Ecuaciones diferenciales ordinarias

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

4 de abril de 2017

Contenido

Ejercicio más elaborado

Un satélite se lanza desde una altitud $H = 772$ km sobre el nivel del mar, con una velocidad inicial $v_0 = 6700\ m/s$ en la dirección que se muestra.

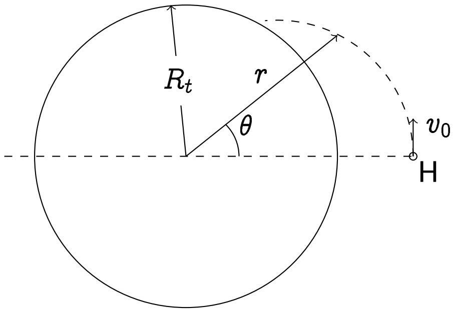


Figura (1): Descripción del problema de la caída del satélite.

El conjunto de EDO que describen el movimiento del satélite son:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM_t}{r^2} \qquad \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}$$

donde r y θ son las coordenadas polares del satélite.

Las constantes involucradas en las expresiones, son:

$$
\begin{aligned}
G &= 6.672 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^2 \\
M_t &= 5.9742 \times 10^{24}\ \mathrm{kg},\ \text{Masa de la Tierra} \\
R_e &= 6378.14\ \mathrm{km},\ \text{radio de la Tierra al nivel del mar}
\end{aligned}
$$

Problema a resolver

<+-> Obtén el conjunto de 1-EDO y las condiciones iniciales del problema, de la forma $\dot{\mathrm{y}} = \mathbf{F}(x, \mathrm{y}), \mathrm{y}(0) = \mathrm{b}$.

<+-> Integra las 1-EDO con respecto al tiempo en que se lanza el satélite a la altura H y choca en su regreso a la Tierra.

<+-> Calcula el lugar del impacto, con θ a partir de su posición de lanzamiento inicial.

Solución: Inciso 1

Tenemos que

$$GM_t = (6.672 \times 10^{-11})(5.9742 \times 10^{24}) =$$
$$= 3.9860 \times 10^{14}\text{m}^3\text{s}^2$$

Ahora hacemos

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Por lo que el conjunto equivalente de 1-EDO, resulta ser

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_0 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_0\ y_3^2 - \dfrac{3.9860 \times 10^{14}}{y_0^2} \\ y_3 \\ -\dfrac{2\ y_1\ y_3}{y_0} \end{bmatrix}$$

Las condiciones iniciales resultan

$$
\begin{aligned}
r(0) &= R_t + H = (6378.14 + 772) \times 10^3 \\
&= 7.15014 \times 10^6 \text{ m} \\
\dot{r}(0) &= 0 \\
\theta(0) &= 0 \\
\dot{\theta}(0) &= \frac{v_0}{r(0)} = \frac{6700}{7.15014 \times 10^6} \\
&= 0.937045 \times 10^{-3} \text{ rad s}^{-1}
\end{aligned}
$$

En la notación vectorial, las condiciones iniciales tienen la forma

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 7.15014 \times 10^{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0.937045 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Solución Inciso 2

Usaremos la librería `scipy.integrate.odeint` para resolver el sistema de 1-ODE, para ello necesitamos conocer la sintaxis y los argumentos que necesita esta función.

La función `odeint`

`scipy.integrate.odeint(func, y0, t [, args=()])`

Parámetros mínimos:

- ⇒ func : (y, t0, ...) Calcula la derivada de y en t_0
- ⇒ $y0$: arreglo. La(s) condición(es) iniciales de y (puede ser un vector)
- ⇒ t : arreglo. Una secuencia de puntos que representan el tiempo para resolver y. El valor inicial debe de ser el primer valor de esta secuencia.
- ⇒ args : tupla, es opcional. Argumentos extra para “pasarlos” a la función.

Arreglo para el problema

Definimos una función con los elementos del arreglo con entradas: posición y tiempo.

```
def F(y,t):
    F = zeros((4), dtype='float64')
    F[0] = y[1]
    F[1] = y[0] * (y[3]**2) - 3.9860e14 / (y[0]**2)
    F[2] = y[3]
    F[3] = -2.0 * y[1] * y[3] / y[0]
    return F
```

Condiciones iniciales y llamada a la función

Ahora pasamos a definir el intervalo de tiempo, el arreglo con las condiciones iniciales y la llamada a la función.

```
t = np.linspace(0,1200,100)

y0 = np.array([7.1514e6, 0., 0., 0.937045e-3])

y1 = odeint(F,y0,t)
```

¿Ya resolvimos el problema?

Hasta el momento sólo hemos usado la función `odeint` para integrar el sistema de 1-EDO, pero no hemos encontrado el tiempo que tarda el satélite en chocar con la Tierra, así como tampoco la posición (a partir del ángulo θ), entonces nos aplicamos a continuar.

Veamos con una gráfica que es lo que hemos resuelto hasta el momento.

Código para la gráfica de la posición vs tiempo

```
plt.plot(t,y1[:,0])

plt.axhline(y=6.378e6, color='k')
plt.xlim([0,1200])
plt.ticklabel_format(style='sci', axis='y',
    scilimits=(0,0))
plt.title('Caida del satelite')
plt.xlabel('Tiempo [s]')
plt.ylabel('Altura [m]')
plt.show()
```

Gráfica obtenida

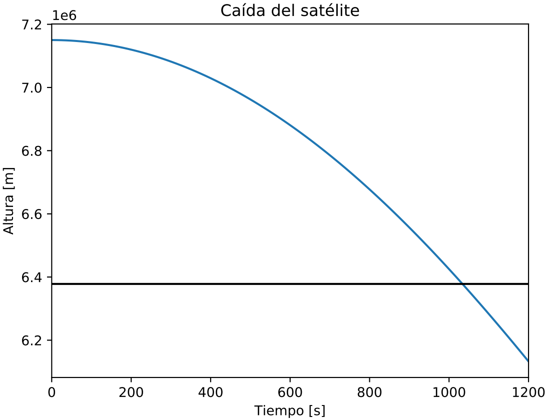


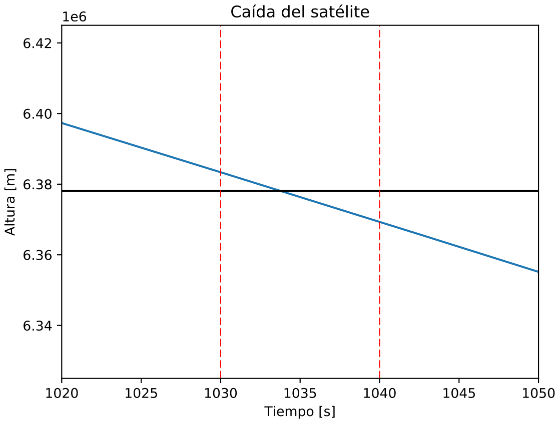
Figura (2): La línea horizontal representa la superficie de la Tierra.

El satélite choca con la Tierra cuando r es igual a $R_t = 6.37814 \times 10^6$ m.

Aunque la gráfica nos muestra que el desplazamiento del satélite continua, recordemos que el algoritmo sólo nos resuelve numéricamente el problema, nuestra tarea continua: hay que estimar el tiempo en el que la altura $H = R_t$.

Tomando datos del arreglo F

De los resultados, vemos que esto ocurre entre el tiempo $t = 1030$ y 1040 segundos.



Un valor de t más preciso, lo podemos obtener mediante una interpolación polinomial, pero si no queremos una precisión alta, con una interpolación lineal, bastará.

Hacemos $1030 + \Delta t$ el tiempo para el impacto, por lo que escribimos

$$r(1030 + \Delta t) = R_t$$

Desarrollando r con dos términos en una serie de Taylor, tenemos que

$$r(1030) + \dot{r}(1030)\Delta t = R_t$$

$$6.382958 \times 10^6 + (-1.400.4978 \times 10^3)\Delta t =$$

$$= 6.37814 \times 10^6$$

Desarrollando r con dos términos en una serie de Taylor, tenemos que

$$r(1030) + \dot{r}(1030)\Delta t = R_t$$
$$6.382958 \times 10^6 + (-1.400.4978 \times 10^3)\Delta t =$$
$$= 6.37814 \times 10^6$$

que al despejar,

$$\Delta t = 3.44 \text{ s}$$

Por lo que el tiempo de impacto es 1033.44 segundos.

Gráfica que determina el tiempo para el choque.

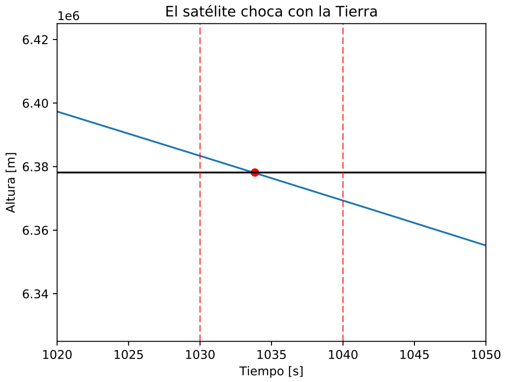


Figura (3): El satélite se estrella contra la Tierra.

Solución Inciso 3

La coordenada θ del impacto, la podemos calcular de una manera similar, para ello desarrollamos dos términos de la serie de Taylor, los valores los recuperamos del arreglo F que nos devuelve `odeint`:

$$\begin{aligned}
\theta(1030 + \Delta t) &= \theta(1030) + \dot{\theta}(1030)\Delta t \\
&= 1.04367 + (1.1758 \times 10^{-3})(3.44) \\
&= 1.04771 \text{ rad} \\
&= 60.029^{\circ}
\end{aligned}$$

Se ha resuelto el problema.

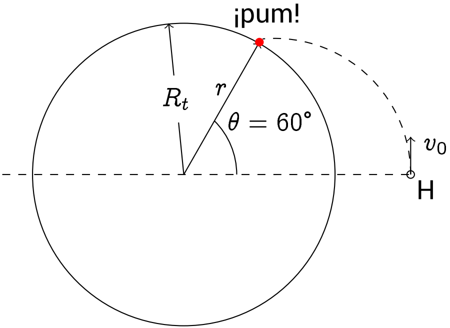
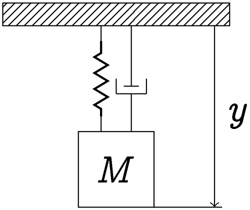
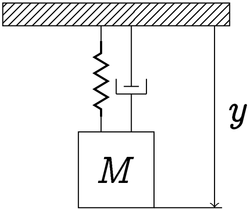


Figura (4): Se han resuelto los tres incisos del problema.

Ejercicio



Ejercicio



Una masa $M = 0.5$ kg se une al extremo inferior de un resorte sin masa. El extremo superior se fija a una pared en reposo. La masa experimenta una resistencia $R = -Bdy/dt$ debida al aire, donde B es una constante de amortiguamiento.

La ecuación de movimiento del sistema masa-resorte-amortiguador es:

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + B \frac{dy}{dt} + k\, y = 0 \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

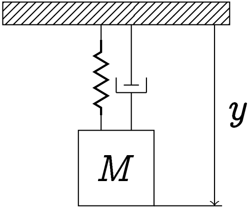
donde

$$M = 0.5 \text{ kg}$$

$$k = 100 \text{ kg s}^{-2}$$

$$B = 10 \text{ kg s}^{-1}$$

Sistema masa-resorte



$$M\,\frac{d^2y}{dt^2} + B\,\frac{dy}{dt} + k\,y = 0 \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Resuelve $y(t)$ para $0 < t < 3$, ¿qué pasa si $B = 0$? Para ambos casos estudia el diagrama fase del sistema.

Solución al problema

Realizaremos una rutina similar al problema del satélite, por lo que hay que definir el sistema de 1-EDO y luego usar `scipy.integrate.odeint`, junto con las condiciones iniciales del problema.

Arreglo para el problema del sistema masa-resorte

Definimos una función con los elementos del arreglo con entradas: posición y tiempo.

```
def F(y,t):
    F = np.zeros((2), dtype='float64')
    F[0] = y[1]
    F[1] = -5 *y[1] - 200*y[0]
    return F
```

Solución gráfica

Considerando que ya sabemos usar los resultados del arreglo que nos devuelve `scipy.integrate.odeint`, hacemos una gráfica que nos permita ver la evolución del sistema masa-resorte.

La rutina de graficación ya debe de ser una tarea natural que debes de implementar en tus códigos.

Solución gráfica

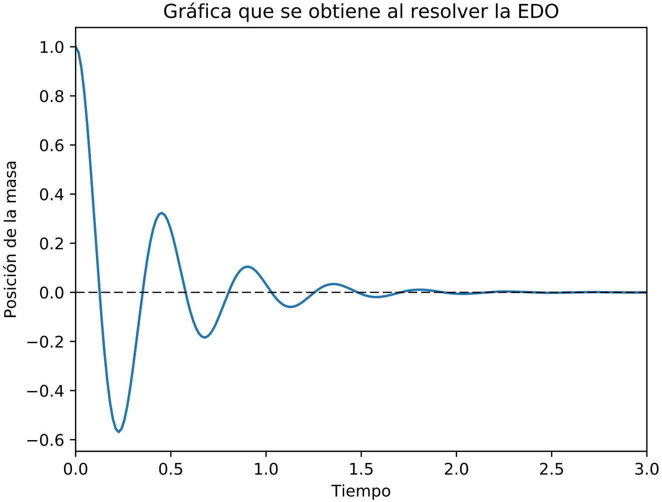
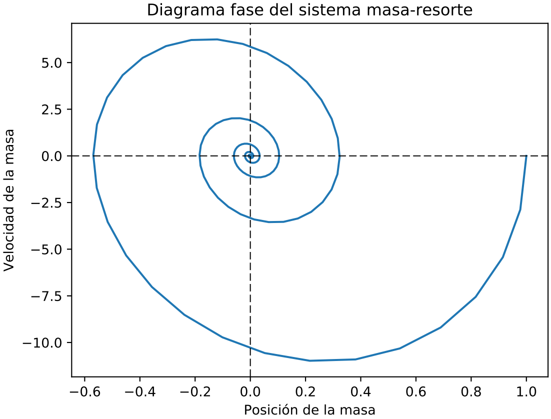


Diagrama fase del sistema

Para graficar el diagrama fase del sistema masa-resorte, graficamos y vs $\dot{y}$

Diagrama fase del sistema

Para graficar el diagrama fase del sistema masa-resorte, graficamos y vs $\dot{y}$



Repetimos el ejercicio con $B = 0$

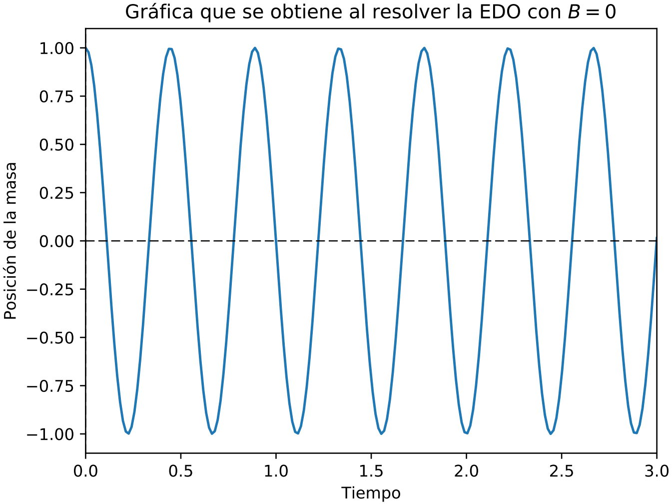
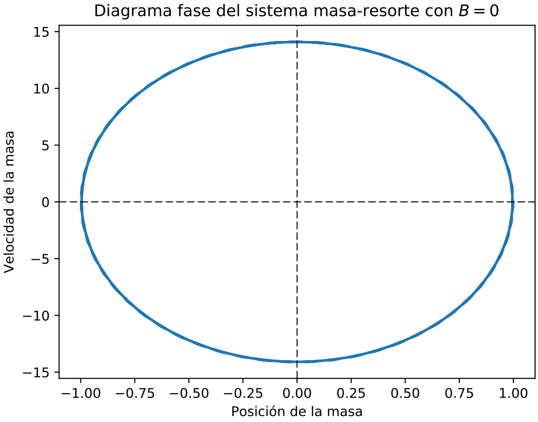


Diagrama fase del sistema con $B = 0$

Para graficar el diagrama fase del sistema masa-resorte, graficamos y vs $\dot{y}$

Diagrama fase del sistema con $B = 0$

Para graficar el diagrama fase del sistema masa-resorte, graficamos y vs $\dot{y}$



Ejercicio

Una pieza metálica con una masa de 0.1 kg con una temperatura de 200 °C (473 K), se coloca en cierto momento en un cuarto cuya temperatura es de 25 °C, la pieza está sujeta al proceso de enfriamiento por convección natural y transferencia de calor por radiación.

Suponemos que la distribución de temperatura es uniforme en la pieza, la ecuación que relaciona la razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo (T vs t) es:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{A}{(\rho\ c\ v)} [\epsilon\ \sigma (297^4 - T^4) + h_c\ (297 - T)]$$

con $T(0) = 473$ donde T es la temperatura en grados Kelvin y las constantes son:

Constantes del metal

$$
\begin{aligned}
\rho &= 300\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \text{ – densidad}\\
v &= 0.001\,\mathrm{m^{3}} \text{ – volumen}\\
A &= 0.25\,\mathrm{m^{2}} \text{ – superficie}\\
c &= 900\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}} \text{ – calor específico}\\
h_c &= 30\,\mathrm{J\,m^{-2}\,K^{-1}} \text{ – coef. transferencia de calor}\\
\epsilon &= 0.8 \text{ – emisividad}\\
\sigma &= 5.67\times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-2}} \text{ cte. de Stefan-Boltzamann}
\end{aligned}
$$

Problema a resolver

Calcular el valor de la temperatura T en la barra para el intervalo $0 < t < 200$ segundos.