Método de Runge – Kutta (continuación)

Curso Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

Para utilizar el método RK de segundo orden en una ecuación diferencial de orden superior, veamos que es fácil de aplicar. Sea una EDO de segundo orden:

$$y''(t)+ay'(t)+by(t)=q(t) \qquad y(0)=1,\, y'(0)=0$$

Donde a y b son coeficientes y q(t) es una función conocida, así como las condiciones iniciales. Sea

$$z(t)=y'(t)$$

La ecuación anterior se reduce a un sistema de EDO de primer orden:

$$y' = f(y, z, t) \equiv z \qquad y(0) = 1$$

$$z' = g(y, z, t) \equiv -az - by + q \qquad z(0) = 0$$

Entonces el método RK2 para estas ecuaciones es:

$$k_1 = hf(y_n, z_n, t_n) = hz_n$$

$$l_1 = hg(y_n, z_n, t_n) = h(-az_n - by_n + q_n)$$

$$k_2 = hf(y_n + k_1, z_n + l_1, t_{n+1}) = h(z_n + l_1)$$

$$l_2 = hg(y_{n+k_1}, z_n + l_1, t_{n+1}) =$$

$$= h(-a(z_n + l_1) - b(y_n + k_1) + q_{n+1})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\left[k_1 + k_2\right]$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{2}\left[l_1 + l_2\right]$$

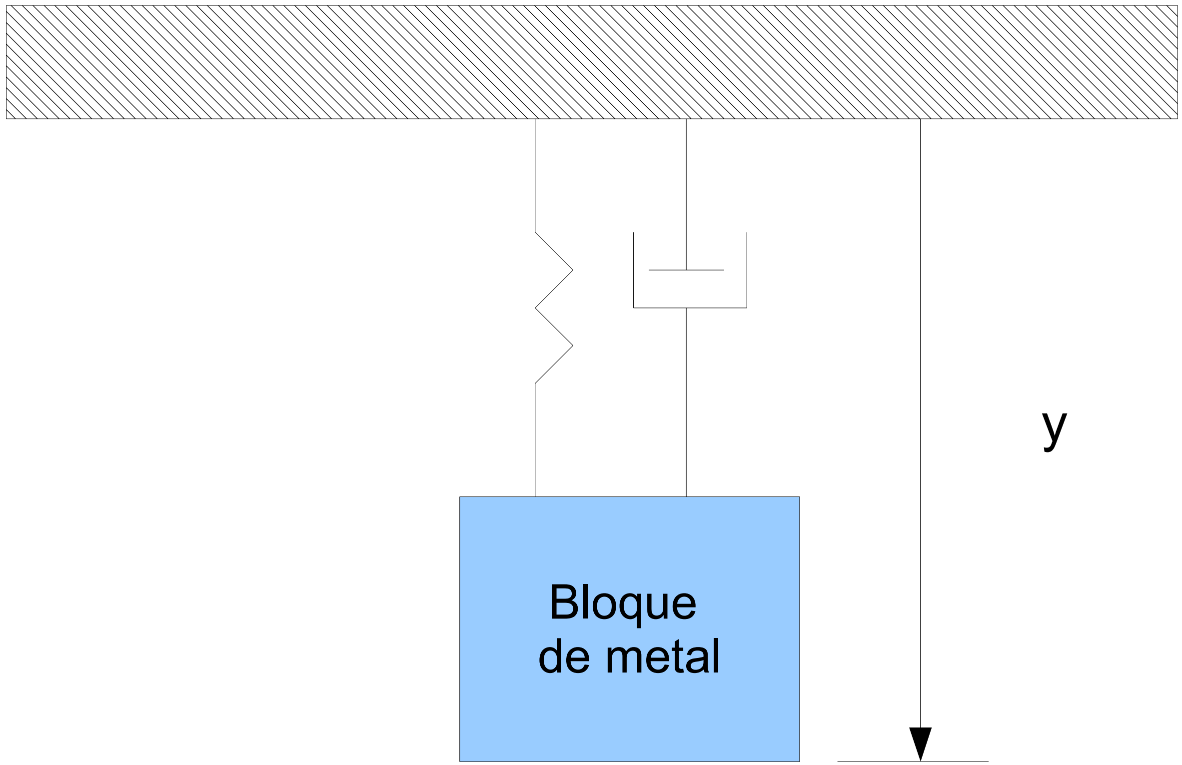
Ejercicio

Una masa M = 0.5 kg se une al extremo inferior de un resorte sin masa. El extremo superior se fija a una pared en reposo. La masa experimenta una resistencia R = -B dy/dt debida al aire, donde B es una constante de amortiguamiento. La ecuación de movimiento es:

$$M \frac{d^2}{dt^2} y + B \frac{d}{dt} y + ky = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$k = 100 \frac{kg}{s^2} \qquad B = 10 \frac{kg}{s}$$

Sistema masa-resorte



$$M\frac{d^2}{dt^2}y+B\frac{d}{dt}y+ky=0 \qquad y(0)=1,\ \ y'(0)=0$$

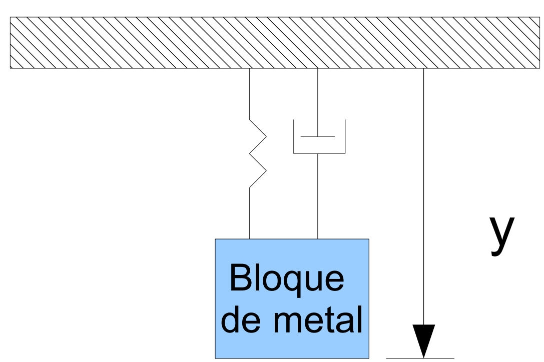
Re-escribiendo la ecuación:

$$y' = z \equiv f(y, z, t) \qquad y(0) = 1$$

$$z' = -\frac{B}{M} z - \frac{k}{M} y \equiv g(y, z, t) \qquad z(0) = 0$$

Sea a=B/M = 20, b=k/M = 200 y g = 0.

Calcular y(t) para 0 Z < t < 10 s, con h=0.001



i. Calcular y(t) para 0<t<0.05 mediante RK2 y h=0.025

Para n=1, t=0.025 tenemos que:

$$k_1 = hf(y_0, z_0, t_0) = hz_0 = 0.025(0) = 0$$

$$l_1 = hg(y_0, z_0, t_0) = h(-20\mathrm{z}_0 - 200\mathrm{y}_0) =$$

$$= 0.025(-20(0) - 200(1)) = -5$$

$$k_2 = hf(y_0 + k_1, z_0 + l_1, t_0) = h(z_0 + l_1) =$$

$$= 0.025(0 - 5) = -0.125$$

$$l_2 = hg(y_0 + k_1, z_0 + l_1, t_1) = h\left[-20(z_0 + l_1) - 200(y_0 + k_1)\right] =$$

$$= 0.025\left[-20(0-5) - 200(1+0)\right] = -2.5$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(0 - 0.125) = 0.9375$$

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{2}(-5 - 2.5) = -3.75$$

Para n=2, t=0.05 tenemos que:

$$k_1 = hf(y_1, z_1, t_1) = hz_1 = -0.09375$$
$$l_1 = hg(y_1, z_1, t_1) = h(-20\mathrm{z}_1 - 200\mathrm{y}_1) = -2.8125$$
$$k_2 = hf(y_1 + k_1, z_1 + l_1, t_1) = h(z_1 + l_1) = 0.1640625$$
$$l_2 = hg(y_1 + k_1, z_1 + l_1, t_1) = h\left[-20(z_1 + l_1) - 200(y_1 + k_1)\right] =$$
$$= -0.9375$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(-0.09375 - 0.1640625) = 0.80859$$

$$z_2 = z_1 + \frac{1}{2}(-2.8125 - 0.9375) = -5.625$$

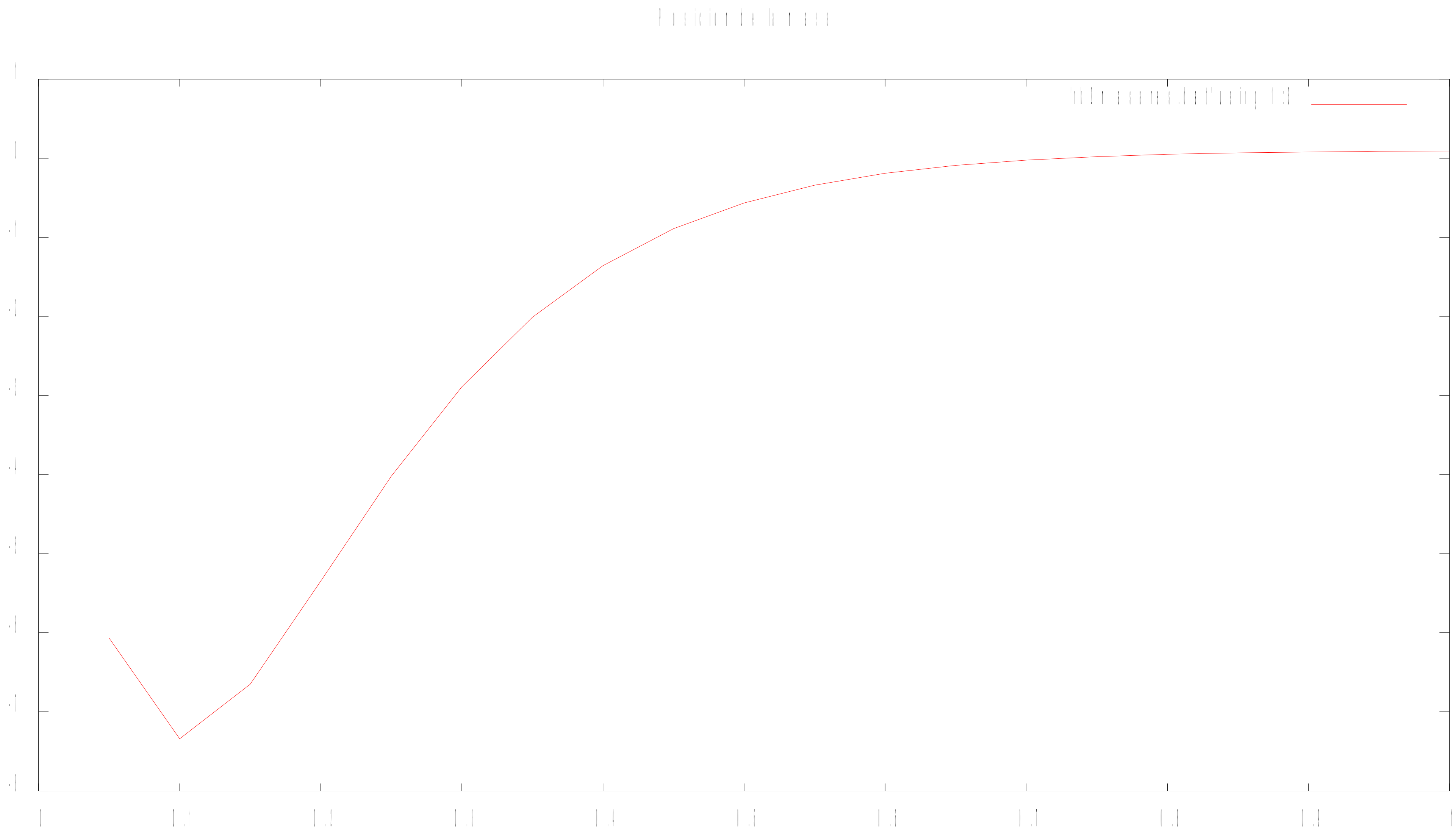
Segundo problema para la tarea

a. Calcula $y(t)$ para $0<t<10$ s mediante RK2 y con $h=0.001$.

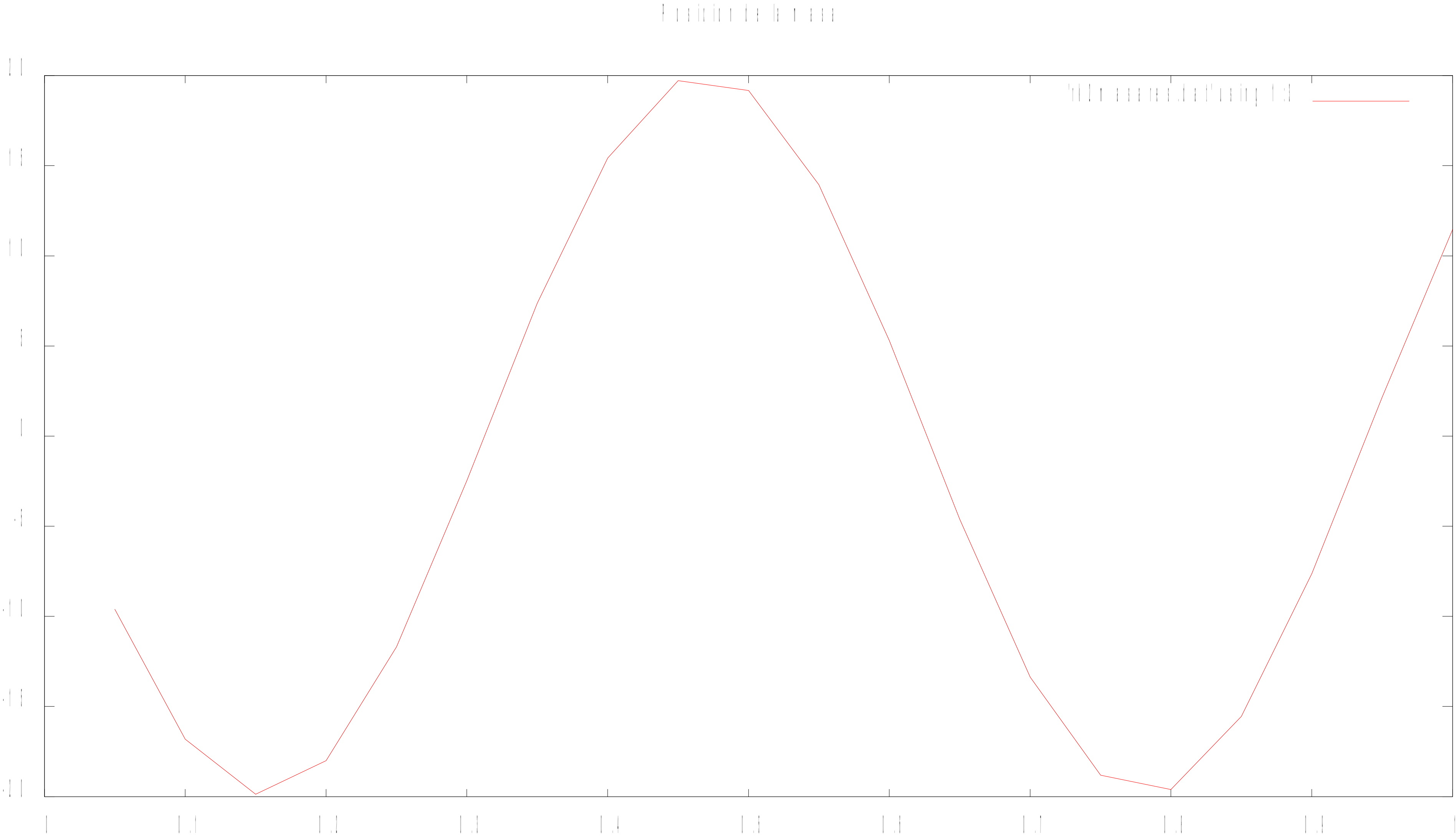
b. Repite el cálculo con $B=0$

En cada inciso, genera una gráfica que acompañe a tu respuesta.

Solución gráfica



Sin constante de amortiguamiento

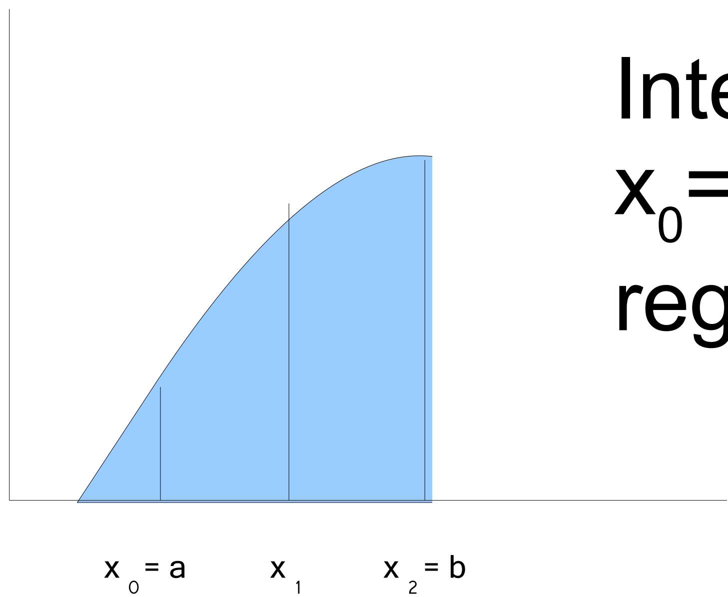


Método Runge – Kutta de tercer orden

Es más preciso que el RK2. Se basa en la regla de 1/3 de Simpson:

La regla de 1/3 de Simpson se basa en la interpolación polinomial cuadrática. El polinimio de Newton hacia adelante ajustado a x_0, x_1 y x_2 está dado por la expresión:

$$g(x_0+sh)=f_0+s(f_1-f_0)+\frac{(s(s-1))}{2}(f_2-2\mathrm{f}_1+f_0)$$



Integrando esta ecuación, desde x_0=a hasta x = b, se obtiene la regla de 1/3 de Simpson:

$$I = \int_b^a f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\mathrm{f}(\bar{x}) + f(b)\right] + E$$

Regresando al RK3, usando la regla 1/3 de Simpson, tenemos que:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left[f(y_n, t_n) + 4\mathrm{f}(\bar{y}_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}) + f(\bar{y}_{n+1}, t_{n+1}) \right]$$

Donde y^*_{n+1} , $y^*_{n+1/2}$ son estimaciones puesto que no conocemos y_{n+1} , $y_{n+1/2}$

Las estimaciones $y^*_{n+1/2}$, y^*_{n+1} las desarrollamos con el método de Euler hacia adelante:

$$\bar{y}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} f(y_n, t_n)$$

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + h\, f(y_n, t_n)$$

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + h\, f\left(\bar{y}_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

La expresión canónica de RK3 es:

$$k_1 = hf(y_n, t_n)$$

$$k_2 = hf\left(y_n + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = hf(y_n - k_1 + 2k_2, t_n + h)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 4\mathrm{k}_2 + k_3]$$

Método Runge – Kutta de cuarto orden

Em método RK4 se obtiene de manera similar al de RK3, sólo que se usa un paso intermedio adicional para evaluar la derivada.

El método basado en la regla 1/3 de Simpson es la siguiente:

$$k_1 = hf(y_n, t_n)$$

$$k_2 = hf(y_n + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2})$$

$$k_3 = hf(y_n + \frac{k_2}{2}, t_n + \frac{h}{2})$$

$$k_4 = hf(y_n + k_3, t_n + h)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2\mathrm{k}_2 + 2\mathrm{k}_3 + k_4]$$

La segunda versión se basa en la regla 3/8 de Simpson y se expresa como:

$$k_1 = hf\left(y_n, t_n\right)$$

$$k_2 = hf\left[y_n + \frac{k_1}{3}, t_n + \frac{h}{3}\right]$$

$$k_3 = hf\left[y_n + \frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3}, t_n + \frac{2\mathrm{h}}{3}\right]$$

$$k_4 = hf\left[y_n + k_1 - k_2 + k_3, t_n + h\right]$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{8}\left[k_1 + 3\mathrm{k}_2 + 3\mathrm{k}_3 + k_4\right]$$

Ejercicio

Una pieza metálica con una masa de 0.1 kg @ 200ºC, se coloca en cierto momento en un cuarto cuya temperatura es 25ºC, en donde se da el proceso de convección natural y transferencia de calor por radiación. Suponemos que la distribución de temperatura es uniforme en la pieza, la ecuación de T vs t es:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{A}{(\rho c v)}\left[\epsilon \sigma (297-T^4)+h_c(297-T)\right]$$

$$T(0)=473\,^\circ C$$

Las constante son las siguientes:

$$\rho = 300\, kg/m^3$$

$$v = 0.001\, m^3$$

$$A = 0.25\, m^2$$

$$c = 900\, \frac{J}{(kg\, K)}$$

$$h_c = 30\, \frac{J}{(m^2\, K)}$$

$$\epsilon = 0.8$$

$$\sigma = 5.67\, x\, 10^{-8}\, \frac{w}{(m^2\, K^4)}$$

Calcular el valor de T en 0, 10, 20, 30, 60, 120 y 180 segundos, sea h = 1