[PDF完整阅读]

# 背景

为了减少用非线性潮流模型进行电力系统分析的计算量，提出了线性潮流模型。利用线性规划问题良好的计算性能，可以有效地求解具有线性潮流模型的OPF问题并保证收敛性。直流潮流模型作为线性潮流模型的代表，在电力系统运行中得到了广泛的应用，该模型关注P和θ，忽略Q和v。随着电力系统中电力需求和电子设备的增加，P和Q之间的耦合越来越强。在保持直流潮流模型线性化的基础上，提出了许多包含Q和v的方法。

# 现有的线性化方法

- DC潮流模型

假设$v \approx 1$，忽略支路电阻、并联元件和无功功率，直流潮流公式如下：

$$P_{ij} = \frac{\theta_{ij}}{x_{ij}} \tag{1}$$

直流潮流模型证明了电力系统中$P-\theta$的拟线性关系，并提供了$P$和$\theta$的令人满意的近似。它广泛应用于电力系统规划、调度和市场清算。提高直流潮流模型精度的方法可分为热启动模型和冷启动模型。对于热启动直流潮流模型，初始点用于分散系统内的损耗，并根据工作点对系数进行修正。对于冷启动直流潮流模型，通常根据系统的经验知识或迭代解来估计损耗。

- 以$v$为变量的线性潮流模型

以$v$和$\theta$为自变量的线性潮流模型。基于潮流方程中非线性项的一阶泰勒级数展开，得到无损耗线性潮流模型：

$$P_{ij} = g_{ij}(v_i - v_j) - b_{ij}\theta_{ij} \tag{2}$$

$$Q_{ij} = -b_{ij}(v_i - v_j) - g_{ij}\theta_{ij} \tag{3}$$

损耗以$f(\theta^2)$表示，并加在(2)和(3)的右侧。

- 以$v^2$为变量的线性潮流模型

通过对非线性电压幅值项进行一阶泰勒级数展开和数学变换，将$v^2$作为自变量。无损耗线性潮流模型如下所示：

$$P_{ij} = g_{ij}\frac{v_i^2 - v_j^2}{2} - b_{ij}\theta ij \tag{4}$$

$$Q_{ij} = -b_{ij}\frac{v_i^2 - v_j^2}{2} - g_{ij}\theta_{ij} \tag{5}$$

损耗以$f(f, \theta^2)$表示。

- 以$v^2$和$v^2\theta$为自变量的线性潮流模型

$$P_{ij} = 0.95[g_{ij}(v_i^2 - v_j^2) - b_{ij}(v_i^2\theta i - v_j^2\theta_j)] \tag{6}$$

$$Q_{ij} = 0.95[-b_{ij}(v_i^2 - v_j^2) - g_{ij}(v_i^2\theta i - v_j^2\theta_j)] \tag{7}$$

其中，启发式地添加标量0.95以减少线性化误差。

- 其余线性化方法见参考文献

**在现有研究中，线性潮流模型的推到依赖于经验数学近似来提高建模精度。**

# The General Linear Power Flow Model

非线性潮流公式：

$$P_{ij}(V, \theta_{ij}) = g_{ij}(v_i^2 - v_i v_j \mathrm{cos}\theta_{ij}) - b_{ij}v_i v_j \mathrm{sin}\theta_{ij} \tag{8}$$

$$Q_{ij}(V, \theta_{ij}) = -b_{ij}(v_i^2 - v_i v_j \mathrm{cos}\theta_{ij}) - g_{ij}v_i v_j \mathrm{sin}\theta_{ij} \tag{9}$$

其中，$P_{ij}$和$Q_{ij}$分别代表支路$(i, j)$上的有功潮流和无功潮流。状态变量$v$和$\theta_{ij}$是紧密耦合的。由于电压相角差决定潮流分布，使用$\theta_{ij}$代替$\theta_i$作为潮流模型的状态变量。采用极坐标潮流模型，充分利用了输电系统中$P$与$\theta_{ij}$之间的准线性关系。现有的输电网线性潮流模型大多采用极坐标公式推导。该方法的基本思想不局限于极坐标公式，可应用于潮流模型的其他公式。

对于线性潮流模型，一阶泰勒技术展开式线性化非线性项的基本方法，因为切平面是对非线性曲面变化趋势的预期预测。

使用了自变量的一般公式：$\varphi(v)$表示与$v$相关的自变量，$\phi(\theta_{ij})$表示与$\theta_{ij}$相关的自变量。假设函数$\varphi$和$\phi$是单调的，即$v = \varphi^{-1}[\varphi(v)]$、$\theta_{ij} = \phi^{-1}[\phi(\theta_{ij})]$。因此，潮流公式可写为：

$$P_{ij}^{\varphi,\phi}(\varphi(v), \phi(\theta_{ij})) = P_{ij}(\varphi^{-1}[\varphi(v)], \phi^{-1}[\phi(\theta_{ij})]) \tag{10}$$

$$Q_{ij}^{\varphi,\phi}(\varphi(v), \phi(\theta_{ij})) = Q_{ij}(\varphi^{-1}[\varphi(v)], \phi^{-1}[\phi(\theta_{ij})]) \tag{11}$$

潮流公式$(P_{ij}^{\varphi,\phi}, Q_{ij}^{\varphi,\phi})$是潮流模型$(P_{ij}, Q_{ij})$从变量空间$(v, \theta_{ij})$到空间$(\varphi(v), \phi(\theta_{ij}))$的投影。**虽然不能通过变量空间变换使潮流模型线性化，但适当的变量空间变换可以减小潮流模型的非线性。**通过对变量空间进行适当的变换，可以将一部分潮流方程的非线性体现在自变量的表述中，从而减小潮流模型的线性化误差。

在不失一般性的前提下，导出了以$(v_0, \theta_{ij,0})$为初始点的线性潮流模型。冷启动的线性潮流模型选择$v_0 = 1.0\mathrm{p.u.}, \theta_{ij,0} = 0$。

**推导过程**：

$$P_{ij}=g_{ij}v_i^2+P_{ij}^* \tag{12}$$

$$P_{ij}^*=-g_{ij}v_iv_j\cos\theta_{ij}-b_{ij}v_iv_j\sin\theta_{ij} \tag{13}$$

以$v_iv_j$和$\theta_{ij}$为变量的$P_{ij}^*$的一阶泰勒展开式如下:

$$P_{ij}^*-P_{ij,0}^*\approx\alpha_{ij}^P(v_iv_j-v_{i,0}v_{j,0})+\beta_{ij}^P(\theta_{ij}-\theta_{ij,0}) \tag{14}$$

$$\alpha_{ij}^P=\frac{\partial P_{ij}^*}{\partial v_iv_j}\bigg|_{\substack{v=v_0\\ \theta=\theta_{ij,0}}}=-g_{ij}\cos\theta_{ij,0}-b_{ij}\sin\theta_{ij,0} \tag{15}$$

$$\beta_{ij}^P=\frac{\partial P_{ij}^*}{\partial\theta_{ij}}\bigg|_{\substack{v=v_0\\ \theta=\theta_{ij,0}}}=v_{i,0}v_{j,0}(g_{ij}\sin\theta_{ij,0}-b_{ij}\cos\theta_{ij,0}) \tag{16}$$

根据(13)和(15)得

$$P_{ij,0}^*=v_{i,0}v_{j,0}\alpha_{ij}^P \tag{17}$$

以$\varphi(v)$为变量，$v_iv_j$的一阶泰勒级数展开式如下:

$$v_iv_j-v_{i,0}v_{j,0}\approx\frac{\partial v_iv_j}{\partial\varphi(v_i)}\bigg|_{v=v_0}[\varphi(v_i)-\varphi(v_i,0)]+\frac{\partial v_iv_j}{\partial\varphi(v_j)}\bigg|_{v=v_0}[\varphi(v_j)-\varphi(v_j,0)] \tag{18}$$

以$\phi(\theta_{ij})$为变量，$\theta_{ij}$的一阶泰勒级数展开式如下:

$$\theta_{ij}-\theta_{ij,0}\approx\frac{\partial\theta_{ij}}{\partial\phi(\theta_{ij})}\bigg|_{\theta=\theta_{ij,0}}[\phi(\theta_{ij})-\phi(\theta_{ij,0})] \tag{19}$$

现有的线性潮流模型之间的差异来自于(18)和(19)通过选择不同的自变量而产生的不同表述。根据(14)、(18)和(19)可得，

$$P_{ij}^*\approx\alpha_{ij}^P\left[v_{i,0}v_{j,0}+\frac{\partial v_iv_j}{\partial\varphi(v_i)}\bigg|_{v=v_0}[\varphi(v_i)-\varphi(v_i,0)]+\frac{\partial v_iv_j}{\partial\varphi(v_j)}\bigg|_{v=v_0}[\varphi(v_j)-\varphi(v_j,0)]\right]+\beta_{ij}^P\frac{\partial\theta_{ij}}{\partial\phi(\theta_{ij})}\bigg|_{\theta=\theta_{ij,0}}[\phi(\theta_{ij})-\phi(\theta_{ij,0})]\overset{define}{=}P_{ij,L}^*$$

对于(12)中的$g_{ij}v_i^2$，使用$\varphi(v)$作为变量对$v_i^2$进行线性化:

$$v_i^2\approx v_{i,0}^2+2v_{i,0}\frac{\partial v}{\partial\varphi(v)}\bigg|_{v=v_0}[\varphi(v_i)-\varphi(v_{i,0})]\overset{define}{=}v_{i,L}^s \tag{21}$$

根据(12)、(20)和(21)可得有功线性潮流，

$$P_{ij,L}=g_{ij}v_{i,L}^s+P_{ij,L}^* \tag{22}$$

类似地，对于无功线性潮流:

$$Q_{ij,L}=-b_{ij}v_{i,L}^s+Q_{ij,L}^s \tag{23}$$

$Q_{ij,L}^*$可以通过替换(20)中的$\alpha_{ij}^P$和$\beta_{ij}^P$为$\alpha_{ij}^Q$和$\beta_{ij}^Q$得到:

$$\alpha_{ij}^Q=\frac{\partial P_{ij}^*}{\partial v_iv_j}\bigg|_{\substack{v=v_0\\ \theta=\theta_{ij,0}}}=b_{ij}\cos\theta_{ij,0}-g_{ij}\sin\theta_{ij,0} \tag{24}$$

$$\beta_{ij}^Q=\frac{\partial P_{ij}^*}{\partial\theta_{ij}}\bigg|_{\substack{v=v_0\\ \theta=\theta_{ij,0}}}=v_{i,0}v_{j,0}(-b_{ij}\sin\theta_{ij,0}-g_{ij}\cos\theta_{ij,0}) \tag{25}$$

现有潮流模型与(20)、(23)的关系:

假设$\varphi(v)=v^k(k>0)$、$\phi(\theta_{ij})=\theta_{ij}$，可推导出

$$\frac{\partial v_iv_j}{\partial\varphi(v_i)}=\frac{\partial v_iv_j}{\partial v_i^k}=\frac{v_j}{kv_i^{k-1}} \tag{26}$$

$$\frac{\partial\theta_{ij}}{\partial\phi(\theta_{ij})}=\frac{\partial\theta_{ij}}{\partial\theta_{ij}}=1 \tag{27}$$

根据(20)、(26)和(27)可得，

$$P_{ij,L}^*=\alpha_{ij}^P\left[\frac{v_{j,0}}{kv_{i,0}^{k-1}}v_i^k+\frac{v_{i,0}}{kv_{j,0}^{k-1}}v_j^k+\left(1-\frac{2}{k}\right)v_{i,0}v_{j,0}\right]+\beta_{ij}^P(\theta_{ij}-\theta_{ij,0}) \tag{28}$$

对于冷启动的线性潮流模型，根据(15)和(16)可得，

$$\alpha_{ij}^P=-g_{ij},\qquad\beta_{ij}^P=-b_{ij} \tag{29}$$

因此，(28)可以变为，

$$P_{ij,L}^*=\alpha_{ij}^P\left[\frac{1}{k}v_i^k+\frac{1}{k}v_j^k+\left(1-\frac{2}{k}\right)\right]-b_{ij}\theta_{ij} \tag{30}$$

(21)变为，

$$v_{i,L}^s=1+\frac{2}{k}(v_i^k-1) \tag{31}$$

根据(22)、(30)和(31)可得，

$$P_{ij,L} = g_{ij}\frac{(v_i^k - v_j^k)}{k} - b_{ij}\theta_{ij} \tag{32}$$

类似地，线性无功潮流模型为：

$$Q_{ij,L} = -b_{ij}\frac{(v_i^k - v_j^k)}{k} - g_{ij}\theta_{ij} \tag{33}$$

假设选择$\varphi(v) = \mathrm{ln}v$、$\phi(\theta_{ij}) = \theta_{ij}$，即

$$P_{ij,L} = g_{ij}(\mathrm{ln}v_i - \mathrm{ln}v_j) - b_{ij}\theta_{ij} \tag{34}$$

$$Q_{ij,L} = -b_{ij}(\mathrm{ln}v_i - \mathrm{ln}v_j) - g_{ij}\theta_{ij} \tag{35}$$

# 算例结论

$k = 2$时，误差最小。证明见文献。

# 参考文献

Z. Yang, K. Xie, J. Yu, H. Zhong, N. Zhang and Q. Xia, "A General Formulation of Linear Power Flow Models: Basic Theory and Error Analysis," in IEEE Transactions on Power Systems, vol. 34, no. 2, pp. 1315-1324, March 2019, doi: 10.1109/TPWRS.2018.2871182. keywords: {Mathematical model;Biological system modeling;Load flow;Analytical models;Taylor series;Reactive power;DC power flow;independent variable;linear power flow model;Taylor series expansion},