Tema 1 - Solución del examen

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

28 de febrero de 2013

Contenido

1 Problema 2

2 Problema 3

3 Problema 4

4 Problema 5

Contenido

1. Problema 2
2. Problema 3
3. Problema 4
4. Problema 5

Contenido

1. Problema 2
2. Problema 3
3. Problema 4
4. Problema 5

Contenido

1. Problema 2
2. Problema 3
3. Problema 4
4. Problema 5

Problema 2

Un problema clásico en cómputo científico, es la suma de una serie para evaluar una función. Sea la serie de potencias para la función exponencial:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (x^2 < \infty)$$

Utiliza la serie anterior para calcular el valor de e^{-x} para $x = 0.1, 1, 10, 100, 1000$ con un error absoluto para cada caso, menor a 10^{-8}

Tomemos en cuenta que no está indicado el punto en donde se debe de cortar la serie de potencias, por lo que nuestra tarea es calcular el valor de $\exp(-x)$ de tal manera en que se calcule el error y se revise que sea menor a 10^{-8}:

x	valor	término
0.1		
1		
10		
100		
1000		

Podemos crear una función que nos calcule el valor de la exponencial con el argumento y que revise el error debido entre la diferencia del valor calculado contra el valor exacto que tomamos de $\exp(x)$.

Y para hacer el proceso más eficiente, podemos incluir un ciclo que calcule los valores y diferencias en un sólo paso.

Tabla de resultados completa

x	n	$\exp(-x)$	valor
0.1	6	0.9048374180359595	0.904837416666667
1	12	0.3678794411714423	0.367879439233606
10	40	4.5399929762484854e-05	4.539008559460963e-05
100			
1000			

Vemos que para valores de 100 y 1000, Python ya se queja por un **Overflow**

Problema 3

Usando el método de Horner, completa la tabla de valores de los puntos de evaluación y el valor calculado con el método de Horner; el polinomio es:

$$p(x) = 2x^4 - 20x^3 + 70x^2 + 100x + 48$$

para valores de x en el intervalo $[-4, -1]$, con saltos de x de valor $\Delta x = 0.5$.

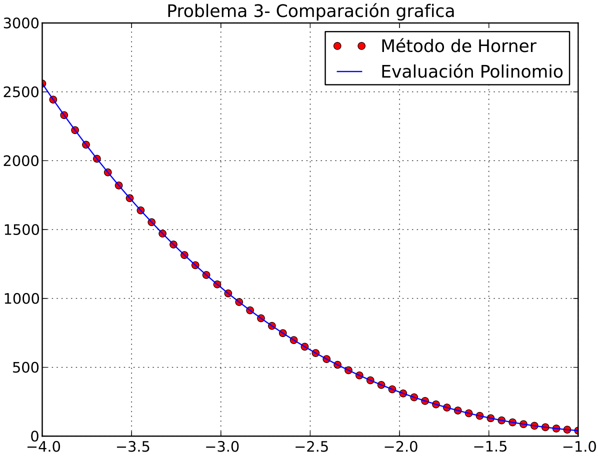
Grafica los puntos obtenidos y el polinomio $p(x)$, interpreta los resultados obtenidos.

Primeramente tenemos que completar la tabla:

x	valor
-4.0	
-3.5	
-3.0	
...	
-1.5	
-1.0	

Usamos el código que ya habíamos discutido en una de las clase; obtenemos entonces el siguiente resultado:

x	valor
-4.0	2560.0
-3.5	1713.125
-3.0	1080.0
-2.5	626.125
-2.0	320.0
-1.5	133.125
-1.0	40.0


Problema 3- Comparación grafica
Método de Horner
Evaluación Polinomio
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
−4.0
−3.5
−3.0
−2.5
−2.0
−1.5
−1.0

Problema 4

El valor de π se puede calcular aproximando el área de un círculo unitario como el límite de una sucesión $p_1, p_2, \ldots$ descrita a continuación:
Se divide un círculo unitario en 2^n sectores (en el ejemplo, $n = 3$). Se aproxima el área del sector por el área del triángulo isóceles. El ángulo θ_n es $2\pi/2^n$. El área del triángulo es $1/2 \sin \theta_n$.

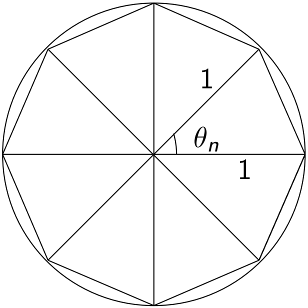


Figura: División en n sectores.

La enésima aproximación a π es: $p_n = 2^{n-1} \sin \theta_n$. Demuestra que

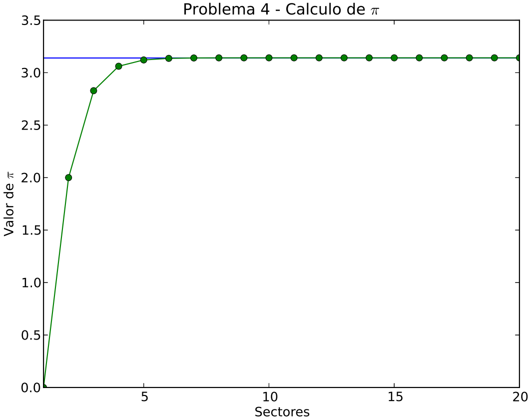
$$\sin \theta_n = \frac{\sin \theta_{n-1}}{\left(2\left[1 + (1 - \sin^2 \theta_{n-1})^{\frac{1}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Usa esta relación de recurrencia para generar las sucesiones $\sin \theta_n$ y p_n en el rango $3 \leq n \leq 20$ iniciando con $\sin \theta_2 = 1$. Compara tus resultados con el valor de $4.0 \arctan(1.0)$

Para este ejercicio lo que hacemos es obtener primero el valor del $\sin(\theta_n)$ y después, ocupar ese valor para el cálculo del valor de p_n, aquí mismo podemos obtener el valor del error relativo, por lo que tendremos una tabla del tipo:

n	valor de π	error
3	2.82842712475	1.107207e-01
4	3.06146745892	2.617215e-02
5	3.12144515226	6.454543e-03
6	3.13654849055	1.608189e-03
7	3.14033115695	4.017082e-04
...		
19	3.14159265351	2.393685e-11
20	3.14159265357	5.984108e-12

Para comprender lo que ocurre mientras aumentamos el número de segmentos y el valor del área, lo tenemos al graficar:



Problema 5

La sucesión de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ está definida por la relación de recurrencia lineal

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1 \\ \lambda_n = \lambda_{n-1} + \lambda_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

Una fórmula para obtener el n-ésimo número de Fibonacci es

$$\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \right]^n - \left[\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \right]^n \right\}$$

Calcula λ_n en $3 \leq n \leq 50$ usando tanto la relación de recurrencia como la fórmula. Discute los resultados obtenidos.

Para resolver este problema, lo que tenemos que hacer es definir un par de funciones que nos devuelvan el valor del n-ésimo número de la serie de Fibonacci, para luego obtener el error relativo.

La manera para presentar los resultados, sería en una tabla del tipo:

n	M1	M2	error
3	2	2.000000000000000	0.00e+00
4	3	3.000000000000000	1.48e-16
5	5	5.000000000000001	1.78e-16
6	8	8.000000000000002	2.22e-16
7	13	13.000000000000002	1.37e-16
...			
48	4807526976	4807526976.000007629394531	1.59e-15
49	7778742049	7778742049.000013351440430	1.72e-15
50	12586269025	12586269025.000019073486328	1.52e-15

Para tener una idea visual del resultado, graficamos el valor de π contra los 2^n sectores: