Algebra matricial - Examen Tarea

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén.

1. Evaluando el determinante, identifica cuáles de las siguientes matrices, son singulares, mal condicionadas o bien condicionadas:

   a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

   b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2.11 & -0.80 & 1.72 \\ -1.84 & 3.03 & 1.29 \\ -1.57 & 5.25 & 4.30 \end{pmatrix}$

   c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

   d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 3 \\ 5 & -18 & 13 \end{pmatrix}$

2. Dada la descomposición $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, calcular $\mathbf{A}$ y $|\mathbf{A}|$

   a) $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5/3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   b) $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Usando los resultados de la descomposición LU

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 11/13 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 13/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 32/13 \end{pmatrix}$$

   para resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b}^T = [1 \quad -1 \quad 2]$.

4. Resolver la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con el método de eliminación de Gauss, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5. Encontrar $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ tales que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

usando a) la descomposición de Doolittle y b) la descomposición de Choleski.

6. Utiliza la descomposición de Doolittle para resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 9 & -8 & 24 \\ -12 & 24 & -26 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 65 \\ -42 \end{pmatrix}$$

7. Resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ por el método de descomposición de Doolittle, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2.34 & -4.10 & 1.78 \\ -1.98 & 3.47 & -2.22 \\ 2.36 & -15.17 & 6.18 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.02 \\ -0.73 \\ -6.63 \end{pmatrix}$$

8. Resolver $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ por el método de descomposición de Doolittle, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 8 & -3 & 10 \\ -4 & 12 & -10 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Determinar $\mathbf{L}$ que resulta de la descomposición de Choleski para la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \dots & \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

10. Un ejemplo clásico de una matriz mal condicionada, es la matriz de Hilbert

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Escribe un programa en python que resuelva el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ por el método de Doolittle, donde $\mathbf{A}$ es una matriz de Hilbert arbitraria de $n \times n$ y

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

El programa no debe de utilizar un valor inicial para n, sino que en tiempo de ejecución, se determine para qué valor de n, la solución es exacta al menos hasta seis cifras significativas comparada con la solución exacta

$$\mathbf{x} = [1\ \ 1\ \ 1\ \ \ldots]^T$$

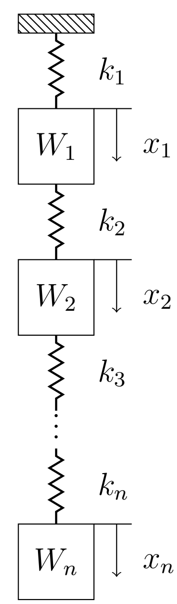
11. Resolver las siguientes ecuaciones simétricas tridiagonales

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 9 \\ -x_{i-1} + 4x_i - x_{i+1} &= 5, \qquad i = 2, \ldots, n-1 \\ -x_{n-1} + 4x_n &= 5 \end{aligned}$$

con $n = 10$.

12. El sistema mostrado en la figura consiste en n resortes lineales que soportan n masas. La constante de los resortes se indican por k_i, mientras que el peso de las masas, es W_i y x_i son los desplazamientos de las masas (medidos de la posición donde el resorte no está deformado). La llamada *formulación de desplazamiento* se obtiene escribiendo la ecuación de equilibrio para cada masa y sustituyendo $F_i = k_i(x_{i+1} - x_i)$ para la fuerza en los resortes. El resultado es un conjunto de ecuaciones simétricas y tridiagonal:

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= W_1 \\ -k_i x_{i-1} + (k_i + k_{i+1})x_i - k_{i+1}x_{i+1} &= W_i, \qquad i = 2, 3, \ldots, n-1 \\ -k_n x_{n-1} + k_n x_n &= W_n \end{aligned}$$



Escribe un programa que resuelva este conjunto de ecuaciones para los valores dados de n, k y W. Considera $n = 5$ y

$$k_1 = k_2 = k_3 = 10 \text{ N/mm} \qquad k_4 = k_5 = 5 \text{ N/mm}$$
$$W_1 = W_3 = W_5 = 100 \text{ N} \qquad W_2 = W_4 = 50 \text{ N}$$