234247 אלגוריתמים 1 - ת.ב. 1

מגישים - גיא פרידמן וגיא שמחס

שאלה 1

שאלה 1: (15 נקודות)

רשמו לצד כל טענה האם היא נכונה או לא. אין צורך לנמק.

א. כל ריצת DFS על גרף מכוון מניבה את אותה כמות של קשתות עץ .
ב. כל יער DFS שנוצר מגרף שאינו מכוון מכיל את אותה כמות עצים.
ג. לכל גרף שהוא DAG יש בדיוק מיון טופולוגי אחד של הצמתים.
ד. קשת $uv \in E$ נמצאת בכל ריצת DFS על גרף מכוון שמתחילה מ-s $\Leftrightarrow$ uv היא הקשת היחידה שנוגעת ב-u או היחידה שנוגעת ב-v.
ה. אם בגרף מכוון $G = (V, E)$ יש מסלול מצומת u לצומת v וזמני הגילוי שלהם בריצת DFS מקיימים $d(u) \leq d(v)$ אזי v צאצא של u ביער ה-DFS.

א. לא

ב. כן

ג. לא

ד. לא

ה. לא

שאלה 2

שאלה 2: (10 נקודות)

יהי גרף $G(V,E)$ מכוון. הריצו על הגרף BFS ו-DFS מאותו צומת s.

בריצת ה-BFS התקבל עץ שלא מכיל את כל צמתי הגרף, ביער ה-DFS התקבלו 3 עצים.

נסתכל על הטענות הבאות:

1. לא קיים שורש לגרף.
2. נסמן ב-U את הרק״ה שבו נמצא s. נריץ אלגוריתם חישוב גרף רק״ה של G ואז נריץ מיון טופולוגי על הגרף המתקבל. U בהכרח לא הצומת הראשון במיון הטופולוגי.
3. נסתכל על העץ שבו s נמצא ביער ה-DFS. אזי, כל צומת u בעץ זה נמצא בעץ שביער ה-BFS.
4. נסתכל על העץ שהתקבל מריצת ה-BFS. אזי, כל צומת v בעץ ה-BFS נמצא בעץ שמכיל את s ביער ה-DFS.

בחרו את התשובה הנכונה:

א. טענות 3 ו4 נכונות בלבד.

ב. טענות 1, 2 ו- 4 נכונות בלבד.

ג. טענות 2 ו-3 נכונות בלבד.

ד. טענות 2, 3 ו-4 נכונות בלבד.

ה. טענה 1 נכונה בלבד.

ו. טענה 4 נכונה בלבד.

א. כן

ב. לא

ג. לא

ד. לא

ה. לא

ו. לא

שאלה 3

שאלה 3: (25 נקודות)

בהינתן גרף לא מכוון, צביעה של גרף היא השמה של מספרים שלמים לצמתי הגרף $c: V \to \mathbb{N}$ כך שלאף צומת אין שכן מאותו הצבע. באופן יותר פורמלי: לכל $uv \in E$ מתקיים $c(u) \neq c(v)$.

בעיה אחרת שתעניין אותנו היא מציאת מסלול ארוך בגרף. להבדיל ממציאת מסלול קצר, בעיה זו היא (למיטב ידיעתנו) בעיה קשה חישובית, ולא סביר שיש לה אלגוריתם פולינומי. כנ״ל, צביעה במספר הצבעים הקטן ביותר היא כנראה בעיה קשה. בשאלה זו נראה אלגוריתם שמחשב פתרון ״סביר״ לאחת הבעיות (או מסלול יחסית ארוך או צביעה ביחסית מעט צבעים).

א. בהינתן יער DFS של גרף לא מכוון, **הוכיחו** לכל עץ ביער ה-DFS, מתקיים שכל קבוצת צמתים מאותו עומק (מרחק מהשורש) היא קבוצה בלתי תלויה, כלומר, אין קשתות בין צמתים בקבוצה כזו.

ב. הציעו אלגוריתם יעיל ביותר שבהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$ וערך שלם C, מוצא אחד מהבאים:
צביעה בת C צבעים או פחות, או מסלול פשוט מאורך לפחות C.
הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

הערה: שימו לב לפלט — האלגוריתם נדרש להחזיר **לכל גרף קלט** אחת משתי התשובות :צביעה חוקית ב- C צבעים או פחות, או מסלול פשוט באורך לפחות C .
אין לבחור איזו מהבעיות לפתור, שכן כל אחת מהן קשה בפני עצמה, אך תמיד קיימת אחת מהשתיים.

א. נניח בשלילה שקיים ביער הDFS עץ DFS $T = (V, E)$ (לא מכוון), כך ששני צמתים $u, v \in V$ באותו מרחק מהשורש $r \in V$ ($dist(u) = dist(v) = i$) כך שקיימת קשת $e = (u, v)$.

נסמן את זמן הגילוי והנסיגה של v ב$d(v)$ וב$f(v)$ בהתאמה, ואת זמן הגילוי והנסיגה של u ב$d(u)$ וב$f(u)$ בהתאמה, כאשר $d(u) < d(v)$ בה"כ (גילינו את u לפני v).

לפי משפט המסלול הלבן, אם בזמן גילוי הצומת u הצומת v עדיין לבנה, אז קיים מסלול מu לv העובר רק דרך צמתים לבנים (כי קיימת הקשת $(e = (u, v)$, כלומר v יתגלה על ידי ריצת הDFS כצאצא של $u \Leftarrow$ בפרט העומק של v גדול מהעומק של u, בסתירה לכך ש$dist(u) = dist(v) = i$.

כלומר גילינו את v דרך u (דרך הקשת e) לכן בזמן הגילוי של u, הצומת v הייתה שחורה, כלומר גילינו את v לפני u, בסתירה להנחה ש$d(v) < d(u)$.

קיבלנו סתירה להנחת השלילה, לכן לא ייתכן שבגרף לא מכוון תהיה קשת בין שתי צמתים מאותו העומק - כלומר כל קבוצת צמתים מאותו העומק היא קבוצה בלתי תלויה, כנדרש.

ב. נציע את האלגוריתם הבא:

1. נריץ DFS מצומת שרירותית עד שנקבל את יער הDFS, במהלך הריצה נסמן לכל צומת את הרמה שלו ולכל עץ DFS ביער נשמור את העומק המקסימלי שלו.
2. נעבור על העצים ביער הDFS ונבדוק האם הם העומק שלהם קטן או שווה לC.
3. אם לכל עץ ביער הDFS העומק קטן או לשווה C - נצבע כל רמה בכל עץ לפי הסדר: את השורש בצבע 1 ואת הרמה הi בצבע i ונחזיר את היער הצבוע.
4. אחרת, מספר הרמות באחד מהעצים גדול מC, נמצא את העץ עם העומק שגדול מC ונחזיר את המסלול מהשורש שלו עד לעומק המקסימלי.

נוכיח את נכונות האלגוריתם על ידי הוכחת כמה טענות:

<u>טענה 1</u> - אם לכל עץ ביער הDFS מספר הרמות קטן שווה מC אזי קיימת צביעה חוקית של לכל היותר C צבעים ליער הDFS.

<u>הוכחה:</u> לפי סעיף א, בכל רמה i בעץ כלשהו ביער הDFS הצמתים הם קבוצה בלתי תלויה, כלומר אין קשתות בין שני צמתים בקבוצה. לכן אם נצבע את כל הצמתים הללו באותו צבע אזי נקבל כי אין קשתות בין 2 צמתים עם אותו צבע - צביעה חוקית. עבור צמתים בעצים שונים נוכל לצבוע אותם באותו הצבע וזו תהיה צביעה חוקית שכן אין קשת ביניהם כי הם שייכים לעצים שונים. הדבר נכון גם לרמות בעצים שונים.

<u>טענה 2</u> - אם בעץ יש צומת מעומק C ומעלה אזי קיים מסלול פשוט מהשורש לאחד העלים באורך C לפחות.

<u>הוכחה</u> - יהי צומת v בעץ DFS בעומק C ומעלה. נביט על המסלול משורש העץ r עד לצומת v. קיים כזה שכן r הוא שורש העץ ולכן כל צומת ישיגה ממנו. בכל מעבר על קשת מהשורש, אנחנו עולים בעומק אחד, לכן עבור הצומת v בעומק C ומעלה נעבור על לפחות C קשתות. מסלול זה אינו מכיל מעגלים, במידה והוא היה מכיל מעגלים, עץ הDFS היה מכיל מעגלים וזו כמובן סתירה.

באלגוריתם יכולים להתקיים אחד משני מצבים:

- העומק המקסימלי של כל העצים ביער הDFS הוא קטן מC - הוכחנו בטענה 1 שניתן לצבוע צביעה חוקית את העצים.
- קיים עץ עם עומק מקסימלי של לפחות C - הוכחנו בטענה 2 שניתן למצוא בו מסלול פשוט באורך לפחות C.

הוכחנו את נכונות האלגוריתם בשני המצבים הקיימים, כנדרש.

<u>סיבוכיות:</u>

1. ריצת DFS על הגרף וסימון הצמתים ועומק העצים - $O(E + V)$
2. מעבר על העצים - $O(V)$
3. החזרת מסלול פשוט - $O(E + V)$ (לכל היותר)
4. צביעת הצמתים - $O(V)$ (מעבר נוסף על הצמתים וצביעה שלהם לפי הסימון שנתנו בריצת הDFS)

שאלה 4

שאלה 4: (25 נקודות)

בארגון תעשייתי גדול מנוהלים תהליכים מורכבים שבהם כל משימה עשויה להיות תלויה בביצוע משימות אחרות לפניה.

כל דרישת תלות ניתנת כזוג (c_i, c_j), שפירושו: יש להשלים את המשימה c_i לפני שניתן להתחיל את המשימה c_j.
קבוצת הדרישות כולה מסומנת ב- M.

לפני ביצוע התהליך, יש לוודא שאין תלות מעגלית בין המשימות, כלומר שלא ייווצר מצב שבו משימה תלויה בעקיפין בעצמה — דבר שימנע את ביצוע התהליך כולו.

בהינתן קבוצת הדרישות M הציעו אלגוריתם שמכריע האם קיימת סדרה חוקית של ביצוע לכל המשימות, כך שכל הדרישות מתקיימות.

נציע את האלגוריתם הבא:

1. נבנה גרף מכוון $G = (V, E)$ כך שכל משימה מיוצגת כצומת וכל תלות של המשימות מוצגת בתור קשת מכוונת.
2. נסמן מצב לכל צומת:

   לבן - אם לא ביקרנו בצומת.

   אפור - אם אנחנו נמצאים באמצע ריצת DFS שהצומת מופיעה בה.

   שחור - סיימנו ריצת DFS עבור הצומת.
3. נריץ DFS כדי לחפש קשתות אחוריות - כלומר יש מעגל:

נריץ מצומת לבנה שרירותית DFS, נסמן אותה באפור, ואז עבור כל שכן - אם הוא לבן נריץ ממנו DFS. אם הוא אפור - סימן שקיימת קשת אחורית, כלומר יש מעגל בגרף אז נחזיר FALSE.

לאחר שנסיים לעבור על כל השכנים של הצומת שהתחלנו ממנה, נסמן אותה בשחור ונמשיך לעשות DFS לצומת הלבנה הבאה.

4. אם הגענו לשלב הזה המשמעות היא שהגרף הוא חסר מעגלים ולכן נריץ עליו מיון טופולוגי כדי לקבל את סדר ביצוע המשימות.

נוכיח את נכונות האלגוריתם בעזרת הוכחת הטענה הבאה:

<u>טענה</u> - האלגוריתם מחזיר סדר טופולוגי חוקי של המשימות ⇔ הגרף חסר מעגלים.

⇐: נתבונן בריצת הDFS הראשונה שהגיעה למעגל. ניכנס לצומת כלשהי ונמשיך אל השכנים שלה עד שנגיע לצומת אפורה. הקשת הזו שמחברת לצומת האפורה היא קשת אחורית (היא מחברת בין צומת לאב קדמון שלו). הוכחנו בתרגול 3 אם קיימת קשת אחורית בגרף G אזי קיים מעגל בגרף.

⇒: במידה והגרף חסר מעגלים, הרצה של מיון טופולוגי עליו יחזיר סדר חוקי של המשימות, נובע מהוכחת הנכונות של מיון טופולוגי בתרגול 1.

סיבוכיות:

1. מעבר על הצמתים וצביעה שלהם - $O(V)$
2. מעבר על כל הקשתות (הDFS לא חוזר על צמתים אפורים או שחורים) - $O(E)$
3. מיון טופולוגי במידה והגרף חסר מעגלים - $O(V + E)$

שאלה 5

שאלה 5: (25 נקודות)

נזכיר כי מסלול המילטוני בגרף הינו מסלול פשוט העובר דרך כל צומתי הגרף.

הציעו אלגוריתם אשר בהינתן גרף מכוון וחסר מעגלים $G = (V, E)$ מכריע האם בגרף קיים מסלול המילטוני.

הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

נסמן:

G - גרף מכוון חסר מעגלים.

V - צמתי הגרף G.

E - קשתות הגרף G.

A - האלגוריתם שלנו.

C - תנאי האלגוריתם A (יוגדר בהמשך).

H $-$ $\{g \in G \mid \{g\ has\ a\ Hamiltonian\ path\}\}$ (כלומר: $\forall g \in G\colon\ g \in H \Leftrightarrow \{g\ has\ a\ Hamiltonian\ path\}$).

(הגדרנו את הקבוצה H מטעמי נוחות, כעת נכתוב $g \in H$ במקום לכתוב שלגרף g יש מסלול המילטוני)

P - האלגוריתם A הכריע כי עבור גרף נתון $g \in G$ מתקיים $g \in H$ (P == Positive verdict).

$N\ -\ \neg P$.

<u>נגדיר כעת את התנאי C:</u>

התנאי C $_{(Condition)}$ הוא שיש צומת אחת בלבד $v \in V$ כך של- v אין קשתות נכנסות (כלומר, קיימת רק צומת אחת ויחידה $v \in V$ כך ש- v היא צומת מקור).

<u>נגדיר כעת את האלגוריתם A:</u>

אלגוריתם A לוקח גרף מסוג G, מפעיל עליו מיון טופולוגי, ולאחר כל שלב הוצאת צומת $v \in V$ (כלומר גם לאחר הוצאת כל הקשתות $(e \in E \mid e \in v$:

אם לא נותרו צמתים בגרף, A יכריע כי קיים מסלול המילטוני.

אם נותרו צמתים, A בודק אם התנאי C מתקיים.

אם כן, A ממשיך למיין את הצומת הבאה (מובטח כי קיימת ויחידה ע״פ התנאי C).

אם C לא מתקיים, A מכריע כי אין מסלול המילטוני בגרף.

<u>סיבוכיות:</u>

סיבוכיות האלגוריתם היא סיבוכיות אלגוריתם מיון טופולוגי + $O(1)$ פעולות לאחר כל שלב הוצאת צומת וצמתיה (בדיקת התנאי C) בעלות של $O(1)$ לכל פעולה, ולכן כמות הפעולות שהוספנו למיון הטופולוגי חסומה ע״י כמות הפעמים שהמיון הטופולוגי יוציא לנו צומת מהגרף (ועוד 1 לבדיקה הראשונה לפני הוצאת צומת), והיא בהתאמה חסומה ע״י $O(V)$, כלומר הוספנו למיון הטופולוגי כמות פעולות החסומה ע״י $O(V \cdot 1) = O(V)$ וכך נקבל כי סיבוכיות האלגוריתם A היא: $O(V + E) = O(V)_{added\ actions} + O(V + E)_{topological\ sorting} = (A)_{time\ complexity\ of}$.

נכונות:

- נטפל במקרי קצה:

גרף ריק:
התנאי C מתקיים ואכן קיים מסלול המילטוני בגרף (מתקיים באופן ריק).

גרף בעל צומת יחידה:
התנאי C מתקיים ואכן קיים מסלול המילטוני בגרף.

גרף לא קשיר:
בגרף לא קשיר, מכוון, וחסר מעגלים, יש לכל הפחות 2 צמתי מקור, שכן כל רכיב קשירות מכיל לפחות צומת מקור אחת (ע״פ הוכחת קיום מיון טופולוגי - בהמשך).

- נוכיח כי האלגוריתם שלנו לא נתקע:

קיום מיון טופולוגי:
בהינתן גרף מכוון g, אם לגרף אין מעגלים מכוונים, קיים לגרף מיון טופולוגי ולפחות צומת מקור אחת (במקרה והגרף לא ריק). נוכיח על פי הנחה בשלילה: אם לא קיים לגרף מיון טופולוגי, אזי לפחות בשלב אחד במהלך ניסיון הרצת מיון טופולוגי, נקבל כי נותרו בגרף צמתים לא ממוינות, אך אין אף צומת המהווה צומת מקור, כלומר קיימת לכל צומת לכל הפחות קשת אחת שנכנסת אליה.
נבחר צומת אקראית מבין הצמתות הנ״ל, ונלך ׳לאחור׳ על הקשתות הנכנסות אליה. לאחר לכל הפחות n (כאשר n מייצג את מספר הקשתות הנותרו בגרף), יתקיים המצב הבא:
או שנחזור לצומת ממנה התחלנו, או שנחזור לצומת בה ביקרנו, מובטח לנו שלא ניתקע כי לכל צומת קיימת קשת הנכנסת אליה.
במידה ונחזור לצומת בה ביקרנו (אך לא הצומת ממנה התחלנו) נריץ שוב את ה׳הליכה לאחור׳ על הצומת הזאת.
כעת, מובטח לנו כי אנחנו חזרנו לצומת ממנה התחלנו (כי במידה ולא, הרצנו מחדש את התהליך על צומת שהמסלול הליכה לאחור ממנה, הוביל אליה בחזרה), קיבלנו כי הלכנו על מסלול כמות מסויימת של פעמים עד לחזרה להתחלה, וזה מתקיים כאשר יש מעגל מכוון בגרף, בסתירה על הנתון על הגרף g.

החלטת האלגוריתם A מה לעשות בשלב הבא:
בכל שלב, במידה והתנאי C לא מתקיים, האלגוריתם יודע לקבוע N.
אם C מתקיים, במידה ואין לגרף צמתות שנותרו האלגוריתם יקבע P.
אחרת האלגוריתם ימשיך לשלב הבא במיון הטופולוגי.
ולכן, בכל רגע נתון, האלגוריתם שלנו יודע איך להתקדם לשלב הבא.

- <u>נראה כי</u> $(g \in H) \Leftarrow (A(g) == P)$:

כדי להוכיח זאת, ניעזר בזהות הלוגית:

$\neg(A(g) == P) \Rightarrow \neg(g \in H)$

אם $\neg(A(g) == P)$, אזי בשלב מסוים מתקיים $v_1, v_2, ... \in V$ (לכל הפחות 2) צמתי מקור (ללא קשתות הנכנסות אליהן).

נניח בשלילה כי קיים לגרף מסלול המילטוני.

לפי הנחת השלילה, מתקיים כי קיים מסלול כלשהו המחבר את v_1 ל- v_2.

כדי שיהיה קיים מסלול כזה, לצומת v_2 צריכה להיות קשת הנכנסת אליה, אך זאת בסתירה להנחת השלילה.

ההוכחה בכיוון השני מ- v_2 ל- v_1 שקולה מטעמי סימטריה.

ולכן קיבלנו כי $\neg(A(g) == P) \Rightarrow \neg(g \in H)$, ועל פי הזהות הלוגית ניתן לקבוע כי $(g \in H) \Leftarrow (A(g) == P)$.

- <u>ובכיוון השני, נראה כי</u> $(g \in H) \Rightarrow (A(g) == P)$:

אם האלגוריתם A קבע כי $g \in H$, בכל רגע נתון במהלך המיון הטופולוגי התנאי C התקיים.

כלומר, $\forall v \in V$, האלגוריתם עבר מצומת אחת לצומת אחרת ע״פ מסלול המיון הטופולוגי, ולכן האלגוריתם עבר מצומת האלגוריתם עבר מצומת מקור לצומת שנהפכה לצומת מקור (שהוסרה ממנה קשת), כלומר

על פי הבטחת קיום C בכל רגע נתון, מובטח לנו כי בכל שלב $i \in \{2.3, ..., |V|\}$ במהלך הריצה, במעבר $v_{i-1} \rightarrow v_i$,

הייתה קשת המחברת את צומת v_{i-1} לצומת v_i, שכן במקרה ולא הייתה קשת כזאת, הוצאת צומת v_{i-1} מהגרף לא הייתה משפיע על מצב v_i (מקור/ לא מקור), ואם v_i הייתה צומת מקור לאחר שלב זה, היא הייתה גם צומת מקור לפני שלב זה, בסתירה להבטחה על התנאי C.

כלומר, תחת ההנחה כי $A(g) == P$ ניתן לקבוע כי קיים מסלול המחבר את כל צמתי הגרף g, מסלול זה מבקר בכל צומת פעם אחת (כי לאחר הביקור הראשון הצומת מוסרת מהגרף), בהתאמה לתנאי מסלול המילטוני ולכן מתקיים $g \in H$.

ולכן הוכחנו כי $(g \in H) \Leftrightarrow (A(g) == P)$. ■