Tema 2 - Operaciones matemáticas básicas

Integración numérica

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

27 de septiembre de 2012

Contenido

1. Problema inicial
2. Introducción
3. Fórmulas de Newton-Cotes
    - Regla del trapecio
    - Error en la regla del trapecio
    - Regla extendida del trapecio
    - Regla recursiva del trapecio

Contenido

1. Problema inicial
2. Introducción
3. Fórmulas de Newton-Cotes
   - Regla del trapecio
   - Error en la regla del trapecio
   - Regla extendida del trapecio
   - Regla recursiva del trapecio

Contenido

1. Problema inicial
2. Introducción
3. Fórmulas de Newton-Cotes
   - Regla del trapecio
   - Error en la regla del trapecio
   - Regla extendida del trapecio
   - Regla recursiva del trapecio

Problema inicial

Calcular

$$\int_a^b f(x)dx$$

donde $f(x)$ es una función dada.

Introducción

La integración numérica (también conocida como cuadratura) es un procedimiento con mayor precisión que la diferenciación numérica.

La cuadratura aproxima la integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

mediante la suma

$$I = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

donde las *abscisas nodales* x_i y los pesos A_i dependen de una regla en particular usada para la cuadratura.

Todas las reglas de cuadratura se dividen en dos grupos:

1. Fórmulas de Newton-Cotes.
2. Fórmulas de Cuadraturas Gaussianas.

Fórmulas de Newton-Cotes

Estas fórmulas se caracterizan por usar un espaciamiento uniforme y constante en las abscisas, aquí se consideran los métodos del trapecio y la regla de Simpson.

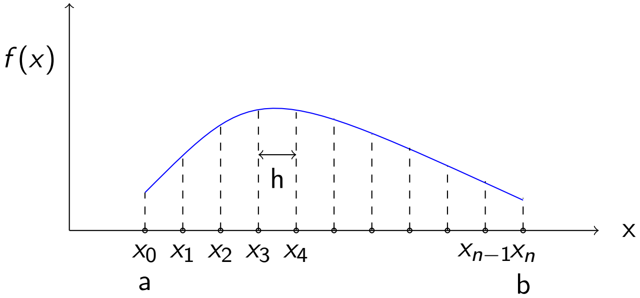
Son útiles si $f(x)$ se ha evaluado en intervalos iguales; dado que las fórmulas Newton-Cotes se basan en una interpolación local, se requiere de una porción para ajustarla al polinomio.

Consideremos la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

Dividimos el intervalo de integración $[a, b]$ en n intervalos d igual longitud $h = (b - a)/n$, y hacemos que las abscisas sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Aproximación polinomial de $f(x)$



Ahora aproximamos $f(x)$ con un polinomio de orden n que intersecta todos los nodos. La expresión para el polinomio de Lagrange es:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

donde $l_i(x)$ son las funciones definidas en el tema de interpolación.

Por tanto, un aproximación a la integral es

$$I = \int_a^b P_n(x) dx = \sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx \right] = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

donde

$$A_i = \int_a^b l_i dx, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

Las ecuaciones

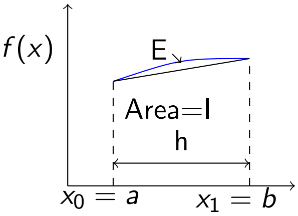
$$I = \int_a^b P_n(x) dx = \sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx \right] = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

se conocen como las fórmulas de Newton-Cotes. Siendo los casos:

1. $n = 1$, Regla del trapecio.
2. $n = 2$, Regla de Simpson.
3. $n = 3$, Regla de Simpson de $3/8$.

La más importante es la regla del trapecio, ya que se puede combinar con la extrapolación de Richardson, en un algoritmo eficiente llamado: Integración de Romberg.

Regla del trapecio



Si $n = 1$ (un bloque), tenemos que
$l_0 = (x - x_1)/(x_0 - x_1) = (x - b)/h$ por tanto:

$$A_0 = \frac{1}{h} \int_a^b (x - b) dx = \frac{1}{2h} (b - a)^2 = \frac{h}{2}$$

Para $l_1 = (x - x_0)/(x_1 - x_0) = (x - a)/h$ tenemos

$$A_1 = \frac{1}{h}\int_a^b (x - a)dx = \frac{1}{2h}(b - a)^2 = \frac{h}{2}$$

Sustituyendo:

$$I = [f(a) + f(b)]\,\frac{h}{2}$$

Siendo la regla del trapecio. Representa el área del trapecio que se muestra en la figura anterior.

Error en la regla del trapecio

El error viene dado por

$$E = \int_a^b f(x)dx - I$$

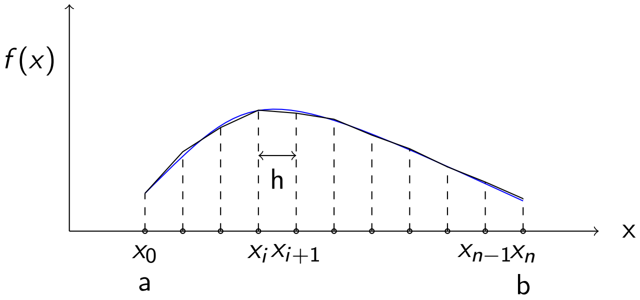
que es diferencia entre el área debajo de la curva de $f(x)$ y el la integral obtenida.

Integrando el error de interpolación:

$$
\begin{aligned}
E =& \frac{1}{2!} \int_a^b (x - x_0)(x - x_1) f''(\xi) dx \\
=& \frac{1}{2} f''(\xi) \int_a^b (x - a)(x - b) dx = \\
=& -\frac{1}{12} (b - a)^3 f''(\xi) \\
=& -\frac{h^3}{12} f''(\xi)
\end{aligned}
$$

Regla extendida del trapecio

En la práctica la regla del trapecio se usa con una división en el dominio. La siguiente figura muestra la región $[a, b]$ dividida en n bloques, de longitud h.



La función $f(x)$ se integrará con una aproximación lineal en cada panel. De la regla del trapecio, tenemos una que para el i-ésimo panel:

$$I_i = [f(x_i) + f(x_{i+1})]\frac{h}{2}$$

y como el área total, representada por la integral:

$$I \simeq \sum_{i=0}^{n-1}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]\frac{h}{2}$$

que es la regla del extendida del trapecio.

Regla recursiva del trapecio

Sea I_k la integral evaluada con la regla compuesta del trapecio, usando 2^{k-1} bloques. Con la notación $H = b - a$,de la regla compuesta del trapecio, para $k = 1, 2, 3$

$$k = 1 \text{ (1 bloque)} \quad :$$

$$I_1 = [f(a) + f(b)]\frac{H}{2}$$

$k = 2$ (2 bloques) :

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \left[f(a) + 2f\left(a + \frac{H}{2}\right) + f(b) \right] \frac{H}{4} \\
&= \frac{1}{2} I_1 + f\left(a + \frac{H}{2}\right) \frac{H}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k =& 3 \text{ (4 bloques)} \quad : \\
I_3 =& \left[f(a) + 2f\left(a + \frac{H}{4}\right) + 2f\left(a + \frac{H}{2}\right) + \right. \\
&\left. + 2f\left(a + \frac{3H}{4}\right) + f(b) \right] \frac{H}{8} \\
=& \frac{1}{2} I_2 \left[f\left(a + \frac{H}{4}\right) + f\left(a + \frac{3H}{4}\right) \right] \frac{H}{4}
\end{aligned}
$$

Regla recursiva del trapecio

Para un $k > 1$ arbitrario, tenemos

$$I_k = \frac{1}{2} I_{k-1} + \frac{H}{2^{k-1}} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left[a + \frac{(2i-1)H}{2^{k-1}}\right], \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Otra forma de la misma ecuación es:

$$I(h) = \frac{1}{2} I(2h) + h \sum f(x_{\text{nuevo}})$$

Ejercicio

El cuerpo de revolución que se muestra en la figura, se obtiene al girar la curva dada por

$$y = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq 2$$

en torno al eje x. Calcula el volumen, usando la regla extendida del trapecio con $N = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$.

El valor exacto es $I = 11.7286$. Evalúa el error para cada N.

$$y = 1 + \left(\frac{x}{2} \right)^2$$