Tarea Examen 1/3 - Ecuaciones diferenciales parciales

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

La ecuación de Poisson en coordenadas polares es

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{\rho(r,\theta)}{\epsilon_0}$$

Sean i y j los índices para las direcciones r y θ, respectivamente, la expresión en diferencias finitas para la ecuación de Poisson es

$$\begin{aligned}\nabla^2 u =& \frac{u(i-1,j) - 2u(i,j) + u(i+1,j)}{\Delta r^2} + \\ &+ \frac{1}{r_i}\frac{u(i+1,j) - u(i-1,j)}{2\Delta r} \\ &+ \frac{1}{r_i^2}\frac{u(i,j-1) - 2u(i,j) + u(i,j+1)}{\Delta \theta^2} = -\frac{\rho(r,\theta)}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

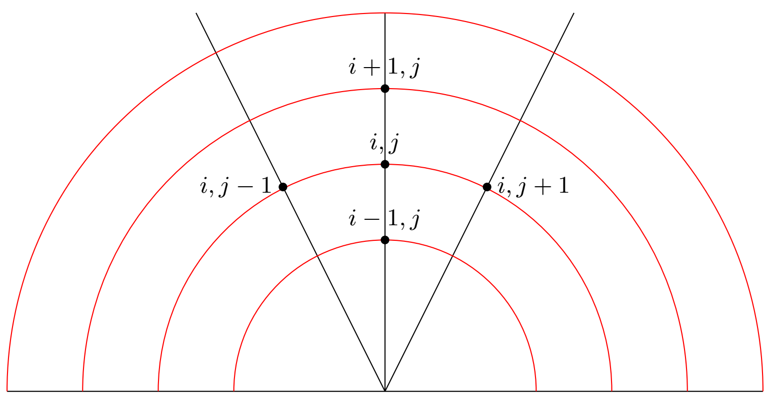

Figura 1: Notación de los índices en coordenadas polares.

El valor para el punto (i,j) se puede calcular de

$$\begin{aligned}2\left[\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i^2 \Delta\theta}\right] u(i,j) =& \frac{u(i-1,j) + u(i+1,j)}{\Delta r^2} + \\ &+ \frac{1}{r_i}\frac{u(i+1,j) - u(i-1,j)}{2\Delta r} + \\ &+ \frac{1}{r_i^2}\frac{u(i,j-1) + u(i,j+1)}{\Delta\theta^2}\end{aligned}$$

Lo que hay que aplicar es el cambio en r y en θ, revisar en dónde se mantiene la simetría del problema. En la figura (1), se detalla media circunferencia; en el problema, tendrían que consierar que $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y que tenemos un anillo con radios a y b.

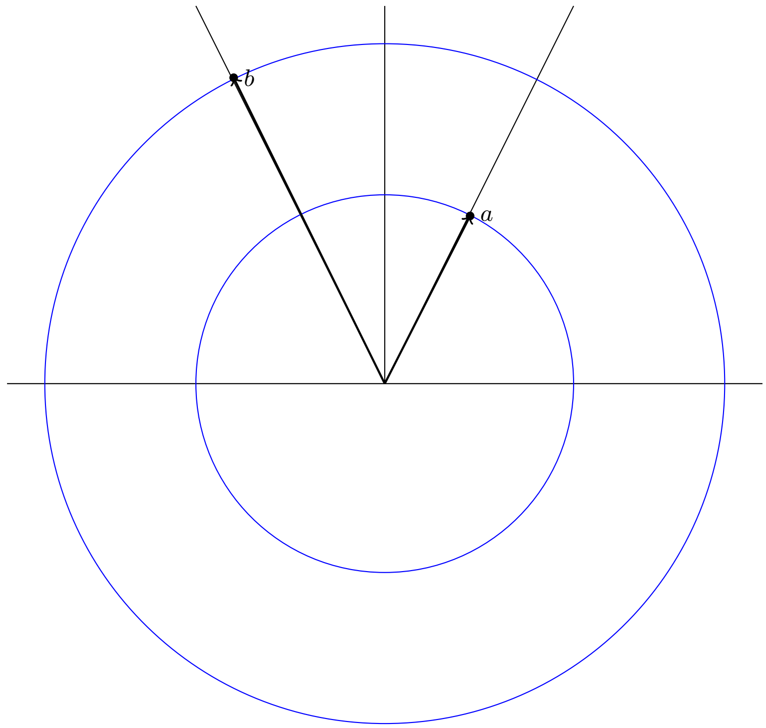

Figura 2: Anillo circular en donde se debe de resolver la ecuación de Poisson.

Como se muestra en la figura (2), pueden ir variando el valor del radio a, el caso inicial sería cuando $a = 0$ y queda en el origen como punto de inicio, e implementar su código, eso les ayudaría para dejar un valor diferente de cero.