Ecuaciones diferenciales ordinarias

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

30 de abril de 2020

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Introducción.

Las ecuaciones diferenciales tienen importancia fundamental en las aplicaciones, ya que muchas leyes y relaciones físicas pueden expresarse matemáticamente de esta forma.

En particular, el estudio de problemas de equilibrio de sistemas continuos se encuentra dentro de este contexto.

Aviso de consideración

No sería mala idea hacer un repaso en casa sobre estas definiciones y los métodos analíticos de solución de las *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* EDO.

Ecuación diferencial

Esta ecuación relaciona dos o más variables en términos de derivadas o diferenciales.

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos x$$

$$(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$$

$$\left[\frac{x^2w}{dx^2}\right]^3 - xy\frac{dw}{dx} = 0$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y parciales

Si en una ecuación diferencial hay una sola variable independiente, las derivadas son totales y se le llama *ecuación ordinaria*.

Si en la ecuación hay dos o más variables independientes, las derivadas serán parciales y se le llama *ecuación parcial*.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Orden de una ecuación diferencial

Es la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Grado de una ecuación diferencial

Es el grado *algebraico* de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Ecuación diferencial lineal

Una ecuación diferencial es lineal si en ella no aparecen potencias de la variable dependiente y sus derivadas, ni productos de la variable dependiente por sus derivadas o productos entre derivadas.

Solución de una ecuación diferencial

Es cualquier relación funcional que no incluya derivadas o integrales de funciones desconocidas y que implique a la propia ecuación diferencial, en el sentido de que la verifique por sustitución directa.

Ecuación y condiciones homogéneas

Una ecuación o condición es homogénea si, cuando es satisfecha por una función particular $y(x)$, también es satisfecha por $cy(x)$, donde c es una constante arbitraria.

Solución de una ecuación diferencial

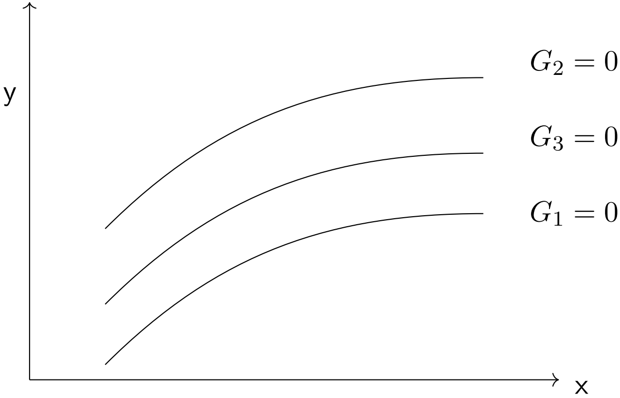
Sea una ecuación diferencial ordinaria de orden n y cualquier grado, cuya forma más general es:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Se establece del cálculo que en su solución general deben de aparecer n constantes arbitrarias. Entonces puede aceptarse como solución general:

$$G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

Solución de una EDO



Ejemplo

Gráficamente esta ecuación representa a una familia de curvas planas, cada una de ellas obtenidas para valores particulares de las n constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$

Tipos de problemas

Dependiendo de cómo se establezcan estas condiciones, se distinguen dos tipos de problemas los llamados *de valores iniciales* y los *de valores en la frontera*.

Problemas de valores iniciales

Está gobernado por una ecuación diferencial de orden n y un conjunto de n condiciones independientes, todas ellas válidas para el mismo punto inicial.

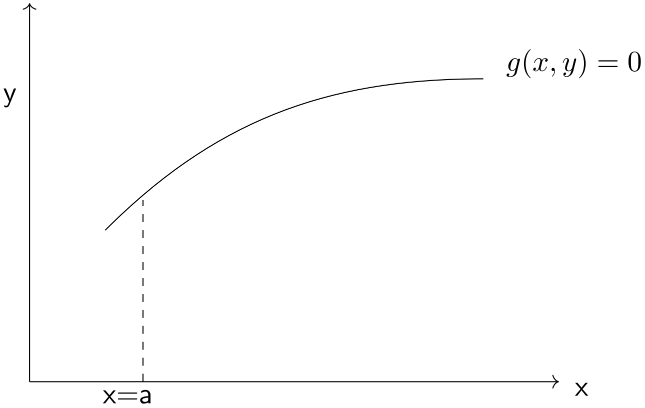
Si la ecuación diferencial que define el problema es del tipo de la EDO con la que iniciamos y $x = a$ es el punto inicial, puede aceptarse que las n condiciones independientes son:

n condiciones independientes

$$
\begin{aligned}
y(a) &= y_0 \\
y'(a) &= y_0' \\
y''(a) &= y_0'' \\
&\vdots \\
y^n(a) &= y_0^n
\end{aligned}
$$

Y se tratará de obtener una solución particular de la EDO inicial que verifique las condiciones iniciales, como se presenta en la siguiente figura:

Solución de una EDO con condiciones inciales

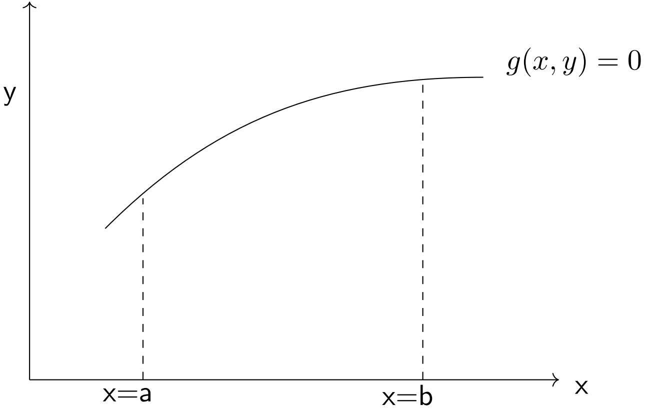


Problemas de valores en la frontera

Se deben de establecer condiciones de frontera en todos y cada uno de los puntos que constituyen la frontera del dominio de soluciones del problema.

En particular, en el espacio de una dimensión, hay dos puntos frontera, por ejemplo $x = a$ y $x = b$ si el dominio de soluciones es el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$

Solución de una EDO con condiciones de frontera



Estrategia de solución

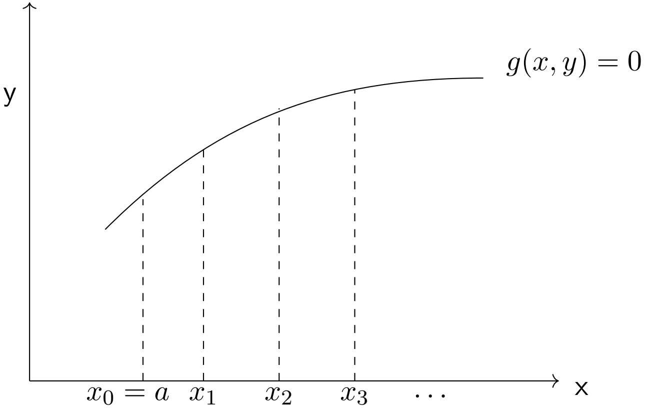
Básicamente la solución numérica de las ecuaciones diferenciales consiste en sustituir el dominio continuo de soluciones por uno discreto formado por puntos aislados igualmente espaciados entre sí.

Problema de valores iniciales

El dominio de definición de soluciones $x \geq a$ se sustituye por el conjunto infinito numerable de puntos:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= a \\
x_1 &= x_0 + h \\
x_2 &= x_0 + 2h \\
x_3 &= x_0 + 3h \\
\dots
\end{aligned}
$$

Valores inciales

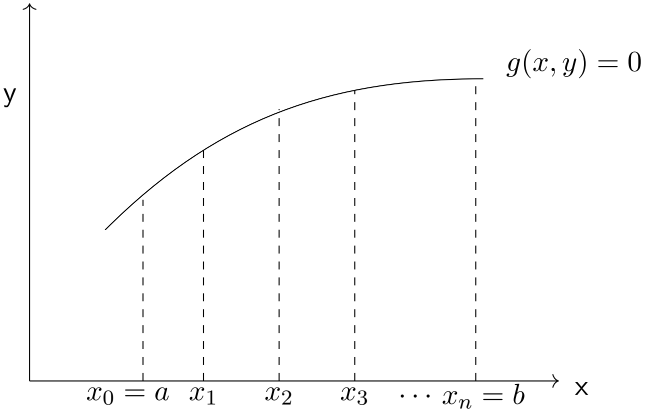


Problema de valores en la frontera

Se sustituye el intervalo $a \leq x \leq b$ por el conjunto finito de puntos:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= a \\
x_1 &= x_0 + h \\
x_2 &= x_0 + 2h \\
x_3 &= x_0 + 3h \\
\ldots \\
x_n &= x_0 + nh = b
\end{aligned}
$$

Valores en la frontera



Nuestra tarea

Habiéndose discretizado el problema continuo, se tratará de obtener la solución para los puntos considerados, esto se resuelve en general, sustituyendo las derivadas que aparezcan en la ecuación diferencial y en sus condiciones iniciales o de frontera, por fórmulas numéricas de derivación que proporcionen una aproximación a a las derivadas o tratando de integrar la ecuación, reemplazando el proceso de integración por una fórmula numérica que se aproxime a la integral.

Contenido

Problemas de valores iniciales

Debemos de resovler

$$y' = F(x, y)$$

con la condición auxiliar $y(a) = \alpha$

Forma general de una EDO de 1er. orden

La forma general de una ecuación diferencial de primer orden (1-EDO) es

$$y' = f(x, y)$$

donde $y' = dy/dx$ y $f(x, y)$ es una función dada.

La solución de esta ecuación incluye una constante arbitraria (la constante de integración); para hallar esa constante, debemos conocer un punto en la curva solución, esto es, y debe de especificarse para algún valor de x, $x = a$. Entonces, escribimos, la condición auxiliar $y(a) = \alpha$

Una ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

se puede transformar en un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden; usemos la notación

$$\begin{aligned} y_0 &= y \\ y_1 &= y' \\ y_2 &= y'' \\ \ldots& \\ y_{n-1} &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

Las ecuaciones 1-EDO equivalentes son:

$$
\begin{aligned}
y_0' &= y_1 \\
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= y_3 \\
\ldots \\
y_n' &= f(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})
\end{aligned}
$$

La solución ahora requiere de n condiciones auxiliares; si esas condiciones se especifican para el mismo valor de x, el problema se dice que es *un problema de valores iniciales*.

Las condiciones auxiliares, se llaman *condiciones iniciales*, que tienen la forma:

$$y_0(a) = \alpha_0 \qquad y_1(a) = \alpha_1 \qquad \ldots \qquad y_{n-1}(a) = \alpha_{n-1}$$

Si y_i se especifica para diferentes valores de x, el problema se llama *problema con condiciones de frontera*, por ejemplo:

$$y'' = -y \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

es un problema de condiciones iniciales, ya que ambas condiciones están definidas en la solución para $x = 0$, en cambio

$$y'' = -y \qquad y(0) = 1 \qquad y'(\pi) = 0$$

es un problema con condiciones de frontera, ya que las dos condiciones se cumplen para diferentes valores de x.

Notación usada para el tema EDO

Se usará de manera continua y por conveniencia, la notación vectorial, que nos permitirá manejar conjuntos de 1-EDO de una manera más clara, de tal manera que podremos expresar:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}) \qquad \mathbf{y}(a) = \alpha$$

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ f(x, \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

Contenido

Método de la Serie de Taylor

El método de la Serie de Taylor es sencillo conceptualmente y con una mayor precisión.

Se basa en la serie de Taylor truncada para y alrededor de x:

$$y(x+h) \simeq y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2!}y''(x)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(x)h^3 + \\ + \ldots + \frac{1}{m!}y^{(m)}(x)h^m$$

La fórmula anterior predice el valor de y en $x + h$ con la información disponible de x, y es también una fórmula de integración numérica.

El último término en la serie determina el orden de integración, en el ejemplo el orden de integración, es m.

Error de truncamiento

El error debido al truncamiento, es:

$$E = \frac{1}{(m+1)!} y^{(m+1)}(\xi) h^{m+1}, \qquad x < \xi < x + h$$

Usando la aproximación por diferencias finitas

$$y^{(m+1)}(\xi) \simeq \frac{y^{(m)}(x+h) - y^{(m)}(x)}{h}$$

para obtener una expresión más amigable

$$E \simeq \frac{h^m}{(m+1)!}\left[y^{(m)}(x+h) - y^{(m)}(x)\right]$$

la cual se puede incorporar en el algoritmo y revisar el error en cada paso de integración.

Contenido

La función `taylor`

Vamos a construir una función que use el método de series de Taylor con un cuarto orden de integración.

Con esta función podremos manejar cualquier número de 1-EDO $y_i = f_i(x, y_0, y_1, \ldots)$, con $i = 0, 1, \ldots$

El usuario deberá de proporcionar la función `deriv` que devuelva el arreglo de $4 \times n$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (\mathbf{y}')^T \\ (\mathbf{y}'')^T \\ (\mathbf{y}''')^T \\ (\mathbf{y}^4)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0' & y_1' & \cdots & y_{n-1}' \\ y_0'' & y_1'' & \cdots & y_{n-1}'' \\ y_0''' & y_1''' & \cdots & y_{n-1}''' \\ y_0^4 & y_1^4 & \cdots & y_{n-1}^4 \end{bmatrix}$$

La función devuelve los arreglos `X` y `Y` que contienen los valores de x y de y en intervalos h.

```
def taylor(deriv,x,y,xAlto,h):
    X=[]
    Y=[]
    X.append(x)
    Y.append(y)
    while x<xAlto:
        h= min(h,xAlto-x)
        D= deriv(x,y)
        H= 1.0
        for j in range(4):
            H = H*h /(j+1)
            y = y + D[j]*H
        x= x+h
        X.append(x)
        Y.append(y)
    return array(X), array(Y)
```

Rutinas para visualizar los resultados

A continuación se presentan dos rutinas que nos ayudarán a visualizar mejor los resultados en pantalla.

Usaremos la función `imprimeSoln` para imprimir X y Y obtenidas de la integración numérica, la cantidad de datos, se controla con el parámetro `freq`, si `freq=5`, cada cinco pasos, se presentará el valor, si `freq=0`, el valor inicial y el final, se presentarán.

```
def imprimeSoln(X,Y,freq):

    def imprimeEncabezado(n):
        print '\n x ',
        for i in range (n):
            print ' y[',i,']',
        print

     def imprimeLinea(x,y,n):
         print '%13.4e' %x,
         for i in range (n):
             print '%13.4e' %y[i],
             print
   m = len(Y)
```

```
    try: n = len(Y[0])
    except TypeError: n = 1
    if freq == 0: freq = m

    imprimeEncabezado(n)
    for i in range(0,m,freq):
        imprimeLinea(X[i],Y[i],n)
    if i != m - 1: imprimeLinea(X[m - 1],Y[m - 1],n)
```

Ejemplo 1

Dada la 1-EDO

$$y' + 4y = x^2 \qquad y(0) = 1$$

Calcular

1. $y(0.1)$ con el método de la serie de Taylor de cuarto orden, usando un paso de integración.
2. también calcula el error estimado, compáralo con la solución exacta.

   La solución analítica de la EDO es:

$$y = \frac{31}{32}\exp(-4x) + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}$$

Solución

La serie de Taylor que incluye el término con h^4 es

$$y(h) = y(0) + y'(0)h + \frac{1}{2!}y''(0)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(0)h^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(0)h^4$$

Haciendo las derivadas

$$\begin{aligned}
y' &= -4y + x^2 \\
y'' &= -4y' + 2x = 16y - 4x^2 + 2x \\
y''' &= 16y' - 8x + 2 = -64y + 16x^2 - 8x + 2 \\
y^{(4)} &= -64y' + 32x - 8 = 256y - 64x^2 + 32x - 8
\end{aligned}$$

Que en $x = 0$

$$
\begin{aligned}
y'(0) &= -4(1) = -4 \\
y''(0) &= 16(1) = 16 \\
Y'''(0) &= -64(1) + 2 = -62 \\
y^{(4)}(0) &= 256(1) - 8 = 248
\end{aligned}
$$

Con $h = 0.1$, resulta

$$
\begin{aligned}
y(0.1) = 1 + (-4)(0.1) + \frac{1}{2!}(16)(0.1)^2 + \\
&+ \frac{1}{3!}(-62)(0.1)^3 + \frac{1}{4!}(248)(0.1)^4 \\
&= 0.670700
\end{aligned}
$$

Ahora evaluamos el error

$$E = \frac{h^4}{5!}\left[y^{(4)}(0.1) - y^{(4)}(0)\right]$$

donde

$$\begin{aligned} y^{(4)}(0) &= 248 \\ y^{(4)}(0.1) &= 256(0.6707) - 64(0.1)^2 + 32(0.1) - 8 = \\ &= 166.259 \end{aligned}$$

por tanto

$$E = \frac{(0.1)^4}{5!}(166.259 - 248) = -6.8 \times 10^5$$

La solución analítica, nos devuelve el valor

$$y(0.1) = 0.670623$$

por lo que el error es
$0.670623 - 0670700 = -7.7 \times 10^{-5}$

Ejercicio 2

Resolver

$$y'' = -0.1y' - x \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

de $x = 0$ hasta $x = 2$ con el método de la serie de Taylor de orden cuatro, usa $h = 0.25$ y las funciones `taylor` e `imprimeSoln`

Solución

Usemos la notación $y_0 = y$ y $y_1 = y'$ para un conjunto de 1-EDO, con las condiciones iniciales

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_0' \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -0.1y_1 - x \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Repetimos la diferenciación

$$\mathbf{y}'' = \begin{bmatrix} y_1' \\ -0.1y_1' - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1y_1 - x \\ 0.01y_1 + 0.1x - 1 \end{bmatrix}$$

Repetimos la diferenciación

$$\mathbf{y}'' = \begin{bmatrix} y_1' \\ -0.1y_1' - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1y_1 - x \\ 0.01y_1 + 0.1x - 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}''' = \begin{bmatrix} -0.1y_1' - 1 \\ -0.01y_1' + 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01y_1 - 0.1x - 1 \\ 0.001y_1 + 0.01x + 0.1 \end{bmatrix}$$

Repetimos la diferenciación

$$\mathbf{y}'' = \begin{bmatrix} y_1' \\ -0.1y_1' - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1y_1 - x \\ 0.01y_1 + 0.1x - 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}''' = \begin{bmatrix} -0.1y_1' - 1 \\ -0.01y_1' + 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01y_1 - 0.1x - 1 \\ 0.001y_1 + 0.01x + 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.01y_1' + 0.1 \\ -0.001y_1' - 0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.001y_1 - 0.01x + 0.1 \\ 0.0001y_1 + 0.001x - 0.01 \end{bmatrix}$$

Por tanto el arreglo de derivadas para usarlas en la función `deriv` es:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} y_1 & -0.1y_1 - x \\ -0.1y_1 - x & 0.01y_1 + 0.1x - 1 \\ 0.01y_1 + 0.1x - 1 & -0.001y_1 - 0.01x + 0.1 \\ -0.001y_1 - 0.01x + 0.1 & 0.0001y_1 + 0.001x - 0.01 \end{bmatrix}$$

```
def deriv(x,y):
    D = zeros(4,2)

    D[0] = [y[1] , -0.1 * y[1] - x ]
    D[1] = [D[0,1], 0.01 * y[1] + 0.1 * x - 1.0 ]
    D[2] = [D[1,1], -0.001 * y[1] - 0.01 * x + 0.1 ]
    D[3] = [D[2,1], 0.0001 * y[1] + 0.001 * x - 0.01 ]

    return D
```

```
x = 0.0
xAlto = 2.0
y = array([0.0,1.0])
h = 0.25
freq = 1
X,Y = taylor(deriv,x, y, xAlto,h)

imprimeSoln(X,Y,freq)
```

Contenido

Métodos de Runge-Kutta

La principal desventaja de los métodos de Euler es que su precisión es baja. Para hacer que el nivel de precisión aumente, hay que reducir h, pero esto genera que se lleve más tiempo en el cálculo y se propague el error por redondeo.

Sea una EDO:

$$y' = f(y,t), \qquad y(0) = y_0$$

Para calcular $y_{n+1} = t_n + h$ dando un valor de y_n se integra la EDO en el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y,t)dt$$

Se resuelve la ecuación del lado derecho mediante integración numérica.

Runge-Kutta de segundo orden

Aplicando la regla del trapecio al lado derecho de la ecuación anterior:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y,t)dt \simeq \frac{1}{2}h[f(y_n,t_n) + f(y_{n+1},t_{n+1})]$$

En esta ecuación el término y_{n+1} es una incógnita, por lo que se aproxima el segundo término mediante $f(y*_{n+1}, t_{n+1})$ donde $y*_{n+1}$ es la primera estimación de y_{n+1} obtenido por el método de Euler hacia adelante.

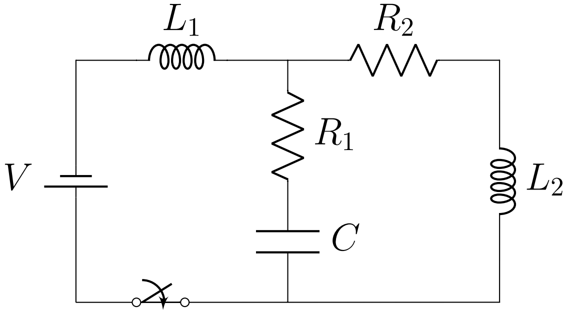
$$y*_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(y_n, t_n) + f(y*_{n+1}, t_{n+1})]$$

De manera canónica, podemos escribir:

$$k_1 = hf(y_n, t_n)$$
$$k_2 = hf(y_n + k_1, t_{n+1})$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$$

Ejercicio

El circuito que se muestra, tiene una autoinductancia de $L = 50$ H, una resistencia de $R = 20\Omega$, y una fuente de $V = 10$ V.



En $t = 0$, I(t) satisface

$$L \frac{d}{dt} I(t) + RI(t) = V, \qquad I(0) = 0$$

Usando el esquema de Runge-Kutta de segundo orden (RK2), calcular la corriente para $0 \leq t \leq 10$ segundos, con $h = 0.1$

Se reescribe la ecuación como

$$\frac{d}{dt}I = -\frac{R}{L}I + \frac{V}{L} = f(I, t)$$

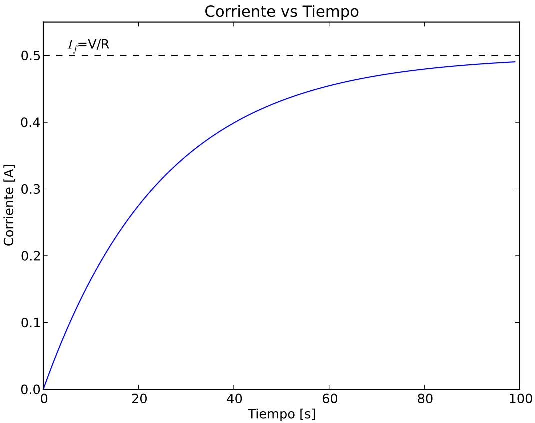
Aplicando el método RK2, tenemos

$$k_1 = h\left[-\frac{R}{L}I_n + \frac{V}{L}\right]$$

$$k_2 = h\left[-\frac{R}{L}(I_n + k_1) + \frac{V}{L}\right]$$

$$I_{n+1} = I_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Resultado gráfico



```
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt

L=50.0
R=20.0
V=10.0
h=0.1
corriente=0
I=[]
I.append(0)

for i in range(99):
    k1=h*((-R/L)*corriente+(V/L))
    k2=h*((-R/L)*(corriente+k1)+(V/L))
    corriente=corriente+(k1+k2)*0.5
    I.append(corriente)
```

La rutina para la gráfica con `matplotlib` la pueden implementar sin mayor problema.

Nótese que el valor de corriente límite corresponde a $I_f = V/R$ que alcanzaría en un tiempo mucho mayor.