Análisis teórico del problema 3: Una gota de agua en un campo gravitacional uniforme.

La ecuación diferencial a resolver es:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv + mg$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v + g$$

$$\frac{dv}{-\frac{k}{m}v + g} = dt$$

Integrando:

$$\int \frac{dv}{-\frac{k}{m}v + g} = \int dt$$
$$u = -\frac{k}{m}v + g$$
$$du = -\frac{k}{m}dv \Rightarrow dv = -\frac{m}{k}du \Rightarrow \int \frac{dv}{-\frac{k}{m}v + g} = -\frac{m}{k}\int \frac{du}{u} = -\frac{m}{k}\ln(u)$$

Entonces:

$$\int \frac{dv}{-\frac{k}{m}v + g} = \int dt$$
$$\Rightarrow -\frac{m}{k}\ln(u) = t$$
$$\Rightarrow \ln(u) = -\frac{k}{m}t + C$$
$$\Rightarrow -\frac{k}{m}v + g = e^{\left(-\frac{k}{m}t + C\right)}$$
$$\Rightarrow -\frac{k}{m}v + g = Ce^{-\frac{k}{m}t}$$
$$\Rightarrow -v = \frac{m}{k}\left(Ce^{-\frac{k}{m}t} - g\right)$$
$$\Rightarrow v(t) = \frac{m}{k}\left(g - Ce^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

Aplicando la condicion inicial v(0)=0 encontramos C:

$$v(0) = 0 = \frac{m}{k}\left(g - C\right) \Rightarrow C = g$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{m}{k}\left(g - ge^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$\therefore v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

Ahora obtengamos la expresión para la posición x(t)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$\int dx = \frac{mg}{k}\int\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)dt$$

$$x(t) = \frac{mg}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right) + C$$

Aplicando la condición inicial de x(0)=0

$$x(0) = 0 = \frac{mg}{k}\left(\frac{m}{k}\right) + C$$

$$C = -\frac{m^2 g}{k^2}$$

$$\therefore x(t) = \frac{mg}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{m^2 g}{k^2}$$