Examen 1: Errores, condición y estabilidad.
Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

Indicaciones: Para cada uno de los problemas, deberás de anotar tu código en Python, además de incluir gráficas en un archivo jpg, si es que lo menciona la pregunta.

En caso de que tengas alguna complicación para resolver el problema, comenta dentro del mismo código para que sepamos en dónde se te presenta la dificultad.

1. **(2 puntos)** Los dos ejercicios en clase que pidieron trabajar.

2. **(1.5 puntos)** Un problema clásico en cómputo científico, es la suma de una serie para evaluar una función. Sea la serie de potencias para la función exponencial:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (x^2 < \infty)$$

   Utiliza la serie anterior para calcular el valor de e^{-x} para $x = 0.1, 1, 10, 100, 1000$ con un error absoluto para cada caso, menor a 10^{-8}.

3. **(1.5 puntos)** Usando el método de Horner, envía la tabla de valores tanto de los puntos de evaluación, como los de función evaluada a un archivo de datos, el polinomio es:

$$p(x) = 2x^4 - 20x^3 + 70x^2 + 100x + 48$$

   para valores de x en el intervalo $[-4, -1]$, con saltos de x de valor $\Delta x = 0.5$.

   Grafica los puntos obtenidos y el polinomio $p(x)$, interpreta los resultados obtenidos.

4. **(2.5 puntos)** El valor de π se puede calcular aproximando el área de un círculo unitario como el límite de una sucesión $p_1, p_2, \ldots$ descrita a continuación:
   Se divide un círculo unitario en 2^n sectores (en el ejemplo, $n = 3$). Se aproxima el área del sector por el área del triángulo isóceles. El ángulo θ_n es $2\pi/2^n$. El área del triángulo es $1/2 \sin \theta_n$.

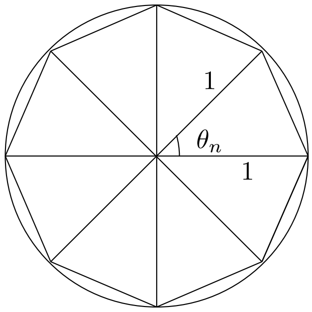

Figura 1: División en n sectores.

La enésima aproximación a π es: $p_n = 2^{n-1}\sin\theta_n$. Demuestra que

$$\sin\theta_n = \frac{\sin\theta_{n-1}}{\left(2\left[1+(1-\sin^2\theta_{n-1})^{\frac{1}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Usa esta relación de recurrencia para generar las sucesiones $\sin\theta_n$ y p_n en el rango $3 \leq n \leq 20$ iniciando con $\sin\theta_2 = 1$. Compara tus resultados con el valor de $4.0\arctan(1.0)$

5. **(2.5 puntos)** La sucesión de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ está definida por la relación de recurrencia lineal

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1 \\ \lambda_n = \lambda_{n-1} + \lambda_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

Una fórmula para obtener el n-ésimo número de Fibonacci es

$$\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right]^n - \left[\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right]^n\right\}$$

Calcula λ_n en $3 \leq n \leq 50$ usando tanto la relación de recurrencia como la fórmula. Discute los resultados obtenidos.