# Tarea de diferenciación e integración numérica.
# Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

## 1. Diferenciación numérica.

1.1. Usando una aproximación por diferencias finitas de orden $O(h^2)$, calcula $f'(2.36)$ y $f''(2.36)$, a partir de los datos:

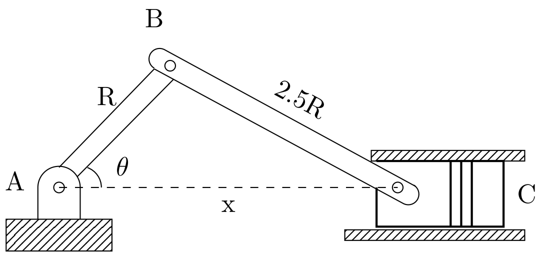
| x | 2.36 | 2.37 | 2.38 | 2.39 |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.85866 | 0.86289 | 0.86710 | 0.87129 |

1.2. Dados los siguientes datos

| x | 0.84 | 0.92 | 1.00 | 1.08 | 1.16 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.431711 | 0.398519 | 0.367879 | 0.339596 | 0.312486 |

Calcula $f''(1)$ con la mayor precisión posible.

1.3. La palanca AB de longitud $R = 90$ mm está girando con velocidad angular constante $d\theta/dt = 5000$ rev/min.




La posición del pistón C como se muestra, varía con el ángulo $\theta$

$$x = R\left(\cos\theta + \sqrt{2.5^2 - \sin^2\theta}\right)$$

Escribe un programa en python que calcule mediante diferenciación numérica la aceleración del pistón en $\theta = 0°, 5°, 10°, \ldots, 180°$.

1.4. Las estaciones de radar $A$ y $B$ están separadas por una distancia $a = 500$ m; rastrean el avión $C$ registrando los ángulos $\alpha$ y $\beta$ en intervalos de un segundo. Si hay tres lecturas sucesivas

| t(s) | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 54.80° | 54.06° | 53.34° |
| $\beta$ | 65.59° | 64.59° | 63.62° |

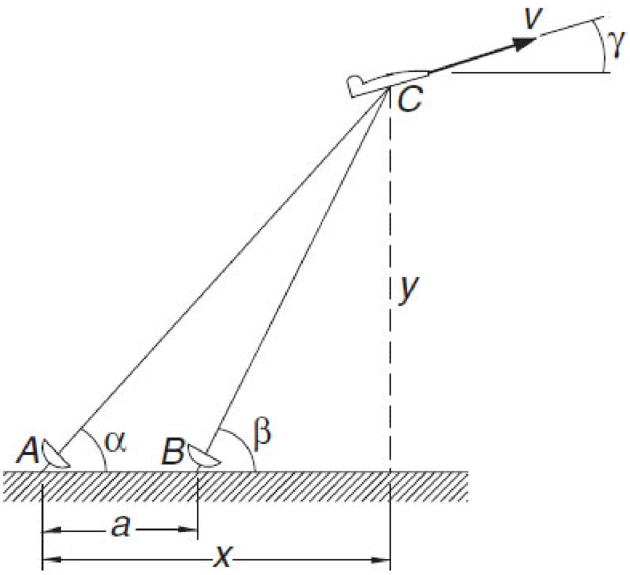



Figura 1: Estaciones de radar y el avión.

Calcula la velocidad $v$ del avión y el ángulo de subida $\gamma$ en $t = 10$ segundos. Las coordenadas del avión las tomamos de

$$x = a\frac{\tan\beta}{tan\beta - tan\alpha} \qquad y = a\frac{tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

1.5. Obtén la aproximación por diferencias centrales de $f''(x)$ de orden $O(h^4)$ aplicando la extrapolación de Richardson a la aproximación por diferencias centrales de orden $O(h^2)$.

1.6. Obtén la primera aproximación por diferencias centrales para $f^4(x)$ a partir de la serie de Taylor.

## 2. Integración numérica.

2.1. Usa la regla del trapecio recursiva para evaluar

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(1 + \tan(x))dx$$

Explica tus resultados.

2.2. La siguiente tabla indica la potencia $P$ propocionada por las ruedas de un carro como función de la velocidad $v$. Si la masa del carro es $m = 2000$ kg, calcula el tiempo $\Delta t$ necesario para que el carro acelere de 1 m/s a 6 m/s. Usa la regla del trapecio para integrar. Tip:

$$\Delta t = m \int_{1s}^{6s} \left(\frac{v}{P}\right) dv$$

que se puede obtener de la ley de Newton $F = m/(dv/dt)$ y por la definición de potencia, $P = Fv$.

| $v$ (m/s) | 0 | 1.0 | 1.8 | 2.4 | 3.5 | 4.4 | 5.1 | 6.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ (kW) | 0 | 4.7 | 12.2 | 19.0 | 31.8 | 40.1 | 43.8 | 43.2 |

2.3. La siguiente tabla proporciona el empuje $F$ del arco como función del desplazamiento $x$. Si la cuerda tiene un desplazamiento de 0.5 m, calcula la velocidad de una flecha de 0.075 kg, cuando sale del arco. Tip: la energía cinética de la flecha es igual al trabajo hecho al estirar la cuerda, que es:

$$m\frac{v^2}{2} = \int_0^{0.5m} F dx$$

| $x$ (m) | 0.00 | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F$ (N) | 0 | 37 | 71 | 104 | 134 | 161 |

| $x$ (m) | 0.30 | 0.35 | 0.40 | 0.45 | 0.50 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F$ (N) | 185 | 207 | 225 | 239 | 250 |

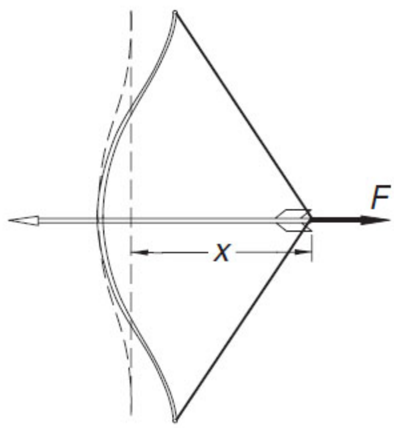



Figura 2: Flecha para el ejercicio

2.4. El período de un péndulo de longitud $L$ es $\tau = 4\sqrt{\frac{L}{g}}h(\theta_0)$, donde $g$ es la aceleración debida a la gravedad, $\theta_0$, representa la amplitud angular y

$$h(\theta_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin^2\theta}}$$

Calcular $h(15°)$, $h(30°)$ y $h(45°)$; compara esos valores con $h(0°) = \frac{\pi}{2}$ (la aproximación usada para pequeñas amplitudes)

2.5. La fórmula de Debye para la capacidad calorífica $C_v$ de un sólido, es $C_v = 9Nkg(u)$, donde

$$g(u) = u^3 \int_0^{1/u} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)} dx$$

los términos de la ecuación son:

$N$ = Número de partículas en el sólido

$k$ = Constante de Boltzmann $\quad$ $T$ = temperatura absoluta

$u = \dfrac{T}{\Theta_D}$ $\quad$ $\Theta_D$ = Temperatura de Debye

Calcular $g(u)$ para $u = 0$ a 1.0 en intervalos de 0.05, grafica los resultados.

2.6. Una masa $m$ está unida a un resorte de longitud $b$ y rigidez $k$. Se puede demostrar que la aceleración de la masa es $\ddot{x} = -f(x)$, donde

$$f(x) = \mu g + \frac{k}{m}(\mu b + x)\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}}\right)$$

Si la masa se libera del reposo en $x = b$, y la velocidad en $x = 0$ está dada por

$$v_0 = \sqrt{2\int_0^b f(x)dx}$$

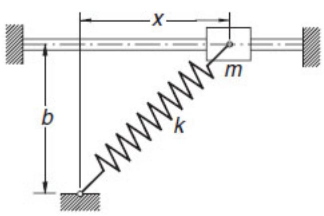



Figura 3: Masa unida a un resorte.

Calcular mediante integración numérica el valor de $v_0$, usando $m = 0.8$ k, $b = 0.4$ m, $\mu = 0.3$, $k = 80$ N/m y $g = 9.81\ m/s^2$.