

## 7. Problemas de contorno para EDOs

Un problema de valores iniciales para una ecuación ordinaria con coeficientes continuos tenía solución única. En concreto, la solución de una ecuación lineal de segundo orden queda determinada fijando el valor de la solución y de su derivada en un punto dado. Las cosas cambian si imponemos las condiciones en los dos extremos de un intervalo  $[a,b]$ . Estos **problemas de contorno** presentan propiedades muy diferentes. Por ejemplo, un problema tan sencillo y regular como

$$\begin{aligned}y'' + y &= 0 \\ y(0) &= 0, y(\pi) = 0\end{aligned}$$

tiene infinitas soluciones:  $y = C \sin t$ , con  $C$  constante arbitraria.

Los problemas de contorno que aparecerán al utilizar el método de separación de variables del siguiente capítulo dependerán de un parámetro  $\lambda$ . Convendrá escribirlos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(py')' - qy + \lambda ry &= 0 \\ (P) \quad \alpha y(a) + \alpha' y'(a) &= 0 \\ \beta y(b) + \beta' y'(b) &= 0\end{aligned}$$

Ante un problema de este tipo nuestro objetivo será hallar los valores del parámetro  $\lambda$  para los que hay soluciones no triviales (**autovalores** de (P)) y esas soluciones no triviales correspondientes a cada  $\lambda$  (**autofunciones** de (P) asociadas a  $\lambda$ ). Observemos que  $y=0$  es siempre solución trivial de (P) y que, por la homogeneidad de la ecuación y de las condiciones de contorno, si  $y(t)$  es solución de (P) también lo es  $Cy(t)$  para cualquier  $C$ .

Comenzaremos en 7.1 estudiando varios ejemplos. Veremos que aparecen infinitos autovalores y que las autofunciones asociadas a  $\lambda$  distintos son ortogonales entre sí. En 7.2 precisaremos para qué tipo de problemas de contorno se mantienen esas propiedades. Serán los que se llaman **problemas de Sturm-Liouville**.

En la sección 7.3 veremos que cualquier función  $f$  continua y derivable a trozos se puede desarrollar en **serie de autofunciones** de un problema de Sturm-Liouville, lo que será muy útil en la resolución de EDPs. Este resultado generaliza los desarrollos de Fourier en series de senos y cosenos, cuyas propiedades básicas también veremos. Aunque la convergencia natural de estas series sea la de  $L^2$ , nosotros nos limitaremos a hablar de convergencia puntual y uniforme.

Por último, en 7.4, estudiaremos problemas en que la ecuación (o alguna condición de contorno) sea no homogénea. Para ellos, ni  $y=0$  es solución, ni lo son los múltiplos de una solución dada. La existencia de soluciones dependerá de si existen o no soluciones no triviales del homogéneo. Cuando haya solución única daremos una fórmula para las soluciones del no homogéneo en términos de la llamada **función de Green**.

## 7.1. Algunos ejemplos

Veamos unos ejemplos de problemas de contorno homogéneos 'buenos' (1, 2 y 3) y 'malos' (el 4). El 5 es problema no homogéneo.

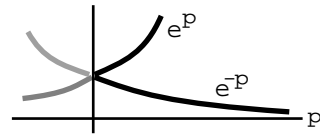
Ejemplo 1.  $(P_1) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0)=0, y(1)=0 \end{cases} \quad \mu^2 + \lambda = 0 \rightarrow \mu = \pm\sqrt{-\lambda}$

Busquemos sus autovalores y autofunciones.

$\lambda < 0$ : la solución general de la ecuación es  $y = c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt}$ ,  $p = \sqrt{-\lambda} > 0$

Imponiendo las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y(1) = c_1 e^p + c_2 e^{-p} = 0 \end{cases} \rightarrow c_2 = -c_1 \rightarrow c_1 [e^p - e^{-p}] = 0$$



Por tanto  $c_1 = c_2 = 0$  (pues  $e^p - e^{-p} \neq 0$  si  $p > 0$ ). Ningún  $\lambda < 0$  es autovalor.

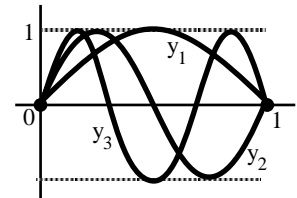
$\lambda = 0$ :  $y = c_1 + c_2 t \rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y(1) = c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0$ .  $\lambda = 0$  tampoco es autovalor.

$\lambda > 0$ :  $y = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt$ ,  $w = \sqrt{\lambda} > 0 \rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y(1) = c_2 \sin w = 0 \end{cases}$

Para tener solución no trivial debe ser  $c_2 \neq 0$ .

Por tanto,  $w = \sqrt{\lambda} = n\pi$ ,  $\lambda_n = n^2 \pi^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Para cada uno de estos  $\lambda_n$  hay soluciones no triviales  $y_n = c_2 \sin n\pi t$ .



Observemos que se cumple:  $\int_0^1 \sin n\pi t \sin m\pi t dt = 0$ , si  $m \neq n$ .

Resumiendo:  $(P_1)$  tiene una sucesión infinita de autovalores  $\lambda_n = n^2 \pi^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$  Para cada  $\lambda_n$  las autofunciones asociadas forman un espacio vectorial de dimensión 1:  $y_n = \{\sin n\pi t\}$ . La  $n$ -sima autofunción posee  $n-1$  ceros en  $(0,1)$ . Las autofunciones son ortogonales en  $[0,1]$

[respecto del producto escalar  $(u,v) = \int_0^1 uv dt$ ].

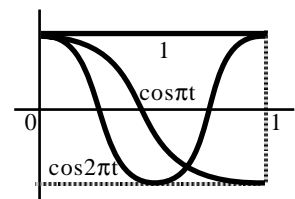
Ejemplo 2.  $(P_2) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0)=0, y'(1)=0 \end{cases}$

$\lambda < 0 \rightarrow \begin{cases} y'(0) = p[c_1 - c_2] = 0 \\ y'(1) = p[c_1 e^p - c_2 e^{-p}] = 0 \end{cases} \rightarrow c_2 = -c_1 \rightarrow c_1 [e^p - e^{-p}] = 0 \rightarrow y \equiv 0$ .

$\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} y'(0) = c_2 = 0 \\ y'(1) = c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = 0$  autovalor con autofunción  $y_0 = c_1$ .

$\lambda > 0 \rightarrow \begin{cases} y'(0) = wc_2 = 0 \\ y'(1) = wc_1 \sin w = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2 \pi^2$  con  $y_n = c_1 \cos n\pi t$ .

Los  $\lambda_n = n^2 \pi^2$  y las  $y_n = \{\cos n\pi t\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  tienen las mismas propiedades subrayadas del ejemplo anterior.



Ejemplo 3.  $(P_3) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1), y'(0) = y'(1) \end{cases}$

$\lambda < 0 \rightarrow \begin{cases} c_1[1 - e^p] + c_2[1 - e^{-p}] = 0 \\ c_1[1 - e^p] - c_2[1 - e^{-p}] = 0 \end{cases}$  Como el determinante  $\begin{vmatrix} 1 - e^p & 1 - e^{-p} \\ 1 - e^p & e^{-p} - 1 \end{vmatrix} \neq 0$ , el sistema sólo tiene la solución trivial  $c_1 = c_2 = 0$ . No autovalores.

$\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} c_1 = c_1 + c_2 \\ c_2 = c_2 \end{cases}$  se satisface para  $c_2 = 0$  y cualquier  $c_1$ :  $y_0 = c_1$ .

$\lambda > 0 \rightarrow \begin{cases} c_1[1 - \cos w] - c_2[\sin w] = 0 \\ c_1[\sin w] + c_2[1 - \cos w] = 0 \end{cases}; \begin{vmatrix} 1 - \cos w & -\sin w \\ \sin w & 1 - \cos w \end{vmatrix} = 2(1 - \cos w) = 0 \rightarrow$   
 $\lambda_n = 4n^2\pi^2, n = 1, 2, \dots$

Para esos  $\lambda$  las condiciones de contorno se satisfacen para cualquier  $c_1$  y cualquier  $c_2$ . Autofunciones:  $y_n = c_1 \cos 2n\pi t + c_2 \sin 2n\pi t$ .

Las propiedades de  $(P_3)$  son, pues, ligeramente diferentes:

Hay una sucesión infinita de autovalores  $\lambda_n = 4n^2\pi^2, n = 0, 1, 2, \dots$ . Ahora las autofunciones  $y_0 = \{1\}, y_n = \{\cos 2n\pi t, \sin 2n\pi t\}$  forman, si  $n > 0$ , un espacio vectorial de dimensión 2, pero sigue siendo cierto que las autofunciones asociadas a distintos autovalores son ortogonales.

Ejemplo 4.  $(P_4) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(0), y(1) = -y'(1) \end{cases}$

Operando como en los otros ejemplos es fácil ver que las cosas son muy diferentes: todo  $\lambda$  es autovalor y en general no es cierto que las autofunciones asociadas a  $\lambda$  distintos sean ortogonales.

Ejemplo 5.  $(P_5) \begin{cases} y'' + \lambda y = f(t) \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases}$  Lo estudiamos sólo si  $\lambda > 0$ .

La fórmula de variación de las constantes da la solución general:

$$y = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt + \frac{1}{w} \int_0^t f(s) \sin w(t-s) ds, w = \sqrt{\lambda}$$

Imponiendo las condiciones de contorno se obtiene:

$$c_1 = 0, c_2 \sin w + \frac{1}{w} \int_0^1 f(s) \sin w(1-s) ds = 0$$

Podemos despejar  $c_2$  de forma única si  $\sin w \neq 0$ , es decir, si  $\lambda \neq n^2\pi^2$ . Si  $\lambda = n^2\pi^2$ , sólo hay solución si además se cumple:

$$\int_0^1 f(s) \sin n\pi(1-s) ds = [-1]^n \int_0^1 f(s) \sin n\pi s ds = 0$$

En caso contrario las condiciones no se cumplen para ningún  $c_2$ .

Si  $\lambda$  no es autovalor del problema homogéneo asociado  $(P_1)$ , el problema no homogéneo  $(P_5)$  tiene solución única. Si  $\lambda$  es autovalor, el no homogéneo puede tener infinitas soluciones o no tener ninguna.

[según sea  $\int_0^1 f \sin n\pi s$  igual o distinto de cero]

## 7.2. Problemas de Sturm-Liouville homogéneos

Generalicemos los ejemplos de 7.1. Sea la ecuación lineal de segundo orden dependiente de un parámetro real  $\lambda$ :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y + \lambda c(t)y = 0, \text{ con } a, b, c \in C[a, b], c(t) > 0 \text{ en } [a, b]$$

Conviene escribirla de otra forma: multiplicando por  $e^{\int a}$  se tiene

$$[e^{\int a} y']' + b e^{\int a} y + \lambda c e^{\int a} y = 0, \text{ con } p \in C^1, q, r \in C \text{ y } p, r > 0$$

Las condiciones que imponemos son o separadas (si cada una afecta a los valores de  $y$  o de  $y'$  en uno de los extremos del intervalo) o periódicas (ligadas a la periodicidad de las soluciones):

Se llaman problemas de Sturm-Liouville regulares a cualquiera de los dos tipos siguientes:

$$(P_s) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = 0 \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0, \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases} \quad (\text{condiciones separadas})$$

$$(P_p) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = 0, p(a) = p(b) \\ y(a) = y(b), y'(a) = y'(b) \end{cases} \quad (\text{condiciones periódicas})$$

donde  $p \in C^1[a, b], q, r \in C[a, b], p, r > 0$  en  $[a, b], |\alpha| + |\alpha'|, |\beta| + |\beta'| \neq 0$

Los ejemplos 1 y 2 de 7.1 eran  $(P_s)$  y el 3 era  $(P_p)$ . El siguiente teorema generaliza sus propiedades a estos problemas de S-L que, en general, ya no serán resolubles:

Teor 1. Los autovalores de un problema de Sturm-Liouville regular forman una sucesión infinita  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$  que tiende a  $\infty$ . Las autofunciones asociadas a autovalores diferentes son ortogonales en  $[a, b]$  respecto al peso  $r$ , es decir:

$$\int_a^b r y_n y_m dt = 0, \text{ si } y_n, y_m \text{ están asociadas a } \lambda_n \neq \lambda_m.$$

Las autofunciones  $\{y_n\}$  de  $(P_s)$  son un espacio vectorial de dimensión 1 y cada  $y_n$  posee exactamente  $n-1$  ceros en  $(a, b)$ .

La primera afirmación y la relativa a los ceros son difíciles de demostrar. Probamos las otras dos. Sean  $y_n, y_m$  asociadas a  $\lambda_n \neq \lambda_m$ :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n r y_n &= -[p y_n']' + q y_n \\ \lambda_m r y_m &= -[p y_m']' + q y_m \end{aligned} \right\} \rightarrow (\text{multiplicando por } y_m \text{ e } y_n, \text{ restando e integrando})$$

$$[\lambda_n - \lambda_m] \int_a^b r y_n y_m dt = \int_a^b [y_n (p y_m')' - y_m (p y_n')'] dt = (\text{partes}) = [p (y_n y_m' - y_m y_n')]_a^b$$

Imponiendo las condiciones de contorno, es fácil comprobar para  $(P_s)$  que el wronskiano  $|W|(y_n, y_m)$  se anula en  $a$  y en  $b$ . Para  $(P_p)$  es claro que  $|W|(b) = |W|(a)$ . Por tanto, si  $\lambda_n \neq \lambda_m$  se tiene la ortogonalidad. Si  $y_n, y_n^*$  están asociadas a  $\lambda_n$ , se deduce para  $(P_s)$  que  $|W|(y_n, y_n^*) = 0$  en  $a$  (o en  $b$ ), con lo que las dos soluciones dependen linealmente.

[Los problemas de Sturm-Liouville pueden generalizarse: en la demostración anterior se aprecia que lo esencial para la existencia de ortogonalidad es el hecho de que  $[p|W|(y_n, y_m)]_a^b = 0$ ; esto sucede para otros tipos de condiciones de contorno además de las separadas y las periódicas (y para otras muchas no sucede); se llaman problemas autoadjuntos aquellos tales que  $[p|W|(u, v)]_a^b = 0$  para todo par de funciones  $u, v$  que satisfacen sus condiciones de contorno; las autofunciones de estos problemas más generales son, pues, ortogonales; el término 'autoadjunto' responde al hecho de que si llamamos  $Ly = [py']' - qy$  y  $(u, v) = \int_a^b uv dt$ , entonces para todo par de funciones que cumplen las condiciones de contorno se tiene que  $(Lu, v) = (u, Lv)$ : el operador  $L$  es autoadjunto].

En los ejemplos de 7.1 todos los autovalores eran  $\geq 0$ . Esto no es cierto en general, pero el siguiente teorema nos da condiciones suficientes para que esto suceda (lo que nos ahorrará cálculos):

Teor 2. Si  $\alpha, \alpha' \leq 0$ ,  $\beta, \beta' \geq 0$  y  $q(t) \geq 0$  para  $t \in [a, b]$  entonces todos los autovalores de  $(P_s)$  son mayores o iguales que 0. En particular, si  $\alpha' = \beta' = 0$  [ $y(a) = y(b) = 0$ ] son estrictamente positivos.

[en el ejemplo 1 de 7.1 nos ahorraría analizar los  $\lambda \leq 0$ , y en el 2 los  $\lambda < 0$ ]  
Si  $y$  es la autofunción asociada a  $\lambda$  y  $\alpha, \alpha' \leq 0$ ,  $\beta, \beta' \geq 0$  entonces:

$$\lambda \int_a^b r y^2 dt = \int_a^b [-y(py')' + qy^2] dt = \int_a^b [p(y')^2 + qy^2] dt - [pyy']_a^b \geq 0$$

pues

$$\int_a^b [p(y')^2 + qy^2] \geq 0 \quad (p, q \geq 0), \quad -[pyy']_a^b = p(b) \frac{\beta}{\beta'} [y(b)]^2 - p(a) \frac{\alpha}{\alpha'} [y(a)]^2 \geq 0 \quad \text{si } \alpha', \beta' \neq 0, \\ [pyy'](a) = 0 \quad \text{si } \alpha' = 0 \quad \text{y} \quad [pyy'](b) = 0 \quad \text{si } \beta' = 0.$$

Como  $r > 0$  es  $\int_a^b r y^2 > 0$  y por tanto  $\lambda \geq 0$ .

Si  $y(a) = y(b) = 0$ ,  $y = \text{cte}$  no es autofunción  $\Rightarrow y' \equiv 0 \Rightarrow \int_a^b p(y')^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0$ .

Ejemplo 1.  $(P_1) \begin{cases} y'' - 2y' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0 \end{cases} \rightarrow [e^{-2t} y']' + \lambda e^{-2t} y = 0$

[El teor. 2 nos asegura que los  $\lambda \geq 0$ , pero aquí es poco útil, pues no nos ahora ningún caso, ya que  $\mu^2 - 2\mu + \lambda = 0 \rightarrow \mu = 1 \pm \sqrt{1 - \lambda}$  y hay que mirar  $\lambda < = > 1$ ]  
 $\lambda < 1$ :  $y = c_1 e^{(1+p)t} + c_2 e^{(1-p)t}$ ,  $y = c_1 (1+p) e^{(1+p)t} + c_2 (1-p) e^{(1-p)t}$ ,  $p = \sqrt{1 - \lambda}$

$$\rightarrow \begin{cases} c_1(1+p) + c_2(1-p) = 0 \\ c_1(1+p)e^{1+p} + c_2(1-p)e^{1-p} = 0 \end{cases} \rightarrow c_2(1-p)e[e^{-p} - e^p] = 0 \rightarrow p = 1 \quad (\lambda = 0), \quad y_0 = \{1\}$$

$$\lambda = 1: y = [c_1 + c_2 t] e^t \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0 \quad . \quad \lambda = 1 \text{ no autovalor.}$$

$$\lambda > 1: y = [c_1 \cos wt + c_2 \sen wt] e^t, \quad w = \sqrt{\lambda - 1} \rightarrow y'(0) = c_1 + c_2 w = 0 \rightarrow \\ y'(1) = -c_2 \lambda e \sen w = 0 \rightarrow \lambda_n = 1 + n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad y_n = \{e^t [\sen n \pi t - n \pi \cos n \pi t]\}$$

Las autofunciones son ortogonales respecto al peso  $r(t) = e^{-2t}$ :

$$\int_0^1 e^{-t} [\sen n \pi t - n \pi \cos n \pi t] [\sen m \pi t - m \pi \cos m \pi t] dt = 0 \quad (m \neq n)$$

La determinación exacta de los autovalores sólo será posible (y no siempre) si tenemos resuelta la ecuación. Sin embargo, se puede obtener información sobre su localización comparando el problema con otros resolubles. Por ejemplo, el siguiente teorema (que no demostramos) generaliza lo que ocurre con el problema:

$$\begin{cases} py'' - qy + \lambda ry = 0 \\ y(0)=0, y(1)=0 \end{cases}, p, q, r \text{ constantes} \rightarrow \lambda_n = \frac{pn^2\pi^2 + q}{r}$$

Teor 3. Aumentando p o q o disminuyendo r aumentan todos los autovalores positivos del problema  $\begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = 0 \\ y(a)=0, y(b)=0 \end{cases}$ .

Ejemplo 2.  $(P_2) \begin{cases} [(1+t^2)y']' + ty + \lambda(1+t^2)y = 0 \\ y(0)=0, y(1)=0 \end{cases}$   $p=r=1+t^2, q=-t$ .

Comparando con las ecuaciones:  $y'' + y + 2\lambda y = 0$ ,  $2y'' + \lambda y = 0$ , se tiene que sus autovalores satisfacen:  $\frac{1}{2} [n^2\pi^2 - 1] < \lambda_n < 2n^2\pi^2$ .

En el estudio de algunos problemas de EDPs aparecen problemas singulares de Sturm-Liouville que no reúnen todas las condiciones de los regulares: p o r se anulan o son discontinuas en algún extremo del intervalo, el intervalo es infinito... Vamos a resolver tres de ellos (el 3 surge, por ejemplo, tratando ondas o calor en el espacio, el 4 si esas ecuaciones son en el plano y el 5 para Laplace en la esfera), en los que en uno o los dos extremos es p=0. En esos extremos las condiciones de contorno de un  $(P_s)$  son demasiado fuertes para tener autovalores y autofunciones como las de los regulares y en vez de ellas se pide acotación (que basta para garantizar la ortogonalidad, o sea, que  $[p(y_n y_m' - y_m y_n')]_a^b = 0$ ).

Ejemplo 3.  $(P_3) \begin{cases} ty'' + 2y' + \lambda ty = 0 \\ y \text{ acotada en } t=0, y(1)=0 \end{cases}$   $\rightarrow [t^2 y']' + \lambda t^2 y = 0$ .

Haciendo el cambio  $x=ty$  la ecuación se convierte en  $x'' + \lambda x = 0 \rightarrow$  la solución general de la inicial para  $\lambda > 0$  es  $y = c_1 \frac{\cos wt}{t} + c_2 \frac{\sen wt}{t}$ . y acotada  $\rightarrow c_1 = 0$ ;  $y(1)=0 \rightarrow \sen w = 0 \rightarrow \lambda_n = n^2\pi^2$ ,  $n=1, 2, \dots$ ,  $y_n = \left\{ \frac{\sen n\pi t}{t} \right\}$

[claramente ortogonales respecto al peso  $r(t)=t^2$ ]

Es fácil ver directamente que ningún  $\lambda \leq 0$  es autovalor o podemos evitar las cuentas ya que la demostración del teorema 2 es válida también para este tipo de problemas singulares, con lo que  $\lambda > 0$ .

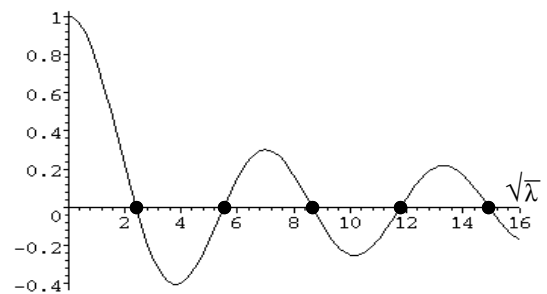
[Si hubiésemos impuesto  $y(0)=y(1)=0$  la única solución sería  $y \equiv 0 \forall \lambda$ : las condiciones habrían sido demasiado fuertes]

Ejemplo 4.  $(P_4) \begin{cases} ty'' + y' + \lambda ty = 0 \\ y \text{ acotada en } t=0, y(1)=0 \end{cases} \rightarrow [ty']' + \lambda ty = 0.$

Haciendo el cambio de variable independiente  $s = \sqrt{\lambda} t$  (para  $\lambda > 0$ ), la ecuación se convierte en la de Bessel de orden 0:

$$s \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dy}{ds} + sy = 0 \rightarrow y = c_1 J_0(s) + c_2 K_0(s) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda} t) + c_2 K_0(\sqrt{\lambda} t)$$

La primera condición de contorno impone que  $c_2 = 0$  ( $K_0$  no acotada en  $t=0$ ). De la segunda obtenemos  $c_1 J_0(\sqrt{\lambda}) = 0$ . Así, los autovalores son los  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$  cuyas raíces son los infinitos ceros de  $J_0$  [sabemos que están tabulados y que para  $n$  grande es  $\sqrt{\lambda_n} \approx (n-1/4)\pi$ ]. Las autofunciones asociadas son  $y_n = \{J_0(\sqrt{\lambda_n} t)\}$ , que son ortogonales respecto al peso  $t$ .



Ejemplo 5.  $(P_5) \begin{cases} [(1-t^2)y']' + \lambda y = 0 \\ y \text{ acotada en } t=\pm 1 \end{cases}$

La ecuación es la de Legendre con  $\lambda = p(p+1)$ .

Como se sabe, sus únicas soluciones acotadas en 1 y -1 son los polinomios de Legendre  $P_n$  que aparecen cuando  $p=n$ ,  $n=0,1,2,\dots$

Los autovalores son  $\lambda_n = n(n+1)$ ,  $n=0,1,2,\dots$  y las autofunciones son los  $P_n$ , que cumplen como sabíamos  $\int_{-1}^1 P_n P_m dt = 0$  si  $m \neq n$  [ $r(t)=1$ ].

### 7.3. Series de Fourier

Consideremos el problema de Sturm-Liouville separado regular:

$$(P_s) \quad \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = 0 \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0, \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$$

y sean  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  sus autofunciones asociadas a los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ . La importante propiedad que estudiaremos en esta sección es que cualquier función  $f$  suficientemente regular en  $[a, b]$  (luego precisaremos esta regularidad) puede ser desarrollada en serie de dichas autofunciones, es decir:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(t)$$

Supongamos que este desarrollo es válido y que la serie puede ser integrada término a término. Entonces, por ser las  $y_n$  ortogonales:

$$\int_a^b r f y_m dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b r y_n y_m dt = c_m \int_a^b r y_m y_m dt$$

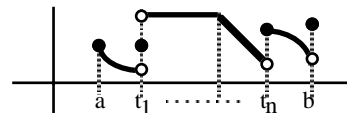
Es decir, si representamos el producto escalar respecto al peso  $r$ :

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b r u v dt \quad \text{debe ser} \quad c_n = \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} \quad n=1, 2, \dots$$

El problema (nada elemental) reside en precisar para qué funciones  $f$  la serie de coeficientes así definidos (serie de Fourier de  $f$ ) converge realmente hacia la función en el intervalo  $[a, b]$ . Aunque se pueden exigir condiciones más débiles a  $f$  nosotros pediremos que  $f$  sea  $C^1$  a trozos, condición que será satisfecha por la gran mayoría de las funciones que aparecerán en problemas prácticos.

[Recordamos que  $f(t)$  es  $C^1$  a trozos en  $[a, b]$  si podemos dividir el intervalo en subintervalos  $[a, b] = [a, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_n, b]$  de modo que:

- i.  $f$  y  $f'$  son continuas en cada  $(t_k, t_{k+1})$ ,
- ii. los límites laterales de  $f$  y  $f'$  en cada  $t_k$  existen y son finitos ]



Teor 1. Si  $f$  es  $C^1$  a trozos en  $[a, b]$  entonces su serie de Fourier:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} y_n(t)$$

converge hacia  $f(t)$  en los  $t \in (a, b)$  en que  $f$  es continua y hacia  $\frac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)]$  en los  $t \in (a, b)$  en que es discontinua.

[la demostración es difícil y no la hacemos]



Caso particular de estos desarrollos en serie de autofunciones son los desarrollos en series trigonométricas, que, porque son las que más a menudo nos aparecerán, estudiamos con más detalle.

Los autovalores y autofunciones del problema

$$(P_1) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$

son  $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ ,  $n=1,2,\dots$  e  $y_n = \left\{ \sin \frac{n\pi t}{L} \right\}$ .

La serie de Fourier en senos de una función dada  $f$  es entonces:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \quad , \quad \text{con} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt \quad , \quad n=1,2,\dots \quad [1]$$

Ya que el peso es  $r(t) \equiv 1$  y se tiene que  $\langle y_n, y_n \rangle = \int_0^L \left[ \sin \frac{n\pi t}{L} \right]^2 dt = \frac{L}{2}$ .

[Hemos escrito impropriamente  $f = \Sigma$ ; sabemos que la igualdad sólo se da en los puntos de  $(0,L)$  en que  $f$  es continua; en  $0$  y  $L$  aún no sabemos]

Para  $(P_2) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{cases}$  son  $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ ,  $y_n = \left\{ \cos \frac{n\pi t}{L} \right\}$ ,  $n=0,1,\dots$  [ $y_0 = \{1\}$ ]

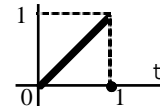
Por tanto, la serie de Fourier en cosenos de una  $f$  dada es:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} \quad , \quad \text{con} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad , \quad n=0,1,2,\dots \quad [2]$$

Pues  $\langle y_0, y_0 \rangle = \int_0^L 1^2 dt = L$  e  $\langle y_n, y_n \rangle = \int_0^L \left[ \cos \frac{n\pi t}{L} \right]^2 dt = \frac{L}{2}$ , si  $n \geq 1$ .

[escribimos  $a_0/2$  para que la fórmula del  $a_n$  valga también para  $a_0$ ]

Ejemplo 1. Sea  $f(t) = t, t \in [0,1]$ .



Halleemos sus series en senos y en cosenos:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^{n+1}}{n} \sin n\pi t \quad , \quad \text{pues} \quad b_n = 2 \int_0^1 t \sin n\pi t dt = -\frac{2}{n\pi} \cos n\pi \quad , \quad n=1,2,\dots$$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^{n-1}}{n^2} \cos n\pi t = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos (2m-1)\pi t}{[2m-1]^2}$$

ya que  $a_0 = 2 \int_0^1 t dt = 1$ ,  $a_n = 2 \int_0^1 t \cos n\pi t dt = \frac{2}{n^2 \pi^2} [\cos n\pi - 1]$ ,  $n=1,2,\dots$

Ambas series, según el teorema 1, convergen hacia  $f(t)$  para todo  $t \in (0,1)$ . Más adelante sabremos lo que ocurre en los extremos.

[Otras dos familias de autofunciones en las que hay que desarrollar funciones bastantes veces en situaciones reales son las de los siguientes problemas:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(L) = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \lambda_n = \frac{[2n-1]^2 \pi^2}{2^2 L^2}, \quad y_n = \left\{ \sin \frac{[2n-1]\pi t}{2L} \right\}, \quad \langle y_n, y_n \rangle = \frac{L}{2}, \quad n=1,2,\dots$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y(L) = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \lambda_n = \frac{[2n-1]^2 \pi^2}{2^2 L^2}, \quad y_n = \left\{ \cos \frac{[2n-1]\pi t}{2L} \right\}, \quad \langle y_n, y_n \rangle = \frac{L}{2}, \quad n=1,2,\dots \quad ]$$

La teoría de series de Fourier puede ser extendida para incluir autofunciones de problemas con condiciones periódicas. Así para:

$$(P_3) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-L) = y(L) \\ y'(-L) = y'(L) \end{cases}, \quad \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n=0,1,\dots, \quad Y_0 = \{1\}, \quad Y_n = \left\{ \cos \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{n\pi t}{L} \right\}$$

se deduce la siguiente serie de Fourier en senos y cosenos:

$$[3] \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right], \quad \text{con coeficientes:}$$

$$[4] \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad n=0,1,\dots \quad \text{y} \quad [5] \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt, \quad n=1,2,\dots$$

ya que se cumple:  $\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi t}{L} \sin \frac{n\pi t}{L} dt = 0$  para todo  $m$  y  $n$ .

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi t}{L} \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}; \quad \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi t}{L} \sin \frac{n\pi t}{L} dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}$$

[las fórmulas [3]-[5] también son válidas para el desarrollo de una  $f$  definida inicialmente en cualquier intervalo de la forma  $[a, a+2L]$  (sin más que cambiar los límites a la integral) pues  $\int_a^{a+2L} \cos^2 = \int_a^{a+2L} \sin^2 = L$ ]

Como en el teorema 1 la serie [3] converge hacia  $f(t)$  en los puntos de continuidad de  $f$ . Además se puede decir lo que sucede en los extremos  $-L$  y  $L$  (observando que la [3] define de hecho una función en todo  $\mathbf{R}$  que es  $2L$ -periódica). Podemos hablar también sobre la convergencia uniforme de [3] (sin demostrar la afirmación):

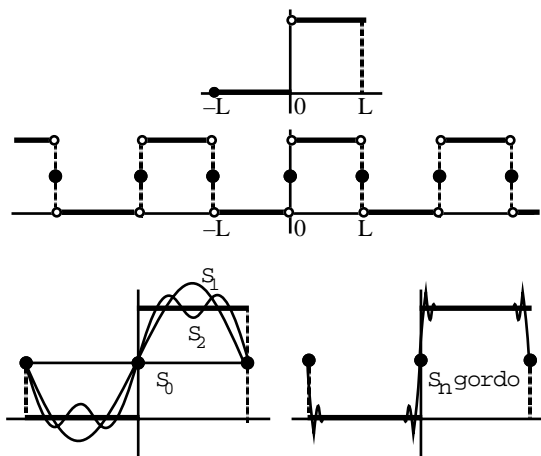
Teor 2. Supongamos que  $f$  es  $C^1$  a trozos en  $[-L, L]$  y extendamos  $f(t)$  fuera de  $[-L, L]$  de forma  $2L$ -periódica. Entonces la serie [3] con coeficientes dados por [4] y [5] converge hacia  $f(t)$  en todos los puntos en que su extensión es continua (y hacia  $\frac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)]$  en los puntos de discontinuidad). Además  $f$  converge uniformemente en todo intervalo cerrado que no contenga discontinuidades de la  $f$  extendida. Por tanto, si  $f$  es continua y  $f(-L) = f(L)$  entonces [3] converge uniformemente hacia  $f$  en todo el intervalo  $[-L, L]$ .

Ejemplo 2. Sea  $f(t) = \begin{cases} 0, & -L \leq t \leq 0 \\ L, & 0 < t \leq L \end{cases}$ .

Calculando su serie en senos y cosenos:

$$\frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin[(2m-1)\pi t/L]}{2m-1}$$

La suma de esta serie es 0 en  $(-L, 0)$ ,  $L$  en  $(0, L)$  y  $L/2$  en  $-L, 0$  y  $L$ . En todo cerrado que no contenga estos puntos la convergencia es uniforme. Cerca de ellos la convergencia es mala y lenta.



Las fórmulas [1] y [2] obtenidas para los coeficientes de las series de senos y series de cosenos se pueden deducir como casos particulares de [4] y [5]. Dada una  $f$  inicialmente definida en  $[0,L]$  podemos extenderla de forma impar o de forma par a  $[-L,L]$ . En el primer caso  $f(t)\cos[n\pi t/L]$  es impar y  $f(t)\sin[n\pi t/L]$  es par. En el segundo  $f(t)\cos[n\pi t/L]$  es par y  $f(t)\sin[n\pi t/L]$  es impar. Por tanto [4] se hace 0 y [5] se convierte en [1] en el primer caso, y en el segundo [5] se hace 0 y [4] se convierte en [2].

[Si definiésemos la  $f$  de cualquier otra forma en  $[-L,0)$ , la serie en senos y cosenos también convergería hacia  $f$  en los  $t$  de  $(0,L)$  en que fuese continua].

Como consecuencia de lo anterior y del teorema 2 se tiene que:

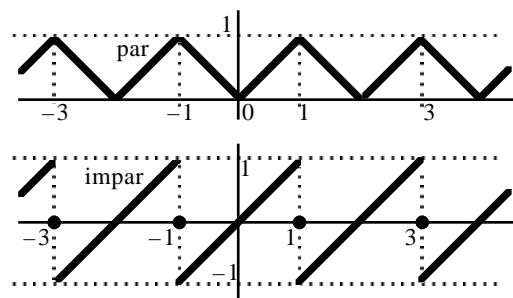
La serie de cosenos de una  $f$  continua en  $[0,L]$ , con  $f'$  continua a trozos, converge uniformemente hacia  $f$  todo el intervalo. Si  $f$  además satisface que  $f(0)=f(L)=0$  la serie en senos de  $f$  también converge uniformemente hacia  $f$  en todo  $[0,L]$ .

(si no fuese  $f(0)=0$  ó  $f(L)=0$  la  $f$  extendida de forma impar a  $[-L,L]$  y luego de forma  $2L$ -periódica no sería continua en 0 o en  $L$ ).

En particular, la serie en senos del ejemplo 1 no converge uniformemente hacia  $f$  en  $[0,1]$  (aunque sí lo hace en cualquier intervalo de la forma  $[0,b]$  con  $b<1$ ). La serie en cosenos sí converge uniformemente en  $[0,1]$ .

[aunque las series en cosenos se comporten mejor, resolviendo EDPs no podremos elegir

el tipo de series a utilizar: nos lo impondrán las condiciones del problema].



Observemos para acabar que también se pueden hacer desarrollos de Fourier en serie de autofunciones de diversos problemas de Sturm-Liouville singulares, en particular en las de los tres que vimos en la sección 2. Por ejemplo, podemos desarrollar una  $f$  ( $C^1$  a trozos) en las autofunciones del  $(P_4)$  de aquella sección:

$$(P_4) \begin{cases} ty'' + y' + \lambda ty = 0 \\ y \text{ acotada en } t=0, y(1)=0 \end{cases} \rightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\sqrt{\lambda_n} t), \text{ peso } r(t)=t$$

$$\rightarrow c_n = \frac{\int_0^1 t f(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} t) dt}{\int_0^1 t J_0^2(\sqrt{\lambda_n} t) dt} = \frac{2}{J_1^2(\sqrt{\lambda_n})} \int_0^1 t f(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} t) dt$$

pues

$$\int_0^1 t J_0^2(\sqrt{\lambda_n} t) dt = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\sqrt{\lambda_n}} u J_0^2(u) du = \frac{1}{2\lambda_n} [u^2 (J_0^2(u) + J_1^2(u))]_0^{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{J_1^2(\sqrt{\lambda_n})}{2}$$

ya que las  $J_n$  satisfacen  $[t^n J_n]' = t^n J_{n-1} \rightarrow [t J_1]' = t J_0, J_0' = -J_1$

$$\rightarrow \int u J_0^2 = \frac{u^2}{2} J_0^2 + \int u J_0 u J_1 = \frac{u^2}{2} J_0^2 + \frac{1}{2} [u J_1]^2$$

## 7.4. Problemas no homogéneos. Función de Green.

Sea el problema no homogéneo con condiciones separadas:

$$(P_{nh}) \left\{ \begin{array}{l} [p(t)y']' + g(t)y = f(t) \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0, \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{array} \right. , \quad p \in C^1, g, f \in C, p > 0 \text{ en } [a, b]$$

y llamemos  $(P_h)$  al problema homogéneo asociado ( $f \equiv 0$ ). Más adelante consideraremos condiciones de contorno no homogéneas y el caso en que la ecuación depende de un parámetro. El siguiente teorema generaliza lo que ocurriría en el ejemplo 5 de 7.1:

Teor 1. El problema  $(P_{nh})$  tiene solución única si y sólo si  $(P_h)$  tiene únicamente la solución  $y \equiv 0$ . Si  $(P_h)$  tiene soluciones no triviales  $\{y_h\}$  entonces  $(P_{nh})$  tiene infinitas soluciones o no tiene solución según sea, respectivamente, igual o distinta de cero la integral:  $\int_a^b f(t) y_h(t) dt$

Imponiendo las condiciones de contorno a la solución general de la no homogénea  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$  y utilizando las propiedades de los sistemas algebraicos de ecuaciones se demuestra gran parte del teorema. Además si hay soluciones  $y$  de  $(P_{nh})$  debe ser:

$$\int_a^b f y_h = \int_a^b ([p y']' + g y) y_h = [p(y_h y' - y y_h')]_a^b + \int_a^b ([p y_h']' + g y_h) y = 0$$

y se prueba que esta condición necesaria es también suficiente.

Veamos ahora una fórmula que para cualquier  $f(t)$  nos da la solución de  $(P_{nh})$  (en el caso de que ésta sea única), conocidas las soluciones de la ecuación homogénea (algo parecido a la fórmula de variación de las constantes para problemas de valores iniciales):

Teor 2. Supongamos que  $(P_h)$  tiene sólo la solución  $y \equiv 0$  y sean  $y_1$  e  $y_2$  dos soluciones no triviales de la ecuación homogénea  $[p y']' + g y = 0$  satisfaciendo, respectivamente,  $\alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0$  y  $\beta y(b) + \beta' y'(b) = 0$ . Entonces la solución única de  $(P_{nh})$  es:

$$y(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds, \quad \text{con } G(t, s) = \begin{cases} \frac{y_1(s) y_2(t)}{p|W|(y_1, y_2)}, & a \leq s \leq t \\ \frac{y_1(t) y_2(s)}{p|W|(y_1, y_2)}, & t \leq s \leq b \end{cases}$$

A la  $G(t, s)$  se le llama función de Green del problema.

[Conocida la  $G$ , dada cualquier  $f$ , basta realizar un par de integraciones para encontrar la solución del  $(P_{nh})$ ; la idea de la función de Green se generaliza a otros problemas de ecuaciones ordinarias y en derivadas parciales].

[Observemos que el denominador que aparece en la  $G$  es constante:

$$[p(y_1 y_2' - y_2 y_1')] = y_1 [p(y_2')] - y_2 [p(y_1')] = -g y_1 y_2 + g y_2 y_1 = 0]$$

Comprobemos que la solución de  $(P_{nh})$  viene dada por la expresión del teorema. Desarrollando la integral:

$$y(t) = y_1(t) \int_a^b \frac{y_2(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{p(s)} ds + y_2(t) \int_a^t \frac{y_1(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{p(s)} ds - y_1(t) \int_a^t \frac{y_2(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{p(s)} ds = cy_1 + y_p$$

Por tanto  $y(t)$  es solución de la no homogénea  $y'' + \frac{p'}{p}y' + \frac{g}{p}y = \frac{f}{p}$ .

Además como  $y'(t) = y_1' \int_a^b \frac{y_2}{|W|} \frac{f}{p} + y_2' \int_a^t \frac{y_1}{|W|} \frac{f}{p} - y_1' \int_a^t \frac{y_2}{|W|} \frac{f}{p}$  se tiene que:

$$y(a) = cy_1(a), y'(a) = cy_1'(a), y(b) = ky_2(b), y'(b) = ky_2'(b) \text{ con } c = \int_a^b \frac{y_1 f}{|W|p}, k = \int_a^b \frac{y_2 f}{|W|p}$$

Como  $y_1, y_2$  cumplen cada condición de contorno, también lo hace la  $y$ .

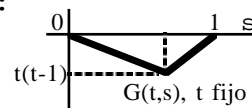
Ejemplo 1.  $(P_1) \begin{cases} y'' = f(t) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \text{ sólo lo satisface } y=0.$

Por tanto,  $(P_1)$  tiene solución única. Hallemos su función de Green: La solución general de la ecuación homogénea es  $y = c_1 + c_2 t$ .

De la primera condición de contorno  $y(0) = c_1 = 0$ . Podemos tomar  $y_1 = t$ .

De la segunda,  $y(1) = c_1 + c_2 = 0$ . Elegimos  $y_2 = t-1$ . Entonces:

$$|W|(t) = \begin{vmatrix} t & t-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, p(t) = 1, G(t,s) = \begin{cases} s(t-1), & 0 \leq s \leq t \\ t(s-1), & t \leq s \leq 1 \end{cases}$$



Si, por ejemplo,  $f(t) = 1$ , la solución de  $(P_1)$  viene dada por:

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s) 1 ds = (t-1) \int_0^t s ds + t \int_t^1 (s-1) ds = \frac{1}{2} [t^2 - t]$$

Para resolver un problema con una  $f$  dada, calcular la  $G$  puede ser un rodeo inútil. Por ejemplo, la última solución se podría obtener:

$$y'' = 1 \rightarrow y = c_1 + c_2 t + \frac{1}{2} t^2 \rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y(1) = c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{2} [t^2 - t] \text{ como antes.}$$

Pero para cada nueva  $f$  habría que hallar la  $y_p$  e imponer  $y(0) = y(1) = 0$ . Observemos que la  $G$  de arriba para  $t$  fijo (o para  $s$  fijo, pues  $G$  es simétrica) es continua pero no derivable en  $s=t$  y su 'derivada' segunda es  $\delta(s-t)$ . De hecho, esto es lo que sucede en general:

Teor 3.  $G(t,s)$  es la solución para  $t \in (a,b)$  fijo del problema:

$$\begin{cases} [p(s)y']' + g(s)y = \delta(s-t) \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0, \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$$

[La prueba es trivial:  $\int_0^1 G(s,u) \delta(u-t) ds = G(s,t) = G(t,s)$ ].

Podemos hallar la  $G$  del  $(P_1)$  siguiendo este camino más largo [pero que es el que se generaliza a las EDPs; además da una forma de hallar la  $G$  en problemas autoadjuntos para los que no es válida la fórmula del teorema 1]:

$$G(s) = \begin{cases} c_1 + c_2 s, & y(0) = c_1 = 0 \rightarrow y = c_2 s, s \leq t \\ k_1 + k_2 s, & y(1) = k_1 + k_2 = 0 \rightarrow y = k_2 [s-1], s \geq t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(t^-) = c_2 t = k_2 [t-1] = y(t^+) \\ y'(t^+) - y'(t^-) = k_2 - c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = t-1 \\ k_2 = t \end{cases}$$

Por Laplace: si  $L[G(s)] = H(p)$  y  $G'(0) = a$ ,  $p^2 H - a = e^{-tp} \rightarrow G(s) = as + u_t(s)(s-t)$

$$\rightarrow G(1) = a + 1 - t = 0 \rightarrow G(s) = (t-1)s + u_t(s)(s-t) = \begin{cases} s(t-1), & 0 \leq s \leq t \\ st - s + s - t, & t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

[La  $f$  y la  $p$  que aparecen en los teoremas 1 y 2 son las de la ecuación escrita en la forma  $[py']' + gy = f$ , que se suele denominar 'forma auto-ajunta' o 'forma Sturm-Liouville'; en la mayoría de los problemas que aparecerán al estudiar EDPs por el método de separación de variables del próximo capítulo la  $p$  (y el peso  $r$ ) será 1 (como en el ejemplo anterior), pero no olvidemos que en ocasiones deberemos reescribir la ecuación].

Sea ahora el problema con condiciones de contorno no homogéneas:

$$(P_{AB}) \begin{cases} [p(t)y']' + g(t)y = f(t) \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = A, \beta y(b) + \beta' y'(b) = B \end{cases}$$

y llamemos  $(P_h)$  al homogéneo obtenido haciendo  $f(t) \equiv 0$ ,  $A=0$  y  $B=0$ . Hallando una función  $v$  que satisfaga sus condiciones de contorno este  $(P_{AB})$  se puede reducir a otro con las condiciones homogéneas: haciendo  $w = y - v$  se obtiene (gracias a la linealidad de la ecuación y de las condiciones de contorno) el problema:

$$(P_w) \begin{cases} [p(t)w']' + g(t)w = f(t) - [p(t)v']' - g(t)v \\ \alpha w(a) + \alpha' w'(a) = 0, \beta w(b) + \beta' w'(b) = 0 \end{cases}$$

que es del tipo  $(P_{nh})$  ya analizado. Deducimos, por ejemplo, que:

$$(P_{AB}) \text{ tiene solución única} \Leftrightarrow (P_h) \text{ tiene sólo la solución } y=0$$

[y si  $(P_h)$  tiene infinitas soluciones,  $(P_{AB})$  puede tener infinitas o ninguna]

Ejemplo 2.

$$(P_a) \begin{cases} ty'' - y' = 0 \\ y'(1) + ay(1) = 0, y(2) = 1 \end{cases}$$

Discutamos, según los valores de  $a$ , cuántas soluciones tiene.

[Aunque la ecuación sea homogénea, la presencia de la condición de contorno no homogénea hace que  $(P_a)$  tenga las típicas propiedades de un no homogéneo].

Comenzamos analizando cuántas soluciones tiene el homogéneo:

$$y = c_1 + c_2 t^2 \rightarrow \begin{cases} y'(1) + ay(1) = 2c_2 + ac_1 + ac_2 = 0 \\ y(2) = c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} [2-3a]c_2 = 0 \\ c_1 = -4c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \text{ si } a \neq 2/3 \\ y = \{t^2 - 4\} \text{ si } a = 2/3 \end{cases}$$

Por tanto, si  $a \neq 2/3$  el problema  $(P_a)$  tiene solución única.

Para ver lo que sucede si  $a = 2/3$  lo más corto es verlo directamente:

$$\begin{cases} y'(1) + \frac{2}{3}y(1) = \frac{2}{3}[c_1 + 4c_2] = 0 \\ y(2) = c_1 + 4c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \text{no existe solución}$$

También podríamos convertirlo en un  $(P_{nh})$  y aplicar el teorema 1:

Buscamos una  $v$  de la forma  $v = Mt + N$  que satisfaga las condiciones:

$$\begin{cases} v'(1) + \frac{2}{3}v(1) = \frac{1}{3}[5M + 2N] = 0 \\ v(2) = 2M + N = 1 \end{cases} \rightarrow v = 5 - 2t, w = u - v \rightarrow (P_w) \begin{cases} tw'' - w' = -2 \\ w'(1) + \frac{2}{3}w(1) = w(2) = 0 \end{cases}$$

Escribimos la ecuación en la forma  $[\frac{w'}{t}]' = -\frac{2}{t^2}$  y usamos el teorema 1:

$$\int_1^2 [-\frac{2}{t^2}][t^2 - 4]dt \neq 0 \Rightarrow (P_w) \text{ [y por tanto } (P_{2/3}) \text{] no tiene solución.}$$

Para acabar consideremos el problema de S-L no homogéneo:

$$(P_\lambda) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = f(t) \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0, \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$$

y sea  $(P_s)$  el homogéneo asociado ( $f \equiv 0$ ). Para cada valor de  $\lambda$  tenemos un problema de los ya vistos (con  $g = -q + \lambda r$ ). Se tiene por tanto:

$(P_\lambda)$  tiene solución única [calculable a partir de la función de Green  $G_\lambda(t,s)$ ]  $\Leftrightarrow \lambda$  no es autovalor de  $(P_s)$ .  
Si  $\lambda = \lambda_n$  autovalor con autofunción  $\{y_n\}$ ,  $(P_\lambda)$  no tiene solución o tiene infinitas dependiendo de que  $\int_a^b f y_n dt$  sea  $\neq 0$  ó  $= 0$ .

Ejemplo 3.

$$(P_3) \begin{cases} y'' + \lambda y = t \\ y(0) = y'(1) - y(1) = 0 \end{cases}$$

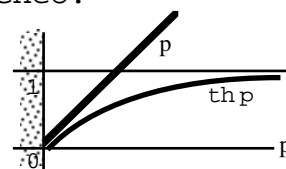
¿Cuántas soluciones tiene?

Hallemos los autovalores y autofunciones del homogéneo.

Como  $\beta\beta' < 0$  podrían aparecer autovalores negativos.

$$\underline{\lambda < 0}: y = c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt} \rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_2(p[e^p + e^{-p}] - [e^p - e^{-p}]) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

como no existe  $p > 0$  con  $p = \text{th}p$  [ $(\text{th}p)'(0) = 1$ ]  $\rightarrow y \equiv 0$ .

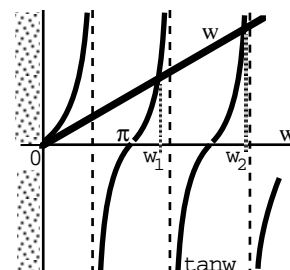


$$\underline{\lambda = 0}: y = c_1 + c_2 t \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 = c_2 \end{cases} \rightarrow \lambda_0 = 0 \text{ autovalor con autofunción } y_0 = \{t\}.$$

$$\underline{\lambda > 0}: y = c_1 \cos w t + c_2 \sin w t \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2(\sin w - w \cos w) = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$  existen infinitos  $w_n$  con  $w_n = \tan w_n \rightarrow$

$\lambda_n = w_n^2$  con autofunciones  $y_n = \{\sin(\sqrt{\lambda_n} t)\}$ .



Por tanto (la ecuación está escrita ya en forma autoadjunta):

Si  $\lambda \neq \lambda_n$  hay solución única de  $(P_3)$ .

Si  $\lambda = 0$ , como  $\int_0^1 t t dt \neq 0$ ,  $(P_3)$  no tiene solución.

Si  $\lambda = \lambda_n, n=1,2,\dots$ ,  $\int_0^1 t \sin w_n t dt = \frac{1}{w_n} [\sin w_n - w_n \cos w_n] = 0 \rightarrow$  infinitas soluciones.

[podíamos ahorrarnos el cálculo de la integral pues  $y_0$  e  $y_n$  son ortogonales]