Ejercicio 1:

La densidad del aire ρ varía con la altura de la siguiente manera:

h(km)	0	3	6
ρ(kg/m³)	1.225	0.905	0.652

Define ρ(h) como una función cuadrática a partir del método de Lagrange.

Respuesta:

Podemos definir al polinomio de Lagrange como:

$$P(x) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(x) f(x_k)$$

donde:

$$\lambda_k(x) = \frac{\prod_{l=1\neq k}(x - x_l)}{\prod_{l=1\neq k}(x_k - x_l)}$$

Calculemos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\lambda_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{x^2 - x(x_3+x_2) + x_2x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{x^2 - x(6+3) + (3)(6)}{(0-3)(0-6)} = \frac{x^2 - 9x + 18}{18}$$

$$\lambda_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{x^2 - x(x_1+x_3) + x_1x_3}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{x^2 - x(0+6) + (0)(6)}{(3-0)(3-6)} = \frac{x^2 - 6x}{-9}$$

$$\lambda_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x^2 - x(x_1+x_2) + x_1x_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x^2 - x(0+3) + (0)(3)}{(6-0)(6-3)} = \frac{x^2 - 3x}{18}$$

Entonces el polinomio:

$$P(x) = \lambda_1(x) f(x_1) + \lambda_2(x) f(x_2) + \lambda_3(x) f(x_3)$$

$$P(x) = (x^2 - 9x + 18)\left(\frac{1.225}{18}\right) + (x^2 - 6x)\left(-\frac{0.905}{9}\right) + (x^2 - 3x)\left(\frac{0.652}{18}\right)$$

$$P(x) = (x^2 - 9x + 18)(.06806) + (x^2 - 6x)(-0.1006) + (x^2 - 3x)(0.0362)$$

Agrupando y sumando términos:

$$P(x) = 0.00366x^2 - 0.11754x + 1.22508$$

Es decir $\rho(h) = 0.00366h^2 - 0.11754h + 1.22508$

Si lo graficamos, podemos comprobar que la función cuadrática corresponde a los valores de la tabla inicial.