# Ecuaciones diferenciales ordinarias 2

## Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

18 de octubre de 2012

# Contenido

# Contenido

# Contenido

# Contenido

# RK2 para EDO de orden mayor

Para utilizar el método RK2 en una ecuación diferencial de orden superior, veamos que es fácil de aplicar. Sea una EDO de segundo orden del tipo:

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = q(t),$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Donde $a$ y $b$ son coeficientes y $q(t)$ es una función conocida, así como las condiciones iniciales. Sea:

$$z(t) = y'(t)$$

La ecuación anterior se reduce a un sistema de EDO de primer orden:

$$y' = f(y, z, t) \equiv z \qquad y(0) = 1$$
$$z' = g(y, z, t) \equiv -az - by + q \qquad z(0) = 0$$

# Expresión canónica 1

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_n, z_n, t_n) = hz_n \\
l_1 &= hg(y_n, z_n, t_n) = h(-az_n - by_n + q_n) \\
k_2 &= hf(y_n + k_1, z_n + l_1, t_{n+1}) = h(z_n + l_1) \\
l_2 &= hg(y_n + k_1, z_n + l_1, t_{n+1}) = \\
&= h(-a(z_n + l_1) - b(y_n + k_1) + q_{n+1})
\end{aligned}
$$

# Expresión canónica 2

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$$
$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{2}[l_1 + l_2]$$

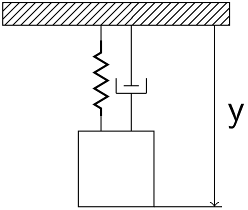
# Ejemplo

Una masa $M = 0.5$ kg se une al extremo inferior de un resorte sin masa. El extremo superior se fija a una pared en reposo. La masa experimenta una resistencia $R = -B dy/dt$ debida al aire, donde $B$ es una constante de amortiguamiento. La ecuación de movimiento es:

$$M \frac{d^2}{dt^2} y + B \frac{d}{dt} y + ky = 0 \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

donde $k = 100\ k/s^2$ y $B = 10\ k/s$

# Sistema masa-resorte




$$M\frac{d^2}{dt^2}y + B\frac{d}{dt}y + ky = 0 \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

donde $k = 100\ k/s^2$ y $B = 10\ k/s$

# Re-escribimos la ecuación

$$y' = z \equiv f(y, z, t) \qquad y(0) = 1$$

$$z' = -\frac{B}{M}z - \frac{k}{M}y \equiv g(y, z, t) \qquad z(0) = 0$$

Sea $a = B/M = 20$, $b = k/M = 200$ y $g = 0$.

**Problema:** Calcular $y(t)$ para $0 < t < 0.05$ s, con el esquema RK2 y $h = 0.025$

# Para $n = 1$, $t = 0.025$ tenemos que:

$$k_1 = hf(y_0, z_0, t_0) = hz_0 = 0.025(0) = 0$$

# Para $n = 1$, $t = 0.025$ tenemos que:

$$k_1 = hf(y_0, z_0, t_0) = hz_0 = 0.025(0) = 0$$
$$l_1 = hg(y_0, z_0, t_0) = h(-20z_0 - 200y_0) =$$

# Para $n = 1$, $t = 0.025$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_0, z_0, t_0) = hz_0 = 0.025(0) = 0 \\
l_1 &= hg(y_0, z_0, t_0) = h(-20z_0 - 200y_0) = \\
&= 0.025(-20(0) - 200(1)) = -5
\end{aligned}
$$

# Para $n = 1$, $t = 0.025$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_0, z_0, t_0) = hz_0 = 0.025(0) = 0 \\
l_1 &= hg(y_0, z_0, t_0) = h(-20z_0 - 200y_0) = \\
&= 0.025(-20(0) - 200(1)) = -5 \\
k_2 &= hf(y_0 + k_1, z_0 + l_1, t_0) = h(z_0 + l_1) =
\end{aligned}
$$

# Para $n = 1$, $t = 0.025$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_0, z_0, t_0) = hz_0 = 0.025(0) = 0 \\
l_1 &= hg(y_0, z_0, t_0) = h(-20z_0 - 200y_0) = \\
&= 0.025(-20(0) - 200(1)) = -5 \\
k_2 &= hf(y_0 + k_1, z_0 + l_1, t_0) = h(z_0 + l_1) = \\
&= 0.025(0 - 5) = -0.125
\end{aligned}
$$

# Para $n = 1$, $t = 0.025$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_0, z_0, t_0) = hz_0 = 0.025(0) = 0 \\
l_1 &= hg(y_0, z_0, t_0) = h(-20z_0 - 200y_0) = \\
&= 0.025(-20(0) - 200(1)) = -5 \\
k_2 &= hf(y_0 + k_1, z_0 + l_1, t_0) = h(z_0 + l_1) = \\
&= 0.025(0 - 5) = -0.125 \\
l_2 &= hg(y_0 + k_1, z_0 + l_1, t_0) =
\end{aligned}
$$

# Para $n = 1$, $t = 0.025$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_0, z_0, t_0) = hz_0 = 0.025(0) = 0 \\
l_1 &= hg(y_0, z_0, t_0) = h(-20z_0 - 200y_0) = \\
&= 0.025(-20(0) - 200(1)) = -5 \\
k_2 &= hf(y_0 + k_1, z_0 + l_1, t_0) = h(z_0 + l_1) = \\
&= 0.025(0 - 5) = -0.125 \\
l_2 &= hg(y_0 + k_1, z_0 + l_1, t_0) = \\
&= h[-20(z_0 + l_1) - 200(y_0 + k_1)]
\end{aligned}
$$

# Para $n = 1$, $t = 0.025$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_0, z_0, t_0) = hz_0 = 0.025(0) = 0 \\
l_1 &= hg(y_0, z_0, t_0) = h(-20z_0 - 200y_0) = \\
&= 0.025(-20(0) - 200(1)) = -5 \\
k_2 &= hf(y_0 + k_1, z_0 + l_1, t_0) = h(z_0 + l_1) = \\
&= 0.025(0 - 5) = -0.125 \\
l_2 &= hg(y_0 + k_1, z_0 + l_1, t_0) = \\
&= h[-20(z_0 + l_1) - 200(y_0 + k_1)] \\
&= 0.025[-20(0 - 5) - 200(1 + 0)] = -2.5
\end{aligned}
$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(0 - 0.125) = 0.9375$$

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{2}(-5 - 2.5) = -3.75$$

# Ahora para $n = 2$, $t = 0.05$ tenemos que:

$$k_1 = hf(y_1, z_1, t_1) = hz_1 = -0.09375$$

# Ahora para $n = 2$, $t = 0.05$ tenemos que:

$$k_1 = hf(y_1, z_1, t_1) = hz_1 = -0.09375$$
$$l_1 = hg(y_1, z_1, t_1) = h(-20z_1 - 200y_1)$$

# Ahora para $n = 2$, $t = 0.05$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_1, z_1, t_1) = hz_1 = -0.09375 \\
l_1 &= hg(y_1, z_1, t_1) = h(-20z_1 - 200y_1) \\
&= -2.8125
\end{aligned}
$$

# Ahora para $n = 2$, $t = 0.05$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_1, z_1, t_1) = hz_1 = -0.09375 \\
l_1 &= hg(y_1, z_1, t_1) = h(-20z_1 - 200y_1) \\
&= -2.8125 \\
k_2 &= hf(y_1 + k_1, z_1 + l_1, t_1 = h(z_1 + l_1) =
\end{aligned}
$$

# Ahora para $n = 2$, $t = 0.05$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_1, z_1, t_1) = hz_1 = -0.09375 \\
l_1 &= hg(y_1, z_1, t_1) = h(-20z_1 - 200y_1) \\
&= -2.8125 \\
k_2 &= hf(y_1 + k_1, z_1 + l_1, t_1 = h(z_1 + l_1) = \\
&= 0.1640625
\end{aligned}
$$

# Ahora para $n = 2$, $t = 0.05$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_1, z_1, t_1) = hz_1 = -0.09375 \\
l_1 &= hg(y_1, z_1, t_1) = h(-20z_1 - 200y_1) \\
&= -2.8125 \\
k_2 &= hf(y_1 + k_1, z_1 + l_1, t_1 = h(z_1 + l_1) = \\
&= 0.1640625 \\
l_2 &= hg(y_1 + k_1, z_1 + l_1, t_1) =
\end{aligned}
$$

# Ahora para $n = 2$, $t = 0.05$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_1, z_1, t_1) = hz_1 = -0.09375 \\
l_1 &= hg(y_1, z_1, t_1) = h(-20z_1 - 200y_1) \\
&= -2.8125 \\
k_2 &= hf(y_1 + k_1, z_1 + l_1, t_1 = h(z_1 + l_1) = \\
&= 0.1640625 \\
l_2 &= hg(y_1 + k_1, z_1 + l_1, t_1) = \\
&= h[-20(z_1 + l_1) - 200(y_1 + k_1)]
\end{aligned}
$$

# Ahora para $n = 2$, $t = 0.05$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_1, z_1, t_1) = hz_1 = -0.09375 \\
l_1 &= hg(y_1, z_1, t_1) = h(-20z_1 - 200y_1) \\
&= -2.8125 \\
k_2 &= hf(y_1 + k_1, z_1 + l_1, t_1 = h(z_1 + l_1) = \\
&= 0.1640625 \\
l_2 &= hg(y_1 + k_1, z_1 + l_1, t_1) = \\
&= h[-20(z_1 + l_1) - 200(y_1 + k_1)] \\
&= -0.9375
\end{aligned}
$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(0.09375 - 0.1640625) = 0.80859$$

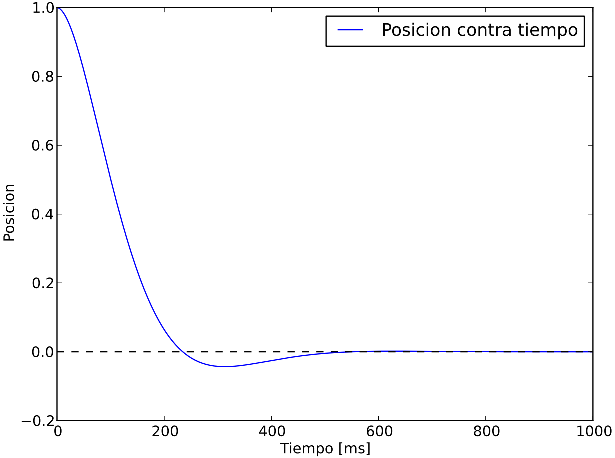
$$z_2 = z_1 + \frac{1}{2}(-2.8125 - 0.9375) = -5.625$$

# Segunda parte del problema

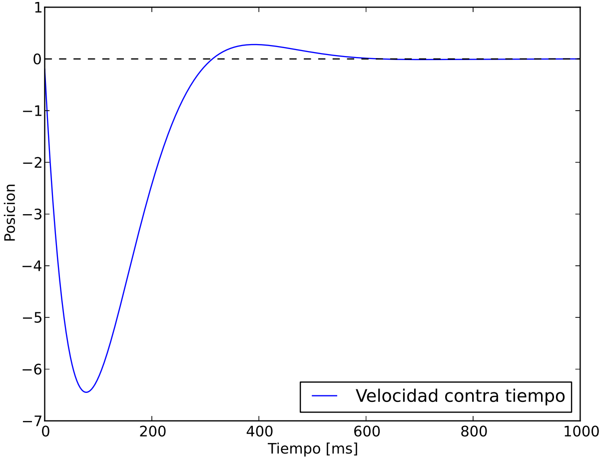
1. Calcula $y(t)$ para $0 < t < 10$ mediante RK2 y con $h = 0.001$
2. Repite el ejercicio, ahora con $B = 0$

Para cada uno de los incisos, genera una gráfica que acompañe a tu respuesta.

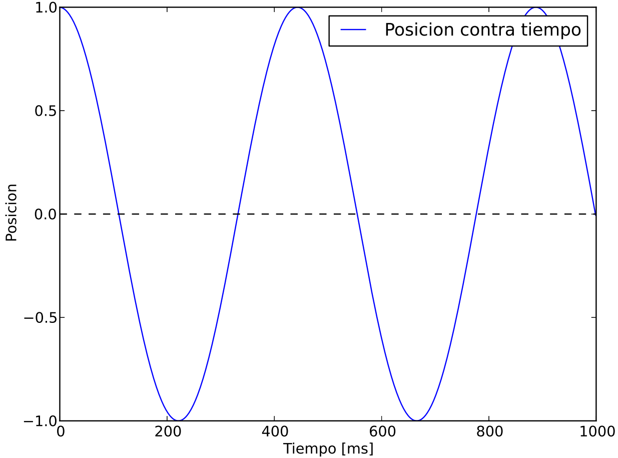
# Solución gráfica, Y vs t, $B = 10$



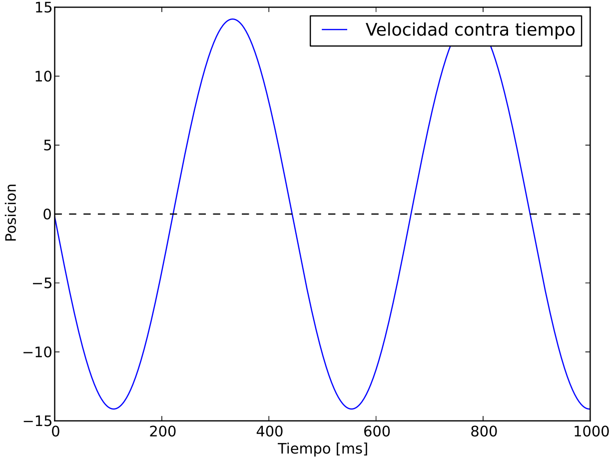
# Solución gráfica, Z vs t, $B = 10$



# Solución gráfica, Y vs t, $B = 0$



# Solución gráfica, Z vs t, $B = 0$



# Método RK de tercer orden (RK3)

Este método es más preciso que el RK2. Se basa en la regla de 1/3 de Simpson, que como ya vimos en el tema anterior, se basa en la interpolación polinomial cuadrática. El polinimio de Newton hacia adelante ajustado a $x_0$, $x_1$ y $x_2$ está dado por la expresión:

$$g(x_0 + sh) = f_0 + s(f_1 - f_0) + \frac{s(s-1)}{2}(f_2 - 2f_1 + f_0)$$

Usando la regla de Simpson de 1/3 tenemos que:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[f(y_n, t_n) + 4f(y*_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}) + \\ + f(y*_{n+1}, t_{n+1})]$$

Donde $y*_{n+1}$, $y*_{n+\frac{1}{2}}$ son estimaciones, puesto que no conocemos los valores de $y_{n+1}$, $y_{n+\frac{1}{2}}$

Las estimaciones $y*_{n+1}$, $y*_{n+\frac{1}{2}}$ las desarrollamos con el método de Euler hacia adelante:

$$
\begin{aligned}
y*_{n+\frac{1}{2}} &= y_n + \frac{h}{2} f(y_n, t_n) \\
y*_{n+1} &= y_n + hf(y_n, t_n) \quad \text{o bien} \\
y*_{n+1} &= y_n + hf(y*_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}})
\end{aligned}
$$

# Expresión canónica de RK3

$$k_1 = hf(y_n, t_n)$$

$$k_2 = hf(y_n + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2})$$

$$k_3 = hf(y_n - k_1 + 2k_2, t_n + h)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 4k_2 + k_3]$$

# Método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4)

El método RK4 se obtiene de manera similar al de RK3, sólo que se usa un paso intermedio adicional para evaluar la derivada.

El método RK4 tiene una precisión hasta el término de cuarto orden del desarrollo de Taylor, por lo que el error local es proporcional a $h^5$

# RK4 basado en la regla 1/3 de Simpson

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_n, t_n) \\
k_2 &= hf(y_n + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}) \\
k_3 &= hf(y_n + \frac{k_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}) \\
k_4 &= hf(y_n + k_3, t_n + h) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]
\end{aligned}
$$

# RK4 basado en la regla 3/8 de Simpson

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_n, t_n) \\
k_2 &= hf(y_n + \frac{k_1}{3}, t_n + \frac{h}{3}) \\
k_3 &= hf(y_n + \frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3}, t_n + \frac{2h}{3}) \\
k_4 &= hf(y_n + k_1 - k_2 + k_3, t_n + h) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{8}\left[k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4\right]
\end{aligned}
$$

# Ejercicio

Una pieza metálica con una masa de 0.1 kg a 200° C (473 K), se coloca en cierto momento en un cuarto cuya temperatura es 25° C, en donde la pieza está sujeta al proceso de enfriamiento por convección natural y transferencia de calor por radiación.

Suponemos que la distribución de temperatura es uniforme en la pieza, la ecuación de T vs t es:

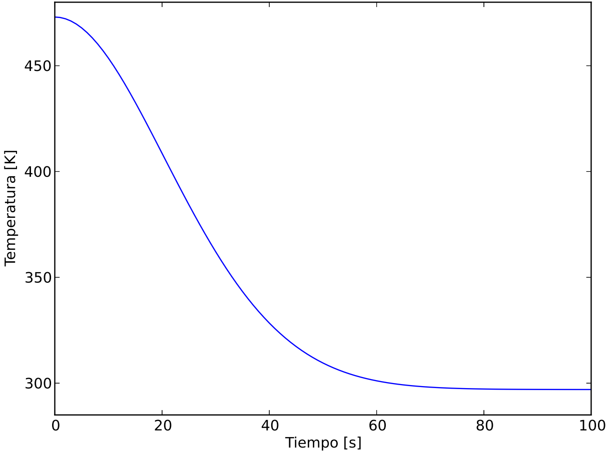
$$\frac{dT}{dt} = \frac{A}{(\rho c v)}[\epsilon\sigma(297^4 - T^4) + h_c(297 - T)]$$

con $T(0) = 473$ donde $T$ es la temperatura en grados Kelvin y las constantes son:

$$
\begin{aligned}
\rho = &\quad 300 \ \frac{k}{m^3} - \text{densidad del metal} \\
v = &\quad 0.001 \ m^3 - \text{volumen del metal} \\
A = &\quad 0.25 \ m^2 - \text{área de la superficie del metal} \\
c = &\quad 900 \ \frac{J}{kK} - \text{calor específico del metal} \\
h_c = &\quad 30 \ \frac{J}{m^2 K} \ \text{coeficiente de transferencia de calor} \\
\epsilon = &\quad 0.8 - \text{emisividad del metal} \\
\sigma = &\quad 5.67 \times 10^{-8} \ \frac{w}{m^2 K^2} \ \text{cte Stefan-Boltzamann}
\end{aligned}
$$

Calcular el valor de T para el intervalo $0 < t < 100$ segundos, usa $h = 0.25$

# Solución gráfica



# Ejercicio a cuenta de examen

Con la misma pieza metálica del ejercicio anterior, ahora consideremos que la T inicial es de 25° y se calienta internamente de forma eléctrica a razón de $q = 3000$ W. La ecuación de temperatura es:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho c v} \left[ q - \epsilon \sigma A \left( T^4 - 298^4 \right) - h_c A \left( T - 298 \right) \right],$$
$$T(0) = 298$$

Calcular la temperatura de la pieza hasta $t =$ minutos, usando RK4, con $h = 0.1$ minutos.