Tarea Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

1. La ecuación diferencial del movimiento de un péndulo simple es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

donde θ es el desplazamiento angular a partir de la vertical, g es la aceleración debida a la gravedad y L la longitud del péndulo.
Con el cambio de variable $\tau = t\sqrt{g/L}$, la ecuación toma la forma:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -\sin\theta$$

Resuelve la ecuación para determinar el período del péndulo, si la amplitud es $\theta_0 = 1$ rad. Considera que para pequeñas amplitudes ($\sin\theta \simeq \theta$) el período es $2\pi\sqrt{L/g}$.

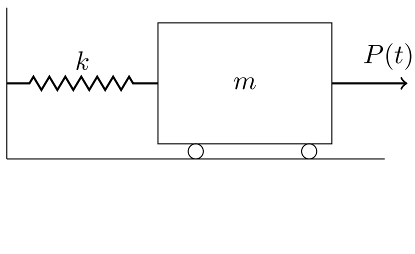
2. Un paracaidista de masa m en caída libre vertical experimenta una fuerza de arrastre aerodinámica $F_D = c_D\dot{y}^2$, donde y se mide hacia abajo a partir del comienzo de la caída. La EDO que describe la caída es

$$\ddot{y} = g - \frac{c_D}{m}\dot{y}^2$$

Calcula el tiempo para una caída de 500 m, usa los valores de $g = 9.80665$ m/s^2, $c_D = 0.2028$ kg/m y $m = 80$ kg.

3. Un sistema masa-resorte está en reposo hasta que se le aplica una fuerza $P(t)$, donde

$$P(t) = \begin{cases} 10t \text{ N para } t < 2 \text{ s} \\ 20 \text{ N para } t \geq 2 \text{ s} \end{cases}$$



La EDO del movimiento resultante es

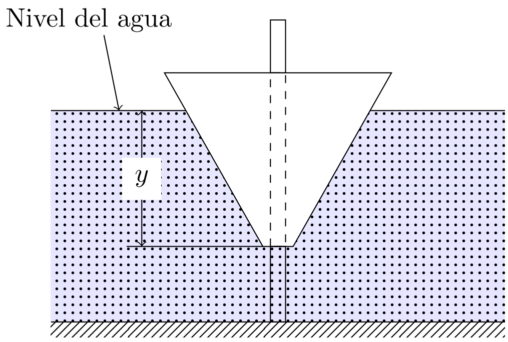
$$\ddot{y} = \frac{P(t)}{m} - \frac{k}{m}y$$

Calcula el desplazamiento máximo de la masa. Usa $m = 0.25$ kg y $k = 75$ N/m.

4. Un flotador cónico se desliza libremente sobre una varilla vertical. Al tocar el flotador, éste pierde su posición de equilibrio, y presenta un movimiento oscilante que se describe por la ecuación diferencial:

$$\ddot{y} = g(1 - ay^3)$$

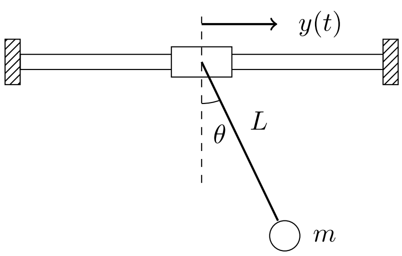
donde $a = 16$ m^3 (que están determinadas por la densidad y dimensiones del flotador) y $g = 9.80665$ m/s^2.



Si el flotador se eleva a la posición $y = 0.1$ m y se libera, determina el período y la amplitud de las oscilaciones.

5. Un péndulo está suspendido en un collar deslizante. El sistema está en reposo, posteriormente se aplica al collar un movimiento oscilante $y(t) = Y \sin \omega t$, en $t = 0$. La ecuación diferencial que describe el movimiento del péndulo es

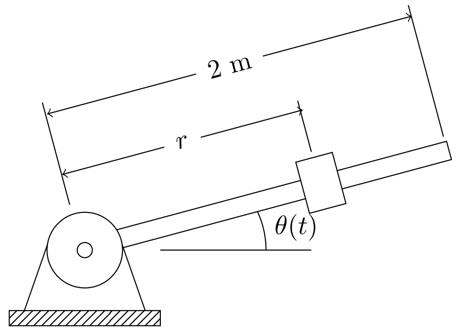
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta + \frac{\omega^2}{L}Y\cos\theta\sin\omega t$$



Grafica θ contra t en el intervalo de $t = 0$ a $t = 10$ segundos, así mismo, determina el desplazamiento mayor de θ durante éste período. Usa $g = 9.80665$ m/s^2, $L = 1.0$ m, $Y = 0.25$ m y $\omega = 2.5$ rad/s.

6. Tenemos un sistema que consiste en un masa que se desliza sobre una barra guía que está en reposo, la masa se ubica en $r = 0.75$ m. Al tiempo $t = 0$ se enciende un motor que proporiona un movimiento dado por la expresión $\theta(t) = (\pi/12)\cos\pi t$ sobre la barra. La EDO que describe el movimiento resultante de la masa deslizante es:

$$\ddot{r} = \left(\frac{\pi^2}{12}\right)^2 r\sin^2\pi t - g\sin\left(\frac{\pi}{12}\cos\pi t\right)$$

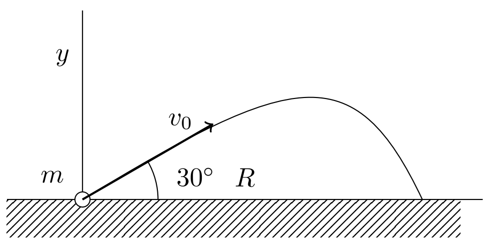


Calcula el tiempo para el cual, la masa deslizante alcanza el extremo final de la barra guía (la punta de la barra). Usa el valor de $g = 9.80665$ m/s^2.

7. Una bala de masa $m = 0.25$ kg se lanza con una velocidad $v_0 = 50$ m/s en la dirección que se indica en la figura. Si la fuerza aerodinámica de arrastre sobre la bala es $F_D = C_D v^{3/2}$, las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento son:

$$\ddot{x} = -\frac{C_D}{m}\dot{x}v^{1/2} \qquad \ddot{y} = -\frac{C_D}{m}\dot{y}v^{1/2} - g$$

donde $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, $C_D = 0.03$ kg/(ms)$^{1/2}$ y $g = 9.80665$m/s^2. Calcular el tiempo de vuelo y el alcance R



8. La solución al problema

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

es la función de Bessel $J_0(x)$. Integra numéricamente para calcular $J_0(5)$ y compara el resultado con -0.17760, que es el valor que se obtiene de tablas matemáticas. Tip: para evitar la singularidad en $x = 0$, inicia la integración en $x = 10^{-12}$.