Tema 3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (1a. Parte)

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

16 de abril de 2013

A partir del problema 4, deberás de graficar los datos que te devuelva el algoritmo numérico.

1. Resuelve los siguientes problemas en $0 \leq t \leq 5$ mediante el método de Euler hacia adelante y $h = 0{,}01$. Evalúa los errores por comparación con los valores exactos.

   a) $y' + ty = 1 \qquad y(0) = 1$
   b) $y' + 3y = e^{-t} \qquad y(0) = 1$
   c) $y' = (t^2 - y) \qquad y(0) = 0{,}5$
   d) $y' + y|y| = 0 \qquad y(0) = 1$
   e) $y' + |y|^{1/2} = \sin(t) \qquad y(0) = 1$

2. Un depósito cónico contiene agua hasta 0,5 m de altura a partir del fondo. el depósito tiene un orificio en el fondo, de 0,02 m de radio. El radio del depósito está dado por $r = 0{,}25y$, donde r es el radio y y la altura medida desde el fondo. La velocidad del agua que pasa por el orificio está dada por $v^2 = 2gy$. Por medio del método de Euler hacia adelante ($h = 0{,}001$), calcula cuántos minutos se tardará en vaciar el depósito.

3. Un tubo en forma de U y 0,05 m de radio se llena con agua, pero con una división de forma que el nivel del agua en la parte vertical de la izquierda es 0,2 cm más alto que el de la parte vertical derecha. En el instante $t = 0$ se retira la división. El nivel del agua de la parte izquierda $y_a A$, medido desde el plano intermedio entre las dos superficies, satisface la ecuación

   $$L y_a^{''} = -2 g y_a$$

   donde L es la longitud total del agua en el tubo, que mide 1 m. Si se desprecia la fricción del tubo, calcula el nivel del agua por medio del método de Euler haciaa adelante para $0 < t < 10$ s y determina cuándo alcanza y_a su máximo y su mínimo. Utiliza $h = 0{,}001$.

4. Repite el problema anterior, pero ahora suponiendo que hay fricción en el tubo de forma que la ecuación de movimiento es

   $$L y_a^{''} = -2 g y_a - \beta {y_a}'$$

   donde $\beta = 0{,}8$ m/s. Usa nuevamente $h = 0{,}001$.

5. La densidad numérica (número de átomos por cm^3) del yodo-135 (radioisótopo) satisface la ecuación
$$\frac{d}{dt}N_i(t) = -\lambda_i N_i(t)$$
donde N_i es la densidad numérica del yodo-135 y λ_i es su constante de decaimiento, igual a 0,1044 horas^{-1}. Si $N_1(0) = 10^5$ átomos/cm^3 en el instante $t = 0$, calcula N_i en $t = 1$ hora mediante el méto de Euler hacia adelante. Usa $h = 0{,}05$ de hora.

6. El producto de decaimiento del yodo-135 es el xenón-135, también es radioactivo. Su constante de decaimiento es $\lambda = 0{,}0753$ horas^{-1}. La densidad numérica del xenón satisface la ecuación
$$\frac{d}{dt}N_x(t) = -\lambda_x N_x(t) + \lambda_i N_i(t)$$
donde N_x es la densidad numérica del xenón y N_i es la densidad numérica del yodo, definida en el problema anterior. Supongamos que $N_x(0) = 0$. Calcula N_i y N_x, con base al método modificado de Euler. (Puesto que las ecuaciones diferenciales son lineales, utiliza las soluciones que más se aproximen a cada intervalo de tiempo). Genera una lista con los valores para cada 2 horas hasta alcanzar las 50 horas. Usa $h = 0{,}1$ hora.

7. *a*) Un tanque de 50 galones de agua contiene sal con una concentración de 10 onzas/galón. Con el fin de diluir el contenido de sal, se suministra agua pura a razón de 2 galones/minuto. Si el depósito tiene una mezcla uniforme y la misma cantidad de agua que entra sale del depósito cada minuto, la concentración de sal satisface
$$y_1'(t) = -\frac{2}{50}y_1, \qquad y_1(0) = 10$$
donde $y_1(t)$ es la concentración de sal en onzas/galón y t es el tiempo en minutos. Usando el método de Runge-Kutta de segundo orden y $h = 1$ minuto para determinar cuánto tiempo debe de transcurrir para que la concentración de sal sea 1/10 de su valor inicial.

   b) El agua que sale del tanque entra a otro tanque de 20 galones, en el cual también se vierte agua pura a razón de 3 galones/minuto y se mezcla bien. La concentración de sal en el segundo tanque satisface
$$y_2'(t) = -\frac{3}{20}y_2(t) + \frac{2}{20}y_1(t), \qquad y_2(0) = 0$$
donde $y_1(t)$ es la concentración de sal del tanque de 50 galones del problema anterior. Usa RK2 para determinar cuándo alcanza su máximo la concentración de sal en el tanque de 20 galones. Supongamos que el segundo tanque tiene agua pura en instante $t = 0$.

8. Se dispara un proyectil al aire con un ángulo de 45° con respecto al suelo, con $u = v = 150m/s$, donde u y v son las velocidades horizontal y vertical, respectivamente. Las ecuaciones de movimiento están dadas por
$$\begin{aligned} u' &= -cVu, \qquad & u(0) = 150m/s \\ v' &= -g - cVv, \qquad & v(0) = 150m/s \end{aligned}$$

donde u y v son funciones del tiempo, $u = u(t)$ $yv = v(t)$ y

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{u^2 + v^2} \\ c &= 0{,}005 \qquad\qquad \text{(coeficiente de arrastre)} \\ g &= 9{,}9 m/s^2 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento se pueden resolver mediante alguno de los métodos de Runge-Kutta. La trayectoria del proyectil se puede determinar al integrar

$$x' = u \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad y' = v$$

o bien

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t u(t^{'})dt^{'} \\ y &= \int_0^t v(t^{'})dt^{'} \end{aligned}$$

Escribe un programa en Python con el método RK2 que resuelva y grafique la trayectoria del proyectil.

9. Re-escribe el programa del problema anterior, pero ahora con el método RK3.

10. El movimiento del sistema de masas que se muestra en la figura (1) está dado por:

$$y'' + 2\zeta\omega y' + \omega^2 y = \frac{F(t)}{M}$$

donde
$\omega = \left(\frac{k}{M}\right)^2$ (frecuencia natural sin amortiguamiento, s^{-1})
$\zeta = \frac{c}{2M\omega} = 0{,}5$ (factor de amortiguamiento)
$k = 3{,}2$ (constante del resorte, $\frac{kg}{s^2}$
$M = 5$ (masa, kg)
$F(t) = 0$ (fuerza, Newtons)

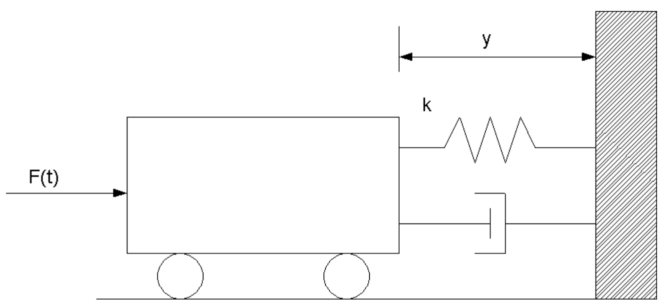

Figura 1: Sistema masa-resorte.

Si $F(t)$ es una función escalonada de magnitud $F_0 = 1$ kg y cuya duración es 1 segundo, determina el movimiento de la masa para $0 < t < 10$ segundos por medio del método de RK4.

11. Determina la respuesta y carga dinámica del sistema amortiguado del problema anterior sujeto a un pulso de fuerza triangular

$$F(t) = \begin{cases} 2F_0 t, & 0 \leq t \leq 1s \\ 2F_0(1-t), & 1 \leq t \leq 2s \\ 0, & t > 2s \end{cases}$$

Donde $F_0 = 1$ Kg (fuerza). Utiliza el método RK4.