Tema 3. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

Las ecuaciones diferenciales tienen importancia fundamental en las aplicaciones, ya que muchas leyes y relaciones físicas pueden expresarse matemáticamente de esta forma.

En particular, el estudio de problemas de equilibrio de sistemas continuos se encuentra dentro de este contexto.

Definiciones importantes

(no sería mala idea hacer un repaso en casa sobre estas definiciones y los métodos analíticos de solución de las EDO)

1. Ecuación diferencial.

Esta ecuación relaciona dos o más variables en términos de derivadas o diferenciales.

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{(d^2 y)}{dx^2} = \cos x$$

$$(x^2 + y^2)\, dx + 2\mathrm{xy}\, dy = 0$$

$$\left[\frac{(d^2 w)}{dx^2}\right]^3 - xy\frac{dw}{dx} + w = 0$$

2. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y parciales.

Si en una ecuación diferencial hay una sola variable independiente, las derivadas son totales y se le llama a la ecuación *ordinaria*.

Si en la ecuación hay dos o más variables independientes, las derivadas serán parciales y la ecuación es *parcial.*

$$\frac{(\partial^2 V)}{(\partial x^2)} + \frac{(\partial^2 V)}{(\partial y^2)} = 0$$

3. Orden de una ecuación diferencial.

Es la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

4. Grado de una ecuación diferencial.

Es el grado *algebraico* de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

5. Ecuación diferencial lineal.

Una ecuación diferencial es *lineal* si en ella no aparecen potencias de la variable dependiente y sus derivadas, ni productos de la variable dependiente por sus derivadas o productos entre derivadas.

6. Solución de una ecuación diferencial.

Es cualquier relación funcional que no incluya derivadas o integrales de funciones desconocidas y que implique a la propia ecuación diferencial, en el sentido de que la verifique por sustitución directa.

7. Ecuación y condiciones homogéneas.

Una ecuación o condición es *homogénea* si, cuando es satisfecha por una función particular $y(x)$, también es satisfecha por $cy(x)$, donde c es una constante arbitraria.

Solución de una ecuación diferencial

Sea una ecuación diferencial ordinaria de orden *n* y cualquier grado, cuya forma más general es:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \text{ ------> } (1)$$

Se establece del cálculo que en su solución general deben de aparecer *n* constantes arbitrarias. Entonces puede aceptarse como solución general:

$$G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

Gráficamente esta ecuación representa a una familia de curvas planas, cada una de ellas obtenidas para valores particulares de las *n* constantes c_1, c_2, ..., c_n

Solución general de la EDO

Dependiendo de cómo se establezcan estas condiciones, se distinguen dos tipos de problemas los llamados de *valores iniciales* y los de *valores en la frontera*.

Problemas de valores iniciales

Está gobernado por una ecuación diferencial de orden n y un conjunto de n condiciones independientes, todas ellas válidas para el mismo punto *inicial.*

Si la ecuación diferencial que define el problema es del tipo de la ec. (1) y $x=a$ es el punto inicial, puede aceptarse que las n condiciones independientes son:

$$y(a) = y_0$$

$$y'(a) = y_0'$$

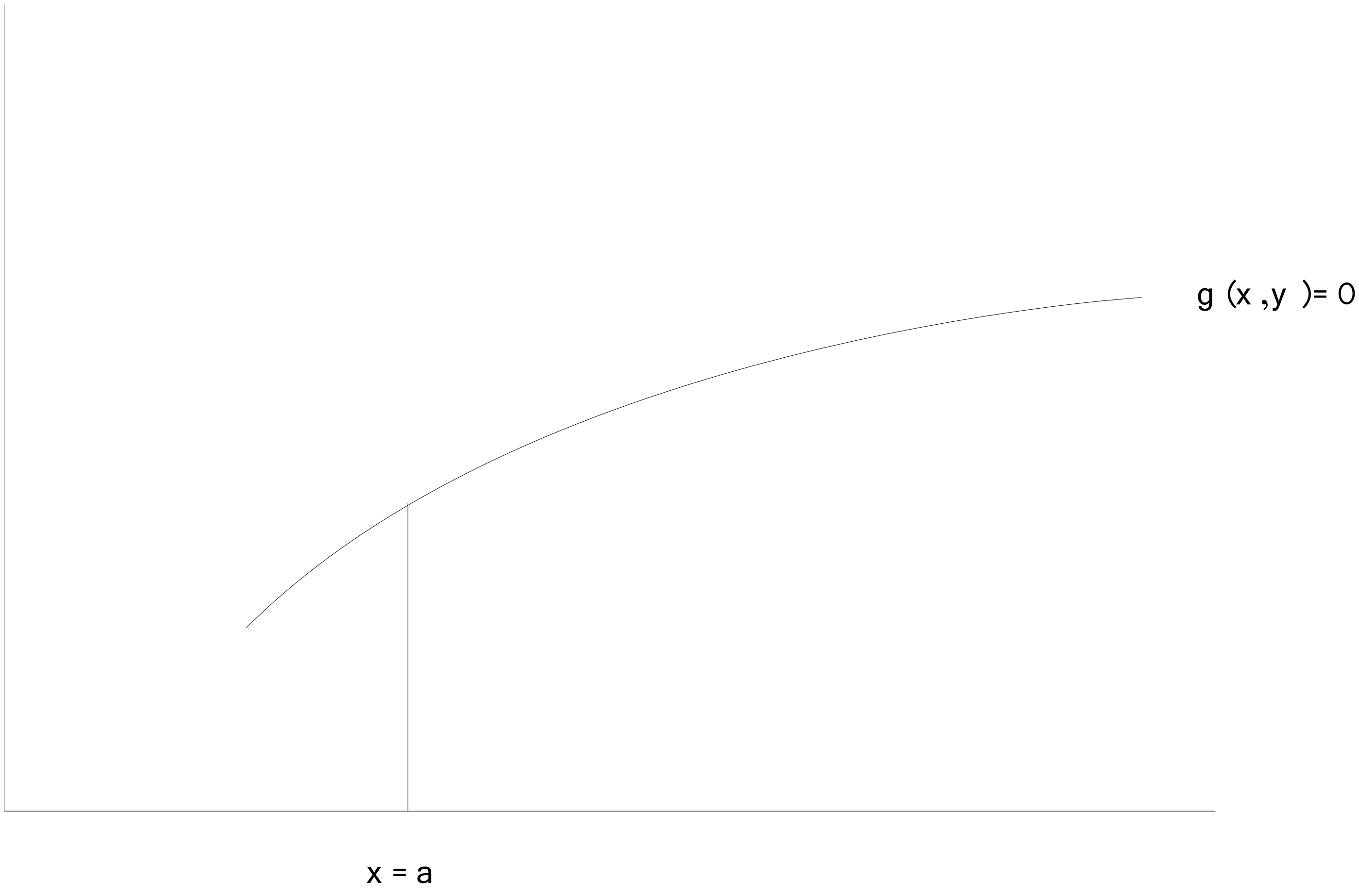
$$y''(a) = y_0''$$

$$\vdots$$

$$y^n(a) = y_0^n$$

Y se tratará de obtener una solución particular de la ec. (1) que verifique las condiciones iniciales, como se presenta en la siguiente figura:

Solución de un problema de valores iniciales

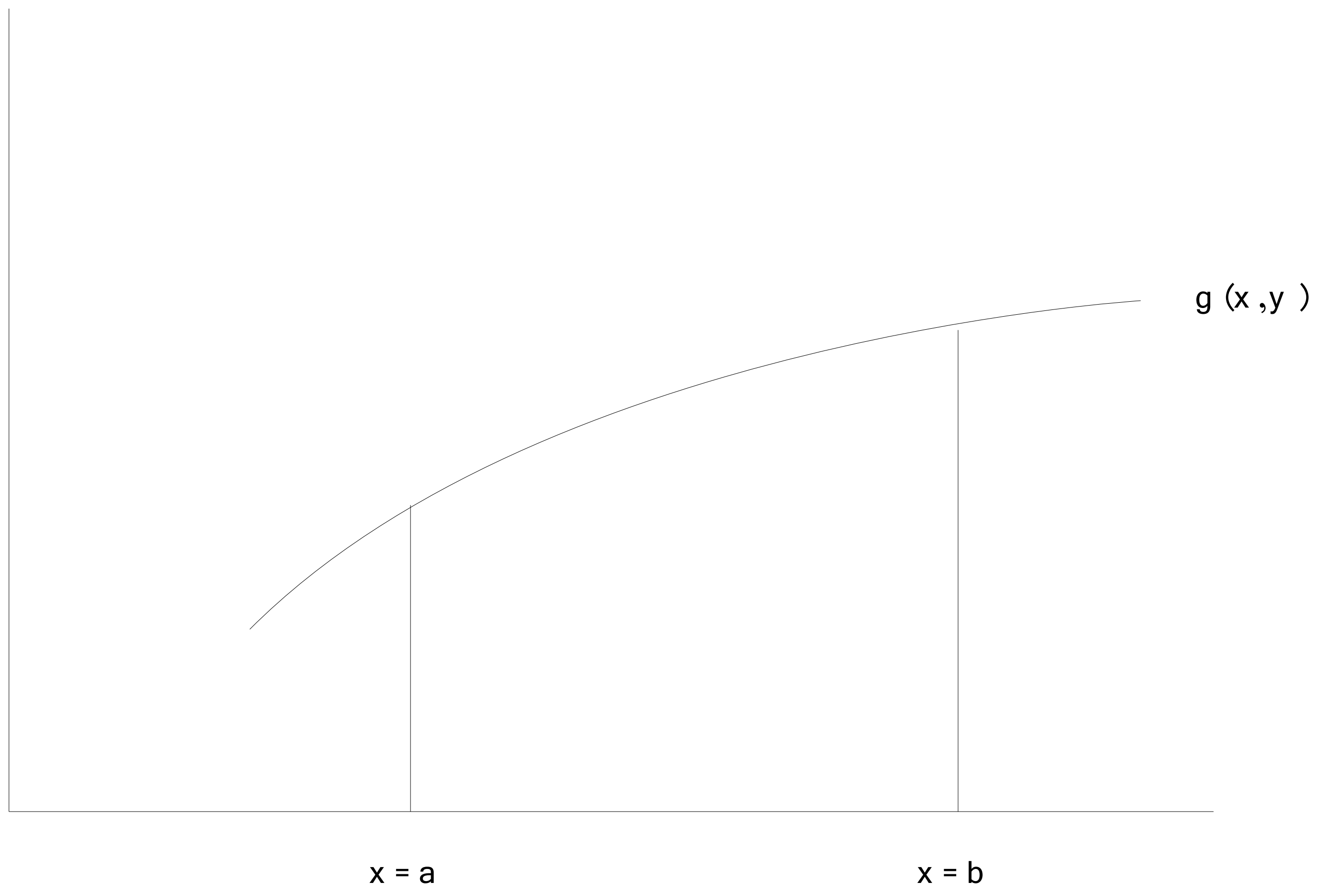


Problemas de valores en la frontera

Se deben de establecer condiciones de frontera en todos y cada uno de los puntos que constituyen la frontera del dominio de soluciones del problema.

En particular, en el espacio de una dimensión, hay dos puntos frontera, por ejemplo $x=a$ y $x=b$ si el dominio de soluciones es el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$.

Solución de un problema de valores en la frontera



Básicamente la solución numérica de las ecuaciones diferenciales consiste en sustituir el dominio continuo de soluciones por uno discreto formado por puntos aislados igualmente espaciados entre sí.

En un problema de valores iniciales, el dominio de definición de soluciones $x \geq a$ se sustituye por el conjunto infinito numerable de puntos:

$x_0=a$

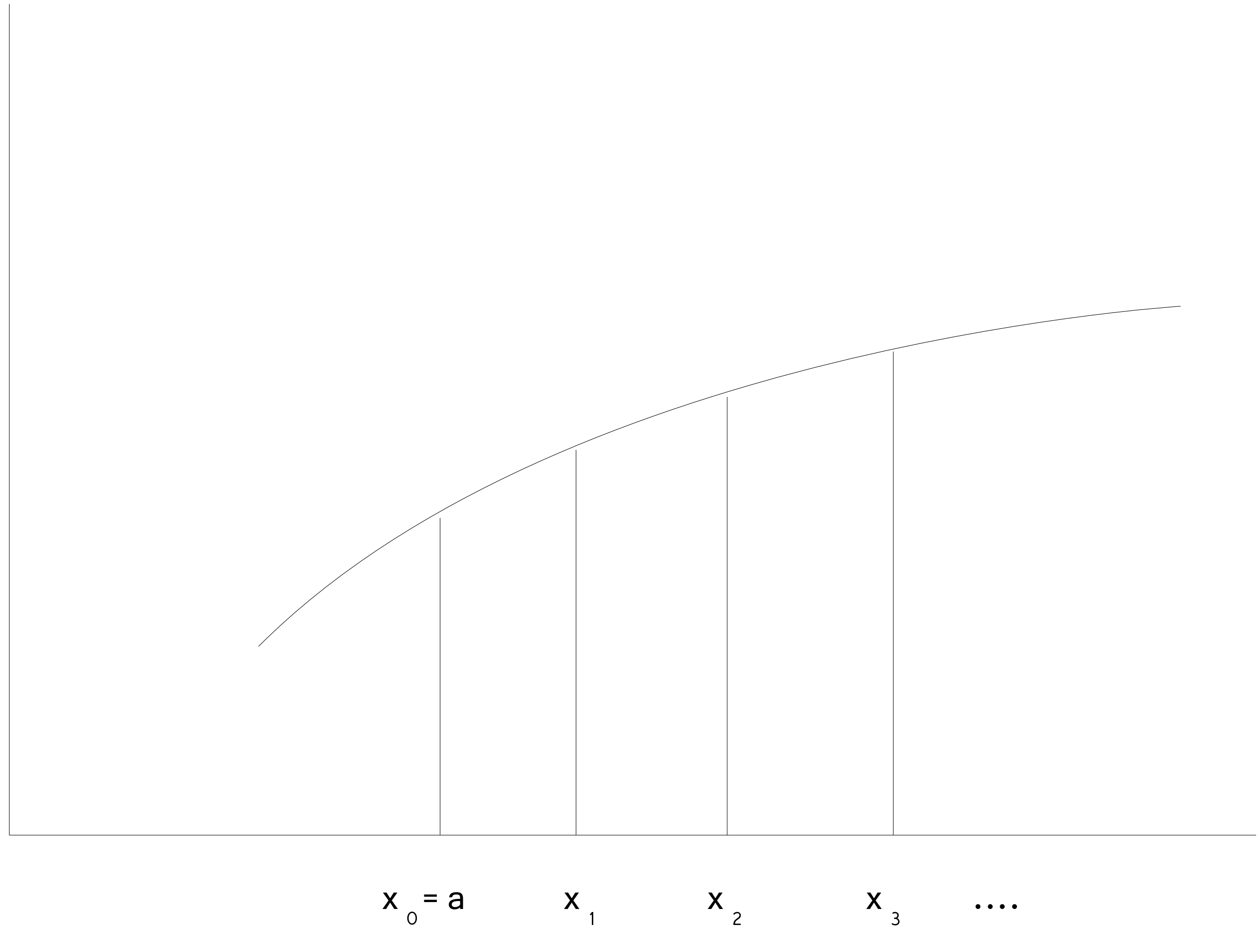
$x_1=x_0+h$

$x_2=x_0+2h$

$x_3=x_0+3h$

.....

Valores iniciales



Para el caso de valores a la frontera se sustituye el intervalo $a \leq x \leq b$ por el conjunto finito de puntos

$x_0 = a$

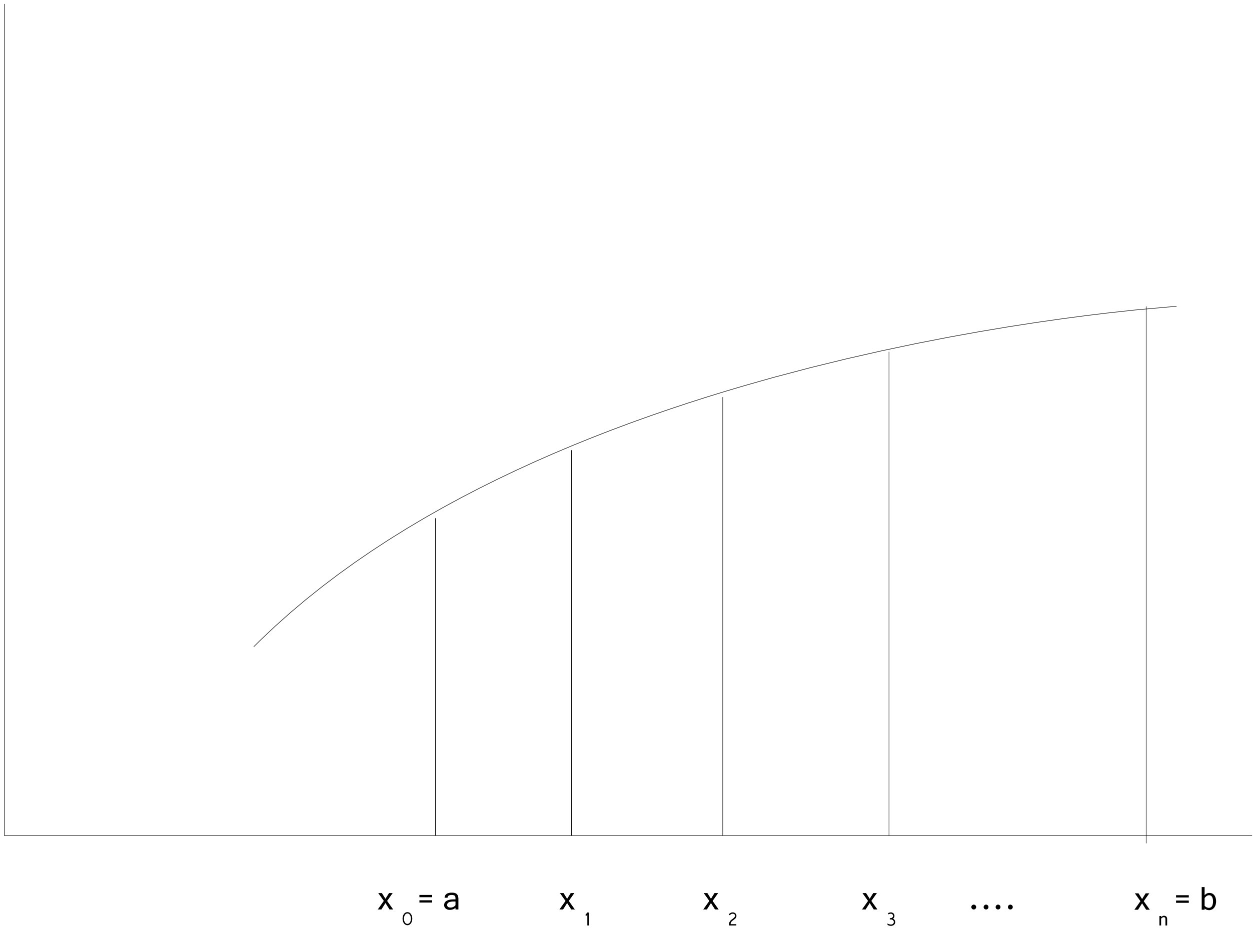
$x_1 = x_0 + h$

$x_2 = x_0 + 2h$

....

$x_n = x_0 + nh = b$

Valores en la frontera



Habiéndose discretizado el problema continuo, se tratará de obtener la solución para los puntos considerados, esto se resuelve en general, sustituyendo las derivadas que aparezcan en la ecuación diferencial y en sus condiciones iniciales o de frontera, por fórmulas numéricas de derivación que proporcionen una aproximación a a las derivadas o tratando de integrar la ecuación, reemplazando el proceso de integración por una fórmula numérica que se aproxime a la integral.

Método de Euler

El método de Euler tiene tres versiones:

i. Euler hacia adelante.
ii. Euler modificado.
iii. Euler hacia atrás.

Método de Euler

Consideremos los dos primeros términos de la expansión de Taylor de *y(t)*

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + 0(h^2)$$

Usemos la siguiente notación:

$$y(t_0) = y_0$$
$$f(t_0) = f_0$$
$$y(t) = y(t_0 + nh) = y_0$$
$$f(y_n) = f_n$$
$$y(t+h) = y(t_0 + (n+1)h) = y_{n+1}$$
$$f(y_{n+1}) = f_{n+1}$$
$$t + nh = tn$$

El método de Euler hacia adelante para la ecuación *y’(t) = f(y,t)* se obtiene re-escribiendo la aproximación por diferencias hacia adelante:

$$\frac{(y_{n+1} - y_n)}{h} \simeq y'_n$$

como

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n)$$

donde

$$y'_n = f(y_n, t_n)$$

Calculando de manera recursiva y_n

$$y_1 = y_0 + hy'_0 = y_0 + hf(y_0, t_0)$$

$$y_2 = y_1 + hf(y_1, t_1)$$

$$y_3 = y_2 + hf(y_2, t_2)$$

$$\vdots$$

$$y_n = y_{n-1} + hf(y_{n-1}, t_{n-1})$$

Ejemplo

Resuelve con el método de Euler hacia adelante con h=0.01 para 0<t≤0.02

$$y' = -20\mathrm{y} + 7e^{-0.5\mathrm{t}}, \quad y(0) = 5$$

Los primeros cálculos con h=0.01 son:

$$t_0=0 \qquad y_0=y(0)=5$$

$$t_1=0.01 \qquad y_1=y_0+hy'_0=5+(0.01)(-20(5)+7e^0)$$
$$=4.07$$

$$t_1=0.02 \qquad y_2=y_1+hy'_1=4.07+(0.01)(-20(4.07)+7e^{-0.005})$$
$$=3.32565$$

$$\vdots$$

$$t_n=nh, \qquad y_n=y_{n-1}+hy'_{n-1}$$

Problema

Ahora repite para el mismo ejercicio pero con h=0.01, 0.001 y 0.0001 con un código en Fortran para $0 \leq t \leq 0.09$.

Evalúa los errores de los tres cálculos mediante la comparación con la solución analítica dada por:

$$y = 5e^{-20t} + (7/19.5)(e^{-0.5t} - e^{-20t})$$

Consideraciones al Método de Euler

Este método debe de utilizarse de manera cuidadosa para evitar dos tipos de errores:

1. de truncamiento.
2. la instabilidad.

Inestabilidad

Aparece cuando la constante de tiempo es negativa, a menos de que *h* sea muy pequeño.

Una ecuación característica con solución decreciente es $y' = -\alpha y$, $y(0) = y_0 > 0$, con $\alpha > 0$

La solución exacta es $y = y_0 \exp(-\alpha t)$. El método de Euler hacia adelante es:

$$y_{n+1} = (1 - \alpha h)\, y_n$$

- Si $\alpha h < 1$, la solución numérica es decreciente y positiva.
- Si $\alpha h > 1$, el signo de la solución se alterna.
- Si $\alpha h > 2$, la magnitud de la solución aumenta con cada paso y la solución oscila. Por lo que se tiene una *inestabilidad*.

Método de Euler modificado

Este método es más preciso que el de Euler, además es más estable.

Si usamos la regla del trapecio para integrar la ecuación *y'= f(y,t)*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f\left(y_{n+1}, t_{n+1}\right) + f\left(y_n, t_n\right)\right]$$

Método de Euler hacia atrás

Se basa en aproximación por diferencias hacia atrás, se denota por:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(y_{n+1}, t_{n+1}\right)$$

La precisión del método es la misma que en el caso de Euler hacia adelante.

Métodos de Runge-Kutta

La principal desventaja de los métodos de Euler es que su precisión es baja. Para hacer que el nivel de precisión aumente, hay que reducir h, pero esto genera que se lleve más tiempo en el cálculo y se propague el error por redondeo.

Sea una EDO: $y' = f(y,t)$, $y(0)=y_0$
para calcular $y_{n+1} = t_n+h$, dando un valor de y_n, se integra la EDO en el intervalo $[t_n,t_{n+1}]$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y,t)\,dt$$

Se resuelve la ecuación del lado derecho mediante integración numérica.

Runge Kutta de segundo orden

Aplicando la regla del trapecio al lado derecho de la ecuación anterior:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y,t)\,dt \simeq \frac{1}{2} h [f(y_n, t_n) + f(y_{n+1}, t_{n+1})]$$

En esta ecuación el término y_{n+1} es una incógnita, por lo que se aproxima el segundo término mediante $f(y^*_{n+1}, t_{n+1})$ donde y^*_{n+1} es la primera estimación de y_{n+1} obtenido por Euler hacia adelante.

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(y_n, t_n) + f(\bar{y}_{n+1}, t_{n+1})\right]$$

De manera canónica podemos escribir

$$k_1 = hf(y_n, t_n)$$

$$k_2 = hf(y_n + k_1, t_{n+1})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\left[k_1 + k_2\right]$$

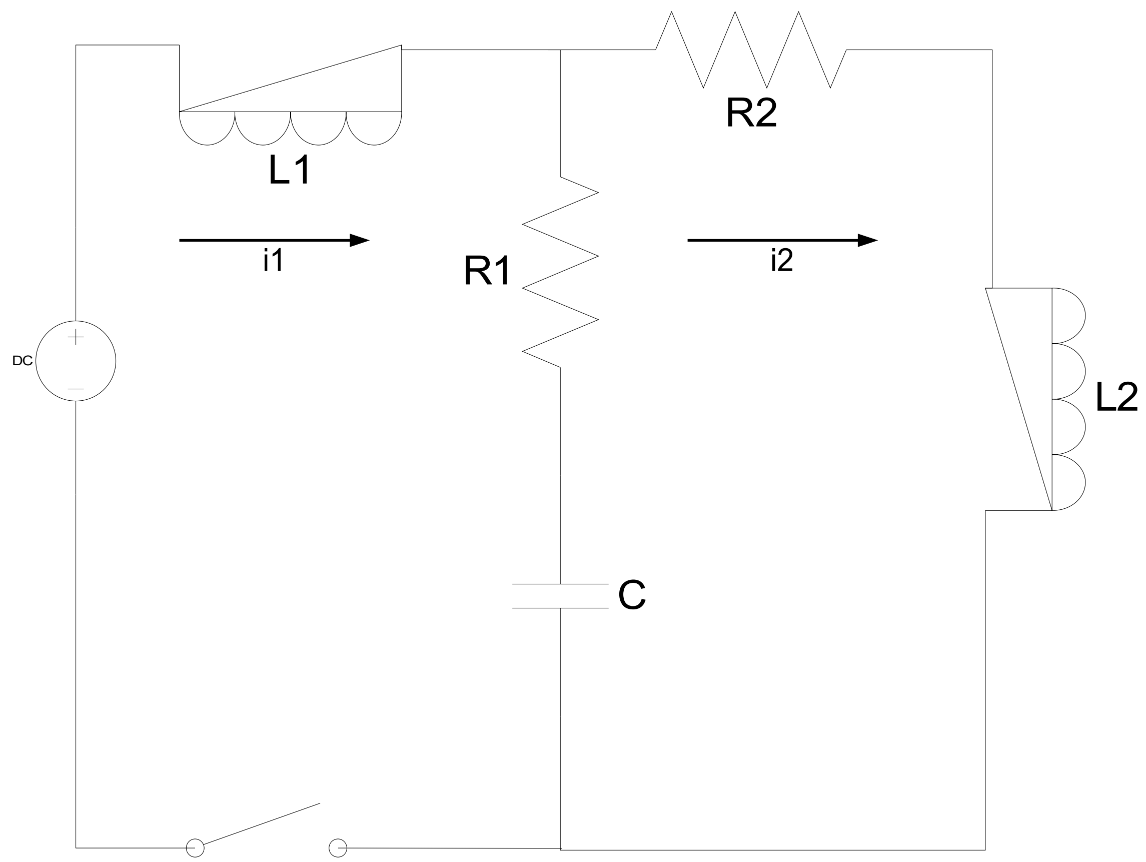
Ejercicio sobre un circuito eléctrico

El circuito que se muestra al lado, tiene los siguientes valores L=50 H, R = 20 Ω, V = 10 V. En t = 0, I(t) satisface

$$L \frac{d}{dt} I(t) + RI(t) = V, \qquad I(0) = 0$$

Con RK2, calcular la corriente para 0≤t≤10 segundos, con h=0.1

El circuito eléctrico



Se re-escribe la ecuación como

$$\frac{d}{dt}I=\frac{-R}{L}I+\frac{E}{L}\equiv f(i,t)$$

Desarrollando el método RK2, tenemos

$$k_1=h\left[-\frac{R}{L}I_n+\frac{E}{L}\right]$$

$$k_2=h\left[-\frac{R}{L}(I_n+k_1)+\frac{E}{L}\right]$$

$$I_{n+1}=I_n+\frac{1}{2}(k_1+k_2)$$