Examen - Ecuaciones diferenciales ordinarias

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

Fecha de entrega: Jueves 17 de noviembre de 2011.

1. En la figura (1) se muestra un sistema de tres masas. Los desplazamientos de estas tres masas satisfacen las ecuaciones dadas por

$$
\begin{aligned}
M_1 y_1'' + B_1 y_1' + K_1 y_1 - B_1 y_2' - K_2 y_2 &= F_1(t) \\
-B_1 y_1' - K_1 y_1 + M_2 y_2'' + B_1 y_2' + (K_1 + K_2) y_2 - K_2 y_3 &= 0 \\
-K_2 y_2 + M_3 y_3'' + B_2 y_3' + (K_2 + K_3) y_3 &= F_3(t)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Las constantes y condiciones iniciales son

$K_1 = K_2 = K_3 = 1$	(constantes de los resortes, kgm/s^2)
$M_1 = M_2 = M_3 = 1$	(masa, kg)
$F_1(t) = 1, F_3(t) = 0$	(fuerza, N)
$B_1 = B_2 = 0{,}1$	(coeficientes de amortiguamiento, kg/s)
$y_1(0) = y_1'(0) = y_2(0) = y_2'(0) = y_3(0) = y_3'(0) = 0$	(condiciones iniciales)

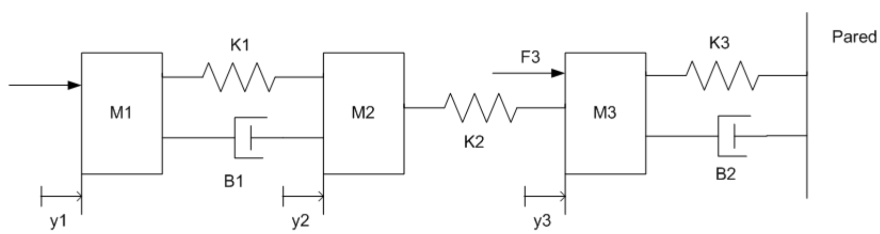

Figura 1: Sistema de masas-resortes

Resuelve y grafica las ecuaciones anteriores mediante RK4, para $0 \leq t \leq 30$ segundos y $h = 0{,}1$
Hint: Definiendo

$$y_4 = y_1', \qquad y_5 = y_2', \qquad y_6 = y_3'$$

La ecuación (1) se escribe como un conjunto de seis EDO de primer orden, de la siguiente manera:

$$y_1' = y_4 \tag{2}$$
$$y_2' = y_5 \tag{3}$$
$$y_3' = y_6 \tag{4}$$
$$y_4' = \left[-B_1 y_4 - K_1 y_1 + B_1 y_5 + K_2 y_2 + F_1\right]/M_1 \tag{5}$$
$$y_5' = \left[B_1 y_4 + K_1 y_1 - B_1 y_5 - (K_1 + K_2) y_2 + K_2 y_3\right]/M_2 \tag{6}$$
$$y_6' = \left[K_2 y_2 - B_2 y_6 - (K_2 + K_3) y_3 + F_3\right]/M_3 \tag{7}$$

2. Se dispara un proyectil al aire con un ángulo de 45° con respecto al suelo, con $u = v = 150 m/s$, donde u y v son las velocidades horizontal y vertical, respectivamente. Las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$
\begin{aligned}
u' &= -cVu, \qquad u(0) = 150 m/s \\
v' &= -g - cVv, \qquad v(0) = 150 m/s
\end{aligned}
$$

donde u y v son funciones del tiempo, $u = u(t)$ $yv = v(t)$ y

$$
\begin{aligned}
V &= \sqrt{u^2 + v^2} \\
c &= 0{,}005 & \text{(coeficiente de arrastre)} \\
g &= 9{,}9 m/s^2
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones de movimiento se pueden resolver mediante alguno de los métodos de Runge-Kutta. La trayectoria del proyectil se puede determinar al integrar

$$x' = u \qquad \text{y} \qquad y' = v$$

o bien

$$
\begin{aligned}
x &= \int_0^t u(t')dt' \\
y &= \int_0^t v(t')dt'
\end{aligned}
$$

a) Escribe un programa en Fortran con el método RK2 que resuelva y grafique la trayectoria del proyectil.

b) Re-escribe el programa, ahora con el metodo RK3.