Ecuaciones diferenciales ordinarias

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

16 de octubre de 2012

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Introducción.

Las ecuaciones diferenciales tienen importancia fundamental en las aplicaciones, ya que muchas leyes y relaciones físicas pueden expresarse matemáticamente de esta forma.

En particular, el estudio de problemas de equilibrio de sistemas continuos se encuentra dentro de este contexto.

Definiciones importantes

Aviso de consideración

No sería mala idea hacer un repaso en casa sobre estas definiciones y los métodos analíticos de solución de las *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* EDO.

Ecuación diferencial

Esta ecuación relaciona dos o más variables en términos de derivadas o diferenciales.

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos x$$

$$(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$$

$$\left[\frac{x^2 w}{dx^2}\right]^3 - xy\frac{dw}{dx} = 0$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y parciales

Si en una ecuación diferencial hay una sola variable independiente, las derivadas son totales y se le llama *ecuación ordinaria*.

Si en la ecuación hay dos o más variables independientes, las derivadas serán parciales y se le llama *ecuación parcial*.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Orden de una ecuación diferencial

Es la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Grado de una ecuación diferencial

Es el grado *algebraico* de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Ecuación diferencial lineal

Una ecuación diferencial es lineal si en ella no aparecen potencias de la variable dependiente y sus derivadas, ni productos de la variable dependiente por sus derivadas o productos entre derivadas.

Solución de una ecuación diferencial

Es cualquier relación funcional que no incluya derivadas o integrales de funciones desconocidas y que implique a la propia ecuación diferencial, en el sentido de que la verifique por sustitución directa.

Ecuación y condiciones homogéneas

Una ecuación o condición es homogénea si, cuando es satisfecha por una función particular $y(x)$, también es satisfecha por $cy(x)$, donde c es una constante arbitraria.

Solución de una ecuación diferencial

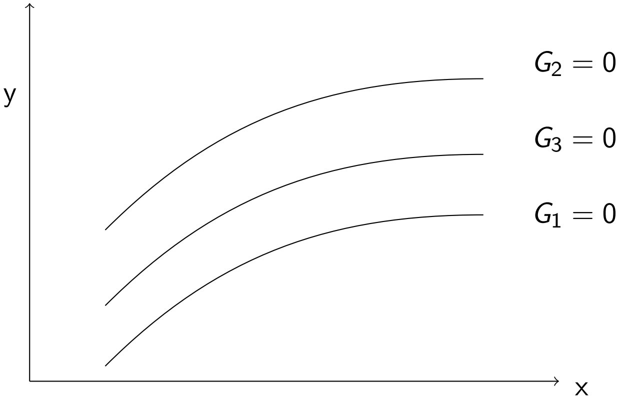
Sea una ecuación diferencial ordinaria de orden n y cualquier grado, cuya forma más general es:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Se establece del cálculo que en su solución general deben de aparecer n constantes arbitrarias. Entonces puede aceptarse como solución general:

$$G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

Solución de una EDO



Ejemplo

Gráficamente esta ecuación representa a una familia de curvas planas, cada una de ellas obtenidas para valores particulares de las n constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$

Tipos de problemas

Dependiendo de cómo se establezcan estas condiciones, se distinguen dos tipos de problemas los llamados *de valores iniciales* y los *de valores en la frontera*.

Problemas de valores iniciales

Está gobernado por una ecuación diferencial de orden n y un conjunto de n condiciones independientes, todas ellas válidas para el mismo punto inicial.

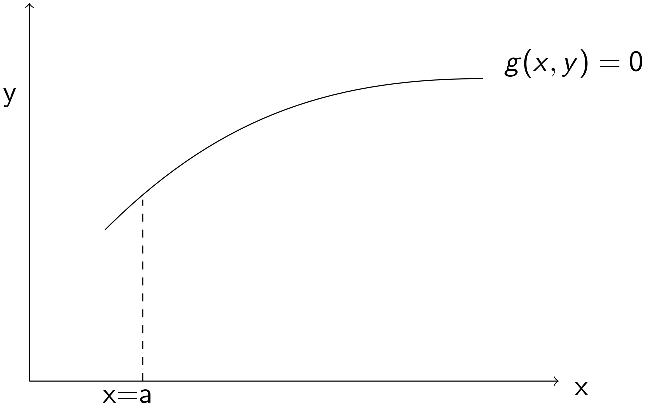
Si la ecuación diferencial que define el problema es del tipo de la EDO con la que iniciamos y $x = a$ es el punto inicial, puede aceptarse que las n condiciones independientes son:

n condiciones independientes

$$
\begin{aligned}
y(a) &= y_0 \\
y'(a) &= y'_0 \\
y''(a) &= y''_0 \\
&\vdots \\
y^n(a) &= y^n_0
\end{aligned}
$$

Y se tratará de obtener una solución particular de la EDO inicial que verifique las condiciones iniciales, como se presenta en la siguiente figura:

Solución de una EDO con condiciones inciales

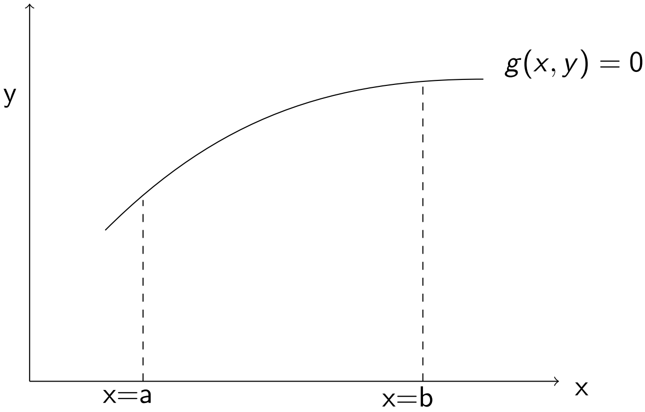


Problemas de valores en la frontera

Se deben de establecer condiciones de frontera en todos y cada uno de los puntos que constituyen la frontera del dominio de soluciones del problema.

En particular, en el espacio de una dimensión, hay dos puntos frontera, por ejemplo $x = a$ y $x = b$ si el dominio de soluciones es el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$

Solución de una EDO con condiciones de frontera



Estrategia de solución

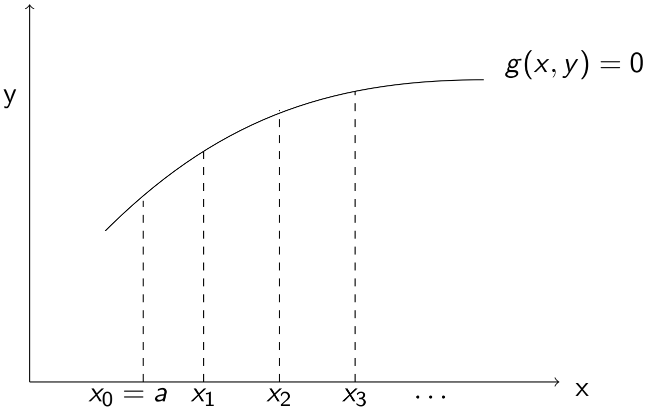
Básicamente la solución numérica de las ecuaciones diferenciales consiste en sustituir el dominio continuo de soluciones por uno discreto formado por puntos aislados igualmente espaciados entre sí.

Problema de valores iniciales

El dominio de definición de soluciones $x \geq a$ se sustituye por el conjunto infinito numerable de puntos:

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= x_0 + h \\ x_2 &= x_0 + 2h \\ x_3 &= x_0 + 3h \\ &\ldots \end{aligned}$$

Valores inciales

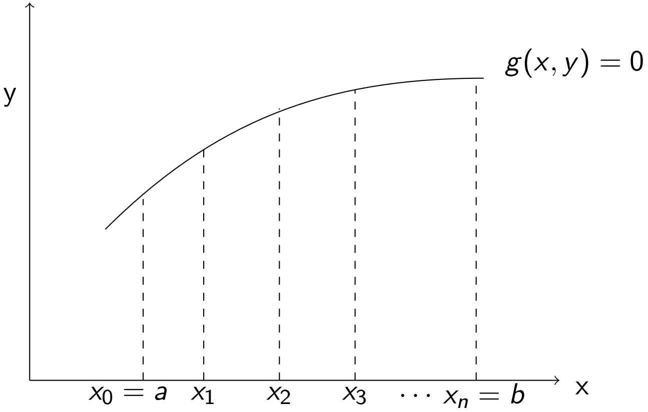


Problema de valores en la frontera

Se sustituye el intervalo $a \leq x \leq b$ por el conjunto finito de puntos:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= a \\
x_1 &= x_0 + h \\
x_2 &= x_0 + 2h \\
x_3 &= x_0 + 3h \\
\ldots \\
x_n &= x_0 + nh = b
\end{aligned}
$$

Valores en la frontera



Nuestra tarea

Habiéndose discretizado el problema continuo, se tratará de obtener la solución para los puntos considerados, esto se resuelve en general, sustituyendo las derivadas que aparezcan en la ecuación diferencial y en sus condiciones iniciales o de frontera, por fórmulas numéricas de derivación que proporcionen una aproximación a a las derivadas o tratando de integrar la ecuación, reemplazando el proceso de integración por una fórmula numérica que se aproxime a la integral.

Justificación

Consideremos los dos primeros términos de la expansión de Taylor de $y(t)$:

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + O(h^2)$$

Usemos la siguiente notación

$$\begin{aligned}
y(t_0) &= y_0 \\
f(y_0) &= f_0 \\
y(t) &= y(t_0 + nh) = y_n \\
f(y_n) &= f_n \\
y(t+h) &= y(t_0 + (n+1)h) = y_{n+1} \\
f(y_{n+1}) &= f_{n+1} \\
t + nh &= tn
\end{aligned}$$

Algoritmo del método de Euler

El método de Euler hacia adelante para la ecuación $y'(t) = f(y, t)$ se obtiene re-escribiendo la aproximación por diferencias hacia adelante:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} \simeq y'_n$$

como

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n)$$

donde

$$y'_n = f(y_n, t_n)$$

Iteraciones

Calculando de manera recursiva y_n

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hy_0' = y_0 + hf(y_0, t_0) \\
y_2 &= y_1 + hf(y_1, t_1) \\
y_3 &= y_2 + hf(y_2, t_2) \\
&\vdots \\
y_n &= y_{n-1} + hf(y_{n-1}, t_{n-1})
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Resuelve la siguiente EDO con el método de Euler, usando $h = 0.01$ para $0 \leq t \leq 0.02$

$$y' = -20y + 7e^{-0.5t}, \qquad y(0) = 5$$

$$y' = -20y + 7e^{-0.5t}, \qquad y(0) = 5$$

t_0 $\qquad y_0 = y(0) = 5$

$y' = -20y + 7e^{-0.5t}, \qquad y(0) = 5$

$$t_0 \qquad y_0 = y(0) = 5$$

$$t_1 = 0.01 \quad y_1 = y_0 + h y_0' =$$

$y' = -20y + 7e^{-0.5t}, \qquad y(0) = 5$

$$t_0 \qquad y_0 = y(0) = 5$$

$$t_1 = 0.01 \qquad y_1 = y_0 + h y_0' =$$

$$= 5 + ((0.01)(-20(5) + 7e^{0}))$$

$y' = -20y + 7e^{-0.5t}, \qquad y(0) = 5$

$$
\begin{aligned}
&t_0 && y_0 = y(0) = 5 \\
&t_1 = 0.01 && y_1 = y_0 + h y_0' = \\
& && = 5 + ((0.01)(-20(5) + 7e^{0})) \\
& && = 4.07
\end{aligned}
$$

$y' = -20y + 7e^{-0.5t}, \qquad y(0) = 5$

$$
\begin{aligned}
&t_0 && y_0 = y(0) = 5 \\
&t_1 = 0.01 && y_1 = y_0 + h y_0' = \\
& && = 5 + ((0.01)(-20(5) + 7e^{0})) \\
& && = 4.07 \\
&t_2 = 0.02 && y_2 = y_1 + h y_1' =
\end{aligned}
$$

$y' = -20y + 7e^{-0.5t}, \qquad y(0) = 5$

$$
\begin{array}{ll}
t_0 & y_0 = y(0) = 5 \\
t_1 = 0.01 & y_1 = y_0 + hy_0' = \\
 & = 5 + ((0.01)(-20(5) + 7e^{0})) \\
 & = 4.07 \\
t_2 = 0.02 & y_2 = y_1 + hy_1' = \\
 & = 4.07 + ((0.01)(-20(4.07) + 7e^{0.005}))
\end{array}
$$

$y' = -20y + 7e^{-0.5t}, \qquad y(0) = 5$

$$
\begin{aligned}
&t_0 && y_0 = y(0) = 5 \\
&t_1 = 0.01 && y_1 = y_0 + h y_0' = \\
& && = 5 + ((0.01)(-20(5) + 7e^{0})) \\
& && = 4.07 \\
&t_2 = 0.02 && y_2 = y_1 + h y_1' = \\
& && = 4.07 + ((0.01)(-20(4.07) + 7e^{0.005})) \\
& && = 3.32565
\end{aligned}
$$

$y' = -20y + 7e^{-0.5t}, \qquad y(0) = 5$

$$
\begin{aligned}
t_0 \qquad & y_0 = y(0) = 5 \\
t_1 = 0.01 \quad & y_1 = y_0 + hy_0' = \\
& = 5 + ((0.01)(-20(5) + 7e^{0})) \\
& = 4.07 \\
t_2 = 0.02 \quad & y_2 = y_1 + hy_1' = \\
& = 4.07 + ((0.01)(-20(4.07) + 7e^{0.005})) \\
& = 3.32565 \\
\vdots \qquad &
\end{aligned}
$$

$y' = -20y + 7e^{-0.5t}, \qquad y(0) = 5$

$$t_0 \qquad y_0 = y(0) = 5$$

$$t_1 = 0.01 \quad y_1 = y_0 + hy'_0 =$$
$$= 5 + ((0.01)(-20(5) + 7e^{0}))$$
$$= 4.07$$

$$t_2 = 0.02 \quad y_2 = y_1 + hy'_1 =$$
$$= 4.07 + ((0.01)(-20(4.07) + 7e^{0.005}))$$
$$= 3.32565$$

$$\vdots$$

$$t_n = nh \qquad y_n = y_{n-1} + hy'_{n-1}$$

El mismo ejercicio ahora con código

Ahora repite para el mismo ejercicio pero con $h = 0.01, 0.001, 0.0001$ con un código en Python para $0 \leq t \leq 0.09$

$$y' = -20y + 7e^{-0.5t}, \qquad y(0) = 5$$

Evalúa los errores de los tres cálculos mediante la comparación con la solución analítica dada por:

$$y = 5e^{-20t} + \frac{7}{19.5}(e^{-0.5t} - e^{-20t})$$

Código en Python

```
from math import *

y = 5.0
n = 0
t = 0.0
h = eval(raw_input('Escribe el valor de h= '))

while t <= 0.09:
    n = n + 1
    y = y + h*(-20*y + 7*exp(-0.5*t))
    sa = 5*exp(-20*t)+(7/19.5)*(exp(-0.5*t) - exp
        (-20*t))
    t = n*h

print t , y , sa, abs((sa - y)/sa)*100
```

Tabla de resultados

h	solución	error[1]
0.01	0.839973922062	24.367
0.001	1.08122698725	2.621
0.0001	1.10895329982	0.263

[1] Expresado en porcentaje

Consideraciones al método de Euler

Este método debe de utilizarse de manera cuidadosa para evitar dos tipos de errores:

- Errores de truncamiento (que ya hemos discutido).
- Errores por debidos a la inestabilidad.

Consideraciones al método de Euler

Este método debe de utilizarse de manera cuidadosa para evitar dos tipos de errores:

- Errores de truncamiento (que ya hemos discutido).
- Errores por debidos a la inestabilidad.

Errores por inestabilidad

Aparece cuando la constante de tiempo es negativa, a menos de que h sea muy pequeño.

Una ecuación característica con solución decreciente es $y' = -\alpha y, \quad y(0) = y0 > 0$, con $\alpha > 0$

La solución exacta es $y = y_0 exp(-\alpha t)$. El método de Euler resulta:

$$y_{n+1} = (1 - \alpha h) y_n$$

Posibles casos

$$y_{n+1} = (1 - \alpha h) y_n$$

- Si $\alpha h < 1$, la solución numérica es decreciente y positiva.
- Si $\alpha h > 1$, el signo de la solución se alterna.
- Si $\alpha h > 2$, la magnitud de la solución aumenta con cada paso y la solución oscila. Por lo que se tiene una inestabilidad.

Posibles casos

$$y_{n+1} = (1 - \alpha h) y_n$$

- Si $\alpha h < 1$, la solución numérica es decreciente y positiva.
- Si $\alpha h > 1$, el signo de la solución se alterna.
- Si $\alpha h > 2$, la magnitud de la solución aumenta con cada paso y la solución oscila. Por lo que se tiene una inestabilidad.

Posibles casos

$$y_{n+1} = (1 - \alpha h) y_n$$

- Si $\alpha h < 1$, la solución numérica es decreciente y positiva.
- Si $\alpha h > 1$, el signo de la solución se alterna.
- Si $\alpha h > 2$, la magnitud de la solución aumenta con cada paso y la solución oscila. Por lo que se tiene una inestabilidad.

Método de Picard

Este método es más preciso que el de Euler, además es más estable.

Si usamos la regla del trapecio para integrar la ecuación $y' = f(y, t)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left[f(y_{n+1}, t_{n+1}) + f(y_n, t_n) \right]$$

Método predictor-corrector

Es posible utilizar un algoritmo menos preciso para calcular el siguiente valor y_{i+1}, usando el método de Euler y posteriormente, aplicar un algoritmo que mejora el cálculo del nuevo valor, usando el algoritmo de Picard.

Consideremos el caso de un movimiento unidimensional con el método de Euler, donde tenemos una fuerza del tipo $f(x) = -kx$, con k la constante elástica, para fines prácticos, hacemos $k = m = 1$

El código en secciones

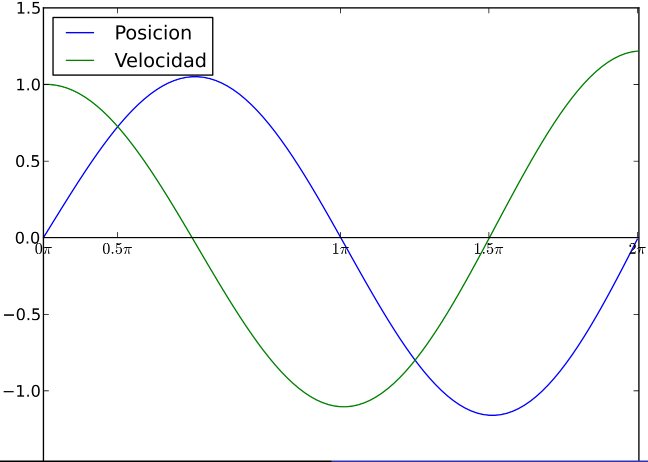
Para el cálculo predictor de posición y velocidad, tenemos que

```
X(I+1) = X(I)+V(I)*DT
V(I+1) = V(I)-X(I)*DT
```

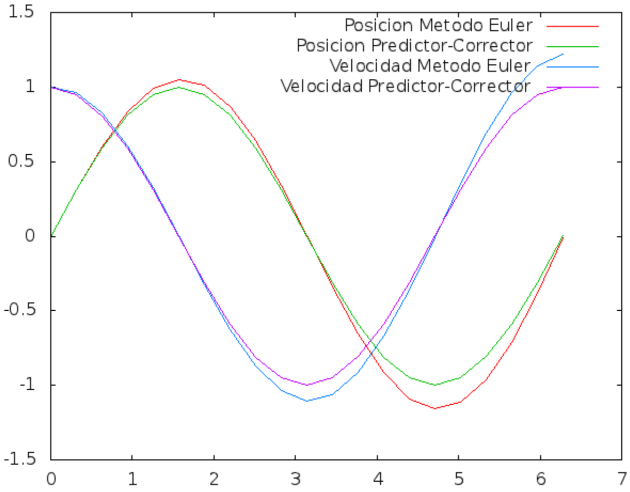
Mientras que para el paso corrector, usamos

```
X(I+1) = X(I)+(V(I)+V(I+1))*DT/2.0
V(I+1) = V(I)-(X(I)+X(I+1))*DT/2.0
```

Resultados: etapa Predictor



Resultados


Posicion Metodo Euler
Posicion Predictor-Corrector
Velocidad Metodo Euler
Velocidad Predictor-Corrector
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
1
2
3
4
5
6
7

Métodos de Runge-Kutta

La principal desventaja de los métodos de Euler es que su precisión es baja. Para hacer que el nivel de precisión aumente, hay que reducir h, pero esto genera que se lleve más tiempo en el cálculo y se propague el error por redondeo.

Sea una EDO:

$$y' = f(y, t), \qquad y(0) = y_0$$

Para calcular $y_{n+1} = t_n + h$ dando un valor de y_n se integra la EDO en el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y, t) dt$$

Se resuelve la ecuación del lado derecho mediante integración numérica.

Runge-Kutta de segundo orden

Aplicando la regla del trapecio al lado derecho de la ecuación anterior:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y,t)dt \simeq \frac{1}{2}h[f(y_n,t_n) + f(y_{n+1},t_{n+1})]$$

En esta ecuación el término y_{n+1} es una incógnita, por lo que se aproxima el segundo término mediante $f(y*_{n+1},t_{n+1})$ donde $y*_{n+1}$ es la primera estimación de y_{n+1} obtenido por el método de Euler hacia adelante.

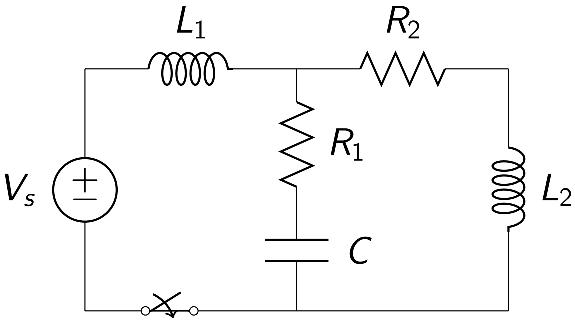
$$y*_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(y_n, t_n) + f(y*_{n+1}, t_{n+1})]$$

De manera canónica, podemos escribir:

$$k_1 = hf(y_n, t_n)$$
$$k_2 = hf(y_n + k_1, t_{n+1})$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$$

Ejercicio

El circuito que se muestra, tiene una autoinductancia de $L = 50$ H, una resistencia de $R = 20\Omega$ W, y una fuente de $V = 10$ V.



En $t = 0$, I(t) satisface

$$L\frac{d}{dt}I(t) + RI(t) = V, \qquad I(0) = 0$$

Usando el esquema de Runge-Kutta de segundo orden (RK2), calcular la corriente para $0 \leq t \leq 10$ segundos, con $h = 0.1$

Se reescribe la ecuación como

$$\frac{d}{dt}I = -\frac{R}{L}I + \frac{V}{L} = f(I, t)$$

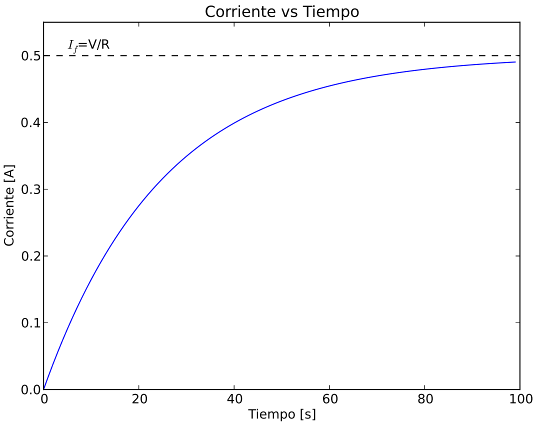
Aplicando el método RK2, tenemos

$$k_1 = h\left[-\frac{R}{L}I_n + \frac{V}{L}\right]$$

$$k_2 = h\left[-\frac{R}{L}(I_n + k_1) + \frac{V}{L}\right]$$

$$I_{n+1} = I_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Resultado gráfico



```python
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt

L=50.0
R=20.0
V=10.0
h=0.1
corriente=0
I=[]
I.append(0)

for i in range(99):
    k1=h*((-R/L)*corriente+(V/L))
    k2=h*((-R/L)*(corriente+k1)+(V/L))
    corriente=corriente+(k1+k2)*0.5
    I.append(corriente)
```

La rutina para la gráfica con `matplotlib` la pueden implementar sin mayor problema.

Nótese que el valor de corriente límite corresponde a $I_f = V/R$ que alcanzaría en un tiempo mucho mayor.