

Instructions Ce devoir est strictement personnel. Toute ressemblance entre deux devoirs sera sévèrement pénalisée. Donner une référence aux résultats ou définitions pertinentes vues au cours. Vos réponses doivent être claires, complètes, rigoureuses, justifiées, soignées et lisibles.

Ce devoir compte 6 questions pour un total de 20 points.

1. Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ de rang n .
 - (a) (1 point) Montrer que A^*A est inversible ;
 - (b) (1 point) si A^*A est inversible, A est-elle nécessairement de rang n ?
 - (c) (1 point) qu'est-ce que cela signifie sur la relation entre m et n ?
2. Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ avec $m \geq n$.
 - (a) (2 points) Si A est de rang maximum, expliquer en détail comment utiliser la factorisation QR complète de A pour résoudre le problème ;
 - (b) (2 points) si A n'est pas de rang maximum, expliquer en détail comment utiliser la factorisation QR réduite de A pour trouver une solution (mais pas nécessairement la solution de norme minimale).
3. Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ et $\sigma_i, i = 1, \dots, \min(m, n)$, les valeurs singulières de A . Établir :
 - (a) (2 points) $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{\min(m, n)} \sigma_i^2$;
 - (b) (2 points) $\|A\|_2 = \sigma_1$;
 - (c) (2 points) si $m \geq n$, $\sigma_n = \min\{\|Ax\|_2 / \|x\|_2 \mid x \neq 0\}$.
4. Soit $a \in \mathbb{C}^m, a \neq 0$.
 - (a) (1 point) Donner une décomposition en valeurs singulières réduite de la matrice dont la seule colonne est a ;
 - (b) (1 point) donner une décomposition en valeurs singulières complète de la matrice du point précédent ;
 - (c) (1 point) donner une décomposition en valeurs et vecteurs propres de
$$\begin{bmatrix} 0 & a^* \\ a & 0 \end{bmatrix}.$$
5. (2 points) Donner une décomposition en valeurs et vecteurs propres de l'opérateur de Householder $H = I - 2ww^*$, où $\|w\| = 1$.
6. (2 points) Soit $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ un projecteur non nul. Montrer que $\|P\|_2 \geq 1$ et $\|P\|_2 = 1$ si et seulement si P est un projecteur orthogonal.

Bon travail !