B - 令人讨厌的字符串问题 编辑：evima

在大多数情况下，$f(S,T,X)$ 和 $f(S,T,Y)$ 的长度相等，这揭示了T 的长度。让我们来看看当已知 S 和 T 的长度时，在什么条件下 S 和 T 满足 $f(S,T,X)=f(S,T,Y)$。

例题

例如，当$|S|=6$和$|T|=4$时，让我们考虑当$S+T+T+S+T+S=T+T+T+S+T+T+T$成立时的情况。通过比较开头，需要 T 是 S 的前缀，并且 S 可以用 S' 表示为 $S=T+S'$，$|S'|=2$。将其代入等式，我们得到：

$$T+S'+T+T+T+S'+T+T+S'=T+T+T+T+S'+T+T+T$$

$$\iff S'+T+T+T+S'+T+T+S'=T+T+T+S'+T+T+T。$$

接下来，S' 必须是T 的前缀，而T 可以用T' 表示为$T=S'+T'$，$T'||=2$。将其替换到等式中，我们得到

$S'+$（S' 和 T' 的表达式）$=T'+$（S'和 T' 的表达式）。

在这个等式中，$S'=T'$ 是必要且充分的，因为 $|S'|$ 和 $|T'|$ 相等。用 $S'=T'=U$ 表示 S 和 T，我们得到 $S=U+U+U$ 和 $T=U+U$。反之，如果 S 和 T 可以用这种方法表示，那么 S 和 T 的连接将是 U 的重复，从而使等式明显成立。因此

- $|S|=6, |T|=4$, 以及 $S+T+T+S+T+S=T+T+T+S+T+T \iff S$和 T可以用长度为2的字符串U表示为$S=U+U+U$和$T=U+U$。

观察

推广上述过程，我们会发现

- 如果等式为三元形式，如 $A+A+B=A+A+B$，则对任意 A 和 B 都成立。
- 如果等式中使用的两个字符串 A 和 B 的长度不同（假设 $|A|<|B|$），则等式的形式为 $A+(\ldots)=B+(\ldots)$，此时需要 $B=A+B'$，从而将问题简化为关于 A 和 B' 的相同形式。
- 如果等式中使用的两个字符串 A 和 B 的长度相等，则 $A=B$ 是必要且充分的。

特别是，第二次还原会重复进行，直到最终达到第一或第三状态。

考虑到通过重复还原达到的最终状态，第二次还原的形式如下：

- $A+A+(\ldots)=B+(\ldots) \iff A+A+(\ldots)=A+B'+(\ldots) \iff A+(\ldots)=B'+(\ldots)$
- $A+B+(\ldots)=B+(\ldots) \iff A+A+B'+(\ldots)=A+B'+(\ldots) \iff A+B'+(\ldots)=B'+(\ldots)$

因此，如果初始方程不是三元形式，方程在第二次还原时就不会还原到第一种状态，而总是会到达第三种状态。

从第三状态追溯诸如$B = A + B'$这样的替换，有必要且充分条件是A和B是长度为L的共同字符串C的重复，其中L是第三状态中字符串A和B的长度。

因此，一旦确定了 L，就可以轻松检查条件。考虑到第二次还原过程中的长度变化，可以将其视为 $(n, m) \to (n, m - n)$ 一直重复到 $n = m$。这正是欧几里得算法，所以 $L = \gcd(n, m)$。

解法

首先，考虑 X 和 Y 中 `1` 的数量相等的情况。如果 `0` 的数量也相等，设置 $T = S$ 显然满足 $f(S, T, X) = f(S, T, Y)$，所以答案是`Yes`。否则，$f(S, T, X)$ 和$f(S, T, Y)$ 的长度不可能相等，所以答案是`No`。

如果 X 和 Y 中的 `1` 数量不相等，我们就有 $X \neq Y$，$|f(S, T, X)| = |f(S, T, Y)|$ 就会产生一个以 $|T|$ 为单位的线性方程，让我们找到 $|T|$（如果这不是整数或为负数，答案就是`No`）。

根据上述观察，当 $X \neq Y$、

★ $f(S, T, X) = f(S, T, Y) \iff S$ 和 T 是长度为 $\gcd(|S|, |T|)$ 的字符串 U 的重复。

因此，如果 S 的周期为 $\gcd(|S|, |T|)$，那么满足条件的 T 就存在。这可以在 $O(|S|)$ 时间内通过验证 S 的第 i 个字符是否等于第 $(i + \gcd(|S|, |T|))$ 个字符来检验。

★的正式证明:

通过对 $||S| - |T||$ 的归纳来证明。当 $|S| = |T|$ 时，证明就很清楚了。

假设 $|S| < |T|$ 不失一般性。同时，由于 $X \neq Y$，通过去除所需的公共前缀，我们可以假设 X 和 Y 的第一个字符分别是 `0` 和 `1`。那么，S必须是T的前缀，并且存在T'，使得$T = S + T'$。为使等式成立，需要 $f(S, T', X') = f(S, T', Y')$，其中$X'$和$Y'$分别是在$X$和$Y$中同时用`01`替换`1`得到的字符串。根据归纳假设，S 和T'是长度为$\gcd(|S|, |T| - |S|) = \gcd(|S|, |T||)$ 的字符串U的重复。结合 $T = S + T'$，可以看出 T 也是 U 的重复。这样，必然性就得到了证明。充分性显而易见。

通过www.DeepL.com/Translator（免费版）翻译