Examen 3 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Solución

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

4 de noviembre de 2014

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Problema 1

La ecuación diferencial del movimiento de un péndulo simple es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

donde θ es el desplazamiento angular a partir de la vertical, g es la aceleración debida a la gravedad y L la longitud del péndulo.

Con el cambio de variable $\tau = t\sqrt{g/L}$, la ecuación toma la forma:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -\sin\theta$$

Resuelve la ecuación para determinar el período del péndulo, si la amplitud es $\theta_0 = 1$ rad. Considera que para pequeñas amplitudes ($\sin\theta \simeq \theta$) el período es $2\pi\sqrt{L/g}$.

Solución

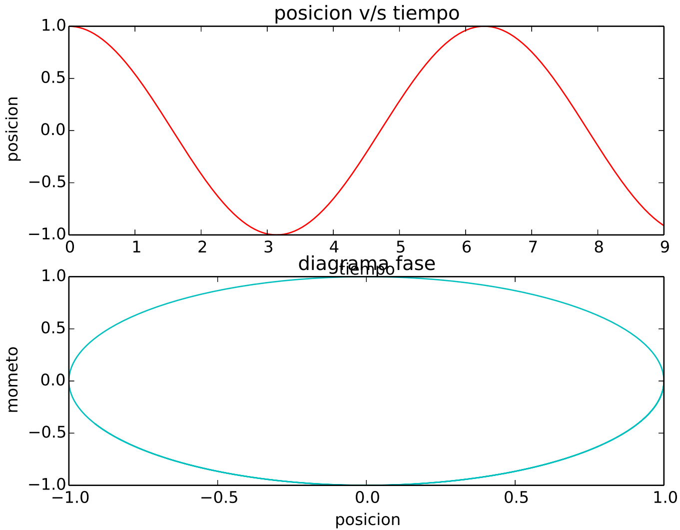
El sistema de 1-EDO que resulta es:

```
def F(x,y):
    F=zeros((2), dtype="float64")
    F[0]=y[1]
    F[1]=-sin(y[0])
    return F

x=0.0
xAlto=9
y=array([1.0,0.0])
h=0.1
freq=5

X,Y=integra(F,x,y,xAlto,h)
```

Gráfica de la solución



Cálculo del período. Modo 1.

Sabemos de la tema anterior de integración que el período de un péndulo de longitud L es $\tau = 4\sqrt{\frac{L}{g}}h(\theta_0)$, donde g es la aceleración debida a la gravedad, θ_0, representa la amplitud angular y

$$h(\theta_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin^2\theta}}$$

Lo que nos devuelve un valor del período de:

$$\tau = 6.283207943236664, 6.975762127089018e - 14$$

Contenido

Problema 2

Un paracaidista de masa m en caída libre vertical experimenta una fuerza de arrastre aerodinámica $F_D = c_D \dot{y}^2$, donde y se mide hacia abajo a partir del comienzo de la caída. La EDO que describe la caída es

$$\ddot{y} = g - \frac{c_D}{m}\dot{y}^2$$

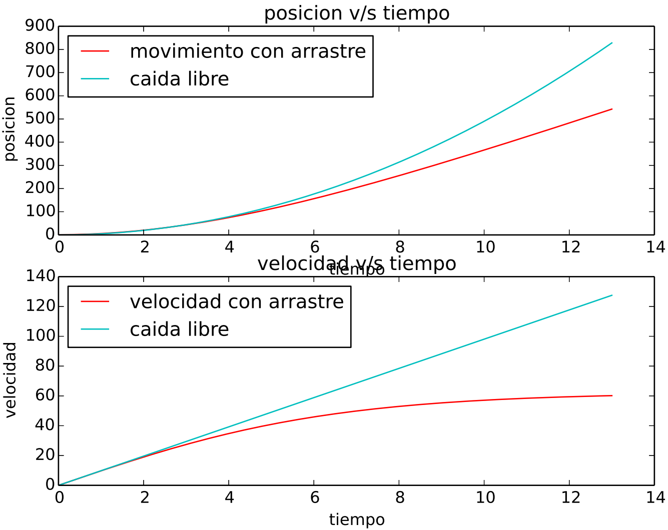
Calcula el tiempo para una caída de 500 m, usa los valores de $g = 9.80665$ m/s^2, $c_D = 0.2028$ kg/m y $m = 80$ kg.

Solución

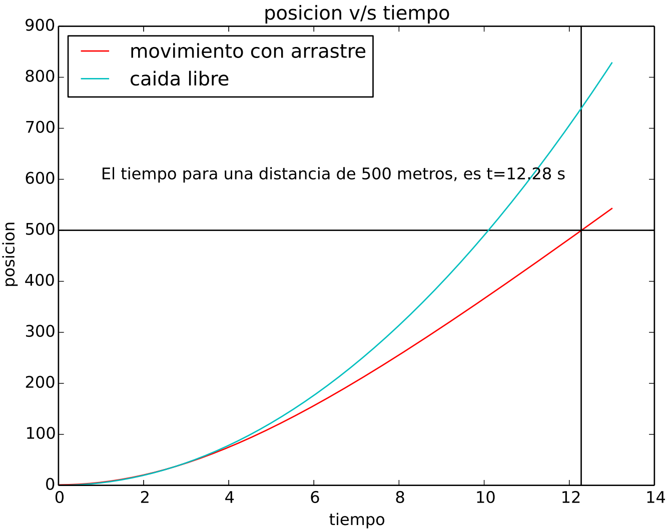
El conjunto de ecuaciones EDO-1 del problema:

```
def F(x,y):
    F = np.zeros((2),dtype='float64')
    F[0] = y[1]
    F[1] = 9.80665-(0.2028/80.0)*(y[1]**2)
    return F
```

Solución gráfica



Solución gráfica

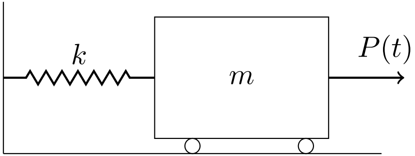


Contenido

Problema 3

Un sistema masa-resorte está en reposo hasta que se le aplica una fuerza $P(t)$, donde

$$P(t) = \begin{cases} 10t \text{ N para } t < 2 \text{ s} \\ 20 \text{ N para } t \geq 2 \text{ s} \end{cases}$$



La EDO del movimiento resultante es

$$\ddot{y} = \frac{P(t)}{m} - \frac{k}{m} y$$

Calcula el desplazamiento máximo de la masa. Usa $m = 0.25$ kg y $k = 75$ N/m.

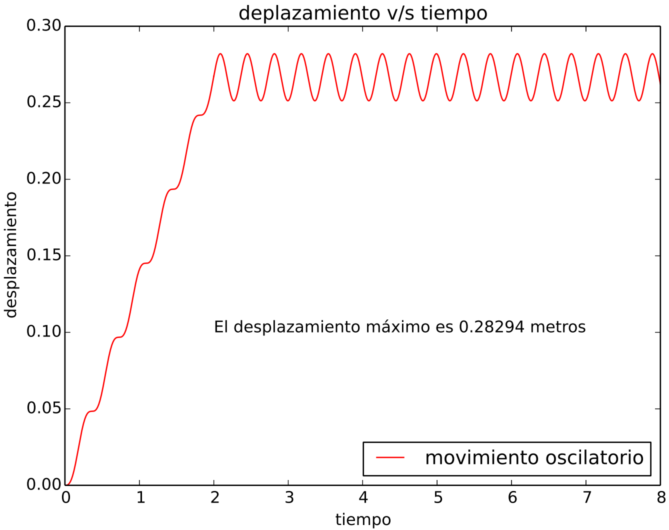
Solución

Como tenemos una fuerza que se aplica en dos momentos, hay que establecer las condiciones de la misma para los intervalos de tiempo que nos indica el problema.

```
def F(x,y):
    F=np.zeros((2),dtype='float64')
    F[0]=y[1]
    F[1]=(1.0/0.25)*(10*x-75*y[0])
    return F

def G(x,y):
    G=np.zeros((2),dtype='float64')
    G[0]=y[1]
    G[1]=(1.0/0.25)*(20.0-75*y[0])
    return G
```

Gráfica de la solución



Contenido

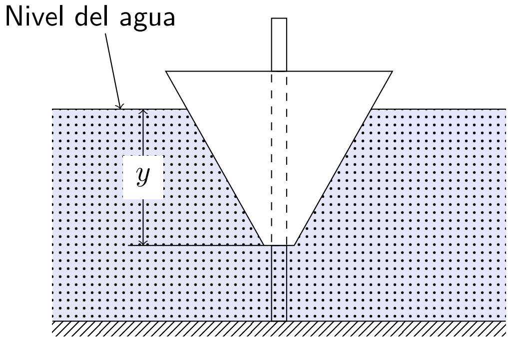
Problema 4

Un flotador cónico se desliza libremente sobre una varilla vertical. Al tocar el flotador, éste pierde su posición de equilibrio, y presenta un movimiento oscilante que se describe por la ecuación diferencial:

$$\ddot{y} = g(1 - ay^3)$$

donde $a = 16$ m^{-3} (que están determinadas por la densidad y dimensiones del flotador) y $g = 9.80665$ m/s^2.

El flotador cónico



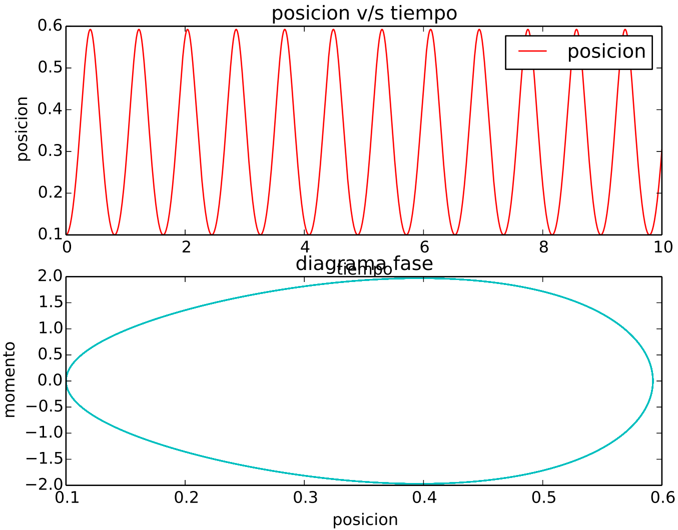
Si el flotador se eleva a la posición $y = 0.1$ m y se libera, determina el período y la amplitud de las oscilaciones.

Solución

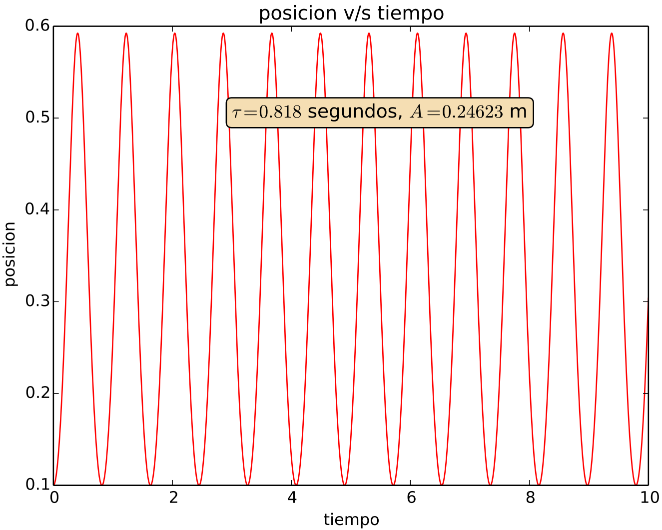
El sistema de EDO-1 que se obtiene para este problema es:

```
def F(x,y):
    F=np.zeros((2),dtype='float64')
    F[0]=y[1]
    F[1]=9.80665*(1-16.0*y[0]**3)
    return F
```

Solución gráfica



Solución gráfica

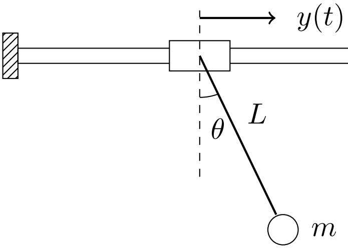


Contenido

Problema 5

Un péndulo está suspendido en un collar deslizante. El sistema está en reposo, posteriormente se aplica al collar un movimiento oscilante $y(t) = Y \sin \omega t$, en $t = 0$. La ecuación diferencial que describe el movimiento del péndulo es

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta + \frac{\omega^2}{L} Y \cos \theta \sin \omega t$$



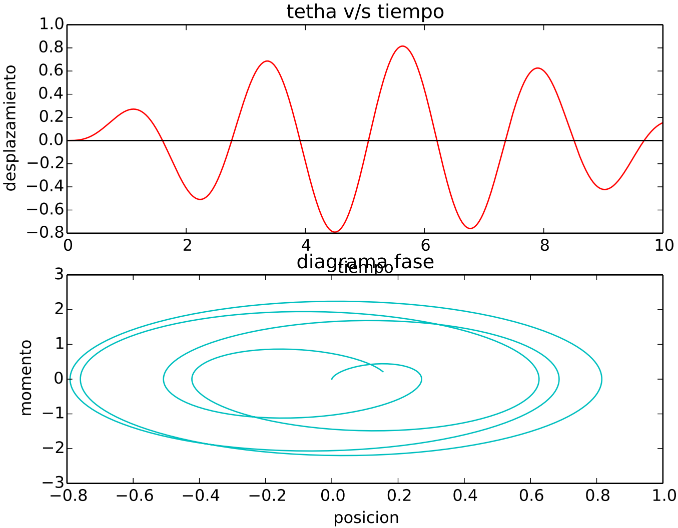
Grafica θ contra t en el intervalo de $t = 0$ a $t = 10$ segundos, así mismo, determina el desplazamiento mayor de θ durante éste período. Usa $g = 9.80665$ m$/s^2$, $L = 1.0$ m, $Y = 0.25$ m y $\omega = 2.5$ rad/s.

Solución

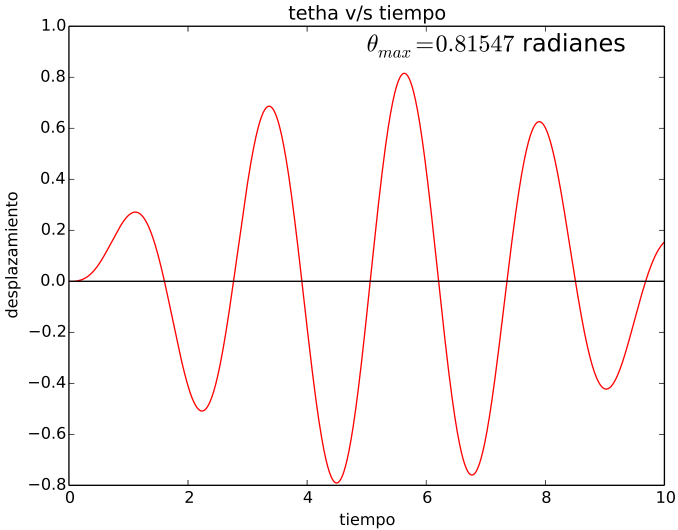
El sistema de EDO-1 necesario para resolver el problema es:

```
def F(x,y):
    F=np.zeros((2),dtype='float64')
    F[0]=y[1]
    F[1]=(-9.80665/1.0)*np.sin(y[0])+((2.5**2)*0.25)*(np.cos(y[0]))*np.sin(2.5*x)
    return F
```

Solución gráfica



Solución gráfica

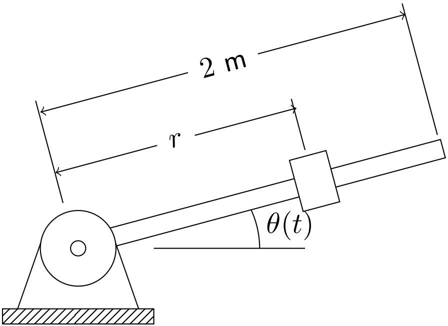


Contenido

Problema 6

Tenemos un sistema que consiste en un masa que se desliza sobre una barra guíaa que está en reposo, la masa se ubica en $r = 0.75$ m. Al tiempo $t = 0$ se enciende un motor que proporiona un movimiento dado por la expresión $\theta(t) = (\pi/12)\cos \pi t$ sobre la barra. La EDO que describe el movimiento resultante de la masa deslizante es:

$$\ddot{r} = \left(\frac{\pi^2}{12}\right)^2 r \sin^2 \pi t - g \sin\left(\frac{\pi}{12}\cos \pi t\right)$$



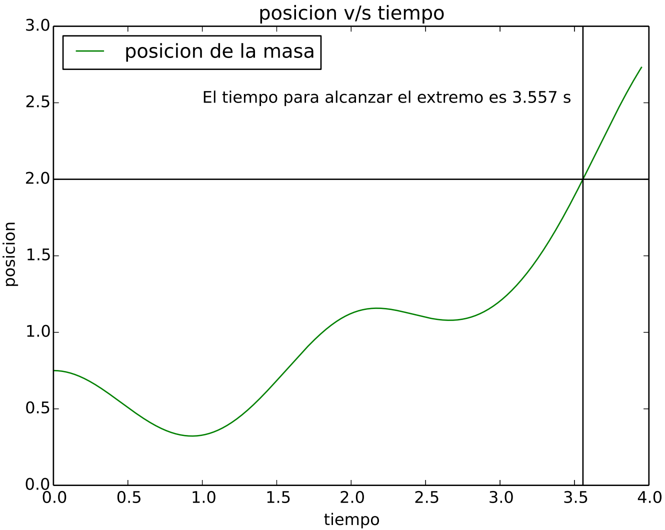
Calcula el tiempo para el cual, la masa deslizante alcanza el extremo final de la barra guía (la punta de la barra). Usa el valor de $g = 9.80665$ m/s^2.

Solución

Establecemos el conjunto de EDO-1

```
def F(x,y):
    F=np.zeros((2),dtype='float64')
    F[0]=y[1]
    F[1]=(((np.pi**2)/12.0)**2)*y[0]*((np.sin
        ((np.pi)*x))**2) \
          -9.80665*(np.sin((np.pi/12.0)*(np.cos
            (x*np.pi))))
    return F
```

Solución gráfica



Contenido

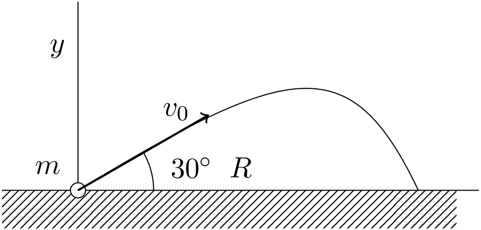
Problema 7

Una bala de masa $m = 0.25$ kg se lanza con una velocidad $v_0 = 50$ m/s en la dirección que se indica en la figura. Si la fuerza aerodinámica de arrastre sobre la bala es $F_D = C_D v^{3/2}$, las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento son:

$$\ddot{x} = -\frac{C_D}{m}\dot{x}v^{1/2} \qquad \ddot{y} = -\frac{C_D}{m}\dot{y}v^{1/2} - g$$

donde $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, $C_D = 0.03$ kg/(ms)$^{1/2}$ y $g = 9.80665$m/s^2.

Calcular el tiempo de vuelo y el alcance R

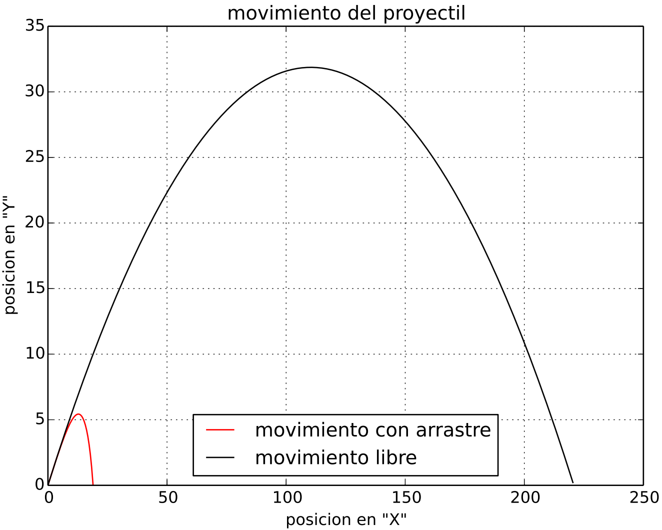


Solución

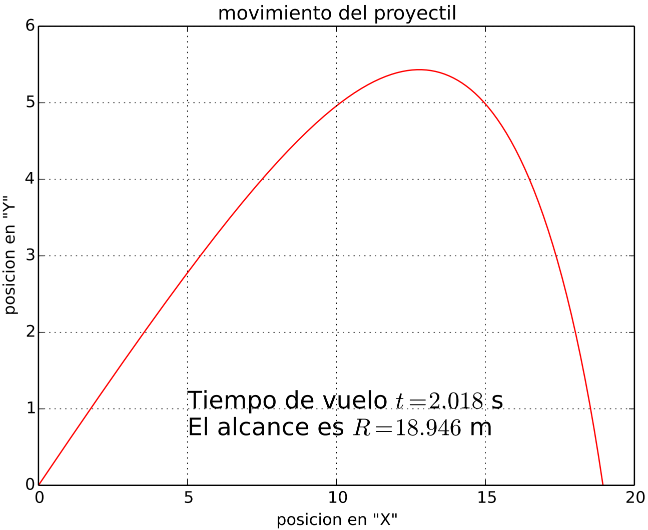
Establecemos el conjunto de EDO-1

```
def F(x,y):
    F=np.zeros((4),dtype='float64')
    F[0]=y[1]
    F[1]=-(0.03/0.25)*y[1]*(np.sqrt(y[1]**2+y
        [3]**2))
    F[2]=y[3]
    F[3]=-(0.03/0.25)*y[3]*(np.sqrt(y[1]**2+y
        [3]**2))-9.80665
    return F
```

Solución gráfica



Solución gráfica



Contenido

Problema 8

La solución al problema

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

es la función de Bessel $J_0(x)$. Integra numéricamente para calcular $J_0(5)$ y compara el resultado con -0.17760, que es el valor que se obtiene de tablas matemáticas. Tip: para evitar la singularidad en $x = 0$, inicia la integración en $x = 10^{-12}$.

Solución

Establecemos el conjunto de EDO-1

```
def F(x,y):
    F=np.zeros((2),dtype='float64')
    F[0]=y[1]
    F[1]=-(1.0/x)*y[1]-y[0]
    return F
```

Solución gráfica