Tarea 3 - Ecuaciones diferenciales ordinarias

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

1. En la figura (1) se muestra un sistema de tres masas. Los desplazamientos de estas tres masas satisfacen las ecuaciones dadas por

$$\begin{aligned} M_1 y_1'' + B_1 y_1' + K_1 y_1 - B_1 y_2' - K_2 y_2 &= F_1(t) \\ -B_1 y'_1 - K_1 y_1 + M_2 y_2'' + B_1 y_2' + (K_1 + K_2) y_2 - K_2 y_3 &= 0 \\ -K_2 y_2 + M_3 y_3'' + B_2 y_3' + (K_2 + K_3) y_3 &= F_3(t) \end{aligned} \tag{1}$$

Las constantes y condiciones iniciales son

$K_1 = K_2 = K_3 = 1$	(constantes de los resortes, kgm/s^2)
$M_1 = M_2 = M_3 = 1$	(masa, kg)
$F_1(t) = 1, F_3(t) = 0$	(fuerza, N)
$B_1 = B_2 = 0{,}1$	(coeficientes de amortiguamiento, kg/s)
$y_1 = 0 = y_1'(0) = y_2 = 0 = y_2'(0) = y_3 = 0 = y_3'(0)$	(condiciones iniciales)

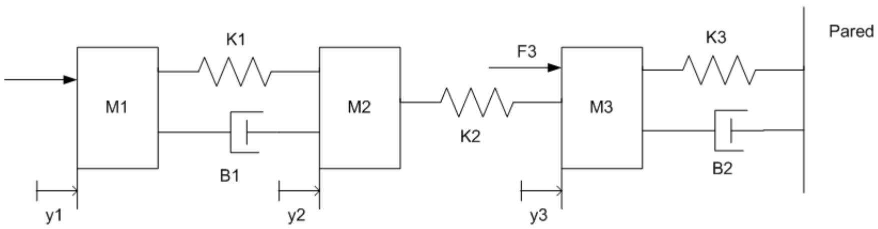

Figura 1: Sistema de masas resortes

Resuelve y grafica las ecuaciones anteriores mediante RK4, para $0 \leq t \leq 30$ segundos y $h = 0{,}1$
Hint: Definiendo

$$y_4 = y_1', \qquad y_5 = y_2', \qquad y_6 = y_3'$$

La ecuación (1) se escribe como un conjunto de seis EDO de primer orden, de la siguiente manera:

$$y_1' = y_4 \tag{2}$$
$$y_2' = y_5 \tag{3}$$
$$y_3' = y_6 \tag{4}$$
$$y_4' = \left[-B_1 y_4 - K_1 y_1 + B_1 y_5 + K_2 y_2 + F_1\right] / M_1 \tag{5}$$
$$y_5' = \left[B_1 y_4 + K_1 y_1 - B_1 y_5 - (K_1 + K_2) y_2 + K_2 y_3\right] / M_2 \tag{6}$$
$$y_6' = \left[K_2 y_2 - B_2 y_6 - (K_2 + K_3) y_3 + F_3\right] / M_3 \tag{7}$$

2. Una varilla de 1 m de longitud colocada en el vacío, se calienta mediante una corriente eléctrica aplicada a la misma. La temperatura en los extremos se fija en 273 K. El calor se disipa de la superficie mediante la transferencia de calor por radiación hacia el ambiente, cuya temperatura es 273 K. Con las siguientes constantes, determina la distribución de temperatura en la dirección del eje.

k = 60 W/mK	(conductividad térmica)
Q = 50 W/m	(tasa de generación de calor por unidad de longitud de barra)
σ= 5.67 $\times 10^{-8}$ W/m^2K^4	(constante de Stefan-Boltzamann)
A= 0.0001 m^2	(área de la sección transversal)
P = 0.01 m	(perímetro de la varilla)

La ecuación de conducción de calor en la dirección del eje x es

$$-Ak\frac{d^2}{dx^2}T + P\sigma\left(T^4 - 273^4\right) = Q \qquad\qquad 0 < x < 1{,}0 \tag{8}$$

con las condiciones de frontera dadas por

$$T(0) = T(1{,}0) = 273K$$

donde T es la temperatura en grados Kelvin.
Este es un problema con condiciones en la frontera (específicadas en $x = 0$ y $x = 1$), pero se puede resolver como un problema de condición inicial sobre la base de prueba y error. Definimos y_1 y y_2 como

$$y_1(x) = T(x) \tag{9}$$
$$y_2(x) = T^{'}(x) \tag{10}$$

La ecuación (8) se puede re-escribir como un conjunto de dos EDO de primer orden como

$$y_1^{'} = y_2 \tag{11}$$
$$y_2^{'} = \frac{P}{Ak}\sigma(y^4 - 273^4) - \frac{Q}{kA} \tag{12}$$

Solo se obtiene una condición inicial $y_1 = 273$, a partir de las condiciones de frontera (y_2 no se conoce). Por ello, resolvemos la ecuación (8) con valores de prueba para $y_2(0)$, hasta satisfaceer la condición de la frontera para el extremo derecho $y_1(1) = 273$. Este enfoque se llama *método de disparo*.

3. Se dispara un proyectil al aire con un ángulo de 45° con respecto al suelo, con $u = v = 150m/s$, donde u y v son las velocidades horizontal y vertical, respectivamente. Las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\begin{aligned} u^{'} &= -cVu, \qquad & u(0) = 150m/s \\ v^{'} &= -g - cVv, \qquad & v(0) = 150m/s \end{aligned}$$

donde u y v son funciones del tiempo, $u = u(t)\ yv = v(t)$ y

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{u^2 + v^2} \\ c &= 0{,}005 \qquad \text{(coeficiente de arrastre)} \\ g &= 9{,}9m/s^2 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento se pueden resolver mediante alguno de los métodos de Runge-Kutta. La trayectoria del proyectil se puede determinar al integrar

$$x' = u \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad y' = v$$

o bien

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t u(t^{'})dt^{'} \\ y &= \int_0^t v(t^{'})dt^{'} \end{aligned}$$

a) Escribe un programa en Fortran con el método RK2 que resuelva y grafique la trayectoria del proyectil.

b) Re-escribe el programa, ahora con el metodo RK3.