Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Valores en la frontera
(continuamos con el Tema 3)

Curso Física Computacional

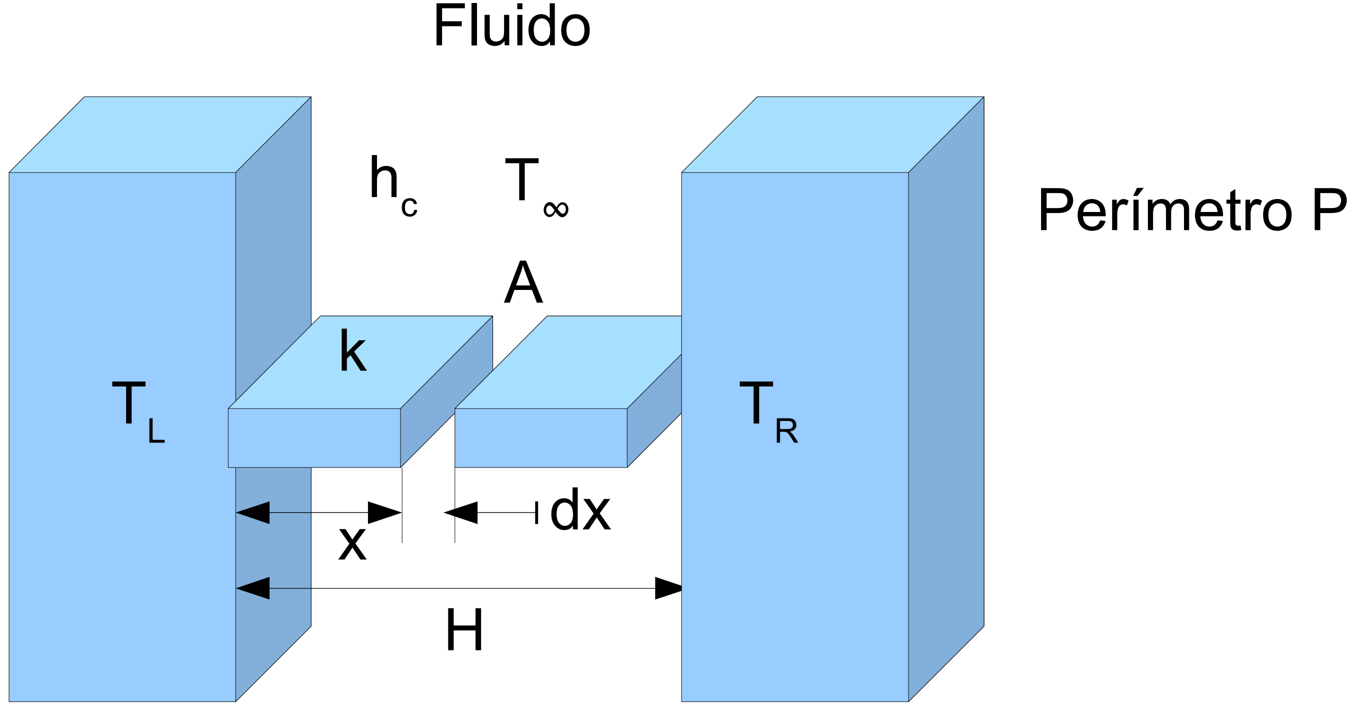
M. en C. Gustavo Contreras Mayén

En los problemas de EDO unidimensionales con valores en la frontera, se pide que la solución satisfaga las condiciones de frontera en ambos extremos del dominio unidimensional.

La definición de las condiciones en la frontera es parte fundamental de los problemas de este tipo.

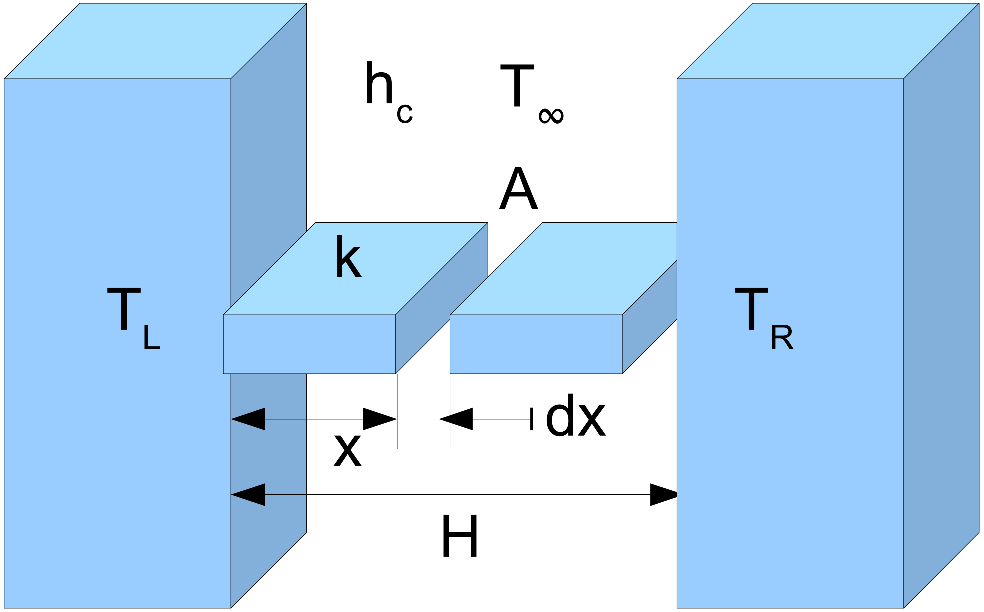
El caso de una varilla delgada de metal

Sea una varilla delgada de metal con longitud *H*, sus extremos están conectados a distintas fuentes de calor.



Si el calor sale de la superficie de la varilla únicamente por transferencia de calor, por medio de convección, la ecuación de temperatura es:

$$-A\frac{d}{dx}k(x)\frac{d}{dx}T(x)+h_c P T(x)=h_c P T_\infty + A S(x)$$



T(x) es la temperatura del punto que se encuentra a una distancia *x* del extremo izquierdo.

A es el área constante de una sección transversal de la varilla.

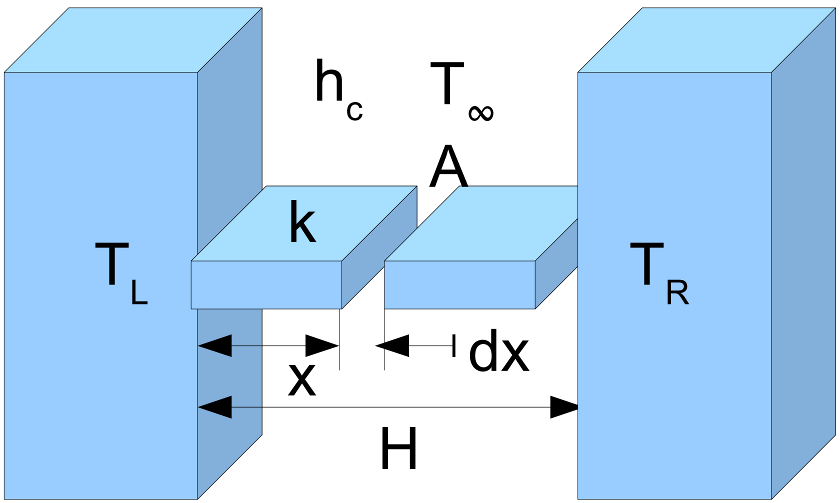
k es la conductividad térmica.

P es el perímetro de la varilla.

h_c es el coeficiente de transferencia de calor por convección.

T_∞ es la temperatura neta del aire.

S es la fuente de calor.



Las condiciones de frontera son:

$$T(0) = T_L$$

$$T(H) = T_R$$

Si T^o se define como

$$T^o = T - T_\infty$$

La ecuación de temperatura la podemos expresar como:

$$-\frac{d}{dx}k(x)\frac{d}{dx}T^o(x)+h_c\frac{P}{A}T^o(x)=S(x)$$

El primer término representa la difusión del calor, el segundo es la pérdida de calor en el aire por medio de la convección y el lado derecho es la fuente de calor.

Otro ejemplo de una EDO con forma similar es la ecuación de difusión de neutrones dada por:

$$-\frac{d}{dx} D(x) \frac{d}{dx} \Psi(x) + \Sigma_a \Psi(x) = S(x)$$

Donde Ψ es el flujo de neutrones, D es el coeficiente de difusión y S es la fuente de neutrones. El primer término indica la difusión de neutrones, el segundo la pérdida por absorción y el lado derecho es la fuente de neutrones.

considerando en otros casos dentro de la física para problemas con difusión, si se expresa en términos de:

$$-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}\phi(x)+q(x)\phi(x)=S(x)$$

que es una ley de conservación de la difusión.

integrando la ecuación anterior en el intervalo [a,b], se obtiene que:

$$Z(b) - Z(a) + \int_b^a q(x)\phi(x)dx = \int_b^a S(x)dx$$

donde:

$$Z(x) = -p(x)\frac{d}{dx}\phi(x)$$

Problemas con valores en la frontera para varillas y láminas

Consideremos una EDO de segundo orden con valores a la frontera:

$$-\phi''(x)+q\,\phi(x)=S(x)$$

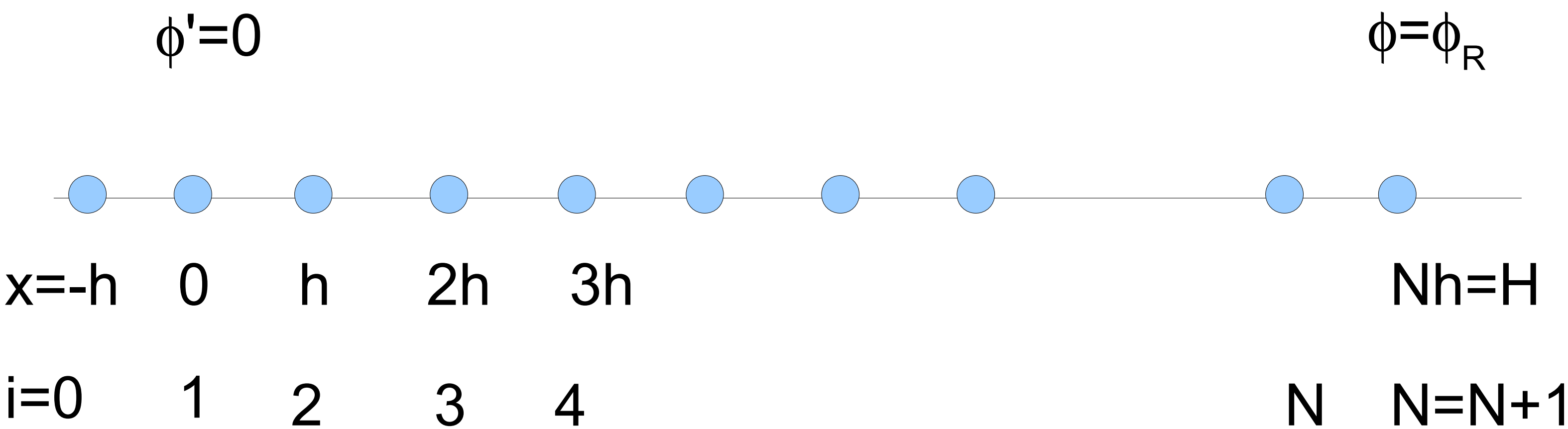
$$0 < x < H$$

con condiciones de frontera:

$\phi'(0) = 0$ (condición de frontera izquierda)

$\phi'(H) = \phi'_R$ (condición de frontera derecha)

Si dividimos el dominio en N intervalos de igual longitud, se obtiene una retícula donde los intervalos miden $h = H/N$



Usando una aproximación por diferencias centrales al primer término de la EDO de segundo orden, obtenemos la ecuación en diferencias para la *i*-ésima retícula:

$$\frac{(-\phi_{i-1}+2\phi_i-\phi_{i+1})}{h^2}+q\phi_i=S_i$$

donde $\phi_i = \phi(x_i)$, $S_i = S(x_i)$ y *q* es constante.

Al multiplicar por h^2:

$$-\phi_{i-1}+(2+w)\phi_i-\phi_{i+1}=h^2 S_i$$

donde $w = qh^2$.

Esta ecuación se puede aplicar a todos los puntos de la retícula, excepto cuando $i = 1$ e $i = N+1$.

La condición de la frontera izquierda $\phi'(0) = 0$, es equivalente a una condición simétrica en la frontera llamada *condición adiabática en la frontera* en el caso de la transferencia de calor.

Si se considera un punto hipotético de la retícula $i = 0$ localizado en $x = -h$ la ecuación anterior, en el caso $i = 1$ es:

$$-\phi_0+(2+w)\phi_1-\phi_2=h^2 S_1$$

en esta ecuación podemos hacer $\phi_0 = \phi_2$ debido a la simetría. Dividiendo entre dos, obtenemos lo siguiente:

$$\left(1+\frac{w}{2}\right)\phi_1-\phi_2=\frac{1}{2}h^2 S_1$$

como $\phi_{N+1} = \phi(H) = \phi_R$ en la frontera derecha, la ecuación con $i = N$ es:

$$-\phi_{N-1}+(2+w)\phi_N=h^2 S_N+\phi_R$$

donde los términos conocidos se pasaron al lado derecho.

Ordenando las ecuaciones anteriores:

$$
\begin{aligned}
(1+w/2)\phi_1 - \phi_2 &= h^2 S_1/2 \\
-\phi_1 + (2+w)\phi_2 - \phi_3 &= h^2 S_2 \\
\phi_2 + (2+w)\phi_3 - \phi_4 &= h^2 S_3 \\
&\dots \\
&\dots \\
-\phi_{N+1} + (2+w)\phi_N &= h^2 S_N + \phi_R
\end{aligned}
$$

que en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1+w/2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2+w & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2+w & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2+w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \ddots \\ \phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 S_1/2 \\ h^2 S_2 \\ h^2 S_3 \\ \ddots \\ h^2 S_N + \phi_R \end{pmatrix}$$

que es una matriz tridiagonal; este tipo de matriz aparece muy frecuentemente en los métodos numéricos para problemas con valores en la frontera.

Solución de sistemas tridiagonales

Una ecuación tridiagonal la podemos escribir de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_n & B_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \ddots \\ \phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \ddots \\ D_N \end{pmatrix}$$

El algoritmo de solución para esta matriz, es el siguiente:

1. Se inicializan dos nuevas variables: $B'_1 = B_1$ y $D'_1 = D_1$
2. Se calculan de forma recursiva las siguientes ecuaciones, de *i* hasta *N*:

$$R = A_i / B'_{i-1}$$

$$B'_i = B_i - RC_{i-1}$$

$$D'_i = D_i - RD'_{i-1} \quad para\ i = 2,3,.., N$$

3. Se calcula la solución para la última incógnita:

$$\phi_i = \frac{\left(D_i^{'} - C_i \phi_{i+1}\right)}{B_i^{'}} \qquad i = N-1, N-2, \cdots, 1$$

```
SUBROUTINE TRDG(A,B,C,D,N)
    DIMENSION A(1), B(1), C(1),D(1)
    DO 220 I=2, N
        R=A(I)/B(I-1)
        B(I)=B(I)-R*C(I-1)
        D(I)=D(I)-R*D(I-1)
220     CONTINUE
    D(N)=D(N)/B(N)
    DO 240 I=N-1,1,-1
        D(I)=(D(I)-C(I)*D(I+1))/B(I)
240     CONTINUE
    RETURN
    END
```

Ejercicio

Determinar las ecuaciones en diferencias y su solución para el siguiente problema con valores en la frontera:

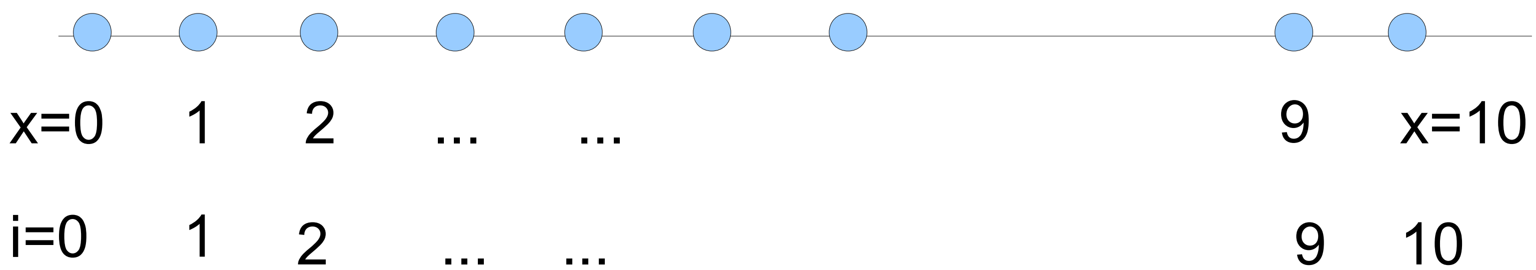
$$-2y''(x)+y(x)=e^{-0.2x}$$

$$\text{con condiciones en la frontera}$$
$$y(0)=1$$
$$y'(10)=-y(10)$$

suponer que los intervalos de la retícula tienen longitud unitaria.

Solución

En la siguiente figura se muestra la retícula.



Las ecuaciones en diferencias para i=1 hasta 9, son las siguientes:

$$2\left(-y_{i-1}+2\mathrm{y}_i-y_{i+1}\right)+y_i=\exp\left(-0.2\mathrm{i}\right)$$

Donde x_i = i

Para i=1, sustituimos la condición de frontera y_0=y(0)=1 en las ecuaciones anteriores y resulta que:

$$5y_1 - 2y_2 = \exp(-0.2) + 2$$

Para i=10, aproximamos la ecuación diferencial por:

$$-2\frac{\left[y'(10) - y'(9.5)\right]}{1/2} + y(10) = \exp(-2)$$

Por medio de la aproximación por diferencias centrales, el término y'(9.5) es

$$y'(9.5) = [y(10) - y(9)]/1$$

Sustituimos el resultado anterior y la condición de frontera y'(10)=-y(10), para obtener

$$-2y_9 + 4.5y_{10} = 0.5\exp(-2)$$

Las ecuaciones en diferencias son entonces:

$$5y_1 - 2y_2 = \exp(-0.2) + 2$$
$$-2y_{i-1} + 5y_i - 2y_{i+1} = \exp(-0.2x_i) \quad para \quad i = 2..9$$
$$-2y_9 + 4.5y_{10} = 0.5\exp(-2)$$

Donde x_i = i

Hay que usar el código edolinealf.f90 para resolver el problema.

Para la casa

Ahora para ir practicando para el examen:

Del ejemplo anterior: obtén las ecuaciones en diferencias para *i = 1*, *i= 10*, pero las condiciones en la frontera ahora son:

$$y'(1) = y(1)$$
$$y'(10) = y(0)$$

Tipos de condiciones en la frontera

1. Condición en la frontera con un valor fijo (condición de Dirichlet).

Se da un valor de la función solución:

$$\phi(0) = 0$$

$$\phi(0) = 1$$

2. Condición en la frontera para la derivada (tipo de Neumann)

Se da la derivada de la solución:

$$\phi'(0) = 0$$

$$\phi'(0) = 1$$

3. Condición en la frontera de tipo mixto.

Se relaciona un valor de la función con la derivada.

$$\phi'(0) + \alpha\phi(0) = \beta$$

Problemas con valores en la frontera para cilindros y esferas

Cuando tenemos problemas de EDO con simetrías cilíndricas y esféricas, la forma de obtener las ecuaciones en diferencias, es similar al caso de una geometría laminar.

Las ecuaciones en diferencias tendrán la forma de la ecuación:

$$\begin{pmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_n & B_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \ddots \\ \phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \ddots \\ D_N \end{pmatrix}$$

La EDO de segundo orden para una geometría cilíndrica y esférica, la podemos reducir a una expresión:

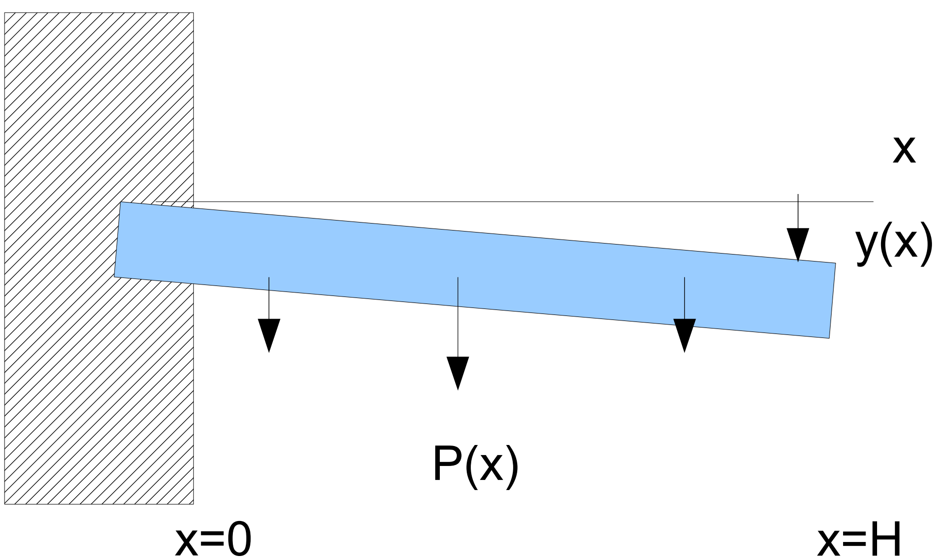
$$-\frac{1}{r^m}\frac{d}{dr}p(r)r^m\frac{d}{dr}\phi(r)+q(r)\phi(r)=S(r)$$

Si m = 1 tenemos el caso del cilindro,
si m = 2 tenemos a la esfera:

La solución a este tipo de problemas, se realiza al integrar una celda de volumen cilíndrico o esférico.

Doblamiento de una viga

Sea una viga sujeta en uno de los extremos, tiene una carga distribuida *P(x)*, éste es un problema no homogéneo con valores en la frontera.



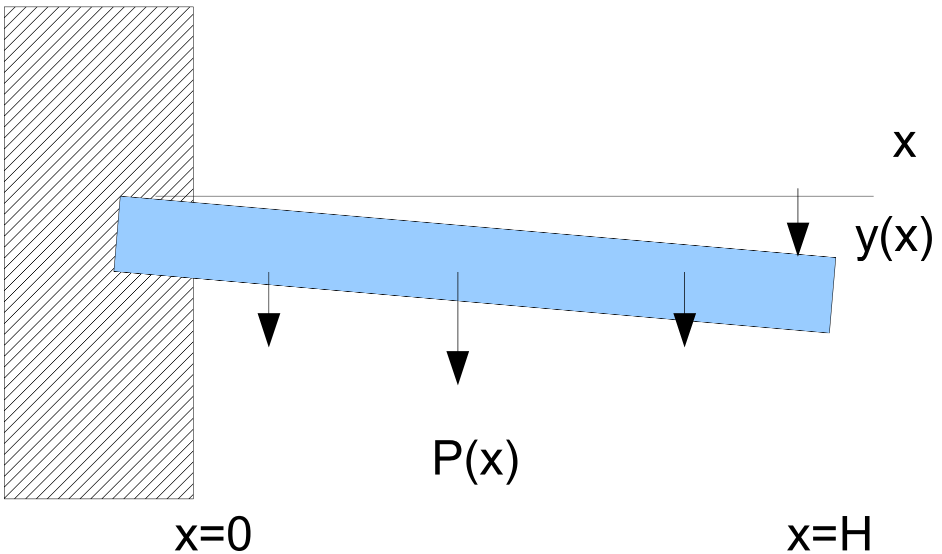
Si la carga distribuida *P(x)*, la ecuación para el desplazamiento de la viga es:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2}{dx^2}\,y\right) = P(x)$$

Donde *E* es el módulo de elasticidad e *I* es el momento de inercia de la sección transversal, *y* es el desplazamiento y *P* la carga.

El producto *EI* se le denomina *rigidez a la flexión*.

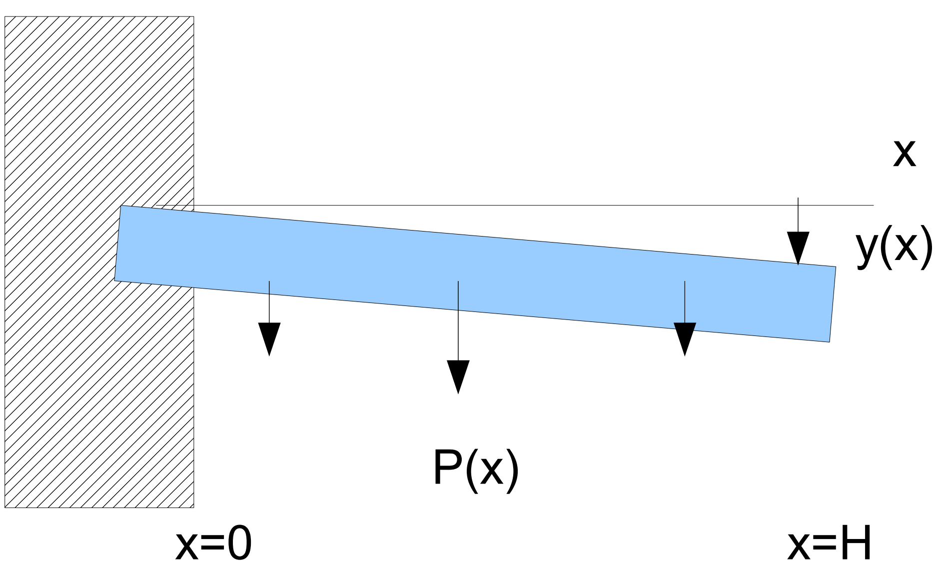
Mediante la aproximación por diferencias finitas para una viga uniforme que está sujeta en el extremo izquierdo, quedando libre del lado derecho.



Las condiciones en la frontera para este problema son:

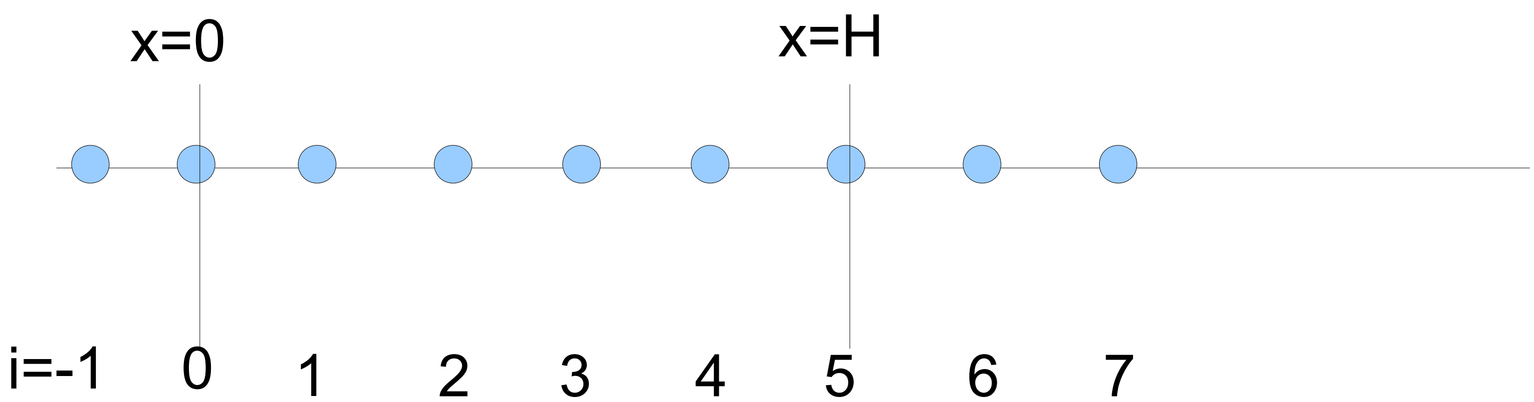
$y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$ para la frontera izquierda

$M = y''(H) = 0$ y $V = y'''(0) = 0$ para la frontera derecha



M es el momento de doblamiento y V el momento de esfuerzo, ambos en la frontera derecha.

Consideremos una retícula como la siguiente:



Los puntos *i= -1, 6 y 7* son hipotéticos. Sea la distribución de la retícula uniforme.

Así pues, la EDO queda como:

$$EI_i\, y_i'''' + 2\mathrm{EI}_i'\, y_i''' + EI''_i\, y_i'' = P(x)$$

Las derivadas de cuarto, tercero y segundo orden, se calculan numéricamente por aproximaciones de diferencias centrales:

$$y'''' = \frac{(y_{i-2} - 4\mathrm{y}_{i-1} + 6\mathrm{y}_i - 4\mathrm{y}_{i+1} + y_{i+2})}{h^4}$$

$$y''' = \frac{(-y_{i-2} + 2\mathrm{y}_{i-1} - 2\mathrm{y}_{i+1} + y_{i+2})}{2\mathrm{h}^3}$$

$$y'' = \frac{(-y_{i-1} - 2\mathrm{y}_i + y_{i+1})}{h^2}$$

Para calcular la primera y segunda derivada de I_i, se realiza mediante diferencias finitas: con *i = 1* hasta *N-1*

$$I_i' = \frac{(I_{i+1} - I_{i-1})}{2\mathrm{h}}$$

$$I_i'' = \frac{(I_{i+1} - 2\mathrm{I}_i + I_{i+1})}{h^2}$$

Usando diferencias centrales para *N*:

$$I_N' = \frac{(3I_N - 4I_{N-1} - I_{N-2})}{2h}$$

$$I_N'' = \frac{(-2I_N + 5I_{N-1} - 4I_{N-2} + I_{N-3})}{h^2}$$

Al sustituir las ecuaciones de diferencias, se obtiene que:

$$a_i y_{i-2} + b_i y_{i-1} + c_i y_i + d_i y_{i+1} + e_i y_{i+2} = f_i \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

donde

$$a_i = \frac{EI_i}{h^4} - \frac{EI'_i}{h^3}$$

$$b_i = -\frac{4\mathrm{EI}_i}{h^4} + \frac{2\mathrm{EI}'_i}{h^3} + \frac{EI''_i}{h^2}$$

$$c_i = \frac{6\mathrm{EI}_i}{h^4} + \frac{2\mathrm{EI}''_i}{h^2}$$

$$d_i = -\frac{4\mathrm{EI}_i}{h^4} - \frac{2\mathrm{EI}'_i}{h^3} + \frac{EI''_i}{h^2}$$

$$e_i = \frac{EI_i}{h^4} + \frac{EI'_i}{h^3}$$

$$f_i = P(x_i)$$

Si *i=1* la ecuación tiene la forma:

$$a_1 y_{-1} + b_1 y_0 + c_1 y_1 + d_1 y_2 + e_1 y_3 = f_1$$

Esta ecuación contiene un punto hipotético *i=-1* que no pertenece al dominio.

Hacemos $y_0=0$ ya que $y(0)=0$ es la condición de frontera izquierda.

La segunda condición de frontera es $y´(0)=0$ se puede aproximar mediante $(y_1-y_{-1})/2h = 0$, por lo que $y_{-1} = y_1$. Entonces, al sustituir:

$$(a_1+c_1)\,y_1+d_1\,y_2+e_1\,y_3=f_1$$

Para trabajar con las condiciones en la frontera derecha, las aproximaciones por diferencias para tales condiciones son:

$$y'''=\frac{(-y_{N-2}+2\mathrm{y}_{N-1}-2\mathrm{y}_{N+1}+y_{N+2})}{2\mathrm{h}^3}=0$$

$$y''=\frac{(-y_{N-1}-2\mathrm{y}_N+y_{N+1})}{h^2}=0$$

Pensando que estas ecuaciones son parte de un conjunto de ecuaciones simultáneas, si hacemos un arreglo matricial, quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_1+c_1 & d_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para resolver este sistema, utilizamos la eliminación de Gauss o la descomposición LU