# CAPITULO 8

## RESOLUCION DE CIRCUITOS DE SEGUNDO ORDEN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.

**8.1.- Análisis de las redes simples de segundo orden.**
**8.2.- Diferentes tipos de respuesta.**

## BIBLIOGRAFIA:

[1] *Cap 9: Respuesta natural y a un escalón de los circuitos RLC*
[2] *Cap 9: Second Order Linear Circuirts.*
[3] *Cap 8: Circuito RLC*

En este capítulo , la discusión se centrará en redes RLC paralelo o serie. Tal como en los circuitos de primer orden, el análisis de este tipo de circuitos se dividirá en dos tiempos: un período transitorio durante el cual la energía de los almacenadores estará redistribuyendose y un período estacionario donde se alcanza nuevamente el equilibrio y cuya forma dependerá de los estímulos aplicados.

El objetivo del análisis de estos circuitos es el siguiente:

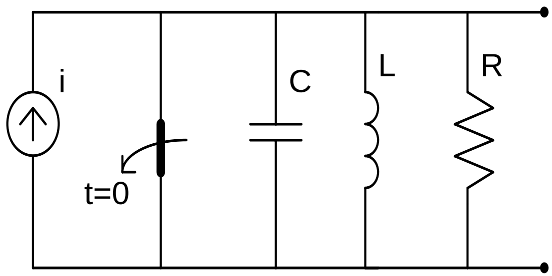
- en circuitos paralelos, la tarea reside en determinar el voltaje de sus elementos, después de que una modificación del circuito libere energías almacenadas inicialmente en el condensador o la bobina, siempre teniendo presente que la corriente inicial que circule por la bobina y el voltaje inicial que posea el condensador representan las energías iniciales almacenadas en estos elementos.

- en el circuito serie la tarea es determinar la corriente que circula por el circuito una vez producida la conmutación, y de la misma forma que para el circuito paralelo, ésta va depender de la energía inicial almacenada.

## 8.1.- Análisis de las redes simples de segundo orden.

Analizaremos primero la respuesta del circuito RLC paralelo.

**- Respuesta del circuito RLC paralelo.**




A partir de plantear la primera ley de Kirchhoff en el circuito anterior y conociendo las relaciones corriente voltaje en los terminales de los elementos se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{v}{R}+\frac{1}{L}\int_0^t vdt + C\frac{dv}{dt} = i \qquad (1)$$

En una primera aproximación analizaremos la respuesta libre del circuito RLC paralelo, o sea cuando no existen fuentes forzantes, lo que corresponde a resolver la ecuación homogénea obtenida de la ecuación (1):

Derivando la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{1}{R}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{L}+C\frac{d^2v}{dt^2}=0$$

Dividiendo la ecuación anterior por C, se obtiene:

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{LC}=0 \qquad (2)$$

Esta ecuación se denomina: ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, y su orden viene dado por la cantidad de elementos que almacenan energía.

La solución general de este tipo de ecuaciones es:

$v = Ae^{\lambda t}$ donde A y $\lambda$ son constantes desconocidas.

La ecuación característica es entonces la siguiente:

$$\lambda^2+\frac{1}{RC}\lambda+\frac{1}{LC}=0$$

Se obtienen las siguientes raíces:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

Se puede demostrar que la solución de la ecuación diferencial planteada en (2) queda:

$$v = A_1 e^{\lambda 1 t} + A_2 e^{\lambda 2 t}.$$

donde las raíces de la ecuación característica están determinadas por los parámetros del circuito, o sea las R, L y C.

Las condiciones iniciales del circuito permiten determinar los valores de $A_1$ y $A_2$ que son las constantes de integración.

Como el comportamiento del voltaje depende de las raices λ1 y λ2, es necesario hallarlas y para esto se utiliza la siguiente notación:

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_o{}^2} \qquad \lambda_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_o{}^2}$$

donde:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{y} \quad \omega_\mathrm{d} = \sqrt{\omega_0{}^2 - \alpha^2}$$

α es el factor de amortiguamiento del circuito. Mide la rapidez de variación de la curva de respuesta.

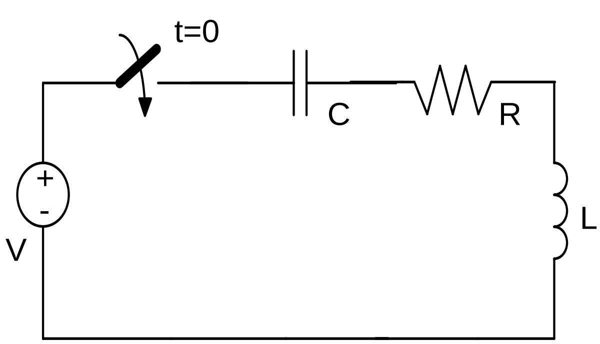
ωo: es la frecuencia angular de las oscilaciones libres del circuito sin pérdidas.

$\omega_d$: es la frecuencia de desviación de la respuesta.

Más adelante veremos cómo varía la expresión de la respuesta según los valores que tomen los parámetros anteriores.

Para hallar la respuesta completa, es necesario analizar la parte forzada de la ecuación, o sea resolver la ecuación particular que se obtiene de la ecuación (1). La respuesta forzada depende de las fuentes del circuito y se puede obtener analizando el comportamiento de éste cuando el tiempo tiende a infinito.

**- Respuesta del circuito RLC serie.**



A partir de plantear la segunda ley de Kirchhoff en el circuito anterior para t>0 y conociendo las relaciones corriente voltaje en los terminales de los elementos se obtiene la siguiente ecuación:

$$Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i dt + L\frac{di}{dt} = V \qquad (3)$$

Podríamos realizar un análisis similar al del circuito paralelo. Sin embargo utilizaremos las propiedades de dualidad para obtener la expresión de la corriente que se establece en el circuito serie. La solución general de la ecuación homogénea que se obtiene a partir de la ecuación (3) tiene la misma forma que en el caso de un circuito paralelo:

$i = Ae^{\lambda t}$ donde A y $\lambda$ son constantes desconocidas.

La ecuación característica es entonces la siguiente:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

Se obtienen las siguientes raíces:

$$\lambda_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$$

Como el comportamiento del voltaje depende de las raices $\lambda 1$ y $\lambda 2$, es necesario hallarlas de forma similar a la del circuito paralelo:

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_o{}^2} \qquad \lambda_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_o{}^2}$$

pero en el caso del circuito serie se tiene que:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{y} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0{}^2 - \alpha^2}$$

$\alpha$ es el factor de amortiguamiento del circuito.

$\omega o$: es la frecuencia angular de las oscilaciones libres.

$\omega_d$: es la frecuencia de desviación de la respuesta.

*Note que sólo cambia la expresión del factor de amortiguamiento según la topología del circuito que se esté analizando.*

En este caso también se debe hallar la respuesta forzada para obtener la respuesta completa del circuito. Recordemos que la respuesta forzada se halla resolviendo la ecuación particular o analizando el circuito para t tendiente a infinito.

Para ambos casos, el de un circuito RLC paralelo o el de un circuito RLC serie, la naturaleza de las raices $\lambda 1$ y $\lambda 2$ depende de los valores del factor de amortiguamiento y de la frecuencia de oscilación libre, por esta razón se analizará en el epígrafe a continuación, cómo varía la respuesta del circuito para cada caso, según estas raíces.

## 8.2.- Diferentes tipos de respuesta.

Los diferentes tipos de respuesta transitoria que entrega el circuito RLC paralelo dependen de las siguientes tres condiciones:

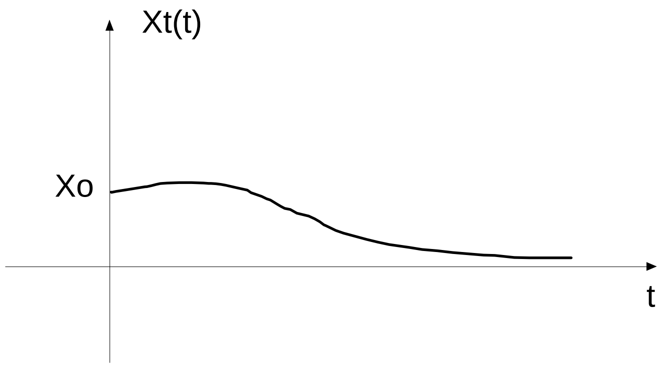
a) si $\omega_0^2 < \alpha^2$, las raices son reales diferentes y la respuesta es **sobre amortiguada**.

b) si $\omega_0^2 = \alpha^2$, las raices son reales iguales y la respuesta es **críticamente amortiguada**.

c) si $\omega_0^2 > \alpha^2$, las raíces son complejas conjugadas y la respuesta es **infra amortiguada**.

En cada uno de esos casos, por el hecho de tener diferentes tipos de raices, se obtienen formas de onda diferentes:

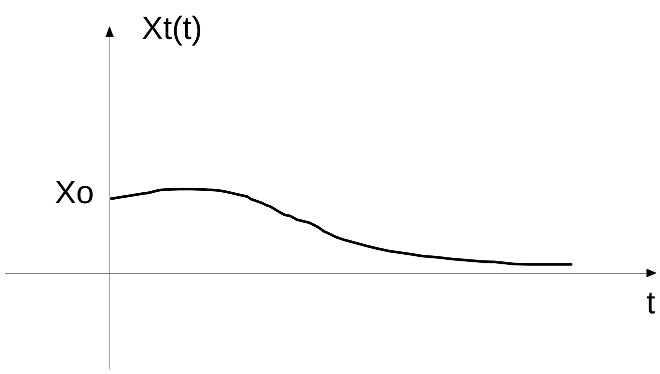
a) La expresión de la respuesta **sobre amortiguada** viene dada por:




α > Wo, por lo que las raíces son reales negativas y la expresión de la parte transitoria es:

$$x_t(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$$

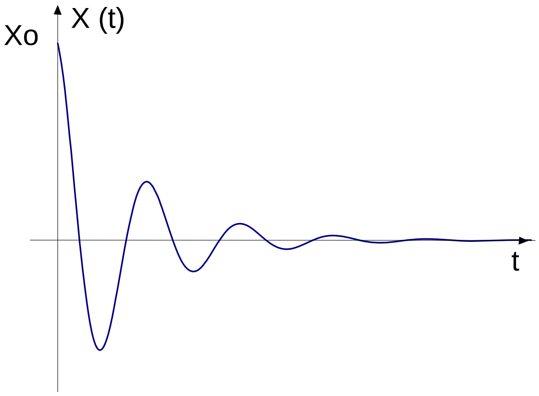
b) La expresión de la respuesta **críticamente amortiguada** viene dada por:




α = Wo, por lo que las raíces son reales iguales y la expresión de la parte transitoria es:

$$x_t(t) = (K_1 t + K_2) e^{\lambda t}$$

c) La expresión de la respuesta **infra amortiguada** viene dada por:




$\alpha$ < Wo, por lo que las raíces son complejas conjugadas y la expresión de la parte transitoria es:

$$x_t(t) = Ke^{-\alpha t}\cos(W_d t + \theta)$$

No olvidar que en cada caso anterior la respuesta completa consta además de la parte forzada, o sea que:

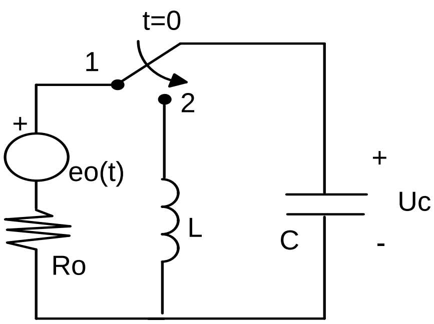
$$x(t) = x_t(t) + x_f(t)$$

Esta siempre se obtiene analizando el comportamiento de circuito para t $\to \infty$.

**La respuesta libre u oscilatoria:**

Se ha planteado la influencia de la resistencia en el tipo de respuesta de la red. Se analizará ahora qué ocurre cuando la resistencia es nula.

Analicemos el siguiente circuito:




En t=0, se produce la conmutación del interruptor el que pasa de la posición 1 a la posición 2. Antes de t=0, tenemos a un condensador que ha alcanzado un cierto nivel de carga en el período estacionario. Al conmutar, el interruptor lo conecta a una bobina, de esta forma se inicia el proceso de redistribución de la energía.

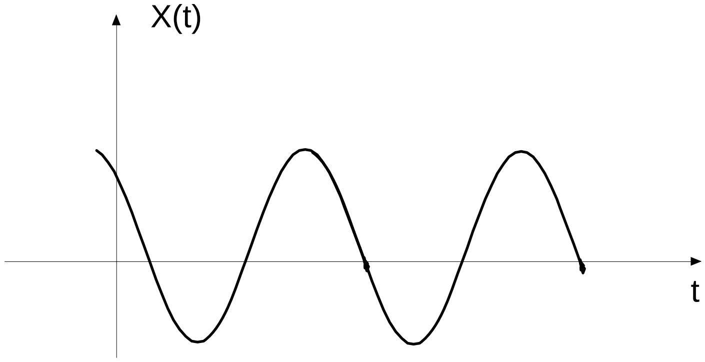
Después de la conmutación obtenemos un circuito LC serie, por lo que las expresiones son:

$\alpha = \dfrac{R}{2L}$ pero como R=0 obtenemos que $\alpha$=0 y $w_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

Como $\alpha$=0, las raíces de la ecuación son imagianarias puras, por lo que :

$$\lambda_1 = jWo \qquad y \qquad \lambda_2 = -jWo$$

La respuesta transitoria del circuito es: $x_t(t) = K\cos(W_0 t + \theta)$.




Se obtiene entonces una función de caracter oscilatorio pero sin amortiguamiento, por el hecho de no tener resistencia. La frecuencia angular de las oscilaciones es Wo, lo cual justifica que a este parámetro se le ha denominado “frecuencia de las oscilaciones libres del circuito sin pérdidas”. Note además que el período transitorio no desaparece, si no que se prolonga infinitamente.

En la práctica esta respuesta oscilatoria es muy difícil de lograr puesto que nunca se puede tener un circuito totalmente libre de pérdidas. En efecto, los conductores y los elementos almacenadores de energía poseen grados de resistencia que irán consumiendo la energía inicialmente almacenada en el condensador.

**EJEMPLO:**

CONDICIONES INICIALES

En la red de la figura, el switch K es cerrado en t=0. En $t=0^-$ , todos los voltajes de los capacitores y las corrientes en los inductores son cero. Tres tensiones de nudo son identificadas, V1, V2 y V3.

a) Encontrar V1 y dV1/dt en $t=0^+$.
b) Encontrar V2 y dV2/dt en $t=0^+$.
c) Encontrar V3 y dV3/dt en $t=0^+$.