Tarea 2 - Operaciones matemáticas básicas
Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

1. La viscosidad cinemática μ_k del agua varía con la temperatura T de la siguiente manera:

$T(°C)$	0	21.1	37.8	54.4	71.1	87.8	100
$\mu_k(10^{-3}m^2/s)$	1.79	1.13	0.696	0.519	0.338	0.321	0.296

   Interpolar μ_k para $T = 10°, 30°, 60°$ y $90°$.

2. La siguiente tabla muesta como la densidad relativa ρ del aire varía con la altitud h. Calcula la densidad relativa del aire en 10.5 km.

$h(km))$	0	1.525	3.050	4.575	6.10	7.625	9.150
ρ	1	0.8617	0.7385	0.6292	0.5328	0.4481	0.3741

3. Encuentra todas las raíces positivas de las siguientes ecuaciones mediante el método de bisección, con una tolerancia de 0.001.

   a) $\tan(x) - x + 1 = 0; \qquad 0 < x < 3\pi$
   b) $\sin(x) - 0.3\exp(x) = 0; \qquad x > 0$
   c) $-x^3 + x + 1 = 0$
   d) $16x^5 - 20x^3 + x^2 + 5x - 0.5 = 0$

4. Determina las raíces de las siguientes ecuaciones mediante el método de la falsa posición modificada:

   a) $f(x) = 0.5\exp(\frac{x}{3}) - \sin(x); \qquad x > 0$
   b) $g(x) = \log(1 + x) - x^2$
   c) $f(x) = \exp(x) - 5x^2$
   d) $h(x) = x^3 + 2x - 1 = 0$
   e) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

5. Encuentra las raíces de las ecuaciones del problema (3) mediante el método de Newton-Raphson, con una tolerancia de 0.0001

6. Identifica el intervalo para las raíces de las siguientes ecuaciones y calcula despúes las raíces mediante el método de la secante, con una tolerancia de 0.001:

   a) $0.1x^3 - 5x^2 - x + 4 + \exp(-x) = 0$
   b) $\ln(x) - 0.2x^2 + 1 = 0$
   c) $x + \dfrac{1}{(x+3)x} = 0$

7. Usando una aproximación por diferencias finitas de orden $O(h^2)$, calcula $f'(2.36)$ y $f''(2.36)$, a partir de los datos:

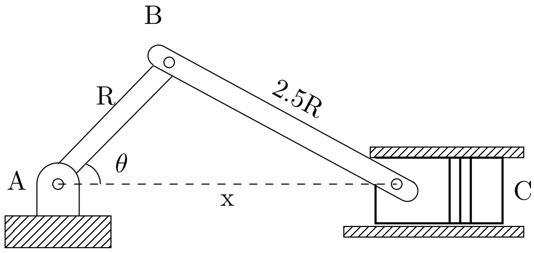
x	2.36	2.37	2.38	2.39
f(x)	0.85866	0.86289	0.86710	0.87129

8. Dados los siguientes datos

x	0.84	0.92	1.00	1.08	1.16
f(x)	0.431711	0.398519	0.367879	0.339596	0.312486

Calcula $f''(1)$ con la mayor precisión posible.

9. La palanca AB de longitud $R = 90$ mm está girando con velocidad angular constante $d\theta/dt = 5000$ rev/min.



La posición del pistón C como se muestra, varía con el ángulo θ

$$x = R\left(\cos\theta + \sqrt{2.5^2 - \sin^2\theta}\right)$$

Escribe un programa en python que calcule mediante diferenciación numérica la aceleración del pistón en $\theta = 0°, 5°, 10°, \ldots, 180°$.

10. Las estaciones de radar A y B están separadas por una distancia $a = 500$ m; rastrean el avión C registrando los ángulos α y β en intervalos de un segundo. Si hay tres lecturas sucesivas

t(s)	9	10	11
α	54.80°	54.06°	53.34°
β	65.59°	64.59°	63.62°

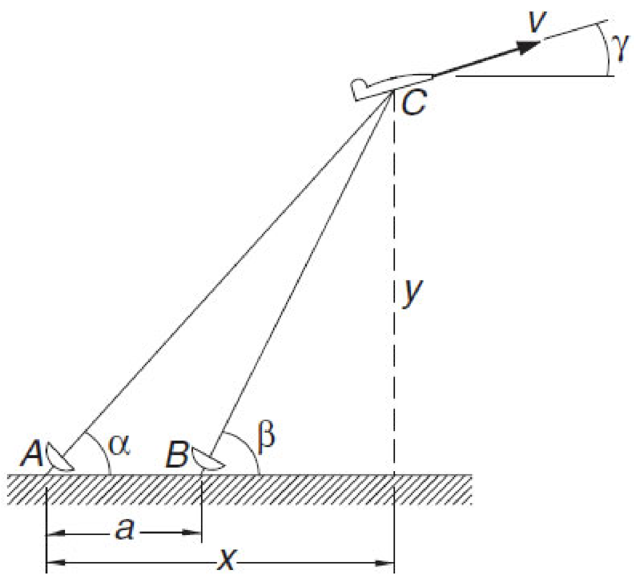


Figura 1: Estaciones de radar y el avión.

Calcula la velocidad v del avión y el ángulo de subida γ en $t = 10$ segundos. Las coordenadas del avión las tomamos de

$$x = a\frac{\tan\beta}{tan\beta - tan\alpha} \qquad y = a\frac{tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

11. Obtén la aproximación por diferencias centrales de $f''(x)$ de orden $O(h^4)$ aplicando la extrapolación de Richardson a la aproximación por diferencias centrales de orden $O(h^2)$.

12. Obtén la primera aproximación por diferencias centrales para $f^4(x)$ a partir de la serie de Taylor.

13. Usa la regla del trapecio recursiva para evaluar

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(1 + \tan(x))dx$$

Explica tus resultados.

14. La siguiente tabla indica la potencia P propocionada por las ruedas de un carro como función de la velocidad v. Si la masa del carro es $m = 2000$ kg, calcula el tiempo Δt necesario para que el carro acelere de 1 m/s a 6 m/s. Usa la regla del trapecio para integrar. Tip:

$$\Delta t = m\int_{1s}^{6s}\left(\frac{v}{P}\right)dv$$

que se puede obtener de la ley de Newton $F = m/(dv/dt)$ y por la definición de potencia, $P = Fv$.

v (m/s)	0	1.0	1.8	2.4	3.5	4.4	5.1	6.0
P (kW)	0	4.7	12.2	19.0	31.8	40.1	43.8	43.2

15. La siguiente tabla proporciona el empuje F del arco como función del desplazamiento x. Si la cuerda tiene un desplazamiento de 0.5 m, calcula la velocidad de una flecha de 0.075 kg, cuando sale del arco. Tip: la energía cinética de la flecha es igual al trabajo hecho al estirar la cuerda, que es:

$$m\frac{v^2}{2} = \int_0^{0.5m} Fdx$$

x (m)	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
F (N)	0	37	71	104	134	161

x (m)	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
F (N)	185	207	225	239	250

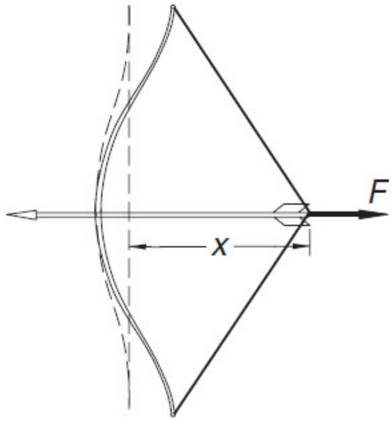


Figura 2: Flecha para el ejercicio

16. El período de un péndulo de longitud L es $\tau = 4\sqrt{\frac{L}{g}}h(\theta_0)$, donde g es la aceleración debida a la gravedad, θ_0, representa la amplitud angular y

$$h(\theta_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin^2\theta}}$$

Calcular $h(15°)$, $h(30°)$ y $h(45°)$; compara esos valores con $h(0°) = \frac{\pi}{2}$ (la aproximación usada para pequeñas amplitudes)

17. La fórmula de Debye para la capacidad calorífica C_v de un sólido, es $C_v = 9Nkg(u)$, donde

$$g(u) = u^3 \int_0^{1/u} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)} dx$$

los términos de la ecuación son:

$N =$ Número de partículas en el sólido

$k =$ Constante de Boltzmann

$u = \dfrac{T}{\Theta_D}$

$T =$ temperatura absoluta

$\Theta_D =$ Temperatura de Debye

Calcular $g(u)$ para $u = 0$ a 1.0 en intervalos de 0.05, grafica los resultados.

18. Una masa m está unida a un resorte de longitud b y rigidez k. Se puede demostrar que la aceleración de la masa es $\ddot{x} = -f(x)$, donde

$$f(x) = \mu g + \frac{k}{m}(\mu b + x)\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}}\right)$$

Si la masa se libera del reposo en $x = b$, y la velocidad en $x = 0$ está dada por

$$v_0 = \sqrt{2\int_0^b f(x)dx}$$

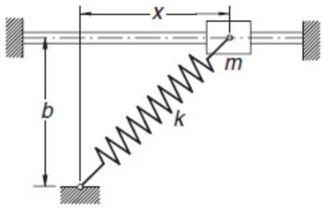


Figura 3: Masa unida a un resorte.

Calcular mediante integración numérica el valor de v_0, usando $m = 0.8$ k, $b = 0.4$ m, $\mu = 0.3$, $k = 80$ N/m y $g = 9.81\ m/s^2$.

19. Las integrales de Fresnel

$$C(w) = \int_0^w \cos\left(\frac{\pi\, u^2}{2}\right)\, du$$

$$S(w) = \int_0^w \sin\left(\frac{\pi\, u^2}{2}\right)\, du$$

son la base de la teoría de la difracción óptica. Calcula las integrales para $-3.5 \leq w \leq 3.5$, genera una gráfica de $S(w)$ contra $C(w)$, las curvas obtenidas se les llama *espial de Cornu*.