Họ tên: Nguyễn Trung Dũng

MSSV: 19120486

Bài 1:

- Có:

$$f_1(n) \in O(\mathrm{g_1(n)}) \Rightarrow f_1(n) \le c_1.g_1(n) \forall n \ge n_1 (c_1 \in R; n_1 \in N)$$

$$f_2(n) \in O(g_2(n)) \Rightarrow f_2(n) \le c_2.g_2(n) \forall n \ge n_2 (c_2 \in R; n_2 \in N)$$

$$\Rightarrow f_1(n) + f_2(n) \le c_1.g_1(n) + c_2.g_2(n) \forall n \ge max(n_1, n_2)$$

- Đặt: $c = max(c_1, c_2)$, ta có:

$$f_1(n) + f_2(n) \le c_1.g_1(n) + c_2.g_2(n) \le c.(g_1(n) + g_2(n))$$

- Mà: $a + b \le 2max(a, b)$

$\Rightarrow$ $c.(g_1(n) + g_2(n)) \le 2c.max\{g_1(n), g_2(n)\}$

$\Rightarrow$ $f_1(n) + f_2(n) \le 2c.max\{g_1(n), g_2(n)\} \forall n \ge max(n_1, n_2)$

Vậy:

$$f_1(n) \in O(g_1(n)) \wedge f_2(n) \in O(g_2(n)) \Rightarrow f_1(n) + f_2(n) \in O(max\{g_1(n), g_2(n)\})$$

Bài 2:

- Chứng minh quy nạp: $\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$ với $n \ge 1$
  - Đặt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Ta có dãy Fibonacci:

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

- Xét $n = 1$, ta thấy:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} \text{ (đúng)}$$

- Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \ge 1$, tức là:

$$A^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}$$

Cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, tức là cần chứng minh:

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}$$

Thật vậy:

$$A^{k+1} = AA^k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_k + F_{k-1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}$$

Vậy:

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \; với \; n \geq 1$$

Bài 3:

- Thao tác cơ sở: `a[j - 1] > a[j]`
- Ta có:
  - *Trường hợp tốt nhất*: mảng được sắp xếp tăng dần, j chạy từ $n \to 2$. Vì vậy:

    $$B(n) = n - 1 \in \Theta(n)$$

  - *Trường hợp xấu nhất*: mảng được sắp xếp giảm dần, ta có số lần so sánh cần thực hiện là:

    $$\sum_{m=1}^{n-1} m = \frac{n(n-1)}{2}$$

    $$\Rightarrow W(n) = \frac{n(n-1)}{2} \in \Theta(n^2)$$

  - *Trường hợp trung bình*:

    Tổng số lần thực hiện phép so sánh sau lần duyệt thứ i là:

    $$\sum_{m=(n-i)}^{n-1} m = \frac{i(2n-i-1)}{2}$$

    $$= \frac{(2\mathrm{n}-1)\mathrm{i}}{2} - \frac{\mathrm{i}^2}{2}$$

Mà xác suất để chương trình dừng tại mỗi lần duyệt là $\frac{1}{n-1}$ nên:

$$A(n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{(2\mathrm{n}-1)\mathrm{i}}{2} - \frac{\mathrm{i}^2}{2}\right)$$

$$= \frac{2n-1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1} i - \frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

Mà:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$\Rightarrow A(n) = \frac{(2n-1)n}{4} - \frac{(2n-1)n}{12} = \frac{(2n-1)n}{6} \in \Theta(n^2)$$

Bài 4:

- Thao tác cơ sở: `a[j] > v`
- Ta có:
  - *Trường hợp tốt nhất*: i chạy từ $2 \to n$, `a[j] <= v` (mảng đã được sắp xếp không giảm) nên thao tác cơ sở chỉ được thực hiện 1 lần cho mỗi i

$$B(n) = n - 1 \in \Theta(n)$$

  - *Trường hợp xấu nhất*: mảng đã được sắp xếp giảm dần, số lần tối đa thực hiện thao tác cơ sở cho mỗi i là $i-1$ lần (j: $(i-1) \to 1$)

$$W(n) = \sum_{i=2}^{n}(i-1) = \frac{n(n-1)}{2} \in \Theta(n^2)$$

  - *Trường hợp trung bình*:

Xác suất để chèn phần tử thứ i vào i chỗ trong $i-1$ phần tử trước là $\frac{1}{i}$

Số lần so sánh để chèn vào vị trí 1 là $i-1$ lần

Số lần so sánh để chèn vào vị trí $i - j + 1 \geq 2$ là j $(1 \leq j \leq i - 1)$ lần

Vậy số lần so sánh trung bình tại vòng lặp thứ i là:

$$C(i) = \frac{i-1}{i} + \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i-1} j = \frac{i^2+1-2}{2i} = \frac{i+1}{2} - \frac{1}{i}$$

$$\Rightarrow A(n) = \sum_{i=2}^{n} C(i) \approx \frac{n(n-1)}{4} + n - \ln n - \gamma \in \Theta(n^2)$$

Bài 5:

- Thao tác cơ sở: `curSum += a[k]`
- Xét vòng `for i:` 1 → n
- Xét vòng `for j:` $i \rightarrow n$
  - Có thể thấy: hai vòng lặp đầu mỗi lần lặp sẽ xét một cặp (i, j) duy nhất $(1 \leq i \leq j \leq n)$; 2 vòng for này sẽ đi qua hết tất cả các cặp (i, j) như vậy
- Xét vòng `for k:` $i \rightarrow j$
  - Cứ mỗi cặp (i, j) thì k đi từ $i \rightarrow j$

    ⇒ Thao tác cơ sở sẽ được lặp lại $j - i + 1$ lần đối với mỗi cặp (i, j)

  Vậy, gọi $C(n)$ là tổng số lần thực hiện thao tác cơ sở với mảng n phần tử, ta có:

$$C(n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (j - i + 1)$$

- Xét các cặp (i, j) với chiều dài $m = j - i + 1$, số các cặp (i, j) như vậy trong khoảng $[1, n]$ là $n - (m - 1)$ cặp

  Vậy ta có:

$$C(n) = 1.n + 2(n-1) + 3(n-2) + \cdots + m\big(n - (m-1)\big) + \cdots + n.1$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \big(m(n-m+1)\big)$$

$$= (n+1)\sum_{m=1}^{n} m - \sum_{m=1}^{n} m^2$$

Mà

$$\sum_{m=1}^{n} m = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}$$

$$\sum_{m=1}^{n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow C(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \in \Theta(\mathrm{n}^3)$$