Ecuaciones diferenciales ordinarias

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

Facultad de Ciencias - UNAM

16 de marzo de 2018

Introducción.

Las ecuaciones diferenciales tienen importancia fundamental en las aplicaciones, ya que muchas leyes y relaciones físicas pueden expresarse matemáticamente de esta forma.

En particular, el estudio de problemas de equilibrio de sistemas continuos se encuentra dentro de este contexto.

Definiciones importantes

Aviso de consideración

No sería mala idea hacer un repaso en casa sobre estas definiciones y los métodos analíticos de solución de las *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* EDO.

Ecuación diferencial

Esta ecuación relaciona dos o más variables en términos de derivadas o diferenciales.

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos x$$

$$(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$$

$$\left[\frac{x^2w}{dx^2}\right]^3 - xy\frac{dw}{dx} = 0$$

EDO y EDP

Si en una ecuación diferencial hay una sola variable independiente, las derivadas son totales y se le llama *ecuación ordinaria*.

EDO y EDP

Si en una ecuación diferencial hay una sola variable independiente, las derivadas son totales y se le llama *ecuación ordinaria*.

Si en la ecuación hay dos o más variables independientes, las derivadas serán parciales y se le llama *ecuación parcial*.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Orden de una ecuación diferencial

Es la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Grado de una ecuación diferencial

Es el grado *algebraico* de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Ecuación diferencial lineal

Una ecuación diferencial es lineal si en ella no aparecen potencias de la variable dependiente y sus derivadas, ni productos de la variable dependiente por sus derivadas o productos entre derivadas.

Solución de una ecuación diferencial

Es cualquier relación funcional que no incluya derivadas o integrales de funciones desconocidas y que implique a la propia ecuación diferencial, en el sentido de que la verifique por sustitución directa.

Ecuación y condiciones homogéneas

Una ecuación o condición es homogénea si, cuando es satisfecha por una función particular $y(x)$, también es satisfecha por $c\, y(x)$, donde c es una constante arbitraria.

Solución de una ecuación diferencial

Sea una ecuación diferencial ordinaria de orden n y cualquier grado, cuya forma más general es:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Se establece del cálculo que en su solución general deben de aparecer n constantes arbitrarias. Entonces puede aceptarse como solución general:

$$G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

Solución de una EDO

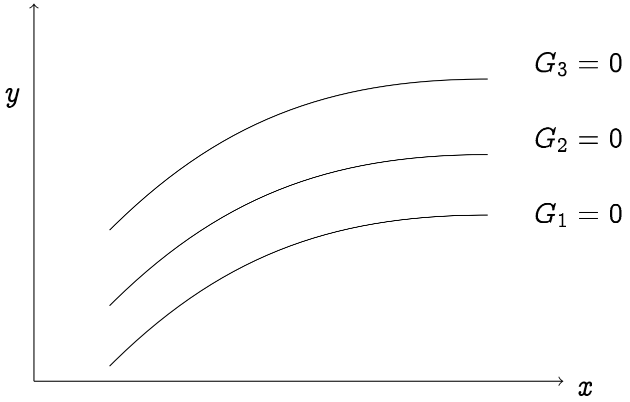


Figura 1: *Familia de curvas planas para cada constante* n

Ejemplo

Gráficamente esta ecuación representa a una familia de curvas planas, cada una de ellas obtenidas para valores particulares de las n constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$

Tipos de problemas

Dependiendo de cómo se establezcan estas condiciones, se distinguen dos tipos de problemas los llamados *de valores iniciales* y los *de valores en la frontera*.

Está gobernado por una ecuación diferencial de orden n y un conjunto de n condiciones independientes, todas ellas válidas para el mismo punto inicial.

Si la ecuación diferencial que define el problema es del tipo de la EDO con la que iniciamos y $x = a$ es el punto inicial, puede aceptarse que las n condiciones independientes son:

n condiciones independientes

$$
\begin{aligned}
y(a) &= y_0 \\
y'(a) &= y'_0 \\
y''(a) &= y''_0 \\
&\vdots \\
y^n(a) &= y^n_0
\end{aligned}
$$

Y se tratará de obtener una solución particular de la EDO inicial que verifique las condiciones iniciales, como se presenta en la siguiente figura:

Solución de EDO con condiciones inciales

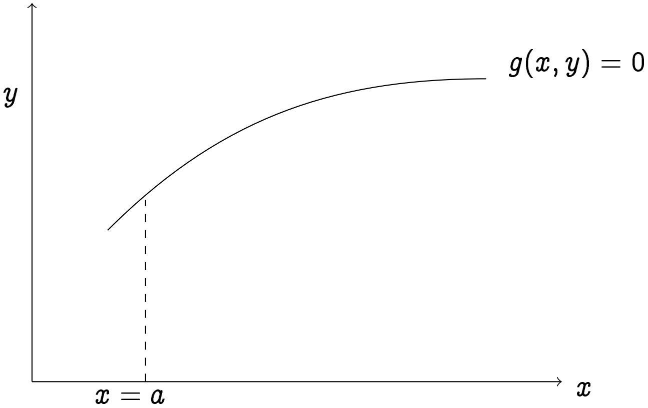


Figura 2: *Solución de la EDO con una condición inicial.*

Problemas de valores en la frontera

Se deben de establecer condiciones de frontera en todos y cada uno de los puntos que constituyen la frontera del dominio de soluciones del problema.

Problemas de valores en la frontera

En particular, en el espacio de una dimensión, hay dos puntos frontera, por ejemplo $x = a$ y $x = b$ si el dominio de soluciones es el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$

Solución de EDO con condiciones de frontera

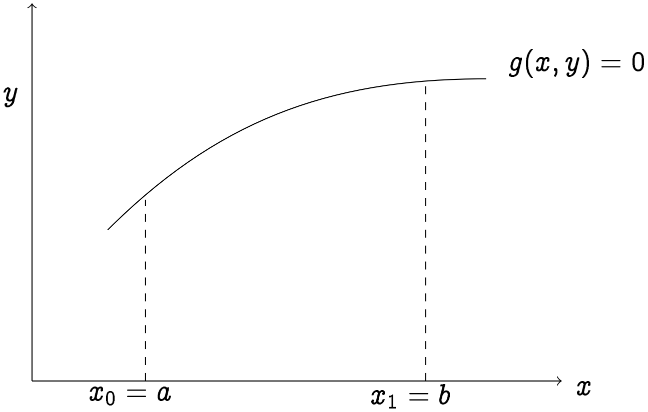


Figura 3: *Solución de la EDO con condiciones de frontera.*

Estrategia de solución

Básicamente la solución numérica de las ecuaciones diferenciales consiste en sustituir el dominio continuo de soluciones por uno discreto formado por puntos aislados igualmente espaciados entre sí.

Problema de valores iniciales

El dominio de definición de soluciones $x \geq a$ se sustituye por el conjunto infinito numerable de puntos:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= a \\
x_1 &= x_0 + h \\
x_2 &= x_0 + 2h \\
x_3 &= x_0 + 3h \\
\ldots
\end{aligned}
$$

Valores inciales

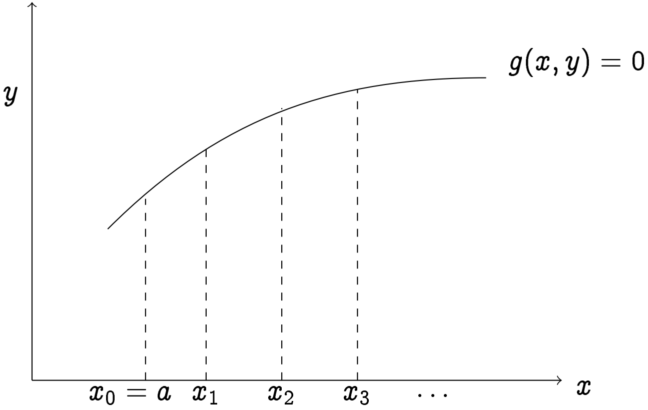


Figura 4: *Solución de la EDO con valores iniciales.*

Problema de valores en la frontera

Se sustituye el intervalo $a \leq x \leq b$ por el conjunto finito de puntos:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= a \\
x_1 &= x_0 + h \\
x_2 &= x_0 + 2\ h \\
x_3 &= x_0 + 3\ h \\
\ldots \\
x_n &= x_0 + n\ h = b
\end{aligned}
$$

Valores en la frontera

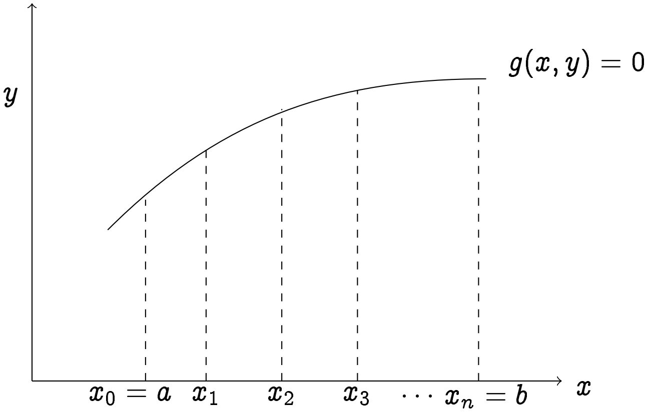


Figura 5: *Solución con valores en la frontera.*

Nuestra tarea

Habiéndose discretizado el problema continuo, se tratará de obtener la solución para los puntos considerados, esto se resuelve en general, de dos maneras:

Nuestra tarea

1. Sustituyendo las derivadas que aparezcan en la ecuación diferencial y en sus condiciones iniciales o de frontera, por fórmulas numéricas de derivación que proporcionen una aproximación a las derivadas.

Nuestra tarea

1. Sustituyendo las derivadas que aparezcan en la ecuación diferencial y en sus condiciones iniciales o de frontera, por fórmulas numéricas de derivación que proporcionen una aproximación a las derivadas.
2. Tratando de integrar la ecuación, reemplazando el proceso de integración por una fórmula numérica que se aproxime a la integral.

Problemas de valores iniciales

Debemos de resolver

$$y' = F(x, y)$$

con la condición auxiliar $y(a) = \alpha$

Forma general de una EDO de 1er. orden

La forma general de una ecuación diferencial de primer orden (1-EDO) es

$$y' = f(x, y)$$

donde $y' = dy/dx$ y $f(x, y)$ es una función dada.

La solución de esta ecuación incluye una constante arbitraria (la constante de integración)

Constante de integración

Para hallar esa constante, debemos conocer un punto en la curva solución, esto es, y debe de especificarse para algún valor de x, $x = a$.

Entonces, escribimos, la condición auxiliar $y(a) = \alpha$

Transformación de una EDO de orden n

Una ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

se puede transformar en un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden.

Ajuste en la notación

Usemos la siguiente notación

$$
\begin{aligned}
y_0 &= y \\
y_1 &= y' \\
y_2 &= y'' \\
\ldots \\
y_{n-1} &= y^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

Sistema de 1-EDO

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (1-EDO) equivalentes son:

$$
\begin{aligned}
y_0' &= y_1 \\
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= y_3 \\
\dots \\
y_n' &= f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})
\end{aligned}
$$

Solución con n condiciones iniciales

La solución ahora requiere de n condiciones iniciales; si esas condiciones se especifican para el mismo valor de x, el problema se dice que es *un problema de valores iniciales*.

Las *condiciones iniciales*, tienen la forma:

$$y_0(a) = \alpha_0, \qquad y_1(a) = \alpha_1, \qquad \ldots \qquad y_{n-1}(a) = \alpha_{n-1}$$

Problemas de valores iniciales

Si y_i se especifica para diferentes valores de x, el problema se llama *problema con condiciones de frontera*, por ejemplo:

$$y'' = -y \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

es un problema de condiciones iniciales, ya que ambas condiciones están definidas en la solución para $x = 0$

Problemas con valores en la frontera

En cambio el problema

$$y'' = -y \qquad y(0) = 1 \qquad y'(\pi) = 0$$

es un problema con condiciones de frontera, ya que las dos condiciones se cumplen para diferentes valores de x.

Notación usada para el tema EDO

Se usará de manera continua y por conveniencia, la notación vectorial, que nos permitirá manejar conjuntos de 1-EDO de una manera más clara, de tal manera que podremos expresar:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}) \qquad \mathbf{y}(a) = \alpha$$

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ f(x, \mathbf{y}) \end{bmatrix}$$

Método de Euler (serie de Taylor)

El método de la Serie de Taylor es sencillo conceptualmente y con una mayor precisión.

Se basa en la serie de Taylor truncada para y alrededor de x:

$$y(x+h) \simeq y(x) + y'(x)h$$

La fórmula anterior predice el valor de y en $x + h$ con la información disponible de x, se puede utilizar para mover la solución hacia adelante en incrementos de h, para los valores iniciales de x y de y.

Error de truncamiento

El error debido al truncamiento, es:

$$E = \frac{1}{2}\, y''(\xi)\, h^2 = O(h^2), \qquad x < \xi < x + h$$

Método de Euler

Para simplificar, consideremos que tenemos una sola variable y, y que la ecuación diferencial es $y' = f(x, y)$.

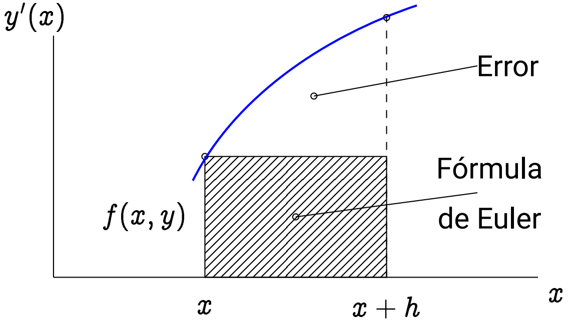


Figura 6: *Representación gráfica del método de Euler.*

El cambio en la solución y entre x y $x + h$ es

$$y(x+h) - y(h) = \int_x^{x+h} y' \, dx = \int_x^{x+h} f(x,y) \, dx$$

que es el área debajo de la gráfica de $y'(x)$.

La fórmula de Euler aproxima ésta área con el área del rectángulo sombreado. El área entre el rectángulo sombreado y la gráfica representa el error debido al truncamiento.

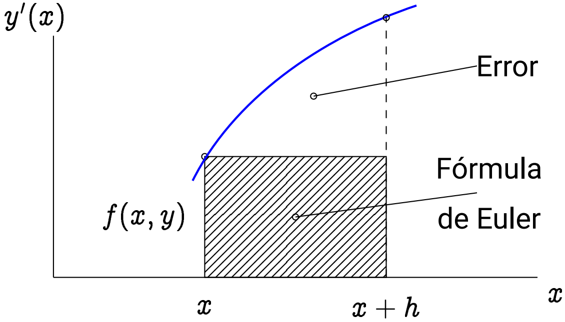


Figura 7: *Aproximación del área debajo de la curva.*

Se revisa claramente que el error de truncamiento es proporcional a la pendiente de la gráfica, esto es, proporcional a $y'(x)$

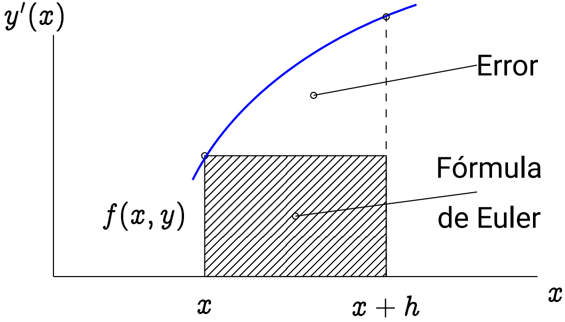


Figura 8: *El error debido al truncamiento es proporcional a la derivada.*

El método de Euler rara vez se utiliza en la práctica debido a su ineficiencia computacional.

Para reducir el error de truncamiento a un nivel aceptable, requiere considerar un valor de h muy pequeño, dando lugar a muchos pasos de integración acompañados por un incremento en el error de redondeo.

El valor del método de Euler radica principalmente en su simplicidad, lo que facilita la discusión de ciertos temas importantes, como la estabilidad.

La función `euler`

Vamos a construir una función que use el método de integración de Euler.

La función puede manejar cualquier número de ecuaciones diferenciales de primer orden.

El usuario debe proporcionar la función $F(x, y)$ que especifica las ecuaciones diferenciales en el formato de un arreglo.

La función `euler`

Arreglo para las 1-EDO

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} y_0' \\ y_1' \\ y_2' \\ \vdots \end{bmatrix}$$

La función devuelve los arreglos X y Y que contienen los valores de x, de y en intervalos de tamaño h.

Código 1: La función euler

```python
def euler(F, x, y, xAlto, h):
    X = []
    Y = []

    X.append(x)
    Y.append(y)

    while x < xAlto:
        h = min(h, xAlto - x)
        y = y + h * F(x, y)
        x = x + h
        X.append(x)
        Y.append(y)

   return np.array(X), np.array(Y)
```

Rutinas para visualizar los resultados

A continuación se presentan dos rutinas que nos ayudarán a visualizar mejor los resultados en pantalla. Usaremos la función **`imprimeSoln`** para imprimir los arreglos X y Y obtenidos de la integración numérica.

Rutinas para visualizar los resultados

La cantidad de datos se controla con el parámetro `freq`:

- Si `freq = 5`: se presentará el valor obtenido cada cinco pasos.

Rutinas para visualizar los resultados

La cantidad de datos se controla con el parámetro `freq`:

- Si `freq = 5`: se presentará el valor obtenido cada cinco pasos.
- Si `freq = 0`, sólo se presentan el valor inicial y el final.

Código 2: Función para visualizar los datos

```
def imprimeSoln(X,Y,freq):

    def imprimeEncabezado(n):
        print ('\n x ')
        for i in range (n):
            print (' y[',i,']')
        print()

    def imprimeLinea(x,y,n):
        print ("{:13.4e}".format(x))
        for i in range (n):
            print ("{:13.4e}".format
    (y[i]))
            print()
```

```

    m = len(Y)
    try: n = len(Y[0])
    except TypeError: n = 1
    if freq == 0: freq = m

    imprimeEncabezado(n)
    for i in range(0, m, freq):
        imprimeLinea(X[i], Y[i],n)
    if i != m - 1: imprimeLinea(X[m - 1], Y[m - 1], n)
```

Ejercicio 1

Resolver

$$y'' = -0.1\, y' - x \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

de $x = 0$ hasta $x = 2$ con el método de Euler, usa $h = 0.05$, grafica el valor de y así como la solución analítica

$$y = 100\, x - 5\, x^2 + 990(e^{-0.1\, x} - 1)$$

Solución

Usemos la notación $y_0 = y$ y $y_1 = y'$ para un conjunto de 1-EDO equivalentes y las condiciones iniciales

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} y_0' \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -0.1y_1 - x \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Código 3: Código para el Ejercicio

```python
from numpy import zeros, array, exp, linespace

def F(x, y):
    F = zeros(2)
    F[0] = y[1]
    F[1] = -0.1 * y[1] - x
    return F

x = 0.0
xAlto = 2.0

y = array([0.0, 1.0])
h = 0.05
```

```

freq = 1

X, Y = euler(F, x, y, xAlto, h)

imprimeSoln(X, Y, freq)
```

Código para evaluar la solución I

Para comparar los resultados, se necesita evaluar en el dominio x, la función que representa la solución, entonces:

Código 4: Código que evalúa la solución

```
x = linspace(-2, 2, 100)

def yExacta(x):
  return 100.0 * x - 5.0 * x**2 + 990.0 * (exp(-0.1 * x) - 1.0)

plt.plot(x, yExacta(x), 'k', label='Exacta')
```

Código para evaluar la solución II

```
plt.show()
```

Graficar la solución de la EDO

Nos resta generar la gráfica para la solución con los arreglos X, Y que obtenemos de la función **`euler`**, pero recordemos que el arreglo Y contiene n-elementos que a su vez son arreglos: $Y[0], Y[1], \ldots, Y[n-1], Y[n]$.

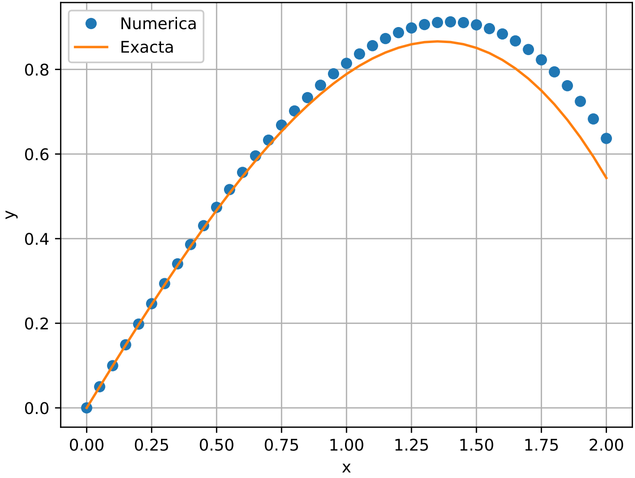
Seleccionando el arreglo $Y[0]$ I

Como sólo nos interesa mostrar la solución, es decir: y, debemos de seleccionar ese elemento, para ello, usamos el *slicing* de los arreglos:

Código 5: Código para graficar la solución de la EDO

```
plt.plot(X, Y[:,0], 'bo', label='
   Solucion euler')
plt.show()
```

Gráfica con la solución numérica y la exacta



¿Por qué usamos $Y[:, 0]$

Lo que nos devuelve la función `euler` son los arreglos X, Y, éste último es un arreglo que contiene arreglos, es decir:

$$Y = [Y[0],\ Y[1], , \ldots, Y[n-1],\ Y[n]]$$

A este manejo de arreglos, se le denomina arreglos anidados.

Listas anidadas

Cada arreglo $Y[0], \ldots Y[n]$ está conformado por dos elementos:

$$
\begin{aligned}
Y[0] &= [Y[0][0], Y[0][1]] \\
Y[1] &= [Y[1][0], Y[1][1]] \\
Y[2] &= [Y[2][0], Y[2][1]] \\
&\vdots \\
Y[n-1] &= [Y[n-1][0], Y[n-1][1]] \\
Y[n] &= [Y[n][0], Y[n][1]]
\end{aligned}
$$

Podemos manejar un elemento en particular de los arreglos, usando los respectivos índices.

Elementos de Y

Lo que contiene el arreglo Y es lo siguiente:

```
[[ 0.          1.        ]
 [ 0.05        0.995     ]
 [ 0.09975     0.987525  ]
 ...
 [ 0.72445689 -0.82994569]
 [ 0.68295961 -0.92079596]
 [ 0.63691981 -1.01369198]]
```

Recuperando un arreglo completo

Necesitamos todos los valores $Y[i][0]$ del arreglo Y, que representan la solución de la EDO, entonces usamos el *slicing*: `Y[:,0]`, que debemos de interpretar:

Dame todos los elementos de las listas cuyo segundo índice sea cero = $Y[i][0]$, la coma es necesaria para separar el segundo índice.

Elemento recuperado para graficar

Ahora ya contamos con una lista con el mismo número de elementos que la lista X (tienen la misma dimensión), ya podemos usarlo en la instrucción de graficación.