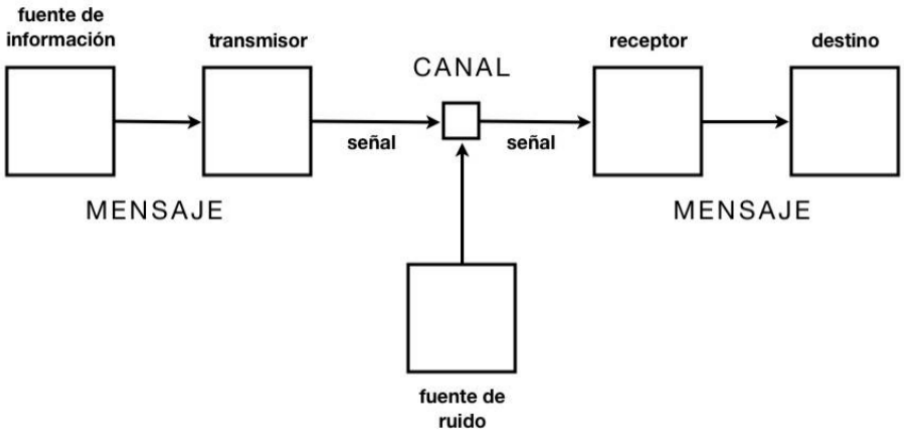
V. Conclusiones_____10

Resumen

Este trabajo consiste en asimilar todos los conceptos relacionados con la teoría de la información y la comunicación. Esta rama de las matemáticas surgió a finales de la década del 40 como una respuesta a los problemas técnicos del proceso de comunicación. El significado del mensaje no es relevante en este contexto, sino que el interés principal lo constituye todo aquello relacionado con la capacidad y fidelidad para transmitir información de los diferentes sistemas de comunicación.

Introducción

El trabajo consiste en, a partir de un archivo provisto por la cátedra, plasmar todos los contenidos vistos en la materia. Para ello se desarrollará funciones en código creadas por nuestra cuenta para calcular los valores necesarios para arribar a las conclusiones. Entre las funciones se pueden encontrar calcular las probabilidades condicionales, probabilidades independientes, calcular cantidad de información, entropía, entre otros, los cuales son conceptos estudiados durante la cursada. Para ello se necesita saber qué es un modelo de comunicación (de Shannon y Weaver).



Este modelo se podría resumir en que la fuente de información produce un cierto número de símbolos que forman el mensaje a transmitir, este a su vez pasa por un transmisor que lo codifica en señales o códigos. Se envía por un canal de comunicación el cual es el medio por el que se transportan las señales codificadas. Puede haber ruido que perturbe o modifique la señal transportada. El receptor recibe el mensaje codificado y debe ser capaz de desencriptarlo para que finalmente el receptor pueda entenderlo. Lo que buscamos es código compacto y decodificable principalmente.

Desarrollo

Una fuente de información genera en cada instante de tiempo un determinado símbolo elegido de su alfabeto (símbolos posibles) según sus probabilidades de emisión. Se puede clasificar según el rango de valores, continua si es un rango continuo de valores o discreta si es un conjunto finito de valores los que genera. Y según su relación entre los símbolos sin memoria o de memoria nula si los símbolos son estadísticamente independientes unos de otros y con memoria si los símbolos son estadísticamente independientes.

Con el archivo provisto se obtuvieron los siguientes resultados:

```
frecuencia de cada simbolo de la fuente:
A 5263.000000 B 2927.000000 C 1810.000000
frecuencia de cada i si salio el simbolo j:
AA 2924.000000 | AB 1620.000000 | AC 719.000000 |
BA 1800.000000 | BB 62.000000 | BC 1065.000000 |
CA 539.000000 | CB 1245.000000 | CC 25.000000 |
probabilidad de cada simbolo de manera independiente:
A 0.526300 B 0.292700 C 0.181000
probabilidades condicionales:
AA 0.555577 | AB 0.553468 | AC 0.397238 |
BA 0.342010 | BB 0.021182 | BC 0.588398 |
CA 0.102413 | CB 0.425350 | CC 0.013812 |
La fuente no es de memoria nula
La fuente es ergodica
Entropia de la fuente: 1.179365 bits
```

Para ello se utilizó la función *procesarArchivo* la cual consiste en:

Se tiene una matriz de probabilidades condicionales y un vector de probabilidades individuales.

Abre el archivo, lee el primer carácter, aumenta su frecuencia en uno en el vector de probabilidades individuales y lo guarda como carácter anterior ya que falta otro para formar la probabilidad condicional. Además, aumenta en uno el contador de caracteres leídos.

**Lee el siguiente carácter y lo guarda como carácter actual, aumenta su frecuencia en el vector de prob. Individuales y también aumenta su frecuencia en la matriz de probabilidades condicionales en los índices i y j tales que mat[i][j] es la frecuencia de que salga i (carácter actual) luego de j (carácter anterior). Se lo guarda como índice anterior, aumenta nuevamente el contador de caracteres leídos y vuelve a * iterando hasta el fin del archivo.*

Una vez calculadas todas las frecuencias operamos con la matriz de probabilidades condicionales donde a cada elemento mat[i][j] se la divide por prob[j] ya que la suma de las filas de cada columna debe dar uno de probabilidad. Así queda conformada la matriz de probabilidades condicionales.

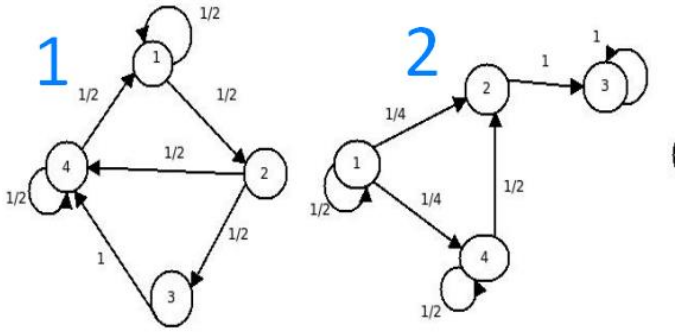
Luego a cada índice del vector de probabilidades individuales prob[i] se las divide por la cantidad de caracteres leídos almacenados en la variable contador para poder obtener la probabilidad de que salga cada símbolo de manera independiente. Así queda conformado el vector de probabilidades individuales/independientes.

Luego de obtener todas las probabilidades se puede determinar si es una fuente de memoria nula o no nula mediante la función *esMemoriaNula*.

*Recorre toda la matriz de probabilidades condicionales mientras se cumpla la condición de que la probabilidad condicional se asemeje al producto de las probabilidades individuales Prob(i/j) == prob[i]*prob[j] en el código se le da un cierto margen (0.001) al ser iteraciones finitas.*

En el caso de que se cumpla siempre la condición entonces la función devuelve true en caso contrario false.

Al determinarse que se trata de una fuente de memoria no nula se trata de determinar si se trata de una fuente ergódica o no. Una fuente ergódica consiste en que todos los símbolos son alcanzables desde otro.



En el caso de los siguientes grafos que representan a fuentes de información de Markov, el grafo 1 se trata de una fuente ergódica ya que todos los símbolos son alcanzables desde otro en cambio el 2 no ya que desde el nodo 3 no se puede alcanzar a ningún otro salvo a sí mismo.

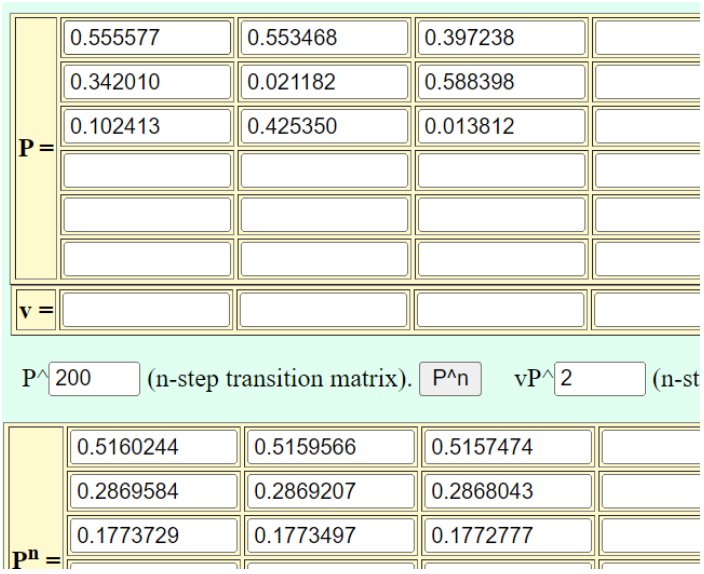
Para determinarlo en el código me apoyo en el algoritmo de Marshall inicializando la matriz de pesos en 1 si hay probabilidad de que ocurra i si salió j, 0 en las diagonales ya que todo nodo es alcanzable por sí mismo y 99 (valor infinito) si no hay probabilidad de que ocurra.

Itera con todos los valores posibles de i y j buscando todos los posibles "puentes" k. Finalmente se muestran todas las posibles uniones entre nodos, directa o indirectamente. Es decir, si de i a j no hay probabilidad, es posible que si haya de i a k y luego de k a j.

En caso de que todos sean alcanzables, es decir, no hay caminos de peso infinito entonces devuelve true la función sino false.

Al determinarse que se trata de una fuente ergódica se busca calcular su vector estacionario.

Para ello se debe restar la matriz de probabilidades con la matriz identidad y multiplicar por el vector estacionario para encontrar el vector de igual dimensión con todos valores 0.



Siendo el vector estacionario = [0.5160244, 0.2869584, 0.1773729].

El vector estacionario almacena las probabilidades de cada símbolo de la fuente cuando ésta comienza a estabilizarse/estacionarse luego de un tiempo t.

Para calcular la entropía de la fuente se debe aplicar la siguiente fórmula desarrollada en la función *entropiaFuente*.

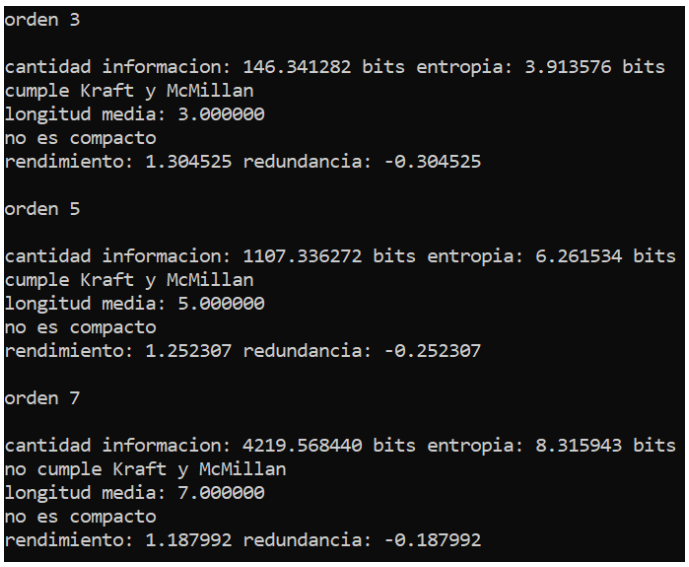
$$H_1 = \sum_i p_i * \sum_j p_{j/i} \log \frac{1}{p_{j/i}}$$

**Se recorre la matriz de probabilidades condicionales fijando la columna y acumulando por filas la prob[i][j] * log2(1/prob[i][j]) en la variable acumParcial. Una vez acumulados todos los valores de cada fila se multiplica acumParcial por el vector estacionario en el índice correspondiente a la columna fijada (variable estacionaria) y se acumula en la variable acumTotal. Se incrementa la columna y vuelve a iterar *. Finalmente devuelve el acumTotal con el valor de la entropía de la fuente.*

Este valor, la entropía, puede interpretarse como el valor medio de la incertidumbre de un observador antes de conocer la salida.

Parte 2

Resultados luego de la ejecución del programa de la segunda parte:



Los códigos obtenidos a partir de leer el archivo tomando cadenas que representan código de longitud de 3, 5 y 7 caracteres son instantáneos porque al ser todos de la misma longitud no hay forma de que un código sea prefijo de otro.

Para calcular la cantidad de información se utiliza la fórmula $\sum_{cant\ símbolos} \log_2\left(\frac{1}{P(si)}\right)$ siendo *si* cada símbolo emitido por la fuente. Es la sumatoria de la cantidad de información que aporta cada símbolo emitido por la fuente. Y para calcular la entropía se utiliza $\sum_{cant\ símbolos} P(S_i)\ I(S_i)$, es decir, la sumatoria del producto entre la probabilidad de que sea emitido cierto símbolo de la fuente y la cantidad de información que aporta.

Estos cálculos son implementados en la función procesarPalabras, una vez calculadas las probabilidades de todos los símbolos de la fuente. Se recorre nuevamente cada índice del vector para realizar los cálculos reemplazando la probabilidad por su equivalente en el vector de probabilidades y la cantidad de información aplicando su fórmula correspondiente con ayuda de la siguiente igualdad donde log2(x) = log(x) / log(2).

La Inecuación de Kraft $\sum_{i=1}^{q} r^{-l_i} \leq 1$ donde *q* es la cantidad de palabras código, *r* la cantidad de símbolos diferentes que conforman el alfabeto código y *li* la longitud de cada palabra código.

Se aplica la inecuación y da como resultado que para los órdenes 3 y 5 se cumple mientras que para 7 no. Ésta nos indica que si se cumple la inecuación entonces es posible construir un código instantáneo con las longitudes dadas. Esto no significa que cualquier código que cumpla con esas longitudes será instantáneo, se debe verificar la condición de prefijo.

Luego con la misma desigualdad, pero dándole otro significado se tiene la Inecuación de McMillan que nos dice que si se cumple la desigualdad entonces existe un código univoco para las longitudes de código dadas.

La implementación consiste en recorrer, acumulando en un variable, el vector de longitud de cada palabra código, que en cada orden tendrán siempre la misma longitud (3, 5 o 7), elevar la cantidad de símbolos del alfabeto original (siempre será 3 ya que serán A, B y C) a la longitud negativa.

La longitud media del código dada por la siguiente expresión $\sum_{i=1}^{q} p_i \, l_i$ es el promedio del largo de cada palabra código. Está dado por la sumatoria del producto entre la probabilidad de la palabra código y su longitud. En este caso no es de mucha utilidad ya que se sabe de antemano que todas las longitudes serán fijas por lo tanto el valor de la longitud media será la cantidad caracteres que tomemos como palabras.

Un código compacto consiste en un código instantáneo cuya longitud media es mínima. En términos prácticos para que un código sea compacto se debe cumplir que $P_i = \left(\frac{1}{r}\right)^{a_i}$ siendo *ai* la longitud que debe tener la palabra código, *r* la cantidad de símbolos distintos del alfabeto.

Esto es implementado en el código con un ciclo que itera mientras se cumpla la condición de que el largo de la palabra sea igual a $\frac{\log(prob_i)}{\log\left(\frac{1}{cant\ simb\ distintos}\right)}$ *en el caso de que recorra todo el vector de probabilidades entonces se encontró un código compacto sino devuelve false.*

La eficiencia o rendimiento de un código se define como $\frac{H(S)}{L}$ siendo *H(S)* la entropía de la fuente y *L* la longitud media de la fuente. Se puede interpretar como una manera de indicar la cantidad de información importante con las longitudes usadas. A mayor cantidad de información relevante en menor longitud media este cociente se acercará a 1 que sería el 100% de rendimiento. También se encuentra la redundancia que se define como 1 – eficiencia y nos indica que hay información innecesaria que nos puede dificultar interpretar el mensaje codificado. Se busca máximo rendimiento y mínima redundancia.

Para codificar los símbolos se utilizó el método Shannon-Fano el cual es un método subóptimo cuyo fin es construir un código óptimo de acuerdo a las probabilidades de cada palabra código.

Para su implementación primero se tuvo que ordenar mediante el algoritmo Quicksort el vector de probabilidades (junto con el índice al que correspondía) de cada palabra código.

Entra al método recursivo con unos determinados i y j, donde comienza y donde termina esa segmentación del vector respectivamente. Luego se lo divide al vector en 2 partes buscando de que la diferencia entre la suma de las probabilidades entre ambas partes sea mínima. Una vez encontrada esa separación, a uno se le asigna 1 y a la otra 0. Y manda a llamar nuevamente al método desde donde comienza el vector hasta la mitad de la primera parte y también desde el siguiente de la mitad de la primera parte hasta donde termina el vector.

Conclusiones

Como conclusión se puede decir es un trabajo integrador interesante ya que se plasmaron todos los temas vistos hasta el momento en la materia combinando la teoría con la práctica. Durante la realización de este trabajo se comprendió que si bien un código puede cumplir con la inecuación de Kraft no es condición suficiente para afirmar que sea instantáneo. También que los valores eficiencia y redundancia son importantes ya que se puede ver que tanto aporta información valiosa un código en relación con la longitud de sus palabras. Se aprendió a calcular las longitudes que debe tener cada palabra código de acuerdo a su probabilidad y cantidad de símbolos fuente para que éste sea compacto.

Se arribó a la conclusión de que un buen código compacto es importante ya que así habrá un mayor ahorro en el almacenamiento y en la transmisión para así poder reducir el ruido que puede ocurrir en el canal de transmisión y que éste no afecte a la transmisión del mensaje.

A la hora de codificar con Shanon-Fano se evidenció que para los símbolos con mayor probabilidad de emisión se buscan códigos con longitudes más pequeñas o reducidas mientras que para los que poseen casi nula probabilidad su código es enorme en comparación.