Examen Reposición 3: Ecuaciones diferenciales ordinarias
Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

1. En la teoría de propagación de enfermedades contagiosas, se puede utilizar una ED relativamente elemental para predecir el número de individuos infectados de la población en cualquier tiempo, siempre y cuando se hagan las suposiciones de simplificación adecuada. En particular, supongamos que todos los individuos de una población fija tienen la misma probabilidad de infectarese y que una vez infectados permanecen en ese estado. Si con $x(t)$ denotamos el número de individuos vulnerables en el tiempo t y con $y(t)$ denotamos al número de infectados, podemos suponer razonablemente, que la rapidez con que el número de los infectados cambia es proporcional al producto de $x(t)$ y $y(t)$, por que la rapidez depende del número de individuos infectados y del número de individuos vulnerables que existen en ese tiempo. Si la población es lo suficientemente numerosa para suponer que $x(t)$ y $y(t)$ son variables continuas, podemos expresar el problema como
$$y'(t) = kx(t)y(t)$$
donde k es una constante y $x(t) + y(t) = m$ es la población total. Se puede re-escribir esta ecuación para que contenga sólo $y(t)$ como
$$y'(t) = k(m - y(t))y(t)$$

   a) Suponiendo que $m = 100000$, $y(0) = 1000$, $k = 2 \times 10^{-6}$, y que el tiempo se mide en días, encuentra una aproximación al número de individuos infectados al cabo de 30 días.

   b) La ED del inciso anterior, se denomina *ecuación de Bernoulli* y puede transformarse en una ED lineal en $u(t) = (y(t))^{-1}$. Usa ese método para encontrar una solución exacta de la ecuación, con los mismos supuestos del inciso anterior; compara el valor verdadero de $y(t)$ con la aproximación dada. ¿Qué es $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$

   c) En el ejercicio anterior todos los individuos infectados permanecieron en la población y propagaron la enfermedad. Una respuesta más realista consiste en introducir una tercera variable $z(t)$ que representa el número de personas a quienes en un tiempo dado t se les separa de la población infectada por aislamiento, recuperación y la subsecuente inmunidad o fallecimiento. Esto viene a complicar más el problema, pero se puede demostrar que una solución aproximada está dada por

$$x(t) = x(0)\exp\left(-\frac{k_1}{k_2}z(t)\right) \qquad y(t) = m - x(t) - z(t)$$

donde k_1 es la rapidez de la infección, k_2 es la rapidez de aislamiento y $z(t)$ se obtiene de la ED

$$z'(t) = k_2\left(m - z(t) - x(0)\exp\left(-\frac{k_1}{k_2}z(t)\right)\right)$$

No se conoce un método para resolver directamente este problema, po lo cual es necesario apoyarse con un procedimiento numérico. Obtén una aproximación a $z(30)$, $y(30)$, $x(30)$ suponiendo que $m = 100000$, $x(0) = 99000$, $k_1 = 2 \times 10^{-6}$ y $k_2 = 10^{-4}$. Para cada uno de los incisos, discute tus resultados.

2. Se dispara un proyectil al aire con un ángulo de 45° con respecto al suelo, con $u = v = 150m/s$, donde u y v son las velocidades horizontal y vertical, respectivamente. Las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\begin{aligned} u' &= -cVu, \qquad u(0) = 150m/s \\ v' &= -g - cVv, \qquad v(0) = 150m/s \end{aligned}$$

donde u y v son funciones del tiempo, $u = u(t)$ $y v = v(t)$ y

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{u^2 + v^2} \\ c &= 0.005 \qquad \text{(coeficiente de arrastre)} \\ g &= 9.9m/s^2 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento se pueden resolver mediante alguno de los métodos de Runge-Kutta. La trayectoria del proyectil se puede determinar al integrar

$$x' = u \qquad \text{y} \qquad y' = v$$

o bien

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t u(t')dt' \\ y &= \int_0^t v(t')dt' \end{aligned}$$

a) Resuelve y grafica la trayectoria del proyectil, usando el método RK3.

b) Resuelve y grafica la trayectoria del proyectil, usando el método RK4, compara las soluciones de ambos incisos.

3. El movimiento del sistema de masas que se muestra en la figura (1) está dado por:

$$y'' + 2\zeta\omega y' + \omega^2 y = \frac{F(t)}{M}$$

donde

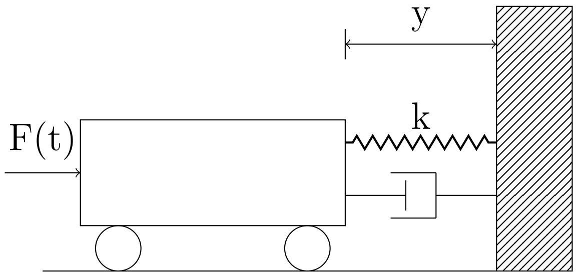
$\omega = \left(\frac{k}{M}\right)^2$ (frecuencia natural sin amortiguamiento, s^{-1})

$\zeta = \frac{c}{2M\omega} = 0.5$ (factor de amortiguamiento)

$k = 3.2$ (constante del resorte, $\frac{kg}{s^2}$

$M = 5$ (masa, kg)

$F(t) = 0$ (fuerza, Newtons)



Si $F(t)$ es una función escalonada de magnitud $F_0 = 1$ kg y cuya duración es 1 segundo, determina el movimiento de la masa para $0 < t < 10$ segundos por medio del método de Runge-Kutta de cuarto orden.

4. Determina la respuesta y carga dinámica del sistema amortiguado del problema anterior sujeto a un pulso de fuerza triangular

$$F(t) = \begin{cases} 2F_0 t, & 0 \leq t \leq 1s \\ 2F_0(1-t), & 1 \leq t \leq 2s \\ 0, & t > 2s \end{cases}$$

Donde $F_0 = 1$ Kg (fuerza). Utiliza el método RK4.