Examen 2 - Operaciones matemáticas básicas

Solución: Diferenciación e integración numérica

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

9 de octubre de 2014

Contenido

Contenido

Contenido

Problema 1

Usando una aproximación por diferencias finitas de orden $O(h^2)$, calcula $f'(2.36)$ y $f''(2.36)$, a partir de los datos:

x	2.36	2.37	2.38	2.39
f(x)	0.85866	0.86289	0.86710	0.87129

Problema 1

Usando una aproximación por diferencias finitas de orden $O(h^2)$, calcula $f'(2.36)$ y $f''(2.36)$, a partir de los datos:

x	2.36	2.37	2.38	2.39
f(x)	0.85866	0.86289	0.86710	0.87129

$f'(2.36) = 0.424$

Problema 1

Usando una aproximación por diferencias finitas de orden $O(h^2)$, calcula $f'(2.36)$ y $f''(2.36)$, a partir de los datos:

x	2.36	2.37	2.38	2.39
f(x)	0.85866	0.86289	0.86710	0.87129

$f'(2.36) = 0.424$
$f''(2.36) = -0.2000$

Problema 2

Dados los siguientes datos

x	0.84	0.92	1.00	1.08	1.16
$f(x)$	0.431711	0.398519	0.367879	0.339596	0.312486

Calcula $f''(1)$ con la mayor precisión posible.

Problema 2

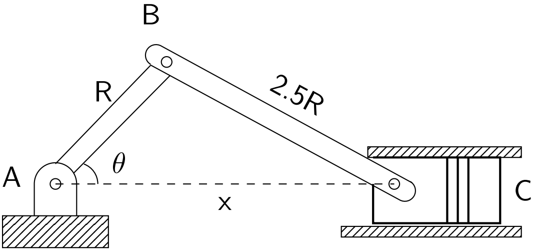
Dados los siguientes datos

x	0.84	0.92	1.00	1.08	1.16
$f(x)$	0.431711	0.398519	0.367879	0.339596	0.312486

Calcula $f''(1)$ con la mayor precisión posible.
$f''(1) = 0.2265$

Problema 3

La palanca AB de longitud $R = 90$ mm está girando con velocidad angular constante $d\theta/dt = 5000$ rev/min.



La posición del pistón C como se muestra, varía con el ángulo θ

$$x = R\left(\cos\theta + \sqrt{2.5^2 - \sin^2\theta}\right)$$

Escribe un programa en python que calcule mediante diferenciación numérica la aceleración del pistón en $\theta = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, \ldots, 180^\circ$.

Solución

Hay que plantear la ecuación a resolver, ya que tenemos una función compuesta, es decir, en términos de x, de θ y de t, es decir:

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

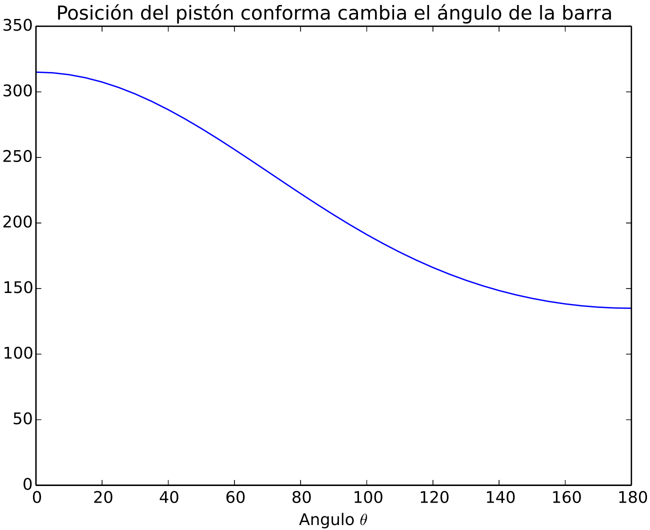
entonces, para conocer la aceleración del pistón, derivamos nuevamente esta expresión

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right] \\
&= \cancelto{0}{\frac{d^2\theta}{dt^2}}\left(\frac{dx}{d\theta}\right) + \frac{d\theta}{dt}\left(\frac{d}{dt}\frac{dx}{d\theta}\right) = \frac{d\theta}{dt}\left[\frac{d^2x}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt}\right] \\
&= \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \frac{d^2x}{d\theta^2}
\end{aligned}
$$

Como ya conocemos la expresión que nos relaciona la velocidad angular con la segunda derivada, procedemos a generar pares de datos (θ, x) que usaremos para nuestra rutina de segunda deriva, para obtener los valores de $\ddot{x}$ en los ángulos, debiendo ser mostrados en una tabla y posteriormente graficados.

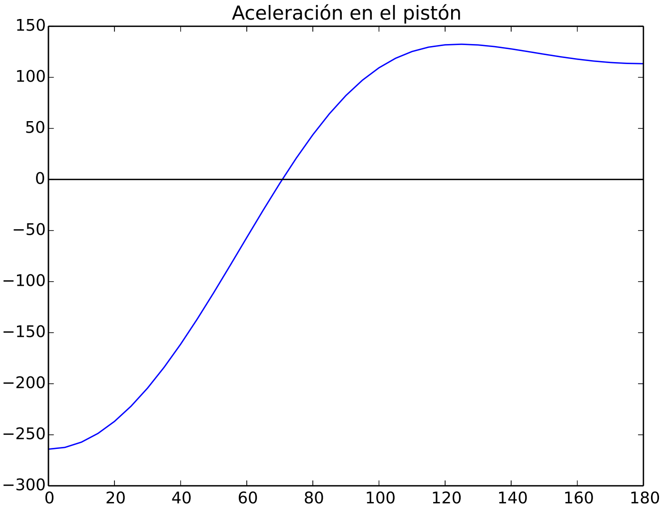
θ	x	$\ddot{x}$
0°	315.000	-264.124
5°	314.521	-262.396
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
175°	135.206	113.660
180°	135.000	113.368

Gráficas



Posición del pistón conforma cambia el ángulo de la barra
350
300
250
200
150
100
50
0
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
Angulo θ

Gráficas


Aceleración en el pistón
150
100
50
0
−50
−100
−150
−200
−250
−300
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180

Problema 4

Las estaciones de radar A y B están separadas por una distancia $a = 500$ m; rastrean el avión C registrando los ángulos α y β en intervalos de un segundo.

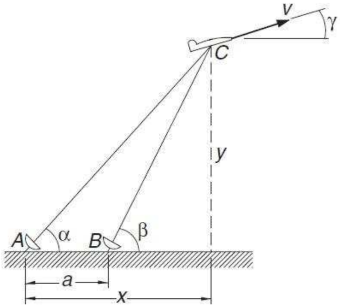


Figura: Estaciones de radar y el avión.

Si hay tres lecturas sucesivas

t(s)	9	10	11
α	$54.80°$	$54.06°$	$53.34°$
β	$65.59°$	$64.59°$	$63.62°$

Calcula la velocidad v del avión y el ángulo de subida γ en $t = 10$ segundos. Las coordenadas del avión las tomamos de

$$x = a\frac{\tan\beta}{tan\beta - tan\alpha} \qquad y = a\frac{tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

Lo que podemos hacer es calcular v_xy v_y en $t = 10$ segundos, para luego obtener la velocidad

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

el ángulo de subida γ resulta de

$$\arctan\left(\frac{v_y}{v_y}\right)$$

así pues, tenemos que

$$v = 50.099 \text{ m/s}$$
$$\gamma = 15.14^\circ$$

Problema 5

Obtén la aproximación por diferencias centrales de $f''(x)$ de orden $O(h^4)$ aplicando la extrapolación de Richardson a la aproximación por diferencias centrales de orden $O(h^2)$

Conocemos $f''(x)$ por medio de la aproximación por diferencias centrales de orden $O(h^2)$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

De la extrapolación de Richardson con $h_2 = h_1/2$ tenemos el resultado

$$G = \frac{2^p g\left(\frac{h_1}{2}\right) - g(h_1)}{2^p - 1}$$

Haciendo $p = 2$ y con el desarrollo de G, tenemos que la aproximación por diferencias centrales de $f''(x)$ de orden $O(h^4$ con la extrapolación de Richardson, resulta ser

$$G = \frac{1}{3h}\left[16f\left(x+\frac{h_1}{2}\right) - f(x+h_1) - 30f(x) + \right.$$
$$\left. - f(x-h_1) + 16f\left(x-\frac{h_1}{2}\right)\right]$$

Problema 6

Obtén la primera aproximación por diferencias centrales para $f^4(x)$ a partir de la serie de Taylor.

A partir del desarrollo en series de Taylor, tenemos que

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^4(x) + \ldots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^4(x) - \ldots$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^4(x) + \ldots$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^4(x) - \ldots$$

Haciendo el álgebra correspondiente, tenemos que

La expresión para la primera aproximación por diferencias centrales para $f^4(x)$ es

$$\begin{aligned} f^4(x) = \frac{1}{h^4} & \left[f(2x + 2h) - 4f(x + h) + 6f(x) + \right. \\ & \left. - 4f(x - h) + f(x - 2h) \right] \end{aligned}$$

Contenido

Problema 7

Usa la regla del trapecio recursiva para evaluar

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(1 + \tan(x))dx$$

Explica tus resultados.

Resultados

Usando diferentes valores para k

k	Integral	error
1	0.272198261	0.00000
5	0.272198261	0.00000
10	0.272198261	0.00000
15	0.272198261	0.00000
20	0.272198261	0.00000

Problema 8

La siguiente tabla indica la potencia P propocionada por las ruedas de un carro como función de la velocidad v. Si la masa del carro es $m = 2000$ kg, calcula el tiempo Δt necesario para que el carro acelere de 1 m/s a 6 m/s. Usa la regla del trapecio para integrar.

Tip:

$$\Delta t = m \int_{1s}^{6s} \left(\frac{v}{P}\right) dv$$

que se puede obtener de la ley de Newton $F = m/(dv/dt)$ y por la definición de potencia, $P = Fv$.

v (m/s)	0	1.0	1.8	2.4	3.5	4.4	5.1	6.0
P (kW)	0	4.7	12.2	19.0	31.8	40.1	43.8	43.2

Tip:

$$\Delta t = m \int_{1s}^{6s} \left(\frac{v}{P} \right) dv$$

que se puede obtener de la ley de Newton $F = m/(dv/dt)$ y por la definición de potencia, $P = Fv$.

v (m/s)	0	1.0	1.8	2.4	3.5	4.4	5.1	6.0
P (kW)	0	4.7	12.2	19.0	31.8	40.1	43.8	43.2

El tiempo necesario para aumentar la velocidad es de: 1.6658 segundos

Problema 9

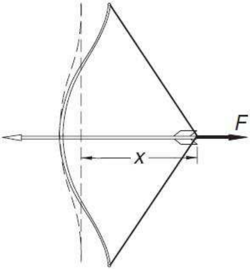
La siguiente tabla proporciona el empuje F del arco como función del desplazamiento x. Si la cuerda tiene un desplazamiento de 0.5 m, calcula la velocidad de una flecha de 0.075 kg, cuando sale del arco. Tip: la energía cinética de la flecha es igual al trabajo hecho al estirar la cuerda, que es:

$$m\frac{v^2}{2} = \int_0^{0.5m} F dx$$

Tabla de datos

x (m)	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
F (N)	0	37	71	104	134	161

x (m)	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
F (N)	185	207	225	239	250



Usando la regla extendida del trapecio y ajustando el valor del peso de la flecha, resulta que la velocidad de la flecha es: 44.54 m/s

El período de un péndulo de longitud L es $\tau = 4\sqrt{\frac{L}{g}}h(\theta_0)$, donde g es la aceleración debida a la gravedad, θ_0, representa la amplitud angular y

$$h(\theta_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin^2\theta}}$$

Calcular $h(15^\circ)$, $h(30^\circ)$ y $h(45^\circ)$; compara esos valores con $h(0^\circ) = \frac{\pi}{2}$ (la aproximación usada para pequeñas amplitudes)

Resultados

θ	$h(\theta)$	error
$15°$	1.57755	$4.30058e-03$
$30°$	1.59814	$1.74088e-02$
$45°$	1.63359	$3.99733e-02$