Tema 2 - Operaciones matemáticas básicas

Cálculo de raíces

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

18 de septiembre de 2012

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

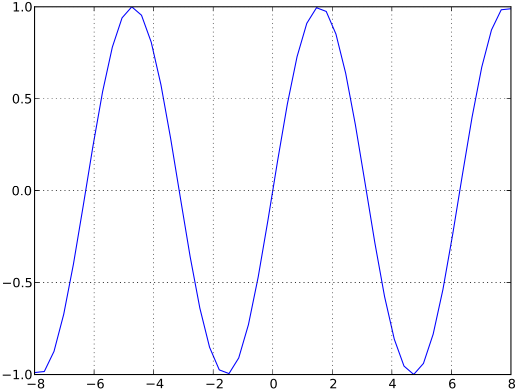
Contenido

Cálculo de raíces

Sea $y = f(x)$. Los valores de x que hacen que $y = 0$ se denominan raíces de la ecuación.

El teorema fundamental del álgebra indica que todo polinomio de grado n, tiene n raíces. En el caso de las raíces reales, se tiene que corresponden a los valores x que hacen que la función corte el eje de las abscisas:

Ejemplo de la función seno(x)



Las raíces de un polinomio pueden ser reales o complejas.

Si un polinomio tiene coeficientes reales

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$$

entonces todas las raíces complejas siempre ocurrirán en pares conjugados complejos.

Por ejemplo, un polinomio cúbico tiene la siguiente forma general:

$$f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

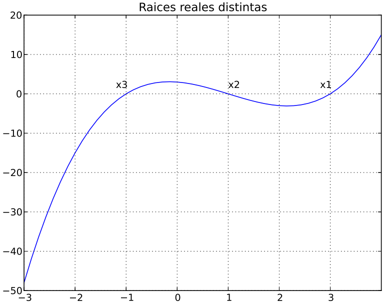
1. Tres raíces reales distintas.
2. Una raíz real con multiplicidad 3.
3. Una raíz real simple y una raíz real con multiplicidad 2.
4. Una raíz real y un par conjugado complejo.

Tres raíces distintas

$$
\begin{aligned}
f(x) =& x^3 - 3x^2 - x + 3 \\
=& (x-3)(x+1)(x-1)
\end{aligned}
$$

Las raíces son:

$$
\begin{aligned}
x_1 =& 3 \\
x_2 =& -1 \\
x_3 =& 1
\end{aligned}
$$

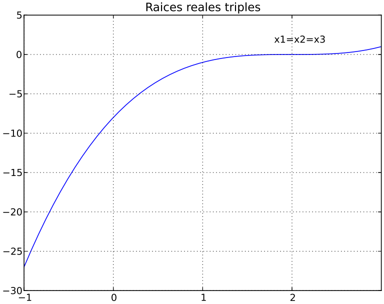


Raíz real con multiplicidad 3

$$\begin{aligned} f(x) =& x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\ =& (x-2)^3 \end{aligned}$$

Las raíces son:

$$\begin{aligned} x_1 =& 2 \\ x_2 =& 2 \\ x_3 =& 2 \end{aligned}$$

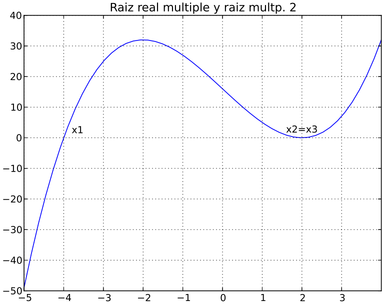


Raíz real simple y una raíz real con multiplicidad 2

$$
\begin{aligned}
f(x) =& x^3 - 12x + 16 \\
=& (x+4)(x-2)^2
\end{aligned}
$$

Las raíces son:

$$
\begin{aligned}
x_1 =& -4 \\
x_2 =& 2 \\
x_3 =& 2
\end{aligned}
$$

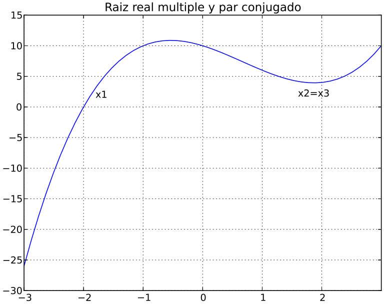


Raíz real y un par conjugado complejo

$$\begin{aligned} f(x) =& x^3 - 2x^2 - 3x + 10 \\ =& (x+2)(x-(2+i)) * \\ & *(x-(2-i)) \end{aligned}$$

Las raíces son:

$$\begin{aligned} x_1 =& -2 \\ x_2 =& 2+i \\ x_3 =& 2-i \end{aligned}$$



Funciones algebraicas

Sea $g = f(x)$ la función expresada como

$$f_n y^n + f_{n-1} y^{n-1} + \ldots + f_1 y + f_0 = 0$$

Donde f_i es un polinomio de orden i en x.

Los polinomios son un caso simple de funciones algebraicas que se representan generalmente como

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Donde n es el orden del polinomio.

Funciones trascedentales

Son aquellas que no son algebraicas.

Comprenden a las funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, entre otras.

Ejemplos:

- $$f(x) = ln(x^2 - 1)$$

- $$g(x) = e^{-0.2x} \sin(3x - 5)$$

Los métodos numéricos estándar para encontrar raíces pueden clasificarse en dos rubros:

1. La determinación de las raíces reales de ecuaciones algebraicas y trascendentales. Las técnicas a emplear en estos casos se diseñaron con el fin de encontrar el valor de una raíz simple de acuerdo con un conocimiento previo de su posición aproximada.

2. La determinación de todas las raíces reales y complejas de un polinomio, para lo cual los métodos numéricos estén diseñados específicamente para polinomios.

Determinan sistemáticamente todas las raíces del polinomio en lugar de hacerlo sólo con una, dada la posición aproximada.

Método de incrementos sucesivos

Podemos aproximar mucho mejor las raíces de una función, cuando la graficamos.

Con una gráfica general de unos cuantos puntos, tendríamos lo necesario para considerar los valores de las raíces.

El método de búsqueda incremental es una herramienta útil que podemos adoptar en conjunto con otras estrategias de cálculo de raíces, por sí sólo, éste método no nos ofrece más que una referencia sobre en dónde podrían estar esas raíces.

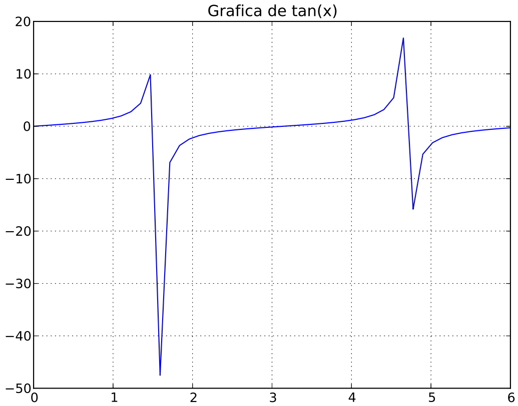
La idea básica detrás del método de búsqueda incremental es simple: si $f(x_1)$ y $f(x_2)$ tienen signos opuestos, entonces hay al menos una raíz en el intervalo (x_1, x_2).

Si el intervalo es lo suficientemente pequeño, es probable que contenga una sola raíz. Así, los ceros de $f(x)$ puede ser detectados mediante la evaluación de la función a intervalos Δx y mirando cuando se presente un cambio de signo en la función.

Hay varios problemas con el método de búsqueda incremental:

1. Es posible perder dos raíces muy próximas entre sí, si el incremento de búsqueda Δx es mayor que la separación de las raíces.
2. Una raíz doble (dos raíces que coinciden) no será detectada.
3. Algunas singularidades de $f(x)$ se puede confundir con raíces. Por ejemplo, $f(x) = \tan x$. Tiene cambios de signo en $x = \pm 1/2 n\pi$ con $n = 1, 3, 5, \ldots$

Estos puntos no son ceros verdaderos, ya que la función no cruza el eje x.



Código Método de incrementos sucesivos

El código busca un cero de la función f suministrada por el usuario en el intervalo (a, b) en incrementos de dx.

Se devuelve el intervalor (x_1, x_2) donde se encuentra la raíz, si la búsqueda se ha realizado correctamente; se devuelve $x_1 = x_2 =$ None cuando no se encontraron raíces.

Luego de que se encontró la primera raí, (la más cercana al punto a), se puede llamar de nuevo al procedimiento, sustitiyendo x_2 con el fin de encontrar la siguiente raíz. Esto se puede repetir siempre y cuando se detecta una raíz.

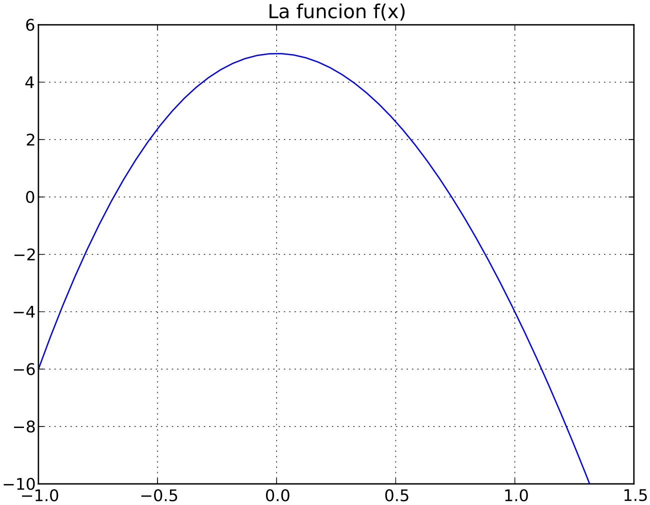
Código Método de incrementos sucesivos

```python
def buscaraiz(f,a,b,dx):
    x1 = a; f1 = f(a)
    x2 = a + dx; f2 = f(x2)
    while f1*f2 > 0.0:
        if x1 >= b: return None
        x1 = x2; f1 = f2
        x2 = x1 + dx; f2 = f(x2)
    else:
        return x1,x2
```

Ejemplo

Usa el método de incrementos sucesivos y con $\Delta x = 0.2$, para estimar el valor positivo más pequeño de la función:

$$f(x) = x^3 - 10x^2 + 5$$


La funcion f(x)
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5

Código Método de incrementos sucesivos

```
def f(x): return x**3 - 10*x**2 + 5.

a, b, dx = (0.0,1.5, 0.2)

print 'El intervalo es: '
x1, x2 = buscaraiz(f,a,b,dx)
print x1,x2
```

Método de Bisección

Después de que se ha identificado una raíz $f(x) = 0$ en el intervalo (x_1, x_2), disponemos de varios métodos para encontrar el valor de la raíz.

El método de bisección logra esta tarea: el intervalo se reduce sucesivamente a la mitad hasta que se vuelve suficientemente pequeño. La técnica de bisección no es el método más rápido disponible, pero es el más fiable. Una vez que una raíz se ha encontrado en un intervalo, nos podemos acercar a ella.

El método de bisección utiliza el mismo principio que el incremento sucesivo: si hay una raíz en el intervalo (x_1, x_2), entonces $f(x_1) * f(x_2) < 0$.

Con el fin de reducir a la mitad el intervalo, se calcula $f(x_3)$, donde $x_3 = (x1 + x2)/2$ es el punto medio del intervalo.

Si $f(x_2) * f(x_3) < 0$, entonces la raíz debe estar en (x_2, x_3) entonces re-emplazamos del intervalo inicial x_1 por x_3. De lo contrario, la raíz se encuentra en (x_1, x_3), en tal caso, se sustituye x_2 por x_3

En cualquiera de los casos, el nuevo intervalo (x_1, x_2) es la mitad del tamaño del intervalo original. La bisección es repite hasta que el intervalo se ha reducido a un valor ϵ pequeño, de modo que

$$\left| x_2 - x_1 \right| \leq \epsilon$$

Es fácil calcular el número de bisecciones necesarias para alcanzar el valor de ϵ. El intervalo inicial Δx, se reduce a $\Delta x/2$ en la primera bisección, $\Delta x/2^2$ en la segunda, luego de n bisecciones, $\Delta x/2^n$.
Haciendo $\Delta x/2^n = \epsilon$, resolvemos para n

$$n = \frac{ln(|\Delta x|/\epsilon)}{ln 2}$$

Implementa el método de bisección para calcular la(s) raíz(ces) de:

$$x^3 - 10^2 + 5$$

$$x - \tan(x) \qquad 0 \leq x \leq 20$$

Con una tolerancia de 1×10^{-4}