Ecuaciones diferenciales ordinarias 4

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

25 de octubre de 2014

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Hablando de manera general, un método de integración se dice que es estable si los efectos de errores locales, no se acumulan progresivamente, es decir, si el error global permanece acotado.

Si el método es inestable, si el error global se incrementa de manera exponencial, generando eventualmente un desbordamiento (overflow). La estabilidad no tiene nada que ver con la precisión, de hecho, un método impreciso puede ser muy estable.

Determinantes de la estabilidad

La estabilidad está determinada por tres factores:

1. Las ecuaciones diferenciales.

Desafortunadamente, no es fácil determinar de antemano la estabilidad, a menos que la ecuación diferencial sea lineal.

Determinantes de la estabilidad

La estabilidad está determinada por tres factores:

1. Las ecuaciones diferenciales.
2. El método de solución.

Desafortunadamente, no es fácil determinar de antemano la estabilidad, a menos que la ecuación diferencial sea lineal.

Determinantes de la estabilidad

La estabilidad está determinada por tres factores:

1. Las ecuaciones diferenciales.
2. El método de solución.
3. El valor del incremento h.

Desafortunadamente, no es fácil determinar de antemano la estabilidad, a menos que la ecuación diferencial sea lineal.

Estabilidad del método de Euler

Con el fin de ilustar la estabilidad, consideremos el problema lineal

$$y' = -\lambda y \qquad\qquad y(0) = \beta$$

donde λ es una constante positiva.

La solución exacta de este problema es

$$y(x) = \beta e^{-\lambda x}$$

Veamos qué pasa cuando intentamos resolver numéricamente esta ecuación con el método de Euler.

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x)$$

sustituimos $y'(x) = -\lambda y(x)$, para obtener

$$y(x+h) = (1 - \lambda h)y(x)$$

Si $|1 - \lambda h| > 1$, se nota claramente que el método es inestable ya que el valor de $|y|$ se incrementa en cada paso de integración.

Por tanto, el método de Euler es estable solamente si $|1 - \lambda h| \leq 1$, o

$$h \leq \frac{2}{\lambda}$$

Los resultados se pueden extender a un sistema de n ecuaciones diferenciales de la forma

$$\mathbf{y}' = -\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}$$

donde $\mathbf{\Lambda}$ es una matriz constante con valores propios positivos λ_i, con $i = 1, 2, \ldots, n$. Se puede demostrar que el método de integración de Euler es estable si

$$h < \frac{2}{\lambda_{max}}$$

donde λ_{max} es el valor propio mayor de $\mathbf{\Lambda}$.

Contenido

Rigidez

Un problema de valores iniciales se dice que es *rígido*, si algunos de los elementos del vector solución $\mathbf{y}(x)$ varían mucho más rápido con respecto a x, que otros.

La rigidez puede predecirse fácilmente del conjunto de ED $\mathbf{y}' = -\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}$ con una matriz de coeficientes constantes $\mathbf{\Lambda}$.

La solución de esas ecuaciones es:

$$\mathbf{y}(x) = \sum_i C_i \mathbf{v}_i \exp(-\lambda_i x)$$

donde λ_i son los valores propios de $\mathbf{\Lambda}$ y $\mathbf{v}_i$ son los correspondientes vectores propios. Es evidente que el problema es rígido si hay una gran disparidad en las magnitudes de los valores propios positivos.

La integración numérica de las ecuaciones rígidas requiere un cuidado especial. El tamaño del paso h necesario para la estabilidad está determinado por el valor propio más grande (λ_{max}), aunque si los términos $\exp(-\lambda_{max} x)$ en la solución decaen muy rápidamente y se vuelven insignificantes a medida que nos alejamos del origen.

Por ejemplo, sea la siguiente EDO

$$y'' + 1001y' + 1000y = 0$$

usando $y_0 = y$ junto con $y_1 = y_1$, el conjunto equivalente de 1-EDO, resulta

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1 \\ -1000y_0 - 10001y_1 \end{bmatrix}$$

En este caso

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1000 & 1001 \end{bmatrix}$$

Los valores propios (*eigenvalues*) son las raíces de:

$$|\mathbf{\Lambda} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1000 & 1001 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

expandiendo el determinante, tenemos que

$$-\lambda(1001 - \lambda) + 1000 = 0$$

las soluciones son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1000$ Claramente la ecuación es rígida; se necesita que $h < 2/\lambda_2 = 0.002$ para que el método de Euler sea estable.

El método de Runge-Kutta tendría aproximadamente la misma limitación en el tamaño del paso.

Ejemplo

Mostrar que el problema

$$y'' = -\frac{19}{4}y - 10y', \qquad y(0) = -9, \qquad y'(0) = 0$$

1. Es "moderadamente" rígido.
2. Estimar el valor de h_{max}, el valor mayor de h con el cual el método RK es estable.
3. Revisa al calcular $y(10)$ con $h \simeq h_{max}/2$ y $h \simeq 2h_{max}$.

Solución Punto 1

Con la notación que ya manejamos, hacemos $y = y_0$ y $y' = y_1$, para nuestro sistema de EDO-1

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1 \\ -\dfrac{19}{4}y_0 - 10y_1 \end{bmatrix} = -\mathbf{\Lambda} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Solución Punto 1

Con la notación que ya manejamos, hacemos $y = y_0$ y $y' = y_1$, para nuestro sistema de EDO-1

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1 \\ -\frac{19}{4}y_0 - 10y_1 \end{bmatrix} = -\mathbf{\Lambda} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{19}{4} & 10 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de $\mathbf{\Lambda}$ están dados por

$$|\mathbf{\Lambda} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ \dfrac{19}{4} & 10 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Que nos devuelve $\lambda_1 = 1/2$ y $\lambda_2 = 19/2$.

Como λ_2 es un poco más grande que λ_1, las ecuaciones son "moderadamente" rígidas.

Solución Punto 2

Un estimado para el límite superior de h en donde es estable el método se puede obtener de la expresión indicada anteriormente

$$h_{max} = \frac{2}{\lambda_{max}} = \frac{2}{19/2} = 0.2153$$

Aunque esta fórmula es válida estrictamente para el método de Euler, por lo general se puede utilizar para las fórmulas de integración de orden superior.

Solución Punto 3

Haciendo $h_1 = \lambda_{max}/2 = 0.10765 \simeq 0.1$ y ejecutando el código, tenemos que

x	$y[0]$	$y[1]$
$0.0000e+000$	$-9.0000e+000$	$0.0000e+000$
$1.0000e+001$	$-6.4011e-002$	$3.2005e-002$

La solución analítica del problema es:

$$y(x) = -\frac{19}{2}\exp\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{19x}{2}\right)$$

evaluando $y(10) = 0.064011$, que es el valor que se obtiene con el método RK4.

Ahora haciendo $h_2 = 2\lambda_{max} = 0.4306$ y ejecutando nuevamente el código, tenemos que

x	$y[0]$	$y[1]$
$0.0000e+00$	$-9.0000e+00$	$0.0000e+00$
$1.0000e+01$	$1.9244e+16$	$-1.8282e+17$

En donde vemos que la inestabilidad del método se hace evidente por el valor de h.

Contenido

Métodos multipaso

La determinación del tamaño de h adecuad, puede ser un dolor de cabeza en los procedimientos de integración numérica: si es demasiado grande, el error de truncamiento resulta ser inaceptable; si su demasiado pequeño, estamos desperdiciando recursos computacionales.

Por otra parte, un tamaño de paso constante puede no ser adecuado para toda la gama de integración. Por ejemplo, si la curva solución comienza con cambios rápidos antes de convertirse en suave (como en un problema de rigidez), debemos utilizar una h pequeña al principio y aumentarla cuando llegamos a la zona lisa.

Aquí es donde los métodos adaptativos llegan para apoyarnos: estiman el error de truncamiento en cada paso de integración y ajustan automáticamente el tamaño de paso para mantener el error dentro de los límites prescritos.

Los métodos de Runge-Kutta adaptativos utilizan las denominadas fórmulas de integración incorporadas.

Estas fórmulas vienen en pares: una fórmula tiene el orden de integración m, la otra es de orden $m+1$. La idea es utilizar ambas fórmulas para avanzar en la solución de x a $x+h$.

De los resultados $\mathbf{y}_m(x+h)$ y $\mathbf{y}_{m+1}(x+h)$ podemos estimar el error de truncamiento en la fórmula de orden m

$$\mathbf{E}(h) = \mathbf{y}_{m+1}(x+h) - \mathbf{y}_m(x+h)$$

Lo que hace atractivo el uso de fórmulas embebidas, ya que comparten puntos donde $\mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ son evaluados.

Esto significa que cada $\mathbf{y}_m(x+h)$ ha sido calculado, se requiere un esfuerzo pequeño para calcular $\mathbf{y}_{m+1}(x+h)$

Fórmulas Runge-Kutta-Fehlberg

Se presentan las fórmulas incoporadas de orden 5 y 4 obtenidas por Erwin Fehlberg, por lo que se conocen como las fórmulas Runge-Kutta-Felhlberg (RKF45)

$$\mathbf{K}_0 = h\mathbf{F}(x, y)$$

$$\mathbf{K}_i = h\mathbf{F}\left(x + A_i h, \mathbf{y} + \sum_{j=0}^{i-1} B_{ij}\mathbf{K}_j\right)$$

$$\mathbf{y}_5(x+h) = \mathbf{y}(x) + \sum_{i=0}^{5} C_i\mathbf{K}_i \quad \text{fórmula de 5o. orden}$$

$$\mathbf{y}_4(x+h) = \mathbf{y}(x) + \sum_{i=0}^{5} D_i\mathbf{K}_i \quad \text{fórmula de 4o. orden}$$

Los coeficientes que aparecen en las fórmulas no son únicos. En la siguiente tabla se muestran los valores de los coeficientes.

i	A_i	B_{ij}					C_i	D_i
0	-	-	-	-	-	-	$\frac{37}{378}$	$\frac{2825}{27648}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	-	-	-	-	0	0
2	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$	-	-	-	$\frac{250}{621}$	$\frac{18575}{48384}$
3	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$	-	-	$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$
4	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$	-	0	$\frac{277}{14336}$
5	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{4096}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{512}{1771}$	$\frac{1}{4}$

Ejemplo

La fuerza de arrastre aerodinámico en un objeto en caída libre se puede aproximar por

$$F_D = av^2 \exp(-by)$$

donde

- v es la velocidad del objeto en m/s
- y es la elevación del objeto en metros.
- $a = 7.45$ kg/m
- $b = 10.53 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1}$

El término exponencial representa el cambio de densidad del aire con la elevación. La ecuación diferencial que describe la caída del objeto es

$$m\ddot{y} = -mg + F_D$$

donde $g = 9.80665\,\mathsf{m/s}^2$ y $m = 114\,\mathsf{kg}$ es la masa del objeto. Si el objeto se libera de una altura de 9 km, calcula su altura y velocidad luego de 10 segundos de caída, utiliza el método RK adaptativo.

Solución

La ecuación diferencial y las condiciones de frontera son

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= -g + \frac{a}{m}\dot{y}^2 \exp(-by) \\ &= -9.80665 + \frac{7.45}{114}\dot{y}^2 \exp(-10.53 \times 10^{-5} y)\end{aligned}$$

$$y(0) = 9000m \qquad \dot{y}(0) = 0$$

Haciendo $y_0 = y$ y $y_1 = \dot{y}$, obtenemos el sistema de EDO-1

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} \dot{y}_0 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_1 \\ -9.80665 + (65.351 \times 10^{-3} y_1^2 \exp(-10.53 \times 10^{-5} y_0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 9000 \text{ m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución

x	$y[0]$	$y[1]$
$0.0000e+00$	$9.0000e+03$	$0.0000e+00$
$5.0000e-01$	$8.9988e+03$	$-4.8043e+00$
$2.0584e+00$	$8.9821e+03$	$-1.5186e+01$
$3.4602e+00$	$8.9581e+03$	$-1.8439e+01$
$4.8756e+00$	$8.9312e+03$	$-1.9322e+01$
$6.5347e+00$	$8.8989e+03$	$-1.9533e+01$
$8.6276e+00$	$8.8580e+03$	$-1.9541e+01$
$1.0000e+01$	$8.8312e+03$	$-1.9519e+01$

Nótese que el primer paso que se realizó, se hizo con el valor de $h = 0.5$, aparentemente el error fue bueno sin que la tolerancia fuera rebasada, por lo tanto se aceptó este valor.

Los pasos posteriores, que se calcuan de acuerdo a lo visto anteriormente, son considerablemente mayores.

Para el $t = 10$ el objeto se mueve con una velocidad $v = -\dot{y} = 19.52$ m/s y se encuentra a una altura de 8831 m.

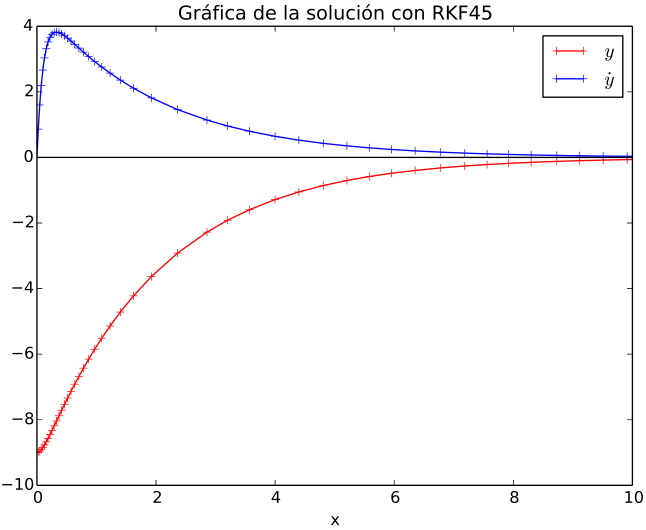
Otro ejemplo (ya trabajado anteriormente)

Integrar el problema "moderamente" rígido

$$y'' = -\frac{19}{4}y - 10y' \qquad y(0) = -9, \;\; y'(0) = 0$$

de 0 a 10 con el método RK adaptativo y gráfica los resultados.

Solución



Los resultados coinciden con la solución analítica. Las gráficas que se muestran y y para y' son del cuarto paso de integración.

Nótese elevada densidad de puntos cerca de $x = 0$ donde y' cambia muy rápido. Conforme la curva de y' se suaviza, la distancia entre los puntos se incrementa.

Contenido

Problemas con valores en la frontera y valores propios

Otra tipo de problemas de la física requiere la solución de ecuaciones diferenciales con valores de las magnitudes físicas o sus derivadas en las fronteras de una región.

Problemas con valores en la frontera y valores propios

Otra tipo de problemas de la física requiere la solución de ecuaciones diferenciales con valores de las magnitudes físicas o sus derivadas en las fronteras de una región.

Por ejemplo:

- La solución de la ecuación de Poisson con una distribución de carga dada y valores conocidos de potencial electrostático en la frontera.
- La ecuación de Schrödinger estacionaria con un potencial dado y condiciones de frontera.

Un problema de típico de valores en la frontera en física, por lo general se presenta en forma de una ecuación diferencial de segundo orden:

$$u'' = f(u, u'; x) \tag{1}$$

donde u es una función de x; u' y u'' son las derivadas de primer y segundo orden de u con respecto a x, $f(u, u'; x)$ es una función de u, u' y x. Tanto u o u' están dadas como puntos en la frontera.

Considera que sin pérdida de generalidad, siempre podemos elegir un sistema coordenado tal que las fronteras del sistema sean $x = 0$ y $x = 1$, siempre y cuando el sistema sea finito.

Por ejemplo, para un problema dado si el sistema tiene las fronteras en $x = x_1$ y $x = x_2$, siempre podemos hacer $x' = 0$ y $x' = 1$ con una transformación

$$x' = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (2)$$

Para problemas de una dimensión, tenemos un total de cuatro tipo de condiciones de frontera:

1. $u(0) = u_0$ y $u(1) = u_1$
2. $u(0) = u_0$ y $u'(1) = v_1$
3. $u'(0) = v_0$ y $u(1) = u_1$
4. $u'(0) = v_0$ y $u'(1) = v_1$

Un problema de valores en la frontera es más difícil de resolver que un problema de valores iniciales.

Si queremos resolver un problema de valores iniciales del tipo de la ecuación (1), donde re-emplazamos x por t y las condiciones iniciales $u(0) = u_0$ y $u'(0) = v_0$, podemos transformar la ED en un conjunto de dos EDO-1, como lo hemos venido haciendo.

Sin embargo, para el problema de valores en la frontera (VEF), sólo conocemos $u(0)$ o $u'(0)$, que no es lo suficiente para utilizar alguno de los algoritmos que conocemos para las EDO-1 de valores iniciales (Taylor, Euler, RK4)

Contenido

Problemas de valores propios

Los problemas típicos de valores propios son aún más complicados, ya que al menos un parámetro más, el *valor propio*, está involucrado en la ecuación, por ejemplo:

$$u'' = f(u, u'; x; \lambda) \tag{3}$$

junto con un conjunto de condiciones de frontera, definen un problema de valores propios.

El valor propio λ(también llamado *eigenvalor*), puede tener sólo algunos valores determinados con el fin de proporcionar soluciones aceptables de la ecuación, con las condiciones de frontera establecidas.

Ejemplo

Consideremos las vibraciones longitudinales a lo largo de una cuerda elástica, la ecuación que describe la solución estacionaria de las ondas elásticas es

$$u''(x) = -k^2 u(x) \tag{4}$$

donde $u(x)$ es el desplazamiento sobre el punto de equilibrio x y los valores permitidos de k^2 son los valores propios del problema.

El vector de onda k en la ecuación, está relacionado con la velocidad de fase c de la onda a lo largo de la cuerda, y la frecuencia angular ω permitida, por la relación

$$\omega = ck \tag{5}$$

Si los extremos de la cuerda están fijos ($x = 0$ y $x = 1$), las condiciones de frontera son por tanto: $u(0) = u(1) = 0$. Si un extremo de la cuerda ($x = 0$) está fijo y el otro libre ($x = 1$), las condiciones de frontera ahora son $u(0) = 0$ y $u'(0) = 1$. Para este problema, podemos obtener una solución analítica.

Por ejemplo, si los extremos de la cuerda están fijos, las funciones propias

$$u_l(x) = \sqrt{2} \sin k_l x \tag{6}$$

son las posibles soluciones de la ED.

Si los extremos de la cuerda están fijos ($x = 0$ y $x = 1$), las condiciones de frontera son por tanto: $u(0) = u(1) = 0$. Si un extremo de la cuerda ($x = 0$) está fijo y el otro libre ($x = 1$), las condiciones de frontera ahora son $u(0) = 0$ y $u'(0) = 1$. Para este problema, podemos obtener una solución analítica.

Por ejemplo, si los extremos de la cuerda están fijos, las funciones propias

$$u_l(x) = \sqrt{2}\sin k_l x \tag{6}$$

son las posibles soluciones de la ED.

Los valores propios están dados por

$$k_l^2 = (l\pi)^2 \tag{7}$$

con $l = 1, 2, \ldots, \infty$.

La solución completa de las ondas a lo largo de la cuerda elástica están dadas por una combinación lineal de las funciones propias con las soluciones de valores iniciales, en este caso

$$u(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty} (a_l \sin \omega_l t + b_i \cos \omega_l t) u_l(x) \qquad (8)$$

donde $\omega_l = ck_l$, a_l y b_l son los coeficientes determinados por las condiciones iniciales.

Contenido

Método de disparo

Un método sencillo para resolver problemas de ED-CVF (ecuación 1) y los problemas de valores propios (ecuación 3), es el llamado *método de disparo*.

Veamos cómo funciona para problemas CVF y luego, generalizar para problemas de valores propios.

Como hemos hecho en el caso de tener un problema de una ED de orden 2, hacemos un cambio de variable, para dejar un sistema de EDO-1, haciendo $y_1 = u$ y $y_2 = u'$, por tanto

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 \tag{9}$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f(y_1, y_2; x) \tag{10}$$

suponiendo las siguientes CVF $u(0) = u_0$ y $u(1) = u_1$. Para otro tipo de problemas con otras CVF, se pueden resolver de manera similar.

El punto importante es hacer que el problema se parezca a un problema de valores iniciales, utilizando un parámetro que se ajuste, por lo que la solución se obtiene al variar el parámetro.

Como $u(0)$ ya está dado, podemos hacer una estimación para la derivada de primer orden en $x = 0$, por ejemplo, $u'(0) = \alpha$. Donde α es el parámetro que estará variando.

El punto importante es hacer que el problema se parezca a un problema de valores iniciales, utilizando un parámetro que se ajuste, por lo que la solución se obtiene al variar el parámetro.

Como $u(0)$ ya está dado, podemos hacer una estimación para la derivada de primer orden en $x = 0$, por ejemplo, $u'(0) = \alpha$. Donde α es el parámetro que estará variando.

Para un valor específico de α, podemos integrar la ecuación para $x = 1$ con alguna de las técnicas que hemos visto para EDO-1.

Considerando que la elección inicial de α difícilmente pudiese ser la derivada en $x = 0$, el valor de la función $u_\alpha(1)$, resultante de la integración con $u'(0) = \alpha$ para $x = 1$, podría no ser el mismo que u_1.

La idea del método de disparo es utilizar alguno de los algoritmos de búsqueda de la raíz para encontrar la α apropiada, que asegure $f(\alpha) = u_\alpha(1) - u_1 = 0$, con una tolerancia δ dada.

Ejemplo

Hagamos un ejercicio para revisar el método. Sea la siguiente EDO-2

$$u'' = -\frac{\pi^2}{4}(u + 1) \tag{11}$$

y las CVF son $u(0) = 0$ y $u(1) = 1$.

Ejemplo

Hagamos un ejercicio para revisar el método. Sea la siguiente EDO-2

$$u'' = -\frac{\pi^2}{4}(u+1) \tag{11}$$

y las CVF son $u(0) = 0$ y $u(1) = 1$.

Definimos $y_1 = u$ y $y_2 = u'$, por lo que tenemos ahora

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 \tag{12}$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{\pi^2}{4}(y_1+1) \tag{13}$$

Asumimos que la ecuación tiene los valores iniciales $y_1(0) = 0$ y $y_2(0) = \alpha$.

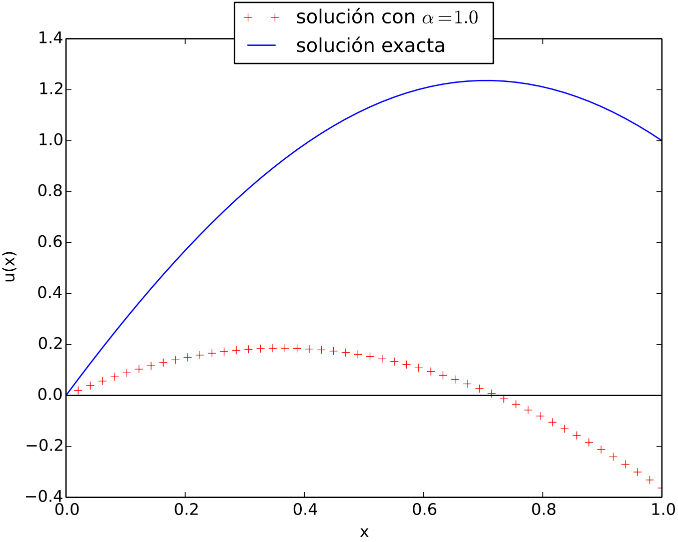
Asumimos que la ecuación tiene los valores iniciales $y_1(0) = 0$ y $y_2(0) = \alpha$.

El valor de α tendrá que ajustarse para que $f(\alpha) = u_\alpha(1) - 1 = 0$.

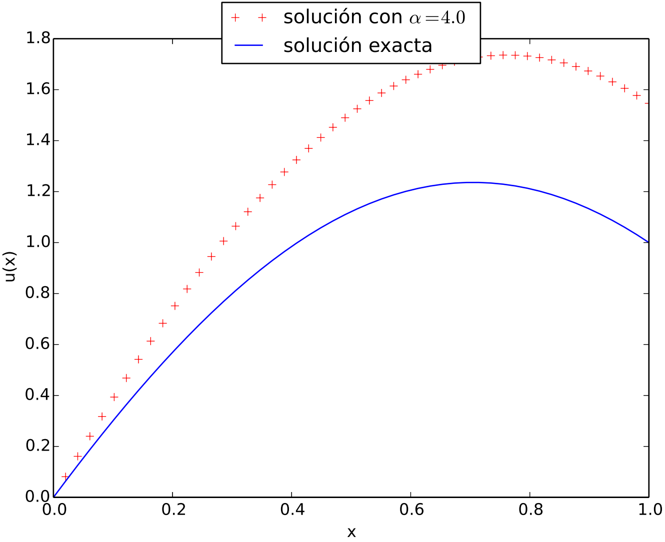
Podemos combinar el método de la secante y resolver el sistema de EDO-1 como lo hemos venido haciendo.

Resuelve y grafica el problema usando primero un valor de $\alpha = 1.0$ y luego con $\alpha = 4.0$.

Solución con $y0 = array([0.0, \alpha = 1.0])$



Solución con $y0 = array([0.0, \alpha = 4.0])$



¿Qué hacemos?

El siguiente paso es encontrar el valor de la raíz en donde $f(\alpha) = u_\alpha(1) - 1 = 0$.

Revisando los valores que obtenemos para α:

$u_{1.0}(1) = -0.3633$
$u_{4.0}(1) = 1.5464$

Por lo que necesariamente hay una raíz que debemos de utilizar para sustituirla en nuestro problema.

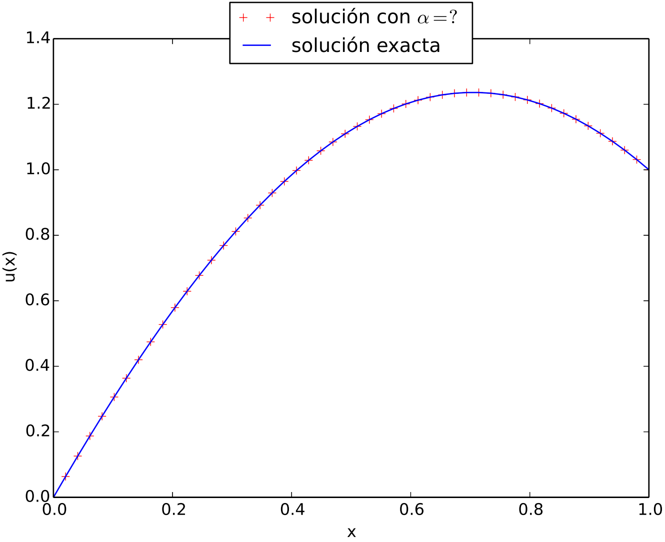
El problema CVF se resuelve de manera exacta, la solución analítica es:

$$u(x) = \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right) - 1 \qquad (14)$$

Pasos a realizar

1. Construir una tabla de valores α y $f(\alpha) = u_\alpha(1) - 1$.
2. Usando el método de la secante, obtener el valor de la raíz tal que $f(\alpha) = 0$. El método de la secante que construimos en el Tema 2, requiere de dos valores iniciales, para esa función, dabamos una función f que python evalúa al momento, ahora nuestra función es una tabla de pares ordenados α y $f(\alpha)$, por lo que hay que ajustar nuestro código para que reciba esos valores y nos devuelva la raíz.
3. El valor de la raíz, lo usamos como argumento en $y0 = [0.0, \alpha]$ y resolvemos la ecuación diferencial.

Solución con $y0 = array([0.0, \alpha = ??])$



Problemas con otros tipos de CVF se pueden resolver de manera similar. Por ejemplo:

si $u'(0) = v_0$ y $u(1) = u_1$ están dados, podemos hacer una estimación de $u(0) = \alpha$ e integrar el conjunto de ecuaciones de y_1 y y_2 en $x = 1$. La raíz a buscar está en $f(\alpha) = u_\alpha(1) - u_1 = 0$. Aquí el valor de $u_\alpha(1)$ es el resultado de la ecuación con $u(0) = \alpha$.

Cuando se aplica el método de disparo para los problemas de valores propios, el parámetro a ajustar no es mayor que el valor propio del problema.

Por ejemplo, si están dados $u(0) = u_0$ y $u(1) = u_1$, podemos integrar la ecuación con $u'(0) = \alpha$, que es un valor pequeño. Luego, buscamos la raíz de $f(\lambda) = u_\lambda(1) - u_1 = 0$ variando λ.

Cuando $f(\lambda) = 0$ se satisface, obtenemos un valor propio aproximado λ y el correspondiente estado propio de la solución normalizada de $u_\lambda(x)$.