Diferenciación numérica

Tema 2 - Operaciones matemáticas básicas

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

Facultad de Ciencias - UNAM

6 de marzo de 2018

Problema inicial

Dada una función $f(x)$ y un valor x, queremos calcular

$$\frac{d^n f}{dx^n}$$

Que representa la $n-$ésima derivada de la función f, con respecto a x.

Problema inicial

Usamos la diferenciación numérica para el siguente problema: se nos da una función $y = f(x)$ y deseamos obtener una de sus derivadas en el punto $x = x_k$.

Problema inicial

Cuando decimos “dada” significa que, o bien tenemos un algoritmo para calcular la función, o contamos con un conjunto de puntos discretos $(x_i, y_i), i = 0, 1, \ldots, N$.

En cualquier caso, tenemos acceso a un número finito de pares de datos (x, y) a partir de ellos, podemos calcular la derivada.

Diferenciación e interpolación

Si estás pensando en que la diferenciación numérica se relaciona con interpolación, tienes toda la razón.

Ya que es un medio para encontrar la derivada a partir de una aproximación con un polinomio, y luego diferenciar.

Una herramienta igualmente eficaz es el desarrollo en serie de Taylor de $f(x)$ sobre el punto de x_k, lo que representa como ventaja de que nos proporciona información acerca del error cometido en la aproximación.

Punto críticamente importante

La diferenciación numérica no es un proceso particularmente exacto: se presentan un conflicto entre los errores de redondeo (debido a la precisión de la máquina) y los errores inherentes a la interpolación.

Punto críticamente importante

La diferenciación numérica no es un proceso particularmente exacto: se presentan un conflicto entre los errores de redondeo (debido a la precisión de la máquina) y los errores inherentes a la interpolación.

Por esta razón, la derivada de una función no debe de ser calculada con la misma precisión que la propia función.

Desarrollo por diferencias finitas

La derivación por aproximación usando diferencias finitas de las derivadas de $f(x)$, se basa en el desarrollo de series de Taylor hacia adelante y hacia atrás de $f(x)$ alrededor de x:

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2!}\, f''(x) + \frac{h^3}{3!}\, f'''(x) + \frac{h^4}{4!}\, f^4(x) + \ldots$$

Desarrollo por diferencias finitas

La derivación por aproximación usando diferencias finitas de las derivadas de $f(x)$, se basa en el desarrollo de series de Taylor hacia adelante y hacia atrás de $f(x)$ alrededor de x:

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2!}\, f''(x) + \frac{h^3}{3!}\, f'''(x) + \frac{h^4}{4!}\, f^4(x) + \ldots$$
$$f(x-h) = f(x) - h\, f'(x) + \frac{h^2}{2!}\, f''(x) - \frac{h^3}{3!}\, f'''(x) + \frac{h^4}{4!}\, f^4(x) - \ldots$$

Desarrollo por diferencias finitas

La derivación por aproximación usando diferencias finitas de las derivadas de $f(x)$, se basa en el desarrollo de series de Taylor hacia adelante y hacia atrás de $f(x)$ alrededor de x:

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2!}\, f''(x) + \frac{h^3}{3!}\, f'''(x) + \frac{h^4}{4!}\, f^4(x) + \ldots$$

$$f(x-h) = f(x) - h\, f'(x) + \frac{h^2}{2!}\, f''(x) - \frac{h^3}{3!}\, f'''(x) + \frac{h^4}{4!}\, f^4(x) - \ldots$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2h\, f'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}\, f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}\, f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}\, f^4($$

Desarrollo por diferencias finitas

La derivación por aproximación usando diferencias finitas de las derivadas de $f(x)$, se basa en el desarrollo de series de Taylor hacia adelante y hacia atrás de $f(x)$ alrededor de x:

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2!}\, f''(x) + \frac{h^3}{3!}\, f'''(x) + \frac{h^4}{4!}\, f^4(x) + \ldots$$

$$f(x-h) = f(x) - h\, f'(x) + \frac{h^2}{2!}\, f''(x) - \frac{h^3}{3!}\, f'''(x) + \frac{h^4}{4!}\, f^4(x) - \ldots$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2h\, f'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}\, f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}\, f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}\, f^4($$

$$f(x-2h) = f(x) - 2h\, f'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}\, f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!}\, f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}\, f^4($$

Suma de las diferencias

$$f(x+h)+f(x-h)=2\,f(x)+h^2\,f''(x)+\frac{h^4}{12}\,f^4(x)+\dots$$

Suma de las diferencias

$$f(x+h) + f(x-h) = 2\, f(x) + h^2\, f''(x) + \frac{h^4}{12}\, f^4(x) + \ldots$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2\, h\, f'(x) + \frac{h^3}{3}\, f'''(x) + \ldots$$

Suma de las diferencias

$$f(x+h) + f(x-h) = 2\, f(x) + h^2\, f''(x) + \frac{h^4}{12}\, f^4(x) + \ldots$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2\, h\, f'(x) + \frac{h^3}{3}\, f'''(x) + \ldots$$

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2\, f(x) + 4\, h^2\, f''(x) + \frac{4h^4}{3}\, f^4(x) + \ldots$$

Suma de las diferencias

$$f(x+h) + f(x-h) = 2\, f(x) + h^2\, f''(x) + \frac{h^4}{12}\, f^4(x) + \ldots$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2\, h\, f'(x) + \frac{h^3}{3}\, f'''(x) + \ldots$$

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2\, f(x) + 4\, h^2\, f''(x) + \frac{4h^4}{3}\, f^4(x) + \ldots$$

$$f(x+2h) - f(x-2h) = 4\, h\, f'(x) + \frac{8h^3}{3}\, f'''(x) + \ldots$$

Primera derivada por diferencias centrales

Tomando la segunda suma de la lista anterior, de donde despejamos $f'(x)$, tenemos

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(x) - \ldots$$

Primera derivada por diferencias centrales

Tomando la segunda suma de la lista anterior, de donde despejamos $f'(x)$, tenemos

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(x) - \ldots$$

equivalentemente

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)}$$

que es llamada aproximación por diferencias centrales de $f'(x)$.

Segunda derivada por diferencias centrales

De manera similar, obtenemos la aproximación por diferencias centrales de $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2} + \frac{h^2}{12} f^4(x) + \ldots$$

Segunda derivada por diferencias centrales

De manera similar, obtenemos la aproximación por diferencias centrales de $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2} + \frac{h^2}{12} f^4(x) + \ldots$$

es decir:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Aprox. por diferencias hacia adelante/atrás

Las aproximaciones por diferencias centrales no siempre son útiles.

Por ejemplo, considera la situación en que se da la función en los n puntos discretos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Dado que las diferencias centrales utilizan valores de la función en cada lado de x, no sería posible calcular las derivadas en x_0 y x_n.

Aprox. por diferencias hacia adelante/atrás

Es cierto que necesitamos una expresión para diferencias finitas que evalúe la función en un solo lado de x.

Estas expresiones son llamadas aproximaciones por diferencias finitas hacia adelante y hacia atrás.

Despejamos $f'(x)$ de la primera lista de expresiones por diferencias, para obtener:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f'''(x) - \ldots$$

Manteniendo los primeros términos, tenemos la aproximación por diferencias centrales hacia adelante:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

Aproximación hacia atrás

De manera análoga, obtenemos la aproximación por diferencias hacia atrás:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$

Hay que hacer notar que el error es $O(h)$, que no es tan bueno como $O(h^2)$ en la aproximación por diferencias centrales.

Segunda aprox. por diferencias centrales

Las aproximaciones por diferencias centrales del tipo $O(h)$ no son tan populares debido a que es más común usar expresiones del tipo $O(h^2)$.

Para obtener una fórmula con diferencias centrales con ese orden de error, tenemos que incluir más términos de la serie de Taylor.

Desarrollo

Consideremos

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^4(x) + \ldots$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2h\, f'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \\ + \frac{(2h)^4}{4!} f^4(x) + \ldots$$

Desarrollo

Eliminamos $f''(x)$ multiplicando la primera ecuación y restándola de la segunda, para obtener:

$$f(x+2h) - 4\, f(x+h) = -3\, f(x) - 2\, h\, f'(x) + \frac{2\, h^3}{3} f'''(x) + \ldots$$

Segunda aprox. hacia adelante

Por lo tanto

$$f'(x) = \frac{-f(x+2\,h) + 4\,f(x+h) - 3\,f(x)}{2\,h} + \frac{h^2}{3} f'''(x) -$$

entonces

Segunda aprox. hacia adelante

Por lo tanto

$$f'(x) = \frac{-f(x+2\,h) + 4\,f(x+h) - 3\,f(x)}{2\,h} + \frac{h^2}{3} f'''(x) -$$

entonces

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 4\,f(x+h) - 3\,f(x)}{2h} + O(h^2$$

es la expresión para la segunda aproximación de la derivada por diferencias finitas hacia adelante.

Errores en las aprox. por diferencias finitas

El efecto del error por redondeo puede ser profundo, si h es muy pequeña, valores de $f(x)$, $f(x \pm h)$, $f(x \pm 2\,h)$, etc. serán aproximadamente iguales.

Errores en las aprox. por diferencias finitas

Cuando se multiplican por los coeficientes y se suman, podemos perder un número grande de términos.

Por otro lado, no debemos de hacer muy grande el valor de h, ya que el error debido al truncamiento, sería excesivo.

Control de los errores

Para manejar esta situación que siempre se va a presentar, podemos apoyarnos con las siguientes opciones:

1. Aumentar la precisión en el tipo de dato.

Control de los errores

Para manejar esta situación que siempre se va a presentar, podemos apoyarnos con las siguientes opciones:

1. Aumentar la precisión en el tipo de dato.
2. Usar diferencias finitas en donde se alcance el orden de $O(h^2)$

Hagamos un ejercicio:

A partir de la fórmula de diferencias centrales, calcula la derivada de $f(x) = exp(-x)$ en $x = 1$.

Inicia con $h = 0.64$ y divide a la mitad su valor en diez ocasiones ($h = 0.64, 0.32, 0.16, \ldots$).

Calcula el error relativo para cada h, el valor exacto es $f'(1) = exp(-1) = 0.36787944$

El código en `python`

Usando el módulo **`moduloDerivadas`**, genera una rutina que itere en 10 ocasiones para dividir a la mitad el valor de h.

Código I

Código 1: Usando el módulo de diferenciación

```
from moduloDerivadas import ddifcentral
from math import exp

def funcion(x):
    return exp(-x)

h = 0.64
x = 1.
ddexacta = 0.36787944


```

Código II

```
for i in range(1, 11):
    print ('{} \t {} \t {:1.5e}'.format(h, ddifcentral(funcion, x, h), \
            (abs(ddexacta - ddifcentral(funcion, x, h))) * 100 /ddexacta))
    h = h * 0.5
```

h	Priimera derivada	Error
0.64	0.380609096726	$3.46028e+00$
0.32	0.371029413951	$8.56252e-01$
0.16	0.368664920656	$2.13516e-01$
0.08	0.368075685401	$5.33450e-02$
0.04	0.36792849438	$1.33344e-02$
0.02	0.367891703983	$3.33370e-03$
0.01	0.367882506844	$8.33655e-04$
0.005	0.367880207588	$2.08652e-04$
0.0025	0.367879632774	$5.24015e-05$
0.00125	0.36787948904	$1.33306e-05$

Un ejercicio más complicado

El siguiente arreglo tiene por dimensiones $a = 100$ mm, $b = 120$ mm, $c = 150$ mm y $d = 180$ mm

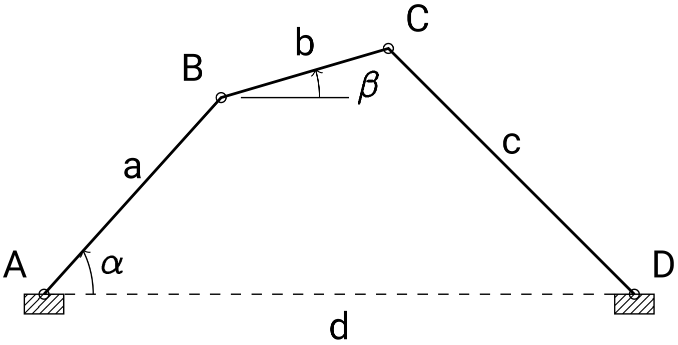
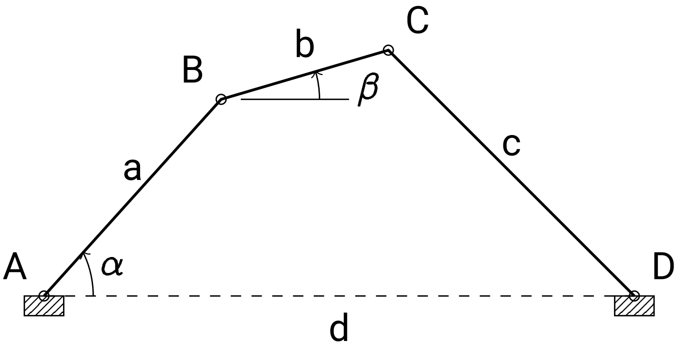


Figura 1: *Sistema de barras articulado*

Segundo ejercicio



Las barras son rígidas y están articuladas en los puntos de unión, por lo que al moverse una de ellas, las otras también de desplazan.

Consideración geométrica

Se puede demostrar a partir de la geometría del problema que la relación entre los ángulos α y β es:

$$(d - a\cos\alpha - b\cos\beta)^2 + (a\sin\alpha + b\sin\beta)^2 - c^2 = 0$$

Consideración geométrica

Se puede demostrar a partir de la geometría del problema que la relación entre los ángulos α y β es:

$$(d - a\cos\alpha - b\cos\beta)^2 + (a\sin\alpha + b\sin\beta)^2 - c^2 = 0$$

Para un valor dado de α, podemos resolver la ecuación para β, mediante alguno de los métodos para encontrar raíces que ya hemos visto.

Valores de α y de β

Haciendo para $\alpha = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, \ldots, 30^\circ$, los resultados son:

α (grados)	0	5	10	15	20	25	30
β (rad)	1.6595	1.5434	1.4186	1.2925	1.1712	1.0585	0.9561

Enunciado del ejercicio

Si el segmento AB gira con velocidad angular constante de $25\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Con el método de diferencias finitas de orden $O(h^2)$, calcula la velocidad angular $d\beta/dt$ del segmento BC contra el ángulo α.

Solución al ejercicio

La velocidad angular de BC es:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\beta}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = 25\frac{d\beta}{d\alpha}\,\mathrm{rad\,s}^{-1}$$

donde $d\beta/d\alpha$ se puede estimar con una aproximación de diferencias finitas, tomando los datos de la tabla anterior.

Solución al ejercicio

Para los puntos extremos se usarían las diferencias hacia adelante y hacia atrás de orden $O(h^2)$, mientras que para los puntos de en medio, el cálculo se hace con las diferencias centrales.

Solución al ejercicio

Nótese que el incremento de α es

$$h = (5°)\left(\frac{\pi}{180}\text{rad}/°\right) = 0.087\,266\,\text{rad}$$

Así tenemos que:

$$\dot{\beta}(0°) = 25\,\frac{-3\beta(0°) + 4\beta(5°) - \beta(10°)}{2h} = -32.01\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$$

$$\dot{\beta}(5°) = \frac{\beta(10°) - \beta(0°)}{2h} = -34.51\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$$

Ejercicio para entregar: Completa la tabla

α (grados)	$0°$	$5°$	$10°$	$15°$	$20°$	$25°$	$30°$
$\dot{\beta}$ $(\mathrm{rad\,s^{-1}})$	-32.01	-34.51					

Debes de entregar la tabla y el código en `python`.

Solución usando lo que tenemos

La primera pregunta que planteamos es:
¿podemos utilizar las funciones de las aproximaciones por diferencias finitas?

Solución usando lo que tenemos

La primera pregunta que planteamos es: *¿podemos utilizar las funciones de las aproximaciones por diferencias finitas?*

La respuesta es no, de manera directa, pero podemos hacer un arreglo para utilizar el desarrollo por diferencias finitas.

Diferencia entre función y pares de datos

En el ejemplo anterior con la función exponencial, tenemos una expresión que se evalúa para el dato (o conjunto de datos) en particular.

Cuando tenemos un conjunto de datos de una tabla, propiamente la expresión para la función no la tenemos de manera explícita.

Ajuste a las expresiones

Es por ello que debemos de hacer un ajuste en las expresiones de las diferencias finitas para el conjunto de datos de la tabla.

¿Cómo lo resolvemos?

Con los tips que nos dan en el enunciado, para utilizar en los extremos una aproximación de la derivada hacia adelante y hacia atrás, y para los puntos centrales, con una aproximación por diferencias centrales.

Debemos de adaptar el algoritmo que revisamos, ya que tenemos un conjunto de puntos discretos de la tabla.

Diferencias hacia adelante con puntos

El algoritmo ahora considera el conjunto de puntos de la lista:

Código 2: Algoritmo ajustado para el conjunto de puntos

```
def seg-aprox-dif-adelante-puntos(f2h, fh, f, h):
    valor = (-f2h + 4 * fh - 3 * f)/(2 * h)
    return valor
```

Comentario del algoritmo

En el código anterior se expresa

```
f2h --> f(x + 2h)
fh  --> f(x + h)
```

que sería el equivalente para el caso que se utilice la función f con una expresión.

Diferencias centrales con puntos

Para el caso de las diferencias centrales, tendremos

Código 3: Algoritmo ajustado para el conjunto de puntos

```
def ddifcentralespuntos(fh, hf, h):
    valor = (fh - hf)/(2 * h)
    return valor
```

Comentario del algoritmo

Ahora en este código anterior se expresa

```
fh --> f(x + h)
hf --> f(x - h)
```

Esta aclaración es conveniente para evitar que haya un embrollo al momento de usar los puntos de la tabla.

La expresión pendiente

Nos restaría encontrar una expresión a partir de la lista de $f(x-2h)$ y de $f(x-h)$, de tal manera que la aproximación de la primera derivada, sea del orden de h^2.

El código completo

Una vez con los tres algoritmos necesarios, procedemos a utilizarlos para obtener el resultado que nos pide el ejercicio.

El manejo de los índices de la lista de valores, será de gran utilidad para los cálculos.

Propuesta de código I

Código 4: Propuesta de código completo

```
from moduloDerivadas import segaproxdifadelantepuntos, ddifcentralespuntos, segaproxdifatraspuntos

alfas = [0., 5., 10., 15., 20., 25., 30.]

betas = [1.6595, 1.5434, 1.4186, 1.2925, 1.1712, 1.0585, 0.9561]

h = 0.087266
```

Propuesta de código II

```

print('{:2.3f}'.format(25 * seg aproxdifadelantepuntos(betas[2], betas[1], betas[0], h)))

for i in range(1, len(betas) - 1):
    print(('{:2.3f}'.format(25 * ddifcentralespuntos(betas[i + 1], betas[i - 1], h))))

print('{:2.3f}'.format(25*seg aproxdifatraspuntos(betas[-1 - 2], betas[-1 - 1], betas[-1], h)))
```

Comentarios del código

Habrás notado que el código evalúa directamente el primer valor de la lista así como el último, debido a que se usan las diferencias hacia adelante y hacia atrás.

Comentarios del código

Para los puntos intermedios necesitamos iterar para leer los datos centrales, checa que en la secuencia `range(1, len(betas) - 1)`, iniciamos la secuencia en 1, tomamos el tamaño completo de la lista y le restamos un -1, así garantizamos que no nos excedemos en los índices.

Ejercicio resuelto

α (grados)	$0°$	$5°$	$10°$	$15°$
$\dot{\beta}$ $(\mathrm{rad\,s^{-1}})$	-32.01	-34.51	-35.94	-35.44

α (grados)	$20°$	$25°$	$30°$
$\dot{\beta}$ $(\mathrm{rad\,s^{-1}})$	-33.52	-30.81	-27.86

Debe de entregarse la tabla y el código en python.

Extrapolación de Richardson

La *Extrapolación de Richardson* es un método sencillo para aumentar la precisión de ciertos procedimientos numéricos, incluyendo las aproximaciones por diferencias finitas.

Supongamos que tenemos la forma de calcular una cantidad G.

Por otra parte, si consideramos que el resultado depende de un parámetro h, hagamos la aproximación por $g(h)$, tenemos que $G = g(h) + E(h)$, donde $E(h)$ representa el error.

Extrapolación de Richardson

La extrapolación de Richardson puede remover el error, siempre que tenga la forma $E(h) = c\, h^p$, donde c y p son constantes.

Extrapolación de Richardson

La extrapolación de Richardson puede remover el error, siempre que tenga la forma $E(h) = c\, h^p$, donde c y p son constantes.

Iniciamos el cálculo para varios valores de h, digamos $h = h_1$, así

$$G = g(h_1) + c\, h_1^p$$

Repetimos el cálculo con $h = h_2$, por tanto:

$$G = g(h_2) + c\, h_2^p$$

Fórmula de la extrapolación

Eliminando c y resolviendo para G, tenemos:

$$G = \frac{(h_1/h_2)^p g(h_2) - g(h_1)}{(h_1/h_2)^p - 1}$$

que es la fórmula de Extrapolación de Richardson.

Fórmula de la extrapolación

En la práctica se usa $h_2 = h_1/2$, quedando

$$\boxed{G = \frac{2^p g(h_1/2) - g(h_1)}{2^p - 1}}$$

Ejercicio

Usemos el ejemplo de $(exp(-x))''$ en $x = 1$, consideremos los valores de la tabla con seis dígitos.

Dado que la extrapolación contine errores por truncamiento, debemos limitarnos a los valores de h que producen redondeo insignificante.

Ejercicio

De la tabla anterior que calculamos, tenemos que:

$$g(0.64) = 0.380609 \qquad\qquad g(0.32) = 0.371029$$

El error de truncamiento en la aproximación central por diferencias finitas es:

$$E(h) = O(h^2) = c_1\, h^2 + c_2\, h^4 + c_3\, h^6 + \ldots$$

Ejercicio

Por lo que podemos eliminar el primer término del error (dominante), si usamos $p = 2$ y $h_1 = 0.64$, así

$$G = \frac{2^2 g(0.32) - g(0.64)}{2^2 - 1} = \frac{4(0.371035) - 0.380610}{3}$$
$$= 0.367843$$

Ejercicio

Que es una aproximación de $(exp(-x))''$ con un error $= O(h^4)$.

Este valor representa el mejor valor obtenido en comparación de los obtenidos previamente.

Teniendo en cuenta los siguientes puntos de datos uniformemente espaciados:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
f(x)	0.0000	0.0819	0.1341	0.1646	0.1797

Calcula $f'(x)$ y $f''(x)$ en $x = 0$ y $x = 0.2$, usando la aproximación por diferencias finitas de orden $O(h^2)$.

Solución

Usando la aproximación por diferencias finitas de orden $O(h^2)$, de la lista de diferencias hacia adelante, tenemos:

$$f'(0) = \frac{-3\, f(0) + 4\, f(0.1) - f(0.2)}{2\,(0.1)} = 0.967$$

$$f''(0) = \frac{2\, f(0) - 5\, f(0.1) + 4\, f(0.2) - f(0.3)}{(0.1)^2} = -3.77$$

Si usamos ahora la aproximación por diferencias centrales:

$$f'(0.2) = \frac{-f(0.1) + f(0.3)}{2(0.1)} = 0.4135$$

$$f''(0.2) = \frac{f(0.1) - 2\, f(0.2) + f(0.3)}{(0.1)^2} = -2.17$$

Tercer Ejemplo

Usando los siguientes datos(del ejemplo anterior):

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
f(x)	0.0000	0.0819	0.1341	0.1646	0.1797

Calcula el valor de $f'(0)$ con la mayor precisión posible.

Tercer Ejemplo

Una solución es usar el método de extrapolación de Richardson con aproximación de diferencias finitas.

Solución

Iniciamos con la segunda aproximación por diferencias hacia adelante de orden $O(h^2)$ para $f'(0)$: usamos en una $h = 0.2$ y en otra $h = 0.1$

$$g(0.2) = \frac{-3\,f(0) + 4\,f(0.2) - f(0.4)}{2\,(0.2)} = 0.8918$$

$$g(0.1) = \frac{-3\,f(0) + 4\,f(0.1) - f(0.2)}{2\,(0.1)} = 0.9675$$

Solución

Recordemos que el error en ambas aproximaciones, es de la forma $E(h) = c_1 \, h^2 + c_2 \, h^4 + c_3 \, h^5 + \ldots$.

Solución

Usamos la extrapolación de Richardson para eliminar el término dominante. Con $p = 2$, resulta

$$f'(0) \simeq G = \frac{2^2\, g(0.1) - g(0.2)}{2^2 - 1} = 0.9927$$

la cual es una aproximación por diferencias finitas de orden $O(h^4)$.