

## METODOS MULTIPASOS

Los métodos de euler, Heun, Taylor y Runge-Kutta se llaman **método de un paso** porque en el cálculo de cada punto sólo se usa la información del último punto. Los métodos multipaso utiliza la información de los puntos previos, a saber,  $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-m+1}$  para calcular  $y_{i+1}$ . Por ejemplo, en un método de tres pasos para calcular  $y_{i+1}$ , se necesita conocer  $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}$ .

El principio que subyace en un método multipaso es utilizar los valores previos para construir un polinomio interpolante que aproxime a la función  $f(t, y(t))$ .

El número de valores previos considerados para determinar el polinomio interpolante nos determina el grado del polinomio. Por ejemplo, si se consideran tres puntos previos, el polinomio de aproximación es cuadrático; si se usan cuatro puntos previos, el polinomio es cúbico.

1

## METODOS DE ADAMS

Los métodos de Adams son métodos multipasos. Los métodos de Adams se pueden clasificar en dos grandes clases: los **métodos de Adams-Bashforth** y los **métodos de Adams-Moulton**. Estos se pueden combinar para formar los métodos **predictor-corrector de Adams-Bashforth-Moulton**.

La idea fundamental del **método de Adams-Bashforth de n pasos** es usar un polinomio de interpolación de  $f(t, y(t))$  que pasa por los  $n$  puntos:  
 $(t_i, f_i), (t_{i-1}, f_{i-1}), \dots, (t_{i-n+1}, f_{i-n+1})$ .

La idea fundamental del **método de Adams-Moulton de n pasos** es usar un polinomio de interpolación de  $f(t, y(t))$  que pasa por los  $n+1$  puntos:  
 $(t_{i+1}, f_{i+1}), (t_i, f_i), \dots, (t_{i-n+1}, f_{i-n+1})$ .

2

**Ejemplo1** Deducir el método de Adams-Bashforth de dos pasos para resolver la E.D.O.  $y' = f(t, y)$

$$\text{Sol: } y' = f(t, y) \Rightarrow \int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \quad (1)$$

Ahora, aproximaremos  $f(t, y(t))$  mediante el polinomio de interpolación que pasa por los puntos:  $(t_i, f_i)$ ,  $(t_{i-1}, f_{i-1})$ , donde  $f_{i-1} = f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$ ;  $f_i = f(t_i, y(t_i))$ . El polinomio interpolante esta dado por:

$P(t) = ((t_i - t) f_{i-1} + (t - t_{i-1}) f_i) / h$ , reemplazando este polinomio en la expresión (1):

$$y_{i+1} \approx y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P(t) dt$$

$$y_{i+1} \approx y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{h} [(t_i - t) f_{i-1} + (t - t_{i-1}) f_i] dt$$

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{h}{2} (3 f_i - f_{i-1})$$

3

- Los métodos de Adams-Bashforth(A-B) de n pasos tienen la forma general:

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^n \alpha_j f(t_{i-j+1}, y_{i-j+1}) \quad (*)$$

Los coeficientes de la ecuación (\*) se muestran en la tabla:

N	$\beta$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
1	1	1			
2	$\frac{1}{2}$	3	-1		
3	$\frac{1}{12}$	23	-16	5	
4	$\frac{1}{24}$	55	-59	37	-9

De acuerdo a la tabla mostrada obtenemos:

métodos de Adams-Bashforth de 2 pasos:  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (3 f_i - f_{i-1})$

métodos de Adams-Bashforth de 3 pasos:  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} (23 f_i - 16 f_{i-1} + 5 f_{i-2})$

métodos de Adams-Bashforth de 4 pasos:  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3})$

4

**Ejemplo 2.** Deducir el método de Adams-Moulton de **un paso** para resolver la E.D.O.  
 $y' = f(t, y)$

Sol:  $y' = f(t, y) \Rightarrow \int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \quad (1)$$

Ahora, aproximaremos  $f(t, y(t))$  mediante el polinomio de interpolación que pasa por los puntos:  $(t_{i+1}, f_{i+1})$ ,  $(t_i, f_i)$ , donde  $f_i = f(t_i, y(t_i))$ ;  $f_{i+1} = f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))$ .  
 El polinomio interpolante esta dado por:  $P(t) = ((t_{i+1} - t) f_i + (t - t_i) f_{i+1}) / h$ ,  
 reemplazando este polinomio en la expresión (1):

$$y_{i+1} \approx y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P(t) dt$$

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{h}{2} (f_{i+1} + f_i)$$

5

- Los métodos de Adams-Moulton(A-M) de n pasos tienen la forma general:

$$y_{i+1} = y_i + \beta h \sum_{j=0}^n \alpha_j f(t_{i-j+1}, y_{i-j+1}) \quad (**)$$

Los coeficientes de la ecuación (\*\*) se muestran en la tabla adjunta.

N	$\beta$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
0	1	1			
1	$\frac{1}{2}$	1	1		
2	$\frac{1}{12}$	5	8	-1	
3	$\frac{1}{24}$	9	19	-5	1

De acuerdo a la tabla mostrada obtenemos:

métodos de Adams-Moulton de 2 pasos:  $y_{i+1} = y_i + h (5 f_{i+1} + 8 f_i - f_{i-1}) / 12$

métodos de Adams-Moulton de 3 pasos:  $y_{i+1} = y_i + h (9 f_{i+1} + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2}) / 24$

NOTA. Los métodos de A-B de **n pasos** son de orden **n**  
 Los métodos de A-M de **n pasos** son de orden **(n+1)**

6

## METODOS PREDICTOR-CORRECTOR

En la práctica los métodos multipaso implícitos (por ejemplo: el método de A-M), no se puede usar directamente. Estos métodos sirven para mejorar las aproximaciones obtenidas con los métodos explícitos. La combinación de un método explícito con un método implícito del mismo orden se denomina un **método predictor-corrector**.

### Método Predictor Corrector de cuarto orden de Adams- Bashforth- Moulton

La fórmula predictora es la de Adams-Bashforth:  $y_{i+1}^* = y_i + h(55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3})/24$ ,

La fórmula correctora es la de Adams-Moulton:  $y_{i+1} = y_i + h(9 f_{i+1}^* + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2})/24$ ;

donde:  $f_i = f(t_i, y_i)$ ;  $f_{i-1} = f(t_{i-1}, y_{i-1})$ ;  $f_{i-2} = f(t_{i-2}, y_{i-2})$ ;  $f_{i-3} = f(t_{i-3}, y_{i-3})$ ;  $f_{i+1}^* = f(t_{i+1}, y_{i+1}^*)$

Observación Para usar la fórmula predictora se requiere que se conozcan los valores  $y_0, y_1, y_2, y_3$ , para obtener  $y_4$ . Sabemos que  $y_0$  es la condición inicial dada y como el método de A-B-M es de **orden 4**, los valores  $y_1, y_2, y_3$  se suelen calcular con un método de **igual orden**, es decir de orden 4, como el método de Runge Kutta de orden 4.

Ejemplo: Usar el método de Adams-Bashforth-Moulton de cuarto orden con una longitud de paso de 0.2 para obtener una aproximación a  $y(1)$  de la solución de:  $y' = t + y - 1$ ,  $y(0) = 1$ .

Solución: Identificando:  $f(t, y) = t + y - 1$ ;  $t_0 = 0$ ;  $y_0 = 1$ ;  $h = 0.2$

#### • Método Predictor Corrector de cuarto orden de Adams- Bashforth- Moulton

Predictor Adams-Bashforth:  $y_{i+1}^* = y_i + h(55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3})/24$ ,

Corrector de Adams-Moulton:  $y_{i+1} = y_i + h(9 f_{i+1}^* + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2})/24$ ;

donde:  $f_i = f(t_i, y_i)$ ;  $f_{i-1} = f(t_{i-1}, y_{i-1})$ ;  $f_{i-2} = f(t_{i-2}, y_{i-2})$ ;  $f_{i-3} = f(t_{i-3}, y_{i-3})$ ;  $f_{i+1}^* = f(t_{i+1}, y_{i+1}^*)$ ;

#### • INICIALIZACION con RK clásico de orden 4

$$y_{i+1} = y_i + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3)/6$$

- INICIALIZACION DE con RK clásico de orden 4

$$y_{i+1} = y_i + h (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

Iteración1:

$$k_1 = f(t_0; y_0) = f(0; 1) = 0 + 1 - 1 = 0$$

$$k_2 = f(t_0 + h/2; y_0 + h k_1/2) = f(0.1; 1 + 0.2 \cdot 0/2) = f(0.1, 1) = 0.1$$

$$k_3 = f(t_0 + h/2; y_0 + h k_2/2) = f(0.1; 1 + 0.2 \cdot 0.1/2) = 0.11$$

$$k_4 = f(t_0 + h; y_0 + h k_3) = f(0.2; 1 + 0.2 \cdot 0.11) = 0.222$$

$$y_1 = y_0 + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

$$y_1 = 1 + 0.2(0 + 2 \times 0.1 + 2 \times 0.11 + 0.222)/6 = 1.0214$$

$$t_1 = t_0 + h = 0.2$$

9

Iteración2:

$$k_1 = f(t_1, y_1) = f(0.2; 1.0214) = 0.2214$$

$$k_2 = f(t_1 + h/2, y_1 + h k_1/2) = f(0.3; 1.04354) = 0.34354$$

$$k_3 = f(t_1 + h/2, y_1 + h k_2/2) = f(0.3; 1.05575) = 0.35574$$

$$k_4 = f(t_1 + h, y_1 + h k_3) = f(0.4; 1.09255) = 0.492551$$

$$y_2 = y_1 + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

$$y_2 = 1.0214 + 0.2(0.2214 + 2 \times 0.34354 + 2 \times 0.35574 + 0.492551)/6$$

$$= 1.09182$$

$$t_2 = t_1 + h = 0.4$$

Iteración3:

$$k_1 = f(t_2, y_2) = f(0.4, 1.09182) = 0.491818$$

$$k_2 = f(t_2 + h/2, y_2 + h k_1/2) = f(0.5, 1.141) = 0.641$$

$$k_3 = f(t_2 + h/2, y_2 + h k_2/2) = f(0.5, 1.15592) = 0.655918$$

$$k_4 = f(t_2 + h, y_2 + h k_3) = f(0.6, 1.223) = 0.823002$$

$$y_3 = y_2 + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

$$y_3 = 1.09182 + 0.2(0.491818 + 2 \times 0.641 + 2 \times 0.655918 + 0.823002)/6$$

$$= 1.22211$$

$$t_3 = t_2 + h = 0.6$$

10

- Método Predictor Corrector de cuarto orden de Adams- Bashforth- Moulton

Predictor Adams-Bashforth:  $y_{i+1}^* = y_i + h(55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3})/24$ ,

Corrector de Adams-Moulton:  $y_{i+1} = y_i + (9 f_{i+1}^* + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2})/24$ ;

donde:  $f_i = f(t_i, y_i)$ ;  $f_{i-1} = f(t_{i-1}, y_{i-1})$ ;  $f_{i-2} = f(t_{i-2}, y_{i-2})$ ;  $f_{i-3} = f(t_{i-3}, y_{i-3})$ ;  $f_{i+1}^* = f(t_{i+1}, y_{i+1}^*)$

Iteración4:

$$y_4^* = y_3 + h(55 f_3 - 59 f_2 + 37 f_1 - 9 f_0)/24$$

$$f_0 = f(t_0, y_0) = f(0; 1) = 0 + 1 - 1 = 0 ;$$

$$f_1 = f(t_1, y_1) = f(0.2; 1.0214) = 0.2214$$

$$f_2 = f(t_2, y_2) = f(0.4; 1.09182) = 0.49182$$

$$f_3 = f(t_3, y_3) = f(0.6; 1.22211) = 0.82211$$

$$y_4^* = y_3 + h(55 f_3 - 59 f_2 + 37 f_1 - 9 f_0)/24$$

$$= 1.22211 + (55 \times 0.82211 - 59 \times 0.49182 + 37 \times 0.2214 - 9 \times 0)0.2/24$$

$$= 1.42536$$

$$y_4 = y_3 + h(9 f_4^* + 19 f_3 - 5 f_2 + f_1)/24; \text{ donde: } f_4^* = f(t_4; y_4^*) = f(0.8; 1.42536) = 1.22536$$

11

$$y_4 = 1.22211 + (9 \times 1.22536 + 19 \times 0.82211 - 5 \times 0.49182 + 0.2214)0.2/24$$

$$= 1.42553$$

$$t_4 = t_3 + h = 0.8$$

Iteración5:

$$y_5^* = y_4 + (55 f_4 - 59 f_3 + 37 f_2 - 9 f_1) \times h/24$$

$$f_1 = f(t_1, y_1) = 0.2214; f_2 = f(t_2, y_2) = 0.49182; f_3 = f(t_3, y_3) = 0.82211$$

$$f_4 = f(t_4, y_4) = f(0.8; 1.42553) = 1.22536$$

$$y_5^* = 1.42553 + (55 \times 1.22536 - 59 \times 0.82211 + 37 \times 0.49182 - 9 \times 0.2214) \times 0.2/24$$

$$= 1.71806$$

$$y_5 = y_4 + (9 f_5^* + 19 f_4 - 5 f_3 + f_2) \times h/24; \text{ donde: } f_5^* = f(t_5; y_5^*) = f(1; 1.71806) = 1.71806$$

$$y_5 = 1.42553 + (9 \times 1.71806 + 19 \times 1.22536 - 5 \times 0.82211 + 0.49182) 0.2 \times /24$$

$$= 1.71827$$

$$t_5 = t_4 + h = 1$$

Por lo tanto,  $y(1) \approx y_5 = 1.71827$

12

Tabla Comparativa del método de Método Predictor Corrector de cuarto orden de Adams- Bashforth- Moulton, con el método Runge Kutta de orden 4 clásico, en la solución de la ecuación  $y' = t + y - 1$ , con  $y(0) = 1$ , en el intervalo  $[0,1]$

t	A- B- M orden 4	RK4	y exacta
0.	1.	1	1
0.2	1.0214	1.0214	1.0214
0.4	1.09182	1.09182	1.09182
0.6	1.22211	1.22211	1.22212
0.8	1.42553	1.42552	1.42554
1.	1.71827	1.71825	1.71828