Producto de Kronecker

Algebra Matricial: Proyecto Final

Carlos Cuauhtemoc Gutierrez Salazar

6 de diciembre de 2022

En matemáticas, se llama producto de Kronecker, denotado con $\otimes$, a una operación sobre dos matrices de tamaño arbitrario que da como resultado una matriz bloque. Es un caso especial del producto tensorial. El producto de Kronecker es diferente al producto de matrices habitual. Su nombre viene del matemático alemán Leopold Kronecker.

Definición:
Si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $p \times q$, entonces el producto de Kronecker $A \otimes B$ es la matriz bloque $mp \times nq$.

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \dots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

O de manera mas explicita:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}b_11 & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_11 & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ \dots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}b_11 & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_11 & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ \dots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}$$

Ya que el producto de Kronecker es un caso especial del producto tensorial, es **bilineal** y **asociativo**.

Si A, B y C son matrices y k un escala

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C \qquad \text{(si } B \text{ y } C \text{ son de iguales dimensiones)}$$

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C \qquad \text{(si } A \text{ y } B \text{ son de iguales dimensiones)}$$

$$(kA) \otimes B = A \otimes (kB) = k(A \otimes B)$$

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

El codigo adjunto a este texto demuestra estas propiedades.