Ecuaciones en diferencias para la ecuación de Poisson

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

Noviembre de 2008

Con la geometría y la retícula que aparecen en la figura, determinar las ecuaciones en diferencias para la ecuación de Poisson:

$$-\nabla^2 \phi = S \tag{1}$$

Las condiciones de frontera son:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi \qquad \text{para la frontera izquierda}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi - 2 \qquad \text{para la frontera inferior}$$

$$\phi = 5 \qquad \text{para la frontera derecha}$$

$$\phi = 7 \qquad \text{para la frontera superior}$$

Los intervalos de la malla son unitarios en ambas direcciones.

Solución:
Dado que las condiciones en las fronteras superior e inferior son del tipo de valor fijo, obtenemos las ecuaciones en diferencias sólo para los siguientes cuatro puntos de la malla: (1,1), (2,1), (1,2), (2,2).

Punto (1,1). Aproximamos la derivada parcial con respecto a x por:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x^2}\right)_{1,1} &= \frac{\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{1+\frac{1}{2},1} - \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{1,1}}{\dfrac{1}{2}} \\
&= \frac{(\phi_{2,1} - \phi_{1,1}) - \phi_{1,1}}{\dfrac{1}{2}} \\
&= -4\phi_{1,1} + 2\phi_{2,1}
\end{aligned} \tag{2}$$

en donde utilizaremos la condición de frontera izquierda para eliminar $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{1,1}$. La derivada parcial con respecto a y se aproxima por:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \phi^2}{\partial y^2}\right)_{1,1} &= \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{1,1+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{1,1}}{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(\phi_{1,2} - \phi_{1,1}) - \phi_{1,1} - 2}{\frac{1}{2}} \\
&= -4\phi_{1,1} + 2\phi_{1,2} + 4 \qquad (3)
\end{aligned}$$

donde utilizamos la condición de frontera inferior para eliminar $\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{1,1}$. Sustituimos **??** y **??** en la ecuación de Poisson