Tarea Examen 1/3 - Ecuaciones diferenciales parciales

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

1. Desarrolla un esquema numérico para resolver la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi(r, \theta) = -\rho(r, \theta)/\epsilon_0$$

en coordenadas polares. Considera que la geometría en la frontera es un anillo circular con potenciales dados, para el radio interno es $\phi(a, \theta)$, y para el radio externo $\phi(b, \theta)$. Prueba tu solución asignando valores de potencial al problema.

Tips La ecuación de Poisson en coordenadas polares resulta ser:

$$\nabla^2 \phi(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -\frac{\rho(r, \theta)}{\epsilon_0}$$

donde $0 \leq r \leq R$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Usando la malla:

$$\begin{aligned} r_i &= i\Delta R \\ \theta &= j\Delta\theta \end{aligned}$$

Se aproxima la ecuación por

$$\frac{1}{r_i} \left(r_{i+\frac{1}{2}} \frac{V_{i+1,j} - V_{ij}}{\Delta r} - r_{j+\frac{1}{2}} \frac{V_{ij} - V_{i-1,j}}{\Delta r} \right) \frac{1}{\Delta r} + \\ + \frac{1}{r^2} \frac{V_{i,j+1} - 2V_{ij} + V_{i,j-1}}{\Delta\theta^2} = -\frac{\rho(r, \theta)}{\epsilon_0}$$

donde V_{ij} y r_{ij} son funciones

$$(r_i, \theta_j) = (i\Delta r, j\Delta\theta)$$

Las funciones son periódicas de j en la malla, con período $j = \dfrac{2\pi}{\Delta\theta}$ y V_{ij} es independiente de j.