Ecuaciones diferenciales ordinarias 3

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

23 de octubre de 2012

Contenido

Contenido

RK4 para sistemas de ecuaciones

La aplicación del RK4 a un conjunto de EDO es análoga a la aplicación del método RK2.

Sea un conjunto de dos ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
y' &= f(y, z, t) \\
z' &= g(y, z, t)
\end{aligned}
$$

El método RK4 para el conjunto de ecuaciones, es:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_n, z_n, t_n)\\
l_1 &= hg(y_n, z_n, t_n)\\
k_2 &= hf\left(y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right)\\
l_2 &= hg\left(y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right)\\
k_3 &= hf\left(y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{l_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right)\\
l_3 &= hg\left(y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{l_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right)\\
k_4 &= hf(y_n + k_3, z_n + l_3, t_n + h)\\
l_4 &= hg(y_n + k_3, z_n + l_3, t_n + h)
\end{aligned}
$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

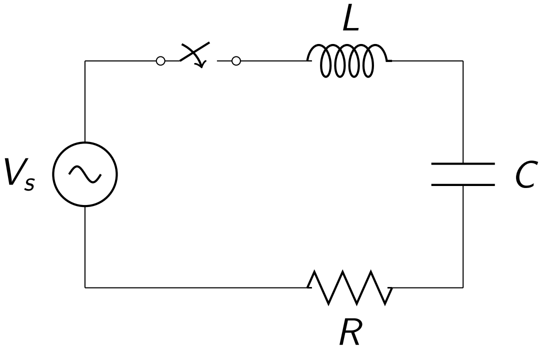
$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}[l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4]$$

Ejecicio

La corriente eléctrica de un circuito RLC en serie, satisface la ecuación

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt' + \frac{1}{C}q(0) = E(t), \qquad t > 0 \tag{1}$$

cuando el circuito se cierra en el instante $t = 0$, se tiene que $i = i(t)$ es la corriente, R es la resistencia, L, C, E vienen dadas por: $L = 200H$, $C = 0.001F$, $E(t) = 1V$ para $t > 0$.



Las condiciones iniciales son $q(0) = 0$ (carga inicial del condensador), $i(0) = 0$.

Calcular la corriente para $0 \leq t \leq 5$ segundos y el factor de amortiguamiento y la frecuencia de oscilación del circuito *RLC* para los siguientes valores de R:

1. $R = 0\,\Omega$
2. $R = 50\,\Omega$
3. $R = 100\,\Omega$
4. $R = 300\,\Omega$

Si definimos

$$q(t) = \int_0^{t'} i(t')dt' \tag{2}$$

derivando la expresión anterior

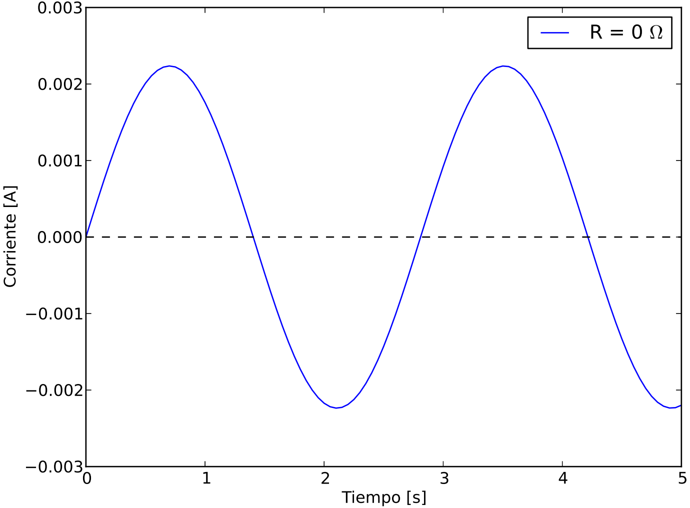
$$\frac{d}{dt}q(t) = i(t), \qquad q(0) = 0 \tag{3}$$

Sustituimos en la ecuació inicial, para re-escribir

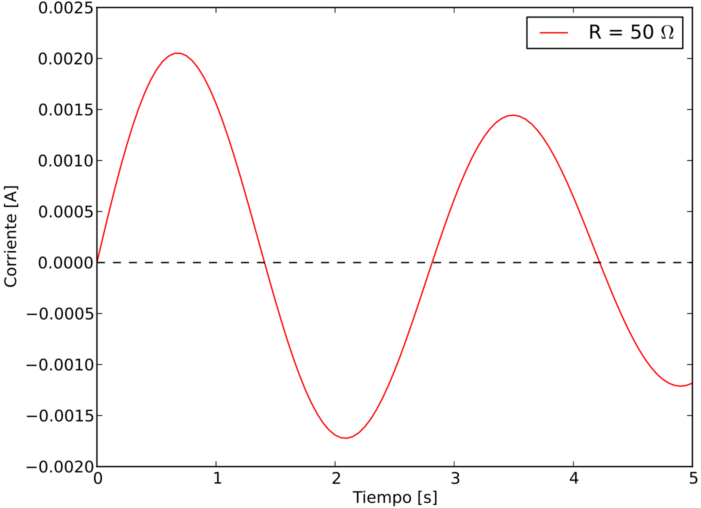
$$\frac{d}{dt}i(t) = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{LC}q(t) + \frac{1}{LC}q(0) + \frac{E(t)}{L}, \; i(0) = 0 \tag{4}$$

La ecuación (1) se transformó en un sistema de dos EDO de primer orden: las ecuaciones (3) y (4).

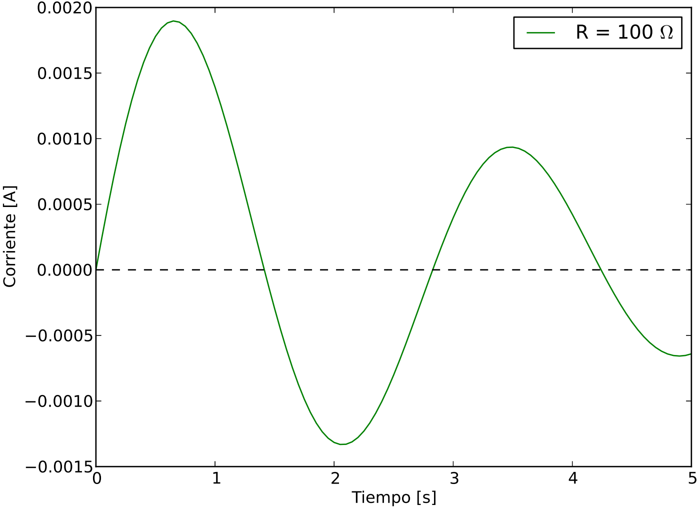
Solución gráfica con $R = 0\Omega$



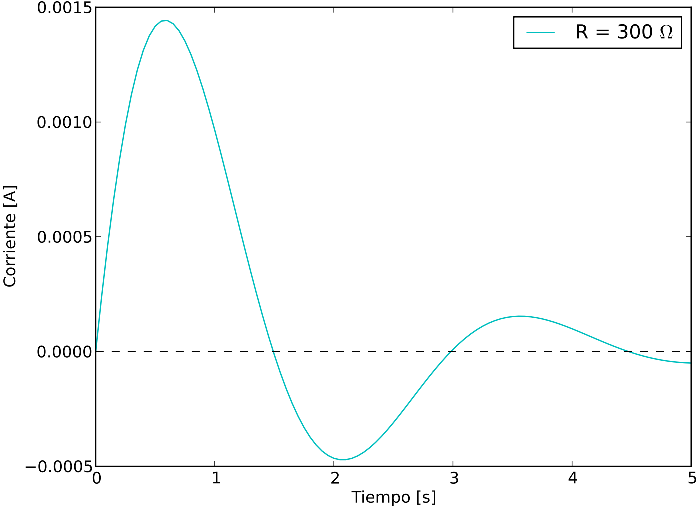
Solución gráfica con $R = 50\Omega$



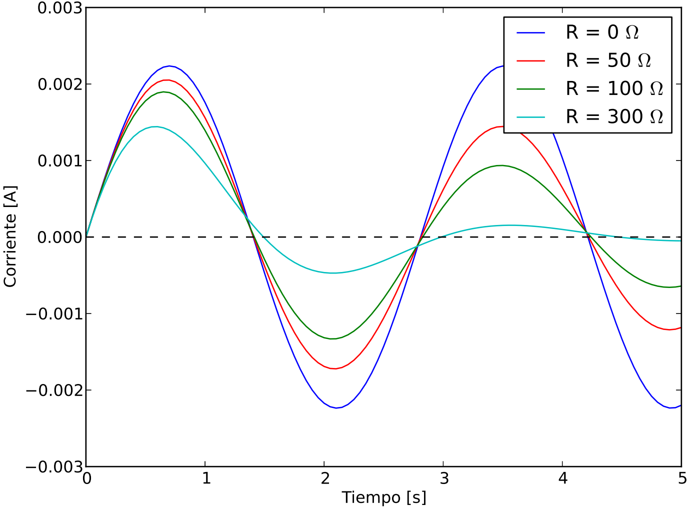
Solución gráfica con $R = 100\Omega$



Solución gráfica con $R = 300\Omega$



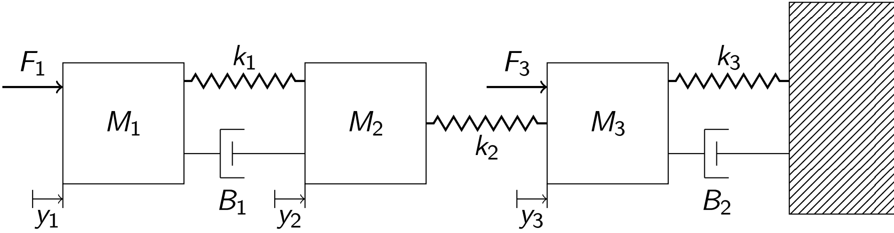
Solución gráfica con valores de R superpuestos



Ejercicio a cuenta de examen

En la figura se muestra un sistema de tres masas. Los desplazamientos de estas tres masas satisfacen las ecuaciones dadas por:

$$
\begin{aligned}
M_1 y_1'' + B_1 y_1' + K_1 y_1 - B_1 y_2' - K_2 y_2 &= F_1(t) \\
-B_1 y_1' - K_1 y_1 + M_2 y_2'' + B_1 y_2' + (K_1 + K_2) y_2 - K_2 y_3 &= 0 \\
-K_2 y_2 + M_3 y_3'' + B_2 y_3' + (K_2 + K_3) y_3 &= F_3(t)
\end{aligned}
$$



Las constantes y condiciones iniciales son

$K_1 = K_2 = K_3 = 1$	(constantes de los resortes, kgm/s^2)
$M_1 = M_2 = M_3 = 1$	(masa, kg)
$F_1(t) = 1, F_3(t) = 0$	(fuerza, N)
$B_1 = B_2 = 0.1$	(coeficientes de amortiguamiento, kg/s)

$$y_1(0) = y_1'(0) = y_2(0) = y_2'(0) = y_3(0) = y_3'(0) = 0$$

(condiciones iniciales)

Resuelve y grafica las ecuaciones anteriores mediante RK4, para $0 \leq t \leq 30$ segundos y $h = 0.1$

Hint: Definiendo

$$y_4 = y_1', \qquad y_5 = y_2', \qquad y_6 = y_3'$$

La ecuación inicial se escribe como un conjunto de seis EDO de primer orden, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_4 \\
y_2' &= y_5 \\
y_3' &= y_6 \\
y_4' &= \left[-B_1 y_4 - K_1 y_1 + B_1 y_5 + K_2 y_2 + F_1\right] / M_1 \\
y_5' &= \left[B_1 y_4 + K_1 y_1 - B_1 y_5 - (K_1 + K_2)\, y_2 + K_2 y_3\right] / M_2 \\
y_6' &= \left[K_2 y_2 - B_2 y_6 - (K_2 + K_3)\, y_3 + F_3\right] / M_3
\end{aligned}$$