

陆基导弹打击航母的数学建模与算法设计

摘要

随着军事力量的发展,导弹成为现代战争中极具威胁性的进攻型武器。航母作为可以整合通讯、情报、反潜反导装置、作战信息和后勤保障的大型海上战斗机移动基地平台,航母对国家安全带来威胁。导弹打击航母技术对保卫国家安全显得尤为重要。

关于问题一,在初始时刻时,将反舰导弹打击航母分为四个阶段:主动段、被动段、中段变轨、末段。首先考虑地球为自旋椭球,建立地心坐标系和发射坐标系,在两个坐标系相互转换进行计算。在地心坐标系中计算反舰导弹所受引力、科氏力等,根据力与加速度,加速度与速度的力学模型建立微分方程。由于反舰导弹的速度矢量、合力矢量以及加速度矢量等参数不断随时间变化,则可根据速度、位移、加速度关系可建立差分方程,通过迭代即可计算出主动段、被动段反舰导弹的轨迹方程。中段时,考虑到敌方的反导系统拦截,参考助推滑翔模型设计中段轨道曲线,即间歇性的给反舰导弹一个与重力加速度反向的加速度,使其进行变轨,以可靠的级间分离和头体分离飞行条件和合适的再入条件作为限制,然后通过不断优化得出反舰导弹中段变轨部分的运行轨迹。末段时,为增加导弹突破面防御系统能力以及敌方的预测难度,使反舰导弹末端机动具有如伪螺旋形轨道模型。从而得到反舰导弹打击航母的静态轨道模型,以 83.75° 的发射仰角飞行 1153s,主动段高度为 61764m,最高点高度为 494833m,再入层高度为 142397m,末段最大速度为 773m/s。

关于问题二,反舰导弹中段飞行时,建立实时监测反馈系统。在敌方航母航行参数为未知的情况下,将问题所述航行参数作为侦察卫星和无人机时刻收集的数据并反馈给导弹和地面控制中心,反舰导弹根据航母时刻变化的位置信息改变轨道。此时,反舰导弹相对于静态轨道模型会增加一个与海平面平行的指向航母的加速度矢量,从而消除航母移动带来的影响。考虑到导弹与航母的追及问题,建立差分迭代算法模型,根据导弹飞行各阶段的限制条件,可优化得到反舰导弹动态打击航母的动态轨道模型,以 83.75° 的发射仰角飞行 881s,主动段高度为 61714m,最高点高度为 493875m,再入层高度为 162784m,末段最大速度为 973m/s。

关于问题三,在反舰导弹飞行中,影响导弹捕捉概率大小的因素有目标指示精度误差、侧向横移误差和目标机动产生的误差,前两者随机性太强,因此本文中只需考虑后者以及主动段飞行参数带来的影响。导弹末端制导取决于雷达搜索范围,在距航母大概 20km~30km 时,导弹末段雷达开机,发射电磁波,进行搜索制导,将已知经验搜索范围的角度 θ_1 与反舰导弹速度矢量和导弹与航母连线矢量的角度 θ_2 进行比较, $\theta_2 > \theta_1$ 即为命中。本团队对各参数进行稳定性和灵敏度分析,模型稳定性较高,鲁棒性强。计算误差情况下的制导成功率为 96.97%,命中率为 79.71%。

关键词: 反舰导弹; 坐标转换; 微分方程; 差分迭代算法; 参数优化仿真;

目录

一、问题重述.....	1
1.1 问题背景.....	1
1.2 问题提出.....	1
二、模型假设.....	1
三、符号说明.....	2
四、陆基弹道打击航母静态轨道模型的建立及求解.....	2
4.1 问题分析.....	2
4.2 静态轨道模型的建立.....	3
4.2.1 坐标系的建立.....	3
4.2.2 对反舰导弹进行受力分析及建立方程.....	5
4.3 静态轨道模型的求解.....	8
五、航行中反舰导弹飞行中段模型.....	10
5.1 问题分析.....	10
5.2 中段模型的建立.....	10
5.3 中段模型的求解.....	13
六、导弹打击航母的轨道曲线误差分析以及命中率分析.....	15
6.1 问题分析.....	15
6.2 误差分析.....	15
6.3 命中率分析.....	17
七、模型的评价.....	20
7.1 模型的优点.....	20
7.2 模型的缺点.....	20
八、参考文献.....	20
附录.....	21

一、问题重述

1.1 问题背景

火箭军队是保卫国家海疆主权的重要战略力量，导弹是国之利器，在目前高科技的军事战争中，导弹具有非常重要的作用。已知，导弹发射车的初始位置，可以将其设为打击航母的坐标原点。通过海洋侦查与高空长航时无人机的侦察把航母的初始位置坐标传输给陆基导弹发射指挥中心。航母的航速保持为 32 节，舰长为 335m，航向始终为正南方向。无人机把航母的动态数据提供给指挥中心。指挥中心可通过建模计算出航母的速度以及航行轨道，与此同时，还可计算导弹打击航母命中的动态运行轨道。导弹运行的轨道曲线可以分为发射段，中段以及末段。通常情况下，发射段为抛物线，发射速度为 500m/s。中段由导弹的飞行参数制导确定，可以设计为不同的飞行轨道。末段最高速度能达到 1000m/s，且其飞行时间一般在 20 秒以内。导弹飞行的轨道曲线是连续和光滑的，即不能折线飞行。地面指挥中心会把导弹中段轨道制导数据提供给导弹，而末段是导弹自主攻击航母。通过阅读“陆基反舰导弹打击航母示意图”以及已知条件设计导弹运行的数学模型。

1.2 问题提出

- (一) 建立初始状态下，反舰导弹打击航母的静态轨道模型。
- (二) 航母在按照给定的航向和速度的航行状态下，设计导弹在中段的动态模型方程以及算法步骤。通常情况下，中段的起始点在发射段的抛物线顶点。
- (三) 讨论导弹打击航母的轨道曲线的误差分析以及命中率分析。

二、模型假设

1. 忽略复杂环境、突发事件以及气象条件的影响。
2. 控制系统响应速度和精度能够满足末制导雷达指令对弹体控制的要求。
3. 导弹飞行中忽略因燃料而引起的质量变化，且导弹飞行过程中能实时接收信号。
4. 假设燃料充足，反舰导弹打击航母的过程中不用担心燃料的问题。
5. 将地球想象成球体，且因地球地轴与地球自转轴之间的夹角很小可将其忽略。
6. 因导弹发射点与航母位置相对地球半径很小而认为发射点的铅垂方向与发射点和航母的方向垂直。
7. 静态轨道模型中在中段变轨阶段给反舰导弹的加速度为定值。

三、符号说明

符号	说明
$\overline{P_u}$	发动机推力
k	推力与速度之间的正实数关系
\overline{G}	反舰导弹所受地球引力
$\overline{X_F}$	空气阻力
$\overline{F_k}$	科氏力
m	导弹质量
$\overline{v(t)}$	导弹相对于地球表面的速度矢量
ω	地球自转角速度矢量
D	导弹最大横截面所对应的直径
$\overline{g(t)}$	导弹在 t 时刻的重力加速度
i	弹形系数
H	无因次空气比重
\overline{F}	主动段反舰导弹受的合力
$\overline{F_1}$	被动段攻角小于 25 度导弹受的合力
$\overline{a(t)}$	反舰导弹所受的加速度
$\overline{F_p}$	反舰导弹在被动段受到的升力
S_m	反舰导弹的特征面积
ρ	大气层中的密度
C_{ya}	升力系数
t_N	主动段结束的时刻
t_M	被动段结束的时刻
Δt	主动段的时间间隔
Δt_1	中段变轨给加速度之后上抛的时间
Δt_2	中段变轨去掉加速度下抛的时间
$\overline{F_2}$	被动段攻角大于 25 度导弹所受合力
$\overline{x_z(t)}$	动态轨道模型时的位移
$\overline{a_p}$	静态轨道模型中段给的间歇性加速度
$\overline{a_h(t)}$	动态轨道模型中平行海平面的加速度
α	攻角
β	速度与发射平面的偏角

四、陆基弹道打击航母静态轨道模型的建立及求解

4.1 问题分析

陆基导弹分为弹道导弹和巡航导弹，而传统的弹道导弹在燃料燃烧完后只能

保持预定的航向，不可改变。初始状态时，即 $t=0$ ，海洋侦查卫星和无人机把航母的数据信息传送给导弹发射指挥中心，指挥中心通过计算，设计出一条预定的航向。根据导弹打击航母的过程可以分为发射段、中段以及末段。其中发射段又包括主动段和被动段，主动段时，导弹通过助推器发射，助推器给导弹提供推力，飞行到高空中大约 $50\text{km} \sim 70\text{km}$ 时^[1]，导弹将会脱离助推器进入被动段，一段时间后，到达发射段的最高点，导弹开始进入中段。中段初始部分与被动段类似，暂且将其统称为被动段。中段变轨部分，考虑到敌方的反导系统拦截问题，陆基反舰导弹以平衡弹道或跳跃弹道飞行到满足导引头开机点要求的位置和姿态^[2]，再以一定的攻角再入大气层，然后进行末端制导。在末端制导时，为躲避敌方拦截，反舰导弹末段具有末端机动如蛇形或跃升的攻击能力，这种情况主要是针对敌方的面防御系统。根据导弹脱离助推器前后的受力情况不同，可建立地心坐标系计算出力和加速度的方向，然后转换到发射点坐标系，并据此可以建立微分方程组。根据反舰导弹受力、加速度都随时间变化，可知其速度以及位移也时刻随时间变化，可建立差分方程组，然后根据参数仿真优化得到主动段、被动段、中段变轨、末端制导四个阶段的节点，最后根据所得数据，即可得到反舰导弹打击航母的轨道曲线。

4.2 静态轨道模型的建立

4.2.1 坐标系的建立

根据题中所给陆基反舰导弹发射台的经纬度以及航母的经纬度，可在 Google 地球上画出陆基反舰导弹发射台和航母的位置如下图 1。

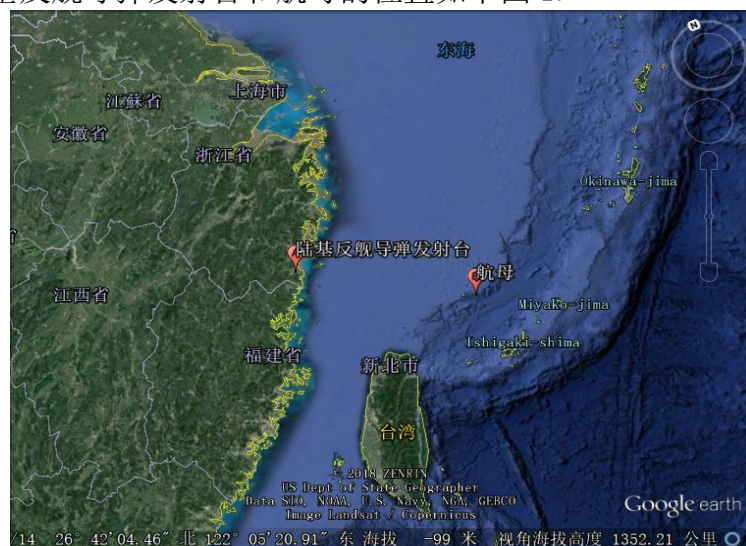


图 1. 陆基反舰导弹发射台和航母的位置

在图 1 中可以较为形象的看出陆基反舰导弹发射台和航母的具体位置，然后可建立地心坐标系，以地心作为原点，东经 180 度和东经 90 度分别作为 X 轴和 Y 轴，地心指向北极作为 Z 轴，建立 XYZ 地心坐标系。如下图 2。

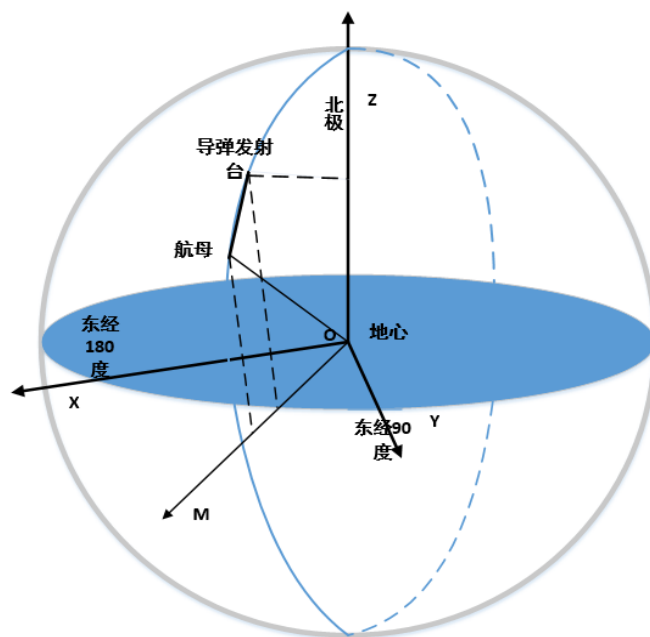


图 2. 地心坐标系

其中导弹发射台和航母之间的连线在 $X-O-Y$ 平面上的投影为 OM 。由于反舰导弹飞行时，位置以及速度都会随时间发生变化，则其所受力也会随时间发生变化，本团队采用地心坐标系便于分析反舰导弹的受力情况，进而计算出反舰导弹的加速度。且由于长时间的导弹高空飞行，不得不考虑地球自转产生的科氏力影响轨道的偏移以及地心引力的变化，同时通过地心坐标系中的经纬度坐标转换使轨道数据更加精确。

再建立发射坐标系，设发射点 O_1 为坐标原点， O_1Y_1 轴为通过发射点的铅垂线，向上为正， O_1X_1 轴在发射平面内指向瞄准方向，与 O_1Y_1 轴垂直， O_1Z_1 轴垂直于发射平面向右。则发射坐标系如下图 3：

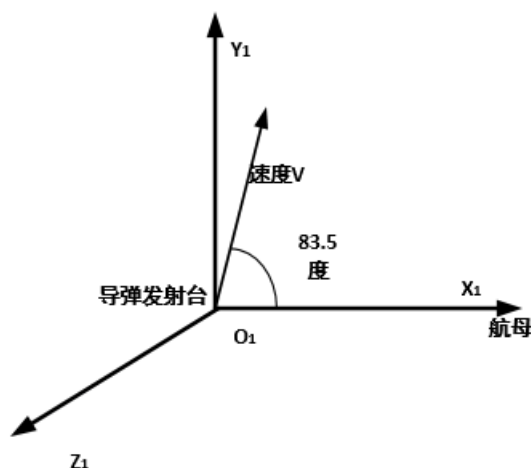


图 3. 发射坐标系

其中初速度方向与 O_1X_1 轴的夹角为攻角，设反舰导弹的发射点为 A ，航母位置为 B ，则导弹指向航母方向向量为 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ ，发射点铅垂方向 $\overrightarrow{O_1A}$ ，垂直于发射面的

方向向量为 $\vec{AC} = \vec{AB} \times \vec{O_1A}$ 。设速度与 \vec{AB} 的夹角为攻角，记为 α ，与发射面的偏角为 β ，利用几何投影与矢量和关系，可得初速度与攻角和发射角之间的关系为：

$$\vec{v}_0 = |\vec{v}_0| \sin \alpha \frac{\vec{O_1A}}{|\vec{O_1A}|} + |\vec{v}_0| \cos \alpha \cos \beta \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + |\vec{v}_0| \cos \alpha \sin \beta \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \quad (4-1)$$

根据仿真以及参数节点设计，本文假设反舰导弹的初始速度与航母方向的仰角为 83.75 度，初始速度方向在 $X_1O_1Y_1$ 平面上，再根据用地心坐标系算出的加速度，进而计算出反舰导弹打击航空母舰的轨道曲线。

然后将地心坐标系和发射坐标系进行转换，首先将地心坐标系的原点沿矢量 $R_0 = R_t + H_t$ 平移到发射坐标系原点 O_1 ，然后通过三次旋转如下：

$$oxyz \xrightarrow{R_z(\lambda_1 - \frac{\pi}{2})} o_2x_2y_2z_2 \xrightarrow{R_x(\phi_d)} o_3x_3y_3z_3 \xrightarrow{R_y(-A_t - \frac{\pi}{2})} o_1x_1y_1z_1 \quad (4-2)$$

记转换矩阵为：

$$R' = R_y(-A_t - \frac{\pi}{2}) R_x(\phi_d) R_z(\lambda_1 - \frac{\pi}{2}) \quad (4-3)$$

其中角 λ_1 ， ϕ_d ， A_t 分别称为发射点经度、大地纬度、发射方位角，发射点的经度是从本初子午线到发射点经线的角度；大地的纬度是从赤道平面到发射坐标系中的 o_1y_1 轴的角度；发射方位角是从发射点当地水平面的正北方到发射坐标系 o_1x_1 轴的角度。经计算可得：

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, R_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, R_z = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

则转换矩阵为：

$$R' = R_x R_y R_z \quad (4-5)$$

将地心坐标系和发射坐标系进行坐标转换，可以将反舰导弹的加速度以及速度矢量转换到发射坐标系上，便于计算反舰导弹的轨迹方程。

4.2.2 对反舰导弹进行受力分析及建立方程

反舰导弹在飞行过程中可能受到的力如下图 4。

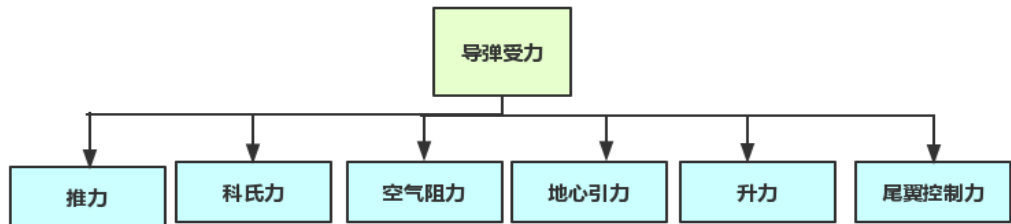


图 4. 导弹在飞行过程中可能受到的力

主动段：首先对主动段的反舰导弹进行受力分析，可知反舰导弹受到助推器的推力，科氏力，空气阻力以及自身重力作用。下面分别计算反舰导弹受到的力。

推力与反舰导弹的速度方向相同，并且随着速度的变化而变化，设推力与速度之间有一个正系数 k 的关系，由此可设推力为：

$$\vec{P}_u = \frac{k\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} \quad (4-6)$$

对于反舰弹道导弹来说，科氏力 \vec{F}_k 为转动弹体内流动物质相对弹体流动时引起的科氏惯性力。明显的影响导弹的速度和加速度方向，影响轨迹曲线的优化，不可忽视。在地心坐标系中，反舰导弹所受科氏力方程为：

$$\vec{F}_k = 2m\vec{v}(t) \times \omega \quad (4-7)$$

对于反舰弹道导弹来说，它所受到的空气阻力的方向与速度方向相反，空气阻力方程^[3]如下：

$$\vec{X}_F = \frac{1000id^2H \cdot 4.75 \times 10^{-4}\vec{v}(t)}{g(t)} \quad (4-8)$$

其中 H 为无因次空气比重，其随高度 h 而变化的经验公式^[4]为：

$$H = \begin{cases} (1-2.1905 \times 10^{-5}h)^{4.4} & h < 9300m \\ e^{-0.0001h} & h > 9300m \end{cases} \quad (4-9)$$

反舰导弹的重力方向始终指向地心，设重力加速度为 $\vec{g}(t)$ ，随时间 t 的改变而改变。则重力的方程为：

$$\vec{G} = m\vec{g}(t) \quad (4-10)$$

反舰导弹所受的合力为：

$$\vec{F} = \vec{P}_u + \vec{F}_k + \vec{X}_F + \vec{G} \quad (4-11)$$

反舰导弹的加速度为

$$\vec{F} = m\vec{a}(t) \quad (4-12)$$

反舰导弹加速度和速度之间的关系为：

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \quad (4-13)$$

初始时刻反舰导弹的速度为：

$$\vec{v}_0 = 500m/s \quad (4-14)$$

在 t_1 时刻反舰导弹的速度为：

$$\vec{v}(t_1) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t_0)\Delta t \quad (4-15)$$

在 t_1 时刻反舰导弹的位移为：

$$\vec{x}(t_1) = \vec{v}_0\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t_0)(\Delta t)^2 \quad (4-16)$$

在 t_2 时刻反舰导弹的位移为:

$$\overrightarrow{x(t_2)} = \overrightarrow{x(t_1)} + \overrightarrow{v(t_1)}\Delta t + \frac{1}{2}\overrightarrow{a(t_1)}(\Delta t)^2 \quad (4-17)$$

经过 N 个相等的 Δt 可得出在 t_N 时刻反舰导弹的位移如下:

$$\overrightarrow{x(t_N)} = \overrightarrow{x(t_{N-1})} + \overrightarrow{v(t_{N-1})}\Delta t + \frac{1}{2}\overrightarrow{a(t_{N-1})}(\Delta t)^2 \quad (4-18)$$

被动段: 对被动段反舰导弹进行受力分析, 可知被动段, 反舰导弹没有了推力, 但依旧受到空气阻力、科氏力、重力, 这三个力的方程与主动段相同, 但是当反舰导弹的攻角在 $-25^\circ \sim 25^\circ$ 之间时, 反舰导弹还会受到升力, 升力的方程如下:

$$\overrightarrow{F_p} = C_{ya} \frac{1}{2} \rho v(t)^2 S_m \quad (4-19)$$

经多次计算分析, 当攻角 $\alpha \leq 25^\circ$ 时, 可取用下列非线性拟合函数^[5]:

$$C_{ya} = B_1\alpha + B_2\alpha^2 + B_3\sin\alpha + B_4e^\alpha + B_5\cos\alpha \quad (4-20)$$

根据拟合可得数值如下表 1:

表 1. B 的拟合数值

B	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
数值	52.657010	39.615790	-15.24020	-36.814940	36.827450

根据大气模型可得大气中的密度方程^[1]如下:

$$\log(\rho) \begin{cases} -3.41173 \times 10^{-6} h^3 + 0.00181570 h^2 - 0.337816 h + 12.63404 & 86 \text{ km} < h \leq 200 \text{ km} \\ -9.595 - 9.7875 \times 10^{-3} (h - 200) + 7.0725 \times 10^{-6} (h - 200)(h - 400) & 200 \text{ km} < h \leq 600 \text{ km} \end{cases} \quad (4-21)$$

则反舰导弹在被动段的攻角在 $-25^\circ \sim 25^\circ$ 范围所受力为:

$$\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{X_F} + \overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{F_p} + \overrightarrow{G} \quad (4-22)$$

反舰导弹在被动段的攻角 $\alpha > 25^\circ$ 时所受力为:

$$\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{X_F} + \overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{G} \quad (4-23)$$

中段: 在中段变轨段时, 为了增加敌方对我反舰导弹的拦截难度, 难以预测导弹落点, 并尽可能缩短敌方的反应时间, 提高反舰导弹突防效率, 反舰导弹在燃料消耗、作战时间以及导航精度允许的情况下, 实现飞行轨迹变化, 从而使反舰导弹难以拦截。此时的变轨主要包括爬升变轨和巡航变轨, 主要针对敌人的点防御系统。设中段变轨开始时间为 t_M , 在 $t_M < t < (t_M + \Delta t_1)$ 时刻给反舰导弹一个与重力加速度方向相反的加速度, 反舰导弹将向上坐抛物线运动, 在 $(t_M + \Delta t_1) < t < (t_M + \Delta t_1 + \Delta t_2)$ 时刻撤去这个加速度, 反舰导弹将向下坐抛物线运动, 然后再进行一次类似的加速度变化。

末段: 在末段制导时, 使反舰导弹末段具有末端机动如蛇形或跃升的攻击能力, 增加敌方对我反舰导弹的预测难度, 并且缩短敌方反应时间。这种末端机动主要是针对敌人的点防御系统。但是这种末端机动的方法, 存在局限性。

4.3 静态轨道模型的求解

主动段时，设 t_N 为主动段结束的时间，且从初始时间到 t_N 共有 N 个相等的 Δt ，则根据差分方程迭代可以得出主动段反舰导弹的轨迹方程为：

$$\overrightarrow{x(t)} = \overrightarrow{x(t-\Delta t)} + \overrightarrow{v(t-\Delta t)}(\Delta t) + \frac{1}{2} \frac{\overrightarrow{P_u} + \overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{X_F} + \overrightarrow{G}}{m} (\Delta t)^2 \quad (4-24)$$

被动段时，设被动段反舰导弹飞行的时间为 $t_N \sim t_M$ 之间，即被动段反舰导弹飞行的总时间为 $(N-M)\Delta t$ ，与主动段类似，被动段反舰导弹的运动也可用差分方程描述，两者区别为主动段和被动段所受力的不同，根据攻角不同，反舰导弹是否受到升力的问题，攻角在 $-25^\circ \sim 25^\circ$ 之间受到升力，攻角 $\alpha > 25^\circ$ 时升力可忽略不计，所以被动段反舰导弹攻角在 $-25^\circ \sim 25^\circ$ 范围内的轨迹方程为：

$$\overrightarrow{x(t)} = \overrightarrow{x(t-\Delta t)} + \overrightarrow{v(t-\Delta t)}(\Delta t) + \frac{1}{2} \frac{\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{X_F} + \overrightarrow{G} + \overrightarrow{F_p}}{m} (\Delta t)^2 \quad (4-25)$$

被动段反舰导弹攻角 $\alpha > 25^\circ$ 范围内的轨迹方程为：

$$\overrightarrow{x(t)} = \overrightarrow{x(t-\Delta t)} + \overrightarrow{v(t-\Delta t)}(\Delta t) + \frac{1}{2} \frac{\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{X_F} + \overrightarrow{G}}{m} (\Delta t)^2 \quad (4-26)$$

即反舰导弹在主动段和被动段的轨迹方程为：

$$\overrightarrow{x(t)} = \begin{cases} \overrightarrow{x(t-\Delta t)} + \overrightarrow{v(t-\Delta t)}(\Delta t) + \frac{1}{2} \frac{\overrightarrow{F}}{m} (\Delta t)^2 & \text{主动段} \\ \overrightarrow{x(t-\Delta t)} + \overrightarrow{v(t-\Delta t)}(\Delta t) + \frac{1}{2} \frac{\overrightarrow{F_1}}{m} (\Delta t)^2 & \text{被动段 } -25^\circ < \alpha < 25^\circ \\ \overrightarrow{x(t-\Delta t)} + \overrightarrow{v(t-\Delta t)}(\Delta t) + \frac{1}{2} \frac{\overrightarrow{F_2}}{m} (\Delta t)^2 & \text{被动段 } \alpha > 25^\circ \end{cases} \quad (4-27)$$

中段变轨时经过 MATLAB 软件模拟仿真可以得到中段的曲线如下图：

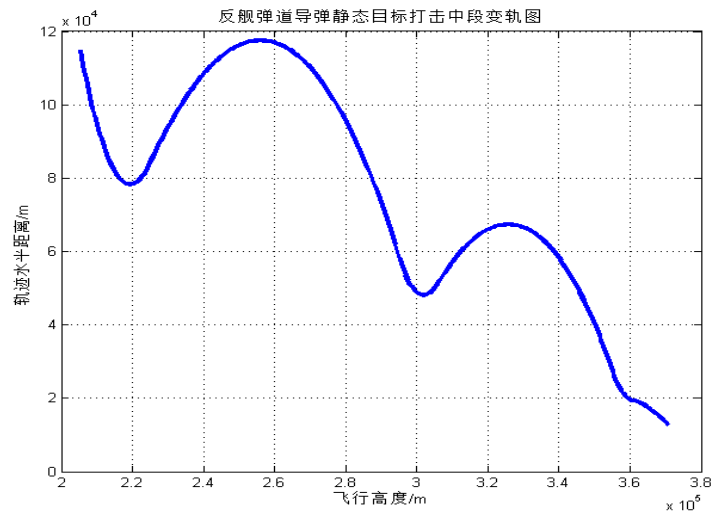


图 5. 中段变轨段静态目标打击图

末段时，为躲避拦截，增加敌方的预测难度，可使末段机动具有如蛇行的突防能力，如下图 6 所示：

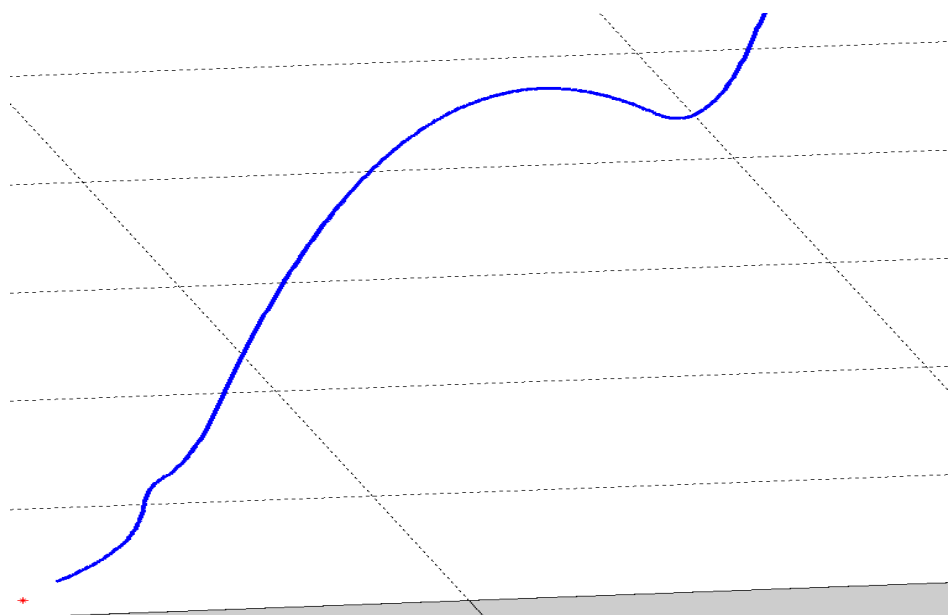


图 6. 末段轨迹

因此，可根据主动段、被动段、中段变轨以及末端制导情况，模拟出初始状态时，反舰导弹打击航母的轨道曲线如下图 7。

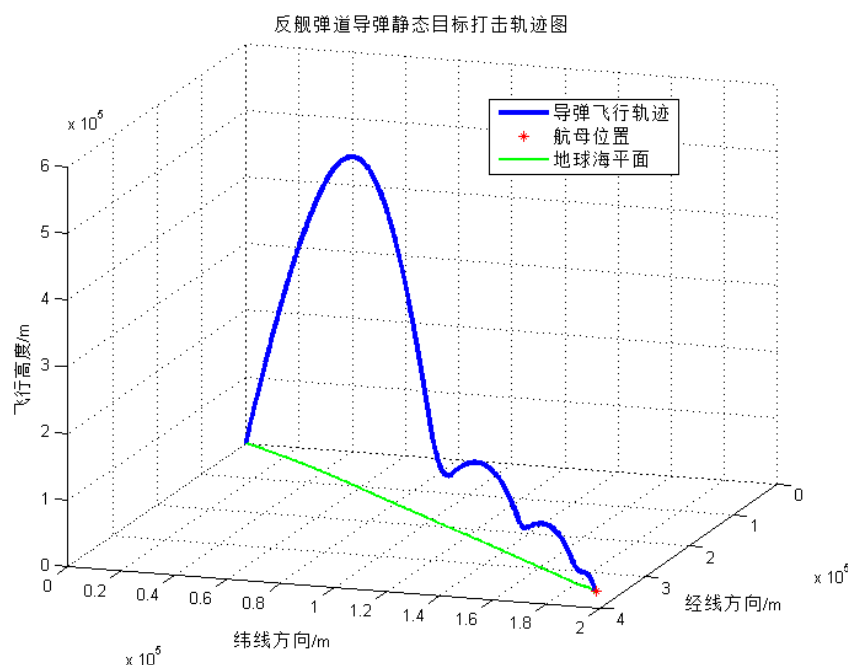


图 7. 反舰导弹静态轨道模型

该静态轨道模型中，反舰导弹以 83.75° 的仰角发射，飞行 40s 到大概 50~70km 时，反舰导弹与助推器脱离，即主动段结束，被动段时，反舰导弹不再受到推力的作用，但是当攻角 $-25^\circ < \alpha < 25^\circ$ 时会受到升力，被动段可以分为两种情况。在中段变轨段用时 876s 占总飞行时间 75.9%。中段变轨时，为增加敌

方的反拦截难度，中段进行两次助推滑翔变轨，即间歇性给反舰导弹一个与重力加速度反向的加速度。末端机动时，为增加导弹突破面防御系统能力以及敌方的预测难度，使反舰导弹末端机动具有如伪螺旋形的突防能力，用时 27s 占总飞行时间 2.34%。

反舰导弹在飞行过程中的飞行参数如下表 2 所示：

表 2. 反舰导弹静态轨迹飞行参数

发射推力	发射仰角	主动段高度	最高点高度	再入层高度
350000N	83.75°	61764m	494833m	142397m
末段最大速度	导弹飞行时间	突防变轨方式	发射偏移角	
773m/s	1153s	助推滑翔、螺旋	-0.5°	

五、航行中反舰导弹飞行中段模型

5.1 问题分析

反舰导弹在中段飞行时，无人机根据数据链传来的情报，立即飞往航母上空进行长时间持续跟踪以及准确定位，为反舰导弹的中段机动提供信息支持。反舰导弹接收到信息之后，通过计算，预测航母位置，进行轨道调整，提高打击海上移动航母的命中精度。在航母航行时，由于航母的位置随时间变化，而无人机以及海洋侦查卫星时刻收集航母的位置信息并将信息传递给反舰导弹，反舰导弹根据信息调整轨迹打击航母，建立了一个实时反馈的追及问题模型。航母始终向南航行，反舰导弹在中段的轨迹相对于初始时刻增加了一个平行于海平面并指向航母的加速度，不影响导弹竖直方向速度。使其能够时刻根据航母的位置改变该加速度的方向进而改变反舰导弹的速度并将飞行轨迹不断趋向于航母位置，提高打击航空母舰的精度。

5.2 中段模型的建立

中段变轨时，在敌方航母的航行参数为未知的情况下，将问题所述航行参数作为侦察卫星和无人机时刻收集的数据并反馈给导弹和地面控制中心，反舰导弹根据航母时刻变化的位置信息改变轨道进而拉近与航母之间的距离，达到打击航母的目的。此过程也就是一个反馈的过程。具体反馈流程图可见图 8：

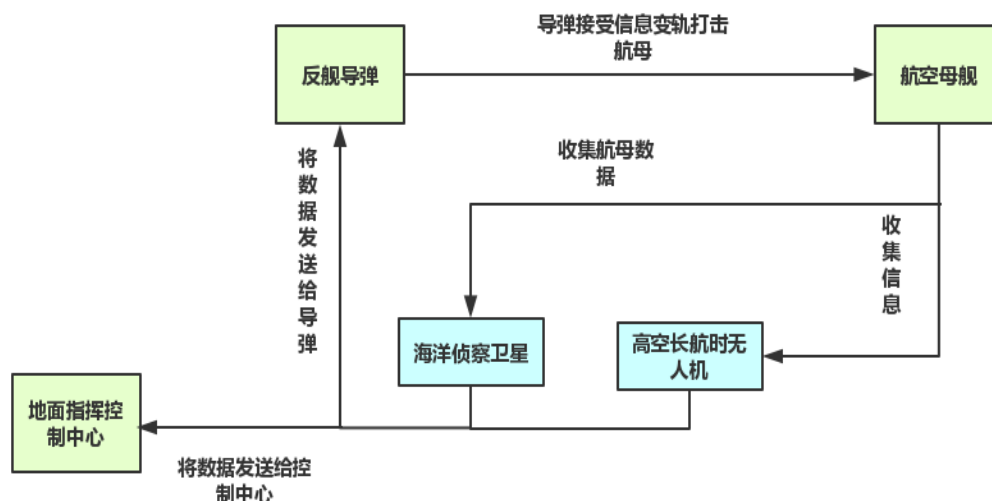
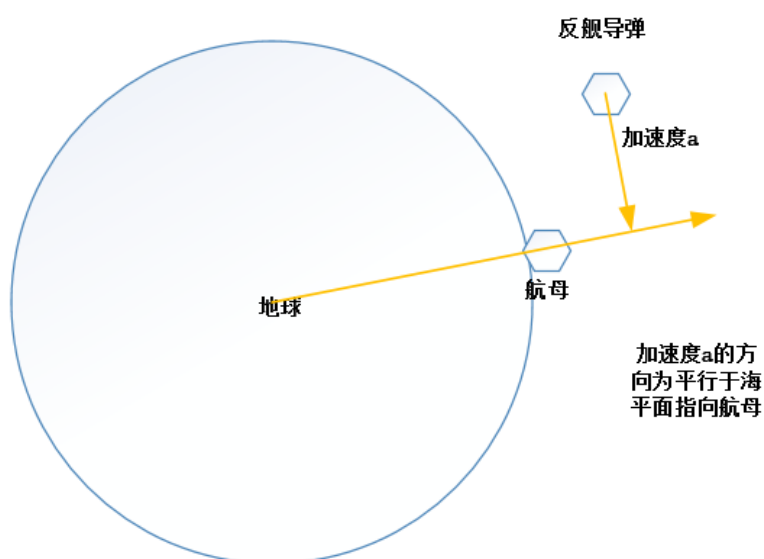


图 8. 侦察卫星和无人机形成反馈系统

反舰导弹接收到信息后，会根据航母的位置信息来调整轨道。此时导弹会增加一个平行于海平面方向并且指向航母的加速度，这个加速度的示意图如下图 9 所示：

图 9. 加速度 a 的方向示意图

中段的动态轨道模型相对于静态轨道模型，反舰导弹多了一个平行于海平面方向指向航母的加速度，设为 \vec{a}_h ，随着航母的位置而变化。设静态轨道模型中，间歇性给反舰导弹的加速度为 \vec{a}_p ，假设其为定值，其它受力与静态轨道模型一样。在 t_M 时刻中段开始变轨，在 Δt_1 时刻给反舰导弹一个间歇性加速度 \vec{a}_p ，以及平行于海平面指向航母的加速度 \vec{a}_h ，则可写出此刻的位移方程为：

$$\overrightarrow{x_{z0}(t)} = \overrightarrow{v(t_M)}t + \frac{1}{2}(\overrightarrow{a_p} + \overrightarrow{a_h(t)})t^2 \quad (5-1)$$

速度方程为:

$$\overrightarrow{v_{z0}(t)} = \overrightarrow{v(t_M)} + (\overrightarrow{a_p} + \overrightarrow{a_h(t)})t \quad (5-2)$$

在 Δt_2 时刻去掉间歇性加速度时位移方程为:

$$\overrightarrow{x_{z1}(t)} = \overrightarrow{x_{z0}(t)} + \overrightarrow{v_{z0}(t)}t + \frac{1}{2}\overrightarrow{a_h(t)}t^2 \quad (5-3)$$

速度方程为:

$$\overrightarrow{v_{z1}(t)} = \overrightarrow{v_{z0}(t)} + \overrightarrow{a_h(t)}t \quad (5-4)$$

再进行一次同样的过程即可得出中段动态轨迹方程。

中段动态轨道模型的算法步骤如下图:

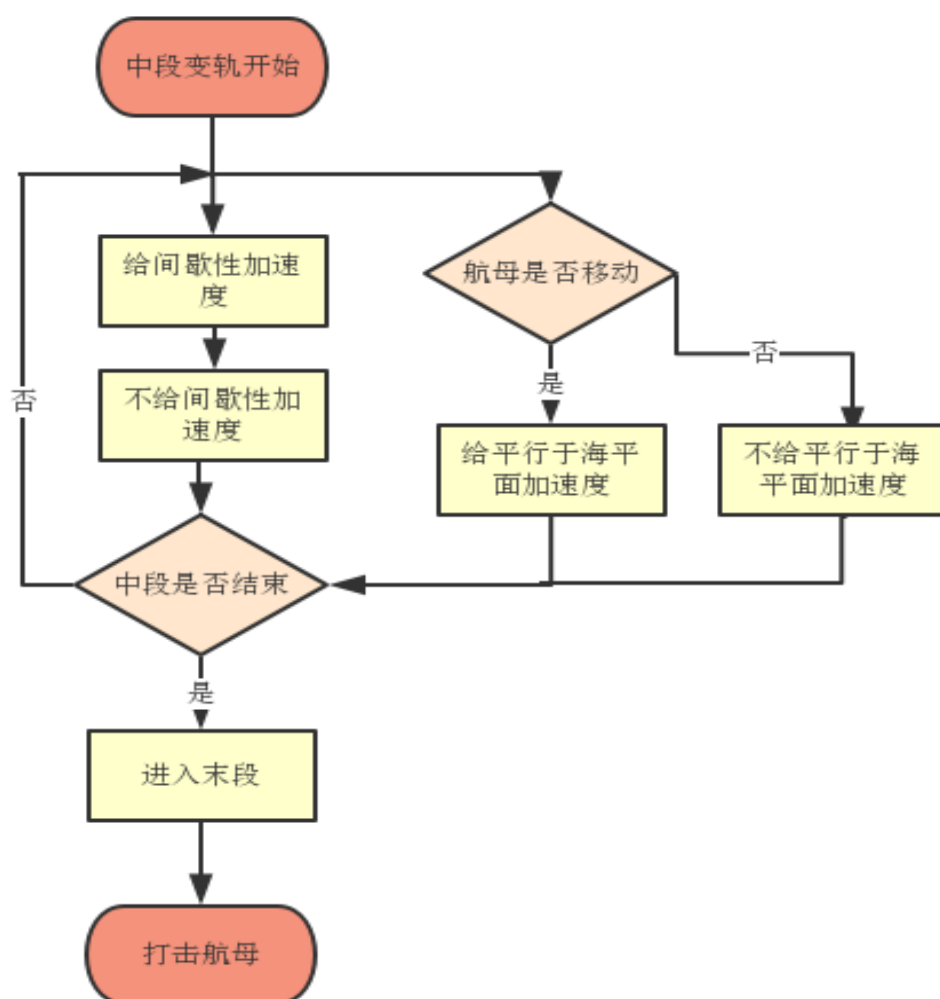


图 10. 动态轨道模型的算法步骤框图

本文中用差分方程迭代来实现此算法步骤:

- (1) 给定一个初始点 $\overrightarrow{x_{z0}(t)}$ 和时间或空间限制收敛条件。
- (2) 选取中段动态轨道模型的初始速度方向。

(3) 确定步长因子 Δt_1 、 Δt_2 ，且两者不相等，按照上式得到新的迭代点。

(4) 收敛判断，若 $\overrightarrow{x_{zn}(t)}$ 满足时间或空间限制收敛条件，则作为最优点，否则以其为起点，进下一轮的迭代。

5.3 中段模型的求解

通过差分方程迭代，即可得到中段动态轨迹方程为：

$$\overrightarrow{x_z(t)} = \begin{cases} \overrightarrow{x_{zn}(t)} = \overrightarrow{x_{z(n-1)}(t)} + \overrightarrow{v_{z(n-1)}(t)}t + \frac{1}{2}(\overrightarrow{a_p} + \overrightarrow{a_h(t)})t^2 & n=0,2 \\ \overrightarrow{x_{zn}(t)} = \overrightarrow{x_{z(n-1)}(t)} + \overrightarrow{v_{z(n-1)}(t)}t + \frac{1}{2}\overrightarrow{a_h(t)}t^2 & n=1,3 \end{cases} \quad (5-5)$$

中段动态轨道模型中，航母始终以 32 节的航速向正南方向航行，但是反舰导弹并不能提前预知航母的运动情况，所以只能通过侦察卫星和无人机实时监测航母所提供的数据进行变轨，所以采用差分方程组，经过迭代求得中段动态轨迹方程。

反舰导弹中段打击航母的动态轨迹图如下：

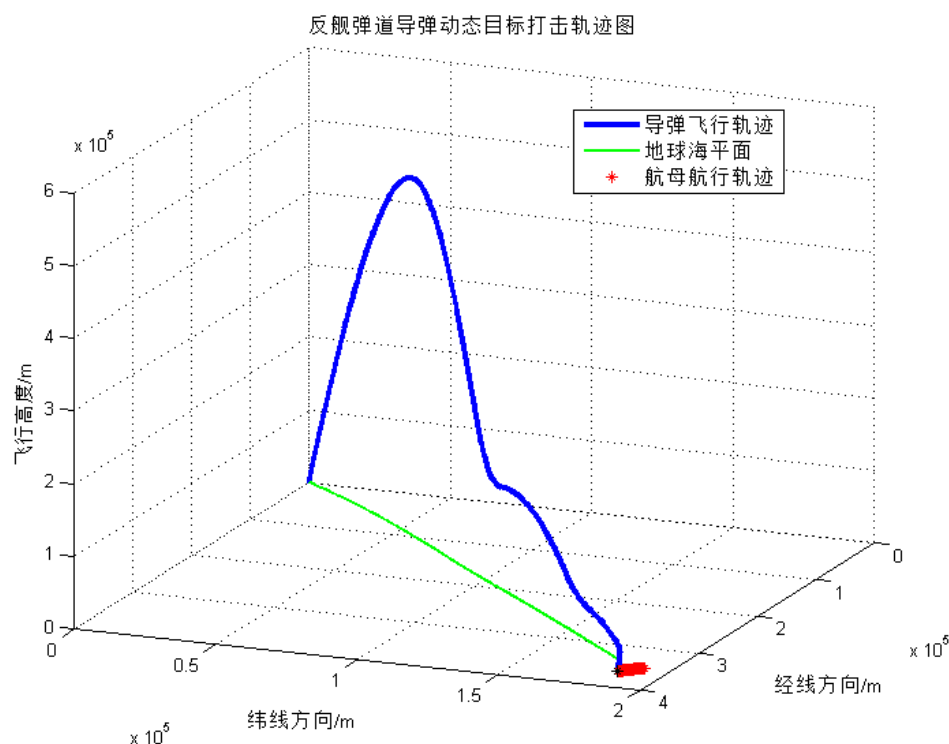


图 11. 反舰导弹打击航母的动态轨道模型
动态轨道模型飞行参数如下表：

表 3. 动态轨迹飞行参数

发射推力	发射仰角	主动段高度	最高点高度	再入层高度
350000N	83.75°	61714m	493875m	162784m
末段最大速度	导弹飞行时间	突防变轨方式	发射偏移角	
973m/s	881s	助推滑翔、蛇行	-0.5°	

该动态轨道模型中，反舰导弹以 83.75° 的仰角发射，飞行 40s 到大概 50~70km 时，反舰导弹与助推器脱离，即主动段结束，被动段时，反舰导弹不再受到推力的作用，但是当攻角 $-25^\circ < \alpha < 25^\circ$ 时会受到升力，被动段可以分为两种情况。在中段变轨段用时 642s 占总飞行时间 72.8%。中段变轨时，为增加敌方的反拦截难度，中段进行两次助推滑翔变轨，即间歇性给反舰导弹一个与重力加速度反向的加速度和平行于海平面并指向航母方向的加速度。末端机动时，为增加导弹突破面防御系统能力以及敌方的预测难度，同时增加末段导弹的飞行速度以及简化控制系统的计算复杂度，实施快速打击，使反舰导弹末端机动具有如蛇行的突防能力，用时 19s 占总飞行时间 2.16%。

下图为静态目标轨迹和动态目标轨迹的俯视平面对比图。在主动段时，由于反舰导弹受到了科氏力的影响，造成主动段的轨迹未指向航母方向，并略带弧线。所以本团队使初始发射角偏向科氏力反方向 0.5°，以抵消科氏力造成的轨迹影响。因反舰导弹的速度方向，不改变速度大小，所以对打击航母造成了微小偏差。在中段和末段，可明显看出静态目标轨迹和动态目标轨迹有偏差，这是因为动态过程中航母移动的影响，实现了对动态目标的实时跟踪打击。

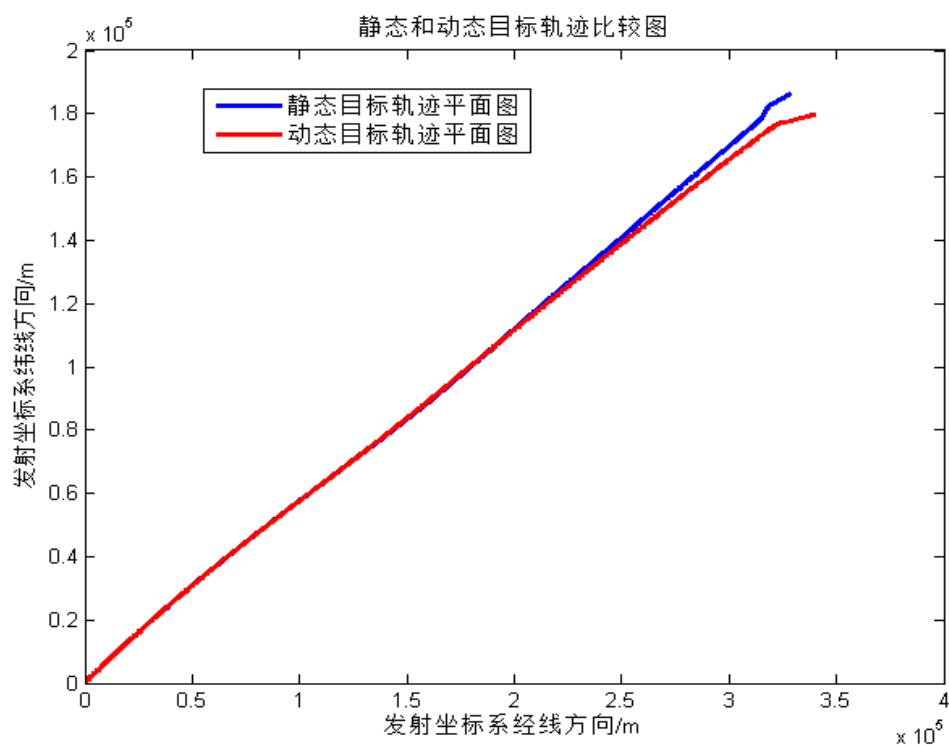


图 12. 静态目标和动态目标轨迹对比图

六、导弹打击航母的轨道曲线误差分析以及命中率分析

6.1 问题分析

反舰导弹打击航母时，导弹的被动段的运动情况完全取决于导弹的主动段的终点的参数^[8]。在标准情况下，导弹始终在主动段的终点速度矢量和地心坐标系中的地心矢径所形成的平面内运动，导弹的着落点和航母所在点重合。但是，实际情况下，考虑到地球的旋转、常值横风的影响、导弹在主动段的运动会受到各种不同的因素的干扰、目标信息迟滞等因素的影响，主动段的终点参数会有偏差，从而产生落点误差，继而会影响命中率。

6.2 误差分析

在反舰导弹飞行的过程中，影响导弹打击航母的主要误差如下图 13.

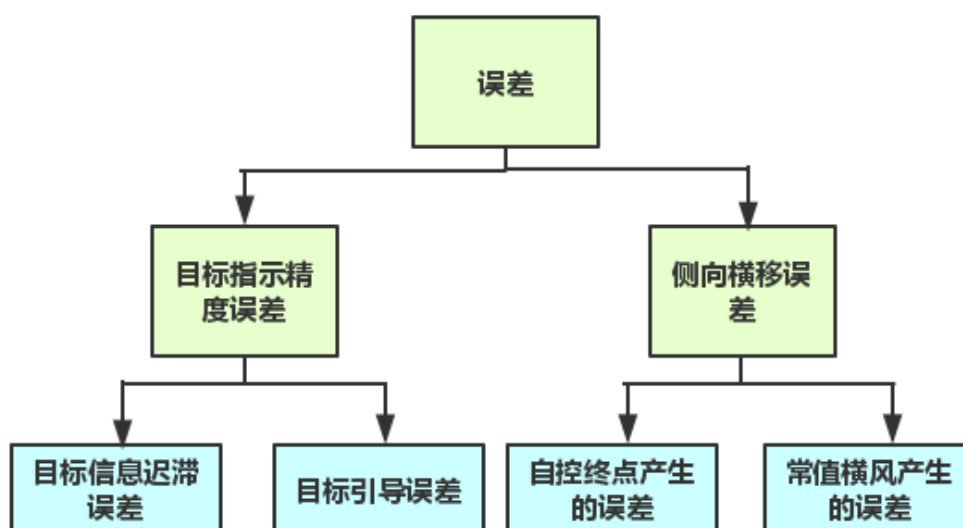


图 13. 导弹飞行中误差框图

而由于侧向横移误差有很多不确定因素，所以本团队只考虑目标机动产生的误差^[6]，大部分即导弹轨迹主动段的飞行参数误差。

由于被动段的轨迹变化主要受主动段的发射参数影响，则对主动段的参数导弹质量以及发射仰角进行控制变量误差分析。并运用后文计算命中率时末端制导检测制导成功率的方法，在制导雷达开机点分别为 20km, 25km, 30km 处时，对各处的雷达搜索范围进行测试，检验探测到航母位置的角度 θ 能否处于雷达搜索角度范围内。

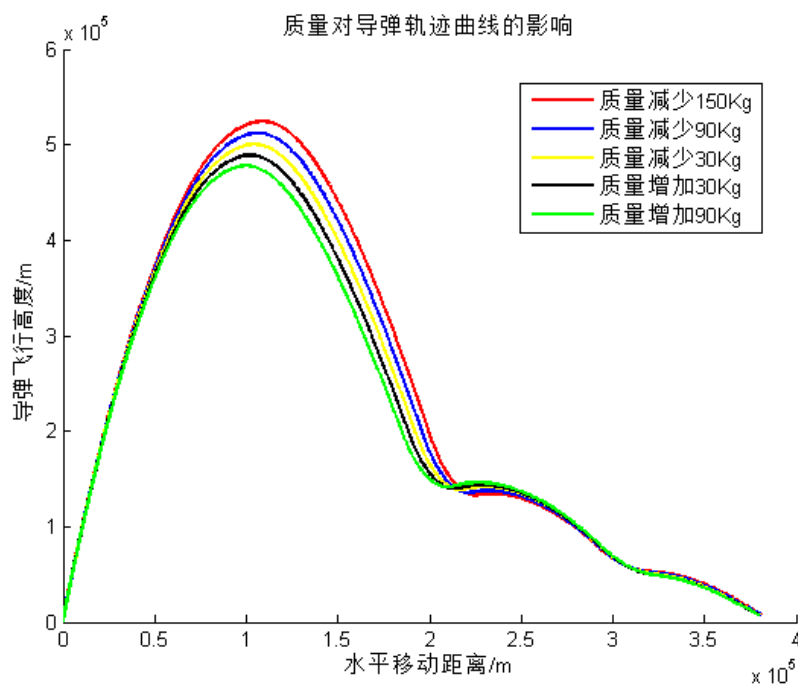


图 14. 不同质量对导弹轨迹的影响

将导弹质量控制在误差 $\pm 150\text{kg}$ 的范围内，可以发现 5 种情况下反舰导弹的动态目标打击轨迹的变化主要体现在导弹飞行最高高度上，而对其轨迹最终打击位置没有太大的影响。

对末端制导雷达探测角度进行检验，如下表所示。

表 4. 质量变化时轨迹各距离雷达检测点 θ 角度

航母头角度			航母尾角度		
30km	25km	20km	30km	25km	20km
5.890211573	2.391880447	3.177492497	5.452389136	2.112717499	4.01927695
0.699601772	4.923530701	11.89745092	1.101967177	5.607139682	12.75662849
5.836367594	13.38602244	20.69329972	6.394399022	14.0838695	21.5508436
12.90227102	18.96416672	33.35769653	13.48954589	21.68530961	34.26600602
20.19741271	21.75390366	44.12485722	19.5106162	22.31755497	45.0241803

上表中只有 3 种情况超出末端制导雷达有效搜索范围，在大范围质量误差的情况下，该模型依然能保证较高的制导成功率，模型稳定性高。

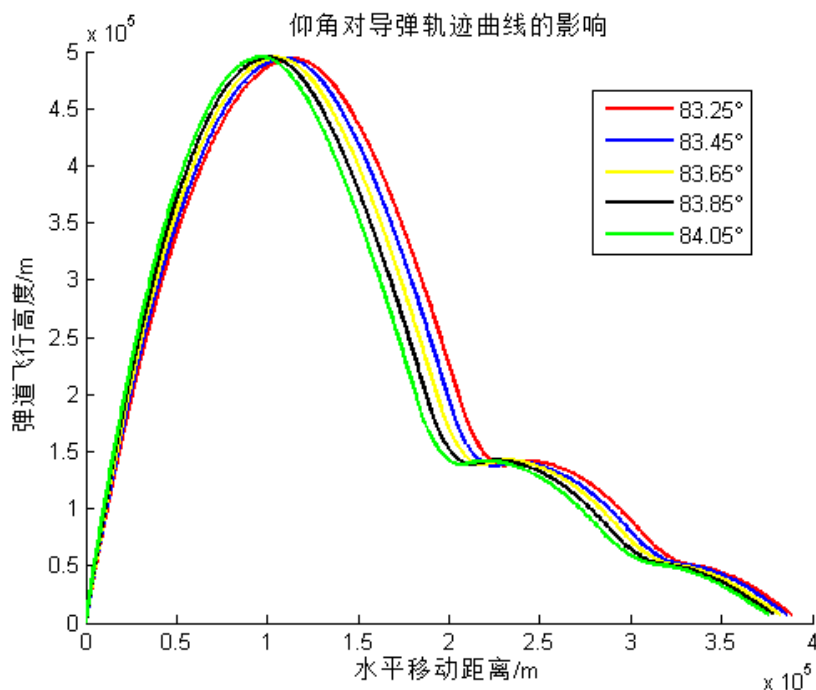


图 15. 不同仰角对导弹轨迹的影响

将导弹发射仰角控制在 $\pm 0.4^\circ$ 的误差范围内,可以发现在 5 中发射仰角误差情况下,对整体模型轨迹的形状不会有太大的改变,但导弹飞行轨迹整体产生移动,结果使末端打击位置不会有太大的影响,但会使制导雷达开机点的角度 θ 有较大的偏移,容易造成降低制导成功率的后果,对其角度 θ 进行检验如下表所示:

表 5. 对角度 θ 的检验值

航母头角度			航母尾角度		
30km	25km	20km	30km	25km	20km
15.44099	16.12185	18.51223	15.43146	16.2421	18.95671
8.716414	9.724349	14.40378	8.808388	10.17564	15.24706
5.34997	10.97358	19.70428	5.975004	11.70859	20.63752
12.59389	21.4563	32.75609	13.13992	22.14636	33.63961
22.53243	32.90997	49.19954	23.05404	33.56476	50.03419

上表中有 9 中仿真情况超出末端制导雷达有效搜索范围,误差体现的比较明显,不能忽略其影响。故在对反舰弹道导弹进行研究时,必须严格控制其发射角仰角,以保证末端制导成功率,从而提高导弹命中率。

6.3 命中率分析

在反舰弹道导弹的飞行过程中,主动段和中段变轨段均可进行修正指令的火箭姿态调整,但都是让导弹近似趋向于目标航母方向飞行以及进行反拦截变轨。而反舰导弹的命中和突防的关键在于轨迹末端的制导和机动过程。反舰导弹多采

用主动式末制导雷达，带有末制导的弹道式导弹能在末端实现大范围机动，但机动的范围毕竟是有限的。弹头会发射电磁波主动探测目标，导弹接受探测信息并进行制导。故导弹是否实现对航母的有效打击完全取决于再入时弹头想对航母的偏离程度。因此，确定带有末制导雷达的弹道式导弹在实际飞行中的最小方位搜索范围，对命中率的保障是十分必要的。

反舰导弹末制导雷达的最小方位搜索范围，是指存在目标机动产生的误差、目标指示精度误差和侧向横移误差的情况下，能保证捕捉概率满足要求的最小方位搜索角度。

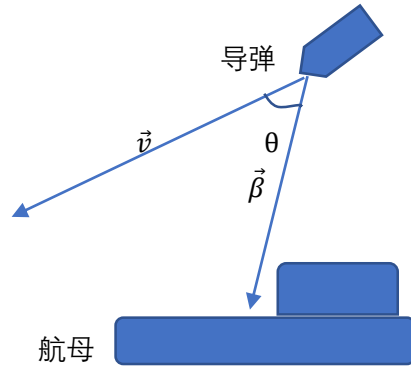


图 16. 导弹速度方向向量和导弹指向航母位置向量的夹角 θ

如图所示， \vec{v} 为导弹的速度向量， $\vec{\beta}_f$ 为导弹指向航母的位置向量。根据假设导弹一直处于空气平流状态，则导弹的姿态不会出现太大的改变，且在末端导弹处于急速下落状态，并经过雷达开机的姿态调整，则导弹弹头一般是处于指向目标范围的。故目前可将导弹的速度方向视为导弹弹头雷达的中心扫描方向，雷达扫描弹头前方圆锥形区域。

由于已知航母的长度为 300 米，且航母的船身朝向正南方向，则雷达可扫描航母位置向南北方向延伸 $\pm 150\text{m}$ ，故可求得导弹速度方向向量和导弹位置指向航母位置向量 θ 的夹角范围。

故 θ 可表示为：

$$\begin{cases} \vec{A} - \vec{B}_f = \vec{\beta}_f \\ \cos\theta_f = \frac{\vec{v} \cdot \vec{\beta}_f}{|\vec{v}| * |\vec{\beta}_f|} \\ \theta_f = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{\beta}_f}{|\vec{v}| * |\vec{\beta}_f|} \end{cases} \quad (6-1)$$

(其中 f 可表示为航母头，航母尾)

则当 θ 处于 $1/2$ 搜索范围内时，即可视为处于末制导雷达搜索范围内，雷达开机进行制导飞行，则能以很大概率击中目标^[7]，服从正态分布的制导误差概率计算出，制导后成功命中目标的概率为 82.2%。

接下来对反舰弹道导弹的动态目标打击轨迹进行模拟仿真测试，令修正科氏力 \vec{F}_k 所设的初始发射速度的额外角度设为 $-0.5^\circ \sim 0.5^\circ$ ，作出 11 种不同发射速度方向的导弹飞行轨迹图，在每种轨迹情况中设置三种距离雷达开机点，分别为 20km, 25km, 30km，对应不同的末端制导雷达有效搜索范围，在 33 种不同的末

端制导打击情况下，对打击命中率进行分析。

雷达有效搜索范围如下表 1 所示。

表 6 不同雷达开机点的有效雷达搜索范围^[7]

20km	25km	30km
$\pm 26.02^\circ$	$\pm 22.41^\circ$	$\pm 19.63^\circ$

轨迹图如下所示：

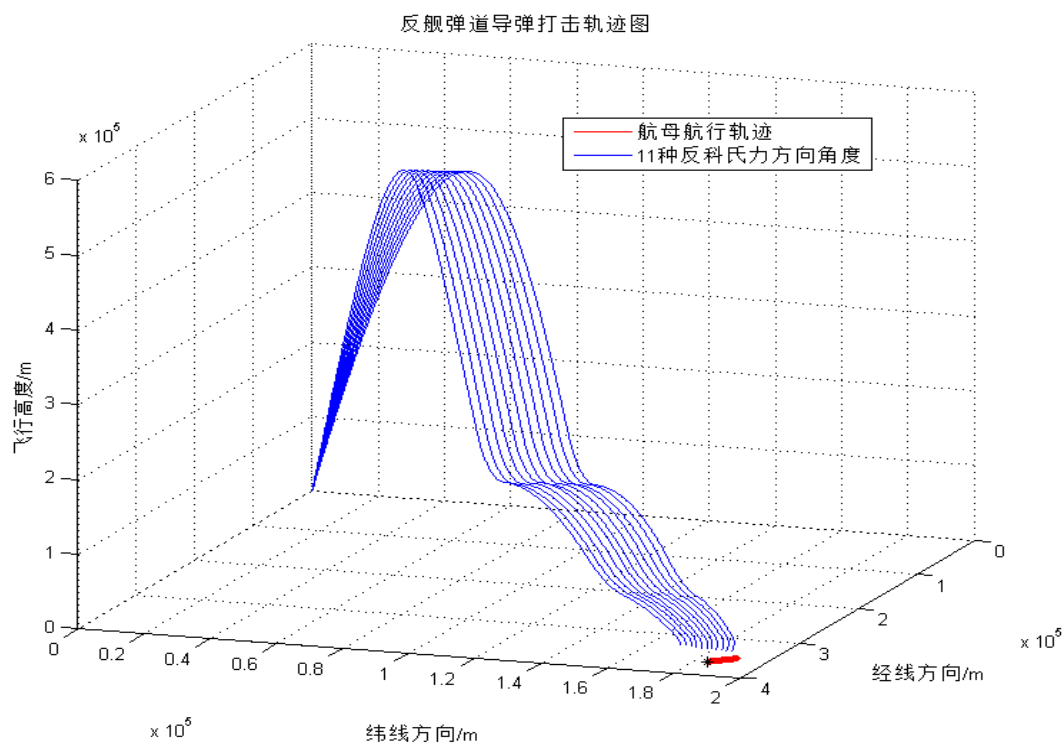


图 17. 不同末端制导时反舰导弹打击航母轨迹图

图中因初始发射角的方向改变，可以看出对其中段和末段的轨迹偏移影响很大，在这样围内对三种雷达开机节点进行命中率检测， θ 角部分表格如下表所示。

表 7. θ 角的部分数据

20km		25km		30km	
16.890°	15.950°	9.003°	8.275°	4.330°	3.801°
21.006°	20.063°	12.048°	11.310°	6.374°	5.755°
27.073°	26.120°	16.686°	15.938°	8.517°	7.902°

将所有 33 种 θ 角的数据范围与各个对应雷达开机点的有效雷达搜索范围进行对比，发现只有一种情况 20km 处 θ 角 27.073° 大于有效雷达有效探测范围 $\pm 26.02^\circ$ 。故可计算仿真检测中制导成功率为 96.97%，考虑制导成功后突防命中目标概率 82.2%。

命中率为 $96.97\% \times 82.2\% = 79.71\%$ 。有高达 96.97% 的制导成功率，该模型的精确度高，能够比较精确的打击航母。

七、模型的评价

7.1 模型的优点

该模型建立了导弹运动的微分和差分方程组，并在地心坐标系中分析反舰导弹的受力，加速度，速度等矢量，考虑到地球自转偏向力等多种与地球为自旋椭圆相关因素的影响，精确的描述了导弹的受力运动过程，并进行仿真分析，通过坐标转换矩阵，将仿真结果变换到发射坐标系下，从而可以方便的看出导弹从发射点的运动轨迹图。此外，本文在计算静态轨道模型以及中段动态轨迹方程时运用了差分方程，经过迭代，得出静态轨迹方程和中段变轨动态轨迹方程。考虑了多样化的设计变轨方案，增大了突防可能性并能精确的到达制导范围。最后，文章系统的进行了导弹轨道的误差分析，并在不同参数条件下仿真，对比分析出各种因素对导弹轨迹的影响。接着对所有仿真案例进行了制导成功率和命中率的分析，模型可靠，完整。

7.2 模型的缺点

文章忽略了气象变化对导弹弹道的影响，而在实际情况中天气却千变万化，不可避免的会导致偏差。将地球理想为球体，因为地心坐标系下的坐标本身就不是实际的坐标，从而可能会带来一定的系统误差，最后简化了导弹飞行中的质量变化，虽然仿真结果表明质量对精确打击影响不大，但实际上因导弹助推器质量变化可能会给导弹带来一定影响。

八、参考文献

- [1]祝强军，弹道导弹弹道仿真与优化设计[D]，西北工业大学，2007.
- [2]王少平，董受全等，高超声速反舰导弹作战效能指标体系研究，指挥控制与仿真，38（5）：42-46，2016。
- [3]胡传俊，杨恢先，弹道导弹被动段弹道方程与仿真，弹箭与制导学报，30（4）：132—134，2010。
- [4] [苏]A·A·德米特里耶夫斯. 外弹道学[M]. 孟宪昌，译. 北京：国防工业出版社，1977。
- [5]黄福铭，曾颖超，求非线性升力系数的一种拟合方法，西北工业大学
- [6]曾家有，汪浩，孙涛，反舰导弹末制导雷达最小方位搜索范围确定模型，航空学报，30（12）：2411-2415，2009。
- [7]丁达理，刘子阳，黄长强，某型主动雷动末制导导弹毁伤目标效能评估，弹箭与制导学报，24（4）：287-289，2004。
- [8]张毅，肖龙旭，王顺宏，弹道导弹弹道学，国防科技大学出版社，1999。