Examen 3 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Solución

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

24 de octubre de 2013

Contenido

Problema 1

La ecuación diferencial del movimiento de un péndulo simple es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

donde θ es el desplazamiento angular a partir de la vertical, g es la aceleración debida a la gravedad y L la longitud del péndulo.

Con el cambio de variable $\tau = t\sqrt{g/L}$, la ecuación toma la forma:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -\sin\theta$$

Resuelve la ecuación para determinar el período del péndulo, si la amplitud es $\theta_0 = 1$ rad. Considera que para pequeñas amplitudes ($\sin\theta \simeq \theta$) el período es $2\pi\sqrt{L/g}$.

Solución

El sistema de 1-EDO que resulta es:

```
def F(x,y):
    F=zeros((2), dtype="float64")
    F[0]=y[1]
    F[1]=-sin(y[0])
    return F

x=0.0
xAlto=20
y=array([1.0,0.0])
h=0.1
freq=5

X,Y=integra(F,x,y,xAlto,h)
```

Gráfica de la solución

Cálculo del período

Sabemos de la tema anterior de integración que el período de un péndulo de longitud L es $\tau = 4\sqrt{\frac{L}{g}}h(\theta_0)$, donde g es la aceleración debida a la gravedad, θ_0, representa la amplitud angular y

$$h(\theta_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin^2\theta}}$$