Solución al problema del satélite

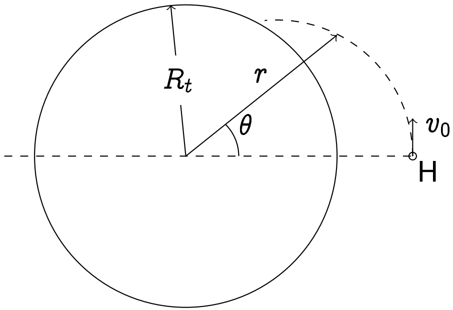
Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

Facultad de Ciencias - UNAM

17 de abril de 2018

El problema del satélite



Un satélite se lanza desde una altitud $H = 772$ km sobre el nivel del mar, con una velocidad inicial $v_0 = 6700\ m/s$ en la dirección que se muestra.

Sistema de EDO-2

El conjunto de EDO que describen el movimiento del satélite son:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM_t}{r^2} \qquad \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}$$

donde r y θ son las coordenadas polares del satélite.

Constantes del Problema

Las constantes involucradas en las expresiones, son:

$$
\begin{aligned}
G &= 6.672 \times 10^{-11}\ \text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^2 \\
M_t &= 5.9742 \times 10^{24}\ \text{kg, Masa de la Tierra} \\
R_e &= 6378.14\ \text{km, radio de la Tierra al nivel del mar}
\end{aligned}
$$

Problemas a resolver

1. Obtén el conjunto de EDO-1 y las condiciones iniciales del problema, de la forma $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}), \mathbf{y}(0) = \mathbf{b}$.

Problemas a resolver

1. Obtén el conjunto de EDO-1 y las condiciones iniciales del problema, de la forma $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}), \mathbf{y}(0) = \mathbf{b}.$
2. Integra las EDO-1 en el tiempo en que se lanza el satélite y choca en su regreso a la Tierra.

Problemas a resolver

1. Obtén el conjunto de EDO-1 y las condiciones iniciales del problema, de la forma $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}), \mathbf{y}(0) = \mathbf{b}$.
2. Integra las EDO-1 en el tiempo en que se lanza el satélite y choca en su regreso a la Tierra.
3. Calcula el lugar del impacto, con θ.

Inciso 1: Sistema de EDO-1

Tenemos que

$$GM_t = (6.672 \times 10^{-11})(5.9742 \times 10^{24}) =$$
$$= 3.9860 \times 10^{14} \mathrm{m}^3 \mathrm{s}^2$$

Ahora hacemos

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Inciso 1: Sistema de EDO-1

Por lo que el conjunto equivalente de EDO-1, resulta ser

$$\dot{\mathrm{y}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_0 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_0 y_3^2 - 3.9860 \times 10^{14}/y_0^2 \\ y_3 \\ -2y_1 y_3/y_0 \end{bmatrix}$$

Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales resultan

$$
\begin{aligned}
r(0) &= R_t + H = (6378.14 + 772) \times 10^3 = 7.15014 \times 10^6 \text{ m} \\
\dot{r}(0) &= 0 \\
\theta(0) &= 0 \\
\dot{\theta}(0) &= \frac{v_0}{r(0)} = \frac{6700}{7.15014 \times 10^6} = 0.937045 \times 10^{-3} \text{ rad/s}
\end{aligned}
$$

Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales resultan

$$
\begin{aligned}
r(0) &= R_t + H = (6378.14 + 772) \times 10^3 = 7.15014 \times 10^6 \text{ m} \\
\dot{r}(0) &= 0 \\
\theta(0) &= 0 \\
\dot{\theta}(0) &= \frac{v_0}{r(0)} = \frac{6700}{7.15014 \times 10^6} = 0.937045 \times 10^{-3} \text{ rad/s}
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 7.15014 \times 10^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0.937045 \times 10^3 \end{bmatrix}
$$

Inciso 2: Integración de las EDO-1

Usaremos la función `integrate.odeint` para integrar el sistema de EDO-1.

De lo visto en clase, se necesita la función `y, t` que incluye el sistema de EDO-1.

Inciso 2: Integración de las EDO-1

El período de integración, es decir, el valor del tiempo que tarda en caer el satélite y choca con la Tierra, hay que estimarlo tentativamente.

Código 1: Solución con python

```
def F(y, t):
    F = zeros((4), dtype='float64')
    F[0] = y[1]
    F[1] = y[0] * (y[3]**2) - 3.9860e14 / (y[0]**2)
    F[2] = y[3]
    F[3] = -2.0 * y[1] * y[3]/y[0]
    return F

t = np.linspace(0, 1200, 100)
y0 = np.array([7.1514e6, 0., 0., 0.937045e-3])
y1 = odeint(F, y0, t)

```

```python
print('tiempo \t altura \t velocidad')
print('-'*30)

for i in range(len(t)):
    print('{0:4.4f} \t {1:1.6e} \t {2:1.6e}'.format(t[i], y1[i][0], y1[i][1]))
```

Resultados

tiempo	altura (r)	velocidad ($\dot{r}$)	θ	$\dot{\theta}$
0.0000	$7.151400e+06$	$0.000000e+00$	$0.000000e+00$	$9.370450e-04$
12.1212	$7.151289e+06$	$-1.835853e+01$	$1.135824e-02$	$9.370742e-04$
24.2424	$7.150955e+06$	$-3.671583e+01$	$2.271718e-02$	$9.371616e-04$
...	...	...	...	...
1030.3030	$6.386228e+06$	$-1.396748e+03$	$1.043431e+00$	$1.175043e-03$
1042.4242	$6.369227e+06$	$-1.408222e+03$	$1.057712e+00$	$1.181324e-03$
...	...	...	...	...

Intervalo de tiempo al choque

El satélite choca con la Tierra cuando r es igual a $R_t = 6.37814 \times 10^6$ m.

De los resultados, vemos que esto ocurre entre el tiempo $t = 1030$ y 1042 segundos.

Intervalo de tiempo al choque

tiempo	altura (r)	velocidad ($\dot{r}$)	θ	$\dot{\theta}$
0.0000	$7.151400e+06$	$0.000000e+00$	$0.000000e+00$	$9.370450e-04$
12.1212	$7.151289e+06$	$-1.835853e+01$	$1.135824e-02$	$9.370742e-04$
24.2424	$7.150955e+06$	$-3.671583e+01$	$2.271718e-02$	$9.371616e-04$
...	...	...	...	...
1030.3030	$6.386228e+06$	$-1.396748e+03$	$1.043431e+00$	$1.175043e-03$
1042.4242	$6.369227e+06$	$-1.408222e+03$	$1.057712e+00$	$1.181324e-03$
...	...	...	...	...

Intervalo de tiempo al choque

Un valor de t más preciso, lo podemos obtener mediante una interpolación polinomial, pero si no queremos una precisión alta, con una interpolación lineal, bastará.

Intervalo de tiempo al choque

Un valor de t más preciso, lo podemos obtener mediante una interpolación polinomial, pero si no queremos una precisión alta, con una interpolación lineal, bastará.

Consideremos que $1030.3030 + \Delta t$ el tiempo para el impacto, por lo que escribimos

$$r(1030.3030 + \Delta t) = R_t$$

Intervalo de tiempo al choque

Desarrollando r con dos términos de la serie de Taylor, tenemos que

$$\begin{aligned} r(1030.3030) + \dot{r}(1030.3030)\Delta t &= R_t \\ 6.386228 \times 10^6 + (-1.385053 \times 10^3)\Delta t &= R_t \end{aligned}$$

que al despejar,

$$\Delta t = \frac{R_t - 6.386228 \times 10^6}{-1.385053 \times 10^3} = 5.8394\,\mathrm{s}$$

Intervalo de tiempo al choque

Desarrollando r con dos términos de la serie de Taylor, tenemos que

$$\begin{aligned} r(1030.3030) + \dot{r}(1030.3030)\Delta t &= R_t \\ 6.386228 \times 10^6 + (-1.385053 \times 10^3)\Delta t &= R_t \end{aligned}$$

que al despejar,

$$\Delta t = \frac{R_t - 6.386228 \times 10^6}{-1.385053 \times 10^3} = 5.8394\,\mathrm{s}$$

Por lo que el tiempo de impacto es 1036.1424 segundos.

Inciso 3) Coordenada de impacto

La coordenada θ del impacto, la podemos calcular de una manera similar, para ello desarrollamos dos términos de la serie de Taylor:

$$\begin{aligned}\theta(1030.3030+\Delta t) &= \theta(1030.3030)+\dot{\theta}(1030.3030)\Delta t\\ &= 1.043431+(1.175043\times 10^{-3})(5.8\\ &= 1.5029\ \text{rad} = 60.18^{\circ}\end{aligned}$$