Algebra matricial - El método de Jacobi 2

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

11 de mayo de 2017

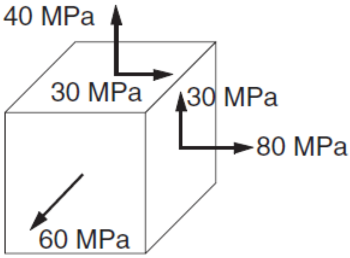
Contenido

Contenido

Contenido

Ejemplo con el método de Jacobi

Consideremos los esfuerzos aplicados al siguiente cubo



$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 80 & 30 & 0 \\ 30 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

En la matriz de esfuerzos, cada renglón consta de los tres componentes de tensión que actúan sobre un plano de coordenadas.

Se puede demostrar que los valores propios de S son las esfuerzos (tensiones) principales y los vectores propios son normales a los planos principales.

Se puede demostrar que los valores propios de S son las esfuerzos (tensiones) principales y los vectores propios son normales a los planos principales.

1. Determina las tensiones principales diagonalizando S con una rotación de Jacobi.

Se puede demostrar que los valores propios de S son las esfuerzos (tensiones) principales y los vectores propios son normales a los planos principales.

1. Determina las tensiones principales diagonalizando S con una rotación de Jacobi.
2. Calcula los vectores propios.

Solución inciso 1)

Para eliminar S_{12} debemos de aplicar la rotación en el plano $1 - 2$. Con $k = 1$ y $\ell = 2$, resulta

$$\phi = -\frac{s_{11} - S_{22}}{2\, S_{12}} = -\frac{80 - 40}{2(30)} = -\frac{2}{3}$$

Solución inciso 1)

Para eliminar S_{12} debemos de aplicar la rotación en el plano $1 - 2$. Con $k = 1$ y $\ell = 2$, resulta

$$\phi = -\frac{s_{11} - S_{22}}{2\ S_{12}} = -\frac{80 - 40}{2(30)} = -\frac{2}{3}$$

por lo que ahora podemos calcular t

$$t = \frac{sgn(\phi)}{|\phi| + \sqrt{\phi^2 + 1}} = \frac{-1}{2/3 + \sqrt{(2/3)^2 + 1}} = -0.53518$$

De acuerdo a las ecuaciones a las que llegamos en donde se determina el cambio de $\mathbf{S}$ debido a la rotación, tenemos que

$$S_{11}^{*} = S_{11} - t\,S_{12} = 80 - (-0.53518)(30) = 96.055 \text{ MPa}$$
$$S_{22}^{*} = S_{22} - t\,S_{12} = 40 + (-0.53518)(30) = 23.945 \text{ MPa}$$
$$S_{12}^{*} = S_{21}^{*}$$

Por lo que la matriz de esfuerzos diagonalizada es

$$\mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} 96.055 & 0 & 0 \\ 0 & 23.945 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix}$$

donde los elementos de la diagonal son los esfuerzos principales.

Solución inciso 2)

Para calcular los valores propios, obtenemos primero los valores de c, s y τ:

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(-0.53518)^2}} = 0.88168$$

$$s = tc = (-0.5319(0.88168) = -0.47186$$

$$\tau = \frac{s}{1+c} = \frac{-0.47186}{1+0.88168} = -0.25077$$

Para obtener los cambios en la matriz de transformación P, recordemos que P se inicializa como una matriz identidad, la primera ecuación que obtenemos es

$$
\begin{aligned}
P_{11}^{*} &= P_{11} - s(P_{12} - \tau\ P_{11}) \\
&= 1 - (-0.47186)(0 + (-0.25077)(1)) = 0.88167 \\
P_{21}^{*} &= P_{21} - s(P_{22} + \tau\ P_{21} \\
&= 0 - (-0.47186)[1 + (0.25077)(0)] = 0.47186
\end{aligned}
$$

De manera similar la segunda ecuación resulta se

$$P_{12}^{*} = -04786 \qquad\qquad P_{22}^{*} = 0.88167$$

La tercera columna y renglón de P no son afectadas por la transformación.

La matriz resultate es

Entonces tenemos el resultado

$$\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 0.88167 & -0.47186 & 0 \\ 0.47186 & 0.88167 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las columnas de $\mathbf{P}^*$ son los vectores propios de $\mathbf{S}$.

Contenido

Problemas de valores propios generalizados

En ciertos problemas de la física, derivados por ejemplo del formalismo de la mecánica cuántica, aparecen los denominados *problemas de valores propios generalizados*.

Que no se definen por una sola matriz, sino por dos matrices cuadradas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{B}\,\mathbf{c} \tag{1}$$

En la mayoría de los casos, tales problemas son representaciones matriciales de ecuaciones de operadores con respecto a bases no ortogonales en un espacio de dimensión finita, como $\mathbb{R}_n$.

Suponiendo que la matriz B es no singular, una posibilidad directa de transformar la ecuación generalizada (1) en una forma estándar

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$$

consiste en multiplicar a la izquierda la ecuación por la inversa B^{-1}

$$(\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A})\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$$

Desafortundamente, incluso en el caso particular de las matrices simétricas A y B, el producto $\mathrm{B} \cdot \mathrm{A}^{-1}$ ya no conserva la simetría y, por consiguiente, el problema del valor propio estándar resultante ya no puede resolverse mediante métodos específicos para matrices simétricas (como el método de Jacobi)

Si las matrices A y b son simétricas y, además, B es definida positiva, la transformación del problema generalizado (1) en un problema estándar puede obtenerse realizando primero la factorización de Cholesky de la matriz B.

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T \tag{2}$$

donde L es una matriz triangular inferior y $\mathbf{L}^T$ es su transpuesta.

Multiplicando por la izquierda por $\mathbf{L}^{-1}$ y re-emplazando por la factorización ec. (2), tenemos que

$$\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \lambda \, \mathbf{L}^{T} \cdot \mathbf{x}$$

Multiplicando por la izquierda por $\mathbf{L}^{-1}$ y re-emplazando por la factorización ec. (2), tenemos que

$$\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \lambda \, \mathbf{L}^{T} \cdot \mathbf{x}$$

Además, al incorporar la descomposición trivial de la matriz unitaria

$$\mathbf{E} = \left(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^{T}\right)^{T} = \left(\mathbf{L}^{-1}\right)^{T} \cdot \mathbf{L}^{T}$$

En el producto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, el problema de valores propios toma la forma

$$\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{L}^{-1}\right) \cdot \left(\mathbf{L}^{T} \cdot \mathbf{x}\right) = \lambda \left(\mathbf{L}^{T} \cdot \mathbf{x}\right)$$

En el producto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, el problema de valores propios toma la forma

$$\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{L}^{-1}\right) \cdot \left(\mathbf{L}^{T} \cdot \mathbf{x}\right) = \lambda \left(\mathbf{L}^{T} \cdot \mathbf{x}\right)$$

Haciendo las anotaciones evidentes

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{L}^{T} \cdot \mathbf{x} \tag{3}$$

y

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{L}^{-1}\right)^{T} \tag{4}$$

Se obtiene finalmente una matriz simétrica $\widetilde{\mathbf{A}}$ para el problema de valores propios estándar:

$$\widetilde{\mathbf{A}}\,\mathbf{x} = \lambda\,\tilde{\mathbf{x}} \tag{5}$$

Se obtiene finalmente una matriz simétrica $\widetilde{\mathbf{A}}$ para el problema de valores propios estándar:

$$\widetilde{\mathbf{A}}\,\mathbf{x} = \lambda\,\tilde{\mathbf{x}} \tag{5}$$

Los valores propios de $\widetilde{\mathbf{A}}$ coinciden con los valores propios de la matriz original $\mathbf{A}$, mientras que los valores propios de $\mathbf{A}$ deben de recalcularse a partir de $\widetilde{\mathbf{A}}$ por la transformación lineal

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{L}^{-1}\right)^{T}\,\mathbf{x} \tag{6}$$

Desde el punto de vista de una implementación práctica, la solución del problema de valores propios generalizado (1) se puede llevar a cabo con las siguientes etapas:

1. Realizar la descomposición de Cholesky $\mathbf{B} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T$.
2. Calcular la inversa $\mathbf{L}^{-1} = [\ell_{ij}]_{nn}$.
3. Generar la matriz transformada $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{L}^{-1})^T$ de acuerdo con

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{j} \ell'_{ik} \, a_{km} \, \ell'_{jm}$$

4. Resolver el problema del valor propio estándar $\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = \lambda \tilde{\mathbf{x}}$ mediante un método adecuado para matrices simétricas (tales como el método de Jacobi).
5. Recalcular los valores propios $\mathbf{x} = (\mathbf{L}^{-1})^T \cdot \tilde{\mathbf{x}}$ del problema inicial de valores propios, a partir de

$$x_{ij} = \sum_{k=i}^{n} \ell'_{ki} \, \tilde{x}_{kj} \tag{7}$$

Problema 1

Utiliza la función Jacobi para probar para una matriz simétrica invertible aleatoria $\mathbf{A}$ de orden $n = 100$ cumple la propiedad general de que los valores propios de la matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$ son las inversas $1/\lambda_i$ de los valores propios λ_i de la matriz original, mientras que los valores propios coinciden.

Invertir la matriz $\mathbf{A}$ utilizando la rutina `MatInv` del módulo `linsys.py`, y empleando la función `EigSort`, clasificar los autovectores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^{-1}$ por los valores propios correspondientes antes de compararlos.