Incertidumbre y mediciones

Curso de Física

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

Facultad de Ciencias - UNAM

21 de agosto de 2018

Fuentes de incertidumbre

Todas las mediciones tienen asociada una incertidumbre que puede deberse a los siguientes factores:

- ✓ la naturaleza de la magnitud que se mide.

Fuentes de incertidumbre

Todas las mediciones tienen asociada una incertidumbre que puede deberse a los siguientes factores:

- ✓ la naturaleza de la magnitud que se mide.
- ✓ el instrumento de medición.

Fuentes de incertidumbre

Todas las mediciones tienen asociada una incertidumbre que puede deberse a los siguientes factores:

- ✓ la naturaleza de la magnitud que se mide.
- ✓ el instrumento de medición.
- ✓ el observador.

Fuentes de incertidumbre

Todas las mediciones tienen asociada una incertidumbre que puede deberse a los siguientes factores:

- ✓ la naturaleza de la magnitud que se mide.
- ✓ el instrumento de medición.
- ✓ el observador.
- ✓ las condiciones externas.

Factores de incertidumbre

Cada uno de estos factores constituye por separado una fuente de incertidumbre y contribuye en mayor o menor grado a la incertidumbre total de la medida.

Factores de incertidumbre

Cada uno de estos factores constituye por separado una fuente de incertidumbre y contribuye en mayor o menor grado a la incertidumbre total de la medida.

La tarea de detectar y evaluar las incertidumbres no es simple e implica conocer diversos aspectos de la medición.

Tipos de errores

Se clasifican en dos grandes grupos:

1. Errores aleatorios.

Tipos de errores

Se clasifican en dos grandes grupos:

1. Errores aleatorios.
2. Errores sistemáticos.

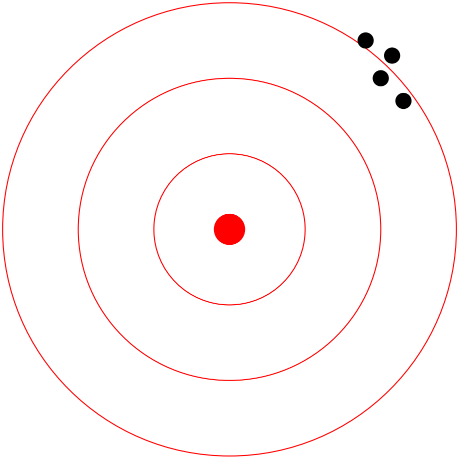
Errores aleatorios

Se les llama errores “accidentales” o aleatorios a aquellos que aparecen cuando se realizan mediciones repetidas de la misma variable, se obtienen valores diferentes, con igual probabilidad de estar por arriba o por debajo del valor real.

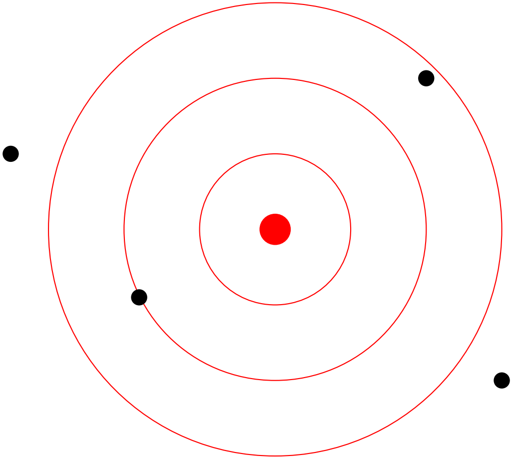
Errores sistemáticos

Son aquellos errores sen donde se presenta una desviación constante de todas las medidas ya sea siempre hacia arriba o siempre hacia abajo del valor real, por ejemplo una mala calibración del instrumento de medición.

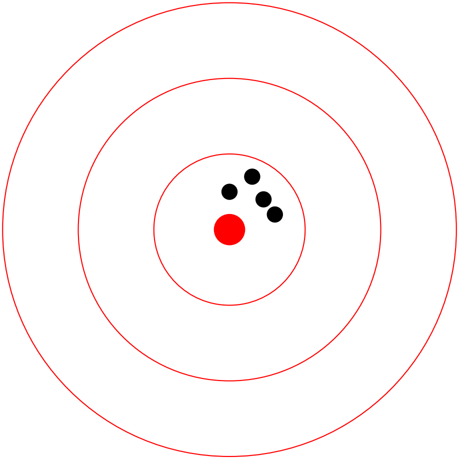
Medición precisa pero no exacta



Medición nada precisa y nada exacta



Medición precisa y exacta



Medición ideal

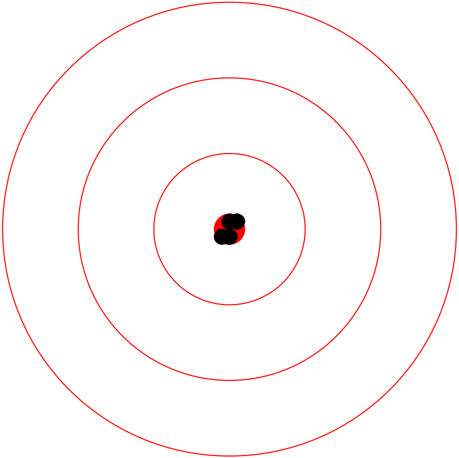


Figura: La medida ideal es aquella que tendría un $100\,\%$ de exactitud y un $100\,\%$ de precisión.

Incertidumbre en medidas reproducibles

Cuando se realiza una serie de medidas de una misma magnitud con el mismo instrumento, se obtienen los mismos resultados, pero no se puede concluir que la incertidumbre sea cero.

Cuando se realiza una serie de medidas de una misma magnitud con el mismo instrumento, se obtienen los mismos resultados, pero no se puede concluir que la incertidumbre sea cero.

Lo que sucede es que los errores quedan ocultos ya que son menores que la incertidumbre asociada al aparato de medición.

En este caso, puede establecerse un criterio simple y útil:

Incertidumbre en medidas reproducibles

En este caso, puede establecerse un criterio simple y útil:

cuando las medidas son reproducibles, se asigna una incertidumbre igual a la mitad de la división más pequeña del instrumento, la cual se conoce como resolución.

Ejemplo

Al medir repetidas veces el volumen de un líquido con un instrumento graduado en mililitros, obtiene siempre $48.0\,\mathrm{mL}$, la incertidumbre será $\pm 0.5\,\mathrm{mL}$.

Ejemplo

Al medir repetidas veces el volumen de un líquido con un instrumento graduado en mililitros, obtiene siempre 48.0 mL, la incertidumbre será ± 0.5 mL.

Lo que significa que la medición está entre 47.5 mL - 48.5 mL, a éste se le conoce como intervalo de confianza de la medición y su tamaño es el doble de la incertidumbre.

Incertidumbre en medidas no reproducibles

Cuando se hacen repeticiones de una medida en las mismas condiciones y éstas en general son diferentes, tomando en cuenta que la medida "real" no se conoce, surgen algunas preguntas interesantes:

1. ¿Cuál es el valor que se reporta?

Incertidumbre en medidas no reproducibles

Cuando se hacen repeticiones de una medida en las mismas condiciones y éstas en general son diferentes, tomando en cuenta que la medida “real” no se conoce, surgen algunas preguntas interesantes:

1. ¿Cuál es el valor que se reporta?
2. ¿Cuál es el valor más probable?

Incertidumbre en medidas no reproducibles

Cuando se hacen repeticiones de una medida en las mismas condiciones y éstas en general son diferentes, tomando en cuenta que la medida "real" no se conoce, surgen algunas preguntas interesantes:

1. ¿Cuál es el valor que se reporta?
2. ¿Cuál es el valor más probable?
3. ¿Qué incertidumbre se asigna a ese valor?

Valor más probable

Se acepta que el valor más representativo es el promedio $(\bar{x})$ de las mediciones, que se calcula por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las lecturas particulares y n es el número de repeticiones.

La incertidumbre asociada

A reserva de hacer un estudio estadístico riguroso, utilizaremos un criterio muy sencillo.

Se debe de considerar la dispersión de los valores obtenidos y que en lo posible, el intervalo definido incluya el valor verdadero de la medición.

La incertidumbre asociada

Se considera como valor de incertidumbre la desviación absoluta máxima.

La incertidumbre asociada

Se considera como valor de incertidumbre la desviación absoluta máxima.

Que corresponde a la mayor de las diferencias absolutas entre el valor promedio y las lecturas obtenidas.

Ejemplo

Al medir el tiempo de vaciado del agua contenida en un embudo cuando se escurre por el fondo, después de repetir el experimento cinco veces en las mismas condiciones, se obtuvieron los siguiente datos:

Ejemplo

Medición	Tiempo (s)
t_1	35.4
t_2	30.2
t_3	33.0
t_4	29.6
t_5	32.8

Ejemplo

El tiempo más probable ($\bar{t}$) es

$$\bar{t} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{5} = 32.2\,\mathrm{s}$$

Ejemplo

El tiempo más probable ($\bar{t}$) es

$$\bar{t} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{5} = 32.2\,\mathrm{s}$$

Los valores extremos son: $35.4\,\mathrm{s}$ (máximo) y $29.6\,\mathrm{s}$ (mínimo).

Ejemplo

Las diferencias absolutas con respecto al promedio son:

$$|32.2 - 35.4| = 3.2$$
$$|32.2 - 29.6| = 2.6$$

Ejemplo

Las diferencias absolutas con respecto al promedio son:

$$|32.2 - 35.4| = 3.2$$
$$|32.2 - 29.6| = 2.6$$

La diferencia absoluta mayor corresponde a 3.2, por lo que el resultado de las mediciones se reporta como

$$\boxed{t = 32.2 \pm 3.2 \text{ s}}$$

Regla para expresar una medida

Toda medida ya sea reproducible o no, debe de ir seguida por la unidad de la variable que se mide y se expresa de la forma

$$\bar{x} \pm \delta\, x \text{ unidades}$$

Donde $\bar{x}$ representa el valor central de la medición y $\delta\, x$ representa su incertidumbre.

Regla para expresar una medida

Donde $\bar{x}$ representa el valor central de la medición y $\delta\, x$ representa su incertidumbre.

De manera que se entienda que la medición está comprendida dentro del intervalo

$$[\bar{x} - \delta\, x, \bar{x} + \delta\, x]$$

¿Qué es la incertidumbre relativa?

Utilizando una cinta métrica cuya mínima escala es 0.1 cm, se hacen las mediciones de

Ancho de una puerta	$a = (150.00 \pm 0.05)$ cm
Largo de un lápiz	$L = (10.00 \pm 0.05)$ cm

Discusión

- La incertidumbre absoluta ($0.05\,\mathrm{cm}$) es la misma para las dos mediciones.

Discusión

- La incertidumbre absoluta ($0.05\,\mathrm{cm}$) es la misma para las dos mediciones.
- Pero $0.05\,\mathrm{cm}$ distribuidos a lo largo de $150.0\,\mathrm{cm}$ es mucho menos que si se reparten sobre $10.0\,\mathrm{cm}$.

Discusión

- La incertidumbre absoluta ($0.05\,\mathrm{cm}$) es la misma para las dos mediciones.
- Pero $0.05\,\mathrm{cm}$ distribuidos a lo largo de $150.0\,\mathrm{cm}$ es mucho menos que si se reparten sobre $10.0\,\mathrm{cm}$.
- La significancia de $0.05\,\mathrm{cm}$ es mayor cuando se miden $10.0\,\mathrm{cm}$ que cuando se miden $150.0\,\mathrm{cm}$.

Definición de incertidumbre relativa

Se define la incertidumbre relativa como el cociente entre la incertidumbre relativa y la magnitud observada:

$$\delta_r \, x = \frac{\delta \, x}{x_0}$$

Incertidumbre relativa

De los ejemplos anteriores:

Para la puerta se tiene

$$\delta_r\, a = \frac{0.05\,\text{cm}}{150.0\,\text{cm}} = 0.00033$$

Para el lápiz se tiene

$$\delta_r\, L = \frac{0.05\,\text{cm}}{10.0\,\text{cm}} = 0.0055$$

La incertidumbre relativa es una *cantidad adimensional*.

Magnitud del errores

Si se dice que una medición x_0 tiene una incertidumbre del $50\,\%$, nos podemos dar una idea de la magnitud del error, aún sin conocer la magnitud observada, lo mismo pasaría con un error del $5\,\%$.

Definición de incertidumbre porcentual

La incertidumbre porcentual es el índice más utilizado para especificar la precisión de una medida, se obtiene multiplicando la incertidumbre relativa por $100\,\%$:

$$\delta_{\%}\, x = \delta_r\, x \times 100\,\%$$

De los ejemplos anteriores

Expresando la incertidumbre porcentual, ahora tenemos una idea de la magnitud del error asociado a la medición:

Puerta	$\delta_{\%}\, a = 0.00033 \times 100\,\% = 0.033\,\%$
Lápiz	$\delta_{\%}\, L = 0.0055 \times 100\,\% = 0.55\,\%$

Definición

En una medición, son cifras significativas todas aquellas que pueden leerse directamente del aparato de medición.

Importante

Al reportar medidas con el número correcto de cifras significativas, se indica implícitamente, la mínima escala del instrumento de medición.

Ejemplo de medición

Se mide con un vernier cuya mínima escala es $0.01\,\mathrm{cm}$ y se obtiene la cantidad de $12.49\,\mathrm{cm}$.

Ejemplo de medición

Se mide con un vernier cuya mínima escala es $0.01\,\mathrm{cm}$ y se obtiene la cantidad de $12.49\,\mathrm{cm}$.

Se tienen cuatro cifras: $1, 2, 4, 9$ como en el vernier se pueden leer las centésimas de centímetro, implícitamente se está considerando un intervalo de incertidumbre:

$$[12.485, 12.495]$$

Observación

Si la mínima escala del vernier fuera de:

$$0.05\,\mathrm{mm} = 0.005\,\mathrm{cm}$$

el dato del ejemplo anterior estaría mal expresado, ya que debería de reportarse como $12.490\,\mathrm{cm}$

Observación

Si la mínima escala del vernier fuera de:

$$0.05\,\text{mm} = 0.005\,\text{cm}$$

el dato del ejemplo anterior estaría mal expresado, ya que debería de reportarse como $12.490\,\text{cm}$

De esta forma se indica que la medición había sido tomada con un instrumento que mide centésimas de milímetro.

Cifras sin sentido

La medida $2047.63\,\mathrm{g}$ obtenida con una balanza de sensibilidad de $1/10$ g, tiene cinco cifras significativas: $2, 0, 4, 7, 6$.

Cifras sin sentido

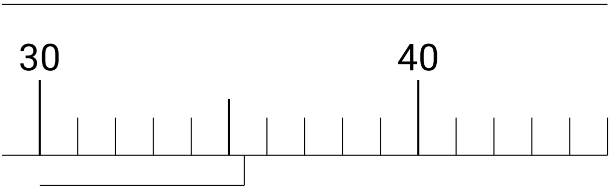
La medida $2047.63\,\mathrm{g}$ obtenida con una balanza de sensibilidad de $1/10$ g, tiene cinco cifras significativas: $2, 0, 4, 7, 6$.

La última cifra 3, que corresponde a una centésima de gramo, no puede leerse con esta balanza, por tanto, no tiene sentido.

Cifra apreciada

En ocasiones se presentará la siguiente situación:

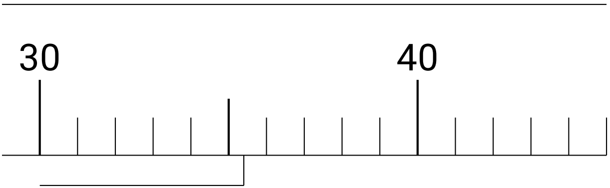
La longitud está entre 35 y 36 mm



Cifra apreciada

En ocasiones se presentará la siguiente situación:

La longitud está entre 35 y 36 mm



¿Cómo se reporta?

$$¿(35.5 \pm 0.5)\ \mathrm{mm}?\ ¿(36.0 \pm 0.5)\ \mathrm{mm}?$$

Cifra apreciada

En estos casos se justifica apreciar una cifra más, con el objeto de centrar el intervalo de incertidumbre:

$$(35.\underline{5} \pm 0.5)\ \mathrm{mm}$$

Cifra apreciada

En estos casos se justifica apreciar una cifra más, con el objeto de centrar el intervalo de incertidumbre:

$$(35.\underline{5} \pm 0.5)\ \text{mm}$$

Con esto aseguramos que la longitud está comprendida entre 35 y 36 mm. La cifra apreciada no es significativa, se señala con el subrayado.

El punto decimal

Cuando tenemos que

$$3.714\,\mathrm{m} = 37.14\,\mathrm{dm} = 371.4\,\mathrm{cm} = 3714\,\mathrm{mm}$$

El punto decimal

Cuando tenemos que

$$3.714\,\mathrm{m} = 37.14\,\mathrm{dm} = 371.4\,\mathrm{cm} = 3714\,\mathrm{mm}$$

En todos los casos hay cuatro cifras significativas.

El punto decimal

Cuando tenemos que

$$3.714\,\mathrm{m} = 37.14\,\mathrm{dm} = 371.4\,\mathrm{cm} = 3714\,\mathrm{mm}$$

En todos los casos hay cuatro cifras significativas.

La posición del punto decimal, es independiente del número de ellas.

El cero como cifra significativa

En los casos en que haya necesidad de hacer un cambio de unidades *agregando ceros* a la derecha o a la izquierda, se tiene que

$$3.714\,\mathrm{m} = 0.003\,714\,\mathrm{km} = 3.714 \times 10^{-3}\,\mathrm{km}$$

El cero como cifra significativa

En los casos en que haya necesidad de hacer un cambio de unidades *agregando ceros* a la derecha o a la izquierda, se tiene que

$$3.714\,\mathrm{m} = 0.003\,714\,\mathrm{km} = 3.714 \times 10^{-3}\,\mathrm{km}$$

El número de cifras significativas sigue siendo cuatro, los ceros agregados no cuentan como tales.

Otro ejemplo de ceros

Si transformamos a micras

$$3.714\,\mathrm{m} = 371\,400\,\mu\mathrm{m} = 3.714 \times 10^4\,\mu\mathrm{m}$$

El número de cifras significativas, sigue siendo cuatro.

Otro ejemplo de ceros

Si transformamos a micras

$$3.714\,\mathrm{m} = 371\,400\,\mu\mathrm{m} = 3.714 \times 10^4\,\mu\mathrm{m}$$

El número de cifras significativas, sigue siendo cuatro.

Agragando ceros a la derecha o a la izquierda (usar potencias de 10) no afecta a las cifras signficativas.

Mediciones indirectas

Una medición indirecta es aquella que se obtiene como resultado de operaciones realizadas con dos o más mediciones directas.

Mediciones indirectas

Una medición indirecta es aquella que se obtiene como resultado de operaciones realizadas con dos o más mediciones directas.

Por ejemplo, medir el volumen de agua contenido en un vaso sin graduación, lo obtendríamos midiendo el radio del interior del vaso (suponiendo que fuera circular) y la altura del nivel del agua.

Mediciones indirectas

Cuando se realizan operaciones artiméticas con valores experimentales, el resultado siempre tiene un incertidumbre.

Mediciones indirectas

Cuando se realizan operaciones artiméticas con valores experimentales, el resultado siempre tiene un incertidumbre.

Veremos la manera en que se obtiene la incertidumbre con esas operaciones artiméticas.

Suma

Si una magnitud es el resultado de la adición de otras dos

$$Z = X + Y$$

Suma

Si una magnitud es el resultado de la adición de otras dos

$$Z = X + Y$$

donde

$$X = X_0 \pm \delta\, X$$
$$Y = Y_0 \pm \delta\, Y$$

Suma

Si una magnitud es el resultado de la adición de otras dos

$$Z = X + Y$$

donde

$$X = X_0 \pm \delta\, X$$
$$Y = Y_0 \pm \delta\, Y$$

entonces

$$Z = (X_0 \pm \delta\, X) + (Y_0 \pm \delta\, Y)$$
$$Z = (X_0 + Y_0) \pm (\delta\, X + \delta\, Y)$$
$$Z = Z_0 \pm \delta\, Z$$

Ejemplo

Al medir el largo de una mesa con una regla de $30\,\mathrm{cm}$ graduada en mm, se obtuvo $78\,\mathrm{cm}$.

Ejemplo

Al medir el largo de una mesa con una regla de $30\,\mathrm{cm}$ graduada en mm, se obtuvo $78\,\mathrm{cm}$.

¿Es correcto?

Ejemplo

Al medir el largo de una mesa con una regla de 30 cm graduada en mm, se obtuvo 78 cm.

¿Es correcto?

NO, el resultado debe de calcularse como sigue:

$$X_1 = (30.00 \pm 0.05)\ \text{cm}$$
$$X_2 = (30.00 \pm 0.05)\ \text{cm}$$
$$X_3 = (18.00 \pm 0.05)\ \text{cm}$$

Ejemplo

$$Z_0 = 30.0 + 30.0 + 18.0 = 78.0\,\text{cm}$$
$$\delta\, Z = 0.05 + 0.05 + 0.05 = 0.15\,\text{cm}$$

Ejemplo

$$Z_0 = 30.0 + 30.0 + 18.0 = 78.0\,\text{cm}$$
$$\delta\, Z = 0.05 + 0.05 + 0.05 = 0.15\,\text{cm}$$

$\delta\, Z$ es la incertidumbre absoluta de Z, entonces

$$Z = (78.00 \pm 0.15)\ \text{cm}$$

Resta

Si

$$Z = X - Y$$

Resta

Si

$$Z = X - Y$$

El valor máximo de Z es

$$\begin{aligned} Z + \delta\, Z &= (X_0 + \delta\, X) - (Y_0 - \delta\, Y) = \\ &= (X_0 - Y_0) + (\delta\, X + \delta\, Y) \end{aligned}$$

Resta

Si

$$Z = X - Y$$

El valor máximo de Z es

$$\begin{aligned} Z + \delta\, Z &= (X_0 + \delta\, X) - (Y_0 - \delta\, Y) = \\ &= (X_0 - Y_0) + (\delta\, X + \delta\, Y) \end{aligned}$$

El valor mínimo de Z es

$$\begin{aligned} Z - \delta\, Z &= (X_0 - \delta\, X) - (Y_0 + \delta\, Y) = \\ &= (X_0 - Y_0) - (\delta\, X + \delta\, Y) \end{aligned}$$

Entonces

$$Z = Z_0 \pm \delta\, Z = (X_0 - Y_0) \pm (\delta\, X + \delta\, Y)$$

Multiplicación

Si tenemos el producto

$$Z = a \cdot b$$

donde a y b son cantidades medidas directamente y por lo tanto

Multiplicación

Si tenemos el producto

$$Z = a \cdot b$$

donde a y b son cantidades medidas directamente y por lo tanto

$$a = a_0 \pm \delta\, a$$
$$b = b_0 \pm \delta\, b$$

entonces

$$Z = (a_0 \pm \delta\, a) \cdot (b_0 \pm \delta\, b)$$

Multiplicación

Desarrollando paso a paso el producto de binomios se tiene que

$$Z = a_0 \cdot b_0 \pm a_0\,\delta\,b \pm b_0\,\delta\,a \pm (\delta\,a)(\delta\,b)$$

el último término por ser producto de incertidumbres, es de magntiud despreciable en comparación a los demás y se despecia, así pues

Multiplicación

$$Z = a_0 \cdot b_0 \pm \left(a_0 \, \delta \, b + b_0 \, \delta \, a\right)$$

Multiplicación

$$Z = a_0 \cdot b_0 \pm (a_0\, \delta\, b + b_0\, \delta\, a)$$

La incertidumbre relativa de Z se calcula con $\delta\, Z$ y Z_0

$$\delta_r\, Z = \frac{\delta\, Z}{Z_0} = \frac{a_0 \delta\, b + b_0\, \delta\, a}{a_0\, b_0} = \frac{\delta\, b}{b_0} + \frac{\delta\, a}{a_0}$$

División

Si tenemos el cociente

$$Z = \frac{P}{Q} = Z_0 \pm \delta\, Z$$

donde

$$P = P_0 \pm \delta\, P$$
$$Q = Q_0 \pm \delta\, Q$$

División

Si tenemos el cociente

$$Z = \frac{P}{Q} = Z_0 \pm \delta \, Z$$

donde

$$P = P_0 \pm \delta \, P$$

$$Q = Q_0 \pm \delta \, Q$$

entonces

$$Z = \frac{P_0 \pm \delta \, P}{Q_0 \pm \delta \, Q} = Z_0 \pm \delta \, Z$$

De todas las combinaciones posibles con los signos se puede determinar el valor máximo de Z o sea $Z \pm \delta\, Z$, que estará dado al dividir el valor máximo de P entre el valor mínimo de Q, así

$$Z_0 + \delta\, Z = \frac{P_0 + \delta\, P}{Q_0 - \delta\, Q} \tag{1}$$

División

El valor mínimo de Z será el cociente del valor mínimo de P entre el máximo de Q, es decir

$$Z_0 - \delta\, Z = \frac{P_0 - \delta\, P}{Q_0 + \delta\, Q} \tag{2}$$

Restado miembro a miembro la ec. (2) de la ec. (1), se tiene para el lado izquierdo de la igualdad

$$(Z_0 + \delta\, Z) - (Z_0 - \delta\, Z) = 2\, \delta\, Z$$

División

Para el lado derecho de la igualdad

$$\frac{P_0 + \delta\, P}{Q_0 - \delta\, Q} = \frac{(Q_0 + \delta\, Q)(P_0 + \delta\, P)}{(Q_0 - \delta\, Q)(Q_0 + \delta\, Q)} + \frac{(Q_0 - \delta\, Q)(P_0 - \delta\, P)}{(Q_0 - \delta\, Q)(Q_0 + \delta\, Q)}$$

Por tanto

$$2\,\delta\,Z = \frac{Q_0\,P_0 + Q_0\,\delta\,P + P_0\,\delta\,Q + \delta\,Q\,\delta\,P}{Q_0^2 - (\delta\,Q)^2} + \\ - \frac{[Q_0\,P_0 - Q_0\,\delta\,P - P_0\,\delta\,Q + \delta\,Q\,\delta\,P]}{Q_0^2 - (\delta\,Q)^2}$$

sumando términos semejantes y suprimiendo $(\delta\,Q)^2$ por ser despreciables frente a Q_0^2:

Tenemos que:

$$2\,\delta\,Z = \frac{2\,(P_0\,\delta\,Q + Q_0\,\delta\,P)}{Q_0^2}$$

entonces

$$\delta\,Z = \frac{P_0\,\delta\,Q + Q_0\,\delta\,P}{Q_0^2}$$

Potenciación

Por lo visto en la multiplicación, se tiene que

$$T = T_0 \pm \delta T$$

si elevamos al cuadrado

$$T^2 = (T_0 \pm \delta T)^2 = (T_0 \pm \delta T)(T_0 \pm \delta T)$$

Potenciación

Tenemos entonces

$$T^2 = T_0^2 \pm 2\,T_0\,\delta\,T \pm (\delta\,T)^2$$

Potenciación

Tenemos entonces

$$T^2 = T_0^2 \pm 2\,T_0\,\delta\,T \pm (\delta\,T)^2$$

El último término se espera sea pequeño, por lo que al elevarlo al cuadrado, se vuelve más pequeño, resulta ser que

$$T^2 = T_0^2 \pm 2\,T_0\,\delta\,T$$

Incertidumbre relativa de la potencia

Haciendo el cálculo para la incertidumbre relativa de la potenciación, tenemos que

$$\delta_r(T^2) = \frac{2\,T_0\,\delta T}{T_0^2} = 2\,\frac{\delta\,T}{T_0}$$

Incertidumbre para potencias mayores

Para una potencia cúbica:

$$T^3 = T^2 \cdot T = (T_0^2 \pm 2\, T_0\, \delta\, T)(T_0 \pm \delta\, T)$$

Incertidumbre para potencias mayores

Para una potencia cúbica:

$$T^3 = T^2 \cdot T = (T_0^2 \pm 2\,T_0\,\delta\,T)(T_0 \pm \delta\,T)$$

Entonces al desarrollar

$$T^3 = T_0^3 \pm T_0^2\,\delta\,T \pm 2\,T_0^2\,\delta\,T \pm \cancel{2\,T_0\,(\delta\,T)^2}$$

Incertidumbre para potencias mayores

Para una potencia cúbica:

$$T^3 = T^2 \cdot T = (T_0^2 \pm 2\,T_0\,\delta\,T)(T_0 \pm \delta\,T)$$

Entonces al desarrollar

$$T^3 = T_0^3 \pm T_0^2\,\delta\,T \pm 2\,T_0^2\,\delta\,T \pm \cancel{2\,T_0\,(\delta\,T)^2}$$

El último término se desprecia por se pequeño en comparación de los otros

$$T^3 = T_0^3 \pm 3\,T_0\,\delta\,T$$

Regla general para las potencias

$$T^2 = T_0^2 \pm 2\,T_0\,\delta\,T \quad \text{y la} \quad \delta_r(T^2) = 2\,\frac{\delta\,T}{T_0}$$

$$T^3 = T_0^3 \pm 3\,T_0\,\delta\,T \quad \text{y la} \quad \delta_r(T^3) = 3\,\frac{\delta\,T}{T_0}$$

$$T^4 = T_0^4 \pm 4\,T_0\,\delta\,T \quad \text{y la} \quad \delta_r(T^4) = 4\,\frac{\delta\,T}{T_0}$$

Podemos obtener una expresión general para las potencias:

Regla general para las potencias

La regla general quedaría expresada por:

$$T^n = T_0^n \pm |n|\, T_0^{n-1}\, \delta\, T$$

la incertidumbre relativa asociada es

$$\delta_r(T^n) = |n|\, \frac{\delta\, T}{T_0}$$

Para toda potencia de n pudiendo ser positiva, negativa o fraccionaria.