Examen 2 - Operaciones matemáticas básicas

Solución

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

25 de abril de 2013

Contenido

Contenido

Problema 1

La función gamma $\Gamma(x)$, se define como la siguiente integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

que converge para todo x positivo, pese a que para $0 < x < 1$ el integrando tiene una divergencia en $t = 0$.
Calcula numéricamente a partir de la defínción anterior, la Γ para $x = 10$ y $x = 1/2$, valores para los cuales se conocen los resultados analíticos:

$$\Gamma(10) = 9! = 362880$$
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

En cada caso debes:

1. indicar el cambio de variable utilizado.
2. el número de puntos utilizados en la discretización.
3. el método de integración.
4. el resultado obtenido.
5. el error cometido respecto al valor analítico.

Problema 1, inciso a)

1. No se requiere cambio de variable.
2. Con $n = 10$.
3. Usando el método del trapecio.
4. El resultado es: 362877.41
5. El error relativo es: 7.1408×10^{-6}

La función gamma al igual que otras funciones, vienen contenidas en el módulo `special` de `scipy`:

```
from scipy import special
special.gamma(x)
```

Ejercicio 1, inciso b)

De la definición de la función $\Gamma(x)$, tenemos para $x = 1/2$:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{1/2-1} e^{-t} dt$$

por tanto

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt$$

y aquí es donde tendremos problemas, ya que aunque hagamos integración por partes, llegaremos de nuevo a un producto con t elevada a una fracción.

Hagamos el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} t &= z^2 \\ dt &= 2z dz \end{aligned}$$

Por lo que al sustituir en la integral inicial y revisando los nuevos límites de integración, resulta que

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = \int_0^\infty \left(z^2\right)^{-1/2} e^{-z^2} 2z dz$$

Por tanto

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty z^{-1/2} e^{-z^2} 2z dz$$

es decir

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^\infty e^{-z^2} dz$$

Que es la función de interés para integrar.

Con $n = 20$ y usando el método del trapecio, tenemos que el valor de la integral es: 1.752927 con un error relativo de 1.952674×10^{-2}

Problema 2

Evalúa numéricamente las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx$$

$$I_2 = \int_0^{1} \frac{1+x}{1-x^3} \ln \frac{1}{x} dx$$

El problema consiste en resolver las integrales con algún cambio de variable para tener un integrando suave en un intervalo finito.

Se debe de obtener un resultado razonablemente bueno, teniendo que evaluar el integrando final con el menor número (N) de veces que sea posible. Como criterio de convergencia debes de usar alguna cantidad como

$$\epsilon = \frac{I - I_N}{I} < 10^{-n}$$

con n $= 2, 3, 4, 5, 6$

En cada caso debes:

1. indicar el(los) cambio(s) de variable utilizado(s).
2. el número de puntos utilizados en la discretización.
3. el método de integración.
4. el resultado obtenido.
5. el error cometido respecto al valor de I.

Nota: no se vale usar integración por partes.