Họ tên: Nguyễn Trung Dũng

MSSV: 19120486

Bài 1:

a) Chứng minh quy nạp: $J(2^k + i) = 2i + 1, i \in [0,2^k - 1]$

Có công thức truy hồi cho $J(n)$:

- $n = 1$:

$$J(n) = 1$$

- $n = 2h$:

$$J(2h) = 2J(h) - 1$$

- $n = 2h + 1$:

$$J(2h + 1) = 2J(h) + 1$$

- Xét $n = 1$, tức là $k = 0, i = 0$, ta thấy:

$$J(1) = 2.0 + 1 = 1 \quad \text{(đúng)}$$

- Xét n chẵn ($n = 2h$):

- Chọn $n = 2^m + l, l \in [0,2^m - 2], l$ chẵn. Để ý: $\frac{l}{2} \in [0,2^{m-1} - 1]$
- Giả sử mệnh đề đúng với $n = h = 2^{m-1} + \frac{l}{2}$, tức là:

$$J(\text{h}) = l + 1$$

- Cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = 2h = 2^m + l$, tức là cần chứng minh:

$$J(2h) = 2l + 1$$

- Thật vậy:

$$J(2h) = 2J(h) - 1 = 2l + 1$$

- Xét n lẻ ($n = 2h + 1$):

- Chọn $n = 2^m + l + 1, (l + 1) \in [0,2^m - 1], l$ chẵn.
- Giả sử mệnh đề đúng với $n = h = 2^{m-1} + \frac{l}{2}$, tức là:

$$J(\mathrm{h}) = l + 1$$

- Cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = 2h + 1 = 2^m + l + 1$, tức là cần chứng minh:

$$J(2h + 1) = 2(l + 1) + 1 = 2l + 3$$

- Thật vậy:

$$J(2h + 1) = 2J(h) + 1 = 2l + 3$$

- Vậy:

$$J(2^k + i) = 2i + 1, i \in [0, 2^k - 1]$$

b) Đặt $n = 2^k + i, i \in [0, 2^k - 1]$.

Gọi b là dạng biểu diễn nhị phân của n, b' là phần còn lại của b sau khi bỏ đi bit cao nhất (có thể chứa các số 0 đứng đầu).

Vì $n = 2^k + i$ và $i < 2^k$ nên có thể nói:

- Bit cao nhất của b có vị trí k và
- b' cũng là dạng biểu diễn nhị phân của i.

Như vậy, b có dạng: $\overline{1b'}$ (bit cao nhất có vị trí là k)

$\Rightarrow \mathrm{rot\_left}(b) = \overline{b'1} = 2i + 1$ (phát biểu được chứng minh)

Bài 2:

- Gọi $f(n, k)$ là chi phí trung bình của hàm `Selection` với giá trị k nào đó
- Xác suất để 1 phần tử được chọn làm pivot: $\frac{1}{n}$

$$\Rightarrow f(n, k) = (n - 1) + \frac{1}{n}\sum_{p=k+1}^{n} f(p - 1, k) + \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{k-1} f(n - p, k - p)$$

Khi đó, chi phí trung bình của giải thuật với k bất kì:

$$\begin{cases} f(n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(n, k) \quad (1) \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

$* f(1) = 0$ vì mảng chỉ có 1 phần tử.

- Vậy ta có:

$$(1) \Leftrightarrow nf(n) = \sum_{k=1}^{n} f(n,k)$$

$$= n(n-1) + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k-1} f(n-p,k-p) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=k+1}^{n} f(p-1,k)\right)$$

- **<u>Xét tổng sau:</u>**

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k-1} f(n-p,k-p)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\Big(f(n-1,k-1) + f(n-2,k-2) + \cdots + f\big(n-(k-1),k-(k-1)\big)\Big)$$

- Có:

$* k = 1$: $\emptyset$

$* k = 2$: $f(n-1,1)$

$* k = 3$: $f(n-1,2) + f(n-2,1)$

$* k = 4$: $f(n-1,3) + f(n-2,2) + f(n-3,1)$

$*$ ...

$* k = n$: $f(n-1,n-1) + f(n-2,n-2) + \cdots + f(1,1)$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k-1} f(n-p,k-p) = \sum_{1\le j\le i\le n-1} p(i,j) = \sum_{p=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{p} f(p,k)}$$

- **<u>Xét tổng sau:</u>**

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=k+1}^{n} f(p-1,k) = \sum_{k=1}^{n}\big(f(k,k) + f(k+1,k) + \cdots + f(n-1,k)\big)$$

- Có:

$* \ k = 1: \quad f(1,1) + f(2,1) + f(3,1) + \cdots + f(n-1,1)$

$* \ k = 2: \quad f(2,2) + f(3,2) + \cdots + f(n-1,2)$

$* \ k = 3: \quad f(3,3) + f(4,3) + \cdots + f(n-1,3)$

$* \ \ldots$

$* \ k = n-1: \quad f(n-1, n-1)$

$* \ k = n: \quad \emptyset$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=k+1}^{n} f(p-1,k) = \sum_{1 \le j \le i \le n-1} p(i,j) = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{p} f(p,k)}$$

- Vậy:

$$nf(n) = n(n-1) + \frac{2}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{p} f(p,k) \quad (*)$$

- Mà:

$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(n,k)$$

$$\Rightarrow f(p) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} f(p,k)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{pf(p)} = \sum_{k=1}^{p} f(p,k) \quad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow n^2 f(n) = n^2(n-1) + 2 \sum_{p=1}^{n-1} pf(p) \quad (2)$$

- Thế $n = n - 1$:

$$(n-1)^2 f(n-1) = (n-1)^2(n-2) + 2\sum_{p=1}^{n-2} pf(p) \quad (3)$$

Lấy $(2) - (3)$:

$n^2 f(n) - (n-1)^2 f(n-1) = 2(n-1)f(n-1) + (n-1)(3n-2)$

$\Leftrightarrow n^2 f(n) = (n-1)^2 f(n-1) + 2(n-1)f(n-1) + (n-1)(3n-2)$

$\Leftrightarrow f(n) = \dfrac{n^2-1}{n^2} f(n-1) + \dfrac{3n^2-5n+2}{n^2} < f(n-1) + 3$

$\Rightarrow f(n) < f(n-1) + 3 < f(n-2) + 3 + 3 < \cdots$

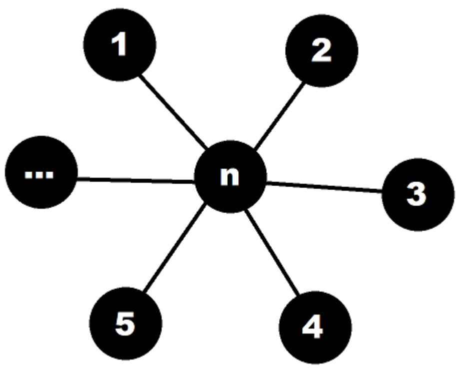
$< f(1) + 3(n-1) = 3(n-1)$

- **Kết luận:** chi phí trung bình của giải thuật: $f(n) \in \Theta(n)$

Bài 3:

- Giải thuật không thực hiện đúng nhiệm vụ (không thể kiểm tra tính liên thông của đồ thị vô hướng).
- Giải thích: đồ thị G với các đỉnh $\{1, \ldots, n\}$ và ma trận kề $A[1..n][1..n]$ liên thông không có nghĩa là đồ thị $G' \subset G$ với các đỉnh $\{1, \ldots, n-1\}$ và ma trận kề $A[1..n-1][1..n-1]$ liên thông.

Xét đồ thị sau:



Có thể thấy là đồ thị liên thông. Tuy nhiên, khi chỉ xét đến đỉnh thứ $n - 1$ thì đồ thị không liên thông:

Dễ dàng thấy `Connected(A[1..2][1..2])` trả về `false`

$\Rightarrow$ Tương tự, `Connected(A[1..i][1..i])` trả về `false` $\forall i > 2$

$\Rightarrow$ `Connected(A[1..n][1..n]) = false` (sai)

- Vậy giải thuật không thực hiện đúng nhiệm vụ

Bài 4:

- Giải thuật tìm số vắng mặt:

```
find(arr[1..n], l, r) {
    if (l == r) {
        if (arr[l] == l)        // nếu số bị thiếu là n+1
            return l+1;
        return l;
    }
    m = ⌊(l+r)/2⌋;
    if (arr[m] == m)
        return find(arr, m+1, r);
    else
        return find(arr, l, m);
}
find(arr, 1, n);
```

- Các thao tác cơ sở đã được tô đỏ.

- Gọi $T(n)$ là số thao tác cần thực hiện với mảng n phần tử. Giả sử $n = 2^k$, ta có hệ thức hồi quy sau:

$$T(n) = \begin{cases} T\left(\frac{n}{2}\right) + 2 & n > 1 \\ 2 & n = 1 \end{cases}$$

- Thấy $a = 1, b = 2, d = 0$
- Theo định lí chủ, ta có: $T(n) \in \Theta(n^d \log n)$ hay $T(n) \in \Theta(\log n)$