

## FÍSICA II

### LISTA DE EXERCÍCIOS DAS AULAS 1–10

Ivan Ramos Pagnossin

#### EXERCÍCIO 1

**(a)** Determine a força gravitacional que atrai um homem de 65 kg a uma mulher de 50 kg quando eles estão afastados de 0,5 m (considere-os partículas pontuais). **(b)** Qual é a energia potencial gravitacional dessa interação?

#### EXERCÍCIO 2 (portfólio)

Qual é a aceleração de queda livre de um corpo a uma altitude correspondente à órbita de um veículo espacial, a cerca de 400 km acima da superfície da Terra?

#### EXERCÍCIO 3

Determine a velocidade de escape na superfície de Mercúrio, que possui massa de  $3,31 \times 10^{23}$  kg e raio de 2440 km.

#### EXERCÍCIO 4

Europa é um satélite do planeta Júpiter, cujo raio é 1569 km e a aceleração da gravidade, na sua superfície, de  $1,39 \text{ m/s}^2$ .

**(a)** Calcule a velocidade de escape de Europa.

**(b)** Que altura um objeto alcançaria se fosse lançado para cima com uma velocidade de 1,01 km/s?

**(c)** Com que velocidade um objeto atingiria o satélite se ele fosse largado

de uma altura de 1000 km?

(d) Calcule a massa de Europa.

### EXERCÍCIO 5

Um projétil é lançado em linha reta para cima, a partir da superfície da Terra, com velocidade 15 km/s. Determine a velocidade do projétil quando ele estiver bem afastado da Terra (ignore a resistência do ar. O raio da Terra é 6370 km).

### EXERCÍCIO 6

O asteróide Eros, um dos “planetas menores” que orbitam o Sol na região entre Marte e Júpiter, tem raio de 7 km e massa  $5 \times 10^{15}$  kg.

(a) Se você estivesse em Eros, poderia levantar uma caminhonete de 2000 kg?

(b) Você poderia correr rápido o suficiente para escapar da atração gravitacional de Eros?<sup>1</sup>

### EXERCÍCIO 7

Duas partículas puntiformes, cada uma com massa  $M$ , são fixadas sobre o eixo  $y$  em  $y = +a$  e  $y = -a$ . Determine o campo gravitacional  $\vec{g}$  para todos os pontos sobre o eixo  $x$ , como função de  $x$ .

### EXERCÍCIO 8

Considere um sistema isolado formado por três esferas. Duas delas, de massas  $m_1 = 7,16$  kg e  $m_2 = 2,53$  kg, são separadas por uma distância de centro a centro de 1,56 m. A terceira, de massa  $m_3 = 212$  g, está posicionada a 42 cm do centro da esfera  $m_2$ , ao longo da linha que liga os centros.

(a) Quanto trabalho deve ser realizado por um agente externo para mover a esfera  $m_3$  ao longo da linha que liga os centros e posicioná-la a 42 cm do centro da esfera  $m_1$ .

(b) Se  $m_3$  fosse levado à sua posição final por outro caminho, esse resul-

<sup>1</sup>Nota: os recordes olímpicos de tempo para a corrida de 400 m é de 43,49 s para homens (Michael Johnson — EUA, 1996) e de 48,26 s para mulheres (Marie-José Pérec — França, 1996).

tado seria diferente? Por quê?

### EXERCÍCIO 9

Desafio: mostre que a energia total de um objeto em órbita circular é igual à metade de sua energia potencial gravitacional. Nota: numa órbita circular, a velocidade orbital permanece constante.

### EXERCÍCIO 10

O semi-eixo maior da órbita de Júpiter é 5,2 UA (unidades astronômicas).<sup>2</sup> Sabendo que o semi-eixo maior da órbita da Terra é 1 UA, qual é o período de translação de Júpiter, em anos terrestres?

### EXERCÍCIO 11

O período de Netuno é de 164,8 anos terrestres. Qual é o valor de sua distância média ao Sol, em unidades astronômicas (UA)?

### EXERCÍCIO 12

Procure na Internet pelo período  $T$  de translação e pelo semi-eixo maior  $a$  da órbita de cada planeta do Sistema Solar.<sup>3</sup>

(a) Faça um gráfico de  $T \times a$ .

Dica: utilize UA como unidade de distância e “anos terrestres” como unidade de tempo.

(b) Faça um gráfico de  $T^2 \times a^3$ .

Dica: ao invés de um gráfico, faça dois: um para os planetas Mercúrio, Vênus, Terra e Marte; e o outro para Júpiter, Saturno, Urano, Netuno e Plutão.

(c) No gráfico do item anterior, os pontos alinham-se. Qual é o valor do coeficiente angular, no Sistema Internacional de Unidades (SI)? Compare-o com a constante  $4\pi^2/(GM_{\odot})$ .  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$  é a constante universal da gravidade e  $M_{\odot} = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$  é a massa do Sol.

### EXERCÍCIO 13

A Estação Espacial Internacional move-se segundo uma órbita aproxi-

<sup>2</sup> 1 UA = 149 597 871 km. Note, entretanto, que você não precisa dessa informação para resolver o exercício.

<sup>3</sup> Ao invés do semi-eixo maior da órbita, você também pode utilizar a distância média entre o planeta e o Sol.

madamente circular em torno da Terra. Considerando que ela esteja a 385 km acima da superfície da Terra, qual é o período da órbita?

#### EXERCÍCIO 14 (portfólio)

Júpiter é o maior planeta do Sistema Solar. Sua massa é de aproximadamente  $M_J = 1,9 \times 10^{27}$  kg (318 vezes mais massivo que a Terra) e possui mais de cinquenta luas (satélites naturais) conhecidas. As quatro maiores delas, visíveis da Terra com um pequeno telescópio e descobertas por Galileu Galilei no século XVII, são: Io, Europa, Ganimedes e Calisto. Você, ao reproduzir a observação de Galileu, mediu os seguintes períodos de revolução em torno de Júpiter: 42,5 h para Io, 85,2 h para Europa, 171,6 h para Ganimedes e 400,6 h para Calisto. Com esses dados *apenas* e conhecendo a constante universal da gravidade, monte o gráfico  $T^2 \times a^3$  desse sistema planetário.

# GABARITO

## EXERCÍCIO 1

(a)  $8,67 \times 10^{-7}$  N; (b)  $-4,33 \times 10^{-7}$  J.

## EXERCÍCIO 2 (portfólio)

$8,7 \text{ m/s}^2$

## EXERCÍCIO 3

$4,25 \text{ km/s}$ .

## EXERCÍCIO 4

(a)  $2,09 \text{ km/s}$ ; (b)  $478,9 \text{ km/s}$ ; (c)  $1,303 \text{ km/s}$ ; (d)  $5,13 \times 10^{22} \text{ kg}$ .

## EXERCÍCIO 5

$10 \text{ km/s}$ .

## EXERCÍCIO 6

(a) Sim; (b) Não.

## EXERCÍCIO 7

$$\vec{g} = -\frac{2GMx}{(x^2+a^2)^{3/2}} \hat{i}$$

## EXERCÍCIO 8

(a)  $9,845 \times 10^{-11} \text{ J}$ ; (b) Não.

## EXERCÍCIO 9

Dica: a aceleração centrípeta que sustenta a órbita circular é devida à gravidade.

## EXERCÍCIO 10

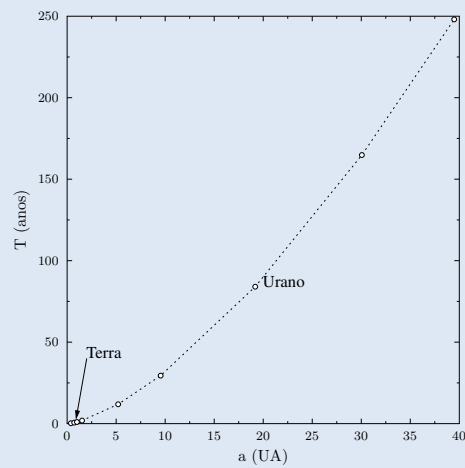
$11,9$  anos terrestres.

### EXERCÍCIO 11

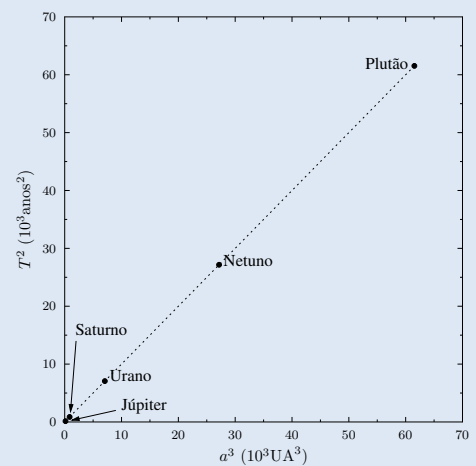
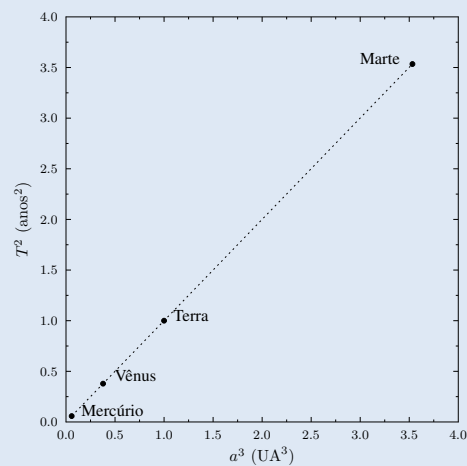
30,1 UA.

### EXERCÍCIO 12

(a)



(b)

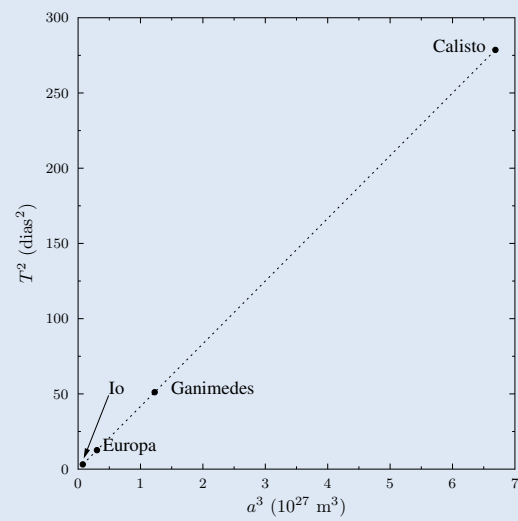


(c) O coeficiente angular é igual a  $4\pi^2/(GM_{\odot}) = 2,97 \times 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$ .

### EXERCÍCIO 13

92,1 min.

### EXERCÍCIO 14 (portfólio)



## GABARITO DO MEDIADOR

### EXERCÍCIO 1

(a) O módulo da força de interação gravitacional entre dois corpos pontiformes é dado pela lei da gravitação universal de Newton:

$$F = \frac{Gm_{\odot}m_{\oplus}}{r^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 65 \cdot 50}{(0,5)^2} = 8,67 \times 10^{-7} \text{ N}.$$

(b) A energia potencial gravitacional, por outro lado, é igual ao trabalho da força gravitacional, desde a posição  $r$  até o infinito. Sua expressão é:

$$U_g = -\frac{Gm_{\odot}m_{\oplus}}{r} = -\frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 65 \cdot 50}{0,5} = -4,33 \times 10^{-7} \text{ J}.$$

### EXERCÍCIO 2 (portfólio)

O módulo da força gravitacional entre um corpo de massa  $m$  e a Terra (massa é  $M = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ ) é dada pela lei da gravitação universal de Newton:  $F = GmM/r^2$ , onde  $r$  é a distância entre esse corpo e o centro da Terra. Essa força causa uma aceleração em  $m$ , dada pela segunda lei de Newton:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{GM}{r^2}.$$

Mas  $r = R + h$ , onde  $R = 6370 \text{ km}$  é o raio da Terra e  $h = 400 \text{ km}$ , a altitude da órbita. Então,

$$a = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 5,98 \times 10^{24}}{(6,37 \times 10^6 + 0,4 \times 10^6)^2} = 8,7 \text{ m/s}^2,$$

que é a aceleração de queda livre (aquela associada à gravidade).

### EXERCÍCIO 3

A velocidade de escape  $v_e$  de Mercúrio é, por definição, a velocidade mínima que um corpo deve ter, na superfície, para conseguir livrar-se de sua atração gravitacional. "Livrar-se de sua atração gravitacional" significa que, no infinito, sua energia cinética terá toda ela sido convertida em energia potencial gravitacional. Ou seja, no infinito temos  $K = 0$  (energia cinética nula). Mas no infinito, também a energia potencial gravitacional



é nula:

$$U_g = -\frac{GMm}{r} \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} U_g = 0.$$

Ou seja, a energia mecânica do corpo é nula no infinito:  $E = U_g + K = 0$ . Mas a força gravitacional é conservativa, de modo que  $E = 0$  a qualquer distância  $r$  do planeta, inclusive na sua superfície, onde  $r = R$ . Nessa posição, a energia mecânica do corpo é:

$$E = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_e^2 = 0.$$

Resolvendo essa igualdade para  $v_e$  obtemos a expressão da velocidade de escape de Mercúrio:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \times 10^{-11} \cdot 3,31 \times 10^{23}}{2,44 \times 10^6}} = 4,25 \text{ km s}^{-1}.$$

#### EXERCÍCIO 4

(a) A força gravitacional entre Europa e um corpo de massa  $m$  na sobre a sua superfície é dada pela lei da gravitação universal de Newton:  $F = GMm/R^2$ , onde  $R$  é o raio de Europa. Pela segunda lei de Newton, essa força causa uma aceleração  $g = F/m = GM/R^2$  que, pelo enunciado do exercício, é igual a  $1,39 \text{ m/s}^2$ . Por outro lado, a velocidade de escape é dada por  $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ , que pode então ser reescrita assim:

$$\begin{aligned} v_e &= \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2 \left( \frac{GM}{R^2} \right) R} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 1,39 \cdot 1,569 \times 10^6} \\ &= 2,09 \text{ km s}^{-1}. \end{aligned}$$

(b) A única força considerada no problema é a gravitacional, entre o objeto e Europa. Como essa interação conserva a energia mecânica, podemos determiná-la nos dois pontos de interesse,  $A$  e  $B$ , e usar o princípio da conservação da energia mecânica:  $E_A = E_B$ .

A situação  $A$  é aquela na qual o objeto está na superfície ( $r_A = R$ ), com velocidade inicial  $v_A = 1,01 \text{ km s}^{-1}$ ; a situação  $B$  é aquela na qual toda a energia cinética do objeto foi convertida em energia potencial gravitacional:  $r_B = R + h$  e  $v_B = 0$ .  $h$  é a altura, acima da superfície de

Europa, que o objeto atinge. Deste modo, temos:

$$E_A = U_g(r_A) + K(v_A) = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$E_B = U_g(r_B) + K(v_B) = -\frac{GMm}{R+h}.$$

Usando  $E_A = E_B$  e isolando  $h$ :

$$E_A = E_B \Rightarrow -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_A^2 = -\frac{GMm}{R+h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{GM}{R^2}\right)R - \frac{1}{2}v_A^2 = \left(\frac{GM}{R^2}\right)\frac{R^2}{R+h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow gR - \frac{1}{2}v_A^2 = g\frac{R^2}{R+h} \Rightarrow h = \frac{gR^2}{gR - v_A^2/2} - R.$$

Manipulando um pouco mais essa expressão para  $h$ , obtemos um resultado equivalente, mas que requer menos contas:

$$h = \left(\frac{2g}{v_A^2} - \frac{1}{R}\right)^{-1} = \left[\frac{2 \cdot 1,39}{(1,01 \times 10^3)^2} - \frac{1}{1,569 \times 10^6}\right]^{-1} = 478 \text{ km}.$$

**(c)** Conceitualmente, esse problema é análogo ao anterior: a energia mecânica na situação inicial é:

$$E_A = -\frac{GMm}{R+h},$$

já que o objeto parte do repouso. Durante sua queda livre em direção à superfície do planeta, parte dessa energia potencial gravitacional é convertida em energia cinética. Assim ele atinge a superfície com velocidade  $v_B$  tal que:

$$E_B = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_B^2.$$

Como  $E_A = E_B$ , obtemos daí que:

$$v_B^2 = \frac{2gRh}{R+h} = \frac{2 \cdot 1,39 \cdot 1,569^6 \cdot 10^6}{1,569 \times 10^6 + 10^6} \Rightarrow v_B = 1,303 \text{ km s}^{-1}.$$

**(d)** Como  $g = GM/R^2$ , obtemos imediatamente que:

$$M = \frac{gR^2}{G} = \frac{1,39 \cdot (1,569 \times 10^6)^2}{6,67 \times 10^{-11}} = 5,13 \times 10^{22} \text{ kg}.$$

## EXERCÍCIO 5

Considere as duas situações A e B: em A o projétil está na superfície da Terra ( $r = R = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ ) e sua velocidade é  $v_A = 1,5 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ ; em B

o projétil está muito afastado da Terra ( $r \rightarrow \infty$ ) e sua velocidade é  $v_B$ , que queremos descobrir. Mas como a única força presente nesse problema é a gravitacional, que é conservativa, a energia mecânica em A e em B deve ser a mesma. Ou seja,

$$\begin{aligned} E_A = E_B &\Rightarrow -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_A^2 = -\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{GM}{R} + \frac{1}{2}v_A^2 = \frac{1}{2}v_B^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_B^2 = v_A^2 - 2\frac{GM}{R} = v_A^2 - 2gR \Rightarrow v_B = 10 \text{ km s}^{-1}, \end{aligned}$$

onde utilizamos  $g = GM/R^2 = 9,81 \text{ m/s}^2$ , a aceleração da gravidade na superfície da Terra, para simplificar.

### EXERCÍCIO 6

(a) A intensidade da força necessária para levantar a caminhonete é igual à força-peso dela, que é dada pela lei da gravitação universal de Newton:

$$F = \frac{GMm}{R^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 5 \times 10^{15} \cdot 2 \times 10^3}{(7 \times 10^3)^2} = 13,6 \text{ N}.$$

Na Terra,  $F$  equivale à força-peso de um objeto cuja massa é  $F/g = 1,39 \text{ kg}$ , com  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Ou seja, em Eros essa caminhonete pesaria tanto quanto um haltere de academia, de modo que você conseguiria levantá-la facilmente!

(b) Para desvencilhar-se da atração gravitacional de Eros, você precisaria correr tão ou mais rapidamente que a velocidade de escape dele:

$$v_e = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{2 \cdot 6,67 \times 10^{-11} \cdot 5 \times 10^{15} / 7 \times 10^3} = 9,8 \text{ m s}^{-1}.$$

O recorde masculino (feminino) dos 400 m é de 43,49 s (48,25 s), o que corresponde à velocidade de  $9,2 \text{ m s}^{-1}$  ( $8,3 \text{ m s}^{-1}$ ), que é menor que  $v_e$ . Portanto, nem mesmo o mais rápido corredor é capaz de correr rapidamente o suficiente para escapar da atração gravitacional de Eros.

### EXERCÍCIO 7

Cada partícula produz um campo gravitacional,  $\vec{g}_1$  e  $\vec{g}_2$ , cuja intensidade é:

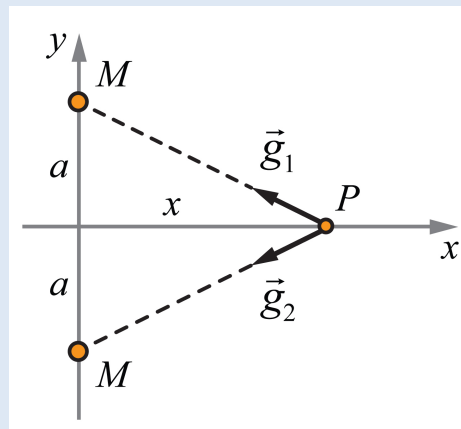
$$g_1 = g_2 = \frac{GM}{r^2},$$

onde  $r$  é a distância da partícula até o ponto  $P$  onde queremos determinar o campo gravitacional resultante (veja a figura abaixo). Pela simetria do problema, vemos que a componente  $y$  de  $\vec{g}_1$  contrapõe-se precisamente à de  $\vec{g}_2$ . Deste modo, a componente  $y$  do campo gravitacional resultante é nula. Por outro lado, a componente  $x$  de  $\vec{g}_1$  e de  $\vec{g}_2$  somam-se e apontam no sentido negativo de  $x$  (vetorialmente, representamos por  $-\hat{i}$ ). Assim,

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -2g_1 \cos(\theta) \hat{i},$$

onde  $\theta$  é o ângulo associado ao ponto  $P$  (figura). Mas pelo triângulo-retângulo  $OPM$ ,  $\cos(\theta) = x/r$  e  $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ . Então,

$$\vec{g} = -\frac{2GM}{r^2} \frac{x}{r} \hat{i} = -\frac{2GMx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i}.$$



Outra forma de resolver esse problema é partir da energia potencial gravitacional: se houvesse um objeto de massa  $m$  em  $P$ , teríamos  $U_g = -2GMm/r$ , onde  $r = \sqrt{x^2 + a^2}$  é a distância entre os corpos  $M$  e  $m$ . Como a força gravitacional é derivada da energia potencial gravitacional, temos:

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dx} \hat{i} = -\frac{d}{dx} \left( -\frac{2GMm}{r} \right) \hat{i} = -\frac{2GMmx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i}.$$

Pela segunda lei de Newton, essa força gravitacional causaria em  $m$  uma aceleração

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{2GMx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i},$$

que é o resultado desejado.

## EXERCÍCIO 8

- (a) Considere que  $A$  seja a posição inicial e  $B$ , a final. Ao longo do deslocamento entre  $A$  e  $B$ , há duas forças agindo sobre  $m_3$ : a força gravitacional  $F_g(x)$  resultante da interação com  $m_1$  e  $m_2$  e a força externa  $F_e$ . Deste modo, o trabalho *total* realizado sobre  $m_3$  é:

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \int_A^B (F_g + F_e) dx = \int_A^B F_g dx + \int_A^B F_e dx \\ &= W_{A \rightarrow B}^g + W_{A \rightarrow B}^e, \end{aligned}$$

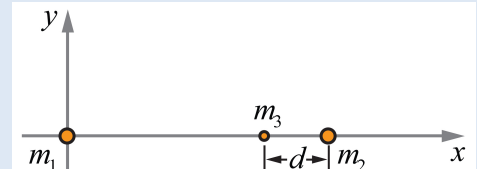
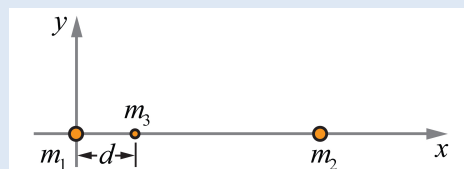
onde  $W_{A \rightarrow B}^g$  é o trabalho da força gravitacional apenas e  $W_{A \rightarrow B}^e$ , da força externa apenas. Mas  $W_{A \rightarrow B} = \Delta K$  (teorema trabalho-energia cinética), onde  $\Delta K$  é a variação da energia cinética entre  $A$  e  $B$ . Contudo, como a esfera  $m_3$  parte do repouso (em  $A$ ) e termina em repouso (em  $B$ ),  $\Delta K = 0$ . Ou seja, o trabalho *total* (ie, das forças gravitacional e externa) deve ser nulo:

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow B}^g + W_{A \rightarrow B}^e = 0 \Rightarrow W_{A \rightarrow B}^e = -W_{A \rightarrow B}^g. \quad (1)$$

Em palavras: o trabalho da força externa, que interessa-nos conhecer, é o oposto do trabalho realizado pela força gravitacional. Resta determinar  $W_{A \rightarrow B}^g$ . Há duas formas de fazer isso: a primeira delas é calcular diretamente o trabalho da força gravitacional ao longo do deslocamento considerado:

$$W_{A \rightarrow B}^g = \int_A^B F_g(x) dx.$$

A outra forma, mais simples, é lembrar que a força gravitacional é conservativa e que, por isso, vale  $W_{A \rightarrow B}^g = -\Delta U_g$ . Isto é, o trabalho da força gravitacional em levar a esfera  $m_3$  de  $A$  até  $B$  é igual ao oposto da variação da energia potencial gravitacional  $U_g$ . Mas as energias potenciais gravitacional em  $A$  e em  $B$  são:



$$U_g(A) = -\frac{Gm_1m_3}{d} - \frac{Gm_2m_3}{D-d}$$

$$U_g(B) = -\frac{Gm_1m_3}{D-d} - \frac{Gm_2m_3}{d},$$

onde  $D = 1,56\text{ m}$  é a distância entre as esferas  $m_1$  e  $m_2$  e  $d = 42\text{ cm}$ .

Assim,

$$\begin{aligned}
 W_{A \rightarrow B}^g &= -\Delta U_g = -[U_g(B) - U_g(A)] \\
 &= -\left[ \left( -\frac{Gm_1m_3}{D-d} - \frac{Gm_2m_3}{d} \right) - \left( -\frac{Gm_1m_3}{d} - \frac{Gm_2m_3}{D-d} \right) \right] \\
 &= -Gm_3(m_2 - m_1) \left( \frac{1}{D-d} - \frac{1}{d} \right) \\
 &= -9,845 \times 10^{-11} \text{ J}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, levando esse resultado em (1), obtemos a resposta desejada:

$$W_{A \rightarrow B}^e = 9,845 \times 10^{-11} \text{ J}.$$

- (b) Como a força gravitacional é conservativa, seu trabalho sobre  $m_3$  é independente do percurso. De fato,  $W_{A \rightarrow B}^g = U_g(A) - U_g(B)$ . Como consequência da análise no item anterior, também  $W_{A \rightarrow B}^e$  será independente do percurso.

### EXERCÍCIO 9

Suponha que a órbita em questão tenha raio  $a$ . Neste caso, a energia potencial gravitacional entre o objeto em órbita, de massa  $m$ , e o objeto no centro da órbita, de massa  $M$ , é constante:  $U_g = -GMm/a$ . Nessa órbita circular, a velocidade orbital  $v$  do objeto não muda (isso decorre da conservação do momento angular) e a força centrípeta necessária para sustentar esse movimento é dada pela força gravitacional:

$$\begin{aligned}
 F_{\text{centrípeta}} &= \frac{mv^2}{a} = \frac{GMm}{a^2} = \left( \frac{GMm}{a} \right) \frac{1}{a} = -\frac{U_g}{a} \Rightarrow \\
 \Rightarrow mv^2 &= -U_g \Rightarrow 2K = -U_g \Rightarrow K = -U_g/2.
 \end{aligned}$$

Mas a energia mecânica é  $E = U_g + K = U_g - U_g/2 = U_g/2$ , como queríamos demonstrar.

### EXERCÍCIO 10

Pela terceira lei de Kepler,

$$\frac{T_{\text{J}}^2}{a_{\text{J}}^3} = \frac{T_{\text{T}}^2}{a_{\text{T}}^3} \Rightarrow T_{\text{J}} = T_{\text{T}} \left( \frac{a_{\text{J}}}{a_{\text{T}}} \right)^{3/2} = 1 \cdot \left( \frac{5,2}{1} \right)^{3/2} \approx 11,9 \text{ anos}.$$

Na expressão acima,  $T$  representa o período,  $a$  é o semi-eixo maior e os símbolos  $\text{J}$  e  $\text{T}$  representam Júpiter e a Terra, respectivamente.

### EXERCÍCIO 11

Pela terceira lei de Kepler,

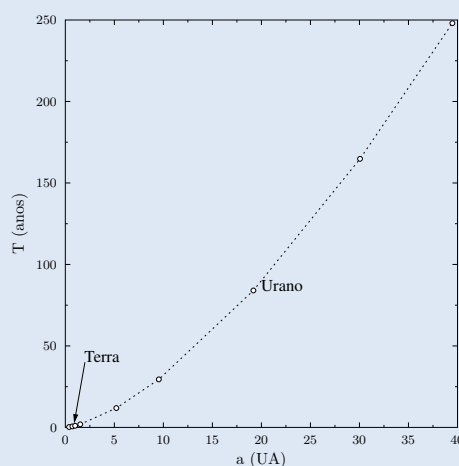
$$\frac{T_{\Psi}^2}{a_{\Psi}^3} = \frac{T_{\oplus}^2}{a_{\oplus}^3} \Rightarrow a_{\Psi} = a_{\oplus} \left( \frac{T_{\Psi}}{T_{\oplus}} \right)^{2/3} = 1 \cdot \left( \frac{164,8}{1} \right)^{2/3} \approx 30,1 \text{ UA.}$$

Na expressão acima,  $T$  representa o período,  $a$  é o semi-eixo maior e os símbolos  $\Psi$  e  $\oplus$  representam Netuno e a Terra, respectivamente.

### EXERCÍCIO 12

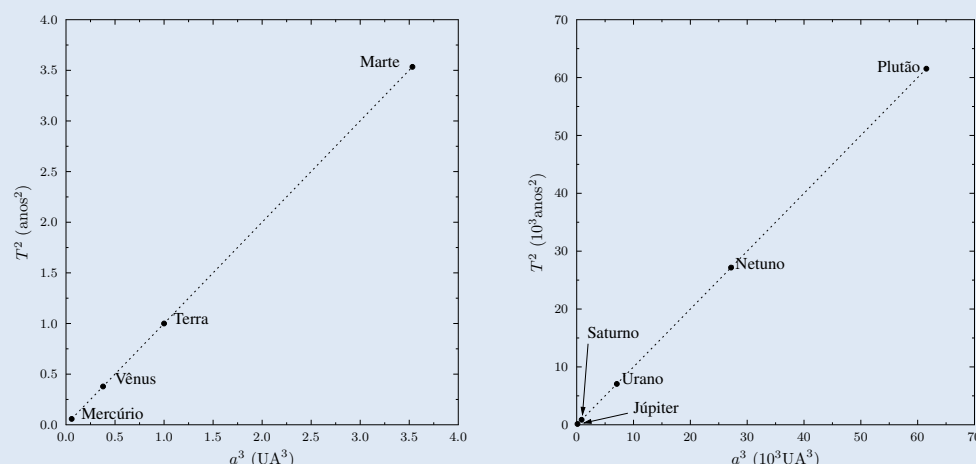
(a) O período e o semi-eixo maior dos planetas do Sistema Solar são:

Planeta	$T$ (anos)	$a$ (UA)
Mercúrio	0.387	0.241
Vênus	0.723	0.615
Terra	1	1
Marte	1.523	1.88
Júpiter	5.203	11.867
Saturno	9.539	29.461
Urano	19.185	84.03
Netuno	30.061	164.815
Plutão	39.479	248.057



**obs.:** há alguns anos, a União Astronômica Internacional criou uma definição formal de planeta, visando classificar diversos outros objetos que orbitam o Sol. Como consequência dela, Plutão deixou de ser considerado um planeta. Hoje ele é um “planeta anão”.

(b) O gráfico de  $T^2 \times a^3$  é mais complicado de fazer, pois a escala varia muito. Note, por exemplo, que no gráfico à direita, a abscissa e a ordenada têm um fator mil multiplicando os valores. Por isso separamos os planetas em dois grupos: Mercúrio a Marte e Júpiter a Plutão.



(c) Tome, por exemplo, o período de translação e o semi-eixo maior da Terra:  $T_{\oplus} = 3,1536 \times 10^7 \text{ s}$  e  $a = 1,49597871 \times 10^{11} \text{ m}$ . O coeficiente angular do gráfico  $T^2 \times a^3$  é:

$$\frac{(3,1536 \times 10^7 \text{ s})^2}{(1,49597871 \times 10^{11} \text{ m})^3} = 2,97 \times 10^{-19}.$$

Esse cálculo pode ser feito para qualquer planeta do Sistema Solar (na verdade, para qualquer astro em órbita do Sol), e o resultado será sempre o mesmo. Por outro lado,

$$\frac{4\pi^2}{M_{\odot}G} = \frac{4\pi^2}{1,99 \times 10^{30} \cdot 6,67 \times 10^{-11}} = 2,97 \times 10^{-19}.$$

Deste modo vemos como Newton conseguiu deduzir, com sucesso, a terceira lei de Kepler (as outras duas também) partindo apenas de sua lei da gravitação universal e das três leis da dinâmica (com isso, Newton demonstrou ainda que as leis que governam o movimento dos astros, na época tidos como domínio do divino, eram as mesmas que valiam na Terra). Dito de outra forma, Kepler percebeu que  $T^2/a^3$  é o mesmo para todos os planetas do Sistema Solar, mas não sabia explicar o motivo. Newton, partindo dos trabalhos de Kepler, compreendeu que esse fator depende exclusivamente da massa do Sol, e deste modo é possível estender a terceira lei de Kepler para qualquer sistema solar ou planetário, como você verá no exercício 14.

### EXERCÍCIO 13

Segundo a versão de Newton da terceira lei de Kepler,  $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\oplus}}a^3$ , onde  $T$  é o período da órbita da estação espacial,  $M_{\oplus}$  é a massa da Terra e  $a$



é o semi-eixo maior da órbita da estação espacial. Mas  $a = R_{\oplus} + h$ , onde  $h$  é a altura da órbita (medida a partir da superfície da Terra e dada no enunciado do exercício). Então,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\oplus}} a^3 = \frac{4\pi^2}{GM_{\oplus}} (R_{\oplus} + h)^3 = \frac{4\pi^2}{gR_{\oplus}^2} (R_{\oplus} + h)^3,$$

onde na última passagem utilizamos  $g = GM_{\oplus}/R_{\oplus}^2$ , a aceleração da gravidade na superfície da Terra. Agora resta fazer a conta:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{gR_{\oplus}}} (R_{\oplus} + h)^{3/2} = 5529 \text{ s} = 92,1 \text{ min.}$$

#### EXERCÍCIO 14 (portfólio)

Para o sistema planetário de Júpiter, vale  $T^2 = 4\pi^2 a^3 / (GM_J)$ , onde  $T$  é o período orbital de qualquer satélite (natural ou artificial) e  $a$ , seu semi-eixo maior.

$$C = \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{6,67 \times 10^{-11} \cdot 1,9 \times 10^{27}} = 3,11 \times 10^{-16}.$$

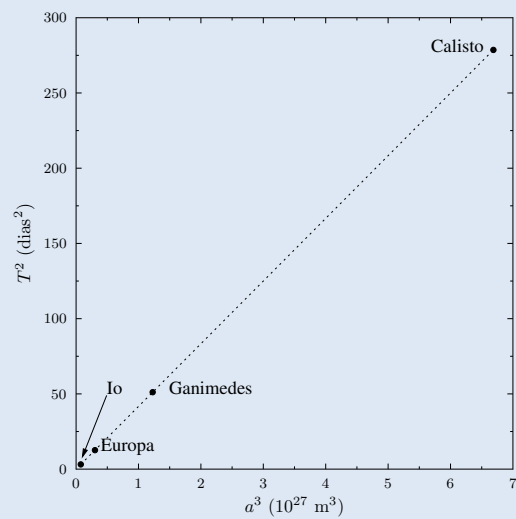
Agora, tendo  $C$  e os períodos das luas de Júpiter, podemos determinar o semi-eixo maior de cada uma:

$$a_{\text{Io}}^3 = \frac{T_{\text{Io}}^2}{C} = \frac{(42,5 \cdot 60 \cdot 60)^2}{3,11 \times 10^{-16}} \Rightarrow a_{\text{Io}} \approx 422\,000 \text{ km} = 0,422 \times 10^9 \text{ m}$$

Fazendo o mesmo para os outros satélites, obtemos:

Satélite	$T$ (dias)	$a$ ( $1 \times 10^9 \text{ m}$ )
Io	1,77	0,422
Europa	3,55	0,671
Ganimedes	7,15	1,071
Calisto	16,69	1,884

Assim, o gráfico de  $T^2 \times a^3$  fica assim:



Note que, para melhorar a apresentação do gráfico, o período foi expresso em dias terrestres e o semi-eixo maior, em  $1 \times 10^9 \text{ m}$ .