

Ecuaciones diferenciales parciales

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

21 de noviembre de 2014

1 Introducción

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Forma General de una EDP

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Forma General de una EDP
- 3 Tipos de EDP

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Forma General de una EDP
- 3 Tipos de EDP
- 4 Problemas de valores iniciales

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Forma General de una EDP
- 3 Tipos de EDP
- 4 Problemas de valores iniciales
- 5 Problema de condiciones de frontera

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Forma General de una EDP
- 3 Tipos de EDP
- 4 Problemas de valores iniciales
- 5 Problema de condiciones de frontera
- 6 Tipos de condiciones

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Forma General de una EDP
- 3 Tipos de EDP
- 4 Problemas de valores iniciales
- 5 Problema de condiciones de frontera
- 6 Tipos de condiciones
- 7 Problema de potencial eléctrico

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Forma General de una EDP
- 3 Tipos de EDP
- 4 Problemas de valores iniciales
- 5 Problema de condiciones de frontera
- 6 Tipos de condiciones
- 7 Problema de potencial eléctrico
- 8 Implementando el código
 - Preparando la malla
 - Asignación de valores iniciales en la malla
 - Asignación de valores en la frontera
 - Algoritmo de iteración
 - Graficando los datos obtenidos

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Forma General de una EDP
- 3 Tipos de EDP
- 4 Problemas de valores iniciales
- 5 Problema de condiciones de frontera
- 6 Tipos de condiciones
- 7 Problema de potencial eléctrico
- 8 Implementando el código
 - Preparando la malla
 - Asignación de valores iniciales en la malla
 - Asignación de valores en la frontera
 - Algoritmo de iteración
 - Graficando los datos obtenidos

Muchos fenómenos físicos se pueden modelar matemáticamente con ecuaciones diferenciales.

Cuando la función que se está estudiando implica dos o más variables independientes, la ecuación diferencial es generalmente una ecuación diferencial parcial (EDP).

Dado que las funciones de varias variables son intrínsecamente más complicadas que las de una variable, las EDP puede dar lugar a algunos de los más difíciles problemas numéricos.

Las cantidades físicas como la temperatura y la presión varían continuamente tanto en tiempo y espacio.

Como hemos aprendido en la carrera, usamos una función o campo $U(x, y, z, t)$ para describir esas cantidades y deben de considerarse variaciones independientes de tiempo y espacio.

El cambio en la variable tiempo genera cambios en $U(x, y, z, t)$ en cualquier posición y ésta a su vez afecta a los puntos vecinos.

Esto significa que las ecuaciones son dinámicas y describen la dependencia de U en las cuatro variables independientes, por lo que debería de escribirse en términos de derivadas parciales; tenemos una ecuación diferencial parcial (*EDP*)

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Forma General de una EDP
- 3 Tipos de EDP
- 4 Problemas de valores iniciales
- 5 Problema de condiciones de frontera
- 6 Tipos de condiciones
- 7 Problema de potencial eléctrico
- 8 Implementando el código
 - Preparando la malla
 - Asignación de valores iniciales en la malla
 - Asignación de valores en la frontera
 - Algoritmo de iteración
 - Graficando los datos obtenidos

La forma más general de una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) de segundo orden

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D \frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial U}{\partial y} = F$$

Donde A, B, C y F son funciones arbitrarias de x e y

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Forma General de una EDP
- 3 Tipos de EDP
- 4 Problemas de valores iniciales
- 5 Problema de condiciones de frontera
- 6 Tipos de condiciones
- 7 Problema de potencial eléctrico
- 8 Implementando el código
 - Preparando la malla
 - Asignación de valores iniciales en la malla
 - Asignación de valores en la frontera
 - Algoritmo de iteración
 - Graficando los datos obtenidos

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D \frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial U}{\partial y} = F$$

Se pueden clasificar las EDP en tres categorías, si sucede que:

- ❶ Elíptica si: $d = AC - B^2 > 0$
- ❷ Parabólica si: $d = AC - B^2 = 0$
- ❸ Hiperbólica si: $d = AC - B^2 < 0$

EDP tipo Elíptico $d = AC - B^2 > 0$

La ecuación en de Poisson en 2D, donde u representa una función de potencial eléctrico, y ρ representa un término fuente.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\rho(x, y)}{\epsilon_0}$$

EDP Tipo Parabólico $AC - B^2 = 0$

La ecuación de difusión, donde D representa el coeficiente de difusión, u puede representar cualquier cantidad con propiedades difusivas, como la temperatura.

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

La ecuación de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

donde u es la amplitud de onda y v su velocidad de propagación.

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Forma General de una EDP
- 3 Tipos de EDP
- 4 Problemas de valores iniciales**
- 5 Problema de condiciones de frontera
- 6 Tipos de condiciones
- 7 Problema de potencial eléctrico
- 8 Implementando el código
 - Preparando la malla
 - Asignación de valores iniciales en la malla
 - Asignación de valores en la frontera
 - Algoritmo de iteración
 - Graficando los datos obtenidos

Problema de valores iniciales

Este tipo de problemas es en general un problema de evolución en el tiempo, en el que las condiciones iniciales se refieren al estado del sistema en el tiempo $t = 0$

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Forma General de una EDP
- 3 Tipos de EDP
- 4 Problemas de valores iniciales
- 5 Problema de condiciones de frontera**
- 6 Tipos de condiciones
- 7 Problema de potencial eléctrico
- 8 Implementando el código
 - Preparando la malla
 - Asignación de valores iniciales en la malla
 - Asignación de valores en la frontera
 - Algoritmo de iteración
 - Graficando los datos obtenidos

Problema de condiciones de frontera

Este tipo de problemas considera una solución estática, es decir, en muchos de los casos, nuestro sistema evolucionó en el tiempo hasta llegar a un estado estable, en estas condiciones lo que nos interesa es el valor de nuestra solución en las fronteras de la región de interés.

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Forma General de una EDP
- 3 Tipos de EDP
- 4 Problemas de valores iniciales
- 5 Problema de condiciones de frontera
- 6 Tipos de condiciones**
- 7 Problema de potencial eléctrico
- 8 Implementando el código
 - Preparando la malla
 - Asignación de valores iniciales en la malla
 - Asignación de valores en la frontera
 - Algoritmo de iteración
 - Graficando los datos obtenidos

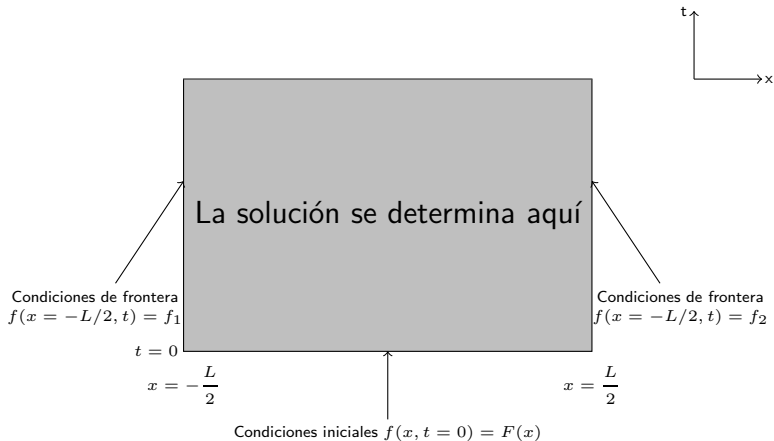
Tipos de condiciones

- **Dirichlet:** El valor de la función está especificado en la frontera.
- **Neumann:** El valor de la derivada normal (gradiente) de la función está especificado en la frontera.
- **Cauchy:** El valor de la función y de la derivada normal están especificados en la frontera.

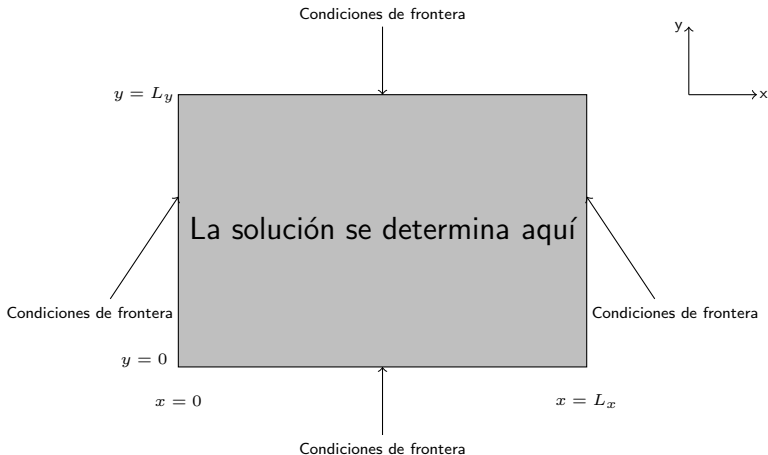
Relación entre condiciones de frontera y solución de EDP

Condición	Elíptica	Hiperbólica	Parabólica
Dirichlet superficie abierta			Unica y estable 1D
Dirichlet superficie cerrada	Unica y estable		
Neumann superficie abierta			Unica y estable 1D
Neumann superficie cerrada	Unica y estable		
Cauchy superficie abierta	Sin sentido físico	Unica y estable	
Cauchy superficie cerrada			

Problema de condición inicial



Problema de condiciones de frontera



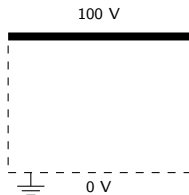
Contenido

- 1 Introducción
- 2 Forma General de una EDP
- 3 Tipos de EDP
- 4 Problemas de valores iniciales
- 5 Problema de condiciones de frontera
- 6 Tipos de condiciones
- 7 Problema de potencial eléctrico**
- 8 Implementando el código
 - Preparando la malla
 - Asignación de valores iniciales en la malla
 - Asignación de valores en la frontera
 - Algoritmo de iteración
 - Graficando los datos obtenidos

Problema de potencial eléctrico

Nuestro problema es calcular el potencial eléctrico para todos los puntos que están dentro del cuadro.

La parte inferior y las orillas de la región están unidos y conectados a "tierra", mientras que en la parte superior tenemos un cable conectado a una fuente de voltaje de 100 Volts.



EDP Elíptica, la ecuación de Laplace

Consideremos que tenemos un cuadrado completo para nuestro problema, de tal forma que tenemos unos aislantes que cierran la forma.

Dado que conocemos los valores de potencial, tenemos un problema con condiciones de Neumann en la frontera, por lo que la solución es única y estable.

Sabemos de la teoría electrodinámica que el potencial eléctrico $U(x)$ alrededor de una carga estática, satisface la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 U(x) = -4\pi\rho(x)$$

donde $\rho(x)$ es la densidad de carga.

En las regiones espaciales sin carga, es decir $\rho(x) = 0$, el potencial satisface la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 U(x) = 0$$

Resolviendo las ecuaciones en 2-D en coordenadas rectangulares:

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = \begin{cases} 0 \\ -4\pi\rho(x) \end{cases}$$

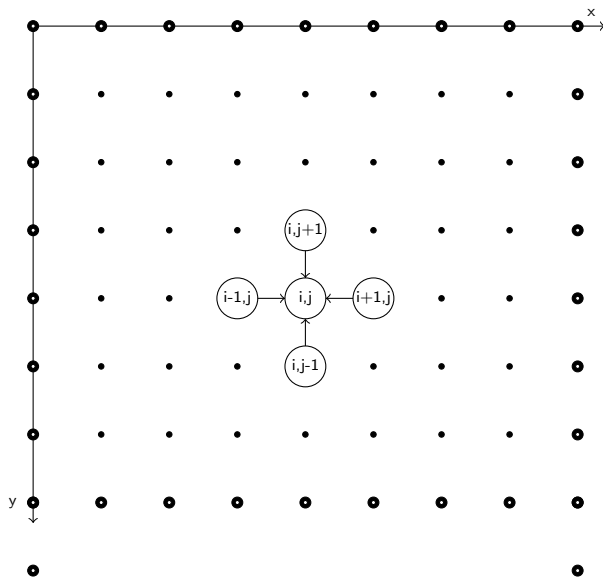
Solución: Método de diferencias finitas

Para resolver nuestra ecuación 2-D numéricamente, dividimos el espacio en una malla y buscamos la solución para U en cada una de ellas.

Como expresaremos derivadas en términos de diferencias finitas de los valores de U para cada elemento de la malla, este método se llama precisamente de diferencias finitas. Un método más eficiente pero a la vez más complicado es la técnica del elemento finito que resuelve la EDP para pequeños elementos geométricos.

División de la región de trabajo

El algoritmo para la ecuación de Laplace: el potencial en un punto $(x, y) = (i, j)$ Δ es igual al promedio de los valores de potencial de los cuatro puntos vecinos, los nodos con los centros en blanco, corresponden a los valores de potencial constante sobre la frontera.



Usaremos el algoritmo de diferenciación hacia adelante. Sumamos las dos series de Taylor para el potencial: a la derecha e izquierda de (x, y) así como para arriba y abajo de (x, y) :

$$U(x + \Delta x, y) = U(x, y) + \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots$$
$$U(x - \Delta x, y) = U(x, y) - \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} (\Delta x)^2 - \dots$$

Todos los términos impares se cancelan, al sumar las ecuaciones obtendremos una aproximación por diferencias centrales para la segunda derivada parcial:

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} \simeq \frac{U(x + \Delta x, y) + U(x - \Delta x, y) - 2U(x, y)}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} \simeq \frac{U(x, y + \Delta y) + U(x, y - \Delta y) - 2U(x, y)}{(\Delta y)^2}$$

Al sustituir las dos ecuaciones en la ecuación de Laplace, obtenemos una expresión en diferencias finitas para la EDP:

$$\frac{U(x + \Delta x, y) + U(x - \Delta x, y) - 2U(x, y)}{(\Delta x)^2} + \\ + \frac{U(x, y + \Delta y) + U(x, y - \Delta y) - 2U(x, y)}{(\Delta y)^2} \simeq 0$$

Asumimos que en la malla (x, y) tienen el mismo espaciamiento $\Delta x = \Delta y = \Delta$, por el que el algoritmo toma la sencilla forma:

$$U(x + \Delta, y) + U(x - \Delta, y) + U(x, y + \Delta) + U(x, y - \Delta) - 4U(x, y) = 0$$

La ecuación muestra una relación entre las soluciones en los cinco puntos. Cuando $U(x, y)$ se evalúa para N_x x valores en la malla y para N_y y valores, obtenemos un conjunto de $N_x \times N_y$ ecuaciones algebraicas lineales.

Hacemos una aproximación para $U(x, y)$

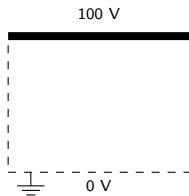
$$U(x, y) \simeq \frac{1}{4} [U(x + \Delta, y) + U(x - \Delta, y) + U(x, y + \Delta) + U(x, y - \Delta)]$$

En términos de posiciones discretas de la malla, las variables x, y son:

$$x = x_0 + i\Delta, \quad y = y_0 + j\Delta, \quad i, j = 0, 1, \dots, N_{max}-1$$

El algoritmo de diferencias finitas resulta ser:

$$U_{i,j} = \frac{1}{4}[U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}]$$



Contenido

- 1 Introducción
- 2 Forma General de una EDP
- 3 Tipos de EDP
- 4 Problemas de valores iniciales
- 5 Problema de condiciones de frontera
- 6 Tipos de condiciones
- 7 Problema de potencial eléctrico
- 8 Implementando el código
 - Preparando la malla
 - Asignación de valores iniciales en la malla
 - Asignación de valores en la frontera
 - Algoritmo de iteración
 - Graficando los datos obtenidos

Implementando el código

El código tiene cuatro secciones:

- 1 inicializar todos los puntos de la malla en un potencial de 0 V.
- 2 asignar el valor de 100 V a uno de los extremos que corresponden al problema, éste valor debe de permanecer **constante** durante todo el proceso del algoritmo.
- 3 el algoritmo se aplica a todos los puntos de la malla (la línea equipotencial de 100 V se mantiene constante)
- 4 Se grafican los datos con la librería de `matplotlib`.

Preparando la malla

Se requiere preparar un espacio de trabajo, en este caso, una malla cuadrada de 100 puntos. Para ello, la construimos mediante un arreglo:

```
1 import numpy as np
2
3 max=100
4 p= [[0 for i in range(100)] for i in range
      (100)]
```

Asignación de valores iniciales en la malla

Sin importar la posición de los puntos, les asignamos el valor de cero a todos.

```
1 for i in range(100):  
2     for j in range(100):  
3         p[i][j] = 0.0
```


Asignación de valores en la frontera

Corresponde ahora, asignar los valores de la frontera, para los cuales, $V = 100$, así pues:

```
1 for i in range(max):  
2     p[i][0]=100.0
```

Algoritmo de iteración

Una vez determinados los puntos del problema, usamos el siguiente algoritmo de iteración, que se calcula 1000 veces, esto para darle estabilidad a los resultados.

```
1 for k in range(1000):
2     for i in range(1,(max-1)):
3         for j in range (1,(max-1)):
4             if (j == 0):
5                 p[i][j] = p[i][j]
6             else:
7                 p[i][j]=0.25*(p[i+1][j]+p[i-1][j]+p[i][j+1]+p[i][j-1])
```

Graficando los datos obtenidos 1/3

Con el siguiente llamado a librerías gráficas, lo que buscamos es preparar una superficie para representar los datos y ocupar adicionalmente, una barra lateral que nos indica un gradiente tanto de color como de valores, junto con curvas de nivel de los equipotenciales.

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 from matplotlib import cm
3
4 fig = plt.figure()
5 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
```

Nótese que aunque importamos matplotlib, es necesario utilizar la librería `cm` que nos ofrece un mapa de colores.

Llamamos con la variable `fig` para referirnos posteriormente en el código al espacio de trabajo con la gráfica, la variable `ax`, de igual manera, es una referencia para los elementos en específico del objeto en tres dimensiones.

Graficando los datos obtenidos 1/3

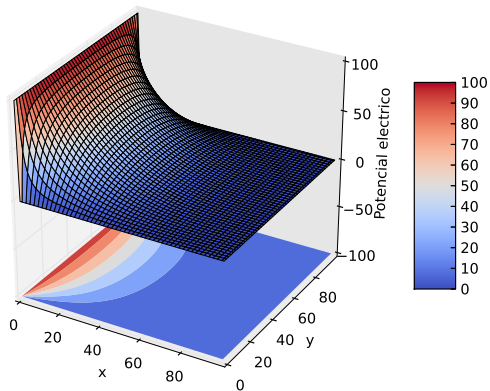
Los datos se grafican usando la librería matplotlib

```
1 Z = p
2 X = np.arange(0,100)
3 Y = np.arange(0,100)
4 X, Y = np.meshgrid(X, Y)
5 surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=2,
    cstride=2, linewidth=0.5, cmap=cm.coolwarm)
6 surf.set_clim([np.min(Z), np.max(Z)])
7 ax.set_zlabel('Potencial electrico')
8 ax.set_xlabel('x')
9 ax.set_ylabel('y')
```

Graficando los datos obtenidos 2/3

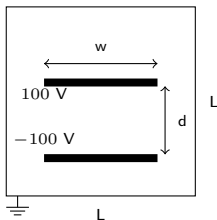
```
1 fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=5)
2 cset = ax.contourf(X,Y,Z, zdir='z', offset
    =-100, cmap=cm.coolwarm)
3 ax.set_zlim(-100, 100)
4 plt.show()
```

Gráfica obtenida



Primer problema para el examen

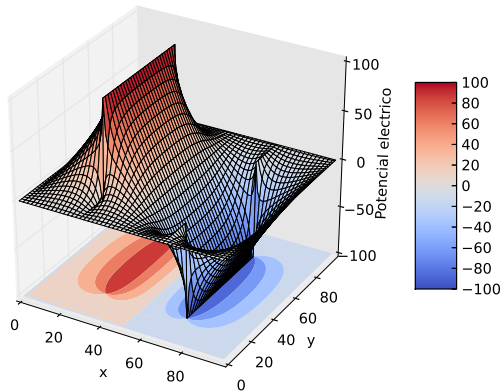
Ahora haremos un cambio en la geometría y dificultad del problema: vamos a considerar el caso de un condensador de placas paralelas, tal como se muestra en la siguiente figura.



Tienes que resolver la ecuación para calcular el potencial en cada punto, toma en cuenta lo siguiente:

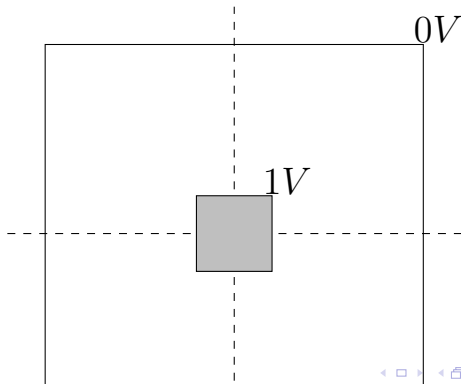
- 1 Usa un cuadro de 100×100 para tener una mejor visualización.
- 2 Las líneas con potencial constante, tienen una longitud w , tal que $w < L$ (es decir, no van de un extremo al otro)
- 3 Hay una separación d que es constante entre las dos líneas de equipotencial.
- 4 Una vez con la solución de la EDP, grafica tus resultados.

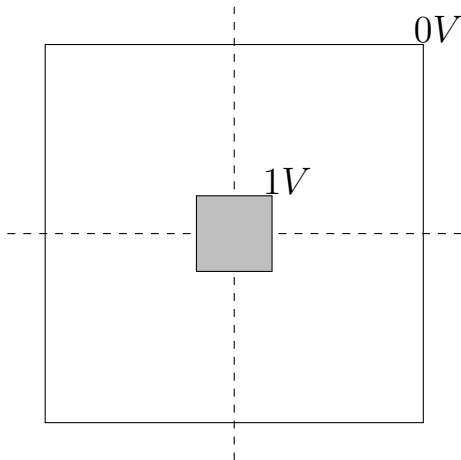
Solución al problema de las placas



Segundo problema para la tarea-examen

Resuelve la ecuación de Laplace con el siguiente arreglo donde la placa cuadrada conductora se encuentra a 1 volt (geométricamente se localiza en el centro de la placa exterior, por lo que deberás de determinar su tamaño) mientras que la placa cuadrada exterior, se encuentra a 0 volts.





Plantea dentro de tu algoritmo la solución, posteriormente presenta una gráfica e interpreta tus resultados.

Tercer problema para la tarea-examen

Desarrolla un esquema numérico para resolver la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi(r, \theta) = -\rho(r, \theta)/\epsilon_0$$

en coordenadas polares. Considera que la geometría en la frontera es un anillo circular con potenciales dados, para el radio interno es $\phi(a, \theta)$, y para el radio externo $\phi(b, \theta)$. Prueba tu solución asignando valores de potencial al problema.

La ecuación de Poisson en coordenadas polares resulta ser:

$$\nabla^2 \phi(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -\frac{\rho(r, \theta)}{\epsilon_0}$$

donde $0 \leq r \leq R$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Para crear una malla en coordenadas polares, nos podemos apoyar de la siguiente manera (*nota*: no es la única manera, por lo que no se confíen en que debe de ser así, les da elementos para que puedan modificar y/o ajustar esta propuesta para las necesidades del problema).

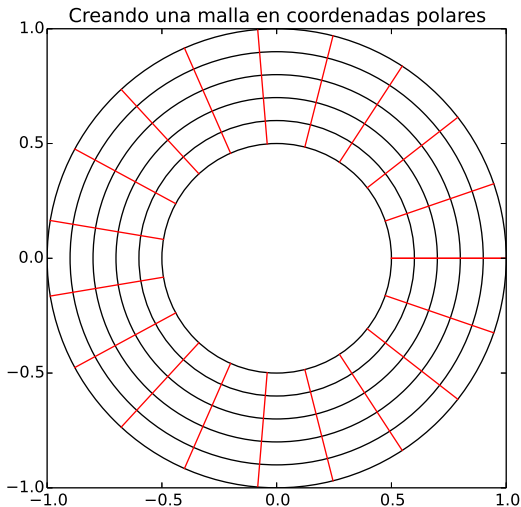
Primera parte

```
1 from numpy import *
2 import matplotlib.pyplot as pp
3
4 r_a = 0.50
5 r_b = 1
6 circulos = 6
7 lineas = 20
8 origen = (0, 0)
9
10 for r in linspace(r_a, r_b, circulos):
11     pp.gca().add_patch(pp.Circle(origen,
12                                   radius=r, fill=False, color='black'))
13
14 r_ab = array([r_a, r_b])
```


Segunda parte

```
1 for theta in linspace(0, 2 * pi, lineas):  
2     pp.plot(cos(theta) * r_ab, sin(theta) *  
3         r_ab, color='red')  
4 pp.axis('scaled')  
5 pp.title('Creando una malla en coordenadas  
6     polares')  
pp.show()
```

Gráfica de la malla en coordenadas polares



Usando la malla:

$$r_i = i\Delta R$$

$$\theta = j\Delta\theta$$

Se aproxima la ecuación por

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_i} \left(r_{i+\frac{1}{2}} \frac{V_{i+1,j} - V_{ij}}{\Delta r} - r_{j+\frac{1}{2}} \frac{V_{ij} - V_{i-1,j}}{\Delta r} \right) \frac{1}{\Delta r} + \\ + \frac{1}{r^2} \frac{V_{i,j+1} - 2V_{ij} + V_{i,j-1}}{\Delta\theta^2} = - \frac{\rho(r, \theta)}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

donde V_{ij} y r_{ij} son funciones

$$(r_i, \theta_j) = (i\Delta r, j\Delta\theta)$$

Las funciones son periódicas de j en la malla, con período $j = \frac{2\pi}{\Delta\theta}$ y V_{ij} es independiente de j .