234247 אלגוריתמים 1 - ת.ב. 2

מגישים - גיא פרידמן וגיא שמחס

שאלה 1: (15 נקודות)

תזכורת: *בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ו-$U \subseteq V$ נסמן ב-$G[U]$ את הגרף המושרה על ידי U, כלומר שקבוצת צמתיו היא U ו-קשתותיו הן כל הקשתות ב-E ששני צמתי הקצה שלה שייכים ל-U.*

נתונות הטענות הבאות על גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$ ופונקציית משקל $w: E \rightarrow R$:

טענה 1: *אם T עפ"מ של G ו-$v \in V$, אז $T[V \setminus \{v\}]$ הוא עפ"מ של $G[V \setminus \{v\}]$.*

טענה 2: *אם w חח"ע, אזי ל-G יש עפ"מ יחיד.*

טענה 3: *אם T עפ"מ של G אז T מכיל קשת קלה ביותר מכל מעגל של G.*

טענה 4: *אם w חח"ע אז ל-G קיים עץ פורש יחיד ממשקל שני הכי הקטן (מבין כל העצים הפורשים).*

בחרו את התשובה הנכונה:

א. טענה 2 נכונה בלבד.

ב. טענות 1 ו- 2 נכונות בלבד.

ג. טענות 1,2 ו- 4 נכונות בלבד.

ד. טענות 3 ו-4 נכונות בלבד.

ה. טענות 2, 3 ו-4 נכונות בלבד.

ו. כל הטענות נכונות.

תשובה א נכונה (טענה 2 נכונה בלבד.)

שאלה 2: (10 נקודות)

יהא גרף מכוון $G = (V, E)$.

נסתכל על ריצה כלשהי של האלגוריתם לקבלת גרף רכיבים קשירים היטב, G^{scc}.

בחרו את התשובה הנכונה:

1. תשובות ב+ו נכונות.
2. בהסרת קשת בגרף G, ייתכן ונקבל את אותו גרף G^{scc} כמו לפני ההסרה.
3. בהסרת צומת בגרף G, ייתכן ולא נוכל להריץ מיון טופולוגי בגרף G^{scc} שיווצר.
4. כל התשובות לא נכונות.
5. תשובות ב+ג נכונות.
6. בהסרת צומת בגרף G, יתכן והגרף G^{scc} יכיל שני צמתים פחות מגרף G^{scc} המקורי.

תשובה 2 נכונה (בהסרת קשת בגרף G, ייתכן ונקבל את אותו גרף G^{SCC} כמו לפני ההסרה.)

שאלה 3: (25 נקודות)

נתון גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$, ופונקציית משקל על הקשתות $w: E\rightarrow R_{\geq 0}$.

כתבו אלגוריתם המוצא את קבוצת הקשתות הקלה ביותר שהסרתה מהגרף תשאיר אותו חסר מעגלים.

הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

- התנאי/ אבחנה -

קבוצת הקשתות הקלה ביותר שיש להסיר על מנת להשאיר את הגרף חסר מעגלים היא המשלימה של קבוצת הקשתות המרכיבה את העץ הפורש המקסימלי.
מדוע? - הסבר בסעיף 'נכונות'.

- האלגוריתם -

נכפיל את משקל כל הקשתות במינוס 1, נפעיל את אלגוריתם קרוסקל (יש לנו את קרוסקל, אבל אין לנו קורס קל) למציאת עפ"מ, נכפיל שוב את משקלי הקשתות במינוס 1 ע"מ לקבל שוב את המשקלים המקוריים.
קבוצת הקשתות האדומות היא הקבוצה הקלה ביותר שיש לסלק על מנת להשאיר את הגרף חסר מעגלים.

- סיבוכיות -

הכפלת משקלי כל הקשתות במינוס 1: $O(|E|)$,
הפעלת קרוסקל: $O(|E| \log(|E|))$,
הכפלת משקלי כל הקשתות במינוס 1: $O(|E|)$,
מעבר על כל הקשתות והכנסת האדומות לקבוצה: $O(|E|)$,
סה"כ: $O(|E| \log(|E|)) + 3 \cdot O(|E|) = O(|E| \log(|E|))$.

- נכונות -

מדוע ניתן למצוא כך עץ פורש מקסימום?
האלגוריתם של קרוסקל מסתמך על הסדר בין הקשתות, ואין לו הגבלה על חיוביות או שליליות משקלי הקשתות.
הכפלת כל משקלי הקשתות במינוס 1 בעצם הופכת את סדר המשקל שלהן, הקשתות המינימליות בערכן נהפכו עכשיו למקסימליות ולהפך; הרצת קרוסקל כעת תמצא את העץ הפורש המורכב מהקשתות שכעת משקלן מינימלי, אך כאמור משקלן המקורי הוא המקסימלי.

לאחר שמצאנו עץ פורש מקסימלי, נראה
שהוספת כל קשת נוספת לגרף תיצור לנו מעגל:
בהינתן עץ פורש של גרף לא מכוון, קיים מסלול מכל צומת אחת לכל צומת אחרת ברכיבי הקשירות של הגרף. הוספת קשת נוספת בין שני צמתים (קשת שלא הייתה קיימת קודם לכן בעץ) תיצור לנו בהכרח מעגל.

נראה שאין כעת מעגלים בגרף:
לאחר שמצאנו עץ פורש לכל רכיב קשירות של הגרף, לא נותרו לנו בגרף מעגלים, על פי הגדרת **עץ** פורש.

נשתכנע שקבוצת הקשתות שהשארנו בגרף היא המקסימלית (וכך בעצם נקבל שהקבוצה שהסרנו מינימלית):
נניח בשלילה שיש בגרף קשת אחרת שנסמנה other שיכולנו לקחת לעץ הפורש במקום קשת הנמצאת כעת בעץ הפורש המקסימלי שלנו שנסמנה old , ובחירת other במקום old הזו תגדיל את סכום ערכי הקשתות של העץ שלנו.
אם כך המצב, אזי בזמן ריצת קרוסקל משקל הקשת other היה נמוך ממשקל הקשת old, וקרוסקל היה בוחר ב other לעץ הפורש במקום ב- old, בסתירה לכך ש- $w(old) < w(other)$ או לכך שניתן להחליף את other ב- old ללא יצירת מעגל (או ללא שינוי קשירות הגרף).

מכיוון שהקבוצה שהסרנו היא המינימלית, וקיבלנו גרף חסר מעגלים, קיבלנו את הקבוצה המבוקשת. ■

שאלה 4: (25 נקודות)

יהא $G = (V, E)$ גרף מכוון. נאמר כי $U \subseteq V$ היא קבוצה סגורה אם $U \neq \emptyset$ ואין קשת מכוונת היוצאת מצומת ב-U לצומת שאינו ב-U. הצע אלגוריתם הרץ בזמן $O(V + E)$ המוצא קבוצה סגורה מגודל מינימאלי.

נתחו סיבוכיות והוכיחו נכונות.

- <u>התנאי/אבחנה</u> -
  רכיבי ה'בור' בגרף הרק"ה (ייתכנו כמה במידה והגרף לא קשיר) מהווים בדיוק את הקבוצה U, ונותר רק לבחור את ה'בור' המינימלי.
  (הסבר על מדוע זה מתקיים - בסעיף 'נכונות')

- <u>האלגוריתם</u> -
  נריץ את האלגוריתם למציאת הרק"ה, נמצא את הבורות (יתכנו כמה אם הגרף לא קשיר), נבחר את הבור בעל הגודל המינימלי.
  את הבורות נמצא על ידי כך שלכל רכיב קשירות, נבדוק אם יש קשת היוצאת ממנו, אם כן אז נסמן אותו כ'לא בור'.

- <u>סיבוכיות</u> -
  סיבוכיות אלגוריתם למציאת הרק"ה - $O(|V| + |E|)$.
  סיבוכיות אלגוריתם למציאת בורות (ע"י סילוק 'לא בורות') - $O(|V| + |E|)$.
  בחירת רכיב בעל גודל מינימלי - $O(N_{amount\ of\ 'holes'} \leq |V|) = O(|V|)$.
  סה"כ סיבוכיות האלגוריתם: $2 \cdot O(|V| + |E|) + O(|V|) = O(|V| + |E|)$.

- <u>נכונות</u> -
  מדוע 'בור' של גרף הרק"ה מהווה לנו בדיוק את הקבוצה U הנ"ל (אם"ם)?
  כיוון ראשון - 'בור' של הרק"ה $\Leftarrow$הקבוצה U הנ"ל:
  על פי הגדרת 'בור' של גרף הרק"ה, לקבוצת ה'בור' אין קשת היוצאת ממנה אל רכיב קשירות אחר, כלומר אין קשת היוצאת מצומת בקבוצה אל צומת שלא בקבוצה, וזאת בדיוק הגדרת הקבוצה U, לכן כל 'בור' של גרף הרק"ה הוא גם קבוצה מסוג U.

  כיוון שני - 'בור' של הרק"ה $\Rightarrow$הקבוצה U הנ"ל:
  טיפה שיקרתי, הקבוצה U הנ"ל לא גוררת בצורה ישירה 'בור' של הרק"ה, אך הקבוצה U בגודל המינימלי כן:
  ניקח קבוצה U שכזאת, ייתכן כי U אינה קשורה היטב, כלומר קיימת צומת v1 בקבוצה U שלא ישיגה מצומת v2 בקבוצה U (אך ייתכן שצומת v2 ישיגה מצומת v1), לכן, ניתן להסיר את הצומת v1 מהקבוצה (ולהמשיך כך באינדוקציה) וכך נקבל שכל הצמתים שנשארו בקבוצה U ישיגות מהצומת v2, והצומת v2 ישיגה מכל הצמתים מהקבוצה U (כי אפשר להריץ בדיוק את אותו תהליך הסילוק על כל שאר צמתי הקבוצה U שנשארו, ואם יצא שסילקנו את v2 אז לפחות נקבל צומת אחרת (לכל הפחות הצומת האחרונה עליה נריץ את תהליך הסילוק) שנסמנה v2), וכך לבסוף נישאר עם הקבוצה הישיגה מ-v2, וקבוצה זו מקיימת קשירות היטב.

  הוכחנו שקבוצת צמתים Group מקיימת U מינימלית $\Leftrightarrow$Group מקיימת בור מינימלי בגרף הרק"ה. ■

שאלה 5: (25 נקודות)

תזכורת: *בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ו-$U \subseteq V$ נסמן ב-$G[U]$ את הגרף המושרה על ידי U, כלומר שקבוצת צמתיו היא U וקשתותיו הן כל הקשתות ב-E ששני צמתי הקצה שלה שייכים ל-U.*

נתון גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$ ופונקציית משקל $w: E \to R$ וצומת $v \in V$. נסמן ב־G' את תת־הגרף המושרה על הצמתים $V \setminus \{v\}$. נתון ש־G' קשיר.

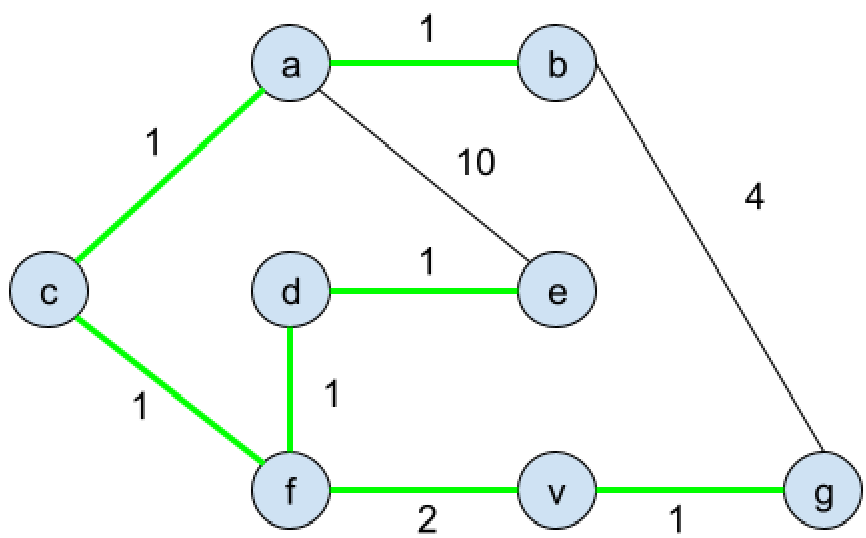
1. *יהא T' MST של G', ותהא $e \in E$ קשת במשקל מינימלי שנוגעת בצומת v.*
הוכיחו/הפריכו:

$\{e\} \cup T'$ הוא עץ פורש מינימום של G.

2. הציעו אלגוריתם המקבל T' MST של G' ומוצא MST של G בזמן $O(|E| + |V| \log |V|)$.
<u>הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.</u>

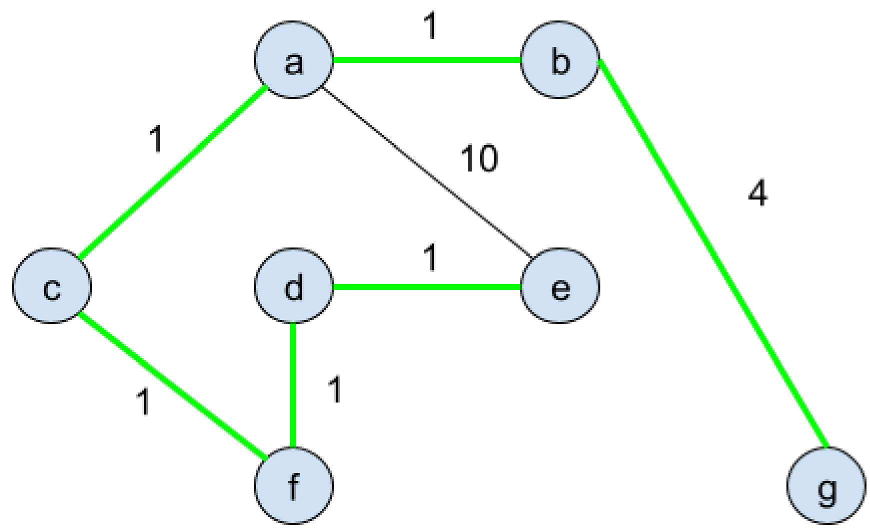
1. הטענה לא נכונה, נפריך באמצעות דוגמה נגדית:

נגדיר את הגרף הבא $G = (V, E)$ על $V = \{a, b, c, d, e, f, g, v\}$. נשים לב כי העפ"מ של G מסומן בירוק ומשקלו הוא 8.

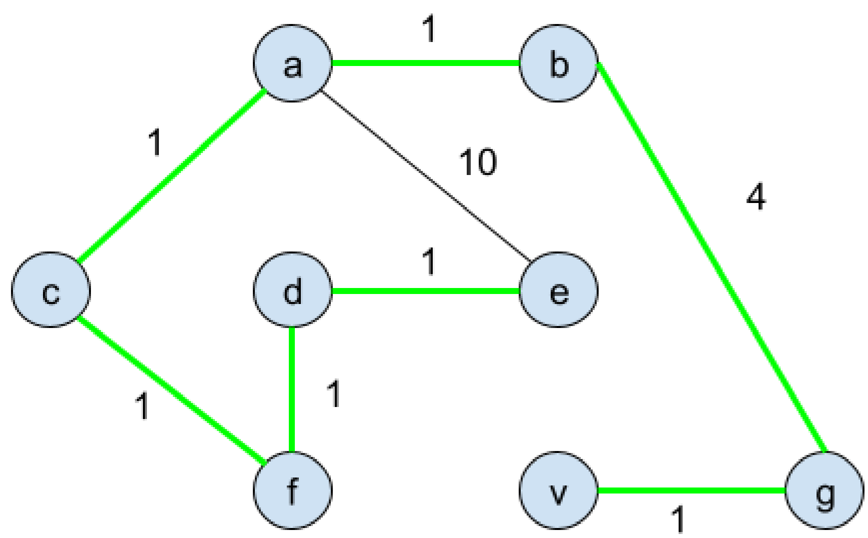


כעת נסיר את הצומת v.

לאחר ההסרה הגרף יישאר קשיר, והעפ"מ שיפרוש אותו יהיה העץ הבא שמשקלו הוא 9:



אם נצרף את הצומת v ואת הקשת המינימלית שמחוברת אליה $e = (v, g)$ שמשקלה הוא 1 נקבל את העץ הבא:



העץ שמסומן בירוק אינו עפ"מ מכיוון שמשקלו הוא 10, בעוד שמקודם ראינו שהעפ"מ של G הוא ממשקל 8, בסתירה לטענה.

.2

- <u>התנאי/ אבחנה</u> -

<u>טענה 1</u> - כל קשת $e \notin T'$ או לא מחוברת לv, לא תקיים $e \in T$.

<u>טענה 2</u> - הרצה של קרוסקל על $T' \cup E_v$ (E_v - הקשתות שנוגעות בv) מחזיר את העפ"מ של G.

(הסבר על מדוע זה מתקיים - בסעיף 'נכונות')

- <u>האלגוריתם</u> - נוסיף לT' את כל הקשתות שנגעו בצומת v ונריץ את קרוסקל על צמתי הגרף G המקורי עם הקשתות של T' (לאחר ההוספה של הקשתות בתחילת האלגוריתם)

- <u>סיבוכיות</u> -

מעבר על לכל היותר E קשתות (כדי להוסיף ל-T') - $O(|E|)$
הרצה של קרוסקל על $T' \cup E_v$ - $O(|V| \, log \, |V|)$ (בעץ T' יש $V - 2$ קשתות לכל היותר וב-E_v יש לכל היותר $V - 1$)

סה"כ נקבל $O(|E| + |V| \, log \, |V|)$, כנדרש.

- <u>נכונות</u> - נוכיח את טענות 1 ו2:

<u>טענה 1:</u> הקשתות ב-$T' \cup E \setminus E_v$ הן קשתות שמחברות בין זוג צמתים $u, v \in V$ ואינן קיימות ב-T'. מכיוון ש-T' הוא עפ"מ של G', קשתות אלו לא נלקחו בבנייה של T', כי הן היו כבדות יותר מאלה שנבחרו או שסגרו מעגל, אם קשת כזו הייתה מופיעה בעפ"מ של G, ניתן היה להחליף אותה בקשת מ-T' ולהקטין את המשקל של העץ, בסתירה למינימליות שלו. לכן הקשתות ב-$T' \cup E \setminus E_v$ אין חלק מעפ"מ של G.

<u>טענה 2:</u> נתחיל בהרצה של קרוסקל. העפ"מ T' יתקבל כמו שהוא, אבל ברגע שקרוסקל בוחר קשת ששייכת ל-E_v הוא מחפש את הקשת הקלה ביותר שחוצה את החתך (בין T' ל-v) מבלי לסגור מעגל. לפי טענה 1, הקשתות ב-$T' \cup E \setminus E_v$ אין חלק מעפ"מ של G, לכן בנוסף לקשת שחצתה את החתך נקבל את העפ"מ של G.

משילוב שתי הטענות נקבל שהעץ המתקבל בהרצה של קרוסקל על $T' \cup E_v$ הוא באמת עפ"מ.

שאלה 6 (לא להגשה):

נתונים גרף **לא מכוון** $G = (V, E)$ ופונקציית צביעה על הקשתות $c: E \rightarrow \{Yellow,\ Green\}$.

הציעו אלגוריתם המכריע אם קיים בגרף G מעגל המכיל לפחות קשת צהובה אחת.
יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות.

נריץ את האלגוריתם של שאלה 3, נקבל מעגל עם קשת צהובה אם הסרנו קשת צהובה מהגרף.
אם לא הסרנו קשת צהובה מהגרף, אזי כל הקשתות הצהובות נמצאות לנו בעץ הפורש (כי אם אין לנו קשתות צהובות אז מלכתחילה נכריע שלא קיים), לכל רכיב קשירות נבצע bfs מהשורש, כאשר אנו מסמנים קשתות וצמתים שביקרנו בהן עם סימון לזמן הגילוי שלהן, והמרחק הקרוב ביותר מצומת בעלת קשת צהובה.

בזמן המעבר על העץ, נסתכל על כל הקשתות שהסדרנו מהצמתים שנבקר בהן, ואם תהיה קשת המתחילה מהצומת עליה אנחנו עומדים, ומגיעה לצומת בה כבר ביקרנו, ויש לנו צומת עם קשת צהובה באמצע (נדע לפי המרחק מהצומת הצהובה האחרונה) נדע כי יש מעגל עם קשת צהובה.
אם נעבור ככה על כל העץ ולא נמצא קשת כזו, נכריע כי לא קיים מעגל עם קשת צהובה בגרף.
סיבוכיות: $O(|E|\log(|E|))$ לפי קרוסקל.

לבודק.ת התרגילים, עמוד זה לא חלק מההגשה :) אך בכל זאת נשמח לדעת אם חסר משהו בסכמת ההוכחה

- הוכחת נכונות של אלגוריתם למציאת
משהו (נגיד A):
- נראה שכל A מקיים את השמורות של האלגוריתם שלנו.
- נראה שכל מה שמקיים את שמורות האלגוריתם מקיים את A.
- נוכיח קשר הדוק בין A לבין שמורות האלגוריתם $\left(A \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}\text{שמורות}\\ \text{האלגוריתם}\end{Bmatrix}\right)$, מ"יד משלבים 1 ו-2.
- נניח שבשלב מסוים באמצע/במהלך ריצת האלגוריתם, השמורות שלו מתקיימות; נראה כי לאחר הפעלת האיטרציה השמורות ימשיכו להתקיים.
- נראה את קיום השמורה על תנאי ההתחלה של החיפוש/הפעלת האלגוריתם.
- נראה שעבור מצב בו A יכול להתקיים, האלגוריתם שלנו לא נתקע

- סימונים/ הגדרות -

- התנאי/ אבחנה -

- האלגוריתם -

- סיבוכיות -

- נכונות -