Ecuaciones diferenciales ordinarias 3

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

25 de abril de 2013

Contenido

Contenido

RK4 para sistemas de ecuaciones

La aplicación del RK4 a un conjunto de EDO es análoga a la aplicación del método RK2.

Sea un conjunto de dos ecuaciones:

$$y' = f(y, z, t)$$
$$z' = g(y, z, t)$$

El método RK4 para el conjunto de ecuaciones, es:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_n, z_n, t_n) \\
l_1 &= hg(y_n, z_n, t_n) \\
k_2 &= hf\left(y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) \\
l_2 &= hg\left(y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{l_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) \\
l_3 &= hg\left(y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{l_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) \\
k_4 &= hf(y_n + k_3, z_n + l_3, t_n + h) \\
l_4 &= hg(y_n + k_3, z_n + l_3, t_n + h)
\end{aligned}
$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

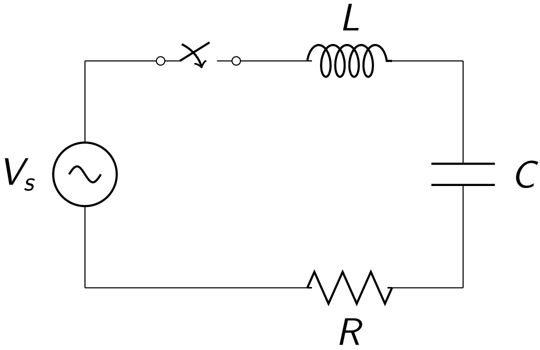
$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}[l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4]$$

Ejecicio

La corriente eléctrica de un circuito RLC en serie, satisface la ecuación

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt' + \frac{1}{C}q(0) = E(t), \qquad t > 0 \tag{1}$$

cuando el circuito se cierra en el instante $t = 0$, se tiene que $i = i(t)$ es la corriente, R es la resistencia, L, C, E vienen dadas por: $L = 200H$, $C = 0.001F$, $E(t) = 1V$ para $t > 0$.



Las condiciones iniciales son $q(0) = 0$ (carga inicial del condensador), $i(0) = 0$.

Calcular la corriente para $0 \leq t \leq 5$ segundos y el factor de amortiguamiento y la frecuencia de oscilación del circuito RLC para los siguientes valores de R:

1. $R = 0\,\Omega$
2. $R = 50\,\Omega$
3. $R = 100\,\Omega$
4. $R = 300\,\Omega$

Si definimos

$$q(t) = \int_0^{t'} i(t')dt' \tag{2}$$

derivando la expresión anterior

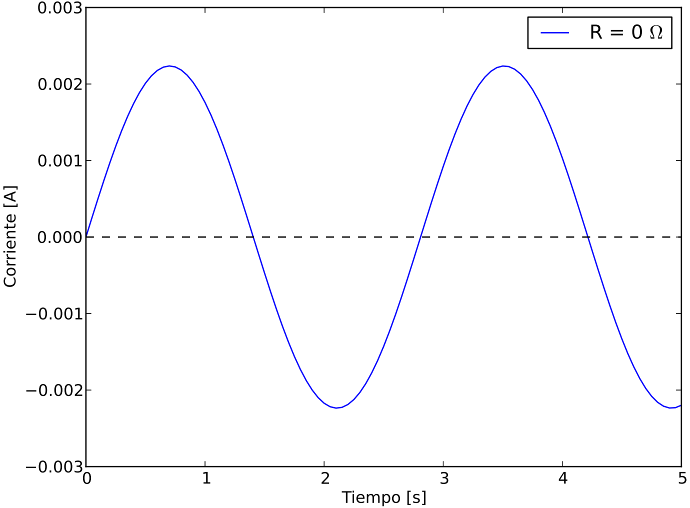
$$\frac{d}{dt}q(t) = i(t), \qquad q(0) = 0 \tag{3}$$

Sustituimos en la ecuació inicial, para re-escribir

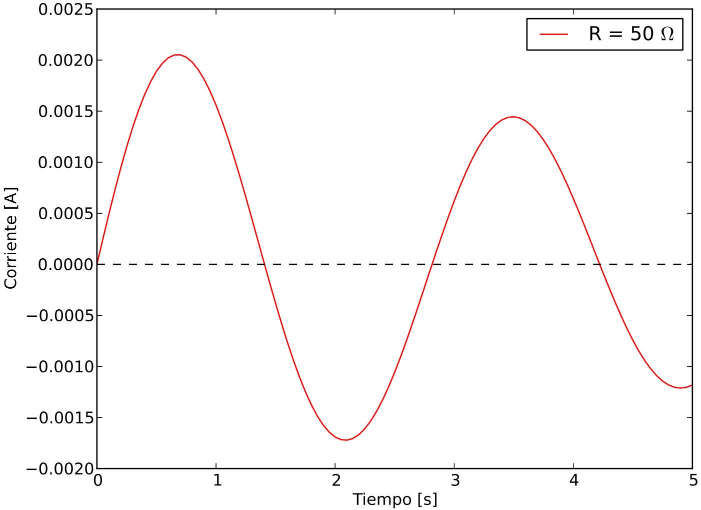
$$\frac{d}{dt}i(t) = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{LC}q(t) + \frac{1}{LC}q(0) + \frac{E(t)}{L}, i(0) = 0 \tag{4}$$

La ecuación (1) se transformó en un sistema de dos EDO de primer orden: las ecuaciones (3) y (4).

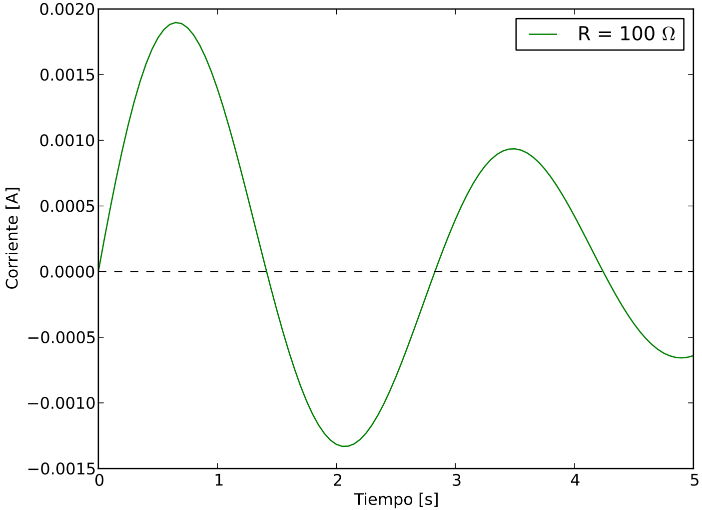
Solución gráfica con $R = 0\Omega$



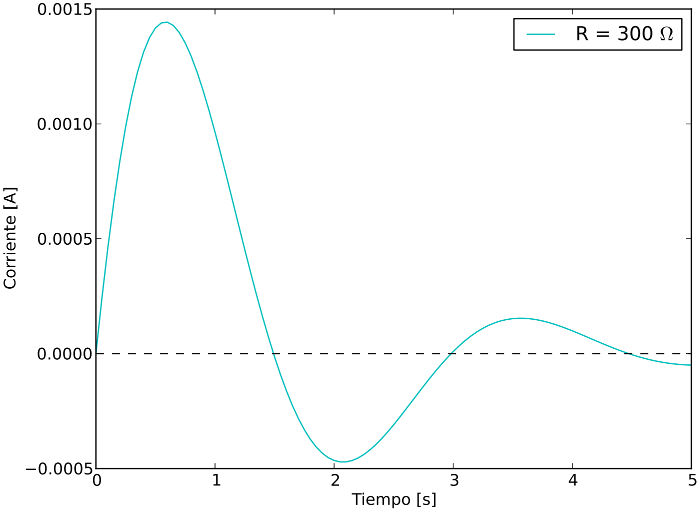
Solución gráfica con $R = 50\Omega$



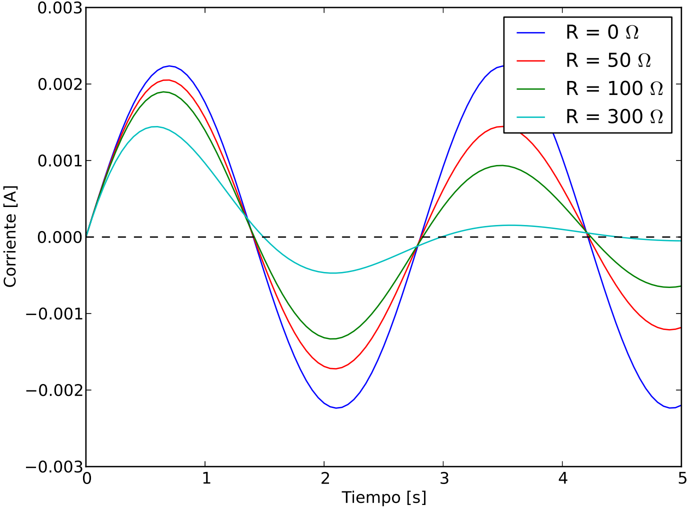
Solución gráfica con $R = 100\Omega$



Solución gráfica con $R = 300\Omega$



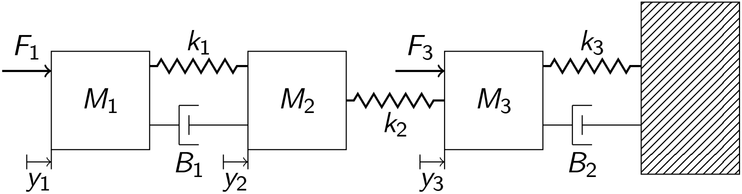
Solución gráfica con valores de R superpuestos



Ejercicio a cuenta de examen

En la figura se muestra un sistema de tres masas. Los desplazamientos de estas tres masas satisfacen las ecuaciones dadas por:

$$\begin{aligned} M_1 y_1'' + B_1 y_1' + K_1 y_1 - B_1 y_2' - K_2 y_2 &= F_1(t) \\ -B_1 y_1' - K_1 y_1 + M_2 y_2'' + B_1 y_2' + (K_1 + K_2) y_2 - K_2 y_3 &= 0 \\ -K_2 y_2 + M_3 y_3'' + B_2 y_3' + (K_2 + K_3) y_3 &= F_3(t) \end{aligned}$$



Las constantes y condiciones iniciales son

$K_1 = K_2 = K_3 = 1$ (constantes de los resortes, kgm/s^2)
$M_1 = M_2 = M_3 = 1$ (masa, kg)
$F_1(t) = 1, F_3(t) = 0$ (fuerza, N)
$B_1 = B_2 = 0.1$ (coeficientes de amortiguamiento, kg/s)

$$y_1(0) = y_1'(0) = y_2(0) = y_2'(0) = y_3(0) = y_3'(0) = 0$$
(condiciones iniciales)

Resuelve y grafica las ecuaciones anteriores mediante RK4, para $0 \leq t \leq 30$ segundos y $h = 0.1$

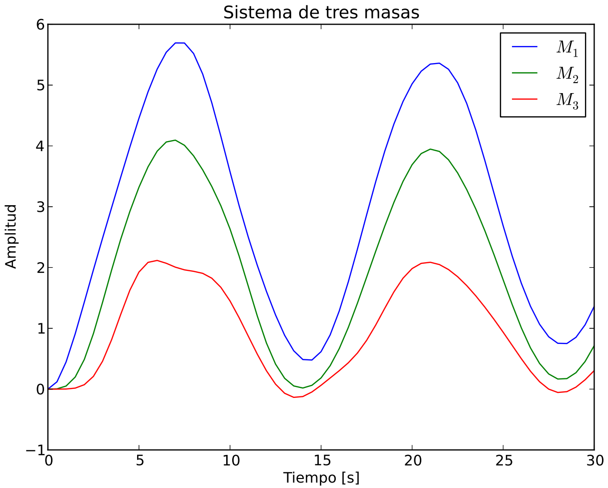
Hint: Definiendo

$$y_4 = y_1', \qquad y_5 = y_2', \qquad y_6 = y_3'$$

La ecuación inicial se escribe como un conjunto de seis EDO de primer orden, de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_4 \\
y_2' &= y_5 \\
y_3' &= y_6 \\
y_4' &= \left[-B_1 y_4 - K_1 y_1 + B_1 y_5 + K_2 y_2 + F_1\right] / M_1 \\
y_5' &= \left[B_1 y_4 + K_1 y_1 - B_1 y_5 - (K_1 + K_2)\, y_2 + K_2 y_3\right] / M_2 \\
y_6' &= \left[K_2 y_2 - B_2 y_6 - (K_2 + K_3)\, y_3 + F_3\right] / M_3
\end{aligned}
$$

Solución al problema



EDO con valores en las fronteras

En los problemas de EDO unidimensionales con valores en la frontera, se pide que la solución satisfaga las condiciones de frontera en ambos extremos del dominio unidimensional.

La definición de las condiciones en la frontera, es parte fundamental de los problemas de este tipo.

Problema de EDO con condiciones en la frontera

Una varilla de 1 m de longitud colocada en el vacío, se calienta mediante una corriente eléctrica aplicada a la misma. La temperatura en los extremos se fija en 273 K.

El calor se disipa de la superficie mediante la transferencia de calor por radiación hacia al ambiente, cuya temperatura es de 273 K. Con las siguiente constantes, determinar la distribución de temperatura en dirección del eje.

1. $k = 60W/mK$ conductividad térmica
2. $Q = 50W/m$ tasa de generación de calor por unidad de longitud de la barra
3. $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} W/m^2 K^4$ constante de Stefan-Boltzmann
4. $A = 0.0001m^2$ área de sección transversal
5. $P = 0.01m$ perímetro de la varilla

La ecuación de conducción de calor en la dirección del eje x es

$$-Ak\frac{d^2}{dx^2}T + P\sigma(T^4 - 273^4) = Q \qquad 0 < x < 1.0$$

con las condiciones en la frontera dadas por:

$$T(0) = T(1.0) = 273K$$

Este problema es un problema condiciones en la frontera (específicamente en $x = 0$ y $x = 1$), pero se puede resolver como un problema de condición inicial sobre la prueba de base y error. Definimos y_1 y y_2 como

$$\begin{aligned} y_1 &= T(x) \\ y_2 &= T'(x) \end{aligned}$$

La ecuación de conducción se puede re-escribir como un conjunto de dos EDO de primer orden como

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \frac{P}{Ak}\sigma\left(y^4 - 273^4\right) - \frac{Q}{kA} \end{aligned}$$