Tarea 1 - Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén.

La finalidad de los ejercicios que se enlistan a continuación es para que identifiques la habilidad con la que cuentas para programar en cualquier lenguaje, ya hemos comentado que en el curso usaremos Python, pero si ya conoces algún otro lenguaje, desarrolla tus respuestas en ese lenguaje.

1. La distancia entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano cartesiano está dado por la expresión:
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
Escribir un programa para calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2) proporcionados por el usuario. Calcula la distancia entre los puntos $(2, 3)$ y $(8, -5)$.

2. La función coseno hiperbólico se define por la ecuación:
$$cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
Escribe un programa para calcular el coseno hiperbólico de un valor x proporcionado por el usuario. Calcula el valor del coseno hiperbólico de 3.0. Compara el resultado de tu programa contra el valor que devuelve la función intrínseca de Python cosh(x).

3. A menudo los ingenieros miden la relación entre dos medidas de potencia en *decibeles* o dB. La ecuación para esa relación de potencias en decibeles, está dada por
$$dB = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$$
donde P_2 es la nivel de potencia medido y P_1 es un nivel de potencia de referencia. Supongamos que el nivel de potencia de referencia P_1 es de 1 miliWatt, escribe un programa que acepte un valor de potencia P_2 y que convierta el valor de salida dB, con respecto al nivel de referencia de 1mW.

4. Escribe un programa para evaluar la función:
$$y(x) = ln \frac{1}{1 - x}$$
para cualquier valor de x que ingrese el usuario, donde ln es el logaritmo natural. Escribe un programa usando bucles (loops) para que el programa repita el cálculo del valor de la función, para cada x válida, en caso de que se ingrese un valor de x inválido, el programa se termina.

5. Estás apoyando a un biólogo a realizar un experimento en el cual se mide la tasa de crecimiento de una bacteria que se reproduce en diferentes medios de cultivo. El experimento muestra que en el medio **A**, la bacteria se reproduce cada 60 minutos, en el medio **B** la bacteria se reproduce cada 90 minutos. Supongamos que se coloca al inicio del experimento solo una bacteria en cada medio de cultivo. Escribe un programa que calcule y escriba el número de bacterias presentes en cada medio de cultivo en intervalos de 3 horas a partir del inicio del experimento, hasta haber completado un ciclo de 24 horas. ¿Cuántas bacterias hay en cada medio de cultivo luego de las 24 horas?

6. La *media geométrica* de un conjunto de valores x_1 a x_n se define como la raíz n-ésima del producto de los valores

$$\text{media geométrica} = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$$

Escribe un programa que acepte un número arbitrario de valores positivos y que calcule tanto la media aritmética (el promedio) como la media geométrica. Usa un bucle para introducir los valores, en caso de que se proporcione un valor negativo, el programa termina.

7. Un problema clásico en cómputo científico, es la suma de una serie para evaluar una función. Sea la serie de potencias para la función exponencial:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (x^2 < \infty)$$

Utiliza la serie anterior para calcular el valor de e^{-x} para $x = 0.1, 1, 10, 100, 1000$ con un error absoluto para cada caso, menor a 10^{-8}.

8. Considera el siguiente polinomio :

$$p(x) = 2x^4 - 20x^3 + 70x^2 + 100x + 48$$

Usando el método de Horner, evalúa para valores de x en el intervalo $[-4, -1]$, con saltos de x de valor $\Delta x = 0.5$.

Grafica los puntos obtenidos y el polinomio $p(x)$, interpreta los resultados obtenidos.

9. El valor de π se puede calcular aproximando el área de un círculo unitario como el límite de una sucesión $p_1, p_2, \dots$ descrita a continuación:
Se divide un círculo unitario en 2^n sectores (en el ejemplo, $n = 3$). Se aproxima el área del sector por el área del triángulo isóceles. El ángulo θ_n es $2\pi/2^n$. El área del triángulo es $1/2 \sin\theta_n$.

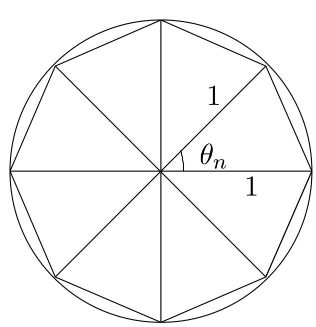

Figura 1: División en n sectores.

La enésima aproximación a π es: $p_n = 2^{n-1}\sin\theta_n$. Demuestra que

$$\sin\theta_n = \frac{\sin\theta_{n-1}}{\left(2\left[1+(1-\sin^2\theta_{n-1})^{\frac{1}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Usa esta relación de recurrencia para generar las sucesiones $\sin\theta_n$ y p_n en el rango $3 \leq n \leq 20$ iniciando con $\sin\theta_2 = 1$. Compara tus resultados con el valor de $4.0\arctan(1.0)$

10. La sucesión de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ está definida por la relación de recurrencia lineal

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1 \\ \lambda_n = \lambda_{n-1} + \lambda_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

Una fórmula para obtener el n-ésimo número de Fibonacci es

$$\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right]^n - \left[\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right]^n\right\}$$

Calcula λ_n en $3 \leq n \leq 50$ usando tanto la relación de recurrencia como la fórmula. Discute los resultados obtenidos.

11. La dinámica de un cometa está sometida por la fuerza gravitacional entre el cometa y el Sol,

$$\mathbf{f} = -GMm\mathbf{r}/r^3$$

donde $G = 6.67 \times 10^{11} Nm^2/kg^2$ es la constante gravitacional, $M = 1.99 \times 10^{30} kg$ es la masa del Sol, m es la masa del cometa, $\mathbf{r}$ es el vector posición del cometa medido desde el Sol, y r es la magnitud de $\mathbf{r}$. Escribe un programa para estudiar el movimiento del cometa Halley que tiene un afelio (el punto más alejado del Sol) de $5.28 \times 10^{12} m$ y la velocidad en el afelio es de $9.12 \times 10^2 m/s$

   a) ¿cuáles son las unidades tanto de tiempo como de longitud más pertinentes en el problema?

   b) Discute el error que se genera por el programa en cada período del cometa Halley.

12. Hay personas que luego no tienen nada qué hacer, y algunos se dedican a saltar en motocicletas, se te pide que propongas un modelo de estudio para estos saltos. La resistencia del aire de un objeto en movimiento está dada por

$$\mathbf{f}_r = -cA\rho v(\mathbf{v})/2$$

donde $v(\mathbf{v})$ es la velocidad y A es la sección de área transversal del objeto en movimiento, ρ es la densidad del aire y c es un coeficiente en el orden de 1, para los demás factores que no se enlistan. Si la sección de área transversal es $A = 0.93m^2$, la velocidad máxima con la que despega la motocicleta es de $67m/s$, la densidad del aire es $\rho = 1.2kg/m^3$, la masa combinada de la motocicleta y la persona que maneja es de 250 kg, y el coeficiente $c = 1$, encuentra el ángulo de inclinación de la rampa de despegue, para que se consiga la mayor distancia de recorrido.

13. El 25 de febrero de 1991, durante la guerra del Golfo, una batería de misiles Patriot americanos en Dharan (Arabia Saudita) no lograron interceptar un misil Scud iraquí. Murieron 28 soldados americanos. La causa: los errores numéricos por utilizar truncado en lugar de redondeo en el sistema que calcula el momento exacto en que debe ser lanzado el misil.
Las computadoras de los Patriot que han de seguir la trayectoria del misil Scud, la predicen punto a punto en función de su velocidad conocida y del momento en que fue detectado por última vez en el radar. La velocidad es un número real. El tiempo es una magnitud real pero el sistema la calculaba mediante un reloj interno que contaba décimas de segundo, por lo que representaban el tiempo como una variable entera. Cuanto más tiempo lleva el sistema funcionando más grande es el entero que representa el tiempo. Los ordenadores del Patriot almacenan los números reales representados en punto flotante con una mantisa de 24 bits. Para convertir el tiempo entero en un número real se multiplica éste por 1/10, y se trunca el resultado (en lugar de redondearlo). El número 1/10 se almacenaba truncado a 24 bits. El pequeño error debido al truncado, se hace grande cuando se multiplica por un número (entero) grande, y puede conducir a un error significativo. La batería de los Patriot llevaba en funcionamiento más de 100 horas, por lo que el tiempo entero era un número muy grande y el número real resultante tendrá un error cercano a 0.34 segundos.
Explica a detalle qué fue lo que ocurrió.

14. Consideremos una partícula bajo un campo gravitatorio uniforme vertical y una fuerza de resistencia $\mathbf{f}_r = -\kappa\nu(\mathbf{v})$, donde $\nu(\mathbf{v})$ es la velocidad de la partícula y κ es un parámetro positivo. Analiza la dependencia de la altura y la velocidad de una gota de agua con diferentes m/κ, donde m es la masa de la gota de agua, para simplificar, considera la razón como una constante. Grafica la velocidad terminal de la gota de lluvia contra m/κ, y compáralo con el resultado de una caída libre.

15. Algunas constantes matemáticas son utilizadas con frecuencia en la física, tales como π, e y la constante de Euler $\gamma = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} k^{-1} - \ln n)$. Encuentra una forma para crear cada una de las constantes π, e y γ. Después, considerando ya los elementos del lenguaje de programación, determina: la precisión y eficiencia. Si se requiere utilizar los valores de las constantes dentro del código, ¿se debe generar en una sola ocasión y almacenarlo en un variable o se debe de generar en cada ocasión que se requiera?