Examen 2 - Operaciones matemáticas básicas

Integración - Solución

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

14 de noviembre de 2013

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

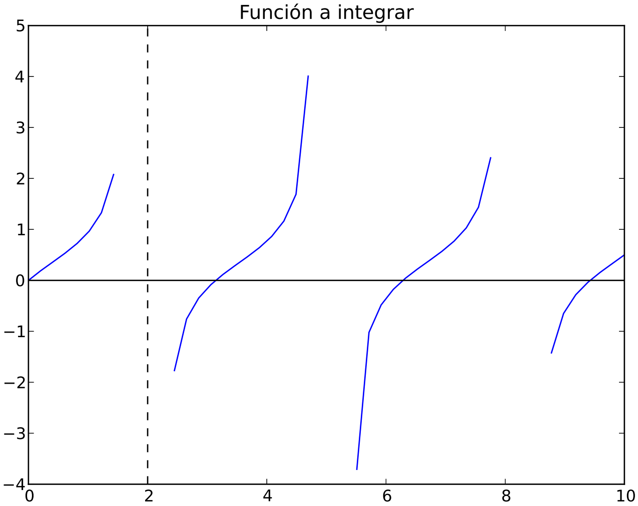
Problema 1

Usa la regla del trapecio recursiva para evaluar

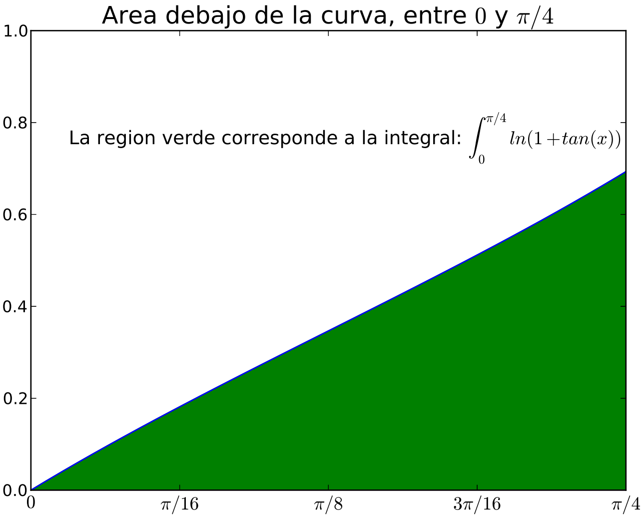
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} ln(1 + \tan(x)) dx$$

Explica tus resultados.

Graficamos la función para tener una idea de lo que buscamos:



Graficamos la función para tener una idea de lo que buscamos:



Usando el algoritmo recursivo del trapecio, para k=1, tenemos que la integral vale:

```
Integral =  0.272198261288
nPaneles =  2
```

Y corroborando el resultado, usamos `scipy.integrate`, donde obtenemos:

```
Usando scipy.integrate.quad = 0.272198261288
```

Problema 2

La siguiente tabla indica la potencia P propocionada por las ruedas de un carro como función de la velocidad v. Si la masa del carro es $m = 2000$ kg, calcula el tiempo Δt necesario para que el carro acelere de 1 m/s a 6 m/s. Usa la regla del trapecio para integrar. Tip:

$$\Delta t = m \int_{1s}^{6s} \left(\frac{v}{P} \right) dv$$

que se puede obtener de la ley de Newton $F = m/(dv/dt)$ y por la definición de potencia, $P = Fv$.

v (m/s)	0	1.0	1.8	2.4	3.5	4.4	5.1	6.0
P (kW)	0	4.7	12.2	19.0	31.8	40.1	43.8	43.2

Problema 3

Evalúa la integral

$$\int_{-1}^{1} \cos\left(2cos^{-1}x\right)\, dx$$

con la regla de Simpson de $1/3$, usando 2,4 y 6 paneles. Explica tus resultados.

Problema 4

La siguiente tabla proporciona el empuje F del arco como función del desplazamiento x. Si la cuerda tiene un desplazamiento de 0.5 m, calcula la velocidad de una flecha de 0.075 kg, cuando sale del arco. Tip: la energía cinética de la flecha es igual al trabajo hecho al estirar la cuerda, que es:

$$m\frac{v^2}{2} = \int_0^{0.5m} F dx$$

x (m)	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
F (N)	0	37	71	104	134	161

x (m)	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
F (N)	185	207	225	239	250

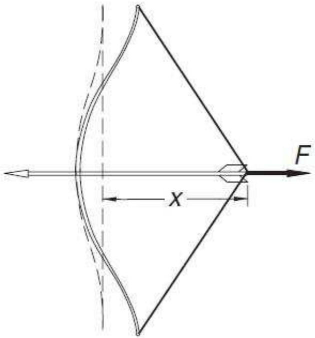


Figura: Flecha para el ejercicio

Problema 5

El período de un péndulo de longitud L es $\tau = 4\sqrt{\frac{L}{g}}h(\theta_0)$, donde g es la aceleración debida a la gravedad, θ_0, representa la amplitud angular y

$$h(\theta_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin^2\theta}}$$

Calcular $h(15^\circ)$, $h(30^\circ)$ y $h(45^\circ)$; compara esos valores con $h(0^\circ) = \frac{\pi}{2}$ (la aproximación usada para pequeñas amplitudes)

Problema 6

La fórmula de Debye para la capacidad calorífica C_v de un sólido, es $C_v = 9Nkg(u)$, donde

$$g(u) = u^3 \int_0^{1/u} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)} dx$$

los términos de la ecuación son:

$N =$ Número de partículas en el sólido

$k =$ Constante de Boltzmann

$u = \dfrac{T}{\Theta_D}$

$T =$ temperatura absoluta

$\Theta_D =$ Temperatura de Debye

Calcular $g(u)$ para $u = 0$ a 1.0 en intervalos de 0.05, grafica los resultados.

Problema 7

Una masa m está unida a un resorte de longitud b y rigidez k. Se puede demostrar que la aceleración de la masa es $\ddot{x} = -f(x)$, donde

$$f(x) = \mu g + \frac{k}{m}(\mu b + x)\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}}\right)$$

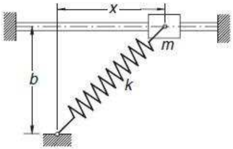


Figura: Masa unida a un resorte.

Si la masa se libera del reposo en $x = b$, y la velocidad en $x = 0$ está a por

$$v_0 = \sqrt{2 \int_o^b f(x) dx}$$

Calcular mediante integración numérica el valor de v_0, usando $m = 0.8$ k, $b = 0.4$ m, $\mu = 0.3$, $k = 80$ N/m y $g = 9.81$ m/s^2.