Ecuaciones diferenciales ordinarias 4

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

23 de octubre de 2013

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Hablando de manera general, un método de integración se dice que es estable si los efectos de errores locales, no se acumulan progresivamente, es decir, si el error global permanece acotado.

Si el método es inestable, si el error global se incrementa de manera exponencial, generando eventualmente un desbordamiento (overflow). La estabilidad no tiene nada que ver con la precisión, de hecho, un método impreciso puede ser muy estable.

Determinantes de la estabilidad

La estabilidad está determinada por tres factores:

1. Las ecuaciones diferenciales.

Desafortunadamente, no es fácil determinar de antemano la estabilidad, a menos que la ecuación diferencial sea lineal.

Determinantes de la estabilidad

La estabilidad está determinada por tres factores:

1. Las ecuaciones diferenciales.
2. El método de solución.

Desafortunadamente, no es fácil determinar de antemano la estabilidad, a menos que la ecuación diferencial sea lineal.

Determinantes de la estabilidad

La estabilidad está determinada por tres factores:

1. Las ecuaciones diferenciales.
2. El método de solución.
3. El valor del incremento h.

Desafortunadamente, no es fácil determinar de antemano la estabilidad, a menos que la ecuación diferencial sea lineal.

Estabilidad del método de Euler

Con el fin de ilustar la estabilidad, consideremos el problema lineal

$$y' = -\lambda y \qquad\qquad y(0) = \beta$$

donde λ es una constante positiva.

La solución exacta de este problema es

$$y(x) = \beta e^{-\lambda x}$$

Veamos qué pasa cuando intentamos resolver numéricamente esta ecuación con el método de Euler.

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x)$$

sustituimos $y'(x) = -\lambda y(x)$, para obtener

$$y(x+h) = (1 - \lambda h) y(x)$$

Si $|1 - \lambda h| > 1$, se nota claramente que el método es inestable ya que el valor de $|y|$ se incrementa en cada paso de integración.

Por tanto, el método de Euler es estable solamente si $|1 - \lambda h| \leq 1$, o

$$h \leq \frac{2}{\lambda}$$

Los resultados se pueden extender a un sistema de n ecuaciones diferenciales de la forma

$$\mathbf{y}' = -\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}$$

donde $\mathbf{\Lambda}$ es una matriz constante con valores propios positivos λ_i, con $i = 1, 2, \ldots, n$. Se puede demostrar que el método de integración de Euler es estable si

$$h < \frac{2}{\lambda_{max}}$$

donde λ_{max} es el valor propio mayor de $\mathbf{\Lambda}$.

Rigidez

Un problema de valores iniciales se dice que es *rígido*, si algunos de los elementos del vector solución $\mathbf{y}(x)$ varían mucho más rápido con respecto a x, que otros.

La rigidez puede predecirse fácilmente del conjunto de ED $\mathbf{y}' = -\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}$ con una matriz de coeficientes constantes $\mathbf{\Lambda}$.

La solución de esas ecuaciones es:

$$\mathbf{y}(x) = \sum_i C_i \mathbf{v}_i \exp(-\lambda_i x)$$

donde λ_i son los valores propios de $\mathbf{\Lambda}$ y $\mathbf{v}_i$ son los correspondientes vectores propios. Es evidente que el problema es rígido si hay una gran disparidad en las magnitudes de los valores propios positivos.

La integración numérica de las ecuaciones rígidas requiere un cuidado especial. El tamaño del paso h es necesario que la estabilidad esté determinada por el valor propio más grande (λ_{max}), aunque si los términos $\exp(-\lambda_{max} x)$ en la solución, decaen muy rápidamente y se vuelven insignificantes a medida que nos alejamos del origen.

Por ejemplo, sea la siguiente EDO

$$y'' + 1001y' + 1000y = 0$$

usando $y_0 = y$ junto con $y_1 = y_1$, el conjunto equivalente de 1-EDO, resulta

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1 \\ -1000y_0 - 10001y_1 \end{bmatrix}$$

En este caso

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1000 & 1001 \end{bmatrix}$$

Los valores propios (*eigenvalues*) son las raíces de:

$$|\mathbf{\Lambda} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1000 & 1001 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

expandiendo el determinante, tenemos que

$$-\lambda(1001 - \lambda) + 1000 = 0$$

las soluciones son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1000$ Claramente la ecuación es rígida; se necesita que $h < 2/\lambda_2 = 0.002$ para que el método de Euler sea estable.

EDO con valores en las fronteras

En lo que hemos visto del tema, recordamos que una EDO se acompaña de condiciones auxiliares. Estas condiciones se usan para evaluar las constantes de integración que resultan durante la solución de la ecuación.

Para una ecuación de n-ésimo orden, se requieren n condiciones. Si todas las condiciones se especifican en el mismo valor de la variable independiente, entonces estamos tratando con un problema de valor inicial.

En contraste, hay un conjunto de problemas en los cuales las condiciones no son conocidas en un solo punto, sino, más bien, son conocidas en diferentes valores de la variable independiente.

Como estos valores se especifican a menudo en los puntos extremos o fronteras de un sistema, se les conoce como problemas de valores en la frontera.

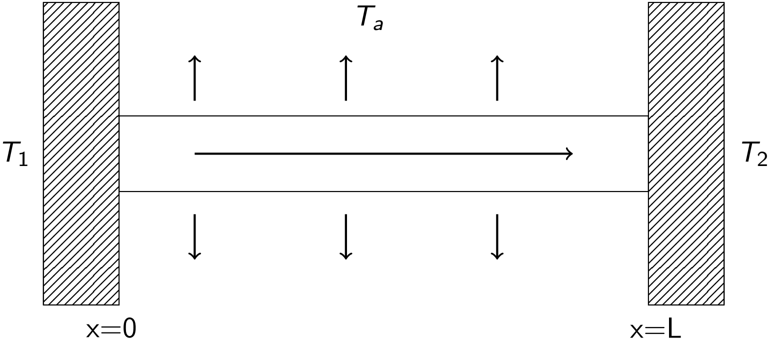
Ejemplo

Se puede usar la conservación de calor para desarrollar un balance de calor para una barra larga y delgada. Si la barra no está aislada en toda su longitud y el sistema se encuentra en estado estable, la ecuación resultante es

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \alpha (T_a - T) = 0 \tag{1}$$

donde α es un coeficiente de transferencia de calor (cm^{-2}) que parametriza la razón de disipación de calor con el aire circundante, y T_a es la temperatura del aire circundante.

Problema de temperatura



Para obtener una solución para la ecuación (1) se deben tener las condiciones en la frontera adecuadas. Un caso simple se presenta donde los valores de las temperaturas en los extremos de la barra se mantienen con valores fijos. Estos valores se pueden expresar matemáticamente como

$$
\begin{aligned}
T_0 &= T_1 \\
T_L &= T_2
\end{aligned}
$$

Con estas condiciones, la ecuación (1) se puede resolver de manera analítica.

Para una barra de 10 metros con $T_a = 20$, $T_1 = 40$, $T_2 = 200$ y $\alpha = 0.01$, el resultado es

$$T = 73.4523 \exp(0.1x) - 53.4523 \exp(-0.1x) + 20$$

El método de disparo

El método de disparo se basa en convertir el problema de valor en la frontera en un problema equivalente de valor inicial.

Posteriormente se implementa un procedimiento de prueba y error para resolver la versión de valor inicial. El procedimiento se puede ilustrar con un ejemplo.

Problema

Utilizando el método de disparo para resolver la ecuación (1), para una barra de 10 metros, con $\alpha = 0.01 m^2$, $T_a = 20^\circ$C, y las condiciones de frontera

$$T(0) = 40$$
$$T(10) = 200$$

Solución

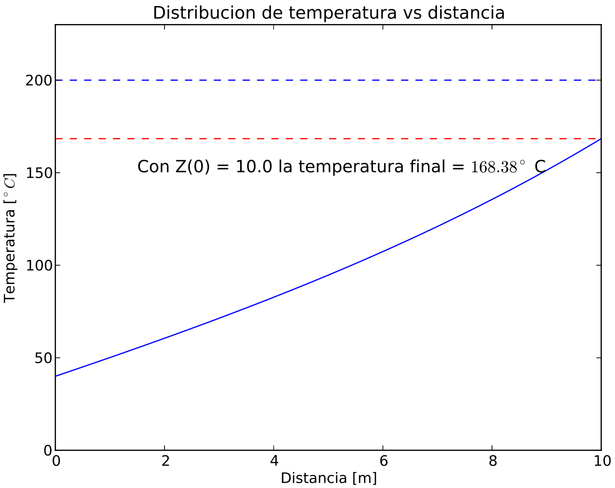
Transformamos la ecuación (1) en dos EDO de primer orden:

$$\frac{dT}{dx} = z$$
$$\frac{dz}{dz} = \alpha(T - T_a)$$

Para resolver estas ecuaciones, se requiere un valor inicial para z, por el método de disparo, intuimos un valor, digamos $z(0) = 10$. Usando RK4 en las dos ecuaciones obtenemos

x	y[0]	y[1]
0.0000e+00	4.0000e+01	1.0000e+01
1.0000e+00	5.0117e+01	1.0250e+01
2.0000e+00	6.0535e+01	1.0603e+01
3.0000e+00	7.1359e+01	1.1062e+01
4.0000e+00	8.2697e+01	1.1632e+01
5.0000e+00	9.4662e+01	1.2318e+01
6.0000e+00	1.0737e+02	1.3128e+01
7.0000e+00	1.2096e+02	1.4069e+01
8.0000e+00	1.3556e+02	1.5151e+01
9.0000e+00	1.5131e+02	1.6384e+01
1.0000e+01	1.6838e+02	1.7781e+01

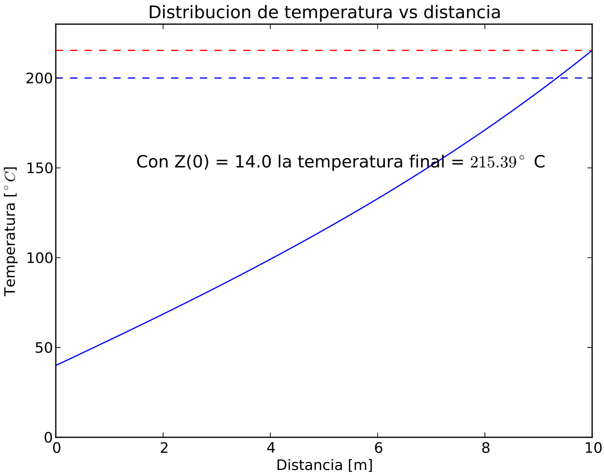
Gráficamente con $Z(0) = 10$



El resultado obtenido difiere de las condiciones de frontera $T(10) = 200$, por lo que hacemos ahora otra suposición: $Z(0) = 20$ y realizar de nuevo el cálculo.

x	y[0]	y[1]
0.0000e+00	4.0000e+01	1.4000e+01
1.0000e+00	5.4123e+01	1.4270e+01
2.0000e+00	6.8588e+01	1.4684e+01
3.0000e+00	8.3540e+01	1.5244e+01
4.0000e+00	9.9127e+01	1.5957e+01
5.0000e+00	1.1551e+02	1.6829e+01
6.0000e+00	1.3284e+02	1.7870e+01
7.0000e+00	1.5131e+02	1.9090e+01
8.0000e+00	1.7108e+02	2.0500e+01
9.0000e+00	1.9237e+02	2.2116e+01
1.0000e+01	2.1539e+02	2.3954e+01

Gráficamente con $Z(0) = 14$



Ahora como la EDO original es lineal, los valores

$$Z(0) = 10 \quad T(10) = 168.38$$
$$Z(0) = 20 \quad T(10) = 215.39$$

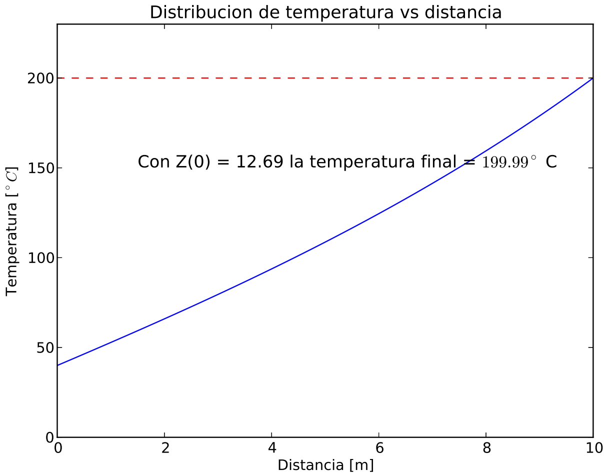
están relacionados linealmente. Así, podemos usarlos para calcular el valor de $Z(0)$ que resulte para $T(10) = 200$.

Podemos usar una fórmula de interpolación lineal

$$Z(0) = 10 + \frac{14 - 10}{215.39 - 168.37}(200 - 168.37) = 12.69$$

x	y[0]	y[1]
0.0000e+00	4.0000e+01	1.2690e+01
1.0000e+00	5.2811e+01	1.2954e+01
2.0000e+00	6.5951e+01	1.3347e+01
3.0000e+00	7.9550e+01	1.3874e+01
4.0000e+00	9.3746e+01	1.4540e+01
5.0000e+00	1.0868e+02	1.5352e+01
6.0000e+00	1.2450e+02	1.6317e+01
7.0000e+00	1.4137e+02	1.7445e+01
8.0000e+00	1.5945e+02	1.8748e+01
9.0000e+00	1.7893e+02	2.0239e+01
1.0000e+01	1.9999e+02	2.1932e+01

Gráficamente con $Z(0) = 12.69$



Problemas de Sturm-Liouville

Diversos problemas con condiciones en la frontera conducen (mediante el método de separación de variables) a la misma ecuación diferencial ordinaria

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad (0 < x < L)$$

con el valor propio λ, pero con distintas condiciones en los extremos:

1. $X(0) = X(L) = 0$ Condición de Dirichlet.
2. $X'(0) = X'(L) = 0$ Condición de Neumann.
3. $X(0) = X'(L) = 0$ Condición mixta.

según las condiciones de frontera.

Por ejemplo, en el problema de hallar la temperatura $u(x, t)$ de una varilla $0 \leq x \leq L$ con la temperatura inicial dada $u(x, 0) = f(x)$.

Como problema con valores en la frontera, este problema es igual al problema de determinar la temperatura dentro de una lámina de gran tamaño que ocupe la región $0 \leq x \leq L$ en el espacio xyz.

Si su temperatura inicial sólo depende de x y es independiente de y, z (es decir, si $u(x, 0) = f(x)$, entonces lo mismo será cierto de su temperatura $u = u(x, y)$ en el instante t. Sustituyendo

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

en la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Vemos que $X(x)$ satisface la condiciones en los extremos, si las caras $x = 0$ y $x = L$ de la lámina se mantienen a temperatura cero.

Las condiciones de $X'(0) = X'(L) = 0$ si ambas caras están aisladas, y las de $X(0) = X'(L) = 0$, si una cara está aislada y la otra se mantiene a temperatura cero.

Pero si cada cara pierde calor hacia el medio ambiente (que se encuentra a temperatura cero) de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, entonces las condiciones en los extremos asumen la forma

$$hX(0) - X'(0) = 0 = h(X(L) + X'(L))$$

donde h es un coeficiente de transferencia de calor no negativo.

Al imponer diversas condiciones en los extremos sobre la solución del problema, obtenemos distintos problemas de valores propios, y por ello usamos distintos valores propios λ_n y distintas funciones propioas $X_n(x)$ en la construcción de una solución formal en términos de una serie de potencias

$$u(x, t) = \sum c_n X_n(x) T_n(x)$$

del problema con valores en la frontera. El paso final en esta construcción es la elección del coeficiente c_n en la ecuación anterior de modo que

$$u(x, 0) = \sum c_n T_n(0) X_n(x) = f(x)$$

Por lo que necesitamos un desarrollo en términos de funciones propias de la función dada $f(x)$, en términos de las funciones propias del problema con valores en los extremos correspondientes.

Para unificar y generalizar el método de separación de variables, es útil formular un tipo general de problema de valores propios que incluya como casos particulares a los ya mencionados.

La ecuación inicial, con y en vez de X como variable dependiente, se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y + \lambda r(x)y = 0$$

donde $p(x) = r(x) \equiv 1$ y $q(x) \equiv 0$

Podemos asegurar que casi cualquier ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y + \lambda D(x)y = 0$$

asume la forma indicada después de multiplicar por un factor adecuado.

Ejemplo

Si multiplicamos la ecuación paramétrica de Bessel de orden n

$$x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - n^2)y = 0, \qquad x > 0$$

por $1/x$, podemos escribir el resultado como

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] - \frac{n^2}{x}y + \lambda xy = 0$$

que tiene la forma S-L, con $p(x) = r(x) = x$ y $q(x) = n^2/x$

Imponiendo sobre las soluciones de la ecuación anterior, en un intervalo abierto acotado (a, b) las siguientes condiciones -lineales- homogéneas en los extremos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) &= 0 \\ \beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b) &= 0 \end{aligned}$$

donde los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ son constantes.

Además de ser homogéneas, las condiciones están *separadas*, en el sentido de que una de ellas implica los valores de $y(x)$ y $y'(x)$ en un extremo $x = a$, mientras que la otra implica los valores en el otro extremo $x = b$. Nótese que las condiciones $y(a) = y'(b) = 0$ son d ela forma dada, con $\alpha_1 = \beta_2 = 1$ y $\alpha_2 = \beta_1 = 0$

Definición de un problema Sturm-Liouville

Un problema de Sturm-Liouville es un problema con valores en la frontera de la forma

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y + \lambda r(x)y = 0, \qquad a < x < b$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) &= 0 \\ \beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b) &= 0 \end{aligned}$$

donde tanto α_1 y α_2 como β_1 y β_2 son diferentes de cero. El parámetro λ es el *eingenvalor* cuyos posibles valores (constantes) se buscan.

Ejemplo

Se obtienen diferentes problemas de Sturm-Liouville complementando la ecuación diferencial

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad 0 < x < L$$

con alguna de las diferentes condiciones de valores en la frontera homogéneas

- $y(0) = y(L) = 0$, donde $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ y $\alpha_2 = \beta_2 = 0$

Ejemplo

Se obtienen diferentes problemas de Sturm-Liouville complementando la ecuación diferencial

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad 0 < x < L$$

con alguna de las diferentes condiciones de valores en la frontera homogéneas

- $y(0) = y(L) = 0$, donde $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ y $\alpha_2 = \beta_2 = 0$
- $y'(0) = y'(L) = 0$, donde $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ y $\alpha_2 = \beta_2 = 1$

Ejemplo

Se obtienen diferentes problemas de Sturm-Liouville complementando la ecuación diferencial

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad 0 < x < L$$

con alguna de las diferentes condiciones de valores en la frontera homogéneas

- $y(0) = y(L) = 0$, donde $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ y $\alpha_2 = \beta_2 = 0$
- $y'(0) = y'(L) = 0$, donde $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ y $\alpha_2 = \beta_2 = 1$
- $y(0) = y'(L) = 0$, donde $\alpha_1 = \beta_2 = 1$ y $\alpha_2 = \beta_1 = 0$

Nótese que el problema S-L siempre tiene la solución trivial $y \equiv 0$, por consiguiente se buscan los valores de λ (eingenvalores) para los cuales este problema tiene una solución real *no trivial* (una eigenfunción) y cada eigenvalor cuenta con su eigenfunción asociada (o eigenfunciones).

Puede verse que cualquier constante (diferente de cero) múltiplo de una eigenfunción será también una eigenfunción.

Eigenvalores de Sturm-Liouville

Supongamos que las funciones $p(x), p'(x), q(x)$ y $r(x)$ de la ecuación S-L son continuas en el intervalo $[a, b]$ y que tanto $p(x) > 0$ como $r(x) > 0$ en cada punto de $[a, b]$. De este modo los eigenvalores del problema de S-L, constituyen una sucesión creciente

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \ldots$$

de números reales, con

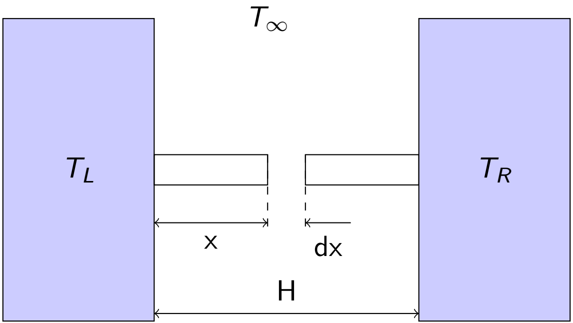
$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$$

Salvo por un factor constante, solo una eigenfunción $y_n(x)$ se asocia con cada eigenvalor λ_n.

Además, si $q(x) \geq 0$ en $[a, b]$ y los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ en la definición de S-L, son todos no negativos, entonces, los eigenvalores son todos no negativos.

Algunas veces el problema de S-L se llama **regular** si se satisface el resultado anterior, en caso contrario, es **singular**.

Sea una varilla delgada de metal con longitud H, sus extremos están conectados a distintas fuentes de calor:



Si el calor sale de la superficie de la varilla únicamente por transferencia de calor, por medio de convección, la ecuación de temperatura es:

$$-A\frac{d}{dx}k(x)\frac{d}{dx}T(x) + h_c P T(x) = h_c P T_\infty + AS(x)$$

donde

- $T(x)$ es la temperatura del punto que se encuentra a una distancia x del extremo izquierdo.
- A es el área constante de una sección transversal de la varilla.
- k es la conductividad térmica.
- P es el perímetro de la varilla.
- h_c es el coeficiente de transferencia de calor por convección.
- T_∞ es la temperatura neta del aire.
- S es la fuente de calor.

Las condiciones de frontera son:

$$T(0) = T_L$$
$$T(H) = T_R$$

Si T^0 se define como:

$$T^0 = T - T_\infty$$

La ecuación de temperatura la podemos expresar como:

$$-\frac{d}{dx}k(x)\frac{d}{dx}T^0(x) + h_c\frac{P}{A}T^0(x) = S(x)$$

El primer término representa la difusión del calor, el segundo es la pérdida de calor en el aire por medio de la convección y el lado derecho es la fuente de calor.

Otro ejemplo de una EDO con forma similar es la ecuación de difusión de neutrones dada por:

$$-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}\Psi(x)+\sum_{a}\Psi(x)=S(x)$$

Donde Ψ es el flujo de neutrones, D es el coeficiente de difusión y S es la fuente de neutrones.

El primer término indica la difusión de neutrones, el segundo la pérdida por absorción y el lado derecho es la fuente de neutrones.

Considerando en otros casos dentro de la física para problemas con difusión, si se expresa en términos de:

$$-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}\phi(x) + q(x)\phi(x) = S(x)$$

siendo ésta, una ley de conservación de la difusión.

Integrando la ecuación anterior en el intervalo $[a, b]$, se obtiene que:

$$Z(b) - Z(a) + \int_b^a q(x)\phi(x)dx = \int_b^a S(x)dx$$

donde

$$Z(x) = -p(x)\frac{d}{dx}\phi(x)$$

Los términos primero y segundo de la primera ecuación aquí mostrada, son respectivamente, el flujo hacia adentro y el flujo hacia afuera de la propiedad representada por ϕ, el tercer término es la pérdida total en $[a, b]$ y el lado derecho, es la fuente total en $[a, b]$.

Problemas con valores en la frontera para varillas y láminas

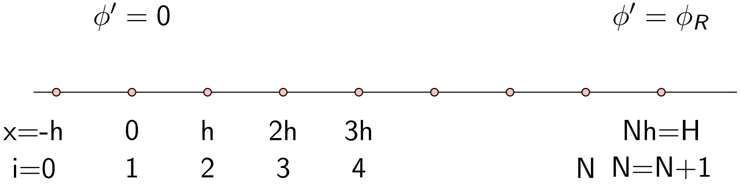
Consideremos una EDO de segundo orden con valores en la frontera

$$-\phi''(x) + q\phi(x) = S(x), \qquad 0 < x < H$$

con condiciones de frontera:

- $\phi'(0) = 0$, condición de frontera izquierda.
- $\phi'(H) = \phi'_R$, condición de frontera derecha

Si dividimos el dominio en N intervalos de igual longitud, se obtiene una retícula donde los intervalos miden $h = H/N$



Usando una aproximación por diferencias centrales al primer término de la EDO de segundo orden, obtenemos la ecuación en diferencias para la *i*-ésima retícula:

$$\frac{(-\phi_{i-1} + 2\phi_{i} - \phi_{i+1})}{h^{2}} + q\phi_{i} = S_{i}$$

donde $\phi_i = \phi(x_i)$, $S_i = S(x_i)$ y q es constante.

Al multiplicar por h^2

$$-\phi_{i-1} + (2 - w)\phi_i - \phi_{i+1} = h^2 S_i$$

donde $w = qh^2$.

Esta ecuación se puede aplicar a todos los puntos de la retícula, excepto cuando $i = 1$ e $i = N + 1$.

La condición de la frontera izquierda $\phi'(0) = 0$, es equivalente a una condición simétrica en la frontera llamada condición adiabática en la frontera en el caso de la transferencia de calor.

Si se considera un punto hipotético de la retícula $i = 0$ localizado en $x = -h$, la ecuación anterior en el caso $i = 1$ es:

$$-\phi_0 + (2 + w)\phi_1 - \phi_2 = h^2 S_1$$

En esta ecuación

$$-\phi_0 + (2 + w)\phi_1 - \phi_2 = h^2 S_1$$

podemos hacer $\phi_0 = \phi_2$ debido a la simetría. Dividiendo entre dos, obtenemos lo siguiente:

$$(1 + \frac{w}{2})\phi_1 - \phi_2 = \frac{1}{2}h^2 S_1$$

como $\phi_{N+1} = \phi(H) = \phi_R$ en la frontera derecha, la ecuación con $i = N$ es:

$$-\phi_{N+1} + (2 + w)\phi_N = h^2 S_N + \phi_R$$

Ordenando los términos anteriores:

$$\begin{array}{cccccc}
(1+\frac{w}{2})\phi_1 & -\phi_2 & & & & = h^2\frac{S_1}{2} \\
-\phi_1 & +(2+w)\phi_2 & -\phi_3 & & & = h^2 S_2 \\
& \phi_2 & +(2+w)\phi_3 & -\phi_4 & & = h^2 S_3 \\
& & & & & \ldots \\
& & & & & \ldots \\
& & & -\phi_{N+1} & +(2+w)\phi_N & = h^2 S_N + \phi_R
\end{array}$$

Que en forma matricial, resulta

$$\begin{bmatrix} 1+w/2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2+w & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2+w & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0+\ddots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2+w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \ddots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 S_1/2 \\ h^2 S_2 \\ h^2 S_3 \\ \ddots \\ h^2 S_N + \phi_R \end{bmatrix}$$

Todos los elementos de la matriz son cero, excepto los de las tres diagonales. Esta forma especial recibe el nombre de *matriz tridiagonal*, y aparece muy a menudo en los métodos numéricos para problemas con valores en la frontera.