

Tema 2 - Operaciones matemáticas básicas

Técnicas de Interpolación II

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

13 de septiembre de 2012

Contenido

- 1 Interpolación de Newton
 - Diferencias divididas
- 2 Forma general
- 3 Polonimio de Newton-Gregory y diferencias
 - Ejemplo
- 4 Consideraciones a la interpolación
- 5 Extrapolación

Contenido

- 1 Interpolación de Newton
 - Diferencias divididas
- 2 Forma general
- 3 Polonimio de Newton-Gregory y diferencias
 - Ejemplo
- 4 Consideraciones a la interpolación
- 5 Extrapolación

Contenido

- 1 Interpolación de Newton
 - Diferencias divididas
- 2 Forma general
- 3 Polonimio de Newton-Gregory y diferencias
 - Ejemplo
- 4 Consideraciones a la interpolación
- 5 Extrapolación

Contenido

- 1 Interpolación de Newton
 - Diferencias divididas
- 2 Forma general
- 3 Polonimio de Newton-Gregory y diferencias
 - Ejemplo
- 4 Consideraciones a la interpolación
- 5 Extrapolación

Contenido

- 1 Interpolación de Newton
 - Diferencias divididas
- 2 Forma general
- 3 Polonimio de Newton-Gregory y diferencias
 - Ejemplo
- 4 Consideraciones a la interpolación
- 5 Extrapolación

Interpolación de Newton

El polinomio de Newton es una forma más eficiente de evaluar el polinomio de interpolación. En este método, se calcula una tabla de diferencias divididas una vez, y éstas son utilizadas para cada dato que se vaya a interpolar.

Diferencias divididas

Las diferencias divididas se definen de la siguiente manera:

- 1 Diferencia dividida de orden 0:

$$f(x_i) = f_i$$

- 2 Diferencia dividida de orden 1:

$$f(x_i, x_j) = \frac{f_j - f_i}{x_j - x_i}$$

- 3 Diferencia dividida de orden 2:

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}$$

1 Diferencia de orden más alto:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{\mathcal{L}}) = \frac{f(x_2, x_3, \dots, x_{\mathcal{L}}) - f(x_1, x_2, \dots, x_{\mathcal{L}-1})}{x_{\mathcal{L}} - x_1}$$

1 Diferencia de orden más alto:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{\mathcal{L}}) = \frac{f(x_2, x_3, \dots, x_{\mathcal{L}}) - f(x_1, x_2, \dots, x_{\mathcal{L}-1})}{x_{\mathcal{L}} - x_1}$$

La tabla de diferencias es:

i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, \dots, x_{i+2})$	$f(x_i, \dots, x_{i+3})$	$f(x_i, \dots, x_{i+4})$	$f(x_i, \dots, x_{i+5})$
1	f_1	$f(x_1, x_2)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$	$f(x_1, \dots, x_6)$
2	f_2	$f(x_2, x_3)$	$f(x_2, x_3, x_4)$	$f(x_2, x_3, x_4, x_5)$	$f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$	
3	f_3	$f(x_3, x_4)$	$f(x_3, x_4, x_5)$	$f(x_3, x_4, x_5, x_6)$		
4	f_4	$f(x_4, x_5)$	$f(x_4, x_5, x_6)$			
5	f_5	$f(x_5, x_6)$				
6	f_6					

Forma general

El polinomio de Newton tiene la siguiente forma general:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) + \\ &\quad + \dots + a_{n+1}(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a_i \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j) \end{aligned}$$

donde

$$a_i = f(x_1, x_2, \dots, x_i)$$

Ejemplo

Consideremos la tabla de datos:

x_i	0.4	2.5	4.3	5.0	6.0
f_i	1.00	0.50	2.00	2.55	4.00

Se desea interpolar éstos datos mediante el polinomio de Newton, para $x = 5.2$

Construyendo al tabla de diferencias

De acuerdo con lo que vimos hace rato, para las diferencias de orden 1:

$$f(x_1) = 1.00$$

Construyendo al tabla de diferencias

De acuerdo con lo que vimos hace rato, para las diferencias de orden 1:

$$f(x_1) = 1.00$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{0.50 - 1.00}{2.5 - 0.4} = -0.2381$$

Construyendo al tabla de diferencias

De acuerdo con lo que vimos hace rato, para las diferencias de orden 1:

$$f(x_1) = 1.00$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{0.50 - 1.00}{2.5 - 0.4} = -0.2381$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{2.00 - 0.50}{4.3 - 2.5} = 0.8333$$

Construyendo al tabla de diferencias

De acuerdo con lo que vimos hace rato, para las diferencias de orden 1:

$$f(x_1) = 1.00$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{0.50 - 1.00}{2.5 - 0.4} = -0.2381$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{2.00 - 0.50}{4.3 - 2.5} = 0.8333$$

$$f(x_3, x_4) = \frac{2.55 - 2.00}{5.0 - 4.3} = 0.7857$$

Construyendo al tabla de diferencias

De acuerdo con lo que vimos hace rato, para las diferencias de orden 1:

$$f(x_1) = 1.00$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{0.50 - 1.00}{2.5 - 0.4} = -0.2381$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{2.00 - 0.50}{4.3 - 2.5} = 0.8333$$

$$f(x_3, x_4) = \frac{2.55 - 2.00}{5.0 - 4.3} = 0.7857$$

$$f(x_4, x_5) = \frac{4.00 - 2.55}{6.0 - 5.0} = 1.45$$

Construyendo al tabla de diferencias

Diferencias de orden 2:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}$$

Continuamos las cuentas hasta obtener toda la tabla:

Construyendo al tabla de diferencias

Diferencias de orden 2:

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} \\&= \frac{0.8333 - (-0.2381)}{4.3 - 0.4}\end{aligned}$$

Continuamos las cuentas hasta obtener toda la tabla:

Construyendo al tabla de diferencias

Diferencias de orden 2:

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} \\&= \frac{0.8333 - (-0.2381)}{4.3 - 0.4} \\&= 0.2747\end{aligned}$$

Continuamos las cuentas hasta obtener toda la tabla:

Tabla de diferencias divididas

i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, \dots, x_{i+2})$	$f(x_i, \dots, x_{i+3})$	$f(x_i, \dots, x_{i+4})$
1	1.00	-0.2381	0.2747	-0.0639	0.0323
2	0.50	0.8333	-0.0190	0.1171	
3	2.00	0.7857	0.3908		
4	2.55	1.4500			
5	4.00				

Evaluación del polinomio de Newton

$$\begin{aligned}P_4(x) = & a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) + \\& + a_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \\& + a_5(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\end{aligned}$$

Evaluación del polinomio de Newton

$$\begin{aligned}P_4(x) = & a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) + \\& + a_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \\& + a_5(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_4(5.2) = & 1.0000 + (-0.2381)(5.2 - 0.4) + \\& + 0.2747(5.2 - 0.4)(5.2 - 2.5) + \\& + (-0.0639)(5.2 - 0.4)(5.2 - 2.5)(5.2 - 4.3) + \\& + 0.0323(5.2 - 0.4)(5.2 - 2.5)(5.2 - 4.3)(5.2 - 5.0)\end{aligned}$$

Evaluación del polinomio de Newton

$$\begin{aligned}P_4(x) = & a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) + \\& + a_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \\& + a_5(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_4(5.2) = & 1.0000 + (-0.2381)(5.2 - 0.4) + \\& + 0.2747(5.2 - 0.4)(5.2 - 2.5) + \\& + (-0.0639)(5.2 - 0.4)(5.2 - 2.5)(5.2 - 4.3) + \\& + 0.0323(5.2 - 0.4)(5.2 - 2.5)(5.2 - 4.3)(5.2 - 5.0)\end{aligned}$$

$$P_4(5.2) = 2.7481$$

Polonimio de Newton-Gregory y diferencias

Se dice que los datos están uniformemente espaciados si $x_{i+1} - x_i = \delta x$ es constante para $i = 1, 2, 3, \dots$. Para el caso particular de datos uniformemente espaciados, es posible encontrar una forma más sencilla del polinomio de Newton. Esta forma más sencilla se basa en diferencias que se definen de la siguiente manera:

- ① Diferencia de orden 0:

$$\Delta^0 f_i = f_i$$

- ② Diferencia de orden 1:

$$\Delta^1 f_i = f_{i+1} - f_i$$

- ③ Diferencia de orden 2:

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta^1 f_i) = \Delta^2 f_{i+1} - \Delta^1 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

La diferencia de orden k :

$$\Delta^k f_i = f_{i+k} - k f_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} f_{i+k-2} + \\ - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} f_{i+k-3} + \dots$$

Forma general del polinomio Newton-Gregory de orden n

$$\begin{aligned}P_n(x_{k+1}) &= f_1 + k\Delta f_1 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 f_1 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 f_1 + \dots \\&= \binom{k}{0}\Delta^0 f_1 + \binom{k}{1}\Delta^1 f_1 + \binom{k}{2}\Delta^2 f_1 + \binom{k}{3}\Delta^3 f_1 + \dots \\&= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}\Delta^i f_1\end{aligned}$$

para $k = 1, 2, \dots, n$

Para interpolar mediante el polinomio de Newton-Gregory se calcula un índice no entero s , mediante la siguiente expresión:

$$s = \frac{x - x_1}{\Delta x}$$

El valor de s se sustituye en el polinomio:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \binom{s}{i} \Delta^i f_1$$

Ejemplo

Calculemos el valor de interpolación para el valor de $x = 0.73$ mediante el polinomio de Newton-Gregory para los valores de la tabla del ejercicio anterior.

x_i	0.4	0.6	0.8	1.0
f_i	0.423	0.684	1.030	1.557

La tabla de diferencias queda de la siguiente manera:

i	x_i	$\Delta^0 f_i$	$\Delta^1 f_i$	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
1	0.4	0.423	0.261	0.085	0.096
2	0.6	0.684	0.346	0.181	
3	0.8	1.030	0.527		
4	1.0	1.557			

Se calcula el valor de s :

$$s = \frac{x - x_1}{\Delta x} = \frac{0.73 - 0.4}{0.2} = 1.65$$

Sustituimos el valor de s en el polinomio de Newton-Gregory:

$$f(0.73) = f_1 + s\Delta_1 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_1 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_1$$

Se calcula el valor de s :

$$s = \frac{x - x_1}{\Delta x} = \frac{0.73 - 0.4}{0.2} = 1.65$$

Sustituimos el valor de s en el polinomio de Newton-Gregory:

$$f(0.73) = f_1 + s\Delta_1 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_1 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_1$$

$$\begin{aligned} f(0.73) = & 0.423 + 1.65(0.261) + \frac{1.65(0.65)}{2}0.085 + \\ & + \frac{1.65(0.65)(-0.35)}{6}0.096 \end{aligned}$$

Se calcula el valor de s :

$$s = \frac{x - x_1}{\Delta x} = \frac{0.73 - 0.4}{0.2} = 1.65$$

Sustituimos el valor de s en el polinomio de Newton-Gregory:

$$f(0.73) = f_1 + s\Delta_1 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_1 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_1$$

$$\begin{aligned} f(0.73) = & 0.423 + 1.65(0.261) + \frac{1.65(0.65)}{2}0.085 + \\ & + \frac{1.65(0.65)(-0.35)}{6}0.096 \end{aligned}$$

$$f(0.73) = 0.893$$

Ejemplo

Usando la técnica de interpolación de Newton-Gregory, a partir del siguiente conjunto de datos:

x_i	0.4	0.6	0.8	1.0
f_i	0.423	0.684	1.030	1.557

estima el valor de interpolación para:
 $x = 0.43, 0.49, 0.5, 0.55, 0.73, 0.75, 0.91, 0.95$

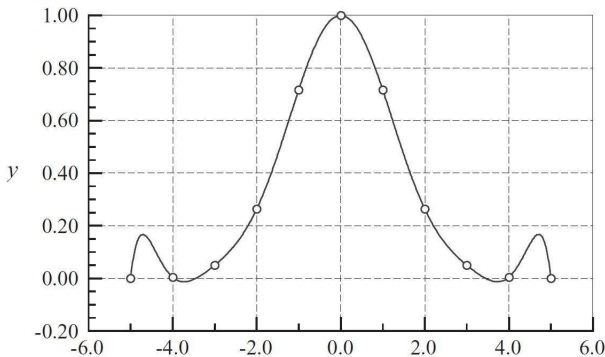
Consideraciones a la interpolación

El uso de técnicas de interpolación polinomial debe de usar con el menor número posible de datos. Con la interpolación lineal, con los dos puntos vecinos, es a menudo más que suficiente, si los datos están cercanos.

Usando de tres a seis puntos vecinos, podemos encontrar buenos resultados de manera general, mientras que para una interpolación con más puntos no nos debe de confiar demasiado.

Usar más puntos que están alejados, no contribuyen a mejorar la exactitud de la interpolación, de hecho, pueden ser perjudiciales para la misma.

En la siguiente figura se muestra el peligro de usar demasiados puntos al interpolar: se tienen 11 puntos con separación uniforme, la línea sólida es el polinomio de interpolación, que es un polinomio de grado 10 y que cruza todos los puntos.



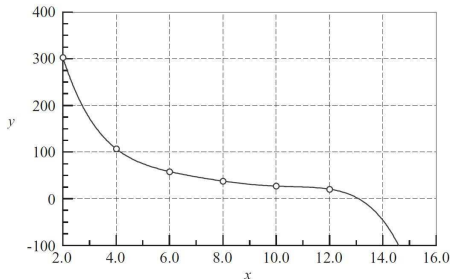
En la figura se nota que un polinomio de un grado tan alto, tiene la tendencia de oscilar excesivamente entre los puntos.

Un resultado mucho más "suave", se obtendría mediante el uso de una interpolación cúbica con cuatro puntos vecinos más cercanos.

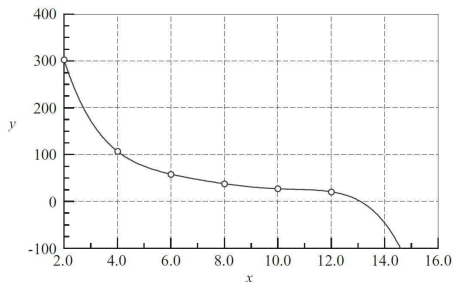
¿La extrapolación es riesgosa?

La extrapolación mediante polinomios (es decir, calcular valores fuera del conjunto de datos) tiene sus riesgos.

Veamos la siguiente figura en donde hay seis puntos, que se muestran con círculos.



El polinomio de interpolación de quinto grado, se muestra por la línea continua. Dentro el conjunto de datos, el polinomio se ve bien, es decir, ajusta los datos, pero tiene un cambio drástico para valores de $x \geq 12$.



Si extrapolamos por ejemplo y en $x = 14$, no tendría sentido ni caso.

Si no podemos evitar la extrapolación, consideremos los siguientes puntos que nos pueden ayudar:

- 1 Grafica los datos y verifica que el valor extrapolado tiene sentido.
- 2 Usa un polinomio de orden de orden menor, en case a los puntos vecinos más cercanos.

Una interpolación lineal o cuadrática se podría usar para estimar el valor de $y(14)$ de la gráfica anterior.

Con un diagrama log-log en la mayoría de las veces, tendremos una línea recta, que es mucho más manejable al momento de extrapolar.

