Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén. curso.fisica.comp@gmail.com

M. en C. Abraham Lima Buendía. abraham3081@ciencias.unam.mx

Ejercicio: Efecto de la resistencia del aire

La bicicleta es una forma muy eficiente de transporte, este es un hecho bien conocido por cualquier persona que se sube en una. Nuestro objetivo en este ejercicio es comprender los factores que determinan la velocidad máxima de una bicicleta y estimar la velocidad de un caso real.

Comenzaremos haciendo caso omiso de la fricción; tendremos que añadirlo al final, por supuesto, pero debemos primero entender cómo lidiar con el caso más simple y sin fricción.

La ecuación de movimiento corresponde a la segunda ley de Newton, que escribimos de la forma

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \tag{1}$$

donde v es la velocidad, m es la masa de la combinación de la bicicleta-conductor, t es el tiempo, y F es la fuerza en la bicicleta que viene del esfuerzo del conductor (en este caso vamos a suponer que la bicicleta se mueve sobre un terreno plano)

Tratar correctamente a F se complica por la mecánica de la bicicleta, ya que la fuerza ejercida por el ciclista se transmite a las ruedas por medio del plato, engranajes, cadena, etc. Esto hace que sea muy difícil derivar una expresión exacta para F.

Sin embargo, hay otra manera de abordar este problema que evita la necesidad de conocer la fuerza. Este enfoque alternativo implica la formulación del problema en términos de la potencia generada por el ciclista.

Estudios fisiológicos de ciclistas de carreras han demostrado que estos atletas son capaces de producir una potencia de salida de aproximadamente 400 watts durante largos períodos de tiempo (~ 1 h)

Usando las ideas de trabajo-energía podemos reescribir (1) como

$$\frac{dE}{dt} = P \tag{2}$$

donde E es la energía total, P es la potencia de salida del ciclista. Para un trayecto plano la energía es totalmente cinética, es decir, $E = \frac{1}{2}mv^2$, y $\frac{dE}{dt} = mv(\frac{dv}{dt})$, usando esto en (2), resulta

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P}{mv} \tag{3}$$

Si P es una constante, la ecuación (3), se puede resolver de manera analítica, rearreglando términos:

$$\int_{v_0}^{v} v' dv' = \int_0^t \frac{P}{m} dt' \tag{4}$$

donde v_0 es la velocidad de la bicicleta en $t = 0$. Integrando ambos lados de la ecuación y resolviendo para v, tenemos

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2P\frac{t}{m}} \tag{5}$$

Si bien esta es la solución correcta de la ecuación de movimiento (3), nuestro trabajo no concluye aquí, ya que predice que la velocidad se incrementará sin límite para tiempos muy largos.

Vamos a corregir este resultado, cuando se generaliza el modelo se debe de incluir el efecto de la resistencia del aire. El nuevo término que vamos a añadir a la ecuación de movimiento nos obliga a desarrollar una solución numérica, así que con eso en mente se considera un tratamiento numérico de (3)

Comenzamos con la forma de diferencias finitas para la derivada de la velocidad

$$\frac{dv}{dt} \simeq \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} \tag{6}$$

donde asumimos que Δt es paso discreto pequeño, y v_i es la velocidad al tiempo $t_i \equiv i\Delta t$, por lo que de la ecuación (3)

$$v_{i+1} = v_i + \frac{P}{mv_i}\Delta t \tag{7}$$

Dada la velocidad en un tiempo i (es decir, v_i), podemos usar (7) para calcular un valor *aproximado* de la velocidad en el siguiente paso v_{i+1}.

Si conocemos la velocidad inicial v_0, podemos obtener v_1, v_2, y así sucesivamente. Considera el siguiente código inicial

```python
import matplotlib.pyplot as plt
from math import sqrt

t = []
v = []

dt = 1

potencia = 400
masa = 70
tmax = 200
nmax = tmax/dt

t.append(0)
v.append(4)

for i in range(int(tmax/dt)):
   ti = t[i-1] + dt
   vi = sqrt(v[i]**2 + (2 * potencia * dt)/masa)


   t.append(ti)
   v.append(vi)

plt.plot(v, "r-")
plt.xlabel("tiempo [s]")
plt.ylabel("velocidad m/s")
plt.show()
```

Resultado de la velocidad sin fricción

Considerando la fricción del aire

La fuerza debida a la fricción puede aproximarse de manera inicial como

$$F_a \simeq -B_1 v - B_2 v^2 \tag{8}$$

Para velocidades muy bajas, el primer término es el que domina, y el coeficiente B_1 se puede calcular para objetos con formas sencillas.

Para una velocidad razonable v^2 el término domina sobre los demás, pero B_2 no puede calcularse exactamente en objetos sencillos como una pelota de beisbol, menos para una bicicleta.

Podemos aproximar el valor de B_2 como sigue:

Si un objeto se mueve a través de la atmósfera, debe empujar fuera del camino el aire delante de él. La masa de aire movido en el tiempo dt es $m_{aire} \sim \rho A\, v\, dt$, donde ρ es la densidad del aire y A el área frontal del objeto. Este aire tiene una velocidad de orden v, y por lo tanto, su energía cinética es $E_{aire} \sim m_{aire}\, v^2/2$

Este es también el trabajo realizado por la fuerza de arrastre (la fuerza sobre el objeto debido a la resistencia del aire) en el tiempo dt, por lo $F_a\, dt = E_{aire}$. Poniendo todo esto junto nos encontramos

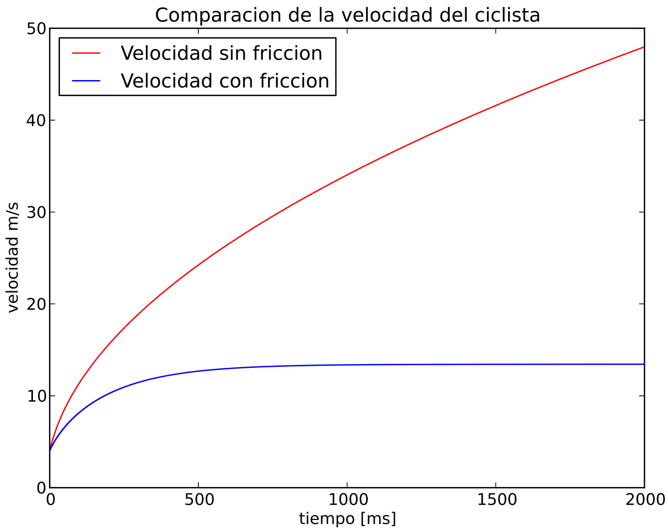
$$F_a \simeq -C\,\rho\,A\,v^2$$

Incluyendo este término en la expresión para la velocidad

$$v_{i+1} = v_i + \frac{P}{m\,v_i}\Delta\,t - \frac{C\,\rho\,A\,v_i^2}{m}\,\Delta\,t \tag{9}$$

Ahora te toca implementar el código, considerando $C = 0.5$ y $A = 0.33$

Comparando velocidades



El resultado que tenemos a partir de nuestra solución numérica, es más congruente con la física. Nota que a pesar de tener un algoritmo que resuelve una ecuación de movimiento, nuestrto trabajo no termina con proporcionar una respuesta con el código, sino que revisemos la consistencia de la solución con la física que ya manejamos.