Tema 1 - Propagación de errores

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

Contenido

Modelos para el desastre

Un cálculo que utiliza números que se almacenan de manera aproximada en la computadora, puede devolver una solución aproximada.

Para demostrar este hecho, consideremos que hay un valor de incertidumbre, sea x_c el valor representado en la computadora del valor exacto x, tal que:

$$x_c \simeq x(1 + \epsilon_x)$$

Donde ϵ_x es el error relativo de x_c, el cual se espera que sea similar en magnitud al épsilon de la máquina ϵ_m.

Si usamos ésta notación para una diferencia entre dos valores, tenemos que:

$$a = b - c \;\; \rightarrow a_c \simeq b_c - c_c \simeq b(1 + \epsilon_b) - c(1 + \epsilon_c)$$

$$\rightarrow \frac{a_c}{a} \simeq 1 + \epsilon_b \frac{b}{a} - \frac{c}{a} \epsilon_c$$

Vemos que el error resultante en a es un promedio de los errores en b y c, y no hay seguridad en que los dos términos se cancelen.

El error en a_c se incrementa cuando se restan dos valores cercanos ($b \simeq c$), dado que cuando se restan las cifras más significativas de ambos números, el error de las cifras menos significativas toma la forma de:

$$\frac{a_c}{a} = 1 + \epsilon_a \simeq 1 + \frac{b}{a}(\epsilon_b - \epsilon_c) \simeq 1 + \frac{b}{a} max(|\epsilon_b|, |\epsilon_c|)$$

Ejercicio 1

Aprendimos en la secundaria a resolver la ecuación homogénea de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

que tiene una solución analítica que se puede escribir como

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_{1,2} = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Revisando la expresión anterior vemos que la cancelación de la diferencia (y por tanto, un incremento en el error) aumenta cuando $b^2 >> 4ac$ debido a que la raíz cuadrada y el siguiente término están muy próximas a cancelarse.

Manos al código

1. Escribe un programa que calcule las cuatro soluciones para valores arbitrarios de a, b y c.
2. Revisa cómo los errores obtenidos en los cálculos, aumentan conforme hay una cancelación de la diferencia de términos y su relación con la precisión de la máquina. Prueba con los siguientes valores $a = 1$, $b = 1$, $c = 10^n, n = 1, 2, 3, \ldots$
3. Cómo mejorarías el programa para obtener la mayor precisión en tu respuesta?