Ejercicio sobre sumas y restas

Curso de Física Computacional

M. en C. Gustavo Contreras Mayén.

1. Aprendimos en la secundaria a resolver la ecuación homogénea de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

que tiene una solución analítica que se puede escribir como

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_{1,2} = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Revisando la expresión anterior vemos que la cancelación de la diferencia (y por tanto, un incremento en el error) aumenta cuando $b^2 >> 4ac$ debido a que la raíz cuadrada y el siguiente término están muy próximas a cancelarse.

   a) Escribe un programa que calcule las cuatro soluciones para valores arbitrarios de a, b y c.

   b) Revisa cómo los errores obtenidos en los cálculos, aumentan conforme hay una cancelación de la diferencia de términos y su relación con la precisión de la máquina. Prueba con los siguientes valores $a = 1$, $b = 1$, $c = 10^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

   c) Cómo mejorarías el programa para obtener la mayor precisión en tu respuesta?

2. Considera la suma finita

$$S_N^{(1)} = \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{n}{n+1} \tag{1}$$

Si sumamos de manera separada los valores impares y los pares de x, tendremos dos sumas:

$$S_N^{(2)} = -\sum_{n=1}^{N} \frac{2n-1}{2n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2n}{2n+1} \tag{2}$$

Podemos eliminar la diferencia mediante una combinación entre las dos sumas, quedando de la siguiente manera

$$S_N^{(3)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n(2n+1)} \tag{3}$$

Sabemos que aunque el valor de las tres sumas $S_N^{(1)}$, $S_N^{(2)}$, $S_N^{(3)}$, es el mismo, el resultado númerico puede ser diferente.

a) Escribe un programa que calcule $S_N^{(1)}$, $S_N^{(2)}$, $S_N^{(3)}$.

b) Supongamos que $S_N^{(3)}$ es el valor exacto de la suma. Grafica el error relativo contra el número de términos en la suma (tip: usa una escala log-log). Comienza con $N = 1$ hasta $N = 1000000$. Describe la gráfica.

c) Identifica en tu gráfica una región en donde la tendencia es casi lineal, ¿qué representa ésta sección con respecto al error?

3. Aunque tengamos el apoyo de una buena computadora, el cálculo de la suma de una serie requiere reflexión y cuidado.
Considera la serie:

$$S^{(u)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

que será una suma finita mientras N sea finito. Cuando hacemos la suma de manera analítica, no importa si se hace de manera ascendente: desde $n = 1$, o descendente: desde $n = N$

$$S^{(d)} = \sum_{n=N}^{1} \frac{1}{n}$$

Sin embargo, debido a los errores por redondeo, cuando calculamos de manera analíticas, las sumas $S^{(u)} \neq S^{(d)}$

a) Escribe un programa que calcule $S^{(u)}$ y $S^{(d)}$ como función de N.

b) Grafica (log-log) la diferencia relativa entre la suma relativa contra N.

c) Identifica en tu gráfica una región en donde la tendencia es casi lineal, ¿qué representa ésta sección con respecto al error?