FÍSICA II

LISTA DE EXERCÍCIOS DAS AULAS 1–10

Ivan Ramos Pagnossin

EXERCÍCIO 1

(a) Determine a força gravitacional que atrai um homem de 65 kg a uma mulher de 50 kg quando eles estão afastados de 0,5 m (considere-os partículas pontuais). **(b)** Qual é a energia potencial gravitacional dessa interação?

EXERCÍCIO 2 (portfólio)

Qual é a aceleração de queda livre de um corpo a uma altitude correspondente à órbita de um veículo espacial, a cerca de 400 km acima da superfície da Terra?

EXERCÍCIO 3

Determine a velocidade de escape na superfície de Mercúrio, que possui massa de $3{,}31 \times 10^{23}$ kg e raio de 2440 km.

EXERCÍCIO 4

Europa é um satélite do planeta Júpiter, cujo raio é 1569 km e a aceleração da gravidade, na sua superfície, de $1{,}39\ \mathrm{m/s^2}$.

(a) Calcule a velocidade de escape de Europa.

(b) Que altura um objeto alcançaria se fosse lançado para cima com uma velocidade de 1,01 km/s?

(c) Com que velocidade um objeto atingiria o satélite se ele fosse largado de uma altura de 1000 km?

(d) Calcule a massa de Europa.

EXERCÍCIO 5

Um projétil é lançado em linha reta para cima, a partir da superfície da Terra, com velocidade 15 km/s. Determine a velocidade do projétil quando ele estiver bem afastado da Terra (ignore a resistência do ar. O raio da Terra é 6370 km).

EXERCÍCIO 6

O asteróide Eros, um dos "planetas menores" que orbitam o Sol na região entre Marte e Júpiter, tem raio de 7 km e massa 5×10^{15} kg.

(a) Se você estivesse em Eros, poderia levantar uma caminhonete de 2000 kg?

(b) Você poderia correr rápido o suficiente para escapar da atração gravitacional de Eros?[1]

EXERCÍCIO 7

Duas partículas puntiformes, cada uma com massa M, são fixadas sobre o eixo y em $y = +a$ e $y = -a$. Determine o campo gravitacional $\vec{g}$ para todos os pontos sobre o eixo x, como função de x.

EXERCÍCIO 8

Considere um sistema isolado formado por três esferas. Duas delas, de massas $m_1 = 7{,}16$ kg e $m_2 = 2{,}53$ kg, são separadas por uma distância de centro a centro de 1,56 m. A terceira, de massa $m_3 = 212$ g, está posicionada a 42 cm do centro da esfera m_2, ao longo da linha que liga os centros.

(a) Quanto trabalho deve ser realizado por um agente externo para mover a esfera m_3 ao longo da linha que liga os centros e posicioná-la a 42 cm do centro da esfera m_1.

(b) Se m_3 fosse levado à sua posição final por outro caminho, esse resul-

[1]Nota: os recordes olímpicos de tempo para a corrida de 400 m é de 43,49 s para homens (Michael Johnson — EUA, 1996) e de 48,26 s para mulheres (Marie-José Pérec — França, 1996).

tado seria diferente? Por quê?

EXERCÍCIO 9

Desafio: mostre que a energia total de um objeto em órbita circular é igual à metade de sua energia potencial gravitacional. Nota: numa órbita circular, a velocidade orbital permanece constante.

EXERCÍCIO 10

O semi-eixo maior da órbita de Júpiter é 5,2 UA (unidades astronômicas).[2] Sabendo que o semi-eixo maior da órbita da Terra é 1 UA, qual é o período de translação de Júpiter, em anos terrestres?

EXERCÍCIO 11

O período de Netuno é de 164,8 anos terrestres. Qual é o valor de sua distância média ao Sol, em unidades astronômicas (UA)?

EXERCÍCIO 12

Procure na Internet pelo período T de translação e pelo semi-eixo maior a da órbita de cada planeta do Sistema Solar.[3]

(a) Faça um gráfico de $T \times a$.

Dica: utilize UA como unidade de distância e "anos terrestres" como unidade de tempo.

(b) Faça um gráfico de $T^2 \times a^3$.

Dica: ao invés de um gráfico, faça dois: um para os planetas Mercúrio, Vênus, Terra e Marte; e o outro para Júpiter, Saturno, Urano, Netuno e Plutão.

(c) No gráfico do item anterior, os pontos alinham-se. Qual é o valor do coeficiente angular, no Sistema Internacional de Unidades (SI)? Compare-o com a constante $4\pi^2/(GM_\odot)$. $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m²/kg² é a constante universal da gravidade e $M_\odot = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg é a massa do Sol.

EXERCÍCIO 13

A Estação Espacial Internacional move-se segundo uma órbita aproxi-

[2] 1 UA = 149 597 871 km. Note, entretanto, que você não precisa dessa informação para resolver o exercício.
[3] Ao invés do semi-eixo maior da órbita, você também pode utilizar a distância média entre o planeta e o Sol.

madamente circular em torno da Terra. Considerando que ela esteja a 385 km acima da superfície da Terra, qual é o período da órbita?

EXERCÍCIO 14 (portfólio)

Júpiter é o maior planeta do Sistema Solar. Sua massa é de aproximadamente $M_{♃} = 1{,}9 \times 10^{27}$ kg (318 vezes mais massivo que a Terra) e possui mais de cinquenta luas (satélites naturais) conhecidas. As quatro maiores delas, visíveis da Terra com um pequeno telescópio e descobertas por Galileu Galilei no século XVII, são: Io, Europa, Ganimedes e Calisto. Você, ao reproduzir a observação de Galileu, mediu os seguintes períodos de revolução em torno de Júpiter: 42,5 h para Io, 85,2 h para Europa, 171,6 h para Ganimedes e 400,6 h para Calisto. Com esses dados *apenas* e conhecendo a constante universal da gravidade, monte o gráfico $T^2 \times a^3$ desse sistema planetário.

GABARITO

EXERCÍCIO 1

(a) $8{,}67 \times 10^{-7}$ N; **(b)** $-4{,}33 \times 10^{-7}$ J.

EXERCÍCIO 2 (portfólio)

$8{,}7$ m/s^2

EXERCÍCIO 3

4,25 km/s.

EXERCÍCIO 4

(a) 2,09 km/s; **(b)** 478,9 km/s; **(c)** 1,303 km/s; **(d)** $5{,}13 \times 10^{22}$ kg.

EXERCÍCIO 5

10 km/s.

EXERCÍCIO 6

(a) Sim; **(b)** Não.

EXERCÍCIO 7

$\vec{g} = -\frac{2GMx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\hat{i}$

EXERCÍCIO 8

(a) $9{,}845 \times 10^{-11}$ J; **(b)** Não.

EXERCÍCIO 9

Dica: a aceleração centrípeta que sustenta a órbita circular é devida à gravidade.

EXERCÍCIO 10

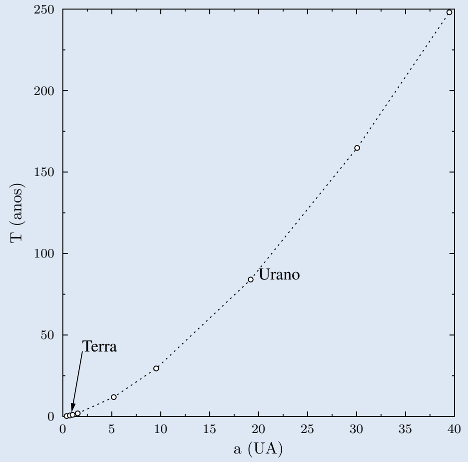
$11{,}9$ anos terrestres.

EXERCÍCIO 11

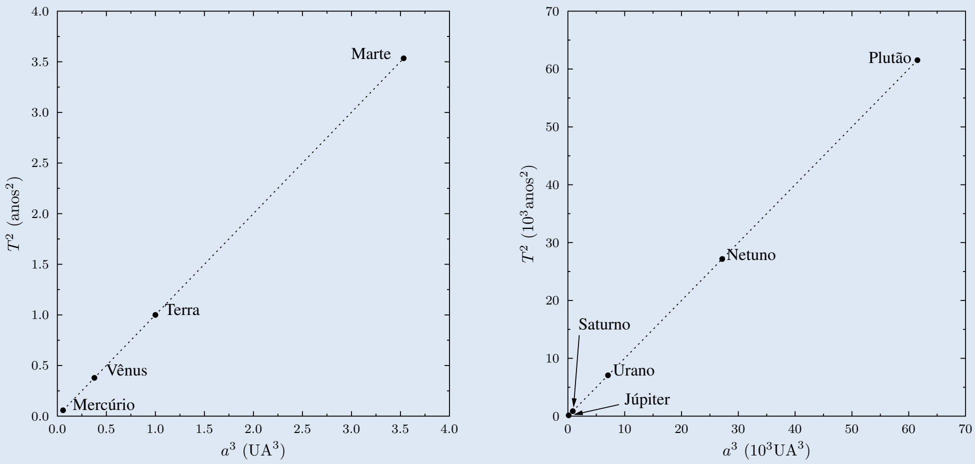
30,1 UA.

EXERCÍCIO 12

(a)



(b)

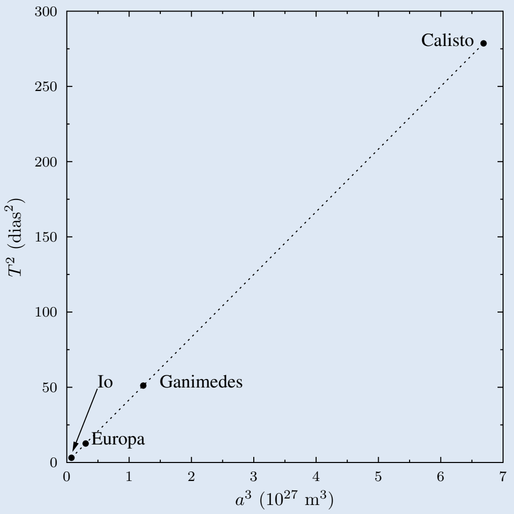


(c) O coeficiente angular é igual a $4\pi^2/(GM_\odot) = 2{,}97 \times 10^{-19}$ s^2/m^3.

EXERCÍCIO 13

92,1 min.

EXERCÍCIO 14 (portfólio)



Calisto
Ganimedes
Io
Europa
T^2 (dias^2)
a^3 (10^{27} m^3)
0
50
100
150
200
250
300
0
1
2
3
4
5
6
7

GABARITO DO MEDIADOR

EXERCÍCIO 1

(a) O módulo da força de interação gravitacional entre dois corpos puntiformes é dado pela lei da gravitação universal de Newton:

$$F = \frac{Gm_{\male}m_{\female}}{r^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 65 \cdot 50}{(0,5)^2} = 8{,}67 \times 10^{-7}\,\text{N}.$$

(b) A energia potencial gravitacional, por outro lado, é igual ao trabalho da força gravitacional, desde a posição r até o infinito. Sua expressão é:

$$U_g = -\frac{Gm_{\male}m_{\female}}{r} = -\frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 65 \cdot 50}{0,5} = -4{,}33 \times 10^{-7}\,\text{J}.$$

EXERCÍCIO 2 (portfólio)

O módulo da força gravitacional entre um corpo de massa m e a Terra (massa é $M = 5{,}98 \times 10^{24}\,\text{kg}$) é dada pela lei da gravitação universal de Newton: $F = GmM/r^2$, onde r é a distância entre esse corpo e o centro da Terra. Essa força causa uma aceleração em m, dada pela segunda lei de Newton:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{GM}{r^2}.$$

Mas $r = R + h$, onde $R = 6370\,\text{km}$ é o raio da Terra e $h = 400\,\text{km}$, a altitude da órbita. Então,

$$a = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 5,98 \times 10^{24}}{(6,37 \times 10^6 + 0,4 \times 10^6)^2} = 8{,}7\,\text{m/s}^2,$$

que é a aceleração de queda livre (aquela associada à gravidade).

EXERCÍCIO 3

A velocidade de escape v_e de Mercúrio é, por definição, a velocidade mínima que um corpo deve ter, na superfície, para conseguir livrar-se se sua atração gravitacional. “Livrar-se da sua atração gravitacional” significa que, no infinito, sua energia cinética terá toda ela sido convertida em energia potencial gravitacional. Ou seja, no infinito temos $K = 0$ (energia cinética nula). Mas no infinito, também a energia potencial gravitacional é nula:

$$U_g = -\frac{GMm}{r} \quad \Rightarrow \quad \lim_{r\to\infty} U_g = 0.$$

Ou seja, a energia mecânica do corpo é nula no infinito: $E = U_g + K = 0$. Mas a força gravitacional é conservativa, de modo que $E = 0$ a qualquer distância r do planeta, inclusive na sua superfície, onde $r = R$. Nessa posição, a energia mecânica do corpo é:

$$E = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_e^2 = 0.$$

Resolvendo essa igualdade para v_e obtemos a expressão da velocidade de escape de Mercúrio:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \times 10^{-11} \cdot 3,31 \times 10^{23}}{2,44 \times 10^6}} = 4{,}25\,\mathrm{km\,s^{-1}}.$$

EXERCÍCIO 4

(a) A força gravitacional entre Europa e um corpo de massa m na sobre a sua superfície é dada pela lei da gravitação universal de Newton: $F = GMm/R^2$, onde R é o raio de Europa. Pela segunda lei de Newton, essa força causa uma aceleração $g = F/m = GM/R^2$ que, pelo enunciado do exercício, é igual a $1{,}39\,\mathrm{m/s^2}$. Por outro lado, a velocidade de escape é dada por $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$, que pode então ser reescrita assim:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2\left(\frac{GM}{R^2}\right)R} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 1,39 \cdot 1,569 \times 10^6}$$
$$= 2{,}09\,\mathrm{km\,s^{-1}}.$$

(b) A única força considerada no problema é a gravitacional, entre o objeto e Europa. Como essa interação conserva a energia mecânica, podemos determiná-la nos dois pontos de interesse, A e B, e usar o princípio da conservação da energia mecânica: $E_A = E_B$.

A situação A é aquela na qual o objeto está na superfície ($r_A = R$), com velocidade inicial $v_A = 1{,}01\,\mathrm{km\,s^{-1}}$; a situação B é aquela na qual toda a energia cinética do objeto foi convertida em energia potencial gravitacional: $r_B = R + h$ e $v_B = 0$. h é a altura, acima da superfície de

Europa, que o objeto atinge. Deste modo, temos:

$$E_A = U_g(r_A) + K(v_A) = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_A^2$$
$$E_B = U_g(r_B) + K(v_B) = -\frac{GMm}{R+h}.$$

Usando $E_A = E_B$ e isolando h:

$$E_A = E_B \quad \Rightarrow \quad -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_A^2 = -\frac{GMm}{R+h} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{GM}{R^2}\right)R - \frac{1}{2}v_A^2 = \left(\frac{GM}{R^2}\right)\frac{R^2}{R+h} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad gR - \frac{1}{2}v_A^2 = g\frac{R^2}{R+h} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{gR^2}{gR - v_A^2/2} - R.$$

Manipulando um pouco mais essa expressão para h, obtemos um resultado equivalente, mas que requer menos contas:

$$h = \left(\frac{2g}{v_A^2} - \frac{1}{R}\right)^{-1} = \left[\frac{2 \cdot 1,39}{(1,01 \times 10^3)^2} - \frac{1}{1,569 \times 10^6}\right]^{-1} = 478\,\text{km}.$$

(c) Conceitualmente, esse problema é análogo ao anterior: a energia mecânica na situação inicial é:

$$E_A = -\frac{GMm}{R+h},$$

já que o objeto parte do repouso. Durante sua queda livre em direção à superfície do planeta, parte dessa energia potencial gravitacional é convertida em energia cinética. Assim ele atinge a superfície com velocidade v_B tal que:

$$E_B = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_B^2.$$

Como $E_A = E_B$, obtemos daí que:

$$v_B^2 = \frac{2gRh}{R+h} = \frac{2 \cdot 1,39 \cdot 1,569^6 \cdot 10^6}{1,569 \times 10^6 + 10^6} \quad \Rightarrow \quad v_B = 1{,}303\,\text{km}\,\text{s}^{-1}.$$

(d) Como $g = GM/R^2$, obtemos imediatamente que:

$$M = \frac{gR^2}{G} = \frac{1,39 \cdot \left(1,569 \times 10^6\right)^2}{6,67 \times 10^{-11}} = 5{,}13 \times 10^{22}\,\text{kg}.$$

EXERCÍCIO 5

Considere as duas situações A e B: em A o projétil está na superfície da Terra ($r = R = 6{,}37 \times 10^6$ m) e sua velocidade é $v_A = 1{,}5 \times 10^4\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$; em B

o projétil está muito afastado da Terra ($r \to \infty$) e sua velocidade é v_B, que queremos descobrir. Mas como a única força presente nesse problema é a gravitacional, que é conservativa, a energia mecânica em A e em B deve ser a mesma. Ou seja,

$$E_A = E_B \quad \Rightarrow \quad -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_A^2 = -\lim_{r\to\infty}\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv_B \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad -\frac{GM}{R} + \frac{1}{2}v_A^2 = \frac{1}{2}v_B^2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad v_B^2 = v_A^2 - 2\frac{GM}{R} = v_A^2 - 2gR \quad \Rightarrow \quad v_B = 10\,\mathrm{km\,s^{-1}},$$

onde utilizamos $g = GM/R^2 = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, a aceleração da gravidade na superfície da Terra, para simplificar.

EXERCÍCIO 6

(a) A intensidade da força necessária para levantar a caminhonete é igual à força-peso dela, que é dada pela lei da gravitação universal de Newton:

$$F = \frac{GMm}{R^2} = \frac{6,67\times10^{-11}\cdot 5\times10^{15}\cdot 2\times10^3}{(7\times10^3)^2} = 13{,}6\,\mathrm{N}.$$

Na Terra, F equivale à força-peso de um objeto cuja massa é $F/g = 1{,}39\,\mathrm{kg}$, com $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Ou seja, em Eros essa caminhonete pesaria tanto quanto um haltere de academia, de modo que você conseguiria levantá-la facilmente!

(b) Para desvencilhar-se da atração gravitacional de Eros, você precisaria correr tão ou mais rapidamente que a velocidade de escape dele:

$$v_e = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{2\cdot 6,67\times10^{-11}\cdot 5\times10^{15}/7\times10^3} = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

O recorde masculino (feminino) dos 400 m é de 43,49 s (48,25 s), o que corresponde à velocidade de $9{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ($8{,}3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$), que é menor que v_e. Portanto, nem mesmo o mais rápido corredor é capaz de correr rapidamente o suficiente para escapar da atração gravitacional de Eros.

EXERCÍCIO 7

Cada partícula produz um campo gravitacional, $\vec{g}_1$ e $\vec{g}_2$, cuja intensidade é:

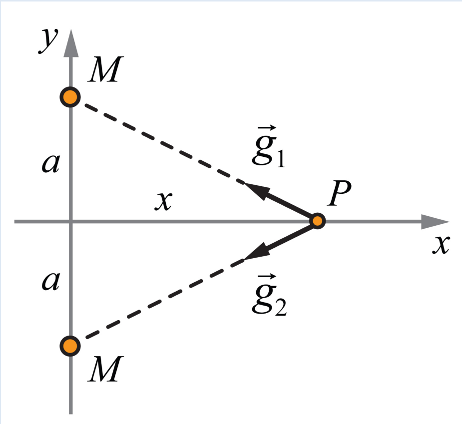
$$g_1 = g_2 = \frac{GM}{r^2},$$

onde r é a distância da partícula até o ponto P onde queremos determinar o campo gravitacional resultante (veja a figura abaixo). Pela simetria do problema, vemos que a componente y de $\vec{g}_1$ contrapõe-se precisamente à de $\vec{g}_2$. Deste modo, a componente y do campo gravitacional resultante é nula. Por outro lado, a componente x de $\vec{g}_1$ e de $\vec{g}_2$ somam-se e apontam no sentido negativo de x (vetorialmente, representamos por $-\hat{\imath}$). Assim,

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -2g_1 \cos(\theta)\hat{\imath},$$

onde θ é o ângulo associado ao ponto P (figura). Mas pelo triângulo-retângulo OPM, $\cos(\theta) = x/r$ e $r = \sqrt{x^2 + a^2}$. Então,

$$\vec{g} = -\frac{2GM}{r^2}\frac{x}{r}\hat{\imath} = -\frac{2GMx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\hat{\imath}.$$



Outra forma de resolver esse problema é partir da energia potencial gravitacional: se houvesse um objeto de massa m em P, teríamos $U_g = -2GMm/r$, onde $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ é a distância entre os corpos M e m. Como a força gravitacional é derivada da energia potencial gravitacional, temos:

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dx}\hat{\imath} = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{2GMm}{r}\right)\hat{\imath} = -\frac{2GMmx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\hat{\imath}.$$

Pela segunda lei de Newton, essa força gravitacional causaria em m uma aceleração

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{2GMx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\hat{\imath},$$

que é o resultado desejado.

EXERCÍCIO 8

(a) Considere que A seja a posição inicial e B, a final. Ao longo do deslocamento entre A e B, há duas forças agindo sobre m_3: a força gravitacional $F_g(x)$ resultante da interação com m_1 e m_2 e a força externa F_e. Deste modo, o trabalho *total* realizado sobre m_3 é:

$$\begin{aligned} W_{A\to B} &= \int_A^B \left(F_g + F_e\right) dx = \int_A^B F_g\, dx + \int_A^B F_e\, dx \\ &= W^g_{A\to B} + W^e_{A\to B}, \end{aligned}$$

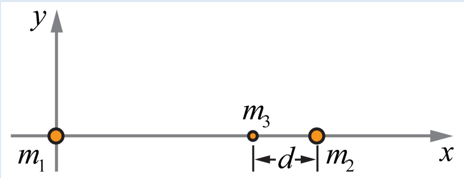
onde $W^g_{A\to B}$ é o trabalho da força gravitacional apenas e $W^e_{A\to B}$, da força externa apenas. Mas $W_{A\to B} = \Delta K$ (teorema trabalho-energia cinética), onde ΔK é a variação da energia cinética entre A e B. Contudo, como a esfera m_3 parte do repouso (em A) e termina em repouso (em B), $\Delta K = 0$. Ou seja, o trabalho *total* (ie, das forças gravitacional e externa) deve ser nulo:

$$W_{A\to B} = W^g_{A\to B} + W^e_{A\to B} = 0 \quad \Rightarrow \quad W^e_{A\to B} = -W^g_{A\to B}. \tag{1}$$

Em palavras: o trabalho da força externa, que interessa-nos conhecer, é o oposto do trabalho realizado pela força gravitacional. Resta determinar $W^g_{A\to B}$. Há duas formas de fazer isso: a primeira delas é calcular diretamente o trabalho da força gravitacional ao longo do deslocamento considerado:

$$W^g_{A\to B} = \int_A^B F_g(x)\, dx.$$

A outra forma, mais simples, é lembrar que a força gravitacional é conservativa e que, por isso, vale $W^g_{A\to B} = -\Delta U_g$. Isto é, o trabalho da força gravitacional em levar a esfera m_3 de A até B é igual ao oposto da variação da energia potencial gravitacional U_g. Mas as energias potenciais gravitacional em A e em B são:



$$U_g(A) = -\frac{Gm_1m_3}{d} - \frac{Gm_2m_3}{D-d} \qquad U_g(B) = -\frac{Gm_1m_3}{D-d} - \frac{Gm_2m_3}{d},$$

onde $D = 1{,}56\,\mathrm{m}$ é a distância entre as esferas m_1 e m_2 e $d = 42\,\mathrm{cm}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
W^g_{A\to B} &= -\Delta U_g = -\left[U_g(B) - U_g(A)\right] \\
&= -\left[\left(-\frac{Gm_1m_3}{D-d} - \frac{Gm_2m_3}{d}\right) - \left(-\frac{Gm_1m_3}{d} - \frac{Gm_2m_3}{D-d}\right)\right] \\
&= -Gm_3(m_2 - m_1)\left(\frac{1}{D-d} - \frac{1}{d}\right) \\
&= -9{,}845 \times 10^{-11}\,\text{J}.
\end{aligned}$$

Finalmente, levando esse resultado em (1), obtemos a resposta desejada:

$$W^e_{A\to B} = 9{,}845 \times 10^{-11}\,\text{J}.$$

(b) Como a força gravitacional é conservativa, seu trabalho sobre m_3 é independente do percurso. De fato, $W^g_{A\to B} = U_g(A) - U_g(B)$. Como consequência da análise no item anterior, também $W^e_{A\to B}$ será independente do percurso.

EXERCÍCIO 9

Suponha que a órbita em questão tenha raio a. Neste caso, a energia potencial gravitacional entre o objeto em órbita, de massa m, e o objeto no centro da órbita, de massa M, é constante: $U_g = -GMm/a$. Nessa órbita circular, a velocidade orbital v do objeto não muda (isso decorre da conservação do momento angular) e a força centrípeta necessária para sustentar esse movimento é dada pela força gravitacional:

$$F_{\text{centrípeta}} = \frac{mv^2}{a} = \frac{GMm}{a^2} = \left(\frac{GMm}{a}\right)\frac{1}{a} = -\frac{U_g}{a} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad mv^2 = -U_g \quad \Rightarrow \quad 2K = -U_g \quad \Rightarrow \quad K = -U_g/2.$$

Mas a energia mecânica é $E = U_g + K = U_g - U_g/2 = U_g/2$, como queríamos demonstrar.

EXERCÍCIO 10

Pela terceira lei de Kepler,

$$\frac{T^2_{♃}}{a^3_{♃}} = \frac{T^2_{♁}}{a^3_{♁}} \quad \Rightarrow \quad T_{♃} = T_{♁}\left(\frac{a_{♃}}{a_{♁}}\right)^{3/2} = 1\cdot\left(\frac{5,2}{1}\right)^{3/2} \approx 11{,}9\,\text{anos}.$$

Na expressão acima, T representa o período, a é o semi-eixo maior e os símbolos ♃ e ♁ representam Júpiter e a Terra, respectivamente.

EXERCÍCIO 11

Pela terceira lei de Kepler,

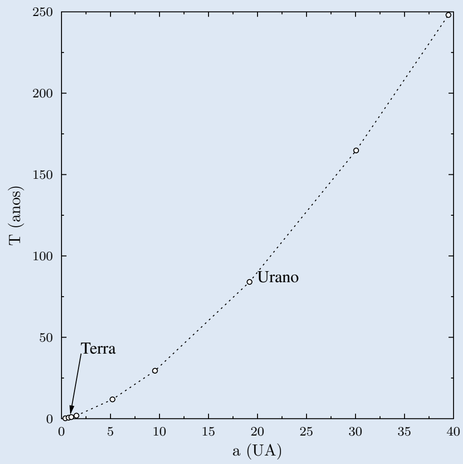
$$\frac{T_{♆}^2}{a_{♆}^3} = \frac{T_{♁}^2}{a_{♁}^3} \quad \Rightarrow \quad a_{♆} = a_{♁}\left(\frac{T_{♆}}{T_{♁}}\right)^{2/3} = 1 \cdot \left(\frac{164,8}{1}\right)^{2/3} \approx 30{,}1\ \text{UA}.$$

Na expressão acima, T representa o período, a é o semi-eixo maior e os símbolos ♆ e ♁ representam Netuno e a Terra, respectivamente.

EXERCÍCIO 12

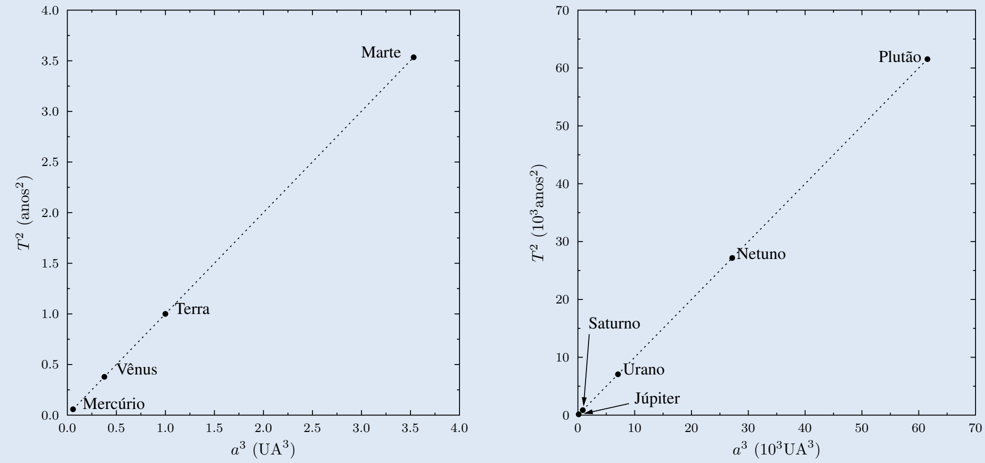
(a) O período e o semi-eixo maior dos planetas do Sistema Solar são:

Planeta	T (anos)	a (UA)
Mercúrio	0.387	0.241
Vênus	0.723	0.615
Terra	1	1
Marte	1.523	1.88
Júpiter	5.203	11.867
Saturno	9.539	29.461
Urano	19.185	84.03
Netuno	30.061	164.815
Plutão	39.479	248.057



obs.: há alguns anos, a União Astronômica Internacional criou uma definição formal de planeta, visando classificar diversos outros objetos que orbitam o Sol. Como consequência dela, Plutão deixou de ser considerado um planeta. Hoje ele é um "planeta anão".

(b) O gráfico de $T^2 \times a^3$ é mais complicado de fazer, pois a escala varia muito. Note, por exemplo, que no gráfico à direita, a abscissa e a ordenada têm um fator mil multiplicando os valores. Por isso separamos os planetas em dois grupos: Mercúrio a Marte e Júpiter a Plutão.



(c) Tome, por exemplo, o período de translação e o semi-eixo maior da Terra: $T_{\oplus} = 3{,}1536 \times 10^7$ s e $a = 1{,}495\,978\,71 \times 10^{11}$ m. O coeficiente angular do gráfico $T^2 \times a^3$ é:

$$\frac{\left(3{,}1536 \times 10^7\ \text{s}\right)^2}{\left(1{,}495\,978\,71 \times 10^{11}\ \text{m}\right)^3} = 2,97 \times 10^{-19}.$$

Esse cálculo pode ser feito para qualquer planeta do Sistema Solar (na verdade, para qualquer astro em órbita do Sol), e o resultado será sempre o mesmo. Por outro lado,

$$\frac{4\pi^2}{M_{\odot}G} = \frac{4\pi^2}{1,99 \times 10^{30} \cdot 6,67 \times 10^{-11}} = 2,97 \times 10^{-19}.$$

Deste modo vemos como Newton conseguiu deduzir, com sucesso, a terceira lei de Kepler (as outras duas também) partindo apenas de sua lei da gravitação universal e das três leis da dinâmica (com isso, Newton demonstrou ainda que as leis que governam o movimento dos astros, na época tidos como domínio do divino, eram as mesmas que valiam na Terra). Dito de outra forma, Kepler percebeu que T^2/a^3 é o mesmo para todos os planetas do Sistema Solar, mas não sabia explicar o motivo. Newton, partindo dos trabalhos de Kepler, compreendeu que esse fator depende exclusivamente da massa do Sol, e deste modo é possível estender a terceira lei de Kepler para qualquer sistema solar ou planetário, como você verá no exercício 14.

EXERCÍCIO 13

Segundo a versão de Newton da terceira lei de Kepler, $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\oplus}}a^3$, onde T é o período da órbita da estação espacial, $M_{\oplus}$ é a massa da Terra e a

é o semi-eixo maior da órbita da estação espacial. Mas $a = R_{♁} + h$, onde h é a altura da órbita (medida a partir da superfície da Terra e dada no enunciado do exercício). Então,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{♁}} a^3 = \frac{4\pi^2}{GM_{♁}} \left(R_{♁} + h\right)^3 = \frac{4\pi^2}{gR_{♁}^2} \left(R_{♁} + h\right)^3,$$

onde na última passagem utilizamos $g = GM_{♁}/R_{♁}^2$, a aceleração da gravidade na superfície da Terra. Agora resta fazer a conta:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}R_{♁}} \left(R_{♁} + h\right)^{3/2} = 5529\,\mathrm{s} = 92{,}1\,\mathrm{min}.$$

EXERCÍCIO 14 (portfólio)

Para o sistema planetário de Júpiter, vale $T^2 = 4\pi^2 a^3/\left(GM_{♃}\right)$, onde T é o período orbital de qualquer satélite (natural ou artificial) e a, seu semi-eixo maior.

$$C = \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{6,67 \times 10^{-11} \cdot 1,9 \times 10^{27}} = 3,11 \times 10^{-16}.$$

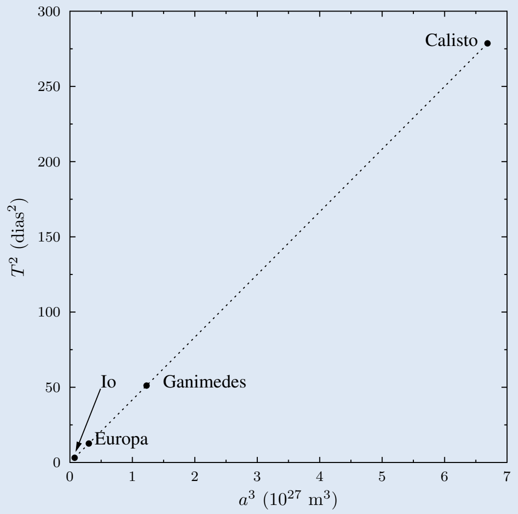
Agora, tendo C e os períodos das luas de Júpiter, podemos determinar o semi-eixo maior de cada uma:

$$a_{\mathrm{Io}}^3 = \frac{T_{\mathrm{Io}}^2}{C} = \frac{(42.5 \cdot 60 \cdot 60)^2}{3,11 \times 10^{-16}} \quad \Rightarrow \quad a_{\mathrm{Io}} \approx 422\,000\,\mathrm{km} = 0{,}422 \times 10^9\,\mathrm{m}$$

Fazendo o mesmo para os outros satélites, obtemos:

Satélite	T (dias)	a (1×10^9 m)
Io	1,77	0,422
Europa	3,55	0,671
Ganimedes	7,15	1,071
Calisto	16,69	1,884

Assim, o gráfico de $T^2 \times a^3$ fica assim:



Note que, para melhorar a apresentação do gráfico, o período foi expresso em dias terrestres e o semi-eixo maior, em 1×10^9 m.