EDO tipo Sturm-Liouville

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

Facultad de Ciencias - UNAM

10 de abril de 2018

1. Ecuaciones de Sturm-Liouville

EDO con valores propios

Diversos problemas con condiciones en la frontera conducen (mediante el método de separación de variables) a la misma ecuación diferencial ordinaria

$$X''(x) + \lambda\, X(x) = 0, \qquad (0 < x < L)$$

con el valor propio λ

EDO con valores propios

$$X''(x) + \lambda\, X(x) = 0, \qquad (0 < x < L)$$

con el valor propio λ.

Pero con distintas condiciones en los extremos, según las condiciones de frontera:

1. $X(0) = X(L) = 0$

EDO con valores propios

$$X''(x) + \lambda\, X(x) = 0, \qquad (0 < x < L)$$

con el valor propio λ.

Pero con distintas condiciones en los extremos, según las condiciones de frontera:

1. $X(0) = X(L) = 0$
2. $X'(0) = X'(L) = 0$

EDO con valores propios

$$X''(x) + \lambda\, X(x) = 0, \qquad (0 < x < L)$$

con el valor propio λ.

Pero con distintas condiciones en los extremos, según las condiciones de frontera:

1. $X(0) = X(L) = 0$
2. $X'(0) = X'(L) = 0$
3. $X(0) = X'(L) = 0$

Ejemplo de una varilla

Por ejemplo, en el problema de hallar la temperatura $u(x, t)$ de una varilla $0 \leq x \leq L$ con la temperatura inicial dada $u(x, 0) = f(x)$.

Ejemplo de una varilla

Como problema con valores en la frontera, este problema es igual al problema de determinar la temperatura dentro de una lámina de gran tamaño que ocupe la región $0 \leq x \leq L$ en el espacio $x\ y\ z$.

Ejemplo de una varilla

Si la temperatura inicial de la varilla depende sólo de x y es independiente de y, z (es decir, si $u(x, 0) = f(x)$), entonces lo mismo será cierto de su temperatura $u = u(x, y)$ en el instante t.

Ejemplo de una varilla

Sustituyendo

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

en la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Condiciones en los extremos

Vemos que $X(x)$ satisface la condiciones en los extremos, si las caras $x = 0$ y $x = L$ de la lámina se mantienen a temperatura cero.

Condiciones en los extremos

Las condiciones de $X'(0) = X'(L) = 0$ si ambas caras están aisladas, y las de $X(0) = X'(L) = 0$, si una cara está aislada y la otra se mantiene a temperatura cero.

Condiciones en los extremos

Pero si cada cara de la varilla pierde calor hacia el medio ambiente (que se encuentra a temperatura cero), de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, entonces las condiciones en los extremos asumen la forma

$$h\,X(0) - X'(0) = 0 = h\,X(L) + X'(L)$$

donde h es un coeficiente de transferencia de calor no negativo.

Problema de valores propios

Al imponer diversas condiciones en los extremos sobre la solución del problema, obtenemos distintos problemas de valores propios, y por ello usamos distintos valores propios λ_n y distintas funciones propias $X_n(x)$ en la construcción de una solución formal en términos de una serie de potencias

Problema de valores propios

$$u(x,t) = \sum c_n\, X_n(x)\, T_n(x)$$

del problema con valores en la frontera. El paso final en esta construcción es la elección del coeficiente c_n en la ecuación anterior de modo que

$$u(x,0) = \sum c_n\, T_n(0)\, X_n(x) = f(x)$$

Problema de valores propios

Por lo que necesitamos un desarrollo en términos de funciones propias de la función dada $f(x)$, en términos de las funciones propias del problema con valores en los extremos correspondientes.

Problemas de Sturm-Liouville

Para unificar y generalizar el método de separación de variables, es útil formular un tipo general de problema de valores propios que incluya como casos particulares a los ya mencionados.

Problemas de Sturm-Liouville

La ecuación inicial, con y en vez de X como variable dependiente, se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y + \lambda r(x)y = 0$$

donde $p(x) = r(x) \equiv 1$ y $q(x) \equiv 0$

Problemas de Sturm-Liouville

Podemos asegurar que casi cualquier EDO-2 lineal de la forma

$$A(x)\, y'' + B(x)\, y' + C(x)\, y + \lambda\, D(x)\, y = 0$$

asume la forma indicada después de multiplicarla por un factor adecuado.

Ejemplo

Si multiplicamos la ecuación paramétrica de Bessel de orden n

$$x^2\, y'' + x\, y' + (\lambda\, x^2 - n^2)\, y = 0, \qquad x > 0$$

por $1/x$, podemos escribir el resultado como

$$\frac{d}{dx}\left[x\, \frac{dy}{dx}\right] - \frac{n^2}{x}\, y + \lambda\, x\, y = 0$$

que tiene la forma de Sturm-Liouville (S-L), con $p(x) = r(x) = x$ y $q(x) = n^2/x$

Condiciones de frontera

Imponiendo sobre las soluciones de la ecuación anterior, en un intervalo abierto acotado (a, b) las siguientes condiciones -lineales- homogéneas en los extremos:

Condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \alpha_1\, y(a) - \alpha_2\, y'(a) &= 0 \\ \beta_1\, y(b) - \beta_2\, y'(b) &= 0 \end{aligned}$$

donde los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ son constantes.

Condiciones de frontera

Además de ser homogéneas, las condiciones están *separadas*, en el sentido de que una de ellas implica los valores de $y(x)$ y $y'(x)$ en un extremo $x = a$, mientras que la otra implica los valores en el otro extremo $x = b$.

Nótese que las condiciones $y(a) = y'(b) = 0$ son de la forma dada, con $\alpha_1 = \beta_2 = 1$ y $\alpha_2 = \beta_1 = 0$

Definición de un problema Sturm-Liouville

Un problema de Sturm-Liouville es un problema con valores en la frontera de la forma

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y + \lambda r(x)y = 0, \qquad a < x < b$$

$$\begin{aligned} \alpha_1\, y(a) - \alpha_2\, y'(a) &= 0 \\ \beta_1\, y(b) - \beta_2\, y'(b) &= 0 \end{aligned}$$

donde α_1 y α_2 como β_1 y β_2 son diferentes de cero.

Definición de un problema Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right]-q(x)y+\lambda r(x)y = 0, \qquad a < x < b$$

El parámetro λ es el *eingenvalor* cuyos posibles valores (constantes) se buscan.

Ejemplo

Se obtienen diferentes problemas de Sturm-Liouville complementando la ecuación diferencial

$$y'' + \lambda\, y = 0 \qquad 0 < x < L$$

con alguna de las diferentes condiciones de valores en la frontera homogéneas:

Ejemplo

1. $y(0) = y(L) = 0$, donde $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ y $\alpha_2 = \beta_2 = 0$

Ejemplo

1. $y(0) = y(L) = 0$, donde $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ y $\alpha_2 = \beta_2 = 0$
2. $y'(0) = y'(L) = 0$, donde $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ y $\alpha_2 = \beta_2 = 1$

Ejemplo

1. $y(0) = y(L) = 0$, donde $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ y $\alpha_2 = \beta_2 = 0$
2. $y'(0) = y'(L) = 0$, donde $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ y $\alpha_2 = \beta_2 = 1$
3. $y(0) = y'(L) = 0$, donde $\alpha_1 = \beta_2 = 1$ y $\alpha_2 = \beta_1 = 0$

Solución no trivial

Nótese que el problema de una EDO tipo S-L siempre tiene la solución trivial $y \equiv 0$.

Por lo que se buscan los valores de λ (eingenvalores) para los cuales este problema tiene una solución real *no trivial* (una eigenfunción) y cada eigenvalor cuenta con su eigenfunción asociada (o eigenfunciones).

Solución no trivial

Puede verse que cualquier constante (diferente de cero) múltiplo de una eigenfunción será también una eigenfunción.

Eigenvalores de Sturm-Liouville

Supongamos que las funciones $p(x), p'(x), q(x)$ y $r(x)$ de la ecuación S-L son continuas en el intervalo $[a, b]$ y que tanto $p(x) > 0$ como $r(x) > 0$ en cada punto de $[a, b]$.

Eigenvalores de Sturm-Liouville

De este modo los eigenvalores del problema de S-L, constituyen una sucesión creciente

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \ldots$$

de números reales, con

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$$

Salvo por un factor constante, solo una eigenfunción $y_n(x)$ se asocia con cada eigenvalor λ_n.

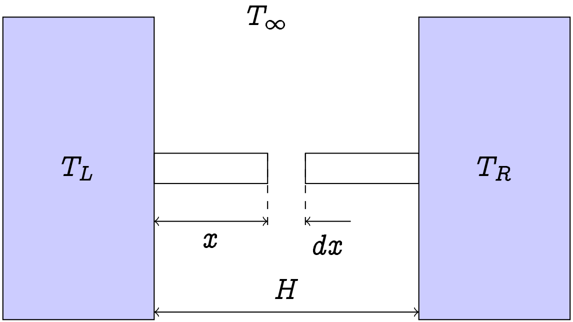
Propiedad de los eigenvalores

Además, si $q(x) \geq 0$ en $[a, b]$ y los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ en la definición de S-L, son todos no negativos, entonces, los eigenvalores son todos no negativos.

Propiedad de los eigenvalores

Algunas veces el problema de S-L se llama **regular** si se satisface el resultado anterior, en caso contrario, es **singular**.

Sea una varilla delgada de metal con longitud H, sus extremos están conectados a distintas fuentes de calor:



Una varilla delgada de metal

Si el calor sale de la superficie de la varilla únicamente por transferencia de calor, por medio de convección, la ecuación de temperatura es:

$$-A\frac{d}{dx}k(x)\frac{d}{dx}T(x)+h_cPT(x)=h_cPT_\infty+AS(x)$$

donde

Una varilla delgada de metal

1. $T(x)$ es la temperatura del punto que se encuentra a una distancia x del extremo izquierdo.

Una varilla delgada de metal

1. $T(x)$ es la temperatura del punto que se encuentra a una distancia x del extremo izquierdo.
2. A es el área constante de una sección transversal de la varilla.

Una varilla delgada de metal

1. $T(x)$ es la temperatura del punto que se encuentra a una distancia x del extremo izquierdo.
2. A es el área constante de una sección transversal de la varilla.
3. k es la conductividad térmica.

Una varilla delgada de metal

1. $T(x)$ es la temperatura del punto que se encuentra a una distancia x del extremo izquierdo.
2. A es el área constante de una sección transversal de la varilla.
3. k es la conductividad térmica.
4. P es el perímetro de la varilla.

Una varilla delgada de metal

1. $T(x)$ es la temperatura del punto que se encuentra a una distancia x del extremo izquierdo.
2. A es el área constante de una sección transversal de la varilla.
3. k es la conductividad térmica.
4. P es el perímetro de la varilla.
5. h_c es el coeficiente de transferencia de calor por convección.

Una varilla delgada de metal

1. $T(x)$ es la temperatura del punto que se encuentra a una distancia x del extremo izquierdo.
2. A es el área constante de una sección transversal de la varilla.
3. k es la conductividad térmica.
4. P es el perímetro de la varilla.
5. h_c es el coeficiente de transferencia de calor por convección.
6. T_∞ es la temperatura neta del aire.

Una varilla delgada de metal

1. $T(x)$ es la temperatura del punto que se encuentra a una distancia x del extremo izquierdo.
2. A es el área constante de una sección transversal de la varilla.
3. k es la conductividad térmica.
4. P es el perímetro de la varilla.
5. h_c es el coeficiente de transferencia de calor por convección.
6. T_∞ es la temperatura neta del aire.
7. S es la fuente de calor.

CDF del problema

Las condiciones de frontera son:

$$
\begin{aligned}
T(0) =& T_L \\
T(H) =& T_R
\end{aligned}
$$

Si T^0 se define como:

$$
T^0 = T - T_\infty
$$

Ecuación de temperatura

La ecuación de temperatura la podemos expresar como:

$$-\frac{d}{dx}k(x)\frac{d}{dx}T^0(x) + h_c\frac{P}{A}T^0(x) = \boxed{S(x)}$$

El primer término representa la difusión del calor

Ecuación de temperatura

La ecuación de temperatura la podemos expresar como:

$$-\frac{d}{dx}k(x)\frac{d}{dx}T^0(x) + h_c\frac{P}{A}T^0(x) = \boxed{S(x)}$$

El primer término representa la difusión del calor , el segundo es la pérdida de calor en el aire por medio de la convección y el lado derecho es la fuente de calor.

Otro ejemplo

Otro ejemplo de una EDO con forma similar es la ecuación de difusión de neutrones dada por:

$$-\frac{d}{dx}\,D(x)\frac{d}{dx}\,\Psi(x) + \Sigma_a\,\Psi(x) = S(x)$$

Donde Ψ es el flujo de neutrones, D es el coeficiente de difusión y S es la fuente de neutrones.

Otro ejemplo

$$-\frac{d}{dx}\,D(x)\frac{d}{dx}\,\Psi(x)+\Sigma_a\,\Psi(x)=S(x)$$

El primer término indica la difusión de neutrones, el segundo la pérdida por absorción y el lado derecho es la fuente de neutrones.

Problemas de difusión

Considerando en otros casos dentro de la física para problemas con difusión, si se expresa en términos de:

$$-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}\phi(x) + q(x)\phi(x) = S(x)$$

siendo ésta, una ley de conservación de la difusión.

Solución a la ecuación

Integrando la ecuación anterior en el intervalo $[a, b]$, se obtiene que:

$$Z(b) - Z(a) + \int_b^a q(x)\,\phi(x)dx = \int_b^a S(x)dx$$

donde

$$Z(x) = -p(x)\,\frac{d}{dx}\,\phi(x)$$

Problemas con CDF para varillas y láminas

Consideremos una EDO-2 con CDF

$$-\phi''(x) + q\,\phi(x) = S(x), \qquad 0 < x < H$$

con condiciones de frontera:

1. $\phi'(0) = 0$, condición de frontera izquierda.

Problemas con CDF para varillas y láminas

Consideremos una EDO-2 con CDF

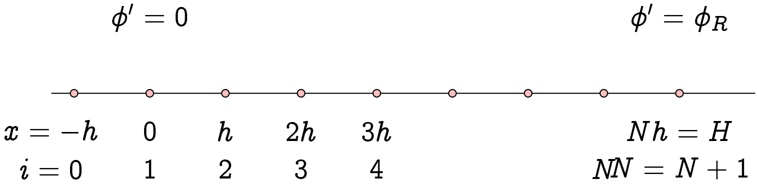
$$-\phi''(x) + q\,\phi(x) = S(x), \qquad 0 < x < H$$

con condiciones de frontera:

1. $\phi'(0) = 0$, condición de frontera izquierda.
2. $\phi'(H) = \phi'_R$, condición de frontera derecha

Malla para la solución

Si dividimos el dominio en N intervalos de igual longitud, se obtiene una malla donde los intervalos miden $h = H/N$



Aproximación por diferencias

Usando una aproximación por diferencias centrales al primer término de la EDO de segundo orden, obtenemos la ecuación en diferencias para la i-ésima retícula:

$$\frac{(-\phi_{i-1} + 2\phi_i - \phi_{i+1})}{h^2} + q\phi_i = S_i$$

donde $\phi_i = \phi(x_i)$, $S_i = S(x_i)$ y q es constante.

Aproximación por diferencias

Al multiplicar por h^2

$$-\phi_{i-1} + (2 - w)\phi_i - \phi_{i+1} = h^2 S_i$$

donde $w = qh^2$.

Esta ecuación se puede aplicar a todos los puntos de la retícula, excepto cuando $i = 1$ e $i = N + 1$.

Condición adiabática

La condición de la frontera izquierda $\phi'(0) = 0$, es equivalente a una condición simétrica en la frontera llamada condición adiabática en la frontera en el caso de la transferencia de calor.

Condición adiabática

Si se considera un punto hipotético de la retícula $i = 0$ localizado en $x = -h$, la ecuación anterior en el caso $i = 1$ es:

$$-\phi_0 + (2 + w)\phi_1 - \phi_2 = h^2 S_1$$

Uso de la simetría del problema

En esta ecuación

$$-\phi_0 + (2 + w)\phi_1 - \phi_2 = h^2 S_1$$

podemos hacer $\phi_0 = \phi_2$ debido a la simetría.

Uso de la simetría del problema

Dividiendo entre dos, obtenemos lo siguiente:

$$(1 + \frac{w}{2})\phi_1 - \phi_2 = \frac{1}{2}h^2 S_1$$

como $\phi_{N+1} = \phi(H) = \phi_R$ en la frontera derecha, la ecuación con $i = N$ es:

$$-\phi_{N+1} + (2 + w)\phi_N = h^2 S_N + \phi_R$$

Arreglando los términos

Ordenando los términos anteriores:

$$
\begin{array}{llllll}
(1+\frac{w}{2})\phi_1 & -\phi_2 & & & & = h^2 \frac{S_1}{2} \\
-\phi_1 & +(2+w)\phi_2 & -\phi_3 & & & = h^2\, S_2 \\
& \phi_2 & +(2+w)\,\phi_3 & -\phi_4 & & = h^2\, S_3 \\
& & & & & \ldots \\
& & & & & \ldots \\
& & & -\phi_{N+1} & +(2+w)\,\phi_N & = h^2\, S_N + \phi_R
\end{array}
$$

Representación matricial

Que en forma matricial, resulta

$$
\begin{bmatrix}
1+w/2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2+w & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2+w & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0+\ddots & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2+w
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \ddots \\ \phi_N
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
h^2 S_1/2 \\ h^2 S_2 \\ h^2 S_3 \\ \ddots \\ h^2 S_N + \phi_R
\end{bmatrix}
$$

Solución de sistemas tridiagonales

Una ecuación tridiagonal la podemos escribir de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_n & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \ddots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \ddots \\ D_N \end{bmatrix}$$

Solución numérica

El algoritmo de solución para esta matriz es el siguiente:

1. Se inicializan dos nuevas variables: $B_1' = B_1$ y $D_1' = D_1$.

Solución numérica

El algoritmo de solución para esta matriz es el siguiente:

1. Se inicializan dos nuevas variables: $B'_1 = B_1$ y $D'_1 = D_1$.
2. Se calculan de forma recursiva las siguientes ecuaciones, de i hasta N:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{A_i}{B'_{i-1}} \\
B'_i &= B_i - R\, C_{i-1} \\
D'_i &= D_i - R\, D'_{i-1}, \qquad i = 2, 3, \ldots, N
\end{aligned}$$

Solución numérica

3. Se calcula la solución para la última incógnita

$$\phi_i = \frac{(D'_i - C_i\ \phi_{i+1})}{B'_i}, \qquad i = N-1, N-2, \ldots, 1$$

Ejercicio

Determinar las ecuaciones en diferencias y su solución para el siguiente problema con valores en la frontera:

$$-2y''(x) + y(x) = e^{-0.2\,x}$$

Ejercicio

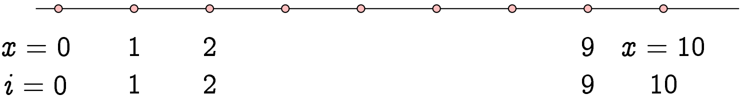
con las siguientes condiciones de frontera

$$y(0) = 1$$
$$y'(10) = -y(10)$$

Supongamos que los intervalos de la malla tienen longitud unitaria.

Solución

En la siguiente figura se muestra la malla



Ecuaciones en diferencias

Las ecuaciones en diferencias para $i = 1, 2, \ldots, 9$, son:

$$2(-y_{i-1} + 2\, y_i - y_{i+1}) + y_i = e^{-0.2\, i}, \qquad x_i = i$$

Ecuaciones en diferencias

Para $i = 1$, sustituimos la condición de frontera $y_0 = y(0) = 1$ en las ecuaciones anteriores, y resulta que:

$$5\, y_1 - 2\, y_2 = e^{-0.2} + 2$$

Ecuaciones en diferencias

Para $i = 10$, aproximamos la ecuación diferencial por:

$$-\frac{2\left(y'(10) - y'(9.5)\right)}{\frac{1}{2}} + y(10) = e^{-2}$$

Aproximación a un valor

Por medio de la aproximación por diferencias centrales, el término $y'(9.5)$ es

$$y'(9.5) = \frac{y(10) - y(9)}{1}$$

Aproximación a un valor

Por medio de la aproximación por diferencias centrales, el término $y'(9.5)$ es

$$y'(9.5) = \frac{y(10) - y(9)}{1}$$

Sustituimos el resultado anterior y la condición de frontera $y'(10) = -y(10)$, para obtener

$$-2\, y_9 + 4.5\, y_{10} = 0.5\, e^{-2}$$

Conjunto de ecuaciones

Las ecuaciones en diferencias son entonces

$$
\begin{aligned}
5\, y_1 - 2\, y_2 &= e^{-0.2} + 2 \\
-2\, y_{i-1} + 5\, y_i - 2\, y_{i+1} &= e^{-}0.2\, x_i, \qquad i = 2, \ldots, 9 \\
-2\, y_9 + 4.5\, y_{10} &= 0.5\, e^{-2}
\end{aligned}
$$

Donde $x_i = i$

La matriz tridiagonal es

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-0.2} + 2 \\ e^{-0.2\, x_2} \\ e^{-0.2\, x_3} \\ e^{-0.2\, x_4} \\ e^{-0.2\, x_5} \\ e^{-0.2\, x_6} \\ e^{-0.2\, x_7} \\ e^{-0.2\, x_8} \\ e^{-0.2\, x_9} \\ 0.5\, e^{-2} \end{bmatrix}$$

Pensando en el código

Qué tenemos que hacer para implementar un código con `python` que nos resuelva el problema?

1. Debemos de crear el arreglo tridiagonal.

Pensando en el código

Qué tenemos que hacer para implementar un código con `python` que nos resuelva el problema?

1. Debemos de crear el arreglo tridiagonal.
2. Establecer las condiciones de frontera en el arreglo.

Pensando en el código

Qué tenemos que hacer para implementar un código con `python` que nos resuelva el problema?

1. Debemos de crear el arreglo tridiagonal.
2. Establecer las condiciones de frontera en el arreglo.
3. Usar una rutina que resuelva el sistema tridiagonal.

Pensando en el código

Qué tenemos que hacer para implementar un código con `python` que nos resuelva el problema?

1. Debemos de crear el arreglo tridiagonal.
2. Establecer las condiciones de frontera en el arreglo.
3. Usar una rutina que resuelva el sistema tridiagonal.
4. Presentar los resultados.

Paso 1: Creando el arreglo tridiagonal.

Código 1: Definiendo el arreglo

```
a = np.zeros(n)
b = np.zeros(n)
c = np.zeros(n)
d = np.zeros(n)

for i in range(n):
    a[i] = -2.0
    b[i] = 5.
    d[i] = np.exp(-0.2 * (i+1))

c = a.copy()
```

Paso 1: Creando el arreglo tridiagonal.

Toma en cuenta que:

1. No están definidas las condiciones de frontera.

Paso 1: Creando el arreglo tridiagonal.

Toma en cuenta que:

1. No están definidas las condiciones de frontera.
2. Las diagonales a y c son idénticas, que es un caso particular.

Paso 2: Definiendo las CDF

Toma en cuenta que los índices en `python` comienzan en cero.

Código 2: Estableciendo las CDF

```
b[9] = 4.5
d[0] = np.exp(-0.2) + 2
d[9] = 0.5 * np.exp(-2)
```

Paso 2: Definiendo las CDF

Toma en cuenta que los índices en `python` comienzan en cero.

Código 3: Estableciendo las CDF

```
b[9] = 4.5
d[0] = np.exp(-0.2) + 2
d[9] = 0.5 * np.exp(-2)
```

De esta manera se sustituyen los valores que en la diapositiva anterior se indicaron para todos los elementos del arreglo.

Paso 3: Resolviendo el sistema tridiagonal I

Código 4: La función TRDG

```
def TRDG(a,b,c,d):
    nf = len(d)

    for it in xrange(1, nf):
        mc = a[it]/b[it-1]
        b[it] = b[it] - mc * c[it-1]
        d[it] = d[it] - mc * d[it-1]

    xc = a
    xc[-1] = d[-1]/b[-1]

    for il in xrange(nf-2, -1, -1):
```

Paso 3: Resolviendo el sistema tridiagonal II

```
        xc[il]= (d[il] - c[il] * xc[il+1])/b[il]

    del b, c, d
    return xc
```

Veamos la función por partes

```
    for it in xrange(1, nf):
        mc = a[it]/b[it-1]
        b[it] = b[it] - mc * c[it-1]
        d[it] = d[it] - mc * d[it-1]
```

En esta parte lo que se resuelve es el cambio de los valores de los coeficientes del arreglo tridiagonal, como se explicó anteriomente.

Veamos la función por partes

```
    xc = a
    xc[-1] = d[-1]/b[-1]

    for il in xrange(nf-2, -1, -1):
        xc[il]= (d[il] - c[il] * xc
[il+1])/b[il]

    del b, c, d
    return xc
```

Veamos la función por partes

Se crea el arreglo xc a partir de una copia del arreglo a.

Luego se calcula el último valor de la solución, para ello, se usa el índice `xc[-1]`.

Veamos la función por partes

El otro ciclo `for` realiza la sustitución hacia atrás, por ello, usamos un paso negativo ya que el valor inicial es mayor que el valor final.

Se eliminan los arreglos `b`,`c` y `d`. Se devuelve el arreglo `xc` con la solución.

Solución

Implementando el código en `python`, tenemos los siguientes valores

punto	solución	punto	solución
0	1.00000000	6	0.32133217
1	0.84643489	7	0.25786591
2	0.70672186	8	0.20003411
3	0.58520973	9	0.14127111
4	0.48189665	10	0.07049423
5	0.39486742		