

# C 题 路基导弹打击航母的数学建模与算法设计

## 摘要

本文基于陆基导弹打击航母这一军事化任务，分析计算了导弹在空间中的运动轨道模型，分别给出了针对静止目标的静态轨道模型和针对移动目标的动态轨道模型，阐明了相关算法并作出图像，最后，对应用此模型打击航母的误差及命中率进行了分析。

对于问题 1，根据已知条件将反舰导弹打击航母的运动轨道分为发射段、中段和末段，其中，中段又包含有两个过程。根据每一个过程的受力和运动状态建立起问题 1 的静态轨道模型——分段模型，模型数学表达式如下：

$$f(x) = \begin{cases} 22406 \sqrt{x} - 09839x, & (0 \leq x < 13003) \\ -10275 \times 10^{-5}x^2 + 02672x + 110177235, & (13003 \leq x < 16038) \\ 8334 \times 10^{-8}x^2 - 625175 \times 10^{-2}x + 136619198, & (16038 \leq x < 359206) \\ -50958 \times 10^{-6}x^2 + 366088x - 655546, & (359206 \leq x \leq 378818) \end{cases}$$

根据此分段模型的数学表达式，在 MATLAB 中绘制出相应的图像，从而得到问题 1 所要求的导弹轨道曲线。

对于问题 2，考虑到题目中给出的航母运动状态，我们首先利用问题 1 的模型，将一定时间后航母到达的位置作为终点并尽量调整导弹受力及其它参数来保证该模型的合理性，但其适用性仍然较差。因此，若要解决问题 2，需在模型 1 的基础上加以改进，增加第三维坐标。改进后的模型中每一个过程都是  $x$ 、 $y$ 、 $z$  坐标对时间  $t$  的参数方程。为绘制直观的图像，根据问题 2 的分段参数方程在 Excel 中生成密度合适的一系列三维散点，然后将其导入 SPSS 中生成三维散点图，从而更加直观地观察和分析基于问题 2 的动态模型方程，并从中分析导弹飞行的中段动态模型。

对于问题 3，综合考虑各因素对导弹轨道曲线的影响，分析相应的系统误差和随机误差；对于命中率问题，由于控制系统发出指令到导弹接收、作出调整之间必然存在一定延迟，根据已经得到的模型和导弹的运动状态建立导弹位移和延迟时间之间的关系，从而对命中率进行相对精确的计算。

关键词：陆基导弹、分段参数方程、导弹轨道曲线模型、三维散点图

# 目 录

一、问题重述 .....	1
二、问题分析 .....	1
2.1 问题 1 的分析 .....	1
2.1.1 意义分析 .....	1
2.1.2 已知条件 .....	1
2.1.3 基本思路与假设条件 .....	2
2.2 问题 2 的分析 .....	3
2.2.1 意义分析 .....	3
2.2.2 已知条件 .....	3
2.2.3 基本思路 .....	3
2.3 问题 3 的分析 .....	4
2.3.1 误差分析 .....	4
2.3.2 命中率分析 .....	4
三、模型假设 .....	4
四、定义与符号说明 .....	5
五、模型建立和求解 .....	5
5.1 问题 1 模型建立和求解 .....	5
5.1.1 发射段 .....	6
5.1.2 中段 .....	8
5.1.3 末段 .....	10
5.2 问题 2 模型建立和求解 .....	11
5.2.1 舍弃的模型（思路一） .....	11
5.2.2 改进模型（思路二） .....	13
六、误差分析与命中率分析.....	19
6.1 误差分析 .....	19
6.1.1 空气阻力的影响 .....	19
6.1.2 非理想控制系统的影响 .....	19
6.1.3 地球自转的影响 .....	19
6.2 命中率分析 .....	20
参考文献 .....	22
附录 .....	22

## 一、问题重述

导弹——国之利器，对于保卫一个国家的安全具有重要的战略意义。本次建模旨在设计路基反舰导弹运行的轨道模型并计算其命中率，以期提供一个较为科学合理的结果。

题目中已经给定了导弹发射车的初始位置、航母初始位置、航向、航速（航母的动态坐标由卫星和无人机动态提供给指挥中心）等条件；导弹运行的轨道曲线划分为发射段、中段和末段，相应参数题目已经给定。若要设计反舰导弹运行的轨道模型，需要逐步解决如下三个具体问题：

（1）问题 1：建立初始状态下，即航母静止时，导弹是按照怎样的运动轨迹模型打击航母的。换言之，假设航母静止不动，基于此条件设计轨道运行模型。

（2）问题 2：由题目可知导弹运行的中段可设计为不同的飞行轨道，由导弹的飞行参数制导所确定。换言之，中段时航母的动态坐标数据是由卫星和无人机动态提供的，基于此动态数据，对问题 1 建立的模型加以改进，构建航母运动时导弹运行的轨道模型。

（3）问题 3：导弹打击航母的轨道曲线的误差分析和命中率分析。误差分析主要是从建立模型所基于的假设条件入手，逐个分析各假设条件对导弹打击航母的影响；命中率分析则侧重具体的条件，相对精确地计算命中率处于什么范围内。

## 二、问题分析

### 2.1 问题 1 的分析

#### 2.1.1 意义分析

问题 1 是此次研究的基础，首先我们需要先假定航母静止不动，计算此时的轨道运行模型。基于这个基础，我们才能再加入航母运动等具体条件，设计出更加复杂情况下的模型。因此，问题 1 为整个研究做了很好的铺垫，为解决后续问题打开了思路。

#### 2.1.2 已知条件

（1）导弹初速度方向竖直向上。

(2) 导弹发射车初始位置为东经  $120^{\circ} 30' 00''$  , 北纬  $27^{\circ} 30' 00''$  , 以此为导弹打击航母的坐标系原点; 航母位置坐标  $H (X_0, Y_0)$  为东经  $123^{\circ} 45' 00''$  , 北纬  $25^{\circ} 39' 00''$  , 航母保持静止不动; 根据坐标计算距离时, 设定地球半径为 6300km。

(3) 导弹运行的轨道曲线划分为发射段, 中段和末段; 发射段通常为抛物线, 发射速度为 500m/s; 中段可设计为不同的飞行轨道; 末段最高速度可达到 1000m/s。导弹末段飞行时间一般不超过 20 秒。末段由导弹自主攻击航母目标。这里我们设计第三段为具有一定初速度的平抛运动, 只受重力作用。

(4) 导弹飞行的轨道曲线是连续和光滑的, 不能折线飞行。

(5) 需考虑应对敌方反导系统拦截问题, 期望给出难以拦截的攻击曲线。在这里, 我们设计: 发射段时导弹具有竖直向上的初速度、垂直于初速度的牵引力, 以获得最大的水平速度, 尽力避免反导系统的打击。

### 2.1.3 基本思路与假设条件

(1) 导弹初速度方向竖直向上。

(2) 牵引力大小始终恒定, 方向可变。

(3) 忽略空气阻力的影响。当导弹处于主动段时, 主要受到推力和空气阻力作用。<sup>[1]</sup>题目中声明: “发射段的轨迹通常为抛物线”, 物体运动轨迹为抛物线的条件是: 物体受大小、方向恒定的力的作用, 且不与初速度同向。而空气阻力处处与速度反向, 且大小与速度相关, 是一个大小和方向都不断变化的力; 若考虑空气阻力的影响, 则导弹的运动轨迹不可能为抛物线。

(4) 对于发射段: 导弹受水平方向的牵引力和竖直向下的重力。初速度竖直向上, 大小为 500m/s; 运动轨迹为抛物线, 运动到最高点时导弹的竖直速度为 0, 发射段结束。

(5) 对于中段, 我们将其分解为三部分: 最开始, 导弹受到与水平速度方向相反的牵引力, 水平速度快速减小, 视为瞬间完成; 第二部分导弹受重力和竖直向下的牵引力, 合力竖直向下, 同时具有一定水平初速度, 导弹做平抛运动; 第三部分导弹受重力和竖直向上的牵引力, 合力向上, 竖直速度逐渐减小至 0, 水平速度保持不变。

(6) 对于末段: 导弹只受重力作用, 具有水平方向的初速度, 且初速度大

小与中段第一部分结束时的水平速度相等。导弹做平抛运动。

## 2.2 问题 2 的分析

### 2.2.1 意义分析

问题 2 是对于问题 1 的扩展和补充,问题 1 中假定航母静止不动,这只是研究导弹运行轨道的基础,而实际应用中必须要加入航母的运动条件才具有现实意义,这就需要对问题 1 建立的模型进一步改进。

### 2.2.2 已知条件

导弹发射车初始位置坐标、航母初始位置坐标、导弹打击航母的坐标系原点均与问题 1 中相同。航母始终保持向正南方向航行,速度为 32 节(1 节=1.852km/h)的运动状态移动; 航母舰长为 335m。

其它已知条件均与问题 1 相同。

### 2.2.3 基本思路

针对问题 2, 我们先后总结出了如下两种思路:

#### (1) 思路一:

- ①导弹竖直发射; 导弹的初速度方向竖直向上,无水平初速度;
- ②航母一直向正南方向航行, 速度为 32 节;
- ③假设航母运行时间  $t$  后被导弹击中;
- ④导弹从发射起, 即朝着航母航行时间  $t$  后所到达的位置进行打击;  
即导弹向着预先计算好的航母假想方向进行打击;
- ⑤导弹在发射段、中段、末段的受力情况与问题 1 所建立的模型中相同。

#### (2) 思路二:

- ①导弹倾斜发射;
- ②以导弹初始位置为原点, 导弹初始位置与航母初始位置连线方向为  $Y$  轴, 水平面上从  $Y$  轴顺时针旋转  $90^\circ$  为  $X$  轴, 垂直于水平面方向为  $Z$  轴;
- ③初速度可分解为两个方向,一是  $Z$  方向上的分速度,大小同问题 1 中相同,二是正南方向上的分速度  $v$ ;
- ④假设航母一直向正南方向航行, 速度为 32 节;
- ⑤依旧将导弹运行的轨道曲线划分为发射段, 中段和末段;

⑥导弹在发射段、中段、末段的受力情况与问题 1 所建立的模型中完全相同。

## 2.3 问题 3 的分析

分析误差的目的之一是查找误差产生的原因，提出改进措施，减少误差；另一个目的是评估模型的有效性。<sup>[2]</sup>将导弹运行轨道模型建立起来仅仅是实际问题中的第一步，模型的实用性如何、精确与否尚需进行进一步验证。精度较高的轨道运行模型才具有意义。

### 2.3.1 误差分析

从建立模型所基于的假设条件入手，逐个分析各假设条件对导弹打击航母的影响，误差的大小及其主要体现在什么方面。

### 2.3.2 命中率分析

命中率分析则针对具体的条件，相对精确地计算命中率处于什么范围内。由于地转偏向力及空气阻力的影响分析起来较为复杂，具有一定随机性，且相关参数与实际应用环境密切相关，难以用统一的公式表示。本次建模仅以导弹的非理想控制系统对命中率的影响为例，进行命中率的分析 and 计算。

## 三、模型假设

- ✧ 假设导弹飞行过程中受到的阻力可以忽略不计。
- ✧ 将作用在导弹上的力简化为牵引力和重力。
- ✧ 假设导弹从发射到击中目标期间质量不发生改变。
- ✧ 假设导弹控制系统为理想控制系统，导弹运动状态的改变是瞬时完成的，作用在导弹上的外力随控制系统的调节而瞬间变化。
- ✧ 假设导弹推进期间提供的动力大小为恒定值，方向可以进行调整。
- ✧ 假设忽略地球自转对导弹打击航母的影响。

## 四、定义与符号说明

$F$	牵引力	$y_1$	发射段任意时刻 ( $t$ ) 的 竖直位移
$m$	导弹质量	$h_1$	发射段达到的最大竖直 位移
$t_1$	发射段所经历的时间	$h_{上}$	中段第一部分所经过的 竖直位移
$t_2$	中段所经历的时间	$h_{下}$	中段第二部分所经过的 竖直位移
$t_{前}$	中段第一部分所经历的 时间	$h_3$	末段竖直位移
$t_{后}$	中段第二部分所经历的 时间	$v_0$	发射段初速度 (竖直向 上)
$t_3$	末段所经历的时间	$v_{中}$	中段第一过程结束时竖 直速度
$x_1$	发射段任意时刻 ( $t$ ) 运 动的水平距离	$v_{末}$	末端结束时的总速度
$L$	导弹经过的水平总距离	$v_{1h}$	发射段水平速度
$L_1$	发射段所经过的水平位 移	$v_{2h}$	中段水平速度
$L_2$	中段所经过的水平位移	$v_{3h}$	末段水平速度
$L_3$	末段所经过的水平位移	$v$	航母向正南方向行驶的 速度
$\Delta t_0$	非理想控制系统调节导 弹作用力的延迟时间	$\Delta t_1$	由于 $\Delta t_0$ 的出现而在中段 第二过程延长的时间

表 1 符号定义与说明

## 五、模型建立和求解

### 5.1 问题 1 模型建立和求解

导弹竖直向上发射。

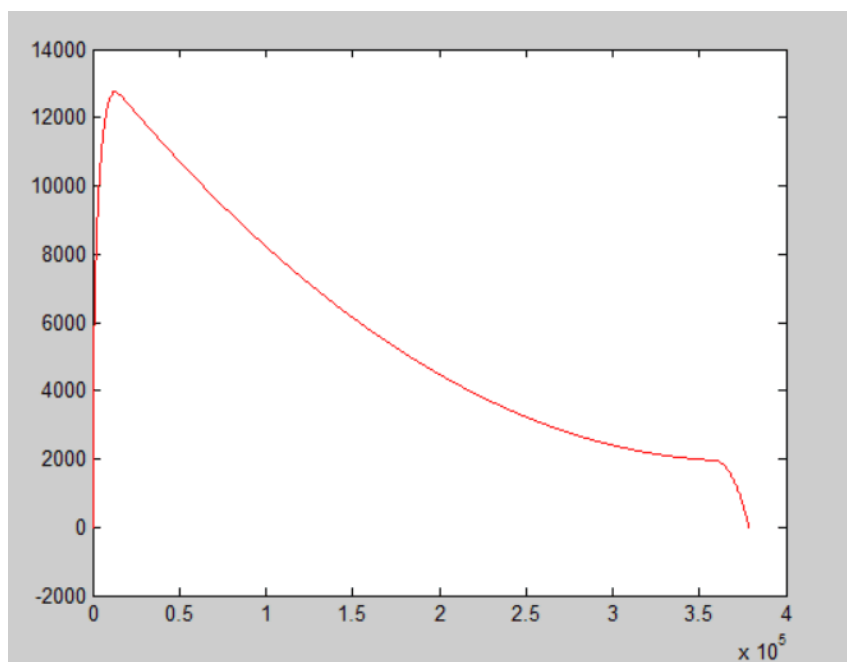


图 1 问题 1 导弹运行轨迹总图

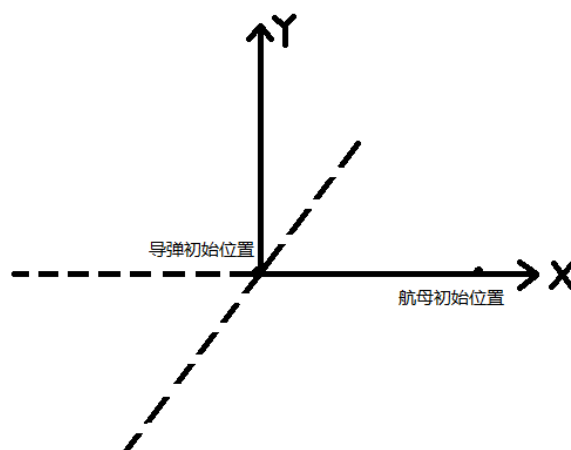


图 2 问题 1 坐标系示意图

以导弹初始位置为原点，导弹初始位置与航母初始位置连线方向为 X 轴，垂直于水平面方向为 Y 轴。

导弹运行的总轨道方程如下：

$$f(x) = \begin{cases} 22406\sqrt{x} - 09839x, & (0 \leq x < 13003) \\ -10275 \times 10^{-5}x^2 + 02672x + 11017235, & (13003 \leq x < 16038) \\ 8334 \times 10^{-8}x^2 - 625175 \times 10^{-2}x + 13660198, & (16038 \leq x < 359206) \\ -50958 \times 10^{-6}x^2 + 366088x - 655546, & (359206 \leq x \leq 378818) \end{cases}$$

导弹运行轨道方程中每段公式的推导过程如下：



### 5.1.1 发射段

发射段导弹以垂直地面向上的初速度 $v_0$ 向上运动，并且假定其自身可以提供一水平指向打击目标（即航母）方向的推进力 $F$ ，在恒定的推进力 $F$ 和重力的作用下导弹做类斜抛运动，运动轨迹为抛物线。

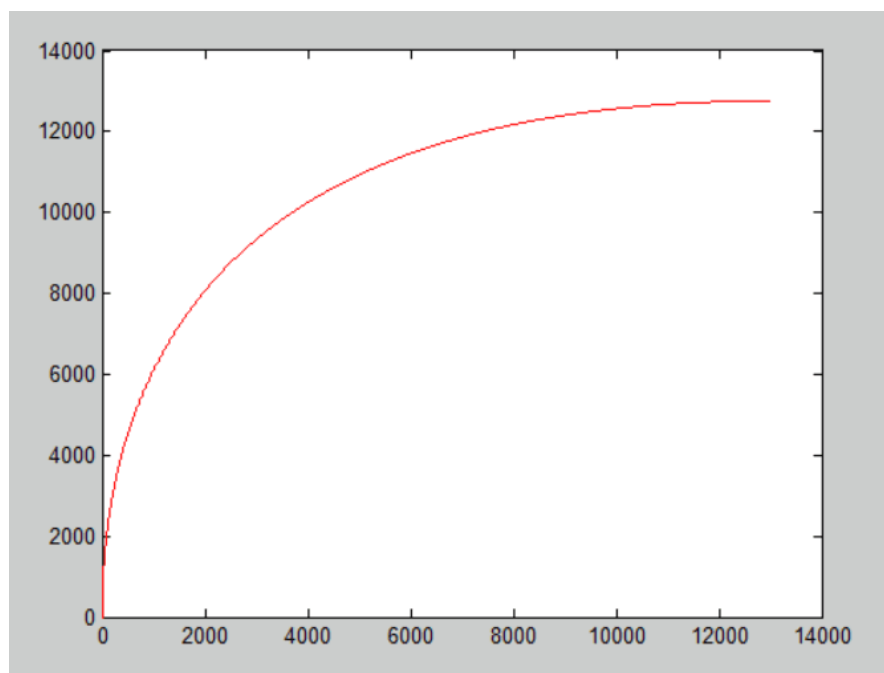


图 3 问题 1 导弹运行轨迹发射段图

(1) 竖直方向：

$$\text{受力: } G = mg = m a_v$$

$$\text{速度: } \text{由 } 0 = v_0 - a_{1v} t_1$$

$$\text{可得: } t_1 = 5102s$$

$$\text{任意时刻 (t) 高度: } y_1 = v_0 t - \frac{1}{2} a_{1v} t^2$$

$$\text{上升可达的最大高度: } h_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a_{1v} t_1^2 = 12755m$$

(2) 水平方向：

$$\text{受力: } F = m a_h$$

$$\text{速度: } v_{1h} = a_{1h} t_1$$

$$\text{任意时刻 (t) 水平位移: } x_1 = \frac{1}{2} a_{1h} t^2$$

$$\text{水平最大位移: } L_1 = \frac{1}{2} a_{1h} t_1^2$$

可得  $L_1 = 13052a_{1h}$

(3) 任意时刻轨道方程: 
$$y = v_0 \sqrt{\frac{2x}{a_{1h}}} - \frac{a_{1v}}{a_{1h}} x$$

其中:  $a_{1v} = g$ ,  $a_{1h} = \frac{F}{m}$  ( $a_{1h}$ 的具体值可通过在后续中段的过程中计算得出),  $v_0 = 500 \text{ m/s}$ 。

### 5.1.2 中段

中段分为两个过程, 第一个过程导弹受到的牵引力  $F$  方向竖直向下 (与重力方向相同), 合力方向竖直向下; 第二个过程受到的牵引力  $F$  方向竖直向上 (与重力方向相反), 合力方向竖直向上 (后面会计算并说明  $F$  大于  $G$ )。

由于在中段导弹不受水平方向的牵引力, 因此在中段水平速度不变, 始终为  $V_{2h}$ 。

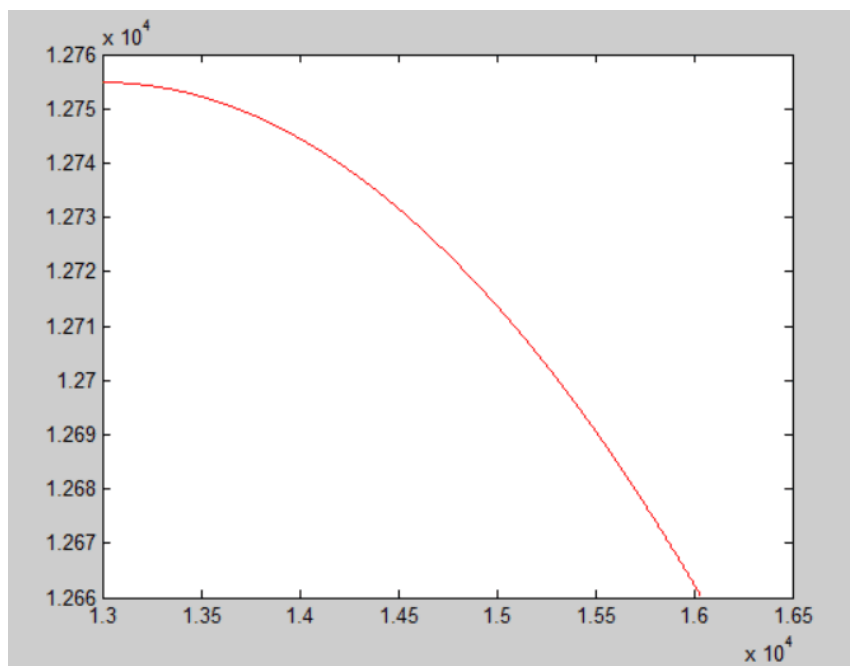


图 4 问题 1 导弹运行轨迹中段第一部分图

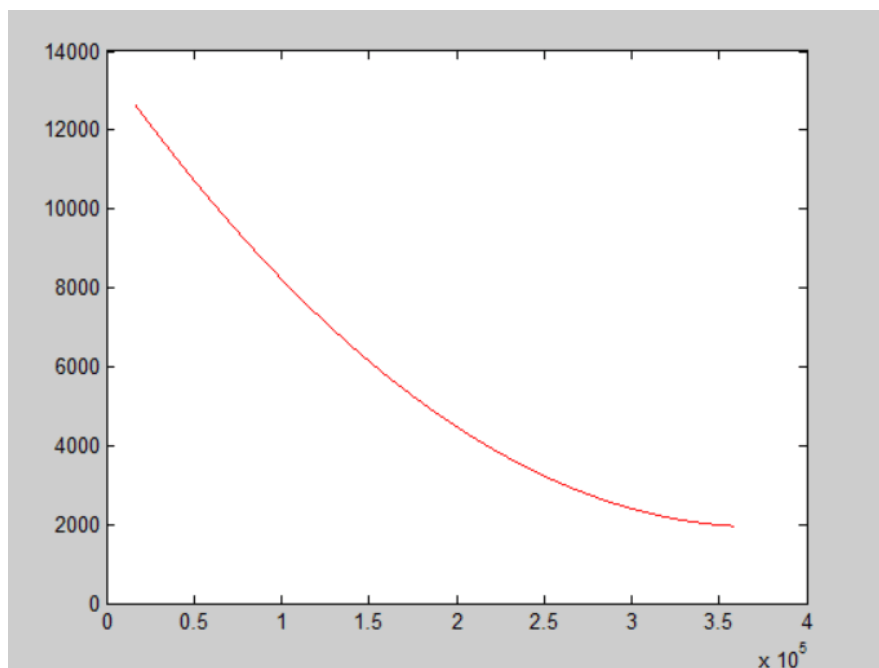


图 5 问题 1 导弹运行轨迹中段第二部分图

## (1) 水平方向:

第二段水平总路程:

$$L_2 = L - L_1 - L_3$$

末端中可以得到 $L_3=19612\text{m}$ , 因此:

$$L_2 = 359206 - 13052a_{1h}$$

由此可以计算出第二段的总时间:

$$t_2 = \frac{L_2}{v_{2h}}$$

$$v_{2h} = v_{3h}$$

## (2) 竖直方向:

设第一过程结束时竖直方向速度为 $v_{\text{中}}$ , 则:

$$v_{\text{中}}^2 = 2(a_{1h} + g)h_{\text{上}}$$

$$0 - v_{\text{中}}^2 = -2(a_{1h} + g)h_{\text{下}}$$

$$h_{\text{上}} + h_{\text{下}} = h_1 - h_3 = 10795\text{m}$$

$$v_{\text{中}} = (a_{1h} + g)t_{\text{前}}$$

$$0 = v_{\text{中}} - (a_{1h} - g)t_{\text{后}}$$

$$t_{\text{前}} + t_{\text{后}} = t_2$$

得到:

$$a_{1h} = 996 \text{ m/s}^2$$

$$v_{\text{中}} = 6115.24 \text{ m/s}$$

中段第一过程任意时刻:

$$\begin{aligned} x &= v_{3h} t \\ y &= \frac{1}{2} (a_{1h} + g) t^2 \end{aligned}$$

可得到此过程运动轨迹:

$$y = \frac{(a_{1h} + g)}{2v_{3h}^2} x^2$$

中段第二过程任意时刻:

$$\begin{aligned} x &= v_3 t \\ y &= v_{\text{中}} t - \frac{1}{2} (a_{1h} - g) t^2 \end{aligned}$$

可得到此过程运动轨迹:

$$y = \frac{v_{\text{中}}}{v_{3h}} x - \frac{a_{1h} - g}{2v_{3h}^2} x^2$$

### 5.1.3 末段

在中段结束时，竖直速度逐渐减为 0，导弹速度刚好水平。在末段过程中，撤去作用在导弹上的力 F，导弹在重力作用下做平抛运动（水平速度在末段始终不变，为  $v_{3h}$ ），从而使导弹自主打击目标航母。

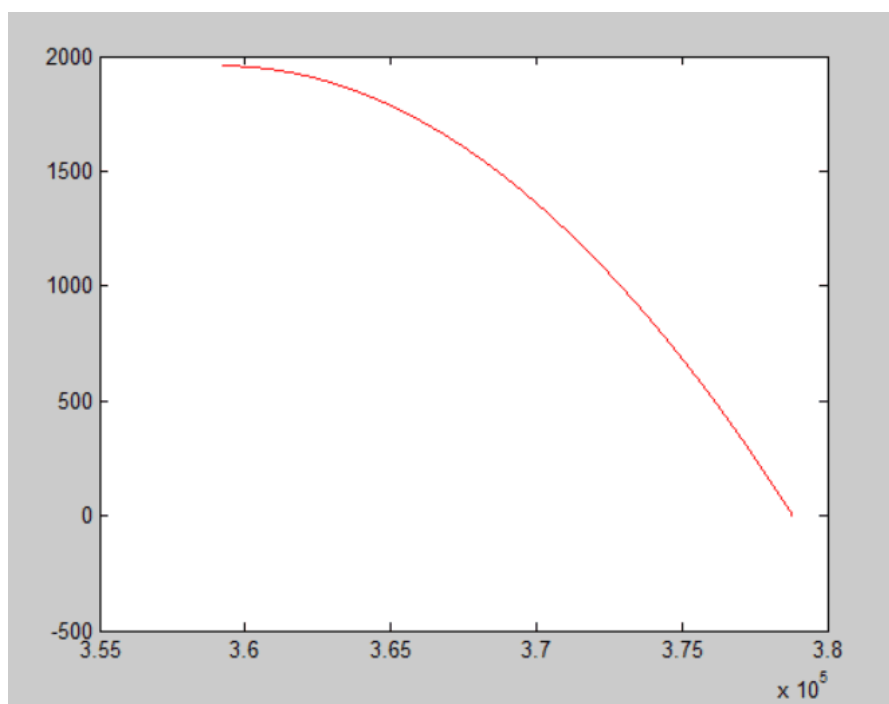


图 6 问题 1 导弹运行轨迹末段图

由题目中末段过程时间不超过 20s, 最大速度可达 1000m/s, 所以可令  $t_3 = 20\text{ s}$ , 并且令  $v_{\text{末}} = 1000\text{ m/s}$ 。

(1) 竖直方向:

$$\text{任意时刻 (t) 竖直位移: } y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\text{最大竖直位移: } h_3 = \frac{1}{2}gt_3^2 = 1960\text{ m}$$

$$\text{由动能定理得: } mgh_3 = \frac{1}{2}m(v_{\text{末}}^2 - v_{3h}^2)$$

$$\text{可得 } v_{3h} = 980\text{ m/s}$$

(2) 水平方向:

$$\text{任意时刻 (t) 水平位移: } x = v_{3h}t$$

$$\text{最大水平位移: } L_3 = v_{3h}t_3 = 19612\text{ m}$$

(3) 任意时刻轨道方程:

$$\text{由任意时刻 (t) 水平位移: } x = v_{3h}t$$

$$\text{任意时刻 (t) 竖直位移: } y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\text{任意时刻 (t) 轨道方程: } y = \frac{g}{2v_{3h}^2}x^2$$

将每个符号代表的数值代入每一段的轨道方程中, 可得到导弹总的运动轨道方程如下:

$$f(x) = \begin{cases} 22406\sqrt{x} - 09839x, & (0 \leq x < 13003) \\ -10275 \times 10^{-5}x^2 + 02672x + 11017235, & (13003 \leq x < 16038) \\ 8334 \times 10^{-8}x^2 - 625175 \times 10^{-2}x + 13660198, & (16038 \leq x < 359206) \\ -50958 \times 10^{-6}x^2 + 366088x - 655546, & (359206 \leq x \leq 378818) \end{cases}$$

## 5.2 问题 2 模型建立和求解

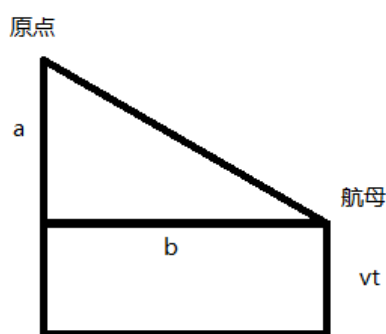


图 7 问题 2 示意图

### 5.2.1 舍弃的模型（思路一）

#### （1）基本思想

在问题 1 的基础上，假设导弹发射后  $t$  时刻击中航母，因为航母运动速度和运动方向已知，所以可直接将导弹打击终点设置为  $t$  时刻航母到达的位置。

①导弹竖直向上发射；

②假设航母一直向正南方向航行，速度为 32 节，运行时间  $t$  后被导弹击中；从导弹发射起，即朝着航母航行时间  $t$  后达到的位置进行打击；

③依旧将导弹运行的轨道曲线划分为发射段，中段和末段；

④对于发射段：导弹受水平方向的牵引力和竖直向下的重力，初速度竖直向上，运动轨迹依旧为抛物线；

⑤对于中段，我们将其分解为两部分：第一部分导弹受重力和竖直向下的牵引力，合力竖直向下，同时具有一定水平初速度，导弹做平抛运动；第二部分导弹受重力和竖直向上的牵引力，合力向上，竖直速度逐渐减小至 0，水平速度保持不变。

⑥对于末段：导弹只受重力作用，具有水平方向的初速度，且初速度大小与中段第一部分结束时的水平速度相等。导弹做平抛运动。

#### （2）模型建立

水平距离：

$$L_2 = L - L_1 - L_3 \quad (1)$$

$$L = \sqrt{(a + 1646.22t)^2 + b^2}, \quad L_1 = 13052a_2 \text{ m}, \quad L_3 = 19612 \text{ m}$$

公式中  $a$  代表导弹发射点与初始航母位置之间沿经线方向的距离,  $b$  代表导弹发射点与初始航母位置之间沿纬线方向的距离。

在竖直方向, 因为发射端上升的高度和末段下降的高度在问题 1 中已经计算出, 并且此模型与问题 1 相比只有中段在水平方向上加了一个力, 所以不会影响中段的高程变化, 所以:

依据中段高程建立关系式:

$$h_2 = \frac{v_{\text{中}}^2}{2(a_2 + g)} + \frac{v_{\text{中}}^2}{2(a_2 - g)} = 10795 \text{ m} \quad (2)$$

依据中段时间建立关系式:

$$t = t_1 + t_2 + t_3$$

$$t_1 = 5102 \text{ s}, \quad t_3 = 20 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{L_2}{v_3} = \frac{L_2}{9806}$$

$$t_2 = \frac{L_2}{v_3} = \frac{L_2}{9806} = \frac{L - L_1 - L_3}{9806} = \frac{v_{\text{中}}}{a_2 + g} + \frac{v_{\text{中}}}{a_2 - g} \quad (3)$$

### (3) 模型合理性分析

在该模型中, 航母运行  $t$  时间后位置是  $H_i(X(t_i), Y(t_i))$ , 导弹一开始即向着该位置发射; 而这在实际中是并不现实的, 实际中我们难以预测航母经过时间  $t$  后会处于什么位置, 因此该模型的实际应用价值不大, 故予以舍弃。

#### 5.2.2 改进模型 (思路二)

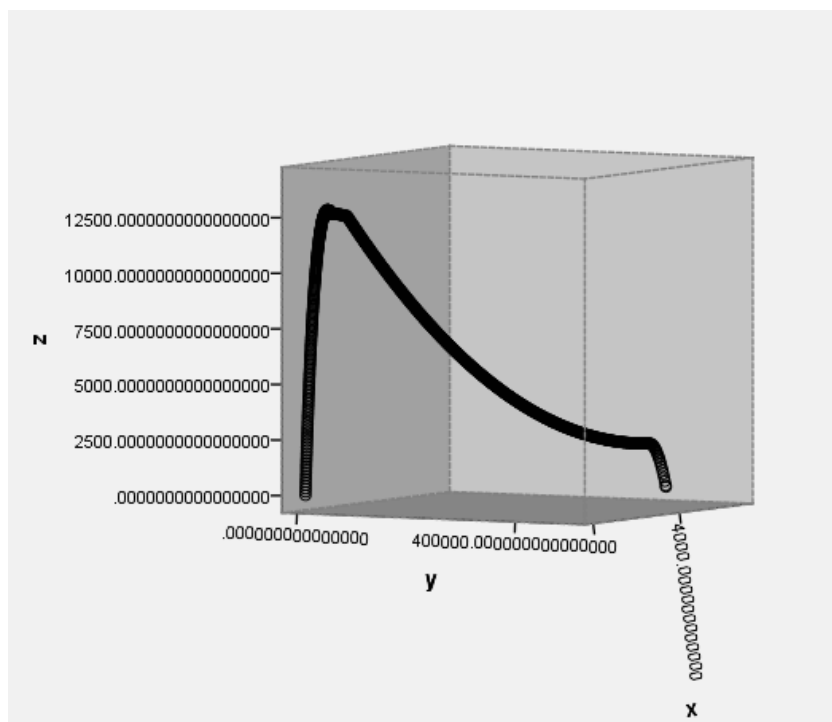


图 8 改进模型导弹运行轨迹总图

模型二是一个立体空间模型，每一个过程得到的轨迹方程都是  $x$ 、 $y$ 、 $z$  坐标分别与时间  $t$  之间关系的参数方程形式，因此可以在 EXCEL 中根据相应公式得到密度合适的一系列散点，然后通过 SPSS 中绘出三维散点图（图 8），从而得到模型二的散点轨迹图像，这样的绘图方式的一个优点是更加直观，同时也可以通过起点和终点的位置关系验证模型的正确与否。

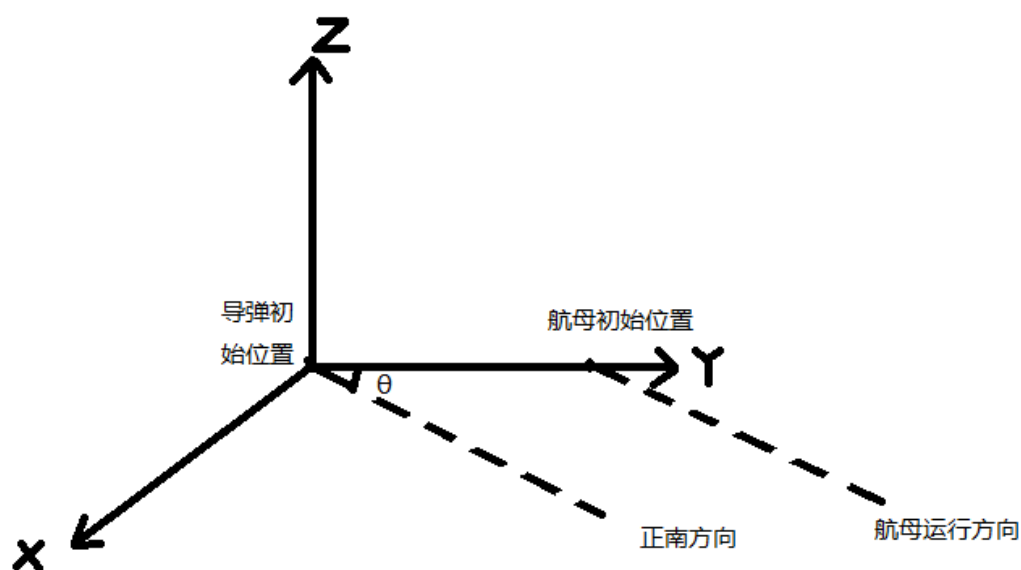


图 9 改进模型坐标系示意图



如图 8 所示，以导弹初始位置为原点，导弹初始位置与航母初始位置连线方向为 Y 轴，水平面上从 Y 轴顺时针旋转  $90^\circ$  为 X 轴，垂直于水平面方向为 Z 轴，由此建立右手坐标系。

假设航母一直向正南方向航行，速度为 32 节；

依旧将导弹运行的轨道曲线划分为发射段，中段和末段。

导弹发射车初始位置为  $(27^\circ 30' 00'' \text{ N}, 120^\circ 30' 00'' \text{ E})$ ，以此为导弹打击航母的坐标系原点；航母初始位置坐标为  $(25^\circ 39' 00'' \text{ N}, 123^\circ 45' 00'' \text{ E})$ 。纬差为： $1^\circ 51' 00''$ ；经差为： $3^\circ 15' 00''$ 。 $\theta$  为导弹初始位置、航母初始位置连线与正南方向间的夹角（锐角）。

计算得  $\sin\theta = 0.3673391$ ， $\cos\theta = 0.4672125$ ，具体算法详见附件。

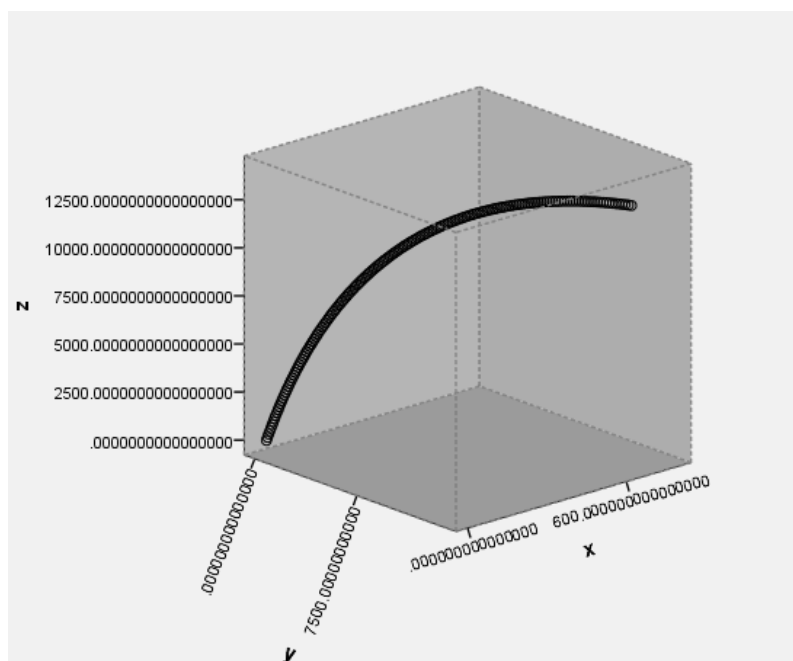


图 10 改进模型导弹运行轨迹发射段图

### (1) 发射段：

导弹受到 Y 方向的牵引力，大小同问题 1 中相同；初速度可分解为两个方向，一是 Z 方向上的分速度，大小同问题 1 中相同，为  $v_0$ ，二是正南方向上的分速度  $v$ 。

由运动的合成和分解可得：

X 方向以速度  $v\sin\theta$  做匀速运动：

$$x = v\sin\theta t$$

Y 方向以初速度 $v\cos\theta$  做加速运动:

$$F = m a_{1h}$$

$$y = v\cos\theta t + \frac{1}{2} a_{1h} t^2$$

Z 方向以初速度 $v_0$ 做减速运动:

$$z = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

在发射段终点处 $t = t_1 = 51.02 \text{ s}$  ;

代入相应数值可得

$$\begin{cases} x = 1377.45t \\ y = 498t^2 + 406.158t \quad (0 \leq t \leq 51.02) \\ z = -49t^2 + 500t \end{cases}$$

将 $t_1$ 代入可得发射段终点坐标为 (702.775, 13170.363, 12755.102) (单位: 米)。

## (2) 中段:

由于在中段导弹不受水平方向的牵引力, 因此在中段水平速度不变, 始终为 $V_{2h}$ 。

### ①第一部分:

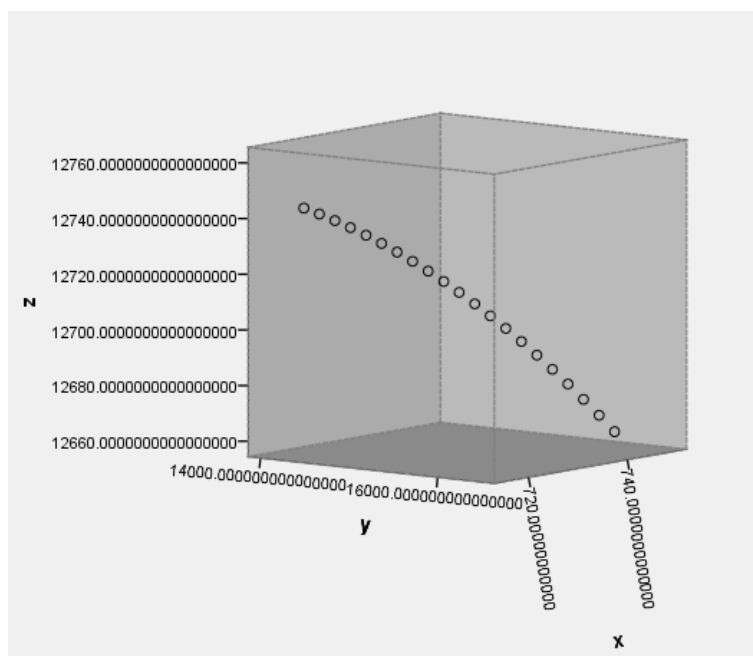


图 11 改进模型导弹运行轨迹中段第一部分图

X 方向以速度 $v\sin\theta$  做匀速运动:

$$x = v\sin\theta t$$

Y 方向以初速度  $(v_3 + v \cos \theta)$  做匀速运动:

$$y = (v_3 + v \cos \theta)t$$

Z 方向以初速度0做减速运动:

$$z = -\frac{1}{2} (a_{2v} + g) t^2$$

上式是以发射段终点为起点进行计算的, 图像上若要与发射段曲线相连, 需对上式进行平移, 得到下式:

$$\begin{cases} x = v \sin \theta (t - 51.02) + 702775 \\ y = (v_3 + v \cos \theta)(t - 51.02) + 1317063 \\ z = -\frac{1}{2}(a_{2v} + g)(t - 51.02)^2 + 12755102 \end{cases}$$

在第一部分终点处  $t = 54.11476s$  ;

代入数值并化简可得:

$$\begin{cases} x = 137745t \\ y = 9846158t - 3706771 \\ z = -988t^2 + 10081552t - 12962372 \end{cases} \quad (51.02 < t \leq 54.11476)$$

计算得中段第一部分终点坐标为  $(745.404, 16217.654, 12660.476)$  (单位: 米)。

## ②第二部分:

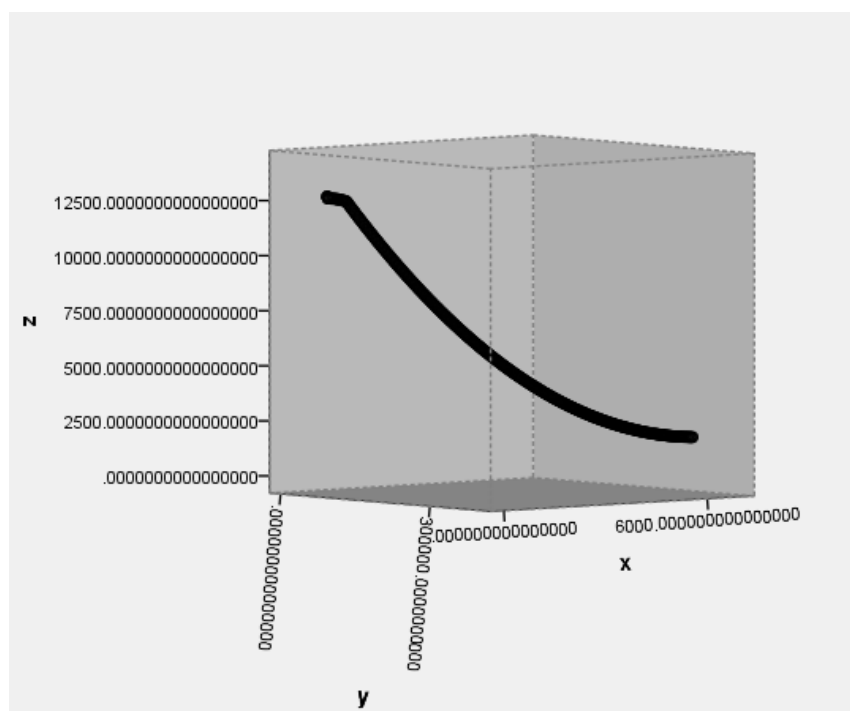


图 12 改进模型导弹运行轨迹中段第二部分图

X 方向以速度 $v\sin\theta$  做匀速运动:

$$x = v\sin\theta t$$

Y 方向以初速度 $(v_3 + v\cos\theta)$  做匀速运动:

$$y = (v_3 + v\cos\theta)t$$

Z 方向以初速度 $-v_{\text{中}}$ 做加速运动:

$$z = -v_{\text{中}}t + \frac{1}{2}(a_{2v} - g)t^2$$

上式是以发射段终点为起点进行计算的, 图像上若要与中段的第一部分曲线相连, 需要对上式进行平移, 得到下式:

$$\begin{cases} x = v\sin\theta (t - 541.1476) + 7454.04 \\ y = (v_3 + v\cos\theta)(t - 541.1476) + 16217.54 \\ z = \frac{1}{2}(a_{2v} + g)(t - 541.1476)^2 - v_{\text{中}}(t - 541.1476) + 12660.76 \end{cases}$$

在第二部分终点处 $t = 436.31726s$  ;

代入数值并化简可得:

$$\begin{cases} x = 137745t \\ y = 98466158t - 37067071 \\ z = 008t^2 - 6931076t + 17189319 \end{cases} \quad (54.11476 < t \leq 436.31726)$$

计算得中段第二部分终点坐标为 $(6010.0521, 392557.772, 1960)$  (单位: 米)。

### (3) 末段:

在中段结束时, 竖直速度逐渐减为 0, 导弹速度刚好水平。在末段过程中, 导弹仅在重力作用下做平抛运动, 水平速度在末段始终为 $v_{3h}$ , 导弹自主打击目标航母。

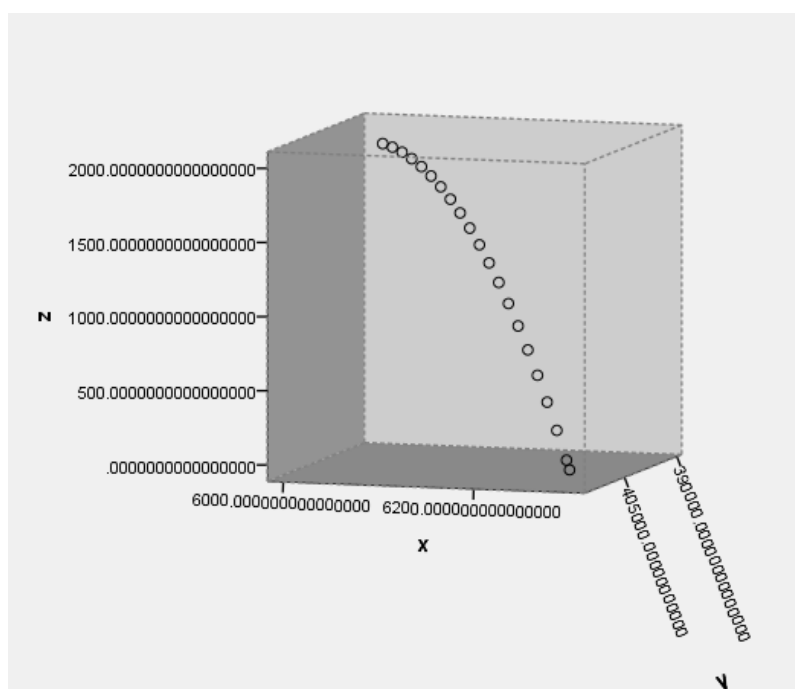


图 13 改进模型导弹运行轨迹末段图

X 方向以速度  $v \sin \theta$  做匀速运动:

$$x = v \sin \theta t$$

Y 方向以初速度  $(v_3 + v \cos \theta)$  做匀速运动:

$$y = (v_3 + v \cos \theta) t$$

Z 方向以初速度 0 做加速运动:

$$z = \frac{1}{2} g t^2$$

上式是以发射段终点为起点进行计算的, 图像上若要与中段的第一部分曲线相连, 需要对上式进行平移, 得到下式:

$$\begin{cases} x = v \sin \theta (t - 436.31726) + 745404 \\ y = (v_3 + v \cos \theta)(t - 436.31726) + 1621754 \\ z = \frac{1}{2}(a_{2v} + g)(t - 541.476)^2 - v_{\text{中}}(t - 436.31726) + 12660476 \end{cases}$$

代入数值并化简可得:

$$\begin{cases} x = 137745t \\ y = 98466158t - 37067071 \\ z = -49t^2 + 427590915t - 93086448 \end{cases} \quad (436.31726 < t \leq 456.31726)$$

## 六、误差分析及命中率分析

### 6.1 误差分析

各种误差产生的物理原因不同，对导弹精度的影响也不一样；同一误差因素的影响也因射程大小、弹道形状、环境条件等变化而变化。<sup>[3]</sup>由于本次研究所建立的模型是基于种种假设的基础之上，许多因素在实际应用中不能忽略，因此必然会造成一定的误差。其影响主要如下：

### 6.1.1 空气阻力的影响

出于对题目的考虑：“导弹发射段通常为抛物线”，我们在建立导弹运行轨迹模型时忽略了空气阻力的影响。因为空气阻力处处与导弹运动方向相反，且大小与速度相关，是一个方向和大小都不断变化的力。而物体运动轨迹为抛物线的条件是：物体始终受大小、方向恒定的力的作用，且不与初速度同向。

若考虑空气阻力的影响，则导弹发射段运动轨迹不能视为抛物线；而不考虑空气阻力的影响则必然会影响导弹打击的精度，造成误差。

### 6.1.2 非理想控制系统的影响

在建立模型时，我们假设导弹控制系统为理想控制系统，导弹运动状态的改变是瞬时完成的，作用在导弹上的外力是随控制系统的调节而瞬间变化的。

而在实际中导弹达不到理想控制系统的状态，外力变化需要一个较短过程（时间段  $t$ ）。在时间  $t$  内，高速运行的导弹会行进一段位移，最终会影响精度，导致一定的误差，具体参数详见“命中率分析”部分。

### 6.1.3 地球自转的影响

由于地球自转对导弹打击航母的影响比较复杂，不便于计算，因此在建立模型时没有考虑该因素的影响，但在实际情况中并不能忽略。

导弹发射离开地面以后，不再受地转偏向力的影响；而航母始终位于地球表面，向正南方向航行，在地转偏向力的作用下会向西发生一段偏移，因此必然会引起误差。同时，在导弹离开地面后，航母仍随地球自转而运动，而导弹不随地球自转，又会造成一个较小的误差。

## 6.2 命中率分析

考虑到控制系统调节导弹的过程不可能是瞬时完成的，作用在导弹上的外力随控制系统的调节不可能瞬间变化，总会有延迟的存在。为了研究这一短暂过程对导弹打击目标的影响，设中段的第一过程向第二过程变换时有一个  $\Delta t_0$  的延迟

时间。时间延迟越短，目标位置的不确定性就越小，命中概率相应的就越高。<sup>[4]</sup>

而为了将问题简化，仍然假设中段结束时速度方向为水平的。由于中段第一过程末尾作用力变化延迟，第一过程的时间增加，因此竖直方向速度相比“改进模型”中增大；若要保持中段第二过程结束时竖直速度为0，就需要让第二过程多持续一小段时间，设这段时间为 $\Delta t_1$ 。

中段的第一过程：

$$\begin{aligned} L_1 &= v_{3h} (t_{\text{前}} + \Delta t_0) \\ h_{\text{上}} &= \frac{1}{2} (a_{1h} + g) (t_{\text{前}} + \Delta t_0)^2 \\ v_{\text{中}} &= (a_{1h} + g) (t_{\text{前}} + \Delta t_0) \end{aligned}$$

中段的第二过程：

$$\begin{aligned} L_2 &= v_{3h} (t_{\text{后}} + \Delta t_1) \\ 0 - v_{\text{中}}^2 &= -2(a_{1h} + g)h_{\text{下}} \\ 0 &= v_{\text{中}} - (a_{1h} - g) (t_{\text{后}} + \Delta t_1) \end{aligned}$$

由上式可得： $\Delta t_1 = 1235\Delta t_0$ ；

由于 $\Delta t_0$ 、 $\Delta t_1$ 的影响，中段水平方向相比“改进模型”多移动的距离：

$$\Delta x_1 = v_{3h}\Delta t_0 + v_{3h}\Delta t_1$$

中段竖直方向相比“改进模型”多下降的距离：

$$\Delta y = h_{\text{上}} + h_{\text{下}}$$

末段在竖直方向上少下降 $\Delta y$ ，从而使末段水平方向少运动 $\Delta x_2$ ：

$$\begin{aligned} \Delta x_2 &= v_{3h}\Delta t \\ \Delta t &= \sqrt{\frac{2\Delta y}{g}} \end{aligned}$$

则因为 $\Delta t_0$ 、 $\Delta t_1$ 的影响使得水平方向总位移多了 $\Delta x$ ：

$$\Delta x = \Delta x_1 - \Delta x_2$$

代入相应数值得： $\Delta x = 122084\Delta t_0 - 2305212\sqrt{\Delta t_0}$ 。

因为航母的舰长为335m，半舰长为167.5m，所以当取一个 $\Delta t_0$ ，从而计算出距离范围 $\Delta x$ ，如果 $|\Delta x| \leq 167.5\text{m}$ ，则导弹会击中航母；如果 $|\Delta x| > 167.5\text{m}$ ，

则导弹不会击中航母。

假设  $0.033s \leq \Delta t_0 \leq 0.039s$ ，在 Excel 中生成 1000 个位于 0.033 到 0.039 间的随机测试数，利用公式  $\Delta x = 122084 \Delta t_0 - 23052412 \sqrt{\Delta t_0}$  计算出相应的  $\Delta x$ ，统计  $|\Delta x| \leq 167.5m$  和  $|\Delta x| > 167.5m$  的个数得前者个数为 907，后者个数为 93，从而得出测试实验的命中率为 90.7%。

## 参考文献：

- [1].刘彦伟, 张绍武, 赵慧波, 潘, 泉. IMMEKF 的弹道导弹轨道实时动态预测[J]. 火力与指挥控制, 2012, 37(3): 27-29
- [2].李永明. 导弹半实物仿真系统误差分析[D]. 中国 西安:李永明, 2006. 65-67
- [3].张耐民, 李赣湘, 严佳民, 虢荣华. 误差分离技术及其在导弹精度分析中的应用[J]. 导弹与航天运载技术, 2005, (6): 29-30
- [4].任义广. 信息质量对反舰导弹作战效果影响的 分析方法研究[D]. 湖南:任义广, 2007. 10-13

## 附录：

1.软件名称：eclipse、MATLAB 7.0、SPSS 22.0、Excel

2.源代码及数据：

- (1) convert.java: 经纬度转换 (X 度 X 分 X 秒  $\rightarrow$  X.Y 度)。(java 源码)
- (2) DistanceAndBearing.java: 计算地球表面两点间的距离和角度。(java 源码)
- (3) 三维散点.xlsx: 绘制三维散点图的源数据。(通过函数获得)
- (4) 命中率测试.xlsx: 测试命中率的源数据。(通过函数获得)
- (5) MATLAB7.0 中分段曲线生成代码。