Problema 4.

Obtén la primera aproximación por diferencias centrales para $f^4(x)$ a partir de la serie de Taylor.

Si hacemos el desarrollo de series de Taylor hacia adelante y hacia atrás, hasta la 4ª derivada:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^4(x) \quad \ldots(1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^4(x) \quad \ldots(2)$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^4(x) \quad \ldots(3)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^4(x) \quad \ldots(4)$$

Y hacemos (1)+(2) y (3)+(4):

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + \frac{2h^2}{2!} f''(x) + \frac{2h^4}{4!} f^4(x) \quad \ldots(5)$$

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + \frac{2(2h)^2}{2!} f''(x) + \frac{2(2h)^4}{4!} f^4(x) \quad \ldots(6)$$

Que es lo mismo que:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12} f^4(x) \quad \ldots(5)$$

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{4h^4}{3} f^4(x) \quad \ldots(6)$$

Ahora de la ec (5) despejamos $f^4(x)$:

$$f^4(x) = \frac{12f(x+h) + 12f(x-h) - 24f(x) - 12h^2 f''(x)}{h^4} \quad \ldots(7)$$

Y de la ec (6) despejamos $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{1}{4h^2} f(x+2h) + \frac{1}{4h^2} f(x-2h) - \frac{1}{2h^2} f(x) - \frac{h^2}{3} f^4(x) \quad \ldots(8)$$

Ahora sutituimos (8) en (7) y reagrupamos del lado izq $f^4(x)$:

$$f^4(x)=\frac{12f(x+h)+12f(x-h)-24f(x)-12h^2\left(\frac{1}{4h^2}f(x+2h)+\frac{1}{4h^2}f(x-2h)-\frac{1}{2h^2}f(x)-\frac{h^2}{3}f^4(x)\right)}{h^4}$$

$$f^4(x)=\frac{12f(x+h)+12f(x-h)-18f(x)-3f(x+2h)-3f(x-2h)}{h^4}+4f^4(x)$$

$$f^4(x)-4f^4(x)=\frac{12f(x+h)+12f(x-h)-18f(x)-3f(x+2h)-3f(x-2h)}{h^4}$$

$$f^4(x)=\frac{12f(x+h)+12f(x-h)-18f(x)-3f(x+2h)-3f(x-2h)}{-3h^4}$$

$$f^4(x)=\frac{-4f(x+h)-4f(x-h)+6f(x)+f(x+2h)+f(x-2h)}{h^4}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f^4(x)=\frac{f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{h^4}}$$