FCI0201 – Introdução à Física Computacional

Sexto Projeto

Instruções

- Crie um diretório **proj6_*#usp*** em `/home/public/IntroFisComp16/projeto6`
- Proteja seu diretório para não ser lido por `g` e `o`
- Deixe no diretório os arquivos abaixo:
  - **exerA1.f90**, **exerA2.f90** e **grafA.ps**
  - **exerB1.f90**, **exerB2.f90**, **grafB.ps** e **exerB.txt**
  - **grafC.ps**
  - **grafD.ps** e **exerD.txt**
  - **grafE.ps**
- Os códigos devem seguir rigorosamente os padrões especificados abaixo para `entrada/saída` saída
- **Use precisão dupla em seus resultados**
- Use $\mathbf{g = 9.8\ m/s^2}$

Tarefa A

Consideremos o pêndulo da figura abaixo, onde uma massa m é suspensa por uma haste de comprimento l e massa desprezível. Indicamos com θ o ângulo em relação à vertical. A equação de Newton para a componente tangencial do movimento é

$$m\ a_\theta = m\ l \frac{d^2_\theta}{dt^2} = -m\ g \sin\theta$$

e consequentemente temos a equação diferencial

$$\frac{d^2_\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta\ .$$

Caso as oscilações sejam pequenas, usamos $sin\theta \approx \theta$ e obtemos a aproximação harmônica do problema

$$\frac{d^2_\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta\ .$$

cuja solução é dada por

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0\ t + \phi)\ , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\ ,$$

sendo θ_0 e ϕ constantes que fixam o movimento.

Escreva um código que resolva numericamente o pêndulo dentro da aproximação harmônica. Uma possível discretização das equações acima é (método de Euler)

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\theta \rightarrow \omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{l}\theta_i \Delta t$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \rightarrow \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \Delta t \ ,$$

onde $t = i\ \Delta t$. Faça sempre $-\pi \leq \theta \leq \pi$, isto é, quando θ ultrapassar π faça $\theta \rightarrow \theta - 2\pi$ ou, se θ ficar menor que $-\pi$, faça $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$. Neste programa calcule também $E(t)$, sendo E a energia total do sistema. Você notará que a solução está incorreta e que a energia total não é constante. Isto nos diz que a discretização escolhida não é adequada. Uma ligeira modificação no método de Euler consertará este problema. Para isso é suficiente considerar as equações (de Euler-Cromer)

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{l}\theta_i \Delta t$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_{i+1} \Delta t \ ,$$

Escreva um programa com estas novas equações e mostre graficamente a ausência dos problemas antes apontados.

Em seus programas leia (cada um em uma linha) a partir do terminal:

- a massa **m**
- o comprimento da haste **l**
- $\boldsymbol{\Delta}$**t**
- o ângulo $\boldsymbol{\theta_0}$
- o tempo $\mathbf{T_{sim}}$ de simulação

Use $\omega_0 = 0\ rad/s$. No código **exerA1.f90** use o método de Euler e no código **exerA2.f90** o método de Euler-Cromer. A saída, nos arquivos **exerA1_out.dat** e **exerA2_out.dat**, deve ser no formato:

```
t    theta(t)
```

Além disso, você deve preparar o arquivo **grafA.ps** com dois gráficos:

- o primeiro com a solução exata para $\theta(t)$, comparando-a com a solução numérica pelo método de Euler (código **exerA1.f90**) e com o método de Euler-Cromer (código **exerA2.f90**);
- o segundo com a energia total (cinética mais potencial) como função do tempo, para o caso 1 (método de Euler) e para o caso 2 (método de Euler-Cromer).

Para esses gráficos use $m = 1\ kg$, $l = 1\ m$, $\Delta t = 0.04\ s$ e $\theta_0 = 10\ graus$. (Converta o ângulo para radianos em seu programa!) Acompanhe o movimento por $10s$, começando do máximo deslocamento ($\theta = \theta_0$) e com velocidade zero.

Tarefa B

Consideremos agora o pêndulo com oscilações de ângulo θ arbitrário e que esteja sujeito a efeitos dissipativos e sob a ação de forças externas oscilatórias. Neste caso teremos

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\theta - \gamma\frac{d\theta}{dt} + F_0\sin(\Omega t) \ ,$$

sendo γ o termo que dá a escala resistiva, F_0 a amplitude da força externa e Ω a frequência de oscilação da força externa. Note que a massa m foi englobada nas grandezas γ e F_0. **A partir desta tarefa, considere $l = 9.8\ m$.**

Adapte o programa realizado na **Tarefa A** para o caso acima, usando o método de Euler-Cromer. O código deve ler (cada um em uma linha) a partir do terminal:

- o comprimento da haste **l**
- $\mathbf{\Delta t}$
- o ângulo $\boldsymbol{\theta_0}$
- o tempo $\mathbf{T_{sim}}$ de simulação
- o parâmetro γ
- a amplitude $\mathbf{F_0}$
- a frequência $\mathbf{\Omega}$

No código **exerB1.f90** considere o caso $\gamma = 0$ e $F_0 = 0$ e calcule o período T do movimento. Além do arquivo de saída **exerB1_out.f90**, apresente no terminal o valor de T em segundos. **O valor numérico deve ser a última palavra da linha.**

Elabore agora o código **exerB2.f90** para cálculo da integral elíptica

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0}$$

que forneça a solução exata. Seu código deve ler (um em cada linha) a partir do terminal:

- o comprimento da haste **l**
- o ângulo $\boldsymbol{\theta_0}$
- o incremento **h** para cálculo da quadratura (usando e.g. um de seus códigos do Projeto 3; tome cuidado com a singularidade em $\theta = \pm\theta_0$).

O resultado para o período T deve aparecer no terminal, no mesmo formato acima.

Produza agora o arquivo **grafB.ps** com os quatro gráficos:

- gráfico de $\theta(rad)$ em função de $t(s)$ para $F_0 = 0$ e $\gamma = 2$; no título de seu gráfico deve ser respondida a seguinte pergunta: o amortecimento é crítico, subcrítico ou supercrítico? (visite o livro do Moysés Nussensveig)

- gráfico conjunto de $\theta(t)$ e $\omega(t)$ para os casos $F_0 = 0$, $F_0 = 0.5$ e $F_0 = 1.2$ (um gráfico para cada caso); use $\gamma = 1/2$, $\Omega = 2/3$ e $\Delta t = 0.03$; discuta os três casos no arquivo de texto **exerB.txt**.

NOTE: o tempo de simulação deve ser escolhido convenientemente.

Tarefa C

Na tarefa anterior você se deparou com o fato do pêndulo poder exibir tanto um movimento previsível (periódico) como não previsível (não-periódico). O segundo caso é um exemplo típico de um movimento caótico. Para se quantificar o movimento caótico (ou não) devemos observar a sensitividade às condições iniciais do sistema. O sistema será previsível (não caótico) caso duas condições iniciais próximas produzam movimentos que se assemelham exponencialmente no tempo. Em contrapartida, o sistema será caótico quando as trajetórias se afastarem exponencialmente.

Para verificar a existência ou não do regime caótico, vamos considerar (como na **Tarefa B**) $\gamma = 1/2$, $\Omega = 2/3$, $\Delta t = 0.03$, $F_0 = 0.5$ e $F_0 = 1.2$. Adapte o código **exerB1.f90** criando o código **exerC.f90** com saída no arquivo **exerC_out.dat**, contendo em cada linha

```
t     Delta_theta(t)
```

onde

$$\Delta\theta(t) = \theta^{(2)}(t) - \theta^{(1)}(t)$$

é a diferença entre duas trajetórias $\theta^{(1)}(t)$ e $\theta^{(2)}(t)$ com condições iniciais ligeiramente diferentes. (Por exemplo, podem ser imaginados dois pêndulos independentes com condições $\theta_0^{(1)}$ e $\theta_0^{(2)}$ iniciais respectivamente. Tome

$$\Delta\theta(0) = \theta_0^{(2)} - \theta_0^{(1)} = 0.001 \text{ radianos} .$$

Produza o gráfico para $\Delta\theta(t)$, colocando a saída no arquivo **grafC.ps**. Considere o movimento de dois pêndulos soltos com velocidade nula. O arquivo deve ter 2 páginas (dois gráficos), um para o caso $F_0 = 0.5$ e o outro para o caso $F_0 = 1.2$. Repare que no primeiro caso as trajetórias se aproximam exponencialmente (não caótico), enquanto no segundo caso as mesmas se afastam exponencialmente (caótico), ou seja

$$\Delta\theta(t) \approx \exp(\lambda t) ,$$

onde $\lambda < 0$ indica movimento não caótico e $\lambda > 0$ indica movimento caótico. Faça os gráficos de $\Delta\theta(t)$ vs. t com escala semi-logarítmica e estime o parâmetro λ, chamado de **expoente de Liapunov**. O valor de λ deve aparecer no título do gráfico.

Tarefa D

Na realidade o movimento caótico não é tão imprevisível quanto nos parece à primeira vista. De fato ele possui certas estruturas que podem ser visualizadas traçando o gráfico $\omega(\theta)$.

Faça os gráficos $\omega(\theta)$ para os casos $F_0 = 0.5$ e $F_0 = 1.2$ (arquivo **grafD.ps** de 2 páginas), colocando a explicação da comparação dos dois casos no arquivo **exerD.txt**.

Tarefa E

Conforme você deve ter observado, no caso caótico existem regiões do diagrama que nunca foram visitadas. Uma maneira mais efetiva de se visualizar a "estrutura" existente no movimento caótico é a realização de um **secção de Poincaré**. Isto é, graficamos $\omega(\theta)$ somente quando $\Omega t = 2n\pi$, com n inteiro.

Faça o gráfico de $\omega(\theta)$ na secção de Poincaré, que no nosso caso deve ser traduzida numericamente por $|t - 2n\pi/\Omega| < \Delta t/2$. O gráfico (no arquivo **grafE.ps** de 2 páginas) deve ser feito para os casos $F_0 = 0.5$ e $F_0 = 1.2$. Varie ligeiramente as condições iniciais e verifique que a figura fica inalterada, o que mostra a "universalidade" do seu caos. Na realidade a figura que você obteve não é contínua e define um fractal. O estudo de fractais e caos está de fato intimamente ligado. A figura do caos obtida é chamada de "atrator estranho". Repare que no caso não-caótico o atrator estranho é um ponto.