Tarea 3 - Ecuaciones diferenciales ordinarias

Curso de Fï¿½sica Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayï¿½n

1. En la figura (**??**) se muestra un sistema de tres masas. Los desplazamientos de estas tres masas satisfacen las ecuaciones dadas por

$$\begin{aligned} M_1 y_1^{''} + B_1 y_1^{'} + K_1 y_1 - B_1 y_2^{'} - K_2 y_2 &= F_1(t) \\ -B_1 y'_1 - K_1 y_1 + M_2 y_2^{''} + B_1 y_2^{'} + (K_1 + K_2) y_2 - K_2 y_3 &= 0 \\ -K_2 y_2 + M_3 y_3^{''} + B_2 y_3^{'} + (K_2 + K_3) y_3 &= F_3(t) \end{aligned} \tag{1}$$

Las constantes y condiciones iniciales son

$K_1 = K_2 = K_3 = 1$	(constantes de los resortes, kgm/s^2)
$M_1 = M_2 = M_3 = 1$	(masa, kg)
$F_1(t) = 1, F_3(t) = 0$	(fuerza, N)
$B_1 = B_2 = 0{,}1$	(coeficientes de amortiguamiento, kg/s)
$y_1 = 0 = y_1^{'}(0) = y_2 = 0 = y_2^{'}(0) = y_3 = 0 = y_3^{'}(0)$	(condiciones iniciales)

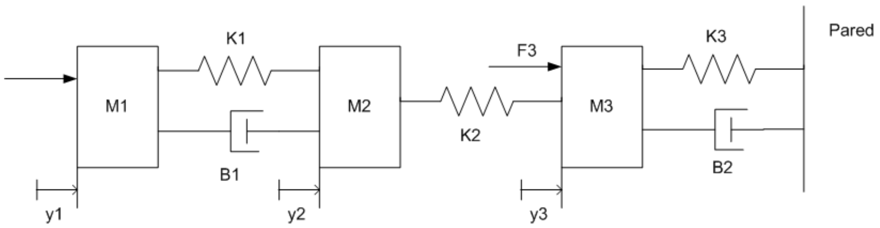

Figura 1: Sistema de masas resortes

Resuelve y grafica las ecuaciones anteriores mediante RK4, para $0 \leq t \leq 30$ segundos y $h = 0{,}1$
Hint: Definiendo

$$y_4 = y_1^{'}, \qquad y_5 = y_2^{'}, \qquad y_6 = y_3^{'}$$

La ecuacï¿½n (**??**) se escribe como un conjunto de seis EDO de primer orden, de la siguiente manera:

$$y_1^{'} = y_4 \tag{2}$$
$$y_2^{'} = y_5 \tag{3}$$
$$y_3^{'} = y_6 \tag{4}$$
$$y_4^{'} = \left[-B_1 y_4 - K_1 y_1 + B_1 y_5 + K_2 y_2 + F_1\right]/M_1 \tag{5}$$
$$y_5^{'} = \left[B_1 y_4 + K_1 y_1 - B_1 y_5 - (K_1 + K_2)\, y_2 + K_2 y_3\right]/M_2 \tag{6}$$
$$y_6^{'} = \left[K_2 y_2 - B_2 y_6 - (K_2 + K_3)\, y_3 + F_3\right]/M_3 \tag{7}$$

2. Una varilla de 1 m de longitud colocada en el vacï¿½o, se calienta mediante una corriente elï¿½ctrica aplicada a la misma. La temperatura en los extremos se fija en 273 K. El calor se disipa de la superficie mediante la transferencia de calor por radiacï¿½n hacia el ambiente, cuya temperatura es 273 K. Con las siguientes constantes, determina la distribucï¿½n de temperatura en la direccï¿½n del eje.

k = 60 W/mK	(conductividad tï¿½rmica)
Q = 50 W/m	(tasa de generaciï¿½n de calor por unidad de longitud de barra)
σ= 5.67 $\times 10^{-8}$ W/$m^2 K^4$	(constante de Stefan-Boltzamann)
A= 0.0001 m^2	(ï¿½rea de la secciï¿½n transversal)
P = 0.01 m	(perï¿½metro de la varilla)

La ecuaciï¿½n de conducciï¿½n de calor en la direcciï¿½n del eje x es

$$-Ak\frac{d^2}{dx^2}T + P\sigma\left(T^4 - 273^4\right) = Q \qquad 0 < x < 1{,}0 \tag{8}$$

con las condiciones de frontera dadas por

$$T(0) = T(1{,}0) = 273K$$

donde T es la temperatura en grados Kelvin.
Este es un problema con condiciones en la frontera (especï¿½ficadas en $x = 0$ y $x = 1$), pero se puede resolver como un problema de condiciï¿½n inicial sobre la base de prueba y error. Definimos y_1 y y_2 como

$$\begin{aligned} y_1(x) &= T(x) \qquad (9)\\ y_2(x) &= T^{'}(x) \qquad (10) \end{aligned}$$

La ecuaciï¿½n (**??**) se puede re-escribir como un conjunto de dos EDO de primer orden como

$$\begin{aligned} y_1^{'} &= y_2 \qquad (11)\\ y_2^{'} &= \frac{P}{Ak}\sigma(y^4 - 273^4) - \frac{Q}{kA} \qquad (12) \end{aligned}$$

Solo se obtiene una condiciï¿½n inicial $y_1 = 273$, a partir de las condiciones de frontera (y_2 no se conoce). Por ello, resolvemos la ecuaciï¿½n (**??**) con valores de prueba para $y_2(0)$, hasta satisfaceer la condiciï¿½n de la frontera para el extremo derecho $y_1(1) = 273$. Este enfoque se llama *mï¿½todo de disparo*.

3. Se dispara un proyectil al aire con un ï¿½ngulo de 45° con respecto al suelo, con $u = v = 150m/s$, donde u y v son las velocidades horizontal y vertical, respectivamente. Las ecuaciones de movimiento estï¿½n dadas por

$$\begin{aligned} u^{'} &= -cVu, \qquad u(0) = 150m/s\\ v^{'} &= -g - cVv, \qquad v(0) = 150m/s \end{aligned}$$

donde u y v son funciones del tiempo, $u = u(t)\ yv = v(t)$ y

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{u^2 + v^2}\\ c &= 0{,}005 \qquad \text{(coeficiente de arrastre)}\\ g &= 9{,}9m/s^2 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento se pueden resolver mediante alguno de los mï¿½todos de Runge-Kutta. La trayectoria del proyectil se puede determinar al integrar

$$x' = u \qquad \text{y} \qquad y' = v$$

o bien

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t u(t^{'})dt^{'}\\ y &= \int_0^t v(t^{'})dt^{'} \end{aligned}$$

a) Escribe un programa en Fortran con el mï¿½todo RK2 que resuelva y grafique la trayectoria del proyectil.

b) Re-escribe el programa, ahora con el metodo RK3.